



ÓRGÃOS DE MÁQUINAS II

Licenciatura em Engenharia Mecânica



Elaborado por Paulo Flores - 2023

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade do Minho

Campus de Azurém

4804-533 Guimarães

pflores@dem.uminho.pt



T.09 – ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES INCLINADOS

- 1. Introdução**
- 2. Geração de Dentes Inclinação**
- 3. Terminologia Específica**
- 4. Relações Geométricas e Proporções dos Dentes**
- 5. Parâmetros de Desempenho**
- 6. Número de Dentes Equivalente**
- 7. Rodas Cruzadas**

1. Introdução

Generalidades

As figuras abaixo evidenciam as diferenças entre uma engrenagem cilíndrica de dentes retos e uma engrenagem cilíndrica de dentes inclinados. Nestas últimas, o **ângulo de inclinação dos dentes** é denominado **ângulo de hélice**. O ângulo de inclinação dos dentes varia entre **15 e 30°**.



(a)



(b)

Engrenagens cilíndricas exteriores:
(a) Dentes retos; (b) Dentes inclinados



Roda cilíndrica exterior de dentes inclinados de primeira geração

As engrenagens cilíndricas de dentes inclinados de **primeira geração** eram constituídas pela associação em paralelo de diversas rodas de dentes retos, em que entre elas existia um ligeiro desfasamento, tal como se pode observar na figura acima à direita.

Com esta associação de rodas cilíndricas de dentes retos conseguiam-se transmissões **mais suaves** e com **maior capacidade de carga**.

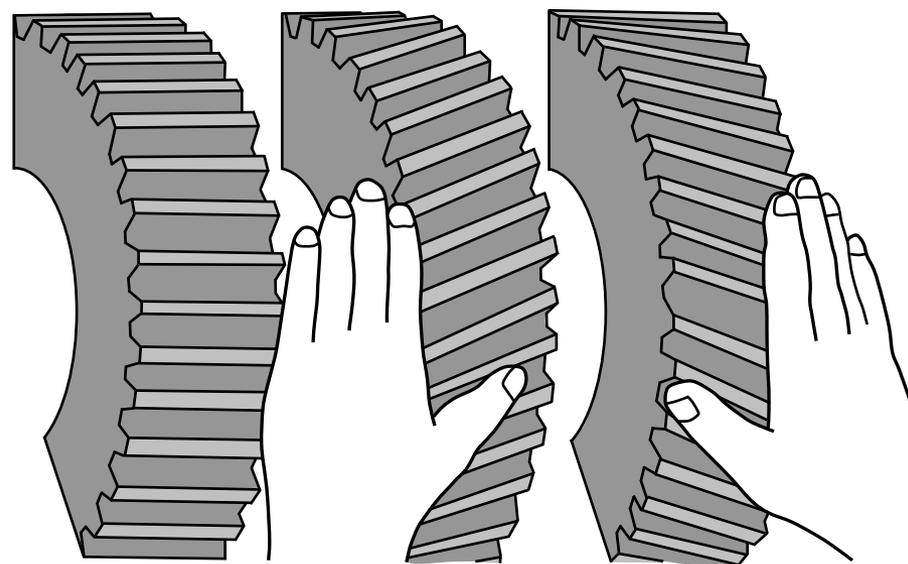
1. Introdução

Engrenagens Cilíndricas de Dentes Inclínados de Eixos Paralelos e Cruzados

As engrenagens cilíndricas de dentes inclinados podem ter **eixos paralelos** ou **eixos cruzados** não complanares, tal como se mostra nas figuras abaixo à esquerda. As engrenagens cilíndricas em que os eixos das rodas não são complanares, denominam-se **engrenagens torsas**.



(a) Eixos paralelos; (b) Eixos cruzados



(a) Dentado reto; (b) Hélice esquerda; (c) Hélice direita

As rodas dentadas helicoidais podem ser **direitas** ou **esquerdas**, conforme a inclinação dos dentes. É também frequente a denominação rodas com hélice direita e rodas com hélice esquerda (cf. figura acima).

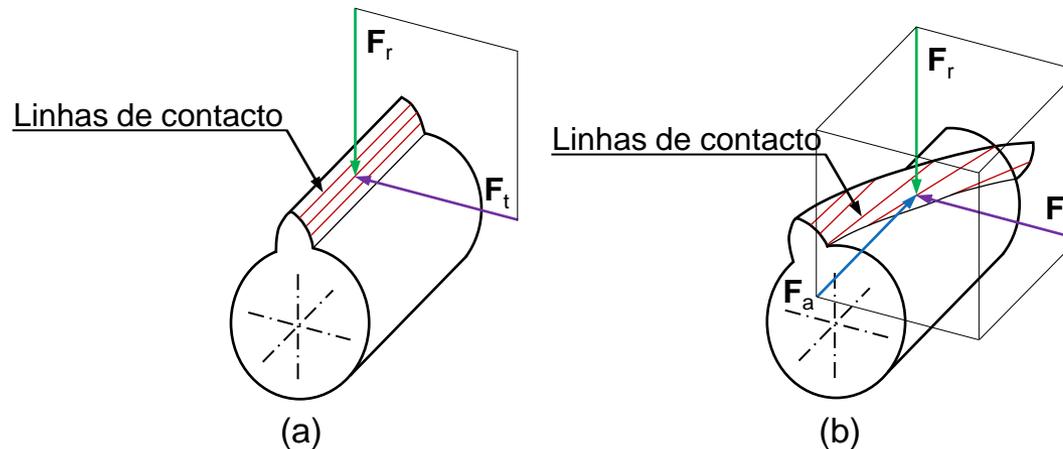
1. Introdução

Engrenamento em Rodas de Dentado Reto e Inclinado

Nas **engrenagens de dentes retos**, o engrenamento entre um par de dentes é materializado por um **segmento de reta** paralelo aos eixos das rodas, que se estende a toda a largura do dente.

