Projeto Integrador em Engenharia Mecânica II

Análise Dinâmica

https://youtu.be/eXfwodnO6lc

1. Introdução

Neste vídeo são apresentados os principais fundamentos relativos à análise dinâmica de sistemas mecânicos.

A dinâmica é o estudo das caraterísticas do movimento, tendo em conta as causas que dão origem ao movimento.

As causas referem-se às forças e ou aos momentos que são aplicados aos corpos.

1. Introdução

Deve fazer-se a distinção entre dinâmica e cinemática.

A dinâmica é o domínio da mecânica, em que se estudam os movimentos dos corpos sujeitos à ação de forças.

A cinemática é a disciplina da mecânica, onde se estudam as caraterísticas do movimento, independentemente das causas que dão origem ao movimento.

1. Introdução

A dinâmica permite prever o movimento causado por determinadas ações, ou vice-versa, conforme se trate de uma análise dinâmica direta ou inversa.

A dinâmica direta permite determinar as caraterísticas do movimento dos corpos dos sistemas mecânicos, sendo conhecidas as forças aplicadas, ou seja

$$a = \frac{F}{m}$$

1. Introdução

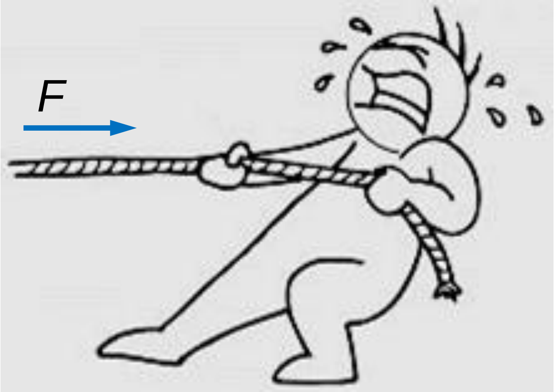
A dinâmica inversa permite determinar as forças que se desenvolvem num dado sistema, tendo como base o conhecimento da sua cinemática e das propriedades inerciais dos corpos que o constituem, ou seja

$$F = ma$$

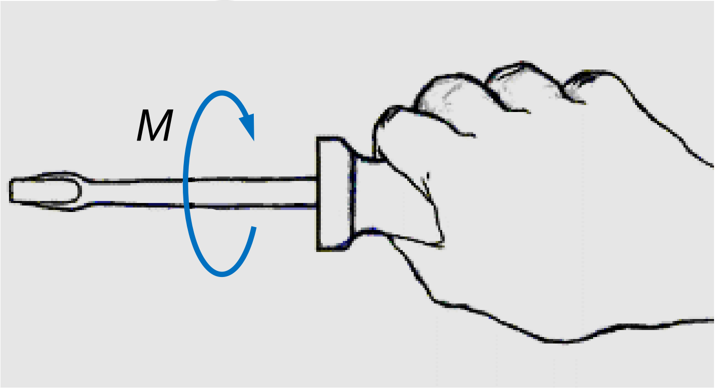
Quer na dinâmica direta, quer na dinâmica inversa é utilizada a 2ª lei de Newton, porém de formas distintas, tal como se apresentou anteriormente.

1. Introdução

No âmbito da análise dinâmica de sistemas mecânicos, as ações, a que os corpos estão sujeitos, dizem respeito à aplicação de forças ou momentos, tal como se mostra nas figuras abaixo.



Aplicação de uma força



Aplicação de um momento

1. Introdução

O movimento é a variação temporal da posição de um corpo no espaço, relativamente a um referencial.

A posição é o lugar adquirido por um corpo, após este ter efetuado um determinado deslocamento.

O deslocamento representa a trajetória realizada por um corpo em movimento, relativamente a um referencial.

A trajetória pode ser definida como sendo a linha descrita por um ponto de um corpo em movimento.

1. Introdução

No espaço bidimensional, os corpos podem realizar movimento de rotação, translação ou geral.

O movimento de um corpo é de rotação quando todos os seus pontos descrevem trajetórias circulares, em torno de uma reta perpendicular ao plano de rotação. Esta reta chama-se eixo de rotação.

Movimento de rotação

1. Introdução

No movimento de translação, todos os pontos de um dado corpo descrevem trajetórias paralelas entre si.

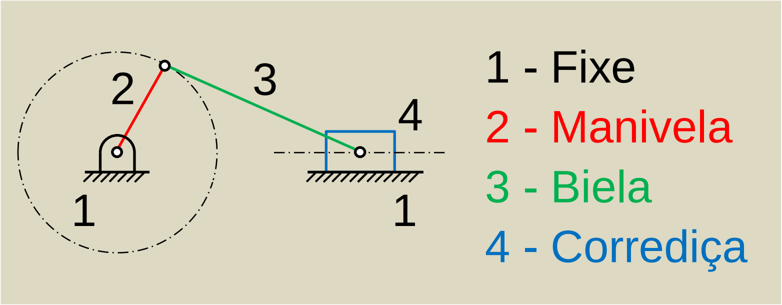
Movimento de translação

No movimento geral coexistem as propriedades associadas aos movimentos de rotação e de translação.

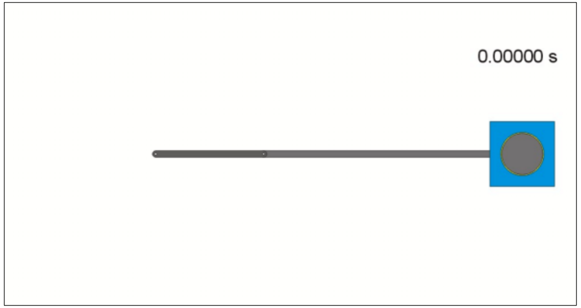
Movimento geral

1. Introdução

A barra 2 (manivela) do mecanismo biela-manivela com corrediça, da figura abaixo, descreve um movimento de rotação, a barra 4 (corrediça) do mesmo sistema mecânico realiza um movimento de translação, e a barra 3 (biela) descreve um movimento geral.



Mecanismo biela-manivela



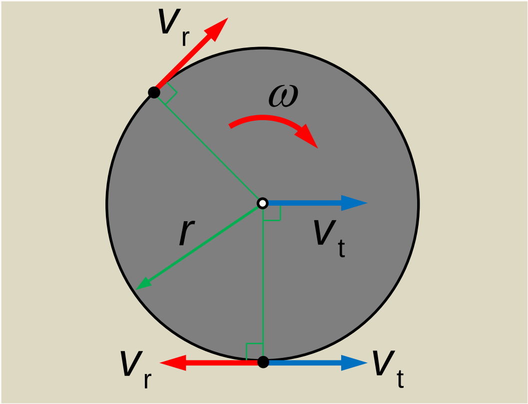
Movimentos no sistema biela-manivela

1. Introdução

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Um exemplo bastante comum de movimento geral é o movimento descrito por uma roda que rola sem escorregar sobre uma superfície plana, ou seja, descreve rolamento puro.

A condição necessária para que haja rolamento puro diz que o ponto de contacto entre a roda e o solo tem que ter velocidade nula, tal como se mostra na figura do lado.



Rolamento puro

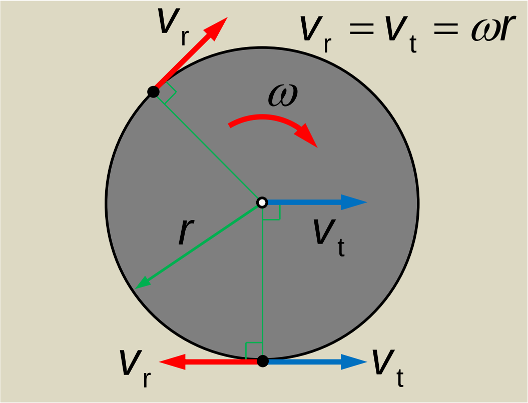
1. Introdução

A velocidade linear periférica da roda é dada por

$$v_r = \omega r$$

em que ω é a velocidade angular da roda e r denota o raio.

