



# ÓRGÃOS DE MÁQUINAS II

## Licenciatura em Engenharia Mecânica



Elaborado por Paulo Flores - 2023

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade do Minho

Campus de Azurém

4804-533 Guimarães

[pflores@dem.uminho.pt](mailto:pflores@dem.uminho.pt)

## **T.07 – ASPETOS GERAIS SOBRE ENGRENAGENS**

- 1. Introdução**
- 2. Breve Resenha Histórica**
- 3. Classificação das Engrenagens**
- 4. Terminologia Específica**
- 5. Perfis dos Dentes das Rodas**
- 6. Perfil em Evolvente de Circunferência**
- 7. Princípio Fundamental do Engrenamento**

# 1. Introdução

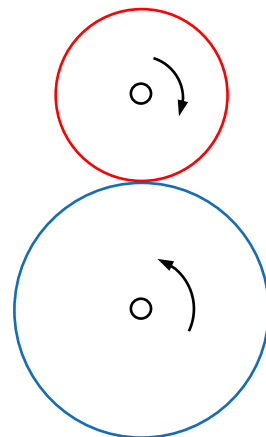
## Rodas de Atrito *versus* Rodas Dentadas

Como se viu anteriormente, [as rodas de atrito](#) são apenas utilizadas em situações particulares que envolvam potências relativamente baixas.

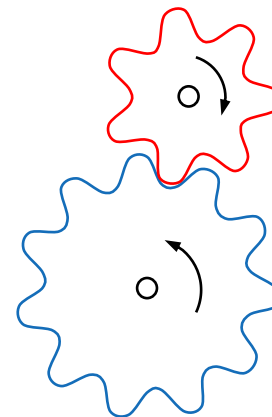
Para obviar as desvantagens associadas às rodas de atrito, [talham-se dentes, de perfis idênticos, nas periferias das rodas](#) de modo a garantir que os dentes da roda motora empurrem ou arrastem os dentes da roda movida.

As figuras abaixo ilustram transmissões por rodas de atrito e por rodas dentadas. Trata-se de duas transmissões por contacto direto.

Nas engrenagens o [contacto ocorre sem escorregamento](#) e, por conseguinte, a relação de transmissão é rigorosamente constante.



Rodas de atrito



Engrenagem

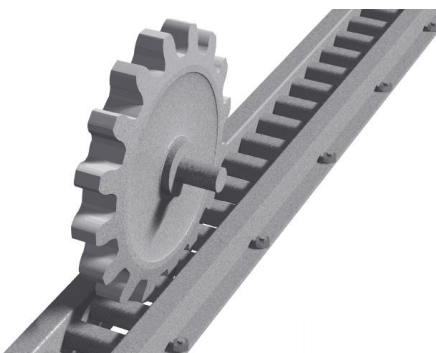
# 1. Introdução

## Conceitos Fundamentais

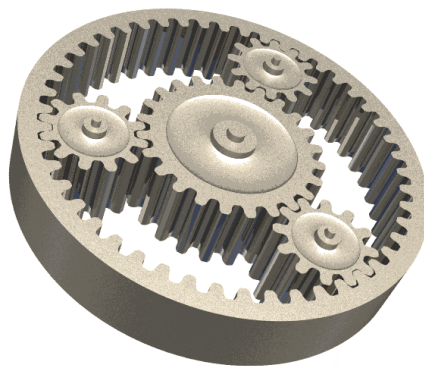
A principal propriedade das engrenagens é a de transmitir movimento entre os órgãos motor e movido com uma **relação de transmissão constante**.

As engrenagens são mecanismos compostos por **rodas dentadas** que transmitem movimento entre **veios afastados** ou quando se pretende **diminuir ou aumentar a velocidade** ou o binário do veio motor.

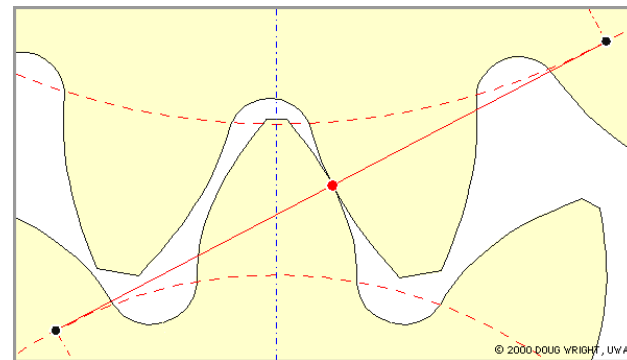
Nas engrenagens, o movimento é transmitido pelos dentes da roda motora que **rolam sem escorregar** sobre os dentes da roda movida (cf. figuras abaixo).



Pinhão-cremalheira



Trem de engrenagens



Engrenamento de perfis conjugados

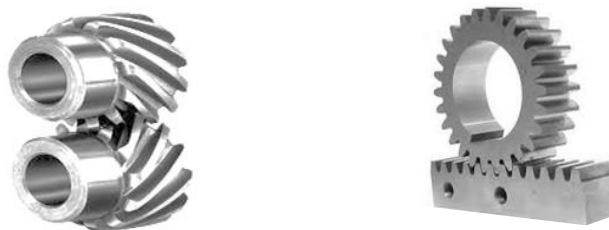
A **roda de menor dimensão** e, por isso, de menor número de dentes, denomina-se **pinhão ou carreto**. A **roda de maior dimensão** é designada simplesmente por **roda ou coroa**.

Estas denominações nada têm a ver com o facto de uma roda ser motora ou movida, mas sim, e apenas, com as dimensões das rodas.

# 1. Introdução

## Tipos de Engrenagens

As **engrenagens**, que podem ser consideradas como uma evolução, ou aperfeiçoamento, das rodas de atrito, são utilizadas para **transformar o movimento** de um veio rotativo num movimento de **rotação** ou de **translação** (cf. figuras abaixo).



Transmissão de movimento de rotação em rotação e de rotação em translação.

De entre as diversas classes de sistemas de transmissão de movimento de rotação, **as engrenagens são das mais versáteis**. As engrenagens podem ser utilizadas para transmitir movimento entre **eixos paralelos**, eixos **concorrentes** ou eixos **não complanares** (cf. figuras abaixo).



Engrenagens de eixos paralelos, eixos concorrentes e eixos não complanares.

# 1. Introdução

## Principais Características

As engrenagens permitem operar sistemas mecânicos de **baixas e altas rotações**. Em geral, as engrenagens apresentam **rendimentos elevados** (até 99%), sendo exceção as engrenagens de **parafuso sem-fim**, em que os rendimentos são relativamente baixos (da ordem dos 45-70%) devido ao elevado escorregamento que apresentam.

Outras características que concorrem para a **popularidade e sucesso das engrenagens** prendem-se com:

- A **boa fiabilidade** e durabilidade,
- As **dimensões reduzidas** de atravancamento,
- A **boa precisão** na transmissão do movimento,
- A elevada capacidade de **resistência a sobrecargas**,
- A **relação de transmissão constante** e independente das cargas em jogo.

As engrenagens podem ser fabricadas em diversos materiais, tais como os **metálicos** e os **poliméricos**.

As engrenagens, pelo facto de serem constituídas por corpos rígidos, **não absorvem choques** e necessitam, em geral, de **ser lubrificadas**.

As engrenagens são relativamente **caras e ruidosas**, e podem ser afetadas, no seu desempenho, pelas condições ambientais, tais como **humidade** e **poeiras**.

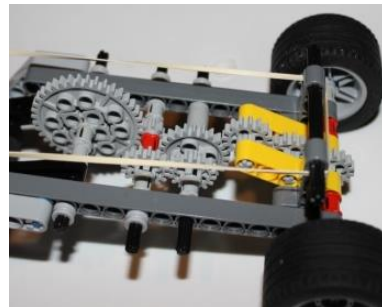
# 1. Introdução

## Exemplos de Aplicação

É vasto e bastante diversificado o [campo de aplicações das rodas dentadas](#). A título informativo, nas figuras abaixo, apresentam-se alguns exemplos de aplicação de rodas dentadas.



Batedeira



Brinquedo



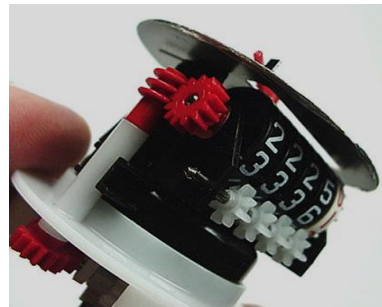
Pinhão-cremalheira



Indústria pesada



Relógio



Contador



Diferencial

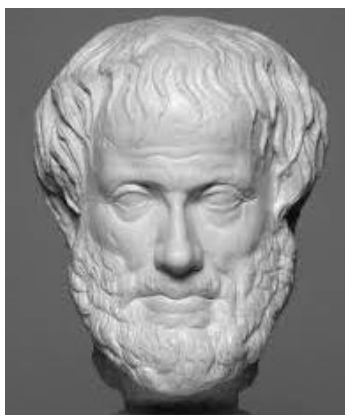


Caixa redutora

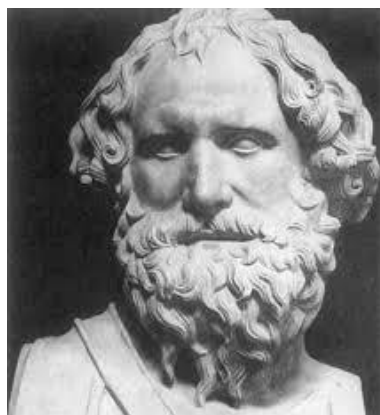
## 2. Breve Resenha Histórica

### Embriogénese das Engrenagens

É longa e rica a história associada à **génese e evolução** das engrenagens. Já por volta do ano **1700 a.C.** surgem, em poemas da **literatura Hindu**, referências a carros e a rodas. Há menções a engrenagens nos trabalhos de **Aristóteles** (384-322) e de **Arquimedes** (287-212).



Aristóteles



Arquimedes



Engrenagens primitivas

As engrenagens primitivas eram **muito rudimentares**, sendo constituídas por **pedaços de madeira** que se inseriam num disco ou numa roda.

As engrenagens primitivas são ainda utilizadas nos nossos dias em **sistemas de elevação de água**, sendo vulgarmente denominadas **noras**. Este tipo de roda é também utilizado em moinhos, tal como o que se ilustra na figura do lado.