Nas **engrenagens de dentes inclinados**, o engrenamento entre os dentes ocorre de **forma progressiva**, isto é, inicia-se com um contacto pontual, o qual se vai desenvolvendo ao longo de uma linha à medida que o engrenamento vai progredindo.

As engrenagens cilíndricas de dentes inclinados são bastante **mais suaves** e **silenciosas** do que as engrenagens cilíndricas de dentado reto.



Engrenagens cilíndricas: (a) Dente reto; (b) Dente inclinado

As engrenagens cilíndricas de dentes inclinados desenvolvem **esforços axiais**, o que não acontece nas engrenagens de dentado reto. Estes esforços axiais são transmitidos aos apoios das rodas.

1. Introdução

Rodas de Dupla Hélice ou de Dentado em Espinha

O inconveniente associado à existência de esforços axiais desenvolvidos nas engrenagens cilíndricas de dentes inclinados pode ser ultrapassado se se utilizarem **rodas de dupla hélice**, também denominadas rodas com **dentado em espinha**, tal como se mostra na figura abaixo.



Engrenagem cilíndrica de dupla hélice ou de dentado em espinha

Numa engrenagem de dentado de dupla hélice são também desenvolvidos esforços axiais durante o engrenamento, contudo, como estes atuam em sentidos opostos, numa e noutra hélice, o esforço resultante é nulo, ou pelo menos reduzido de forma bastante significativa.

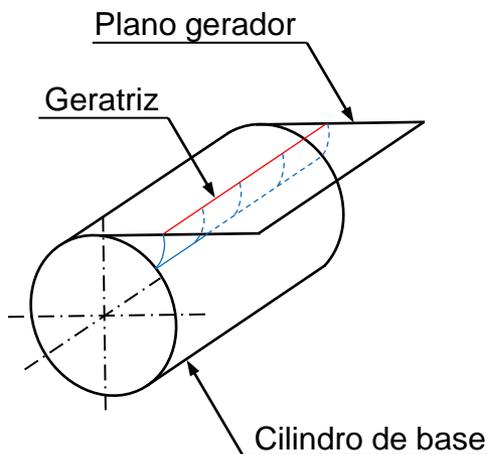
Este tipo de engrenagem **requer cuidados especiais**, tanto no fabrico, como na montagem, sendo, por isso, relativamente mais caras do que as engrenagens cilíndricas de dentado inclinado simples.

2. Geração de Dentes Inclínados

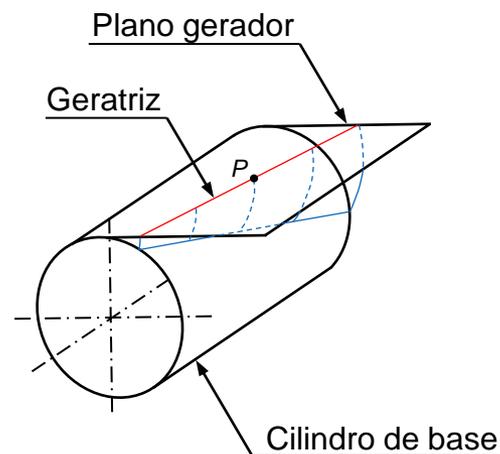
Geração de Evolvente Helicoidal

Quando um plano roda sem escorregar sobre um cilindro, então um qualquer segmento de reta que está contido no plano gerador paralelo ao eixo do cilindro gera uma superfície em evolvente de um **dente reto** (cf. figura abaixo à esquerda).

Quando a linha geratriz é oblíqua em relação ao eixo do cilindro, então o rolamento puro do plano gerador dá origem à superfície de um **dente inclinado** ou helicoidal. Esta última evolvente é denominada evolvente helicoidal (cf. figura abaixo à direita).



(a)



(b)

Geração de uma superfície em evolvente: (a) Dente reto; (b) Dente Inclinado

2. Geração de Dentes Inclinados

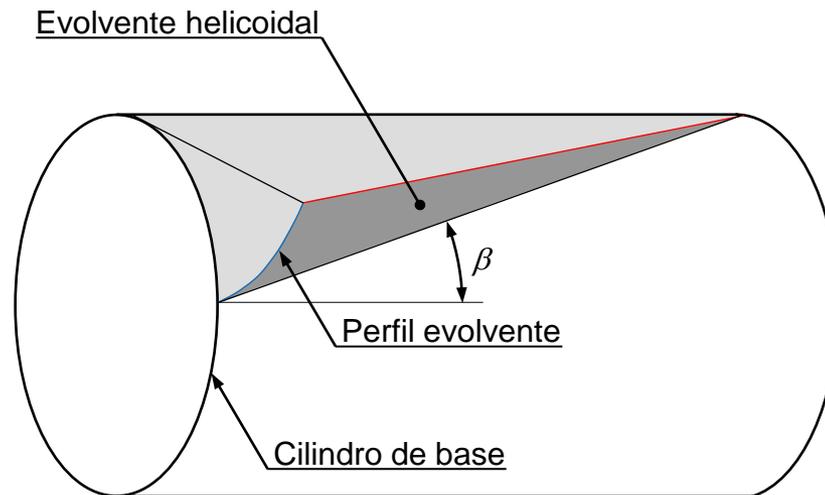
Geração de Evolvente Helicoidal

Considere-se um **pedaço de papel em forma de paralelogramo**, o qual é enrolado à volta de um cilindro, denominado cilindro de base, como mostra a figura abaixo.

