

# Projeto Integrador em Engenharia Mecânica II

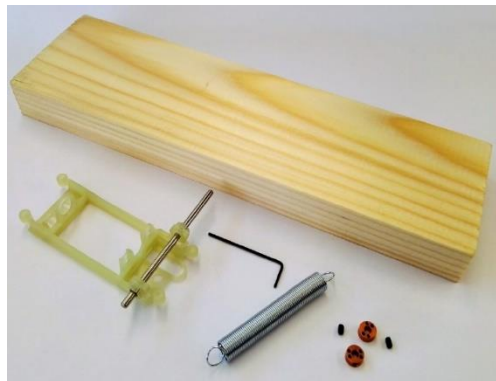
## Dinâmica do Carro

<https://youtu.be/y8lofCcy9CU>

# 1. Introdução



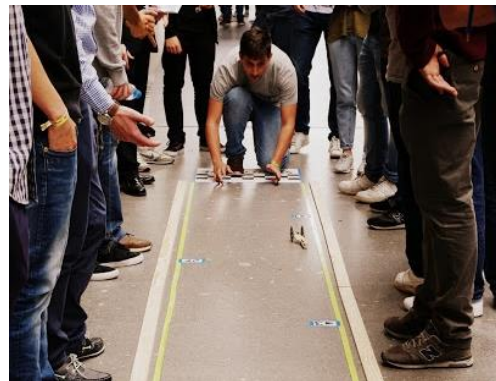
Neste vídeo estuda-se a dinâmica do carro, no âmbito do projeto “só acelera”, no qual cada grupo de trabalho deve conceber, desenvolver e construir um *carro do tipo dragster* para percorrer uma distância de 5 metros.



Kit básico



Carro sem carroçaria

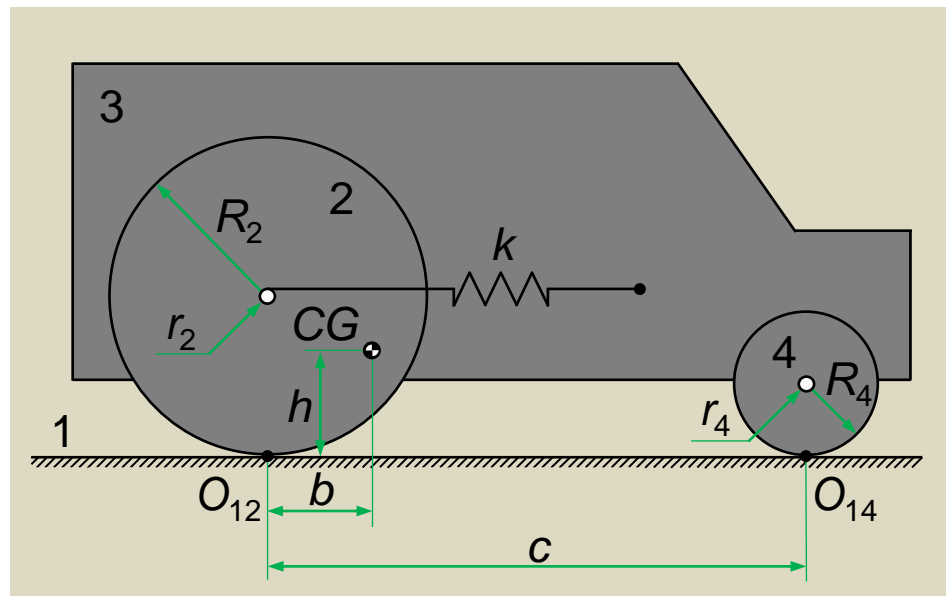


Competição

# 1. Introdução

Na figura abaixo mostra-se a representação genérica do **carro** utilizado na **análise dinâmica** aqui apresentada.

- ✓ Duas **rodas traseiras** (2),
- ✓ Uma **roda dianteira** (4),
- ✓ Um **chassis** (3),
- ✓ Uma **mola** ( $k$ ),
- ✓ Solo (1).



Representação do carro estudado

# 1. Introdução



Para uma melhor compreensão do carro aqui estudado, há um conjunto de **aspetos** e **caraterísticas** que deve ser tido em consideração, nomeadamente:

- ✓ O carro descreve o seu **movimento retilíneo** num plano horizontal liso, percorrendo uma distância total de **10 m**,
- ✓ O carro é acionado por uma **mola helicoidal de tração**, a qual é esticada pelo enrolamento de um fio inextensível ligado ao eixo traseiro,

# 1. Introdução



- ✓ A **mola** está posicionada **horizontalmente** dentro do chassis do carro,
- ✓ A mola tem uma **rigidez** igual a **190 N/m**, e não se considera a existência de pré-tensão da mola,
- ✓ A **deformação máxima** da mola é de **100 mm**,
- ✓ Os pontos de contacto entre as rodas e o solo,  $O_{12}$  e  $O_{14}$ , são **centros instantâneos de rotação**, uma vez que se considera que aquelas **rodam sem escorregar**,

# 1. Introdução



- ✓ A **massa do carro**, incluindo todos os seus componentes (chassis, rodas traseiras e dianteira, mola, etc.) é de **100 g**,
- ✓ As **rodas traseiras** têm **50 mm** de raio,  $R_2$ , sendo estas as rodas motrizes ou motoras do sistema,
- ✓ A **roda dianteira** tem **25 mm** de raio,  $R_4$ , sendo esta uma roda movida,
- ✓ O raio do **eixo traseiro** é igual a **1 mm**,  $r_2 = 1 \text{ mm}$ ,

# 1. Introdução



- ✓ O **centro de gravidade** ou de massa do carro está localizado a **40 mm de altura** do solo e **40 mm à frente** do eixo traseiro,  $h = b = 40$  mm,
- ✓ A **distância entre os eixos** traseiro e dianteiro é igual a **180 mm**,  $c = 180$  mm,
- ✓ A **largura** do carro é igual a **70 mm**,
- ✓ Não se considera a existência de qualquer sistema de acionamento externo.

## 2. Aceleração Máxima

Cálculo da **aceleração máxima do carro** sem que haja escorregamento nas rodas motoras, isto é, traseiras.

A **força de atrito traseira**, que inclui o efeito das duas rodas traseiras, é a ação responsável pelo movimento do carro. Atente-se ao **sentido** de atuação desta **força de atrito**.

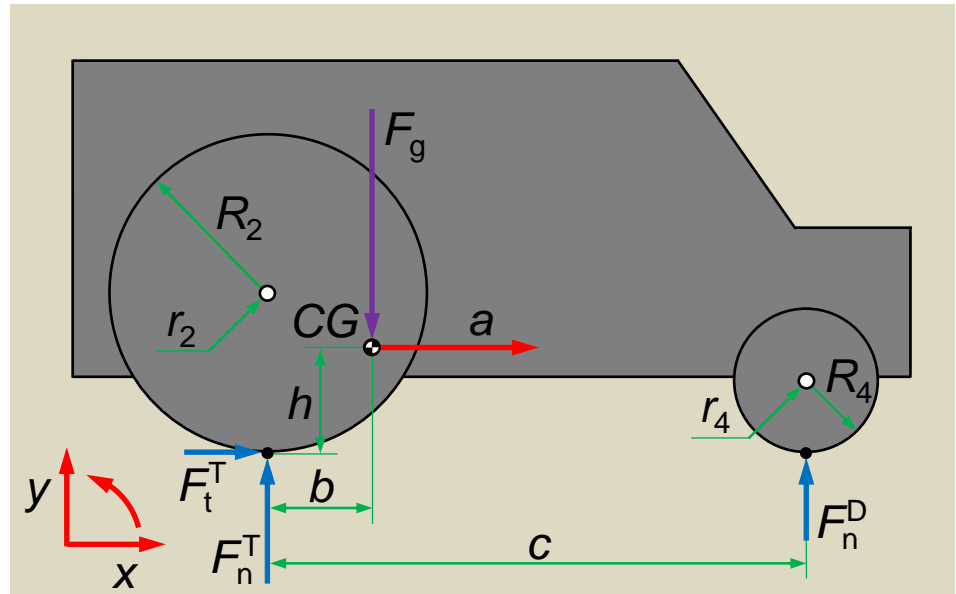


Diagrama de corpo livre simplificado



## 2. Aceleração Máxima



Na presente abordagem, considera-se que o carro é constituído apenas por **um único corpo**, que concentra toda a massa do sistema (chassis, rodas, etc.), pelo que o **diagrama de corpo livre** é simplificado sobremaneira.