Engrenagem de uma nora



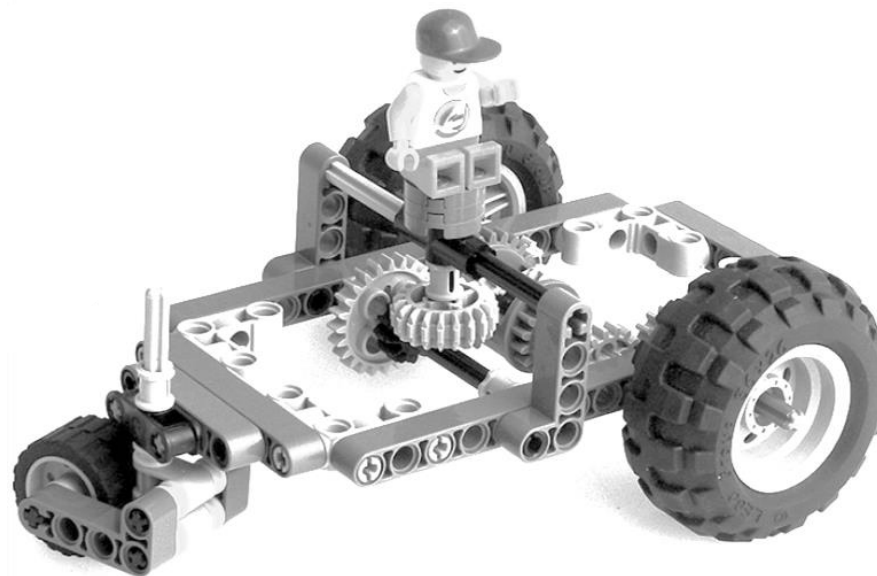
## 2. Breve Resenha Histórica

### Carro que Segue o Sul

Um dos primeiros dispositivos que incluía um conjunto de engrenagens existia já no ano [2634 a.C.](#) na China, cuja denominação era o [carro que segue o sul](#).

Tratava-se de um [engenhoso sistema de engrenagens](#) montado sobre um carro (ou carroça) que, mercê do funcionamento de um [trem epicycloidal](#), mantinha o braço de uma figura humana apontado para o sul, independentemente da direção em que o carro se deslocava.

As figuras abaixo ilustram dois modelos do carro que segue o sul. Este dispositivo era, na época, utilizado como uma espécie de bússola para orientar os viajantes que atravessavam o imenso [deserto de Gobi](#).



Modelos do carro que segue o sul inventado na China no ano 2634 a.C.

## 3. Classificação das Engrenagens

### Disposição Relativa dos Eixos das Rodas

Um dos principais critérios de classificação das engrenagens prende-se com a **disposição relativa dos eixos das rodas**. Assim, três grupos de engrenagens podem ser distinguidos:

- Engrenagens **cilíndricas**, quando os eixos de rotação são **paralelos**,
- Engrenagens **cónicas**, quando os eixos de rotação são **concorrentes**,
- Engrenagens **torsas**, quando os eixos de rotação **não são coplanares**.

Nas figuras abaixo estão representadas engrenagens cilíndricas, cónicas e torsas, conforme descrição anteriormente exposta.



Engrenagem cilíndrica



Engrenagem cónica



Engrenagem torsa

## 3. Classificação das Engrenagens

### Forma dos Dentes

Um **segundo critério**, utilizado na classificação das engrenagens, é o que considera a **forma dos dentes**. Assim, costumam distinguir-se os seguintes tipos de dentes:

- Dentes **retos**,
- Dentes **inclinados** ou helicoidais,
- Dentes **curvos** ou espirais.

As figuras abaixo apresentam duas engrenagens cilíndricas, de **dentes retos** e de **dentes helicoidais** (inclinados), e uma engrenagem cônica de **dentes espirais** (curvos).



Dentes retos



Dentes helicoidais



Dentes espirais

## 3. Classificação das Engrenagens

### Posição Relativa dos Centros Instantâneos de Rotação

Um **terceiro critério** de classificação das engrenagens é o que considera a **posição relativa dos centros instantâneos de rotação**. Assim, as engrenagens podem ser **exteriores ou interiores**, conforme o centro instantâneo de rotação no contacto se situe, ou não, entre os eixos de rotação das rodas.

Nas figuras abaixo estão representadas engrenagens cilíndricas de dentes retos **exteriores e interiores**. Em geral, as engrenagens interiores permitem distâncias menores entre os eixos das rodas.

As **rodas com dentado interior** são normalmente utilizadas em **sistemas de engrenagens planetárias**, quando há limitação de espaço ou quando se pretende proteger os dentes.



Engrenagem cilíndrica exterior



Engrenagem cilíndrica interior

## 3. Classificação das Engrenagens

### Engrenagens Cilíndricas de Dentes Retos

Os [critérios de classificação das engrenagens supramencionados](#) podem ser combinados, em particular os dois primeiros. Com efeito, as [engrenagens cilíndricas](#) podem ter dentes [retos](#), dentes [helicoidais](#) ou dentes em [espinha](#), também denominados dentes de [dupla hélice](#).

A figura abaixo mostra uma engrenagem cilíndrica de dentes retos, que é das mais comuns em mecânica quando se pretende transmitir movimento entre eixos paralelos.



Engrenagem cilíndrica exterior de dentes retos

O projeto, fabrico, montagem e manutenção deste tipo de engrenagem é [relativamente simples](#), já que transmite apenas cargas radiais e admite [relações de transmissão relativamente elevadas](#) (8).

As engrenagens cilíndricas de dentes retos apresentam [rendimentos elevados](#) (até 99%). Contudo, quando operam a elevadas velocidades de rotação são [algo ruidosas](#).

Estas engrenagens podem funcionar em [um ou mais andares](#), podendo transmitir potências da ordem dos 20000 cv, com velocidades tangenciais até 150-200 m/s.

### 3. Classificação das Engrenagens

#### Engrenagens Cilíndricas de Dentes Helicoidais

As engrenagens **cilíndricas de dentes inclinados ou helicoidais** apresentam um funcionamento **mais suave e menos ruidoso** do que as de dentes retos, uma vez que o engrenamento se dá de forma mais progressiva.

As figuras abaixo mostram engrenagens cilíndricas de dentes inclinados. Os **parâmetros de funcionamento e de desempenho são idênticos** aos do dentado reto. Todavia, nas engrenagens de dentado inclinado **desenvolvem-se cargas axiais**.



Engrenagem cilíndrica de dentes helicoidais



Dentado em espinha

O **dentado em espinha, ou de dupla hélice**, apresenta as mesmas vantagens do dentado inclinado, às quais acresce o facto de **não serem desenvolvidos esforços axiais**.

As engrenagens com **dentes em espinha** são utilizadas quando se pretende **transmitir potências elevadas**.

As engrenagens cilíndricas de dentes em espinha requerem **máquinas-ferramenta especiais** para o seu fabrico.

## 3. Classificação das Engrenagens

### Engrenagens Cilíndricas de Pinhão-Cremalheira

Quando numa engrenagem cilíndrica, de dentado reto ou inclinado, **uma das rodas tem raio infinito**, então aquela é vulgarmente denominada **pinhão-cremalheira**.

Este tipo particular de engrenagem cilíndrica **transforma o movimento de rotação** do pinhão em **movimento de translação da cremalheira**, ou vice-versa.

A figura abaixo ilustra um exemplo de uma engrenagem do tipo pinhão-cremalheira. Este tipo de engrenagem é **fácil de fabricar** e, por vezes, é usada como **ferramenta de corte** para gerar rodas dentadas.

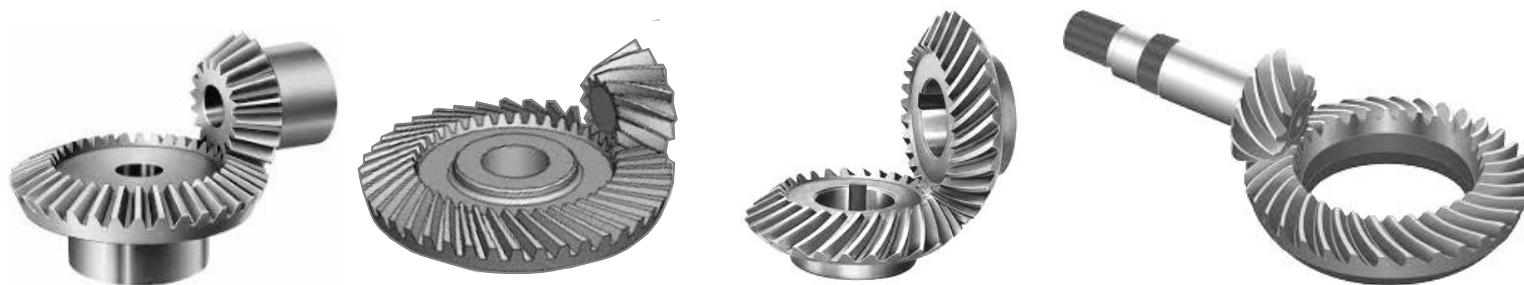


Engrenagem cilíndrica do tipo pinhão-cremalheira

## 3. Classificação das Engrenagens

### Engrenagens Cónicas

As **engrenagens cónicas** podem ter dentes **retos**, dentes **helicoidais**, dentes **espirais** e podem ainda ser **descentradas** (vulgo hipoide), tal como se apresenta nas figuras abaixo.



Engrenagens cónicas de dentes retos, helicoidais, espirais e hipoide

Este tipo de engrenagem admite **relações de transmissão até 6**, tendo um desempenho comparável ao das engrenagens cilíndricas. As velocidades tangenciais podem atingir os 50-75 m/s.

É frequente encontrar situações práticas em que se **associam engrenagens cónicas com engrenagens cilíndricas**, como é exemplo o caso dos **diferenciais dos automóveis**.

As engrenagens cónicas com dentes espirais e a hipoide apresentam maior capacidade de carga, maior relação de transmissão (10) e menor ruído do que as engrenagens cónicas de dentado reto e inclinado. Contudo, apresentam, **rendimentos inferiores** (60-95%), bem como **maior geração de calor**.

As engrenagens cónicas **exigem maior rigor**, quer no fabrico, quer na montagem, sendo mais caras. As hipoide permitem **soluções compactas** e requerem um **lubrificante de elevada viscosidade**.



## 3. Classificação das Engrenagens

### Engrenagens Torsas

As **engrenagens torsas** (cf. figuras abaixo) podem apresentar dentes **helicoidais** ou **espirais**. No caso das engrenagens torsas de dentes helicoidais, em que o carreto toma a forma de um parafuso, aquelas denominam-se engrenagens de **parafuso sem-fim**, ou simplesmente sem-fim.



Engrenagens torsas de dentes helicoidais, espirais e de parafuso sem-fim

As engrenagens **torsas de dentes helicoidais** apresentam rendimentos relativamente elevados (95%), velocidades até 25-50 m/s e relações de transmissão até 5.

No caso do **parafuso sem-fim** as relações de transmissão são mais elevadas, podendo atingir 100 e velocidades da ordem dos 70 m/s.