O papel é enrolado de tal modo que um dos lados coincide com a hélice do dentado inclinado.

Mantendo o pedaço de **papel esticado e desenrolando-o em torno do cilindro**, então cada ponto situado no lado do paralelogramo, que representa a hélice, gera uma curva evolvente.

A superfície obtida pelas evolventes assim gerada forma a denominada **evolvente helicoidal**, tal como se representa na figura abaixo.



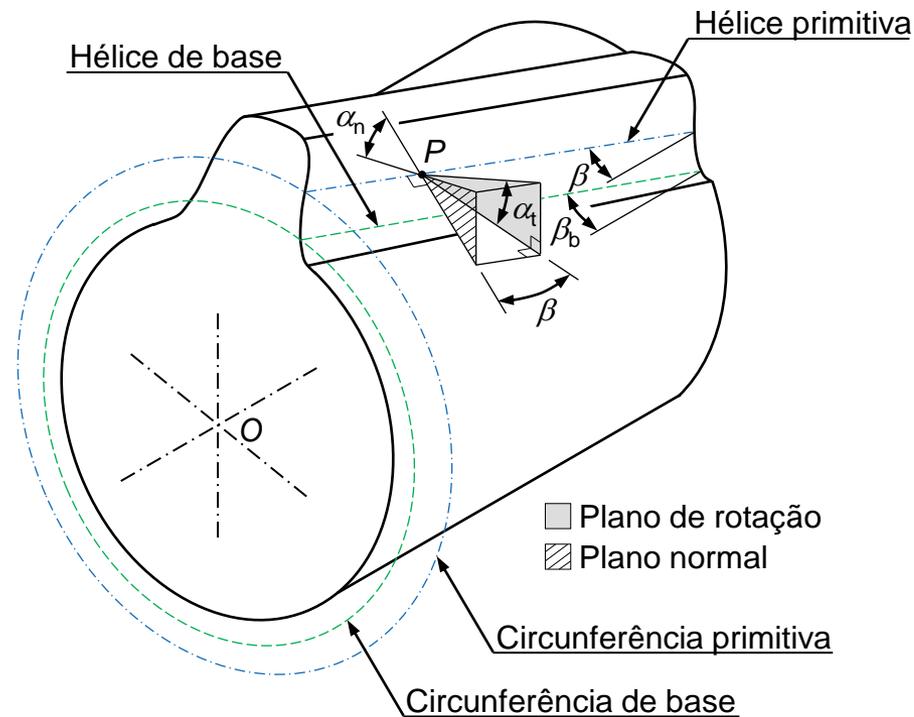
Geração de uma evolvente helicoidal

3. Terminologia Específica

Hélices Primitiva e de Base, Ângulos de Pressão Normal e Transverso

A figura abaixo mostra um dente inclinado onde estão representados os seguintes elementos:

- Hélice primitiva, que é o resultado da interseção da superfície do dente com o cilindro primitivo,
- Hélice de base, que é o resultado da interseção da superfície do dente com o cilindro de base,
- Ângulo de pressão real ou normal, α_n , que é medido no plano perpendicular ao eixo do dente,
- Ângulo de pressão aparente ou transverso, α_t , que é medido no plano de rotação da roda.



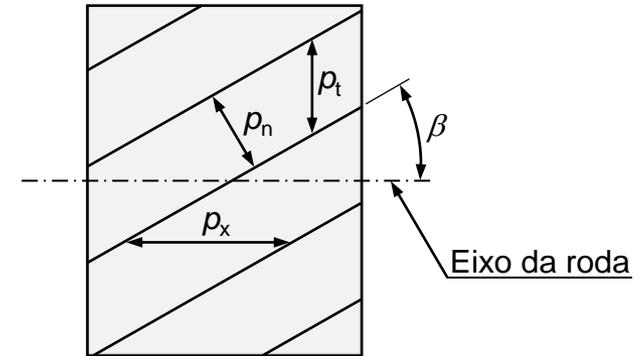
Representação de um dente inclinado

3. Terminologia Específica

Passos Real, Transverso e Axial

A figura do lado representa a **planificação simplificada** de uma roda cilíndrica de dentes inclinados. Nesta figura evidenciam-se os seguintes elementos:

- Ângulo de inclinação primitiva, β ,
- Passo real ou normal, p_n ,
- Passo aparente ou transverso, p_t ,
- Passo axial, p_x .