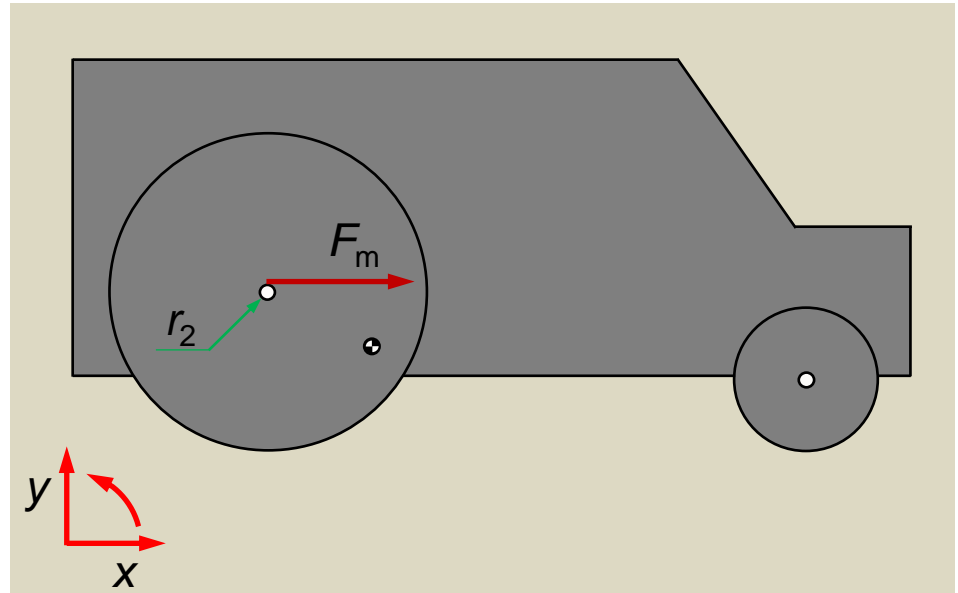
Na representação do diagrama de corpo livre exposta anteriormente, considera-se que **não existe atrito na roda dianteira**, o que corresponde à situação ideal em termos de desempenho do carro.

## 2. Aceleração Máxima

O **momento motor** que se desenvolve no eixo traseiro devido à **ação da mola** é dado por

$$M_m = F_m r_2$$

em que  $F_m$  representa a **força exercida pela mola**, e  $r_2$  é o **raio do eixo** das rodas traseiras, tal como se mostra na figura do lado.



Força exercida pela mola no eixo traseiro

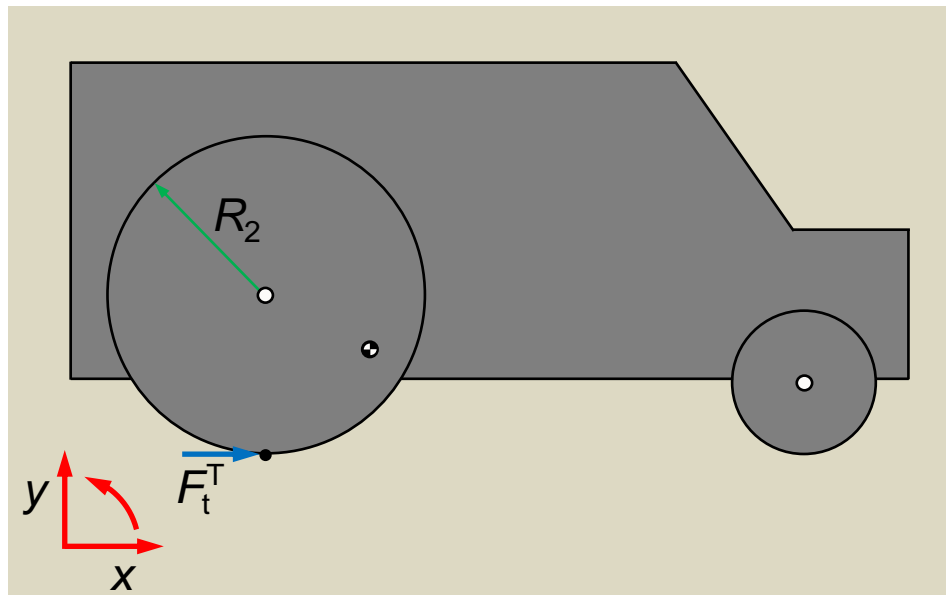
## 2. Aceleração Máxima



O **momento** desenvolvido pela **força de atrito** nas rodas traseiras é dado por

$$M_t = F_t^T R_2$$

em que  $F_t^T$  é a **força de atrito** atuante nas rodas traseiras, e que é responsável pelo acelerar do carro, e  $R_2$  é o **raio das rodas** traseiras.



Força de atrito atuante nas rodas traseiras

## 2. Aceleração Máxima



O **momento motor** é tanto maior quanto maior for a força desenvolvida na mola. Este momento aumenta com o **aumento do raio** do eixo traseiro.

O momento realizado pela força de atrito é tanto maior quanto **maior for o atrito** entre as rodas e o solo.

Se o **momento motor** for **maior** que o **momento da força** de atrito, significa que há escorregamento das rodas motoras.

## 2. Aceleração Máxima



O limite de capacidade de transmissão de potência corresponde à **igualdade** entre o **momento motor** da mola e o **momento de tração** de atrito.

Se **não existir atrito** suficiente entre as rodas e o solo, as **rodas patinam**.

A **força de atrito** é a força responsável pela aceleração do carro, sendo esta denominada **força de tração**.

## 2. Aceleração Máxima



Aplicando as leis do movimento de translação e de rotação ao diagrama de corpo livre do carro resulta que

$$\sum F_x = ma \Rightarrow F_t^T = ma$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_n^T + F_n^D - F_g = 0$$

$$\sum M_{CG} = 0$$

$$\Rightarrow -F_n^T b + F_n^D (c - b) + F_t^T h = 0$$

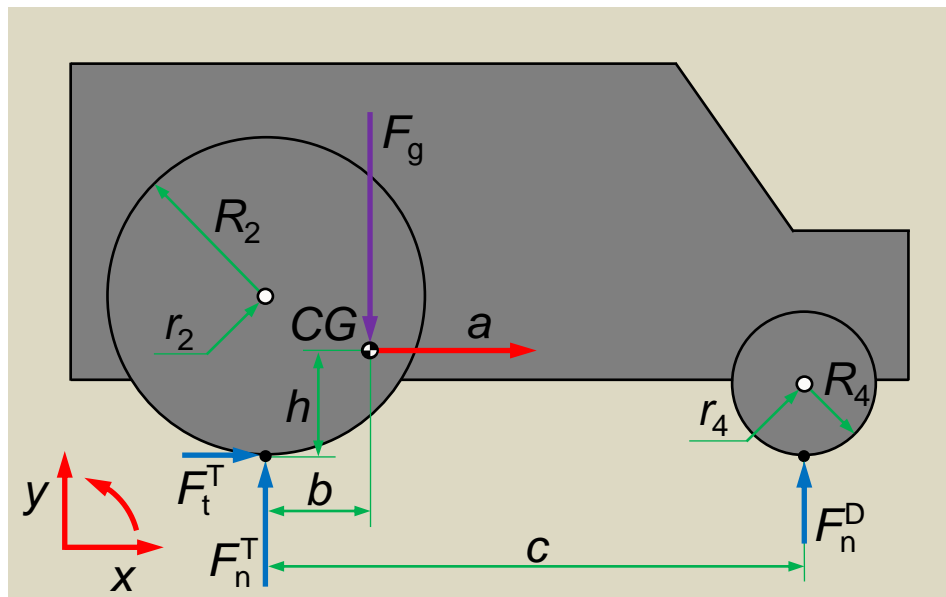


Diagrama de corpo livre simplificado

## 2. Aceleração Máxima



A equação relativa à direção  $y$  pode ser reescrita como

$$F_n^D = F_g - F_n^T$$

Substituindo esta equação na de momentos resulta que

$$F_n^T c - F_t^T h = F_g (c - b)$$

Considerando a **lei de atrito de Coulomb** sabe-se que

$$F_t^T = \mu F_n^T$$

em que  $\mu$  é o coeficiente de atrito entre as rodas e o solo.

## 2. Aceleração Máxima



Combinando as **três equações anteriores**, juntamente com a equação do movimento na direção  $x$ , obtém-se a seguinte expressão para a **aceleração do carro**

$$a = \frac{\mu g (c - b)}{c - \mu h}$$

Esta equação permite calcular a **aceleração máxima** do carro quando as rodas traseiras, *i.e.* motoras, descrevem **rolamento puro**.



## 2. Aceleração Máxima



Considerando os **dados apresentados** anteriormente, e tendo em conta que o valor do **coeficiente de atrito** estático entre as rodas e o solo é igual a **1**, resulta a seguinte **aceleração máxima** do carro

$$a_{\text{máx}} = \frac{1 \times 9,81 \times (180 - 40)}{180 - 1 \times 40} \Rightarrow a_{\text{máx}} = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Deve notar-se que a aceleração máxima que pode ser conferida ao carro é igual à aceleração da gravidade.

## 2. Aceleração Máxima



As **três equações do movimento** de translação e de rotação do carro anteriormente apresentadas podem ser resolvidas para a **força de reação normal traseira**, resultando em

$$F_n^T = F_g \frac{c-b}{c} + \frac{mah}{c}$$

onde a primeira parcela do segundo membro é a **carga estática** e a segunda diz respeito à **transferência de carga dinâmica** devido à aceleração do carro.

## 2. Aceleração Máxima



De modo análogo ao apresentado anteriormente, pode obter-se uma expressão para a **força de reação normal dianteira**, ou seja

$$F_n^D = F_g \frac{b}{c} - \frac{mah}{c}$$

onde a primeira parcela do segundo membro representa a **carga estática** e a segunda diz respeito à **transferência de carga dinâmica**.