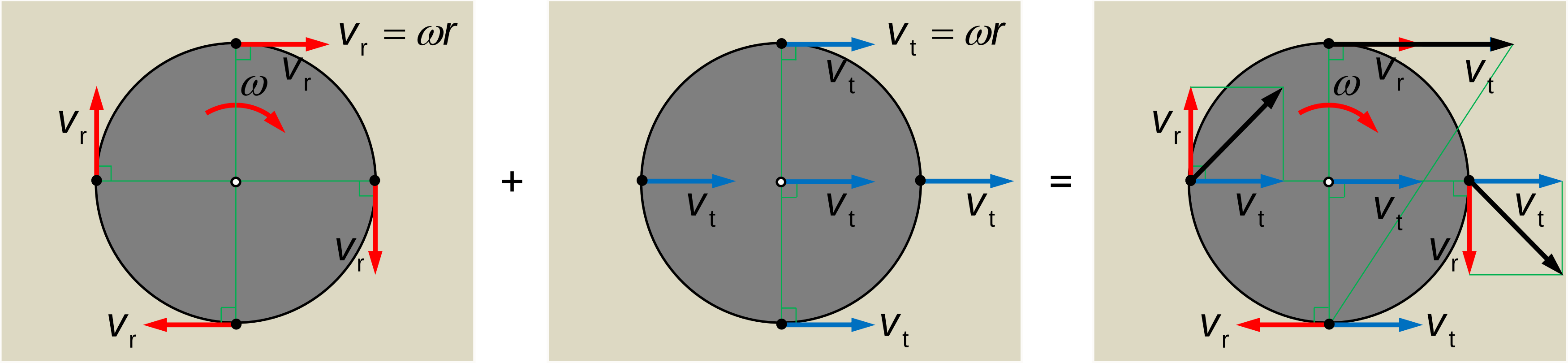
A condição de rolamento puro impõe que a velocidade de translação da roda seja igual à velocidade periférica, pelo que estas duas velocidades se anulam no ponto de contacto roda-solo.



Rolamento puro

1. Introdução

O teorema de Chasles permite decompor um movimento geral como sendo a soma de um movimento de rotação com um movimento de translação, tal como se ilustra nas seguintes representações.



Rotação + Translação = Geral

2. Inércia

A inércia é a propriedade que tem a ver com o facto de os corpos materiais não alterarem o seu estado de movimento, ou de repouso, de forma espontânea, ou seja, a inércia é a resistência à mudança de estado.

De facto, os corpos não podem *per se* alterar o seu estado de repouso ou de movimento. Esta ideia traduz o princípio de inércia de Galileu, o qual está concretizado na primeira lei de Newton.

2. Inércia

Em dinâmica de sistemas mecânicos, há dois tipos de inércia, nomeadamente:

- ✓ Inércia de translação;
- ✓ Inércia de rotação.

A inércia de translação associa-se à massa dos corpos, ao passo que a inércia de rotação está relacionada com o momento mássico de inércia.

2. Inércia

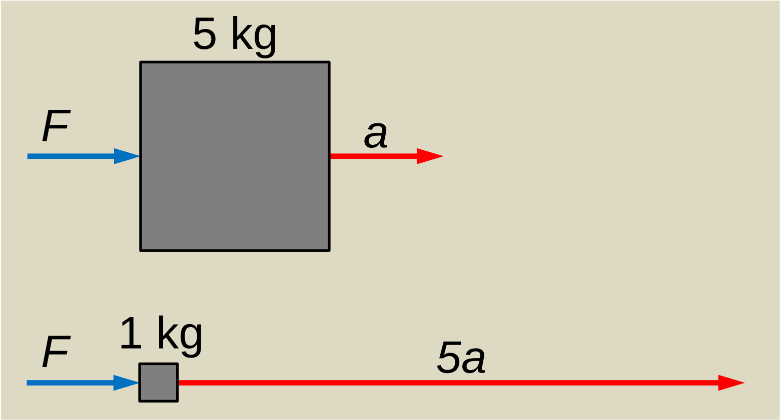
Em dinâmica, a massa de um corpo mede a sua inércia ao movimento de translação, ou seja, a massa traduz a maior ou menor resistência que os corpos apresentam à variação da sua velocidade, quando sobre eles são aplicadas forças.

Quanto maior for a massa de um corpo, mais difícil se torna retirá-lo do repouso, ou alterar a sua velocidade de translação, e, por conseguinte, menor será a aceleração causada por uma força que lhe é aplicada.

2. Inércia

Para a mesma força aplicada a um corpo, a variação de velocidade, ou seja, a aceleração, é inversamente proporcional à sua massa.

Aplicando a mesma força a ambos os blocos da figura do lado, verifica-se que a aceleração produzida pelo bloco de 1 kg é 5 vezes maior.



2. Inércia

Observa-se, pois, que aplicando uma força a um dado corpo, a aceleração resultante é inversamente proporcional à sua massa, de acordo com a 2ª lei de Newton, ou seja

$$a = \frac{F}{m}$$

Com base nesta lei, a massa pode ser entendida como o quociente entre a força aplicada a um dado corpo e a aceleração que essa força produz no corpo.

2. Inércia

A massa de um dado corpo pode ser determinada experimentalmente utilizando, para este efeito, as tradicionais balanças.

Em alternativa, a massa de um corpo, ou de um conjunto de corpos, pode ser determinada recorrendo a meios computacionais, utilizando, por exemplo, os sistemas de desenho assistido por computador, vulgo sistemas CAD (acrónimo de *Computer Aided Drawing*).

2. Inércia

A massa de um corpo pode também ser calculada analiticamente, ou seja, fazendo a integração da massa específica sobre todo o volume do corpo em questão

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z)\mathrm{d}V$$

em que ρ é a massa específica. Atendendo a que maioria dos corpos são homogéneos e isotrópicos, resulta que

$$m = \rho V$$

onde V representa o volume do corpo.

2. Inércia

A título de exemplo apresentam-se na tabela abaixo valores da massa específica de alguns materiais.

Material	ρ [kg/m^3]	ρ [g/cm^3]
Aço	7800	7,8
Água	1000	1,0
Alumínio	2700	2,7
Chumbo	11300	11,3
Madeira	400	0,4
Termoplástico	930	0,93
Tungsténio	19300	19,3

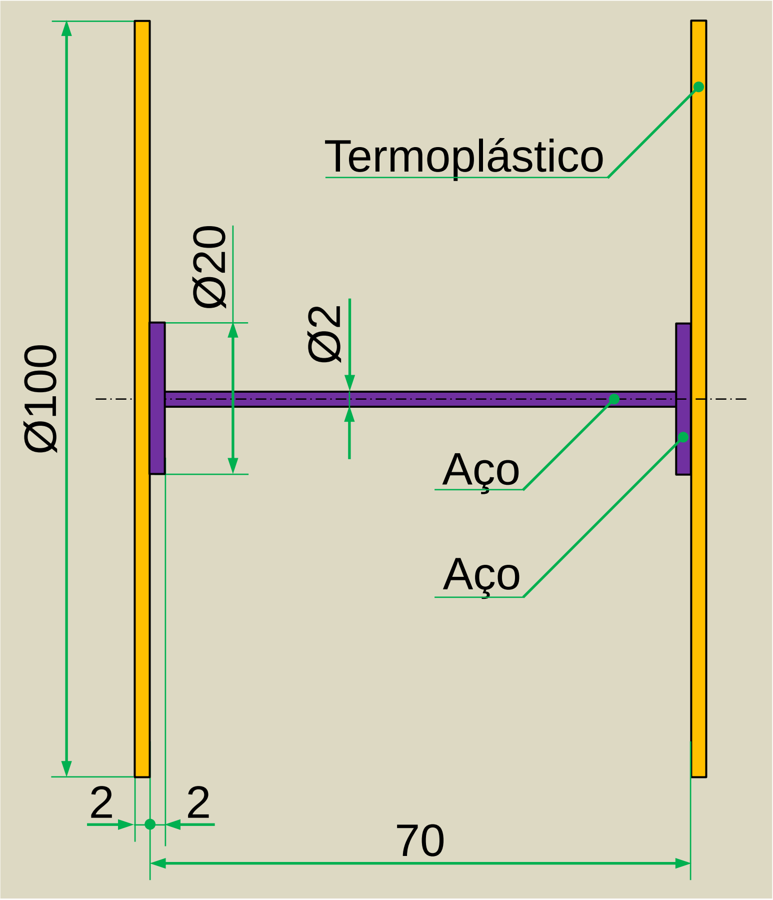
Massa específica de alguns materiais

2. Inércia

A figura do lado mostra um sistema eixo-rodas de um carro, em relação ao qual se pretende determinar a massa total.

O sistema é composto por um eixo, dois anéis e duas rodas.

Os corpos são maciços e homogéneos.