Representação dos diferentes passos

É evidente que em correspondência com os passos real e aparente existem os **módulos real** e **aparente**. Assim, atendendo à definição de módulo tem-se que

$$m_n = \frac{p_n}{\pi} \quad m_t = \frac{p_t}{\pi}$$

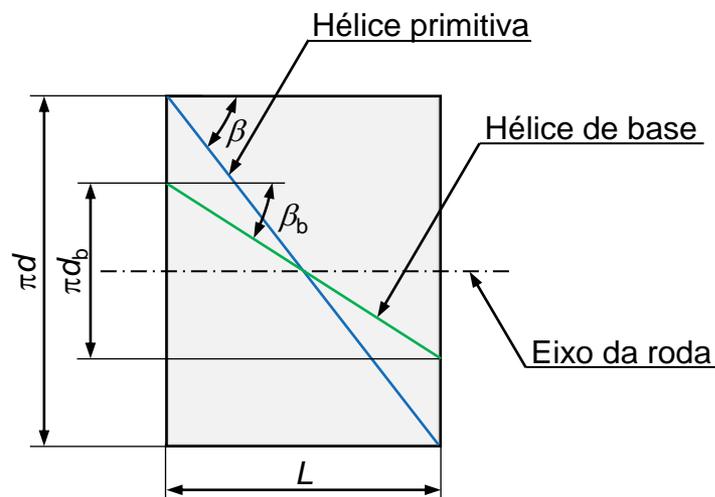
em que m_n e m_t são o módulo normal, ou real, e o módulo aparente, ou transverso, respetivamente.

Para que **haja engrenamento** entre duas rodas cilíndricas de dentes inclinados é necessário que ambas apresentem o **mesmo passo real**, (o mesmo módulo real e o mesmo ângulo de pressão real).

4. Relações Geométricas e Proporções dos Dentes

Ângulos de Inclinação Primitiva e de Inclinação de Base

Com o intuito de estabelecer uma **relação matemática entre os ângulos de inclinação primitiva e de inclinação de base** considere a planificação do cilindro primitivo e do cilindro de base na extensão do correspondente avanço, tal como se ilustra na figura abaixo.



Planificação de cilindro primitivo e do cilindro de base

Da análise da figura de cima pode escrever-se a seguinte expressão

$$L = \frac{\pi d_b}{\operatorname{tg} \beta_b} = \frac{\pi d}{\operatorname{tg} \beta}$$

em que L é o **passo de hélice** ou **avanço**, ou seja, a progressão da roda ao fim de uma rotação completa.

4. Relações Geométricas e Proporções dos Dentes

Ângulos de Inclinação Primitiva e de Inclinação de Base

O **avanço é o mesmo**, quer se considere a hélice primitiva ou a hélice de base, donde resulta que

$$\operatorname{tg} \beta_b = \frac{d_b}{d} \operatorname{tg} \beta$$

No **plano de rotação da roda** verifica-se que

$$d_b = d \cos \alpha_t$$

onde α_t é o ângulo de pressão aparente, o qual é medido no plano de rotação da roda.

Assim, combinando as duas equações anteriores resulta que

$$\operatorname{tg} \beta_b = \operatorname{tg} \beta \cos \alpha_t$$

A análise geométrica das engrenagens cilíndricas de dentes inclinados, quando é feita no **plano de rotação**, é em tudo semelhante ao caso das engrenagens cilíndricas de dentes retos.

Com efeito, **no plano de rotação da roda** pode estabelecer-se a seguinte relação

$$d = m_t z$$

em que d é o diâmetro primitivo, m_t representa o módulo aparente, e z é o número de dentes da roda.

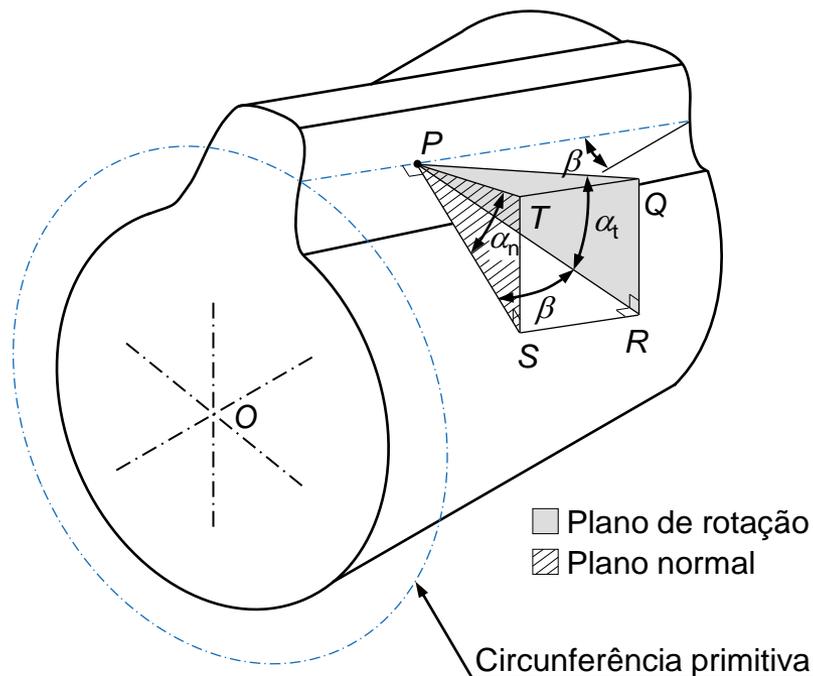
4. Relações Geométricas e Proporções dos Dentes

Passos Normal, Aparente e Axial

Com referência à figura do diapositivo 11, podem obter-se as **relações entre o passos real, aparente e axial**

$$p_n = p_t \cos \beta \quad p_x = p_t \cotg \beta = \frac{p_n}{\operatorname{sen} \beta}$$

Para se obter uma **relação entre os elementos reais e aparentes**, considere-se a figura abaixo, onde se evidenciam o ângulo de pressão real (α_n), o ângulo de pressão aparente (α_t) e o ângulo de hélice (β).