## 2. Aceleração Máxima



Da análise do que acaba de ser exposto, observa-se que a **roda dianteira pode perder o contacto** com o solo, se o centro de gravidade do carro for demasiado alto, se estiver demasiado atrás, ou uma combinação destes dois fatores.

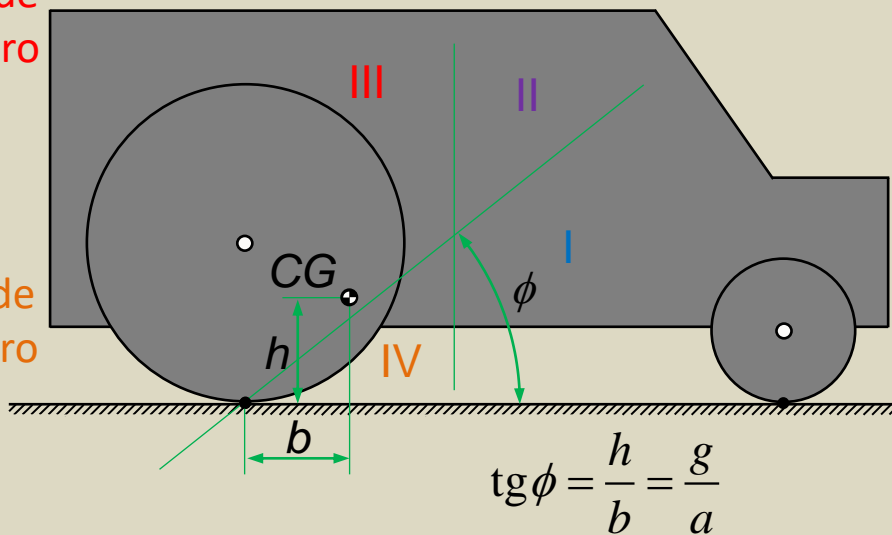
A perda de contacto da roda dianteira com o solo pode trazer dificuldades de **direccionalidade** no movimento do carro. Este é, sem dúvida, um dos aspetos a ter em consideração no desenvolvimento e **construção do carro**.

## 2. Aceleração Máxima

A figura abaixo mostra quatro zonas distintas, no que à **posição do centro de gravidade** do carro diz respeito.

**III.** A roda dianteira tende a levantar quando o carro está parado e em aceleração.

**IV.** A roda dianteira tende a levantar quando o carro está parado, mas é estável quando o carro está em aceleração.



**II.** O carro é estável quando parado, mas a roda dianteira tende a levantar quando o carro está em aceleração.

**I.** A roda dianteira não levanta, isto é, não perde o contacto com o solo.

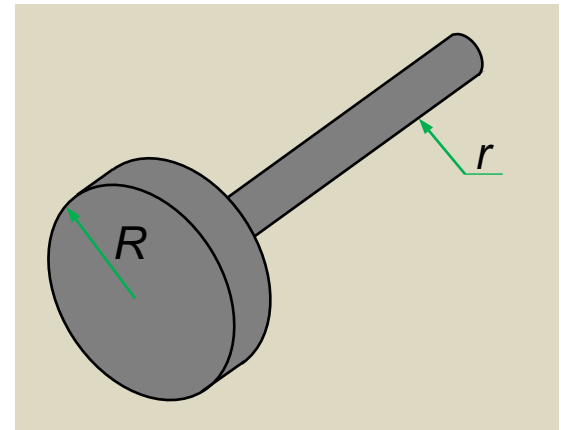
Zonas características da posição do centro de gravidade do carro

# 3. Deformação da Mola-Desl. Carro



De seguida apresenta-se uma metodologia que permite relacionar a **deformação da mola**, que aciona o carro, e o **deslocamento do carro**.

Para o efeito, utiliza-se um sistema de **transmissão do tipo roda-eixo**, tal como o que se mostra na figura do lado, onde  $R$  representa o **raio da roda** e  $r$  denota o raio do eixo.



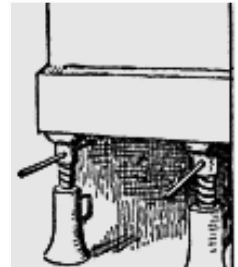
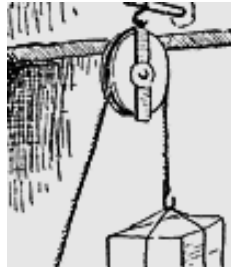
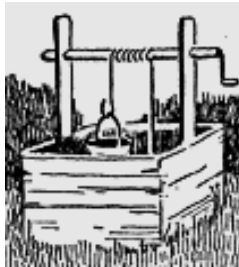
Sistema roda-eixo

# 3. Deformação da Mola-Desl. Carro



O sistema roda-eixo serve para **umentar** ou **diminuir** a **força** ou **velocidade** em transmissões mecânicas.

O sistema roda-eixo é uma das seis máquinas simples da Antiguidade: a **alavanca**, a **roda-eixo** ou manivela, a **polia** ou roldana, o **plano inclinado**, a **cunha** e o **parafuso**.



Representações relativas às seis máquinas simples existentes na Antiguidade

# 3. Deformação da Mola-Desl. Carro



Do funcionamento de sistema roda-eixo sabe-se que a **potência na roda** é igual à **potência no eixo**, pelo que se pode escrever a seguinte relação

$$\frac{M_{\text{roda}}}{M_{\text{eixo}}} = \frac{F_{\text{roda}} R}{F_{\text{eixo}} r} \Rightarrow \frac{F_{\text{eixo}}}{F_{\text{roda}}} = \frac{R}{r}$$

Esta equação representa a **vantagem mecânica** do sistema roda-eixo, que é o quociente entre a força de saída, ou produzida, e a força de **entrada**, ou aplicada.



# 3. Deformação da Mola-Desl. Carro



No sistema roda-eixo, a **vantagem mecânica** é tanto maior quanto **menor for o raio do eixo**, por isso é que os eixos são muito finos em relação às rodas a que estão associados.

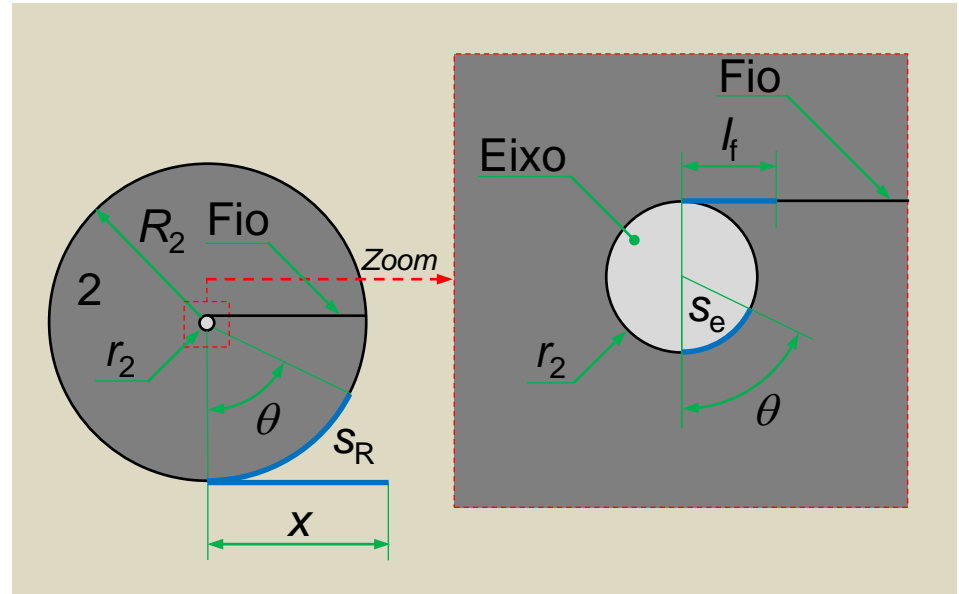
Para **aumentar a vantagem mecânica** do sistema roda-eixo pode aumentar-se o **raio da roda**, contudo, quando se adota esta solução, deve usar-se rodas intermédias.

Não deve confundir-se **vantagem mecânica** com **rendimento**.

# 3. Deformação da Mola-Desl. Carro

A figura abaixo mostra o sistema roda-eixo utilizado para transmitir a energia da mola para as rodas traseiras do carro.

Do funcionamento do sistema eixo-roda verifica-se que a rotação, ou deslocamento angular, é igual na roda e no eixo, pois admite-se que os corpos são perfeitamente rígidos.