2. Inércia

A massa total do sistema é calculada do seguinte modo:

$$m_{\text{eixo}} = \rho_{\text{aço}} V = 7800 \times \pi \times \left(\frac{2 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 \times (70 - 4) \times 10^{-3} = 0{,}0016 \text{ kg}$$

$$m_{\text{anéis}} = 2\rho_{\text{aço}} V = 2 \times 7800 \times \pi \times \left(\frac{20 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 \times 2 \times 10^{-3} = 0{,}0098 \text{ kg}$$

$$m_{\text{rodas}} = 2\rho_{\text{termoplástico}} V = 2 \times 930 \times \pi \times \left(\frac{100 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 \times 2 \times 10^{-3} = 0{,}0292 \text{ kg}$$

$$m_{\text{total}} = 0{,}0016 + 0{,}0098 + 0{,}0292 = 0{,}0406 \text{ kg}$$

2. Inércia

De forma análoga à massa, o momento mássico de inércia de um corpo, ou de um conjunto de corpos, mede a sua inércia ou resistência ao movimento de rotação.

O momento mássico de inércia diz respeito à maior ou menor resistência que os corpos apresentam relativamente à alteração da sua velocidade de rotação, quando sujeitos a ações exteriores aplicadas.

2. Inércia

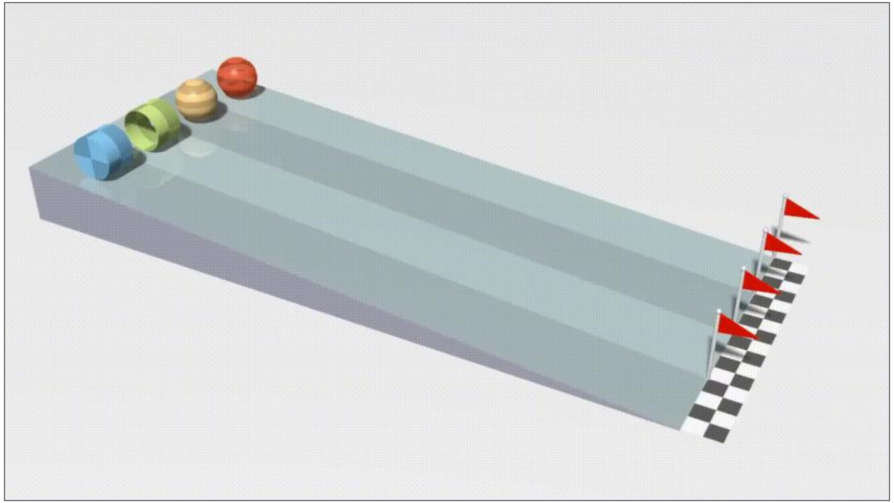
O momento mássico de inércia é, por definição, uma medida da distribuição da massa de um corpo, em relação a um determinado eixo de rotação, e que depende da distância da massa ao eixo.

Quanto mais afastada a massa está do eixo de rotação maior é a sua inércia rotacional, e, por isso, menor é a velocidade de rotação.

Inércia rotacional

2. Inércia

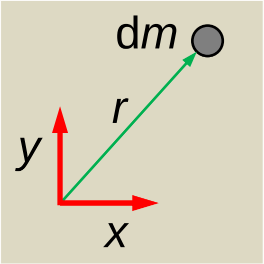
Facilmente se pode inferir que uma esfera maciça, uma esfera oca, um cilindro maciço e um anel tenham diferentes momentos mássicos de inércia.



Movimento de rolamento puro de objetos rolantes

2. Inércia

Na figura do lado está representada uma porção elementar ou infinitesimal de um corpo material.



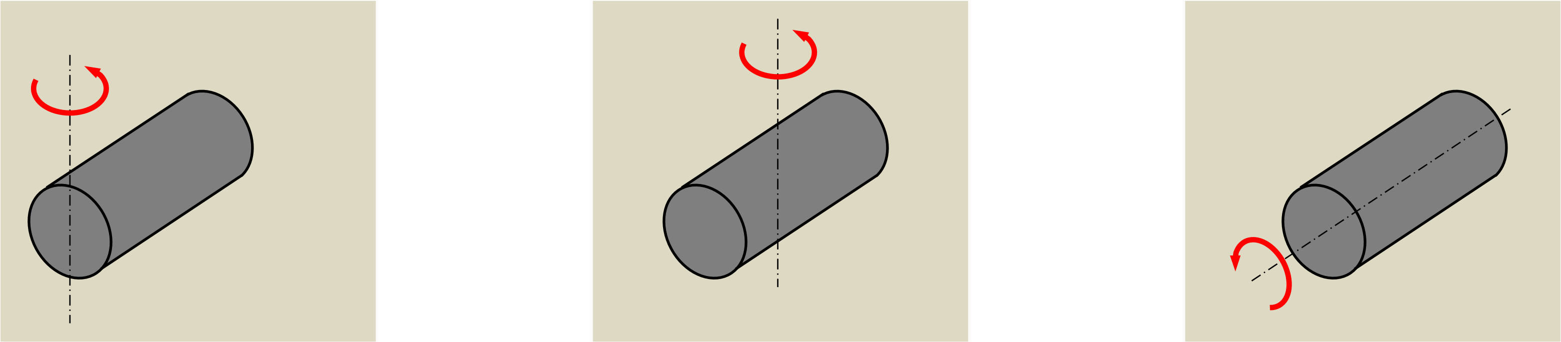
O momento mássico de inércia para corpos contínuos de pontos materiais é expresso do seguinte modo

$$I_z = \iiint_V r^2 \mathrm{d}m = \iiint_V r^2 \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}V$$

em que r é a distância ao eixo de rotação.

2. Inércia

O cilindro representado nas figuras abaixo tem diferentes valores para o momento mássico de inércia em função do eixo de rotação considerado, uma vez que este depende da distribuição da massa relativamente ao eixo de rotação.



A inércia de rotação depende do eixo de rotação considerado

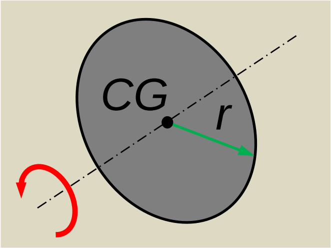
2. Inércia

Pode afirmar-se que, contrariamente à massa de um corpo, ou conjunto de corpos, o momento mássico de inércia de um objeto varia com a posição e orientação do eixo de rotação considerado.

À semelhança da massa, o momento mássico de inércia de um corpo pode ser determinado experimentalmente, recorrendo a ferramentas computacionais ou utilizando as abordagens analíticas.

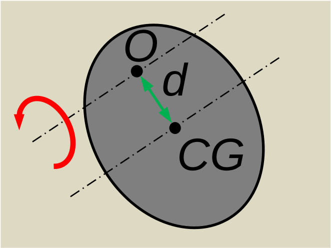
2. Inércia

O momento mássico de inércia de um disco de raio *r*, em relação ao eixo que passa pelo centro de gravidade, é dado por



$$I_{CG} = \frac{1}{2} m r^2$$

O momento mássico de inércia de um disco, em relação a um eixo que dista *d* do eixo central, é dado pelo teorema de Steiner



$$I_O = I_{CG} + m d^2$$

2. Inércia

Apresentam-se abaixo as expressões que permitem calcular o momento mássico de inércia de uma esfera maciça, uma esfera oca, um cilindro maciço e um anel.

$$I_{\text{esfera maciça}} = \frac{2}{5} m r^2 \qquad I_{\text{esfera oca}} = \frac{2}{3} m r^2$$

$$I_{\text{cilindro maciço}} = \frac{1}{2} m r^2 \qquad I_{\text{anel}} = m r^2$$