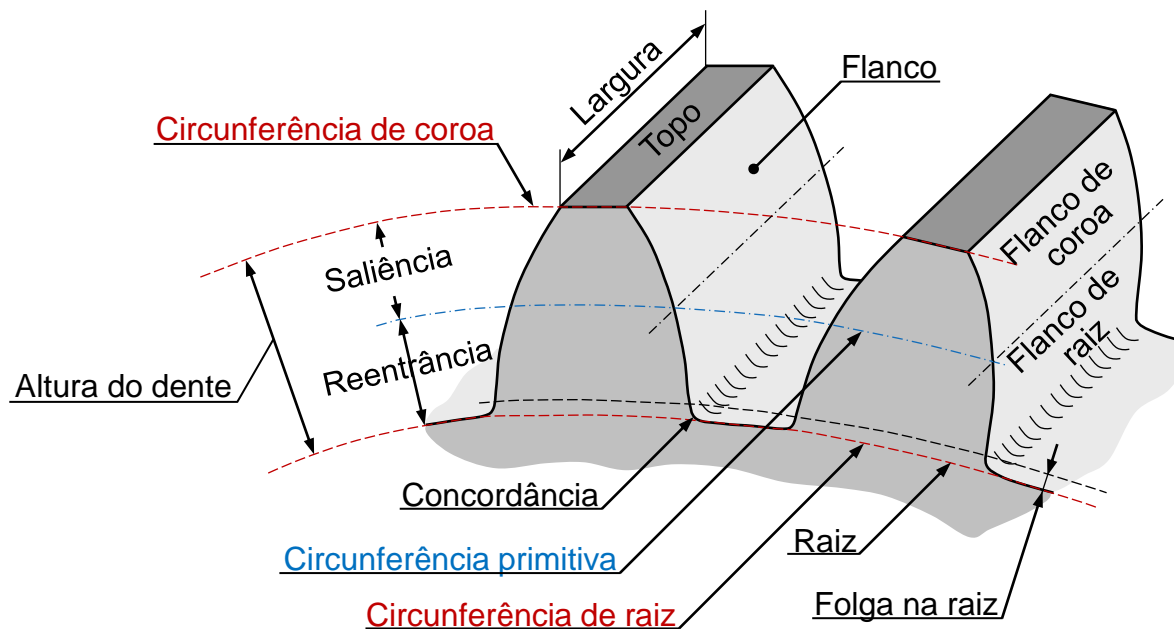
Devido ao **elevado escorregamento** que apresentam podem surgir problemas de **aquecimento e perda de rendimento** (45-70%). Este tipo de engrenagem pode ter uma, duas ou **três entradas**, sendo o avanço igual à distância axial percorrida pelo sem-fim quando a roda efetua uma volta completa.

Com o intuito de **controlar o desgaste e a geração de calor**, devem selecionar-se diferentes materiais para o sem-fim (**aço**) e para roda (ferro fundido ou **bronze**), devendo funcionar com lubrificação em banho de óleo.

## 4. Terminologia Específica

### Terminologia Básica

A figura abaixo ilustra um **setor de uma roda cilíndrica exterior de dentado reto**, na qual se inclui alguma terminologia básica relativa ao referido dentado.



Setor de uma roda cilíndrica exterior de dentes retos

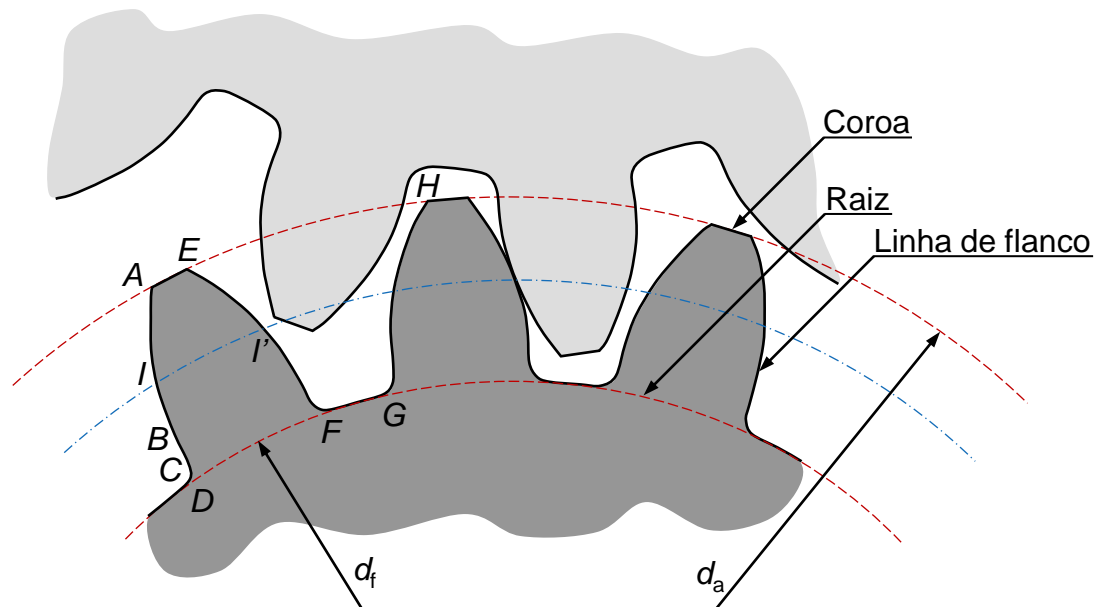
Considere-se agora que uma engrenagem cilíndrica exterior de dentes retos é **intercetada por um plano perpendicular ao eixo das rodas**. Deste modo, obtém-se o **perfil transversal do dentado**, tal como se representa no diapositivo seguinte.

## 4. Terminologia Específica

### Terminologia Básica

Assim, no **perfil transversal do dentado** podem distinguir-se os seguintes elementos:

- **Coroa** ou **cabeça**, arco de circunferência que delimita superiormente o dente (segmento  $AE$ ).
- **Raiz** ou **pé**, arco de circunferência que delimita inferiormente o dente (segmento  $DF$ ).
- **Linha de flanco**, parte do perfil do dente compreendida entre a coroa e a raiz (segmentos  $AD$  e  $EF$ ).



Terminologia fundamental de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos

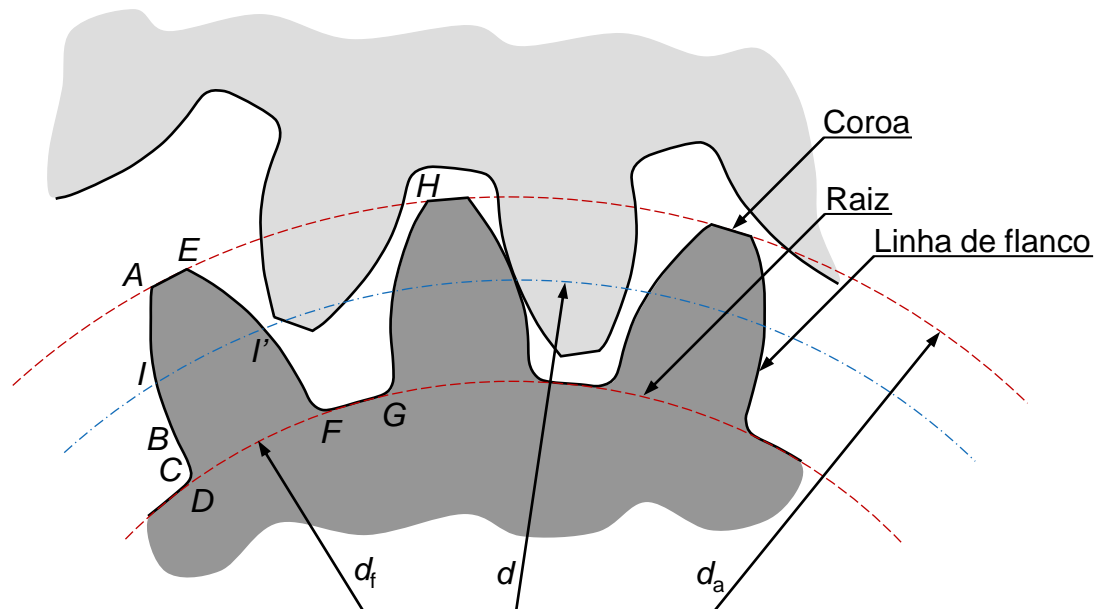
Às **superfícies cilíndricas** coaxiais com o eixo da roda que contêm as coroas e as raízes dos dentes dá-se o nome de **superfície de coroa** e **superfície de raiz**, respetivamente. Por conseguinte, os diâmetros destas superfícies denominam-se **diâmetro de coroa** ( $d_a$ ) e **diâmetro de raiz** ( $d_f$ ).

## 4. Terminologia Específica

### Terminologia Básica

O **cilindro primitivo** apresenta um diâmetro intermédio entre o diâmetro de coroa e o diâmetro de raiz. O diâmetro primitivo é representado simplesmente pela letra  $d$ , tal como se pode observar na figura abaixo.

Refira-se ainda que o **diâmetro de base** ( $d_b$ ) tem um diâmetro superior ao do da circunferência de raiz, como se verá ulteriormente.



Terminologia fundamental de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos

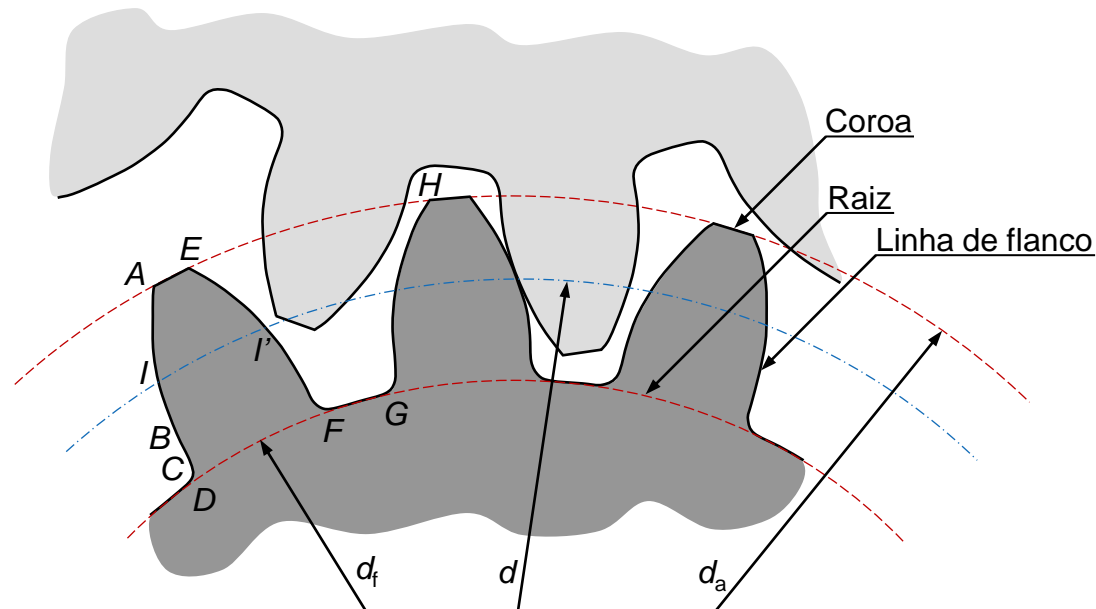
No caso de uma **transmissão do tipo pinhão-cremalheira**, os cilindros e as circunferências anteriormente referidos para o caso das rodas cilíndricas transformam-se em **planos e retas**, respetivamente.

## 4. Terminologia Específica

### Terminologia Básica

O **flanco do dente** é a parte exterior do dente compreendida **entre a raiz e a coroa**. Aos flancos que se podem sobrepor por rotação da roda denominam-se **flancos homólogos** (e.g. segmentos *AD* e *GH*).

Por outro lado, aos **flancos simétricos** em relação ao eixo de cada dente designam-se **flancos anti-homólogos** e, por conseguinte, não se podem sobrepor (e.g. segmentos *AD* e *EF*).



