



ÓRGÃOS DE MÁQUINAS II

Licenciatura em Engenharia Mecânica



Elaborado por Paulo Flores - 2023

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade do Minho

Campus de Azurém

4804-533 Guimarães

pflores@dem.uminho.pt

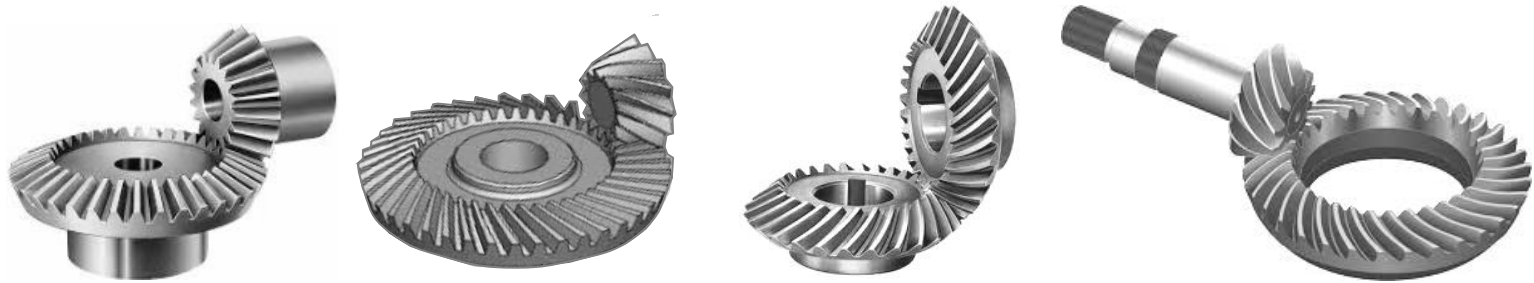
T.10 – ENGRENAGENS CÓNICAS

1. Introdução
2. Geração do Dente
3. Terminologia Específica
4. Aproximação de Tredgold
5. Relações Geométricas
6. Parâmetros de Desempenho
7. Hipoides

1. Introdução

Generalidades

As engrenagens cónicas são utilizadas nas situações em que os **eixos das rodas motora e movida** são concorrentes, ou seja, os eixos das rodas interseitam-se. As engrenagens cónicas podem ter **dentes retos**, **inclinados** ou **curvos**, podendo ainda apresentar **eixos descentrados** (vulgo hipoides). As figuras abaixo ilustram estes tipos de engrenagens cónicas.



Principais tipos de engrenagens cónicas

Deve referir-se que no caso particular das **hipoides**, os eixos das rodas estão descentrados. Este tipo de engrenagem é das mais silenciosas e apresenta uma **excelente capacidade de carga** devido à maior área de contacto entre as superfícies dos dentes. As hipoides apresentam **rendimentos mais baixos**, geram maior quantidade de calor e requerem, por isso, **lubrificantes especiais** (lubrificantes de elevada viscosidade).

Nas engrenagens cónicas as **relações de transmissão** são, em geral, mais baixas do que nas engrenagens cilíndricas, podendo atingir, no máximo valores da ordem de 6.

As engrenagens cónicas encontram aplicação em **diferenciais de automóveis**, sistemas de transmissão de helicópteros, máquinas-ferramenta, contra-ângulos, etc

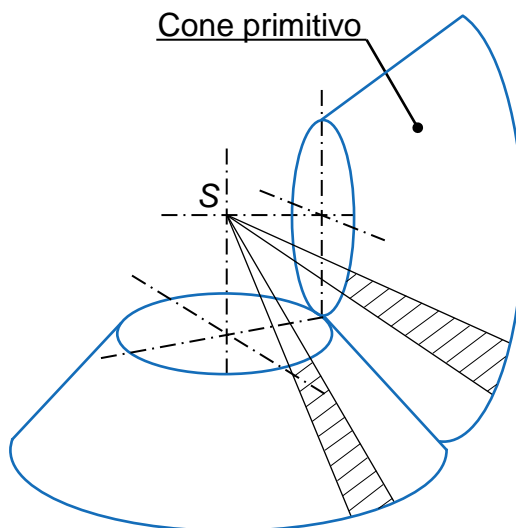
2. Geração do Dente

Superfícies Primitivas, Cones Primitivos

Nas engrenagens cônicas as **superfícies primitivas têm a forma cônica** e rolam sem escorregar uma em relação à outra. As superfícies primitivas nas engrenagens cônicas são frequentemente denominadas **cones primitivos**, tal como os que se mostram na figura abaixo.