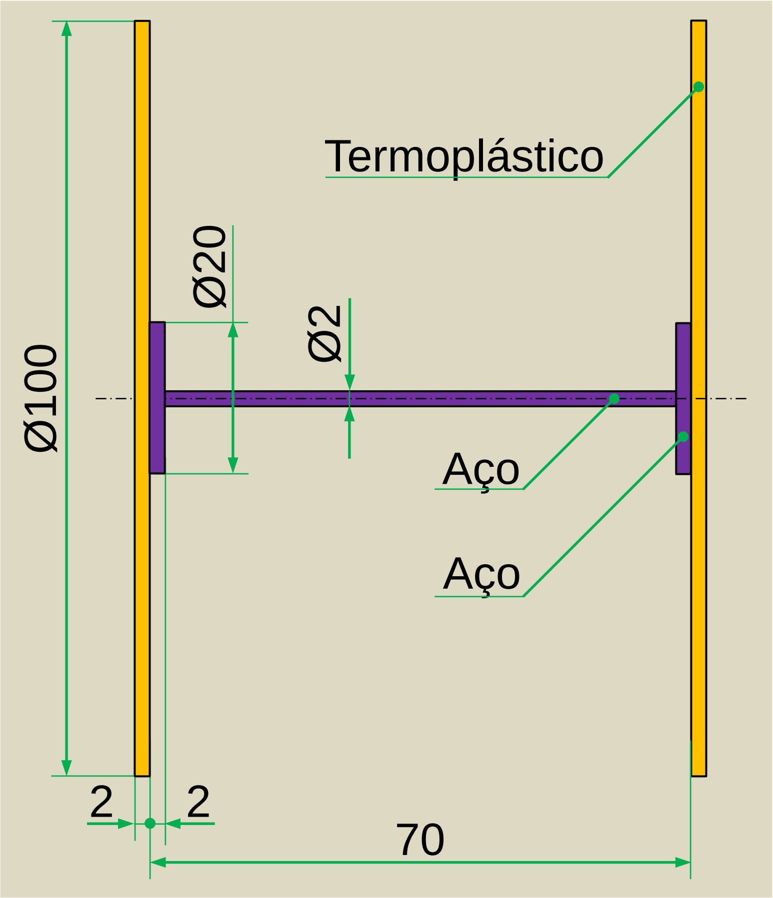
O momento mássico de inércia de um cilindro não depende do seu comprimento.

2. Inércia

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

A figura do lado mostra um sistema eixo-rodas, em relação ao qual se pretende determinar o momento mássico de inércia total em relação a um eixo situado na periferia das rodas.

Para este cálculo deve ter-se em consideração o teorema de Steiner ou dos eixos paralelos.



2. Inércia

Calcule-se, em primeiro lugar, o momento mássico de inércia de cada um dos elementos do sistema, em relação ao eixo que passa pelo centro geométrico do sistema, *i.e.*

$$I_{\text{eixo}} = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}0016 \times \left(\frac{2 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 = 8{,}09 \times 10^{-10}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{\text{anéis}} = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}0098 \times \left(\frac{20 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 = 4{,}90 \times 10^{-7}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{\text{rodas}} = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}0292 \times \left(\frac{100 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 = 3{,}65 \times 10^{-5}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

2. Inércia

O momento mássico de inércia do conjunto eixo-rodas, em relação ao eixo central, resulta em

$$I_{CG} = I_{\text{eixo}} + I_{\text{anéis}} + I_{\text{rodas}}$$

$$= 8,09\times10^{-10} + 4,90\times10^{-7} + 3,65\times10^{-5} = 3,70\times10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

O momento de inércia do conjunto eixo-rodas, em relação a um eixo que passa pela periferia das rodas, resulta em

$$I_O = I_{CG} + m_{\text{total}} d^2$$

$$= 3,70\times10^{-5} + 0,0406\times\left(\frac{100\times10^{-3}}{2}\right)^2 = 1,39\times10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

3. Leis de Newton

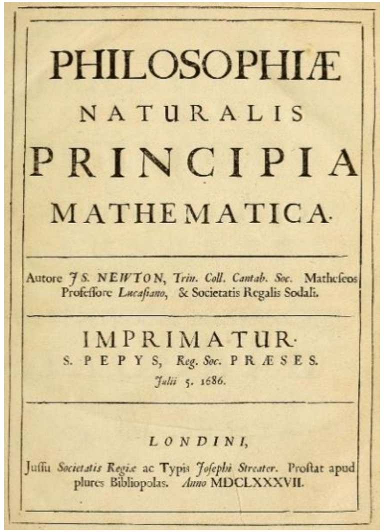
As leis do movimento de Newton são um marco histórico indelével, no que diz respeito ao desenvolvimento científico, na medida em que romperam com leis erróneas da Antiguidade.

A tríade de leis do movimento de Newton são a base que permite descrever, de forma completa e determinística, a resposta dinâmica de sistemas mecânicos.

3. Leis de Newton

As leis de Newton estabelecem a relação entre as forças e as alterações de movimento, ou seja, de velocidade.

Isaac Newton estabeleceu, com particular genialidade, as leis do movimento que foram publicadas na sua obra prima *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural), vulgo *Principia*.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S.* NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

3. Leis de Newton

A 1ª lei de Newton diz que existem referenciais, ditos referenciais inerciais, em que um dado corpo isolado permanece em estado de repouso ou em movimento retilíneo uniforme, a menos que lhe seja aplicada uma força.

A 1ª lei de Newton é chamada lei da inércia, sendo que a inércia é uma caraterística intrínseca aos corpos materiais.

Um corpo isolado é aquele que não está sujeito à ação de qualquer força.

3. Leis de Newton

Da 1ª lei de Newton sabe-se que a mudança de velocidade de um corpo, em relação a um referencial inercial, só acontece por via da aplicação de uma força externa.

Quando a força resultante que atua num dado corpo é nula, então, é constante a sua velocidade.

Um referencial é um espaço no qual se observam os estados de repouso ou de movimento dos corpos. O espaço e o tempo definem o ambiente de trabalho da dinâmica de sistemas mecânicos.

3. Leis de Newton

Demonstrações da 1ª lei de Newton.

Corpo em repouso

Corpo em movimento uniforme

3. Leis de Newton

Ao invés da lei de inércia, descrita anteriormente, a segunda lei de Newton refere-se a corpos não isolados, isto é, os objetos em causa são atuados por forças, que representam interações físicas entre corpos.

A 2ª lei de Newton, dita lei fundamental da dinâmica, diz que, num referencial inercial, quando um corpo é atuado por uma força, aquele move-se de tal modo que a força é igual à variação temporal da quantidade de movimento.

3. Leis de Newton

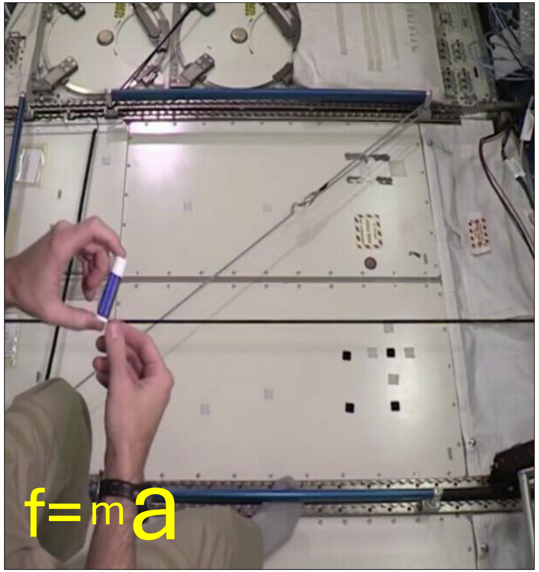
Da 2ª lei de Newton observa-se que a aceleração de um dado corpo, quando sujeito à ação de uma força externa, é inversamente proporcional à sua massa, ou seja

$$a = \frac{F}{m}$$

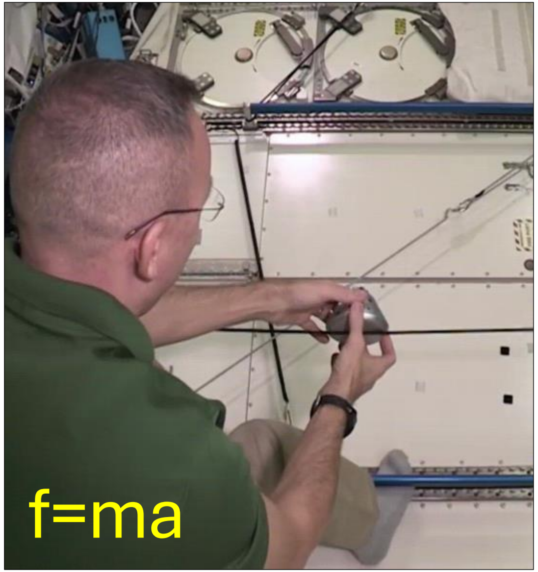
É por demais evidente que a 2ª lei de Newton expressa a ideia de causa (força) e efeito (aceleração) associada à dinâmica de sistemas mecânicos.

3. Leis de Newton

Demonstrações da 2ª lei de Newton.