Sistema roda-eixo usado no carro

# 3. Deformação da Mola-Desl. Carro

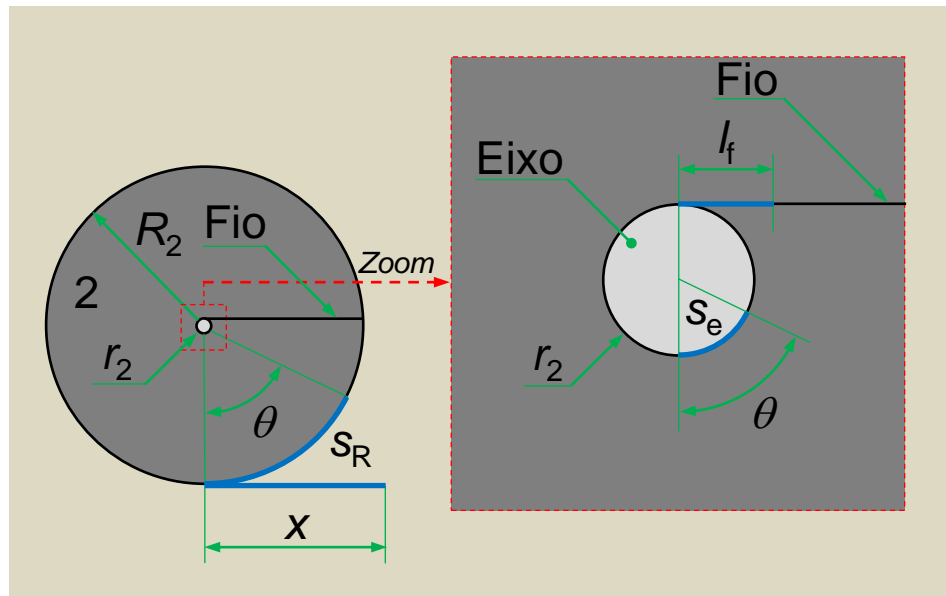


O deslocamento do carro é igual ao comprimento do arco realizado pelas rodas traseiras.

Do conceito de ângulo ao centro verifica-se que

$$x = s_R = R_2 \theta \Rightarrow \theta = \frac{x}{R_2}$$

$$l_f = s_e = r_2 \theta \Rightarrow \theta = \frac{l_f}{r_2}$$



Sistema roda-eixo usado no carro

# 3. Deformação da Mola-Desl. Carro



Atendendo a que amplitude de **rotação das rodas** é igual à amplitude de **rotação do eixo**, então pode combinar-se as duas equações anteriores, resultando que

$$\frac{x}{R_2} = \frac{l_f}{r_2} \Rightarrow l_f = x \frac{r_2}{R_2}$$

onde  $l_f$  é o **desenrolamento do fio** face à deformação da mola,  $x$  é o **deslocamento do carro**,  $r_2$  é o **raio do eixo** e  $R_2$  é o **raio das rodas** traseiras.

# 3. Deformação da Mola-Desl. Carro



Da análise desta equação observa-se que a relação entre a **deformação da mola** ( $\delta = l_f$ ) e o **deslocamento do carro** ( $x$ ) depende da **vantagem mecânica** do sistema roda-eixo.

A **deformação instantânea da mola**, à medida que o fio se vai desenrolando do eixo e o carro vai avançando, é dada por

$$\delta = \delta_{\text{máx}} - x \frac{r_2}{R_2}$$

# 3. Deformação da Mola-Desl. Carro



Dividindo  $\delta_{\text{máx}}$  pelo perímetro do eixo, obtém-se o correspondente **número de voltas de enrolamento do fio**

$$\frac{\delta_{\text{máx}}}{2\pi r_2} = \frac{100}{2\pi \times 1} = 15,916 \text{ voltas}$$

Para 15,916 voltas de desenrolamento do fio, em torno do eixo, **o carro desloca-se**

$$x = 2\pi R_2 \frac{\delta_{\text{máx}}}{2\pi r_2} = \frac{R_2}{r_2} \delta_{\text{máx}} = \frac{50}{1} \times 100 \times 10^{-3} = 5 \text{ m}$$

# 4. Forças Atuantes no Carro

De seguida caracterizam-se as **forças** que atuam no carro e que influenciam o seu desempenho dinâmico, nomeadamente:

- ✓ Força produzida pela **mola**,
  - ✓ Força devido à **resistência do ar**,
  - ✓ Forças causadas pelo **atrito de rolamento**,
  - ✓ Forças devido ao atrito em **chumaceiras**.
- } Força motora
- } Forças dissipativas

# 4. Forças Atuantes no Carro



Na figura abaixo mostra-se uma **mola helicoidal de tração**. Tal como já se referiu anteriormente, uma mola helicoidal de tração produz força, cuja intensidade pode ser calculada utilizando a **lei de Hooke**, ou seja

$$F_m = k\delta$$

em que  $k$  diz respeito à **rigidez**, ou constante da mola, e  $\delta$  representa a **deformação** da mola.



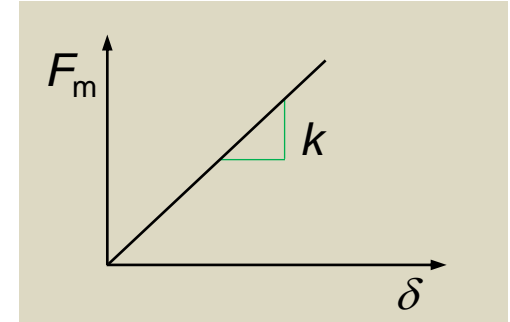
Mola helicoidal de tração



# 4. Forças Atuantes no Carro



As molas helicoidais de tração têm um **comportamento linear**, isto é, a relação entre a força e a deformação é do tipo linear de acordo com a **lei de Hooke**.



O **declive da reta** representa a rigidez ou constante da mola, podendo esta ser obtida experimental ou analiticamente.

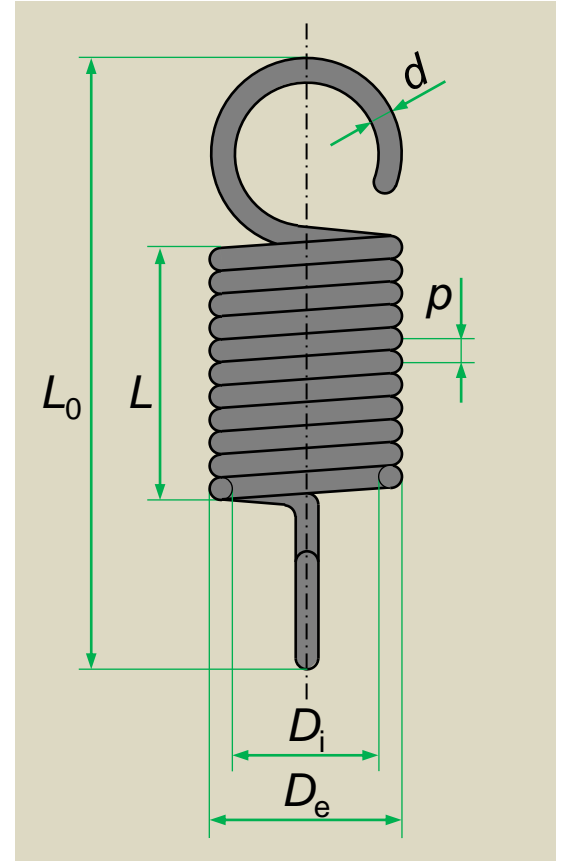


Determinação da rigidez

# 4. Forças Atuantes no Carro

Esta figura mostra as **caraterísticas geométricas** de uma mola helicoidal:

- ✓  $L_0$  – comprimento total da mola,
- ✓  $L$  – comprimento de enrolamento,
- ✓  $D_e$  – diâmetro exterior da mola,
- ✓  $D_i$  – diâmetro interior da mola,
- ✓  $d$  – diâmetro do arame da mola,
- ✓  $p$  – passo da mola.



# 4. Forças Atuantes no Carro



Analiticamente, a **rigidez** de uma mola helicoidal é dada por

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N}$$

onde  $d$  é o **diâmetro do arame**,  $G$  é o **módulo de elasticidade transversal** do material da mola,  $D$  é o **diâmetro médio**, e  $N$  é o **número de espiras ativas**.

O módulo de elasticidade transversal do **aço** comum usado em molas helicoidais é da ordem dos **75-80 GPa**.

# 4. Forças Atuantes no Carro



A **força de arrasto** frontal devido à **resistência do ar** que é exercida sobre o carro é dada por

$$F_a = \frac{1}{2} \rho v^2 A C_f$$

onde  $\rho$  é a **massa específica do ar** [ $\approx 1,16 \text{ kg/m}^3$ ],  $v$  é a **velocidade** relativa entre o carro e o ar,  $A$  denota a **área projetada** segundo a direção do movimento do carro, e  $C_f$  representa o **coeficiente de forma** do carro, vulgo **coeficiente de resistência aerodinâmica**.

# 4. Forças Atuantes no Carro



O **coeficiente de forma** é um parâmetro **adimensional** que representa a **maior ou menor facilidade** com que o ar escoia sobre os objetos, podendo ser determinado numérica ou **experimentalmente**, usando túneis de vento.