Terminologia fundamental de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos

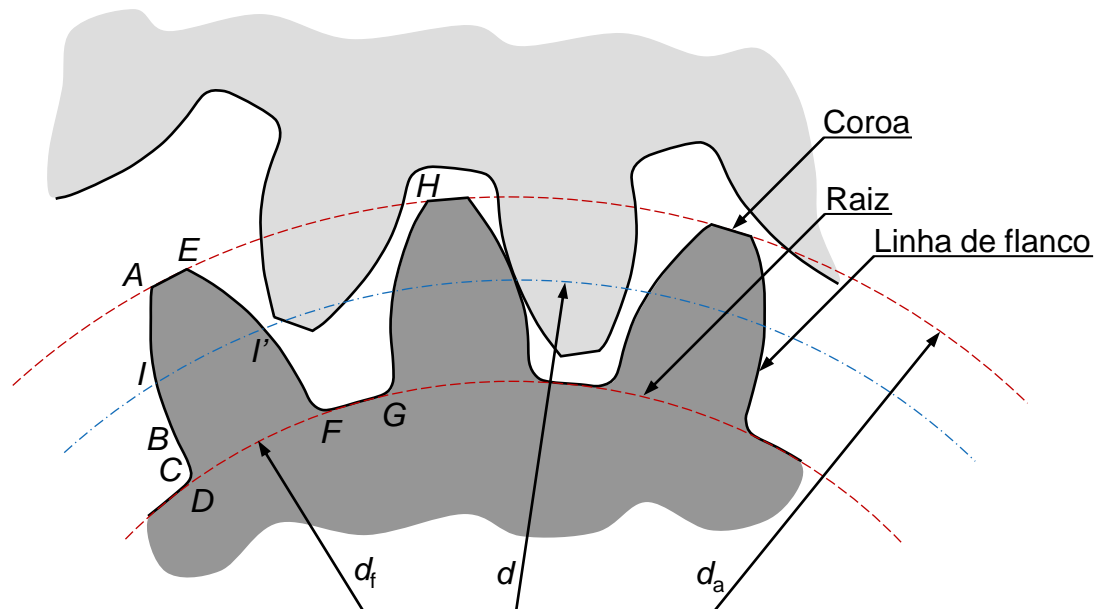
A **circunferência primitiva** representa uma circunferência teórica sobre a qual todos os cálculos são baseados. Numa engrenagem as circunferências primitivas são tangentes no **ponto primitivo**.

## 4. Terminologia Específica

### Terminologia Básica

O **flanco de um dente** pode ser dividido em **três partes** distintas, a saber:

- Flanco **ativo**, parte do flanco onde ocorre o contacto com os dentes da outra roda (segmento  $AB$ ).
- Flanco **útil**, parte do flanco que pode ser usada como flanco ativo no engrenamento (segmento  $AC$ ).
- Flanco de **concordância**, parte do flanco não utilizável, concordância com a raiz (segmento  $CD$ ).



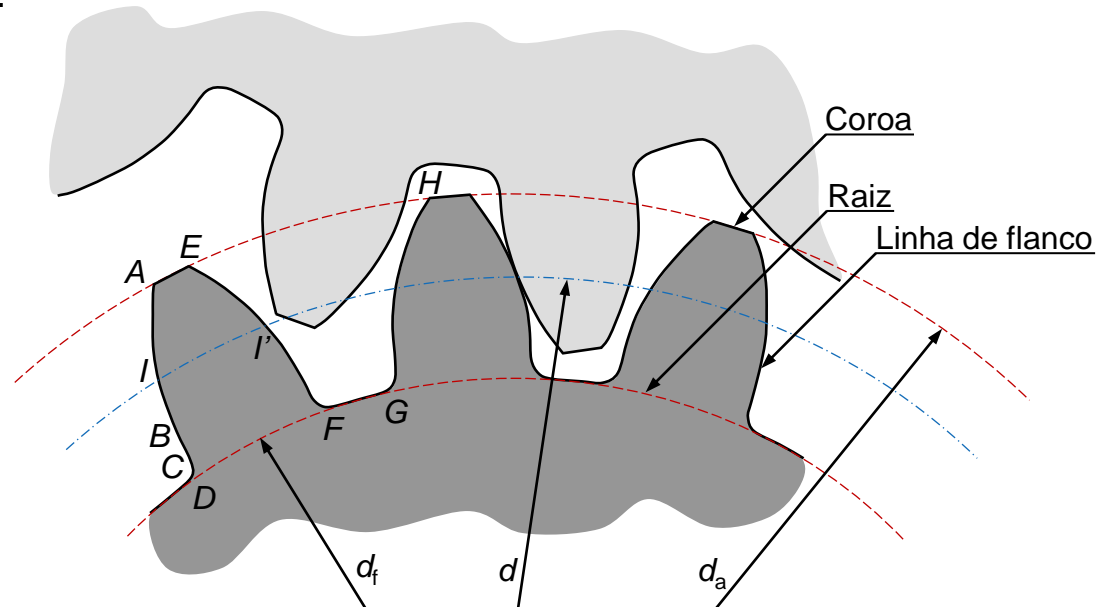
Terminologia fundamental de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos

## 4. Terminologia Específica

### Terminologia Básica

Os flancos dos dentes podem ainda ser **divididos pela circunferência primitiva**. Assim, podem distinguir-se:

- **Flanco de coroa**, parte do flanco compreendida entre a superfície de coroa e a superfície primitiva (segmento *AI*).
- **Flanco de raiz**, parte do flanco compreendida entre a superfície primitiva e a superfície de raiz (segmento *ID*).



Terminologia fundamental de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos

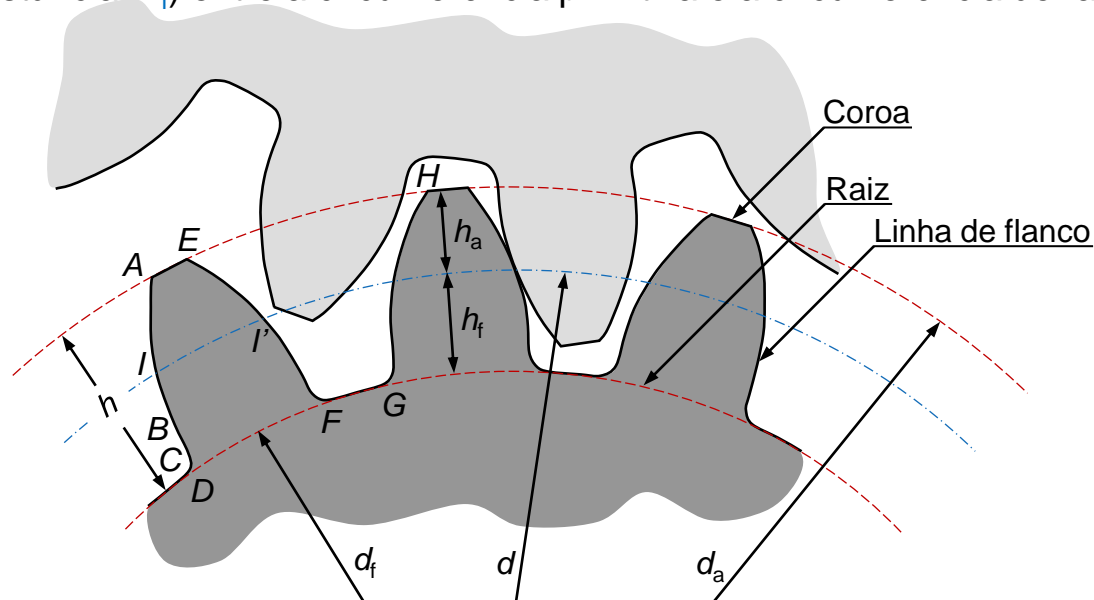
**Ponto primitivo** é o ponto de tangência de duas circunferências primitivas de **engrenagens com perfis de dentes conjugadas**.

## 4. Terminologia Específica

### Terminologia Básica

A superfície primitiva divide o dente em duas partes distintas, nomeadamente:

- **Saliência**, parte do dente compreendida entre a superfície de coroa e a superfície primitiva, sendo medida pela distância ( $h_a$ ) entre a circunferência de coroa e a circunferência primitiva.
- **Reentrância**, parte do dente compreendida entre a superfície primitiva e a superfície de raiz, sendo medida pela distância ( $h_f$ ) entre a circunferência primitiva e a circunferência de raiz.



Terminologia fundamental de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos

A **altura do dente** ( $h$ ) é a distância entre a circunferência de coroa e a circunferência de raiz, ou seja, é igual à soma dos valores da saliência e da reentrância, isto é,  $h=h_a+h_f$ .

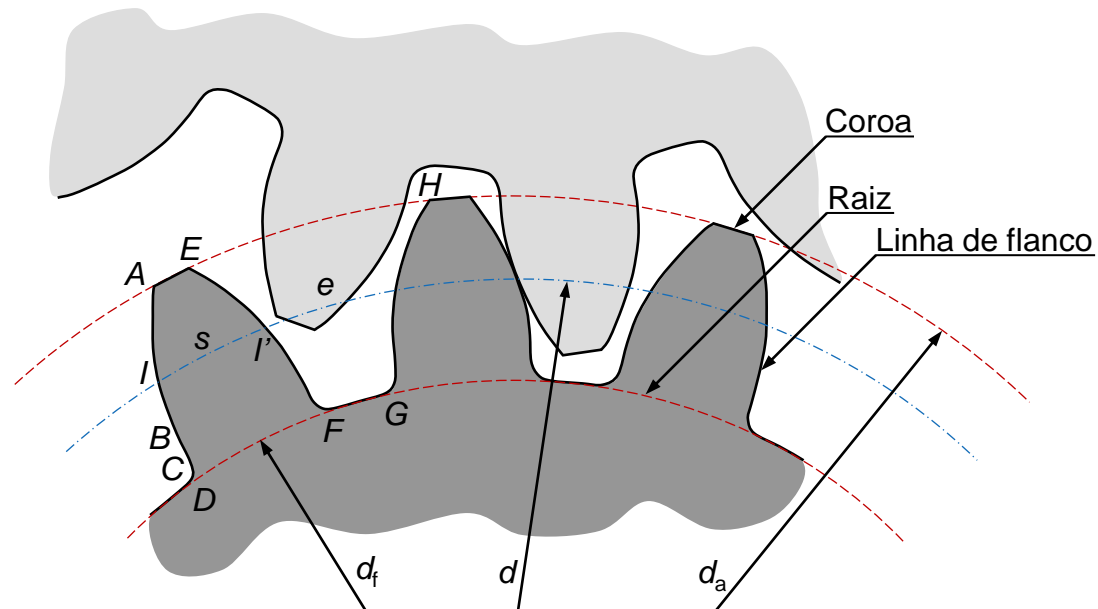


## 4. Terminologia Específica

### Terminologia Básica

Numa roda dentada, podem ainda identificar-se os seguintes elementos:

- **Entredente**, o espaço compreendido entre dois dentes consecutivos.
- **Espessura do dente ( $s$ )**, comprimento do arco da circunferência primitiva compreendido entre os pontos primitivos dos flancos anti-homólogo e homólogo do mesmo dente.