Massa pequena
Aceleração grande



Massa intermédia
Aceleração intermédia

Massa grande
Aceleração pequena

3. Leis de Newton

A 3ª lei de Newton, conhecida como lei da ação e reação, diz que, para toda a interação entre dois corpos, existe um par de forças contrárias, que atuam uma cada em cada corpo, e em simultâneo.

Por outras palavras, para cada força de ação, que é exercida num corpo, existe uma força de reação no outro corpo, que não é mais do que a resposta à ação.

3. Leis de Newton

Da 3ª lei Newton decorre que na interação entre dois corpos, não existe uma força isolada. As forças, que representam uma interação mútua entre dois corpos, surgem aos pares, têm iguais magnitudes e atuam em sentidos opostos.

Deve notar-se que as forças de ação e de reação atuam em corpos distintos, ou seja, para cada força de ação que atua num corpo, existe sempre num outro corpo o par daquela força, isto é, a reação.

3. Leis de Newton

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Demonstrações da 3ª lei de Newton.

Massas desiguais

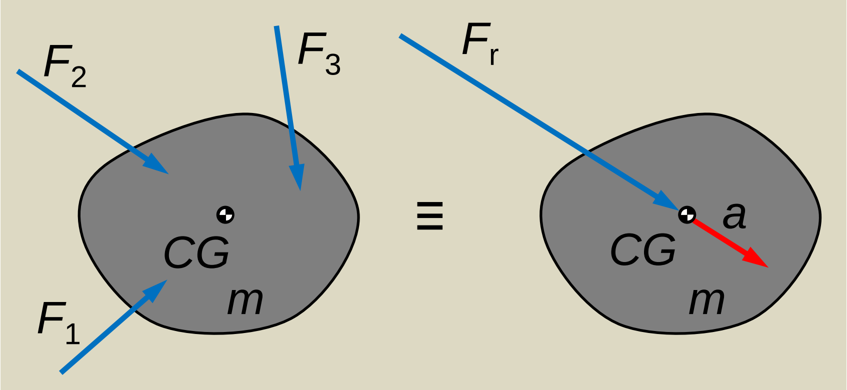
Massas aproximadamente iguais

4. Equações do Movimento

As equações do movimento são desenvolvidas com base na 2ª lei de Newton, a qual diz que a força resultante exercida num determinado corpo, produz neste uma aceleração que atua na mesma direção e no mesmo sentido daquela força.

Esta formulação, relativa à 2ª lei de Newton, pode ser escrita da seguinte forma

$$\sum F = F_r = ma$$



4. Equações do Movimento

O movimento dos corpos pode também ser estudado como um problema de equilíbrio dinâmico, usando o princípio de d'Alembert, o qual pode ser escrito como

$$\sum F - ma = 0$$

em que o termo *ma* representa a força de inércia, que é, na verdade, uma força fictícia.

O princípio de d'Alembert diz que é nula a soma de todas as forças (aplicadas e de inércia) que atuam num determinado corpo.

4. Equações do Movimento

A formulação desenvolvida por d’Alembert é equivalente à 2ª lei de Newton, uma vez que considera a força de inércia como uma força aplicada.

A 2ª lei de Newton é materializada por uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, que pode ser expressa do seguinte modo $F = m\ddot{x}$.

Uma equação diferencial ordinária é uma relação entre uma função, *f*(*x*), e as suas derivadas, tal como, por exemplo, a seguinte igualdade *f*’’=*x*+*f*’.

4. Equações do Movimento

A formulação de Newton, $F=ma$, foi inicialmente aplicada ao estudo do movimento de pontos materiais, e não de corpos rígidos. Estes últimos têm orientação ou rotação.

Newton pretendia estudar os corpos celestes e saber porque é que os planetas se moviam como moviam.

Newton chamava aos planetas esferas pesadas, sendo, por isso modelados como pontos materiais. Esta abordagem é aceitável e válida face às distâncias que separam os planetas.

4. Equações do Movimento

Euler estendeu a 2ª lei de Newton para o movimento de corpos rígidos finitos, estabelecendo que o momento resultante, que atua num corpo rígido, é igual à variação temporal da quantidade de movimento angular, isto é

$$M = I_{CG}\dot{\omega} \Rightarrow M = I_{CG}\alpha$$

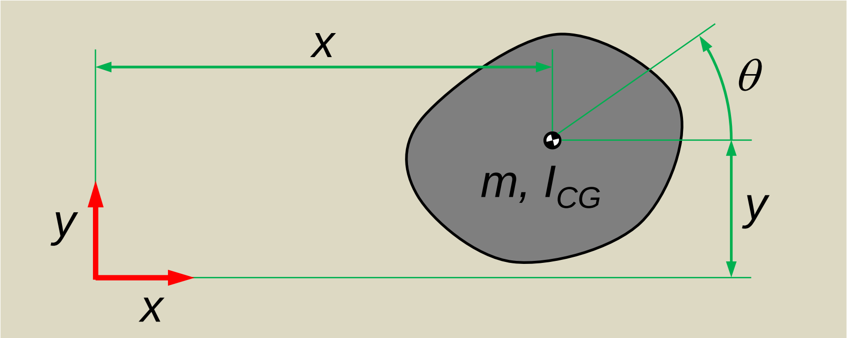
em que M representa o momento resultante, I_{CG} denota o momento mássico de inércia do corpo, em relação ao seu centro de gravidade, e α é a aceleração angular do corpo.

4. Equações do Movimento

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Euler introduziu o conceito de corpo rígido, que pode ser entendido como uma coleção de pontos materiais. Assim, é necessário definir a orientação dos corpos na análise do seu movimento.

No espaço 2D, um corpo rígido fica completamente localizado pela posição e orientação, ou seja, x, y e θ.



4. Equações do Movimento

As equações do movimento de translação e de rotação de um corpo rígido, também chamadas equações de Newton-Euler, podem ser escritas da seguinte forma

$$\sum F_x = ma_x$$

$$\sum F_y = ma_y$$

$$\sum M_{CG} = I_{CG}\alpha$$

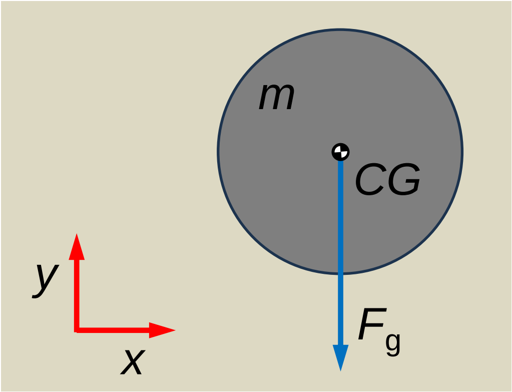
4. Equações do Movimento

Considere-se um corpo em queda livre, isto é, sem resistência do ar. Assim, por definição de queda livre, verifica-se que a única força exterior aplicada ao corpo é a que resulta do campo gravítico terrestre, ou seja, F_{g}.

Aplicando as equações do movimento na direção vertical resulta que

$$\sum F = -ma \Rightarrow -F_{\mathrm{g}} = -ma$$

Por simplicidade eliminou-se o índice y nesta equação.



4. Equações do Movimento

Para se estudar o movimento do corpo em queda livre, a equação do movimento, anteriormente apresentada, deve ser resolvida em ordem à aceleração, ou seja,

$$a = \frac{F_\text{g}}{m}$$

Esta equação deve ser lida do seguinte modo, a força exterior, F_g, aplicada ao corpo de massa m, produz neste uma aceleração linear a.

4. Equações do Movimento

A resolução das equações do movimento pressupõe o conhecimento de condições iniciais ao nível das posições e das velocidades dos corpos.

Deste modo, resolvendo as equações do movimento obtêm-se as acelerações para o instante inicial, as quais resultam das ações (forças) aplicadas aos corpos.

A análise dinâmica direta é um problema de condição inicial.

4. Equações do Movimento

A questão que se coloca é a de como obter as características cinemáticas do movimento ao longo do tempo, nomeadamente as novas posições e novas velocidades.