Camião,  $C_f=0,9$



Ford T,  $C_f=0,8$



Toyota Prius,  $C_f=0,26$

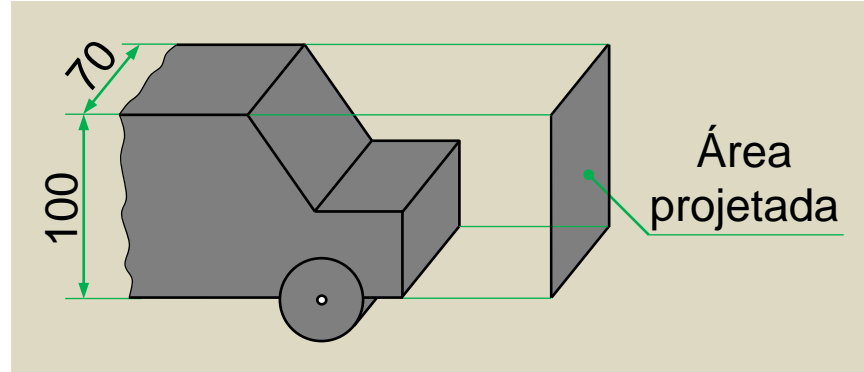
# 4. Forças Atuantes no Carro



Admitindo que o carro tem uma configuração frontal como a da figura abaixo, então a **área projetada** é igual

$$A = 100 \times 10^{-3} \times 70 \times 10^{-3} = 0,007 \text{ m}^2$$

Para geometrias complexas, a área projetada deve ser determinada usando um qualquer **sistema CAD**.



Cálculo da área projetada ou frontal

# 4. Forças Atuantes no Carro



O atrito de deslizamento está associado ao **escorregamento**, ou **tendência para escorregar**, de duas superfícies com grande área de contacto.

Quando **uma pedra de *curling* é lançada sobre o gelo**, havendo movimento da primeira, está-se perante atrito de deslizamento ou escorregamento.



Atrito de deslizamento

# 4. Forças Atuantes no Carro



O **atrito de rolamento** refere-se ao rolar de um corpo sobre outro, em que o contacto é, teoricamente, pontual ou linear.

Se uma **roda rolar** sem escorregar sobre uma superfície, o ponto de contacto é um **centro instantâneo de rotação**, tendo, por isso, velocidade nula.



Atrito de rolamento



# 4. Forças Atuantes no Carro



Pode dizer-se que no **atrito de deslizamento** há movimento entre as superfícies em contacto, ao passo que no **atrito de rolamento** não há movimento no ponto de contacto.



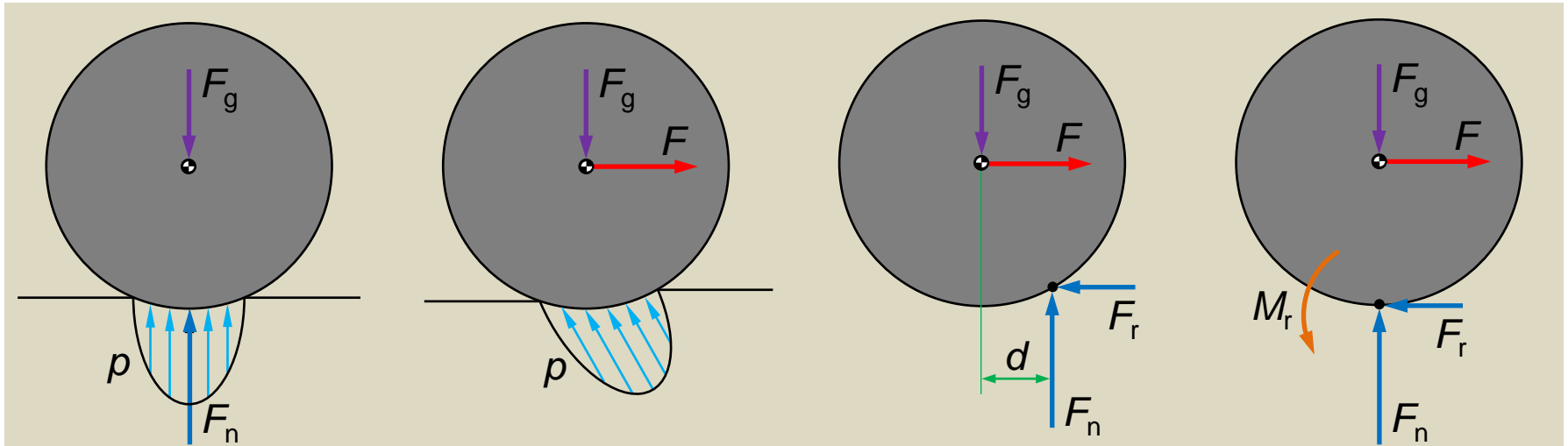
Atrito de deslizamento



Atrito de rolamento

# 4. Forças Atuantes no Carro

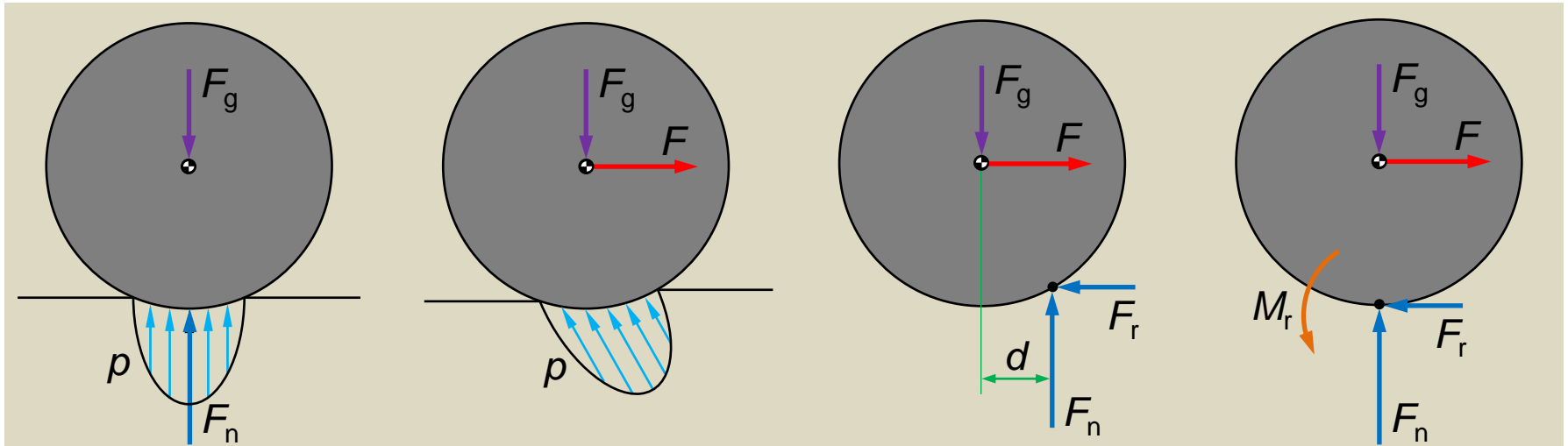
O **atrito de rolamento** acontece quando um corpo rola sobre outro, e.g. um disco que roda no solo. A figura abaixo ilustra diferentes situações de um disco sobre um plano.



Representação do atrito de rolamento de um disco sobre uma superfície plana

# 4. Forças Atuantes no Carro

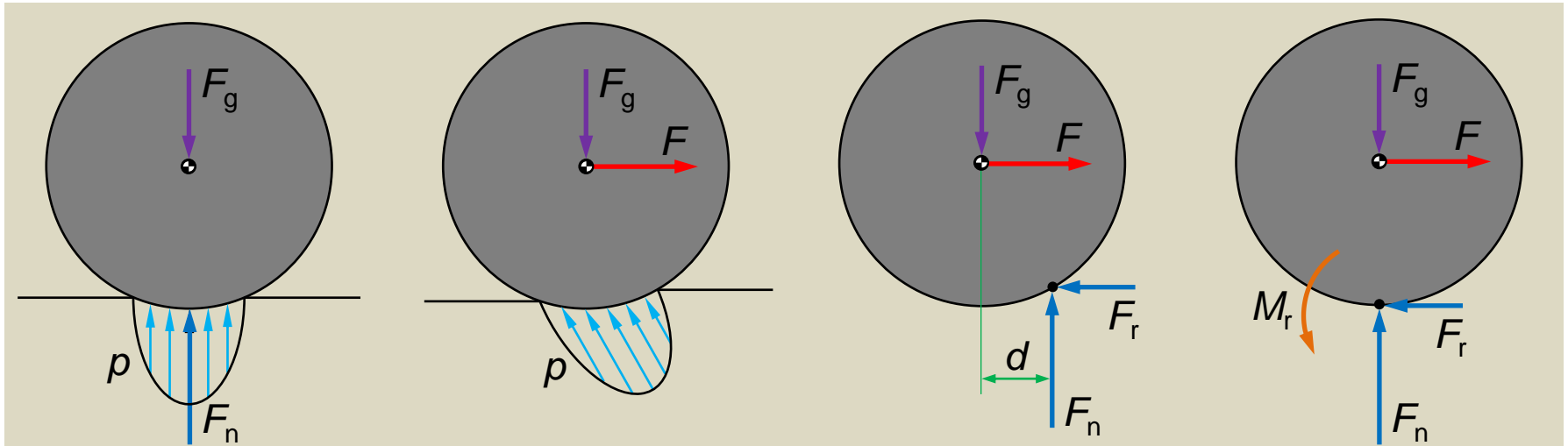
Numa **situação estática**, a pressão de contacto origina uma força de reação normal, que é perpendicular ao solo e está alinhada com a força da gravidade que atua no disco.