Terminologia fundamental de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos

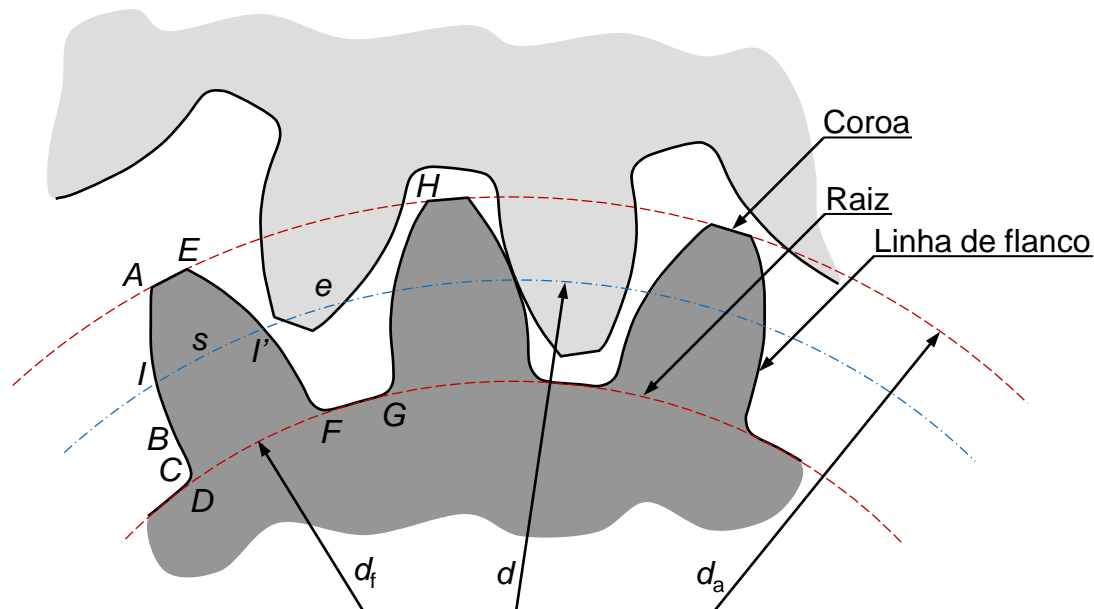
- **Intervalo entre dentes ( $e$ )**, comprimento do arco da circunferência primitiva compreendido entre os pontos primitivos dos flancos anti-homólogo e homólogo de dois dentes consecutivos.

## 4. Terminologia Específica

### Terminologia Básica

Numa roda dentada, podem ainda identificar-se os seguintes elementos:

- **Largura do dente ( $b$ )**, o comprimento do perfil axial do dente.
- **Passo primitivo** ou, simplesmente, **passo ( $p$ )**, comprimento do arco da circunferência primitiva compreendido entre dois flancos homólogos e consecutivos, ou seja,  $p=s+e$ .



Nomenclatura fundamental de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos

- **Passo normal ( $p_n$ )**, distância que separa dois flancos homólogos consecutivos. Trata-se, portanto, de um segmento de reta.

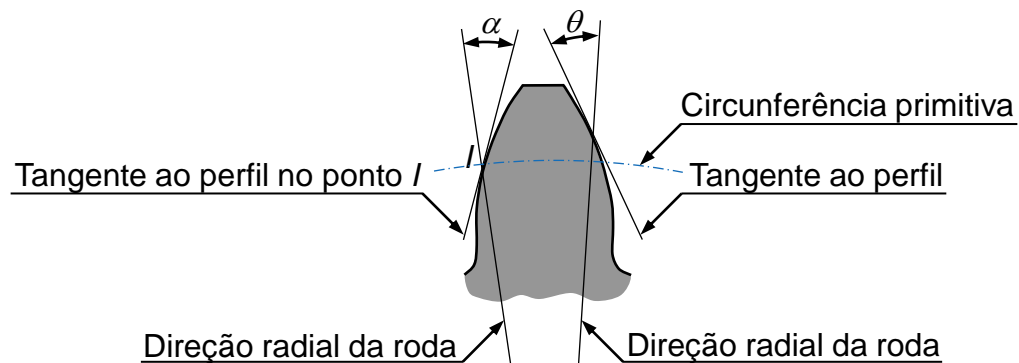
## 4. Terminologia Específica

### Ângulo de Pressão

Ao ângulo agudo formado pela tangente ao perfil do dente num ponto qualquer e pelo raio da roda nesse ponto chama-se **ângulo de incidência** ( $\theta$ ), tal como ilustra a figura abaixo.

Na situação em que o ponto considerado para a tangência é o **ponto primitivo** ( $I$ ), então o ângulo é denominado **ângulo de pressão** ( $\alpha$ ).

O ângulo de pressão é o ângulo que define a direção da força de engrenamento que a roda motora exerce sobre a movida.



Representação dos ângulos de incidência ( $\theta$ ) e de pressão ( $\alpha$ )

## 4. Terminologia Específica

### Conceito de Módulo

Com o intuito de relacionar as dimensões características dos dentes defina-se **passo angular** de uma roda dentada como sendo

$$p_{\text{ang}} = \frac{p}{r} \quad (7.1)$$

em que  $p$  é o **passo primitivo**, e  $r$  representa o **raio primitivo** da roda. Por seu lado, o passo primitivo é expresso do seguinte modo

$$p = \frac{2\pi r}{z} \quad (7.2)$$

onde  $z$  é o **número de dentes** da roda. Da substituição de (7.1) em (7.2) resulta que

$$p_{\text{ang}} = \frac{2\pi}{z} \quad (7.3)$$

Este **parâmetro não é conveniente** na definição de engrenagens, uma vez que nele aparece explicitamente o número irracional  $\pi$ !

Por isso, define-se uma outra grandeza denominada **módulo**, que é indubitavelmente mais apropriada e conveniente na definição das rodas dentadas.

Deve desde já referir-se que **só é possível o engrenamento de rodas dentadas se estas tiverem o mesmo módulo**, a fim de que os espaços entre os dentes sejam compatíveis.

## 4. Terminologia Específica

### Conceito de Módulo

O **módulo**, que é expresso em milímetros, é, **por definição**, estabelecido do seguinte modo

$$m = \frac{P}{\pi} \quad (7.4)$$

Substituindo a equação (7.2) em (7.4) vem que

$$m = \frac{2\pi r}{z\pi} = \frac{d}{z} \quad (7.5)$$

que é também uma definição de módulo. Alternativamente, a equação (7.5) pode ser reescrita como

$$d = mz \quad (7.6)$$

Com efeito, o **módulo**, conjuntamente com o **número de dentes**, **define completa e perfeitamente** qualquer roda dentada.

Pode dizer-se que o **módulo está diretamente** relacionado com a **dimensão dos dentes** e, por conseguinte, com a sua **resistência**.

O **número de dentes** de uma roda dentada está diretamente associado à **relação de transmissão** de uma engrenagem.

## 4. Terminologia Específica

### Conceito de Módulo

O **módulo** é um **parâmetro normalizado** que visa uniformizar os perfis adotados para os dentes das engrenagens e facilitar a obtenção de máquinas e ferramentas.

A tabela abaixo lista valores normalizados do módulo, cuja escolha se deve iniciar pelas **séries mais baixas**.

Valores normalizados do módulo expressos em milímetros

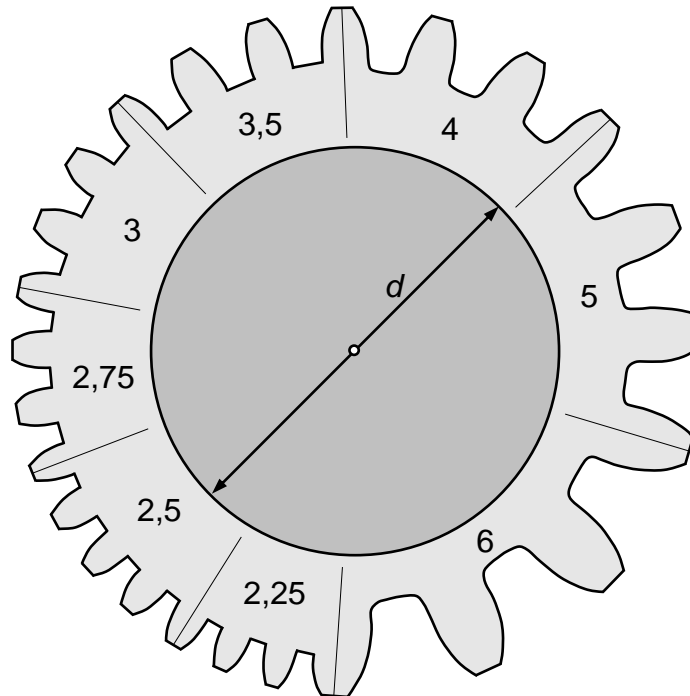
Série 1	Série 2	Série 3	Série 1	Série 2	Série 3
0,1				3,5	
	0,15				3,75
0,2			4		
	0,25			4,5	
0,3			5		
	0,35			5,5	
0,4			6		
	0,45				6,5
0,5				7	
	0,55		8		
0,6				9	
		0,65	10		
	0,7			11	
	0,75		12		
0,8				14	
	0,9		16		
1				18	
1,25			20		
1,5				22	
	1,75		25		
2				28	
	2,25		32		
2,5				36	
	2,75		40		
3				45	
		3,25	50		

## 4. Terminologia Específica

### Conceito de Módulo

A figura abaixo ilustra a **variação do tamanho e do número de dentes** de rodas dentadas, para o mesmo diâmetro primitivo em função do módulo. Da análise desta figura observa-se que com o **aumento do módulo aumenta-se também o tamanho do dente** e, conseqüentemente, a sua **resistência**.

Por outro lado, com o **aumento do módulo diminui-se o número de dentes da roda**. É, pois, evidente que para um diâmetro primitivo constante, se se considerar um módulo pequeno resulta numa roda com muitos dentes, em que os dentes são de pequenas dimensões.