Representação de um dente inclinado ou helicoidal

4. Relações Geométricas e Proporções dos Dentes

Relação entre Elementos Reais e Aparentes

Da observação atenta da figura do diapositivo anterior verifica-se que o **plano de rotação** e o **plano perpendicular ao eixo do dente** são definidos, respetivamente, pelos pontos *PQR* e *PTS*.

Ainda da análise daquela figura podem escrever-se as seguintes relações geométricas.

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{\overline{TS}}{\overline{PS}} \quad \operatorname{tg} \alpha_t = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} \quad \overline{PR} = \overline{PS} \cos \beta \quad \overline{TS} = \overline{QR}$$

Combinando estas equações resulta que

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \alpha_t \cos \beta$$

Esta equação pode ser generalizada para estabelecer a **relação entre dois quaisquer elementos reais e aparentes**, ou seja

$$(\textit{Elemento real})_n = (\textit{Elemento aparente})_t \cos \beta$$

Deste modo tem-se que

$$p_n = p_t \cos \beta \quad m_n = m_t \cos \beta \quad s_n = s_t \cos \beta \quad e_n = e_t \cos \beta$$

4. Relações Geométricas e Proporções dos Dentes

Relações Geométricas e Proporções dos Dentes

A tabela abaixo inclui as principais [relações geométricas](#) e [proporções dos dentes](#) para engrenagens cilíndricas de dentes inclinados.

Principais [relações geométricas e proporções dos dentes](#) para engrenagens cilíndricas exteriores de dentado inclinado

Parâmetro	Expressão
Ângulo de pressão aparente	$\alpha_t = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\text{tg} \alpha_n}{\cos \beta} \right)$
Diâmetro primitivo	$d = m_t z = \frac{m_n z}{\cos \beta}$
Saliência	$h_a = m_n$
Reentrância	$h_f = 1,25 m_n$
Altura do dente	$h = 2,25 m_n$
Diâmetro de coroa	$d_a = m_t (z + 2 \cos \beta)$
Diâmetro de raiz	$d_f = m_t (z - 2,5 \cos \beta)$
Entre-eixo	$a = m_n \frac{z_1 + z_2}{2 \cos \beta}$
Relação de transmissão	$i = \frac{z_2}{z_1}$

5. Parâmetros de Desempenho

Relação de Condução

Na figura do lado está representado o **engrenamento entre duas rodas de dentado inclinado**.

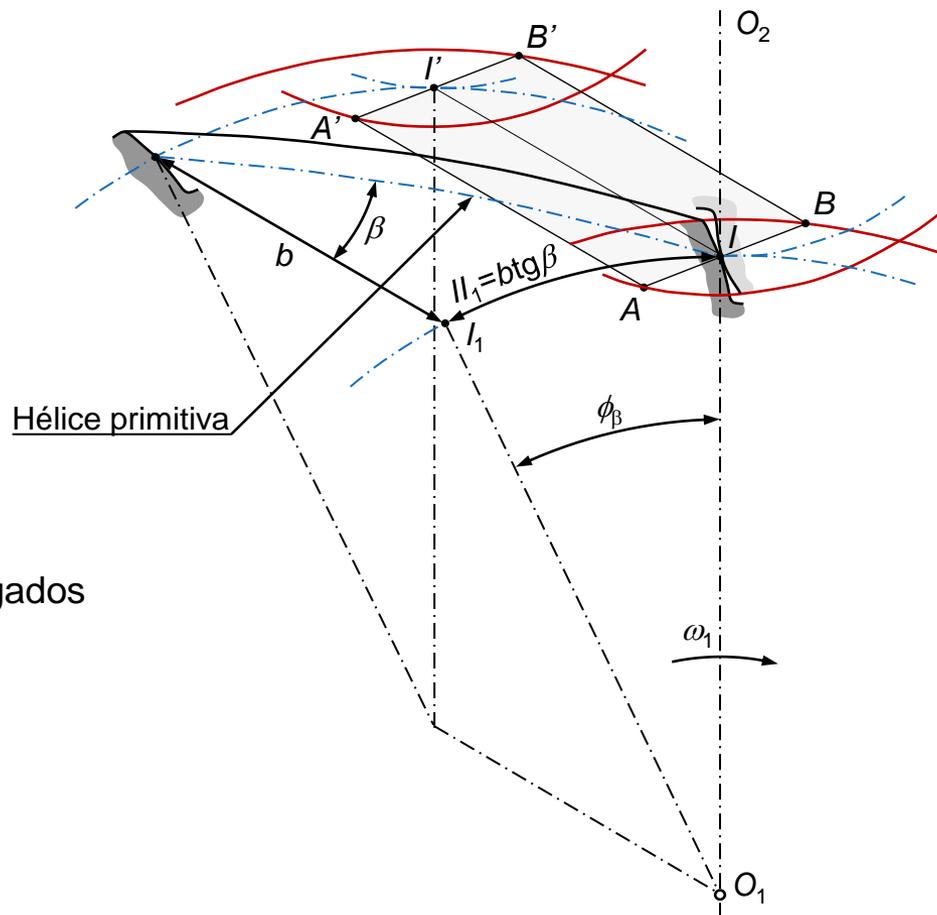
O engrenamento de um par de dentes conjugados **inicia-se no ponto A**, que é o ponto em que o perfil da roda motora entra em contacto com o perfil conjugado da roda movida.