Representação do atrito de rolamento de um disco sobre uma superfície plana

# 4. Forças Atuantes no Carro

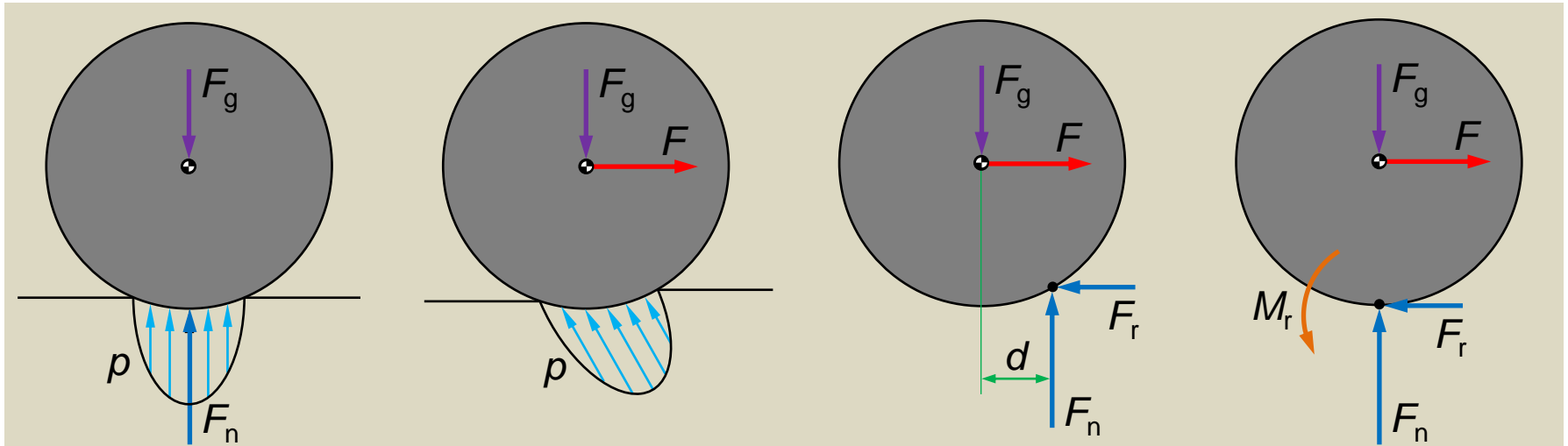
Quando é aplicada uma **força  $F$** , a distribuição de pressões acompanha a deformação disco-plano, deslocando o ponto de aplicação da força de reação normal de uma distância  $d$ .



Representação do atrito de rolamento de um disco sobre uma superfície plana

# 4. Forças Atuantes no Carro

Esta situação corresponde à resistência ao movimento de rolamento puro do disco. Observa-se, pois, a existência de um **momento de atrito de rolamento** dado por  $M_r = F_n d$ .



Representação do atrito de rolamento de um disco sobre uma superfície plana

# 4. Forças Atuantes no Carro



Aumentando a força exterior aplicada ao disco, aumenta-se a distância  $d$  e, concomitantemente, o momento de atrito de rolamento.

Como esta resistência não aumenta indefinidamente, verifica-se que, no limite, o momento resistente máximo é expresso da seguinte forma

$$\left( M_r \right)_{\text{máx}} = F_n d_{\text{máx}}$$

# 4. Forças Atuantes no Carro



O movimento disco-solo inicia-se quando o momento de atrito de rolamento é vencido. Atendendo à definição de coeficiente de atrito de rolamento observa-se que

$$\mu_r = \frac{d_{\text{máx}}}{R}$$

donde decorre que

$$(M_r)_{\text{máx}} = \mu_r F_n R$$

em que  $\mu_r$  é o coeficiente de atrito de rolamento,  $F_n$  é a força de reação normal disco-solo, e  $R$  é o raio do disco.

# 4. Forças Atuantes no Carro



Atendendo ao seguinte **equilíbrio de momentos**

$$(M_r)_{\text{máx}} = \mu_r F_n R = F_r R$$

observa-se que a **força de atrito de rolamento** é dada por

$$F_r = \mu_r F_n$$

O **atrito de rolamento** atua na forma de um **momento**, que se opõe ao rolamento, e cuja resistência está associada à **deformação dos corpos** em jogo, transformando um contacto pontual ou linear num **contacto superficial**.



# 4. Forças Atuantes no Carro

Em geral, a **resistência ao rolamento** é cerca de duas ordens de grandeza inferior ao **atrito de deslizamento** seco. Na tabela abaixo apresentam-se valores do coeficiente de atrito de rolamento para diferentes pares de materiais.

<b>Par de materiais</b>	<b><math>\mu_r</math></b>
Pneu-asfalto	0,020
Pneu de bicicleta-cimento	0,003
Pneu de bicicleta-asfalto	0,002
Pneu de bicicleta-madeira	0,001

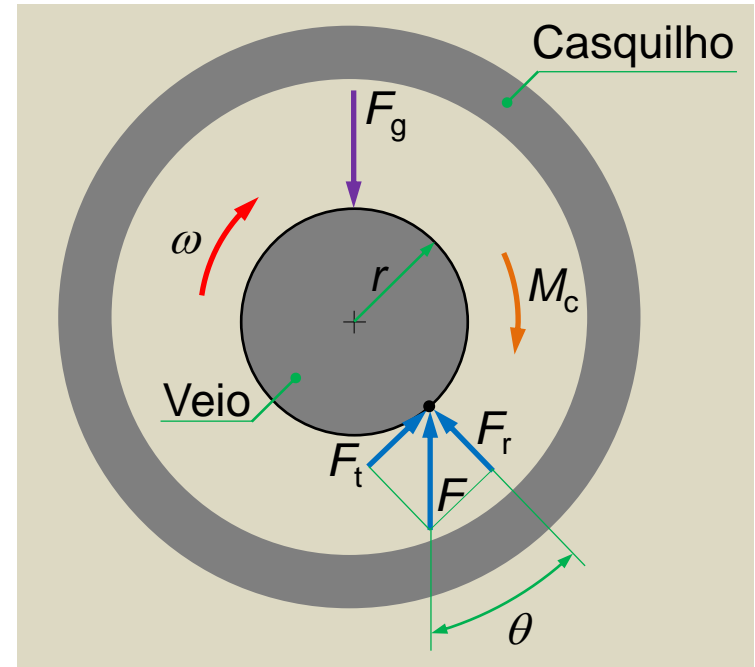
Valores do coeficiente de atrito de rolamento

# 4. Forças Atuantes no Carro

O **atrito em chumaceiras** faz com que exista um momento resistente entre o veio e o casquilho.

Para o caso de **chumaceiras secas**, o momento necessário para vencer o atrito entre as superfícies do **veio** e do **casquilho**, é expresso do seguinte modo

$$M_c = F_t r = F r \sin \theta$$



# 4. Forças Atuantes no Carro



Para valores do ângulo  $\theta$  suficientemente pequenos, pode considerar-se aceitável a seguinte aproximação matemática

$$\text{sen } \theta \approx \text{tg } \theta = \mu_c$$

Este facto decorre da própria definição de coeficiente de atrito. Assim, tem-se que o momento de atrito numa chumaceira é dado pela seguinte expressão

$$M_c = \mu_c F r$$

# 4. Forças Atuantes no Carro



A **força de reação resultante** numa chumaceira é dada por

$$F = \sqrt{F_t^2 + F_r^2} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

Para **diminuir o atrito numa chumaceira**, deve-se reduzir a força de reação, o raio do eixo ou o coeficiente de atrito.

Em chumaceiras comuns, o **eixo** deve ter o menor diâmetro possível, de modo a minimizar as perdas por atrito.

# 4. Forças Atuantes no Carro



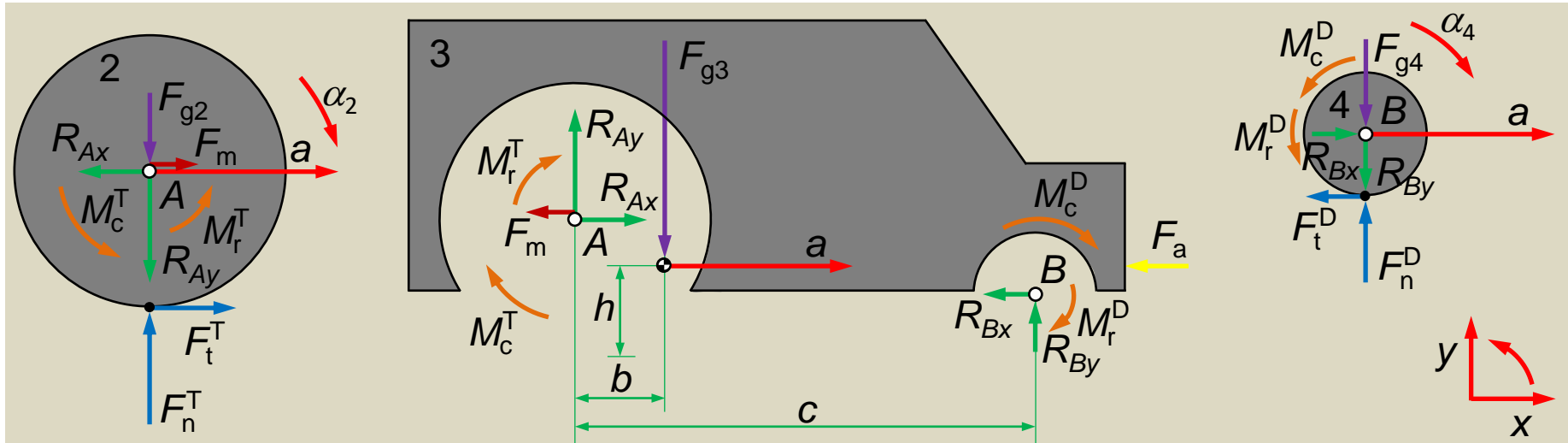
Na tabela abaixo apresentam-se valores do **coeficiente de atrito em chumaceiras secas**. Deve salientar-se que os valores do coeficiente de atrito dependem das condições de funcionamento (e.g. velocidade, temperatura, etc).