Relação entre o módulo, tamanho dos dentes e número de dentes

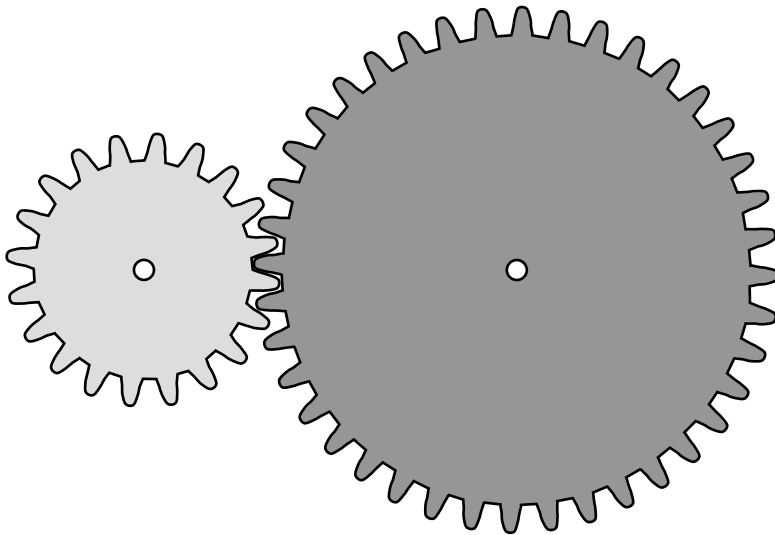
## 4. Terminologia Específica

### Conceito de Módulo

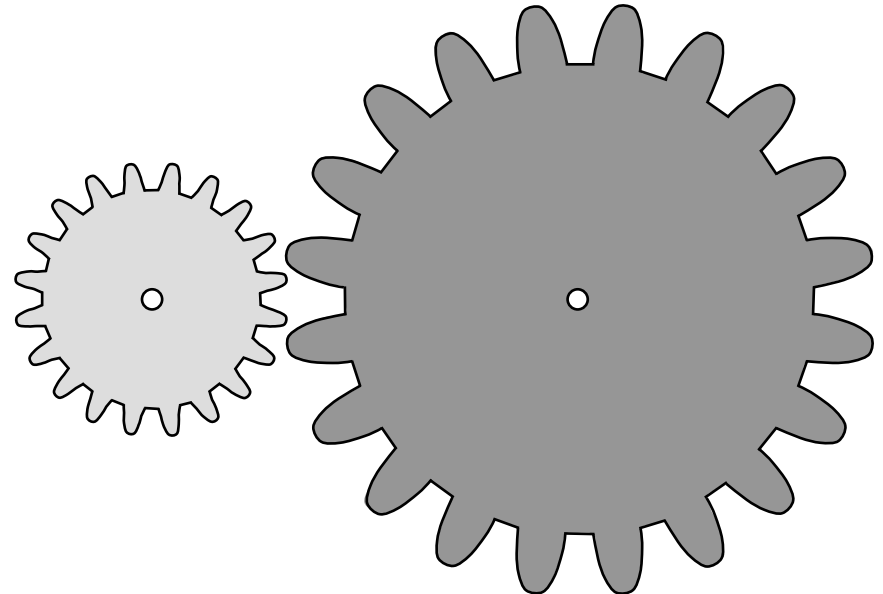
Tal como foi referido anteriormente, **duas rodas dentadas só podem funcionar corretamente se tiverem o mesmo módulo**. A fim de se demonstrar este princípio considere-se duas engrenagens com as seguintes características:

- $m_1=m_2=1$  mm,  $z_1=20$  e  $z_2=40$  (cf. figura da esquerda abaixo)
- $m_1=1$  mm,  $m_2=2$  mm,  $z_1=z_2=20$  (cf. figura da direita abaixo)

As figuras abaixo ilustram estas engrenagens onde são visíveis as diferenças pelo facto de se **considerar ou não o mesmo módulo**. Engrenagens com **maior número de dentes** proporcionam transmissões mais **suaves** e evitam interferências.



Engrenagem com  $m_1=m_2=1$  mm,  $z_1=20$  e  $z_2=40$



Engrenagem com  $m_1=1$  mm,  $m_2=2$  mm e  $z_1=z_2=20$

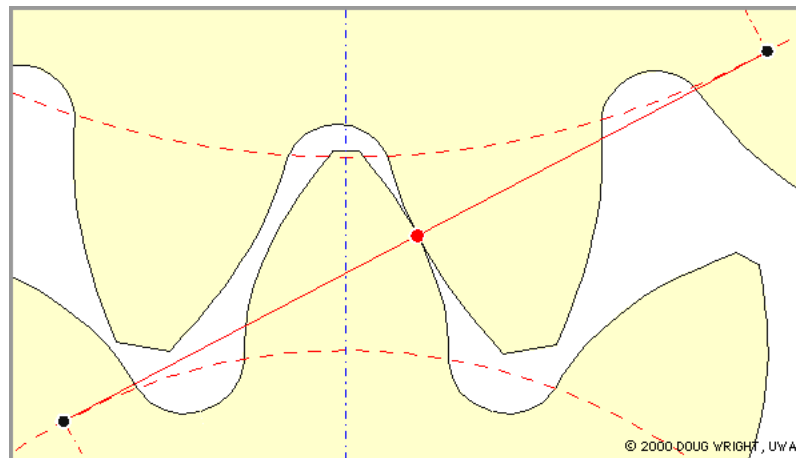
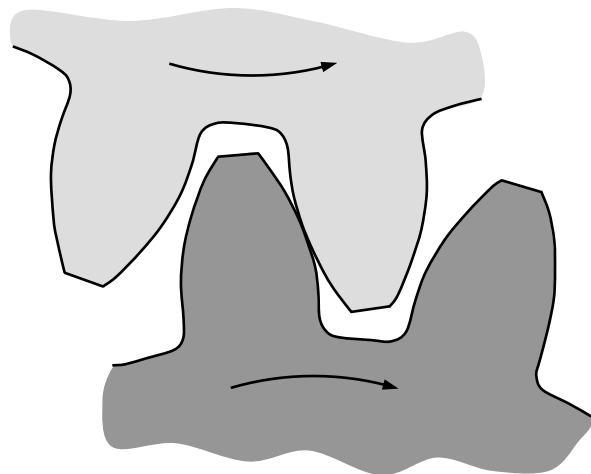


## 5. Perfis dos Dentes das Rodas

### Perfis Conjugados

Uma engrenagem só funcionará corretamente se, durante o período de contacto entre as superfícies dos dentes, de uma e outra roda, aquelas **forem permanentemente tangentes**. O funcionamento correto diz respeito à garantia na transmissão do movimento com **relação de transmissão constante**.

Quando existe tangência entre as superfícies de dois dentes de duas rodas engrenadas, então estes perfis dos dentes denominam-se **perfis conjugados**, tal como se ilustra nas figuras abaixo.



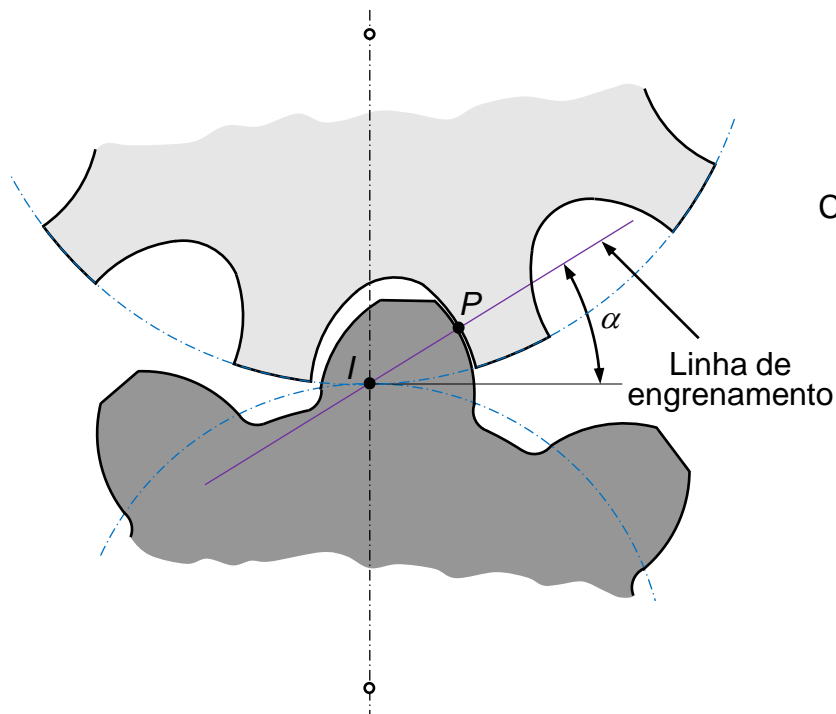
Setores de duas rodas dentadas com perfis conjugados e engrenamento de perfis conjugados

Os perfis dos dentes devem ser projetados de modo a **garantir uma relação de transmissão constante** durante todo o engrenamento. Na verdade, esta ideia traduz o **princípio fundamental do engrenamento**, tal como se analisará mais detalhadamente nas secções seguintes.

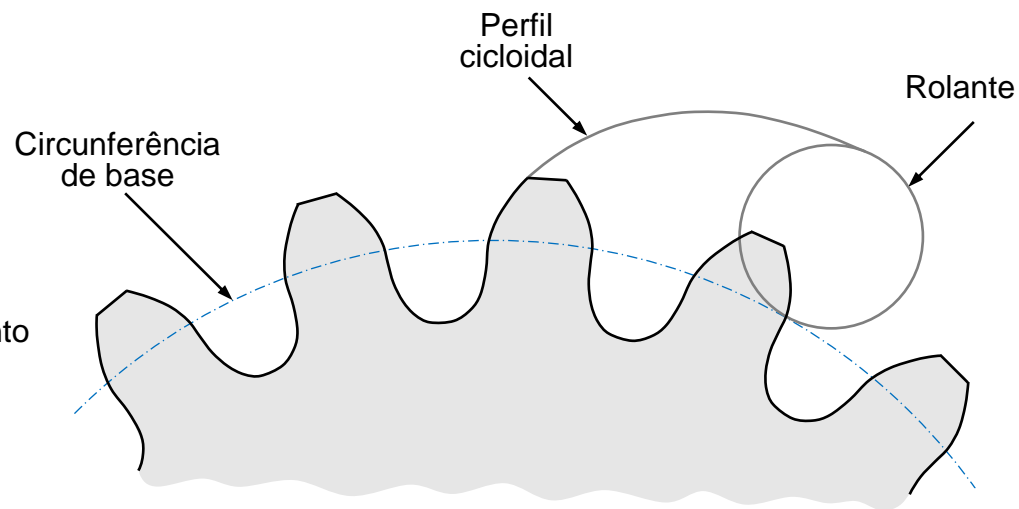
## 5. Perfis dos Dentes das Rodas

### Perfis em Arco de Circunferência e Cicloidal

São três os principais tipos de perfis de dentes que garantem a ação conjugada, nomeadamente: o perfil em **arco de circunferência** (Wildhaber-Novikov), o perfil **cicloidal** e o perfil em **evolvente de circunferência**.



Perfil de dentes em **arco de circunferência**



Perfis dos dentes são **cicloidais**

**Cicloide** é uma curva traçada por um ponto de uma circunferência, dita rolante, quando esta rola sem escorregar ao longo de uma reta ou sobre uma circunferência.

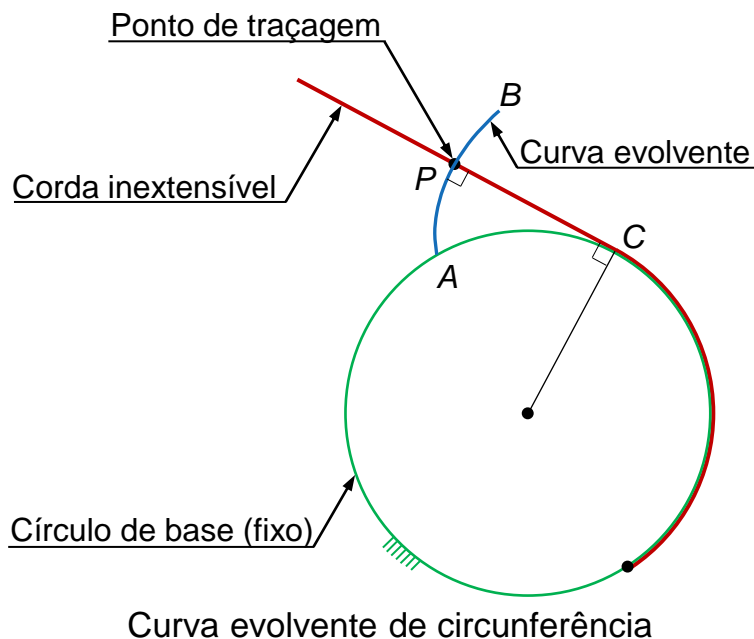
## 6. Perfil em Evolvente de Circunferência

### Curva Evolvente de Circunferência

A maioria das **engrenagens de uso corrente** utiliza dentes com perfis em evolvente de circunferência. Com este tipo de perfil evitam-se muitos dos inconvenientes associados ao dentado cicloidal, tais como os choques e as dificuldades de fabrico.