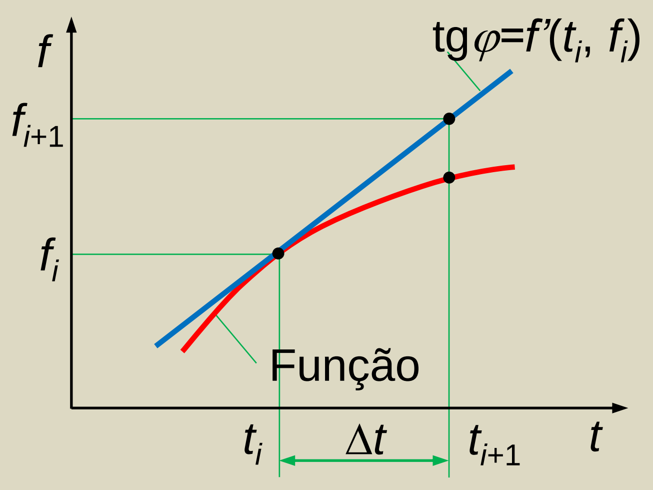
Atendendo a que a maioria dos problemas de dinâmica direta não tem solução analítica, recorre-se à integração numérica para se obter as novas posições e velocidades, usando para o efeito, por exemplo, o método de Euler.

4. Equações do Movimento

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Na sua formulação geral, o método de integração de Euler pode ser expresso do seguinte modo

$$f_{i+1} = f_i + f_i^{'} \Delta t$$

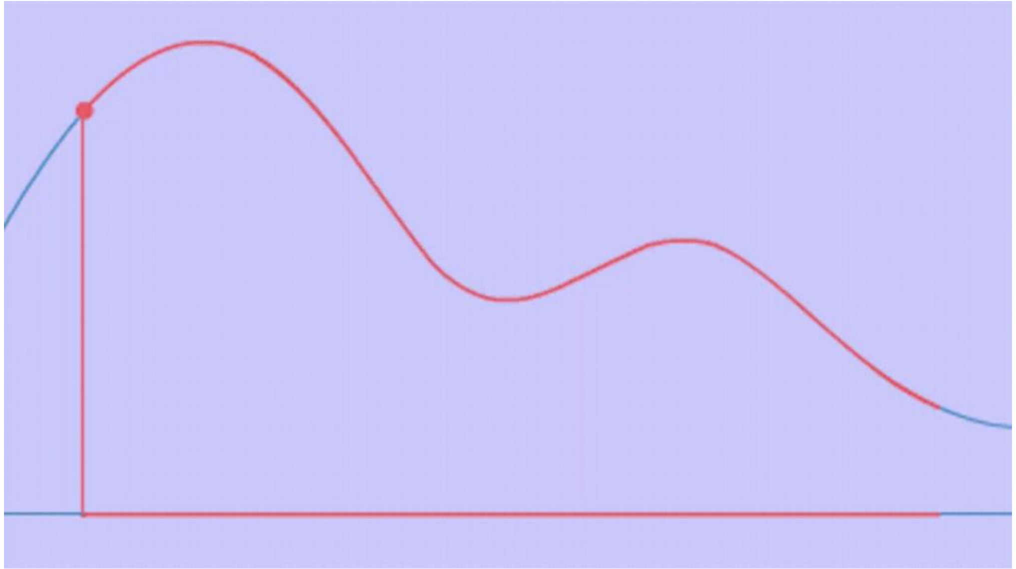


Este algoritmo permite obter uma solução aproximada de uma função no instante seguinte.

Cálculo é o ramo da matemática em que se estuda a taxa de variação ou de mudança. Antes de Newton inventar o cálculo tudo era considerado estático e seguia a abordagem aristotélica.

4. Equações do Movimento

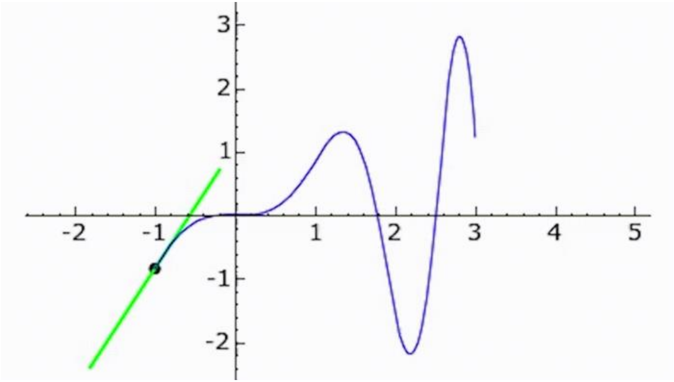
O cálculo integral é o subdomínio do cálculo que permite determinar a área abaixo de uma curva arbitrária.



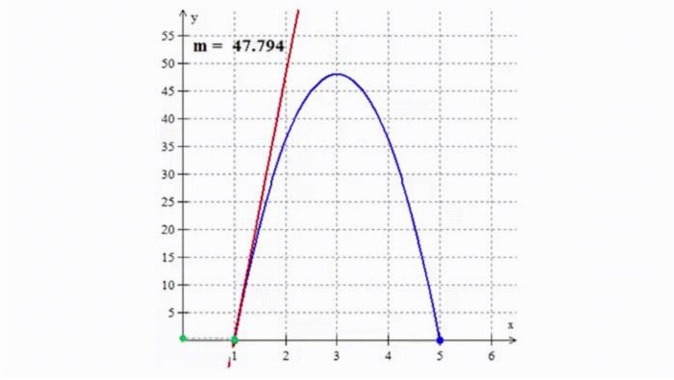
Cálculo da área abaixo de uma linha curva

4. Equações do Movimento

O cálculo diferencial é o subdomínio do cálculo que permite determinar a taxa de variação de uma quantidade, ou seja, estuda as taxas de variação de funções em relação às suas variáveis, usando, para o efeito, derivadas.



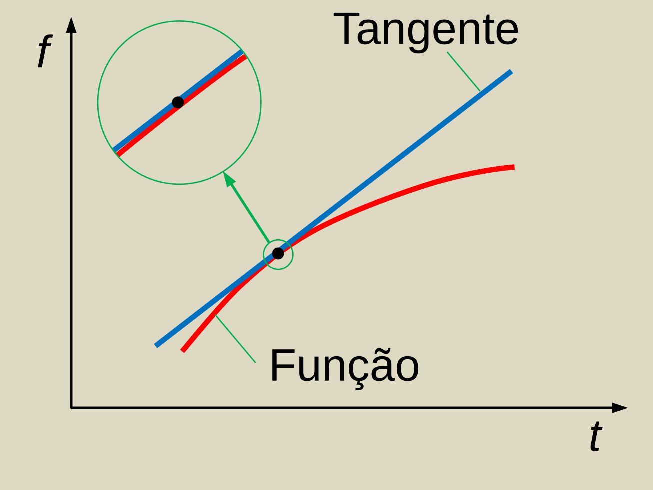
Taxa de variação de uma curva



Declive da curva ou derivada

4. Equações do Movimento

O ponto de tangência de uma reta a uma curva é aquele em que a reta se parece ou se confunde com a própria curva, ou seja, a curva aproxima-se da reta tal que aquela pode ser considerada como a reta.



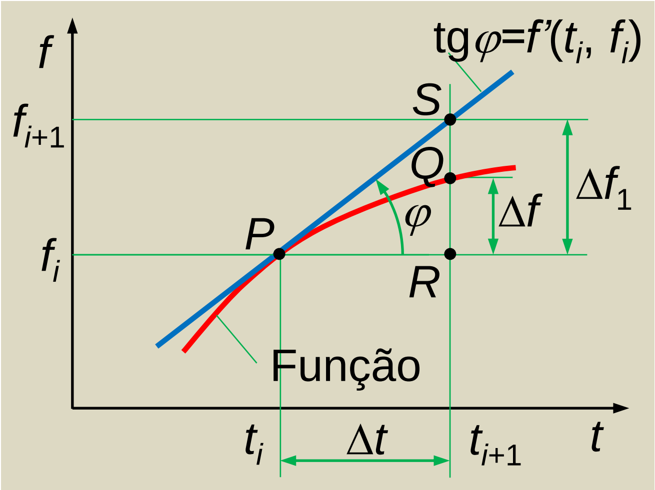
A derivada num ponto de uma curva é a taxa de variação instantânea da curva e é igual ao declive, ou coeficiente angular, da reta tangente à curva no ponto considerado.

Tangente é uma linha (reta) que toca numa curva num único ponto sem a intersetar.