<b>Par de materiais</b>	<b><math>\mu_c</math></b>
Polímero-polímero (deslizamento)	0,25
Polímero-polímero (rolamento)	0,10
Aço-bronze (rolamento)	0,15
Aço-polímero (rolamento)	0,20

Valores do coeficiente de atrito em chumaceiras

# 5. Desempenho do Carro

De seguida apresenta-se o estudo relativo ao desempenho dinâmico do carro, tendo em vista a identificação das variáveis dominantes e secundárias.



Diagramas de corpo livre das rodas traseiras, do chassis e da roda dianteira

# 5. Desempenho do Carro



De uma forma simples, o procedimento relativo ao estudo do **desempenho dinâmico do carro** consiste em determinar a **aceleração** produzida pelo carro e, posteriormente, obter, a correspondente **velocidade** e **posição**, utilizando uma qualquer técnica de **integração numérica**.

Esta abordagem permite estudar a influência **das variáveis e dos parâmetros** em jogo, tendo em vista a otimização do desempenho do carro.

# 5. Desempenho do Carro



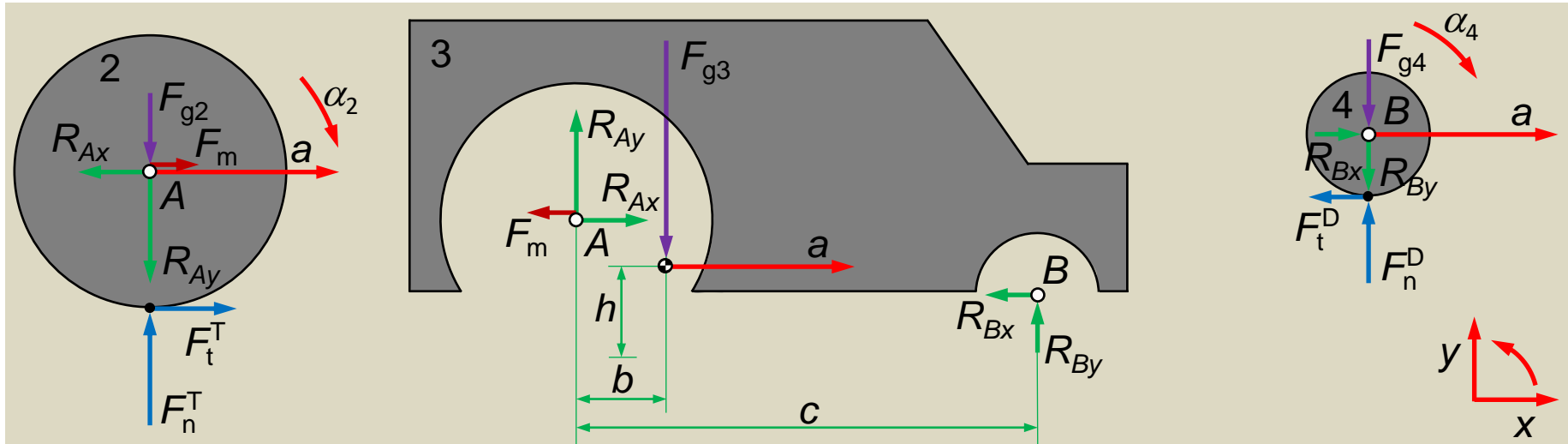
Por simplicidade, numa primeira abordagem ao estudo do desempenho dinâmico do carro, não se consideram quaisquer perdas devido aos efeitos dissipativos, isto é,

- ✓ À resistência do ar,
- ✓ Ao atrito de rolamento nas rodas,
- ✓ Ao atrito nas chumaceiras.



# 5. Desempenho do Carro

Nas figuras abaixo estão representados os diagramas de corpo livre das rodas traseiras, do chassis e da roda dianteira, **sem as ações dissipativas** anteriormente descritas.



Diagramas de corpo livre das rodas traseiras, do chassis e da roda dianteira sem perdas

# 5. Desempenho do Carro



Aplicando as leis do movimento de translação horizontal e de rotação às rodas traseiras resulta que

$$\sum F_{2x} = m_2 a \Rightarrow F_m - R_{Ax} + F_t^T = m_2 a$$

$$\sum M_{2CG} = -I_{2CG} \alpha_2 \Rightarrow F_t^T R_2 - F_m r_2 = -I_{2CG} \alpha_2$$

Da premissa relativa ao movimento de rolamento puro descrito pelas rodas traseiras sabe-se

$$a = \alpha_2 R_2$$

# 5. Desempenho do Carro



Combinando as duas últimas equações vem que

$$F_t^T = F_m \frac{r_2}{R_2} - I_{2CG} \frac{a}{R_2^2}$$

Substituindo esta equação na equação relativa ao movimento de translação horizontal das rodas traseiras resulta que

$$R_{Ax} = F_m + F_m \frac{r_2}{R_2} - I_{2CG} \frac{a}{R_2^2} - m_2 a$$

Esta equação permite determinar a **força de reação horizontal** nos apoios do **eixo traseiro** do carro.

# 5. Desempenho do Carro



Aplicando as leis do movimento de translação horizontal e de rotação à roda dianteira resulta que

$$\sum F_{4x} = m_4 a \Rightarrow R_{Bx} - F_t^D = m_4 a$$

$$\sum M_{4CG} = -I_{4CG} \alpha_4 \Rightarrow -F_t^D R_4 = -I_{4CG} \alpha_4$$

Da premissa relativa ao movimento de rolamento puro descrito pela roda dianteira sabe-se

$$a = \alpha_4 R_4$$

# 5. Desempenho do Carro



Combinando as duas últimas equações vem que

$$F_t^D = I_{4CG} \frac{a}{R_4^2}$$

Substituindo esta equação na equação relativa ao movimento de translação horizontal da roda dianteira resulta que

$$R_{Bx} = m_4 a + I_{4CG} \frac{a}{R_4^2}$$

Esta equação permite determinar a **força de reação horizontal** nos apoios do **eixo dianteiro** do carro.

# 5. Desempenho do Carro



Finalmente, aplicando a 2ª lei de Newton para o movimento de translação do chassis resulta que

$$\sum F_{3x} = m_3 a \Rightarrow R_{Ax} - F_m - R_{Bx} = m_3 a$$

Introduzindo as equações de  $R_{Ax}$  e  $R_{Bx}$  neste equação obtém-se

$$a = \frac{F_m \frac{r_2}{R_2}}{m_2 + m_3 + m_4 + \frac{I_{2CG}}{R_2^2} + \frac{I_{4CG}}{R_4^2}}$$

# 5. Desempenho do Carro



Observa-se, portanto, que a aceleração do carro depende:

- ✓ Da **ação da mola**, força motriz,
- ✓ Da **vantagem mecânica**,  $r_2/R_2$ ,
- ✓ Dos **parâmetros inerciais** do carro.

Do que acaba de ser exposto, pode inferir-se que quanto **menor for a inércia** do carro, mais **fácil é acelerar** o carro, tal como preconiza a **2ª lei de Newton**.

# 5. Desempenho do Carro



A implementação computacional, tendo em vista a análise dinâmica do movimento do carro, sem os efeitos dissipativos, consiste nas seguintes etapas:

1. Definir as condições iniciais do problema, isto é,  $x_0$ ,  $v_0$ ,  $t_0$ ,  $t_{final}$ ,  $\Delta t$  e inércia dos corpos,
2. Calcular as forças que atuam no carro, ou seja,  $F_m$ ,
3. Calcular, para o instante  $t$ , a aceleração do carro, resolvendo as equações do movimento,
4. Calcular a nova velocidade, para  $t+\Delta t$ , integrando numericamente aceleração do instante  $t$ ,
5. Calcular a nova posição, para  $t+\Delta t$ , integrando numericamente a velocidade do instante  $t$ ,
6. Atualizar as variáveis de estado, voltar à etapa 2 e prosseguir a análise até se atingir o tempo final da simulação,  $t_{final}$ , e em que se incrementa o tempo, isto é,  $t=t+\Delta t$ .