Uma evolvente de circunferência é a **curva descrita por um ponto de uma reta que rola sem escorregar em torno de um círculo**, denominado círculo de base, tal como se ilustra na figura abaixo.

A reta, que é representada por uma **corda esticada e inextensível**, é sempre tangente ao círculo de base.



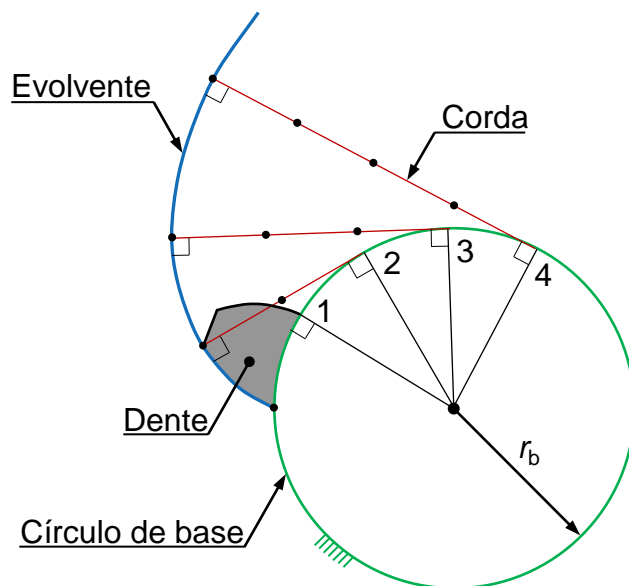
## 6. Perfil em Evolvente de Circunferência

### Dente em Evolvente de Circunferência

A figura abaixo ilustra a evolvente de um circunferência e um **dente obtido a partir da curva evolvente**.

Pode observar-se que quanto maior for o raio do círculo de base, menos acentuada será a evolvente.

No caso de uma cremalheira (roda de raio infinito), a evolvente é uma reta.



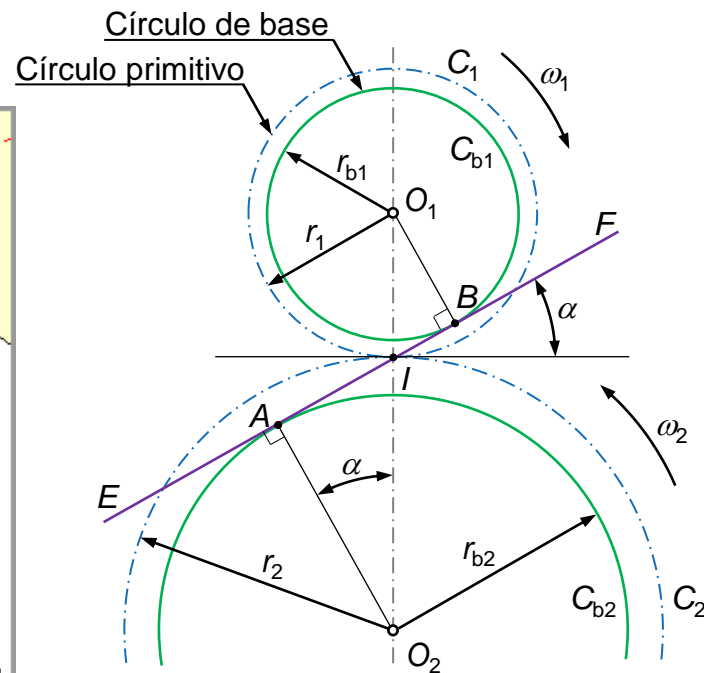
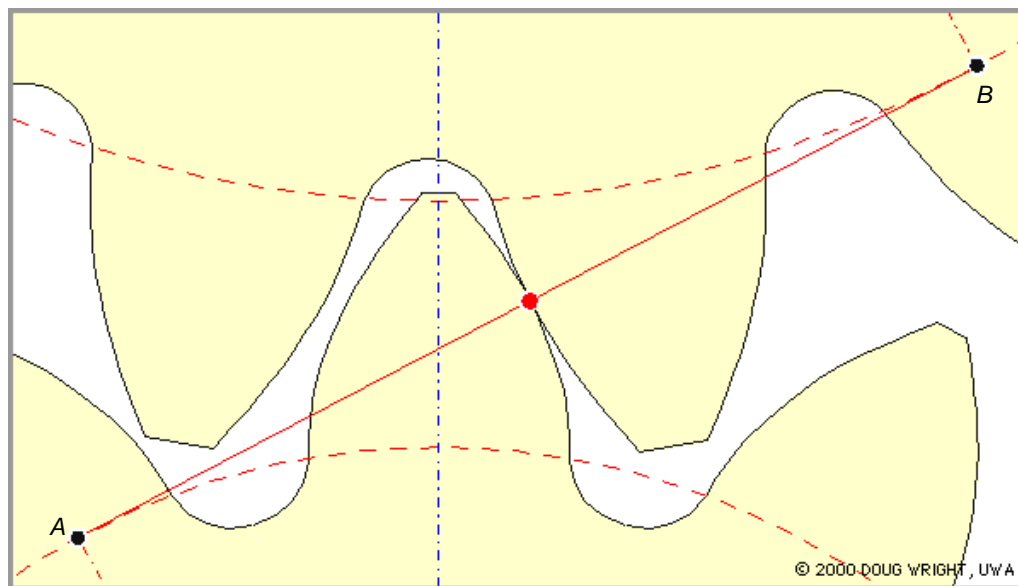
Dente gerado em evolvente de circunferência

## 6. Perfil em Evolvente de Circunferência

### Elementos Geométricos

Quando um dentado tem perfil em evolvente de circunferência, a normal a esse perfil do dente é tangente à circunferência de base.

Assim, torna-se necessário estabelecer uma relação entre as circunferências de base (que servem para gerar o perfil dos dentes em evolvente de círculo) e as circunferências primitivas (que ajudam a definir uma roda dentada).



Engrenamento de rodas dentadas e representação da linha de ação ou de engrenamento

## 6. Perfil em Evolvente de Circunferência

### Linha de Engrenamento

Quando um dentado tem perfil em evolvente de circunferência, a **normal a esse perfil do dente é tangente à circunferência de base**.

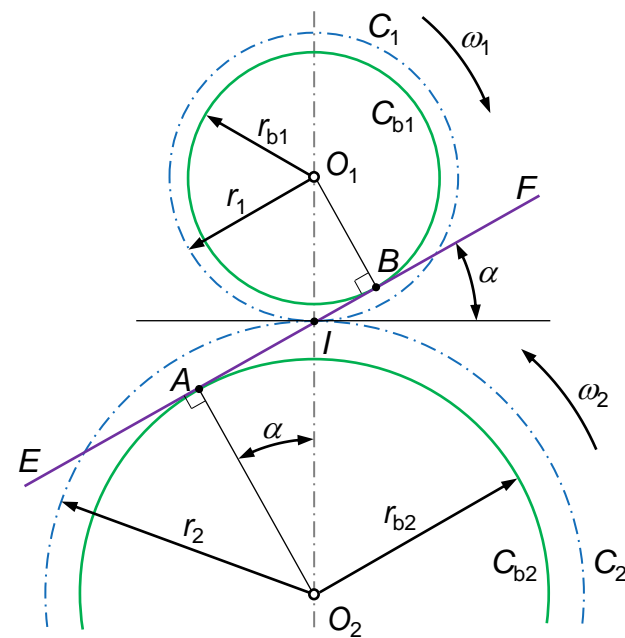
Assim, torna-se necessário estabelecer uma relação entre as **circunferências de base** (que servem para gerar o perfil dos dentes em evolvente de círculo) e as **circunferências primitivas** (que ajudam a definir uma roda dentada).

Para que **não haja escorregamento** entre os círculos primitivos é condição *sine qua non* que a **relação entre os seus raios primitivos** seja constante, e a mesma que a relação entre os raios de base, ou seja

$$i = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}$$

Como a corda, representada na figura do lado pelo segmento de reta  $EF$ , é **sempre tangente aos círculos de base**, então este segmento intersesta a linha de centros no mesmo ponto de contacto entre os círculos primitivos (*i.e.* o ponto primitivo  $I$ ), qualquer que seja o valor de  $\alpha$ .

O ângulo  $\alpha$  representa o **ângulo de pressão**.



Linha de ação ou de engrenamento

## 6. Perfil em Evolvente de Circunferência

### Linha de Engrenamento

O segmento  $EF$  denomina-se de **linha da ação**, linha de **engrenamento**, linha de **pressão**, linha de **geração** ou ainda linha **de forças**.

Esta linha não altera a sua direção **tangente às circunferências de base**.

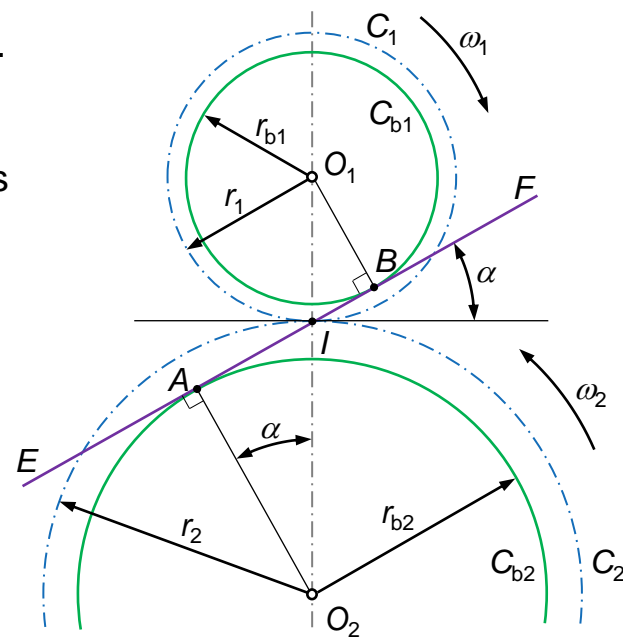
Atendendo a que a linha de ação é sempre perpendicular à evolvente no ponto de contacto, a condição de transmissão uniforme de movimento é garantida, isto é, com relação de transmissão constante.

Da análise da figura do lado podem ser escritas as seguintes relações

$$r_{b1} = r_1 \cos \alpha$$

$$r_{b2} = r_2 \cos \alpha$$

Estas duas equações estabelecem a **relação entre os raios primitivos e os raios de base** de uma engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto com perfil em evolvente de circunferência.



Linha de ação ou de engrenamento

## 6. Perfil em Evolvente de Circunferência

### Geração do Perfil em Evolvente

Considere-se um **qualquer ponto C**, situado entre *A* e *B* no segmento de reta *EF*, tal como representado na figura abaixo.