O engrenamento **termina no ponto B'**, que corresponde ao fim do contacto do par de perfis conjugados já no outro lado das rodas.

Da figura do lado observa-se que os perfis conjugados acima descritos se encontram **desfasados angularmente de um valor igual a ϕ_β** , ou seja

$$\phi_\beta = \angle IO_1I_1$$

em que o arco II_1 é frequentemente denominado de **recobrimento do dente**.



Engrenamento entre duas rodas de dentado inclinado

5. Parâmetros de Desempenho

Relação de Condução

O **recobrimento do dente** pode ser expresso em função da largura do dente,

$$H_1 = b \operatorname{tg} \beta$$

onde b é a largura das rodas e β representa o ângulo de inclinação primitiva.

O **arco de condução** num engrenamento de duas rodas inclinadas é igual ao valor para o caso das engrenagens de dentes retos, ao qual se acrescenta uma parcela relativa ao comprimento de recobrimento. Atendendo ao conceito de **relação de condução total**, que relaciona o arco de condução total com o passo da engrenagem, tem-se que

$$\varepsilon = \frac{a}{p_t} + \frac{b \operatorname{tg} \beta}{p_t}$$

em que o primeiro termo do segundo membro desta equação corresponde à relação de condução de um par de rodas cilíndricas de dentes retos e o segundo termo diz respeito ao fator de recobrimento. Assim, a **relação de condução para engrenagens cilíndricas de dentes inclinados** é dado por

$$\varepsilon = \frac{l}{\pi m_t \cos \alpha_t} + \frac{b \operatorname{tg} \beta}{\pi m_t}$$

O **primeiro termo** do segundo membro da equação anterior pode ser calculado utilizando a expressão correspondente ao engrenamento de duas rodas cilíndricas de dentado reto, ou seja

$$\frac{1}{\pi \cos \alpha_t} \left(\sqrt{\frac{z_2^2}{4} \operatorname{sen}^2 \alpha_t + z_2 \cos \beta + \cos^2 \beta} + \sqrt{\frac{z_1^2}{4} \operatorname{sen}^2 \alpha_t + z_1 \cos \beta + \cos^2 \beta} - \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{sen} \alpha_t \right)$$

5. Parâmetros de Desempenho

Rendimento

Para o cálculo do **rendimento** de engrenagens cilíndricas de dentes helicoidais podem considerar-se as expressões apresentadas para as engrenagens de dentes retos, sem que, por isso, sejam cometidos erros significativos, ou seja

$$\eta = 1 - \frac{\mu(l_a^2 + l_f^2)(i \pm 1)}{\pi \varepsilon z_2 m_n^2 \cos^2 \alpha_n}$$

em que l_a e l_f representam, respetivamente, os **comprimentos de aproximação** e de **afastamento**, os quais podem ser calculados da seguinte forma

$$l_a = \sqrt{(r_2 + h_{a2})^2 - r_2^2 \cos^2 \alpha_t} - r_2 \sin \alpha_t$$

$$l_f = \sqrt{(r_1 + h_{a1})^2 - r_1^2 \cos^2 \alpha_t} - r_1 \sin \alpha_t$$

O estudo das **interferências de funcionamento** em engrenagens cilíndricas de dentado inclinado segue a mesma metodologia apresentada para as engrenagens cilíndricas de dentes retos.

Para tal, deve considerar-se o **plano de rotação**, isto é o plano perpendicular aos eixos das rodas, donde o esquema a analisar representa um corte feito por aquele plano, considerando

$$h_{a2} = m_n \qquad m_n = m_t \cos \beta$$

Assim, da aplicação dos mesmos procedimentos considerados para o caso das engrenagens cilíndricas exteriores de dentes retos, a definição do **número mínimo de dentes** que uma roda cilíndrica de dentes helicoidais deve ter, para que não haja interferências de funcionamento, é dada por

$$z_1 \geq -z_2 + \sqrt{z_2^2 + \frac{4 \cos \beta (z_2 + \cos \beta)}{\sin^2 \alpha_t}}$$

$$\text{Quando } z_2 \text{ tende para infinito tem-se que } z_1 \geq \frac{2 \cos \beta}{\sin^2 \alpha_t}$$