# 5. Desempenho do Carro



Se se considerasse a existência da **força de arrasto** devido à resistência do ar, a análise seria em tudo idêntica à que acaba de ser exposta, e da qual resultaria a seguinte expressão para o cálculo da **aceleração do carro**

$$a = \frac{F_m \frac{r_2}{R_2} - F_a}{m_2 + m_3 + m_4 + \frac{I_{2CG}}{R_2^2} + \frac{I_{4CG}}{R_4^2}}$$

# 5. Desempenho do Carro



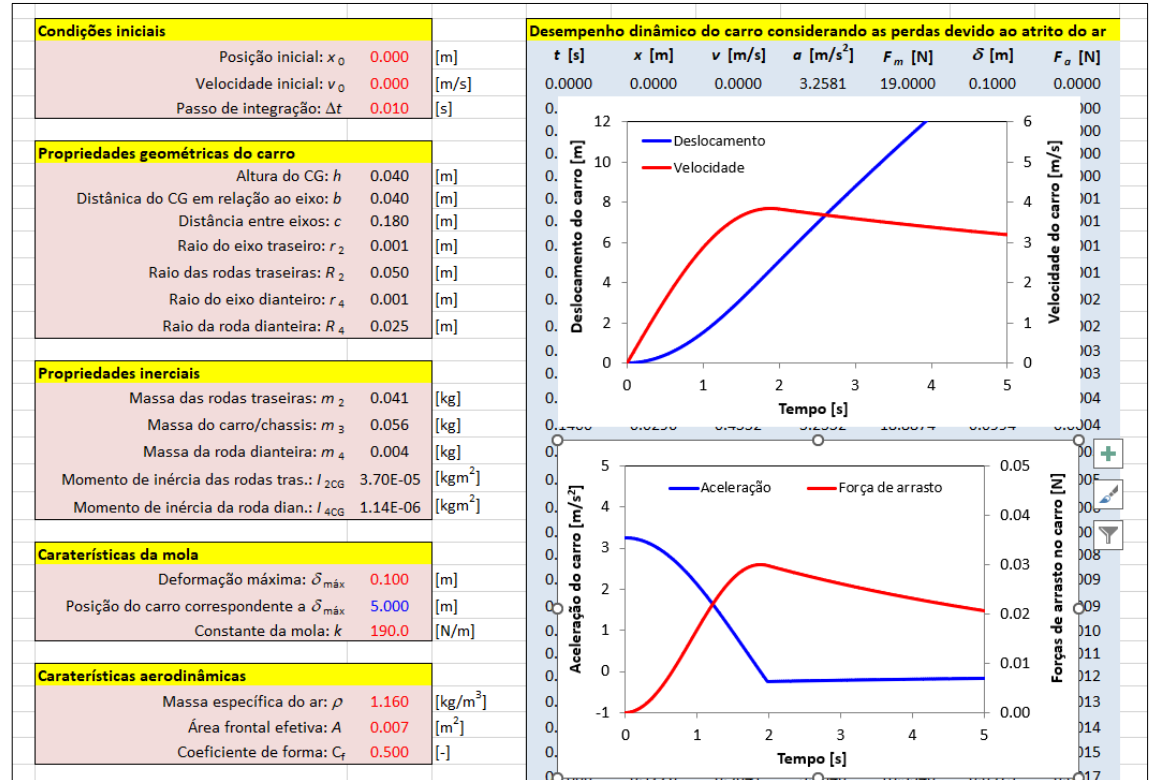
Da análise desta equação observa-se que as principais **variáveis que influenciam o desempenho do carro**, ou seja, a aceleração são:

- ✓ A **força da mola**,  $F_m$ ,
- ✓ A **vantagem mecânica**,  $r_2/R_2$ ,
- ✓ A **força de arrasto** causada pela resistência do ar,
- ✓ A **inércia dos elementos** que constituem o carro.

# 5. Desempenho do Carro



Desempenho do carro em termos de posição, velocidade, aceleração e força de arrasto ao longo do tempo, tendo em conta a formulação com perdas por arrasto do ar.

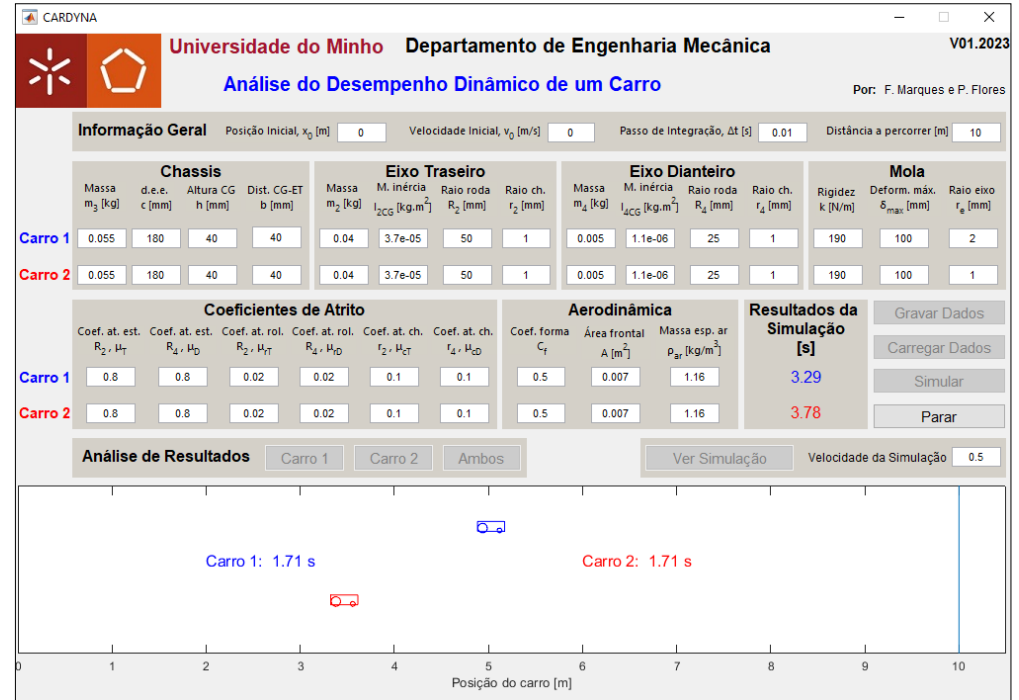


Simulação computacional do movimento do carro

# 5. Desempenho do Carro



O código **CARDYNA** permite estudar o movimento do carro. Este código permite, de forma **simples e expedita**, estudar o desempenho do carro, bem como **visualizar o seu movimento**, tendo em conta todos os efeitos dissipativos.



Pantalha gráfica do código CARDYNA

# 6. Questões de Revisão



Diga como se determina a **aceleração máxima** do carro.

Descreva as **seis máquinas simples** da Antiguidade.

Defina **vantagem mecânica (VM)**.

Como se pode **aumentar a VM** num sistema roda-eixo?

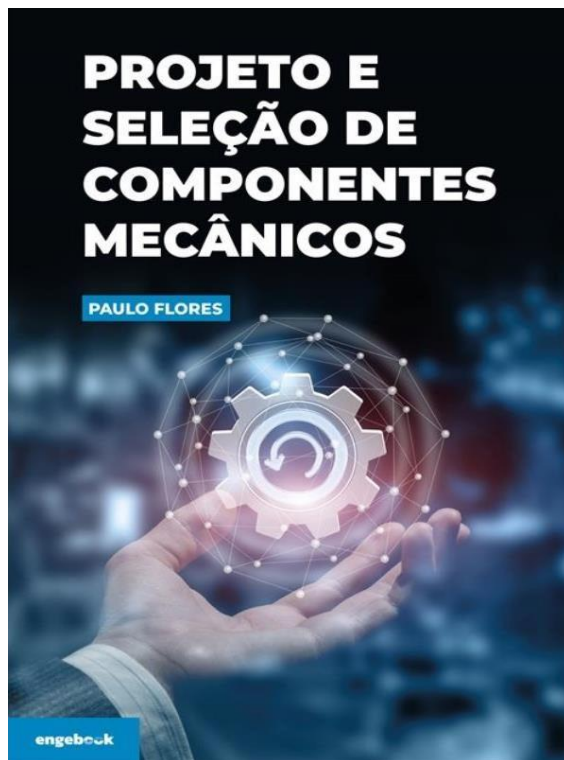
Qual é a **influência da VM** no desempenho do carro?

Escreva as **equações do movimento do carro** analisado.

# 7. Bibliografia



Sugestões de leitura complementar.



## Paulo Flores

Universidade do Minho

Departamento de Engenharia Mecânica

Campus de Azurém 4804-533 Guimarães – Portugal

Email: pflores@dem.uminho.pt

## Referências Bibliográficas

Flores, P. (2012) *Análise Cinemática e Dinâmica de Mecanismos - Exercícios resolvidos e propostos*. Publindústria, Porto.

Flores, P. (2015) *Concepts and Formulations for Spatial Multibody Dynamics*. Springer International Publishing.

Flores, P., Lankarani, H.M. (2016) *Contact Force Models for Multibody Dynamics*. Springer International Publishing.

Flores, P., Marques, F. (2017) *Sobre a Dinâmica do Carro – Teoria e Aplicação*. Publindústria, Porto.

Marques, F., Flores, P. (2021) *Da Dinâmica de Sistemas Multicorpo*. Quântica Editora, Porto.

Flores, P., Marques, F., Silva, M.R., Novais, F. (2023) *Projeto Integrador em Engenharia Mecânica*. Quântica Editora, Porto.