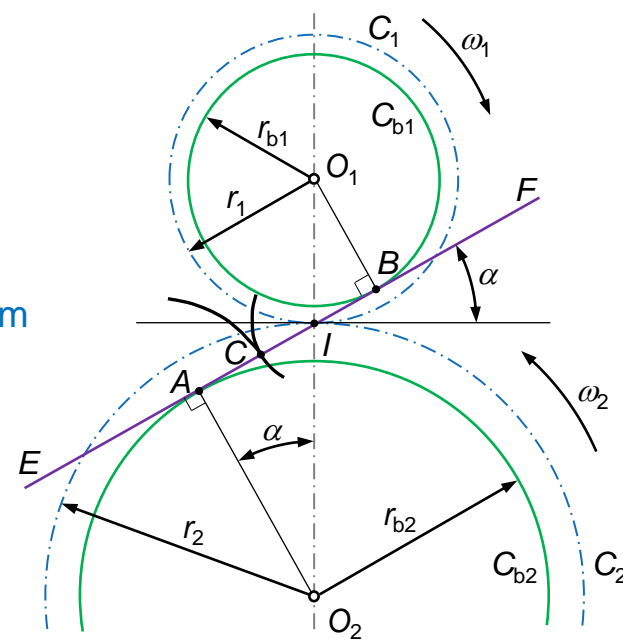
Supondo que a corda é cortada em *C*, então resultam dois segmentos da corda que podem ser usados para **gerar os perfis em evolvente dos círculos de base** das rodas 1 e 2.

A figura abaixo ilustra parte dos perfis gerados pelo ponto *C*. Observa-se que ambas são curvas evolventes, cuja normal num qualquer ponto é tangente à respetiva circunferência de base.

Verifica-se **que o ponto de contacto se situa no segmento de reta EF**.

Esta situação traduz o facto de que numa engrenagem com dentes em perfil em evolvente de círculo, **os dentes de uma e outra roda rolam sem escorregar** uns sobre os outros durante o engrenamento.

Este assunto está diretamente relacionado com o **princípio fundamental do engrenamento** que será objeto de estudo na secção seguinte deste documento.



Geração do perfil em evolvente



## 6. Perfil em Evolvente de Circunferência

### Geração do Perfil em Evolvente

A direção da **velocidade linear do ponto C** é tangente às circunferências de base das rodas 1 e 2. Pelo que dividindo o valor absoluto desta velocidade linear pelo raio de base de cada roda, obtêm-se as respectivas velocidades de rotação das rodas 1 e 2.

Este facto é verificado para qualquer ponto situado no segmento de reta *EF*. Assim, pode escrever-se a seguinte relação

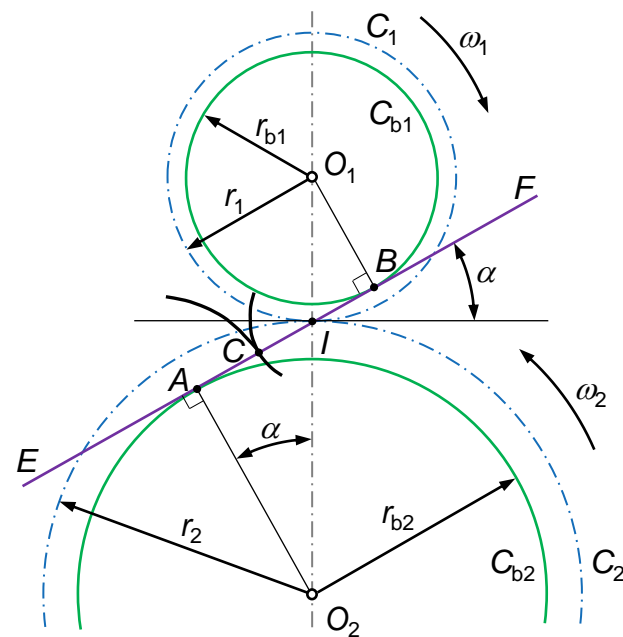
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}$$

em que  $\omega_1$  e  $\omega_2$  representam as velocidades angulares das rodas 1 e 2, respetivamente.

Fica assim, demonstrado que **o perfil em evolvente de circunferência** obedece à condição de que é **constante a relação de transmissão**.

Também se pode observar que a curva evolvente não pode ser gerada para o interior das circunferências de base.

Uma vez que o ângulo de pressão é estabelecido *a priori*, não poderá existir contacto entre os dentes **fora do segmento de reta AB**.



Geração do perfil em evolvente

## 6. Perfil em Evolvente de Circunferência

### Vantagens do Perfil em Evolvente

O dentado em evolvente é o **mais utilizado em engrenagens**, dado o leque de vantagens que apresenta. De seguida resumem-se algumas das características que tornam atrativos os dentados em evolvente de circunferência

- É **possível o engrenamento** entre rodas com dentes com perfil em evolvente, mesmo quando **existe variação do entre-eixo**, desgaste dos apoios ou deformação dos elementos de transmissão. Esta circunstância altera, todavia, o valor do ângulo de pressão.
- Os perfis dos dentes em evolvente de circunferência apresentam uma **curvatura com um sentido único**, tornando fácil a maquinagem dos dentes pelos processos mais vulgares de talhe.
- Os dentes com perfil em evolvente de circunferência proporcionam **maior área na raiz do dente**, tornando-os mais resistentes e com **maior capacidade de carga** quando comparados com os dentados cicloidais com características idênticas (e.g. mesmo módulo).
- A linha de ação ou de linha de engrenamento é um segmento de reta que forma com a tangente às circunferências primitivas um **ângulo de pressão que é constante** durante a transmissão do movimento.
- Uma roda dentada com perfis dos dentes em evolvente de circunferência pode funcionar com qualquer outra roda, desde de que ambas apresentem o mesmo módulo.

# 7. Princípio Fundamental do Engrenamento

## Velocidade do Ponto Primitivo

As rodas 1 e 2, representadas parcialmente na figura abaixo, rodam com **velocidades angulares**  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , respetivamente, então pode definir-se **relação de transmissão** do seguinte modo

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

em que nesta definição se admite que a roda 1 é a motora, sendo a roda 2 movida.

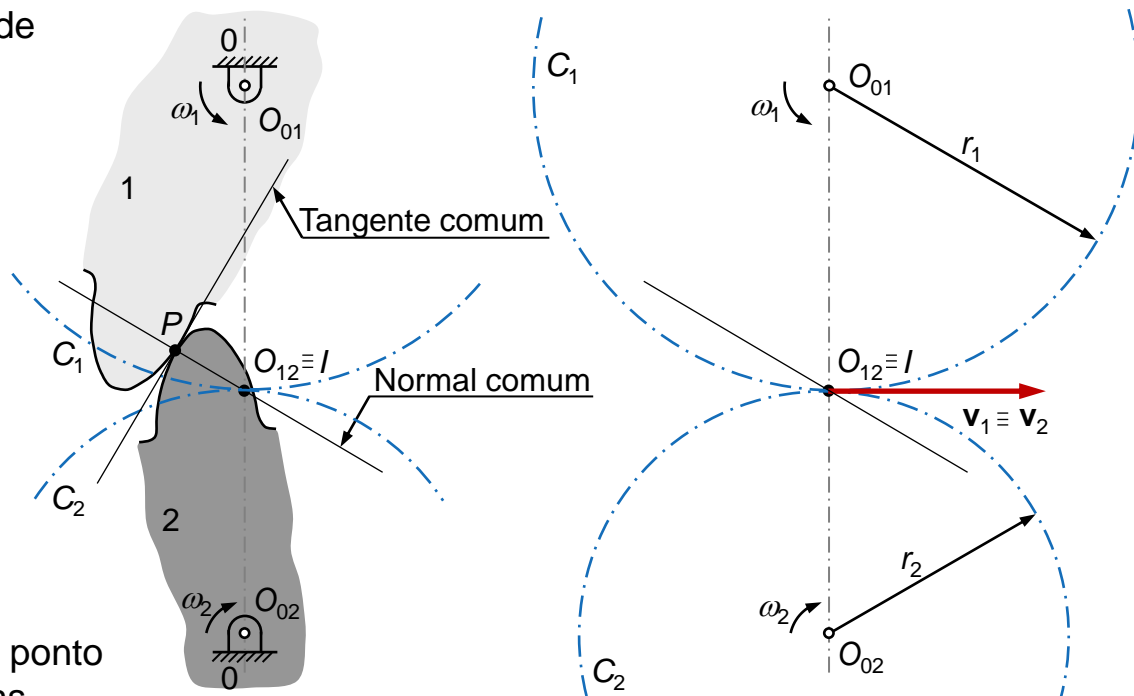
A **velocidade linear do ponto primitivo** pode ser calculada pela roda 1 ou pela roda 2, resultando a mesma quantidade. Assim, pode escrever-se que

$$v_1 = v_2 \Rightarrow \omega_1 \overline{O_{01}I} = \omega_2 \overline{O_{02}I}$$

Esta **equação pode ser reescrita** como

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{O_{02}I}}{\overline{O_{01}I}}$$

A relação de velocidades angulares é inversamente proporcional à relação dos segmentos que definem as distâncias do ponto primitivo aos centros de rotação das rodas.



Velocidade do ponto primitivo

## 7. Princípio Fundamental do Engrenamento

### Velocidade do Ponto de Contacto

O facto de o **ponto primitivo ser fixo** e de haver **constância na relação de velocidades angulares** das rodas, traduz o **princípio fundamental do engrenamento**. Às curvas dos perfis dos dentes que obedecem a este princípio chamam-se **curvas conjugadas**.

A **lei fundamental da ação conjugada** entre dentes de uma engrenagem pode enunciar-se do seguinte modo, no engrenamento de duas rodas dentadas, **a normal comum às superfícies dos dentes no ponto de contacto tem que intersestar a linha de centros sempre no ponto primitivo**.

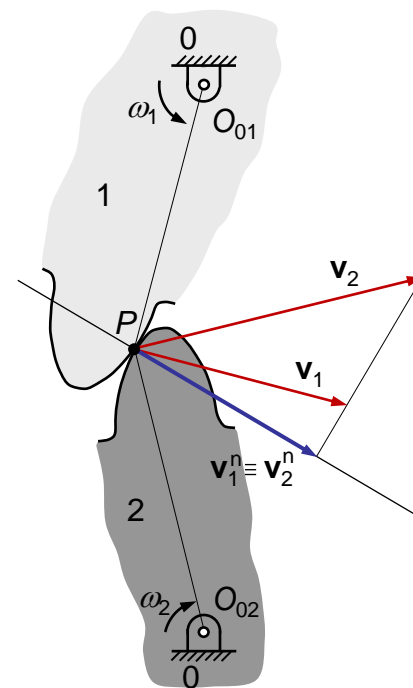
Por conseguinte, **é constante a relação de velocidades angulares das rodas motora e movida**, uma vez que não se admite escorregamento. A constância de relação de transmissão é, na verdade, um objetivo associado ao funcionamento das engrenagens.

Atendendo a que o **ponto de contacto pertence aos corpos 1 e 2**, a velocidade periférica deste ponto pode ser calculada do seguinte modo

$$v_1 = \omega_1 \overline{O_{01}P}$$

$$v_2 = \omega_2 \overline{O_{02}P}$$

As **projeções destas velocidades**, na direção normal no ponto de contacto, têm de ter a **mesma intensidade**, se assim não fosse, os dentes penetrariam ou afastar-se-iam um do outro.



Velocidades do ponto de contacto