4. Equações do Movimento

A derivada de uma função num ponto é, por definição, igual ao declive da reta tangente

$$f_i^{'}(t_i, f_i) = \mathrm{tg}\,\varphi$$



Da análise desta representação verifica-se que

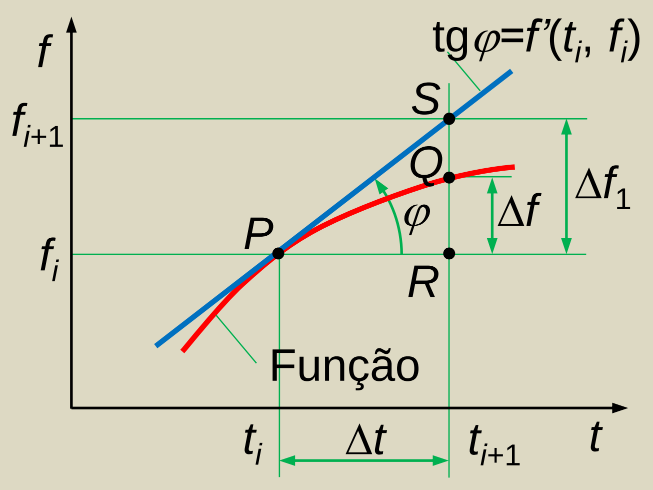
$$\overline{RQ} = \Delta f$$

$$\overline{RS} = \Delta f_1 = \mathrm{tg}\,\varphi \Delta t \Rightarrow \Delta f_1 = f^{'}(t_i, f_i)\Delta t$$

4. Equações do Movimento

Se o intervalo de tempo, Δt, for suficientemente pequeno, então pode considerar-se válida a seguinte aproximação

$$\overline{RQ} \approx \overline{RS} \Rightarrow \Delta f \approx \Delta f_1$$



Pelo que acaba de ser exposto verifica-se que

$$f_{i+1} = f_i + \Delta f_1 \Rightarrow f_{i+1} = f_i + f_i^{'} \Delta t$$

4. Equações do Movimento

O método integração de Euler permite determinar o valor de uma função discreta para o instante seguinte, uma vez conhecido o valor da função e a sua derivada no instante anterior, ou seja

$$f_{i+1} = f_i + f_i^{'} \Delta t$$

No método de Euler (1768) a derivada é considerada constante no intervalo de integração e igual ao valor da função no extremo esquerdo daquele intervalo.

Este algoritmo permite obter soluções suficientemente exatas, sendo bastante popular devido à sua simplicidade e elevada eficiência computacional.

4. Equações do Movimento

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Voltando ao problema da queda livre de um corpo, uma vez conhecida a aceleração no instante *t*, a velocidade e a posição no instante seguinte são obtidas por integração numérica, usando o algoritmo de Euler, ou seja,

$$v_{t+\Delta t} = v_t + a_t \Delta t$$

$$y_{t+\Delta t} = y_t + v_t \Delta t$$

em que $t+\Delta t$ é o instante de tempo no qual se pretende obter a nova velocidade e a nova posição.

4. Equações do Movimento

A implementação computacional, tendo em vista a análise dinâmica do movimento do corpo em queda livre, consiste nas seguintes etapas:

1. Definir as condições iniciais do problema, isto é, y_0, v_0, t_0, t_{final}, Δt e m,
2. Calcular as forças que atuam no corpo, ou seja, F_g,
3. Calcular, para o instante t, a aceleração do corpo, resolvendo as equações do movimento,
4. Calcular a nova velocidade, para $t+\Delta t$, integrando numericamente aceleração do instante t,
5. Calcular a nova posição, para $t+\Delta t$, integrando numericamente a velocidade do instante t,
6. Atualizar as variáveis de estado, voltar à etapa 2 e prosseguir a análise até se atingir o tempo final da simulação, t_{final}, e em que se incrementa o tempo, isto é, $t=t+\Delta t$.

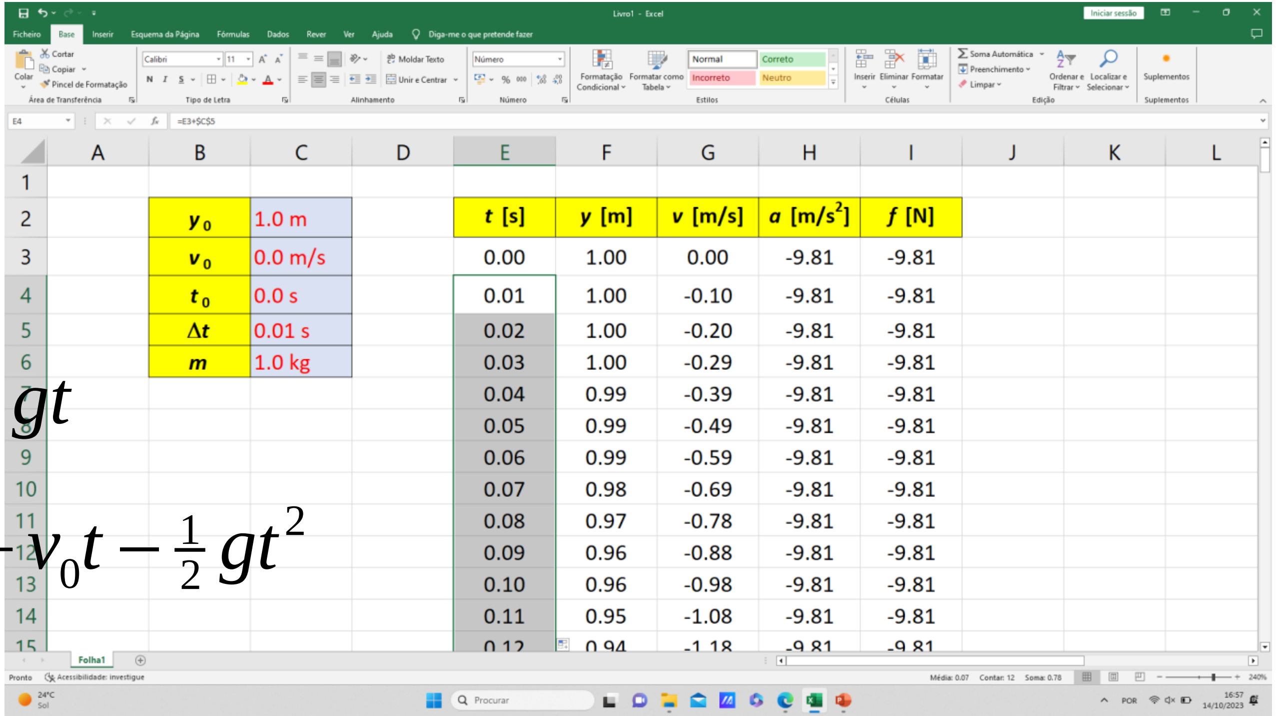
4. Equações do Movimento

Implementação computacional em Excel.

$$a = -g$$

$$v = v_0 - gt$$

$$y = y_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

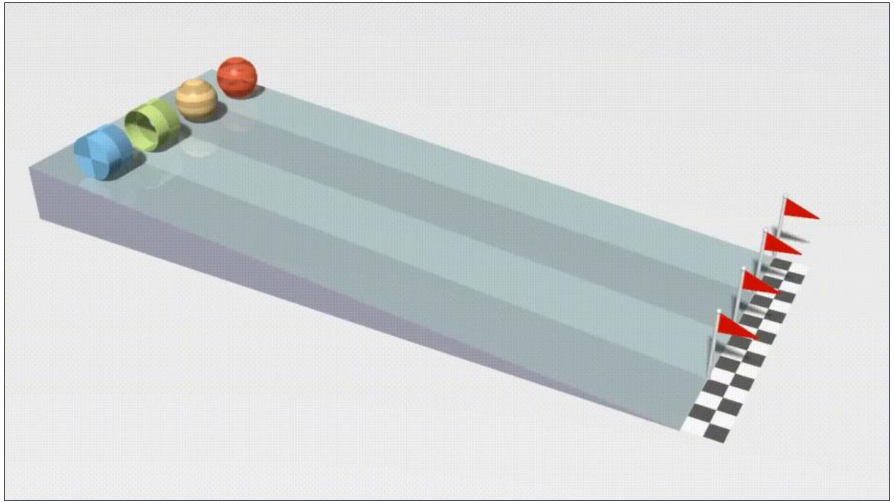


y_0	1.0 m
v_0	0.0 m/s
t_0	0.0 s
Δt	0.01 s
m	1.0 kg

t [s]	y [m]	v [m/s]	a [m/s^2]	f [N]
0.00	1.00	0.00	-9.81	-9.81
0.01	1.00	-0.10	-9.81	-9.81
0.02	1.00	-0.20	-9.81	-9.81
0.03	1.00	-0.29	-9.81	-9.81
0.04	0.99	-0.39	-9.81	-9.81
0.05	0.99	-0.49	-9.81	-9.81
0.06	0.99	-0.59	-9.81	-9.81
0.07	0.98	-0.69	-9.81	-9.81
0.08	0.97	-0.78	-9.81	-9.81
0.09	0.96	-0.88	-9.81	-9.81
0.10	0.96	-0.98	-9.81	-9.81
0.11	0.95	-1.08	-9.81	-9.81
0.12	0.94	-1.18	-9.81	-9.81

5. Exemplo de Aplicação

De seguida apresenta-se um exemplo de aplicação, em que se estuda o movimento de uma esfera maciça, uma esfera oca, um cilindro maciço e um anel numa rampa.