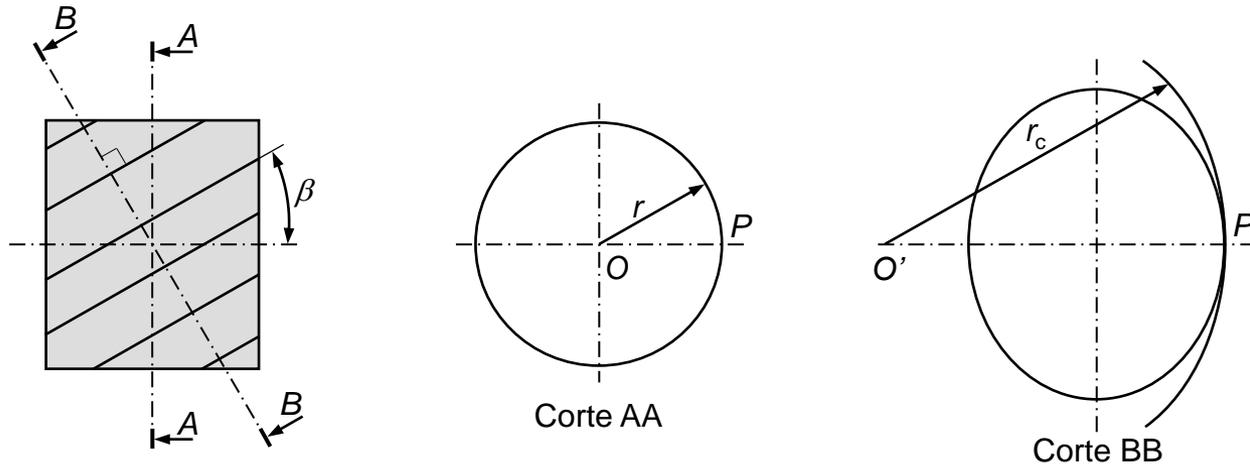
6. Número de Dentes Equivalente

Número de Dentes Equivalente

A figura abaixo ilustra a **planificação de uma roda dentada de dentes inclinados**, em que o ângulo de inclinação da hélice primitiva é representado por β .

Considerando que a roda é interseçada por um **plano AA perpendicular ao eixo**, então pode obter-se uma circunferência primitiva de raio r . O raio de curvatura é igual ao raio transverso da circunferência primitiva. O perfil do dente neste plano seria o mesmo que o perfil do dente de uma roda dentada de dentes retos com um raio primitivo r .

Se se considerar um **plano de corte BB perpendicular à hélice primitiva** de um dente obtém-se uma elipse. O raio de curvatura da elipse corresponde ao raio primitivo de uma roda cilíndrica de dentes retos equivalente e com características aproximadas às da roda de dentes helicoidais.



Representação de uma roda cilíndrica de dentes inclinados cortada por um plano perpendicular ao eixo e por um plano perpendicular à hélice primitiva

6. Número de Dentes Equivalente

Número de Dentes Equivalente

O **raio de curvatura** da elipse daquela figura pode ser calculado do seguinte modo

$$r_c = \frac{r}{\cos^2 \beta}$$

em que r representa o raio primitivo. O perfil do dente no plano perpendicular à hélice do dente é o mesmo que o perfil de uma roda de dentes retos com um raio primitivo r_c .

O **número de dentes equivalentes** que uma roda de dentes retos deve ter para apresentar propriedades idênticas às de uma roda de dentes helicoidais é dada por

$$z_c = \frac{d_c}{m_n}$$

em que d_c é o diâmetro primitivo equivalente e m_n representa o módulo normal.

Combinando as duas equações anteriores resulta que

$$z_c = \frac{2r}{\cos^2 \beta m_n} = \frac{d}{\cos^2 \beta m_n}$$

Finalmente, atendendo à relação entre os módulos real e aparente e à relação fundamental do engrenamento, vem que

$$z_c = \frac{z}{\cos^3 \beta}$$

7. Rodas Cruzadas

Generalidades

A figura do lado ilustra o caso particular de **duas rodas helicoidais cruzadas** em que o ângulo entre os eixos das rodas é igual a 90° .

No caso das rodas cruzadas, os **ângulos de hélice** das rodas motora e movida **não** necessitam de apresentar o mesmo valor.

Nas rodas cruzadas, as rodas apresentam o **mesmo tipo de hélice**.

As rodas cruzadas devem apenas ser utilizadas quando as **cargas** em jogo são relativamente **baixas**.



Rodas Cruzadas

A figura do diapositivo seguinte diz respeito à **planificação simplificada de duas rodas cruzadas**, as quais têm ângulos de hélice distintos, isto é, β_1 e β_2 .

O valor do ângulo definido pelos eixos das rodas é igual à soma dos ângulos das hélices, ou seja

$$\Sigma = \beta_1 + \beta_2$$

Quando as rodas cruzadas apresentam hélices distintas, então o ângulo definido entre os seus eixos é igual à diferença entre os ângulos de hélice.

7. Rodas Cruzadas

Relações Geométricas

Tal como nas engrenagens cilíndricas helicoidais de eixos paralelos, nas rodas cruzadas pode também escrever-se que