Para que duas rodas cônicas funcionem corretamente, os seus **eixos devem cruzar-se no mesmo vértice**, de que é exemplo o ponto **S** representado na figura abaixo.

Durante o movimento relativo de duas rodas cônicas, o qual é teoricamente do tipo esférico, cada ponto da engrenagem permanece à mesma distância do vértice **S**.



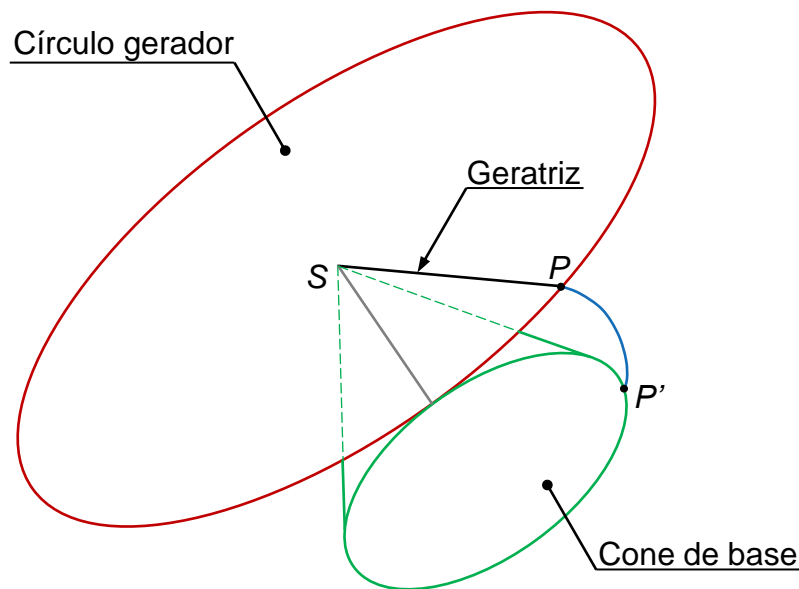
Representação dos cones primitivos de uma engrenagem cônica

2. Geração do Dente

Método da Evolvente

Tal como acontece no caso das engrenagens cilíndricas, **também nas engrenagens cônicas** os perfis dos dentes podem ser definidos pelo **traçado em evolvente**. Nas primeiras considera-se um cilindro de base, obtendo-se uma evolvente cilíndrica, enquanto nas segundas se utiliza um cone de base, resultando, deste modo, uma **evolvente esférica**.

A **evolvente esférica exata** pode obter-se pelo rolamento puro de um círculo gerador sobre o cone de base. O círculo gerador é concêntrico e tangente ao cone de base (cf. figura abaixo), em que o **arco PP'** representa parte da evolvente esférica exata que resulta da trajetória descrita pelo ponto P pertencente à linha geratriz do elemento gerador, quando este último rola sem escorregar sobre o cone de base.



Evolvente esférica exata em engrenagens cônicas

2. Geração do Dente

Perfil Exato e Perfil Aproximado

As engrenagens cónicas em **evolvente esférica** têm **relativamente pouco interesse prático** em virtude da dificuldade inerente à obtenção de rodas com o perfil exato.

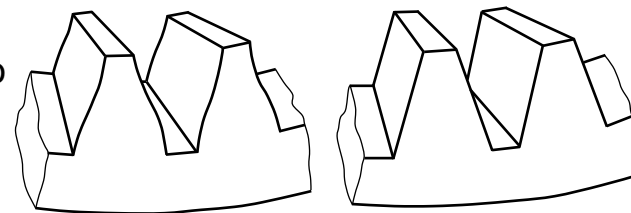
Na verdade, os perfis dos dentes assim obtidos apresentam um **flanco curvo** com um **ponto de inflexão** (cf. figura do lado).

Na prática prefere-se o **perfil piramidal**, ou **trapezoidal**, para a forma dos dentes das engrenagens cónicas (cf. figura da direita a acima), em detrimento do perfil exato.