Movimento de rolamento puro de quatro objetos rolantes

5. Exemplo de Aplicação

Os objetos em estudo são similares, feitos do mesmo material, colocados sobre uma rampa, cuja inclinação corresponde a um ângulo de 10º. Na posição inicial considerada, os objetos estão a uma altura de 200 mm.

Objeto	Raio [mm]	Massa [g]
Esfera maciça	11,0	32
Esfera oca	12,6	3
Cilindro maciço	12,6	250
Anel	12,6	2

Propriedades dos quatro objetos em estudo

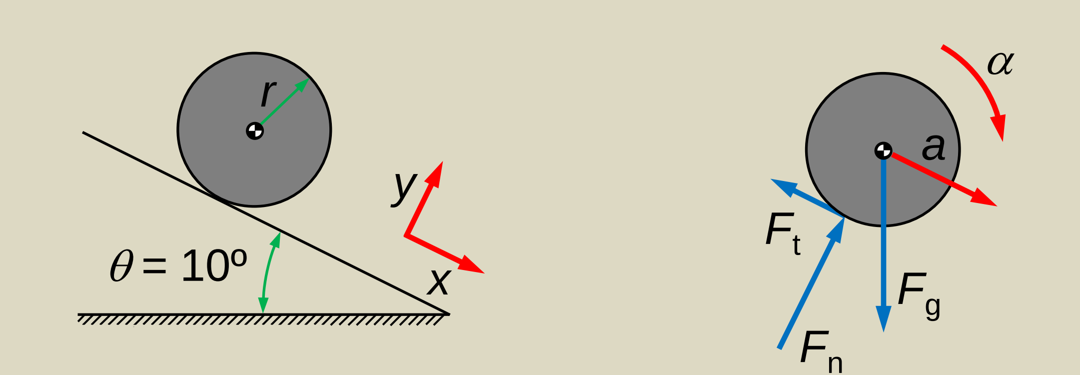
5. Exemplo de Aplicação

Para a determinação dos momentos mássicos de inércia dos quatro objetos aqui considerados, devem utilizar-se as expressões correspondentes anteriormente apresentadas.

Atendendo a que os quatro objetos em análise têm caraterísticas idênticas, no que respeita ao contacto com a rampa, pretende-se determinar a ordem de chegada dos objetos quando aqueles são largados, ao mesmo tempo, da mesma posição inicial, e com uma velocidade nula.

5. Exemplo de Aplicação

A figura abaixo mostra a representação deste estudo, bem como o correspondente diagrama de corpo livre. Deve notar-se que o diagrama de corpo livre é idêntico para os quatro objetos.



Representação do corpo rolante e diagrama de corpo livre

5. Exemplo de Aplicação

Deve chamar-se a atenção para o facto de o movimento de descida dos objetos ao longo da rampa se realizar sem escorregamento, ou deslizamento, ou seja, trata-se de um movimento do tipo rolamento puro.

Pelo facto de não haver escorregamento, o ponto de contacto entre os objetos e o solo está instantaneamente em parado. Este ponto é um centro instantâneo de rotação.

5. Exemplo de Aplicação

Aplicando as leis do movimento ao diagrama de corpo livre anterior para a direção *x* e para o movimento de rotação, resultam as seguintes equações

$$\sum F_x = ma \Rightarrow mg\,\mathrm{sen}\,\theta - F_{\mathrm{t}} = ma$$

$$\sum M_{CG} = -I_{CG}\alpha \Rightarrow -F_{\mathrm{t}}r = -I_{CG}\alpha$$

Da resolução desta última equação resulta que

$$F_{\mathrm{t}} = I_{CG}\frac{\alpha}{r}$$

5. Exemplo de Aplicação

Esta expressão representa a força de atrito estático, uma vez que se trata de movimento de rolamento puro aquele que é realizado pelos quatro objetos ao descerem a rampa.

Neste caso, a força de atrito não é dada pela lei de Coulomb ($F_t=\mu F_n$), pois não existe escorregamento no contacto. A magnitude da força de atrito será tanta quanta necessária para garantir o rolamento puro. Na verdade, quanto maior for a inércia, maior é a força de atrito.

5. Exemplo de Aplicação

Atendendo a que os quatro objetos rodam sem escorregar é válida a seguinte relação ao nível da aceleração linear

$$a = \alpha r$$

Deste modo, combinando as equações anteriormente apresentadas resulta a seguinte expressão

$$a = \frac{mg\text{sen}\theta}{m + \frac{I_{CG}}{r^2}}$$

5. Exemplo de Aplicação

Da análise cuidada desta expressão observa-se que, quanto maior for o momento mássico de inércia, I_{CG}, menor será a aceleração e, por conseguinte, maior é a dificuldade em fazer rodar os corpos.

Na verdade, os corpos só descem, isto é, só aceleram, se rodarem.

Observa-se ainda que a aceleração linear é constante.

5. Exemplo de Aplicação

Atendendo a que a aceleração é constante, é válida a análise do movimento uniformemente acelerado, ou seja

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Tendo em consideração os dados iniciais relativos a este exemplo de aplicação, x_0=0 m, e v_0=0 m/s, resulta que

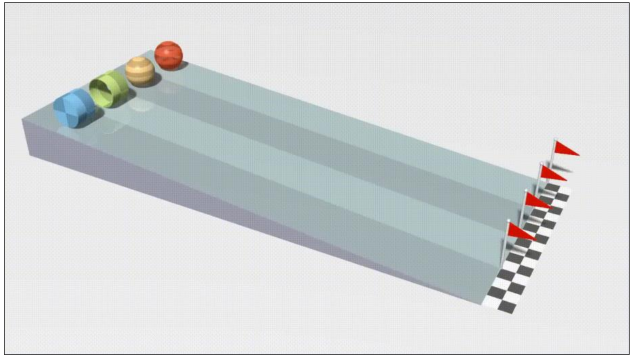
$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$$

5. Exemplo de Aplicação

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

A tabela abaixo apresenta os resultados obtidos para os quatro objetos em análise, por ordem de chegada ao fim da rampa, onde consta a aceleração de cada corpo e o tempo correspondente. O vídeo mostra o respetivo movimento.

Objeto	Aceleração [m/s^2]	Tempo [s]
Esfera maciça	1,22	1,38
Cilindro maciço	1,14	1,42
Esfera oca	1,02	1,50
Anel	0,85	1,64



Resultados do movimento descente de quatro objetos rolantes

6. Questões de Revisão

Defina inércia.

Distinga inércia de translação de inércia de rotação.

Caraterize o movimento de rolamento puro.

Apresenta a 2ª lei de Newton.

Descreva as equações de Newton-Euler de um corpo rígido.

Diga como se resolvem as equações do movimento.

7. Bibliografia

Sugestões de leitura complementar.

Paulo Flores

Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém 4804-533 Guimarães – Portugal
Email: pflores@dem.uminho.pt

Referências Bibliográficas

Flores, P. (2012) *Análise Cinemática e Dinâmica de Mecanismos - Exercícios resolvidos e propostos*. Publindústria, Porto.

Flores, P. (2015) *Concepts and Formulations for Spatial Multibody Dynamics*. Springer International Publishing.

Flores, P., Lankarani, H.M. (2016) *Contact Force Models for Multibody Dynamics*. Springer International Publishing.

Flores, P., Marques, F. (2017) *Sobre a Dinâmica do Carro – Teoria e Aplicação*. Publindústria, Porto.

Marques, F., Flores, P. (2021) *Da Dinâmica de Sistemas Multicorpo*. Quântica Editora, Porto.

Flores, P., Marques, F., Silva, M.R., Novais, F. (2023) *Projeto Integrador em Engenharia Mecânica*. Quântica Editora, Porto.