$$d_1 = m_{t1} z_1 = \frac{m_{n1} z_1}{\cos \beta_1}$$

$$d_2 = m_{t2} z_2 = \frac{m_{n2} z_2}{\cos \beta_2}$$

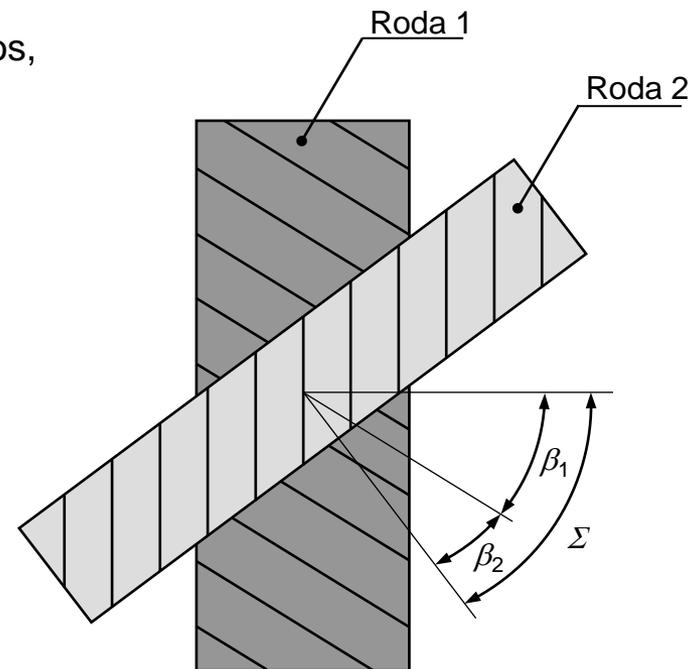
Deve referir-se que nas engrenagens de rodas cruzadas **os passos** (ou módulos) **normais são iguais** em ambas as rodas.

Assim, a **distância entre os eixos** nas rodas cruzadas é dada por

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

Considerando as equações anteriores, vem que

$$a = \frac{m_n}{2} \left(\frac{z_1}{\cos \beta_1} + \frac{z_2}{\cos \beta_2} \right)$$



Planificação de rodas cruzadas

7. Rodas Cruzadas

Relações de Velocidades

A figura do lado mostra as **componentes das velocidades** existentes no engrenamento de duas rodas cruzadas relativas ao **ponto primitivo**.

Da análise desta figura pode observar-se que **são iguais as componentes na direção normal**.

O mesmo não acontece com as componentes tangenciais, pelo que se verifica a existência de escorregamento. Na verdade, **nas rodas cruzadas existe escorregamento, inclusive no ponto primitivo**.

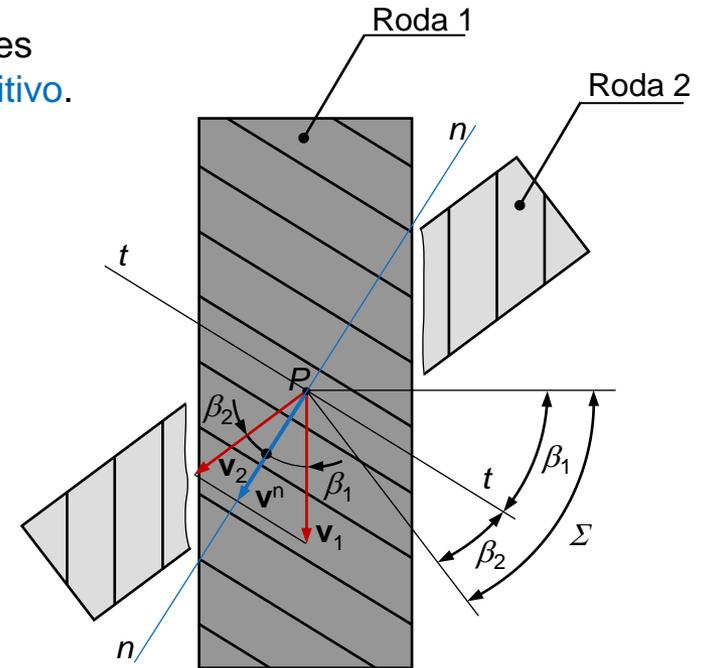
Atendendo ao que foi anteriormente dito e da análise da figura do lado podem escrever-se as seguintes relações

$$v_1^n = v_1 \cos \beta_1$$

$$v_2^n = v_2 \cos \beta_2$$

Combinando agora estas equações vem que a **relação de velocidades** é dada por

$$v_1 = v_2 \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1}$$



Velocidades no ponto de contacto

7. Rodas Cruzadas

Relação de Transmissão

As **velocidades angulares das rodas** podem ser obtidas do seguinte modo

$$\omega_1 = \frac{v_1}{d_1/2} \quad \omega_2 = \frac{v_2}{d_2/2}$$

A relação de velocidades angulares, *i.e.*, a **relação de transmissão** em rodas cruzadas, é dada por

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{v_1 d_2}{v_2 d_1}$$

Considerando a **relação de velocidades** apresentada no diapositivo anterior resulta que

$$i = \frac{v_2 \cos \beta_2 d_2}{v_2 \cos \beta_1 d_1} = \frac{d_2 \cos \beta_2}{d_1 \cos \beta_1}$$

Combinando agora as equações anteriores obtém-se que

$$i = \frac{m_n z_2 \cos \beta_2 \cos \beta_1}{\cos \beta_2 m_n z_1 \cos \beta_1} = \frac{m_n z_2}{m_n z_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

Observar-se que a **relação de transmissão** é, de modo semelhante às engrenagens cilíndricas helicoidais de eixos paralelos, dada pelo **quociente entre o número de dentes** das rodas movida e motora.

Refira-se que no caso das rodas cruzadas a **relação de transmissão não é expressa** em termos dos **diâmetros primitivos** como sucede nas engrenagens cilíndricas de dentes helicoidais de eixos paralelos.