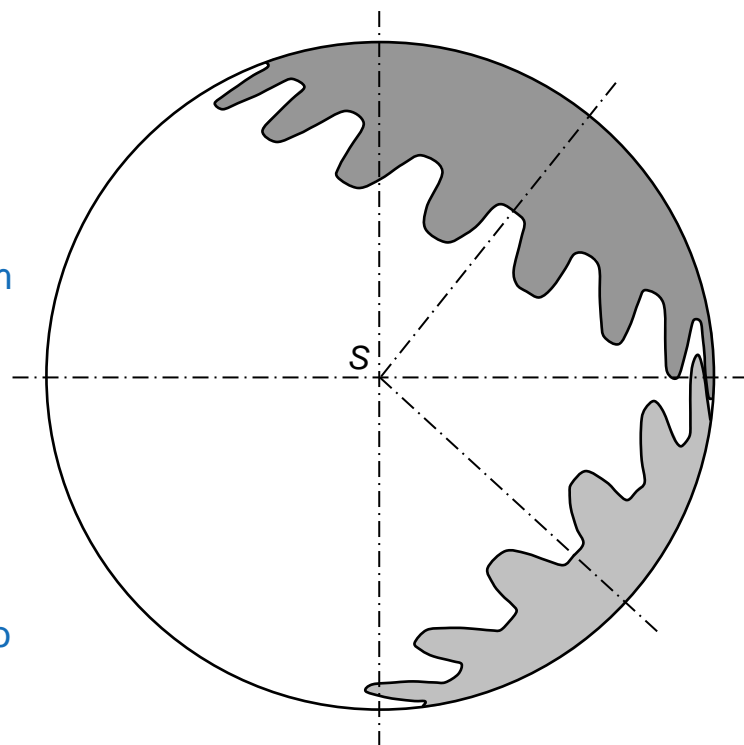
Na figura do lado representa-se uma **secção de uma engrenagem cónica** quando esta é **intersectada por uma superfície esférica**, cujo centro é coincidente com o vértice virtual dos eixos das rodas cónicas.

Os perfis dos dentes que se obtêm deste modo correspondem aos **perfis exatos dos dentes**.

Pode observar-se que nas rodas cónicas a **geometria de contacto** deve ser examinada numa **superfície esférica**.



(a) (b)
Perfis de dentes de rodas cónicas



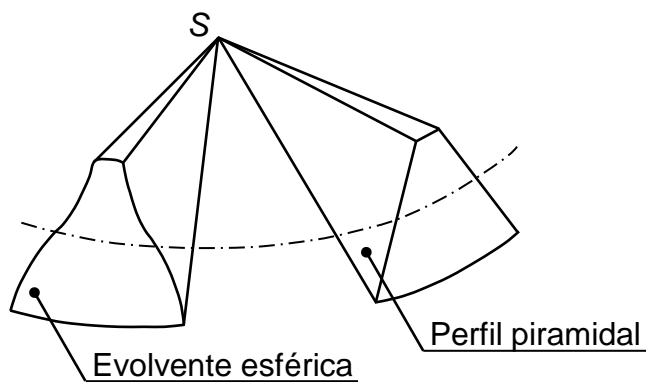
Secção esférica de engrenagem cónica

2. Geração do Dente

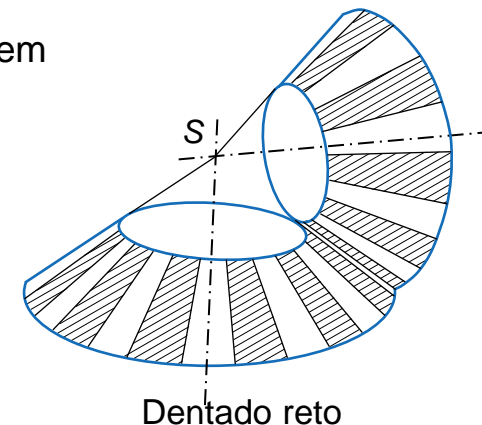
Engrenagens Cónicas de Dentes Retos

A figura do lado diz respeito à representação simplificada de uma engrenagem cónica de **dentado reto**. Neste caso particular, observa-se que os dentes das rodas concorrem no vértice S dos cones primitivos.

Na figura abaixo ilustram-se as diferenças entre o dentado em evolvente esférica e o dentado piramidal para o caso das engrenagens cónicas de dentes retos.



Diferentes perfis de dentes de engrenagens cónicas



As engrenagens cónicas podem ainda ter **dentes inclinados**. Deve notar-se que neste caso as superfícies dos dentes não concorrem no mesmo vértice virtual dos cones primitivos.

As engrenagens cónicas podem ainda ter **dentes curvos** (cf. diapositivo 3).

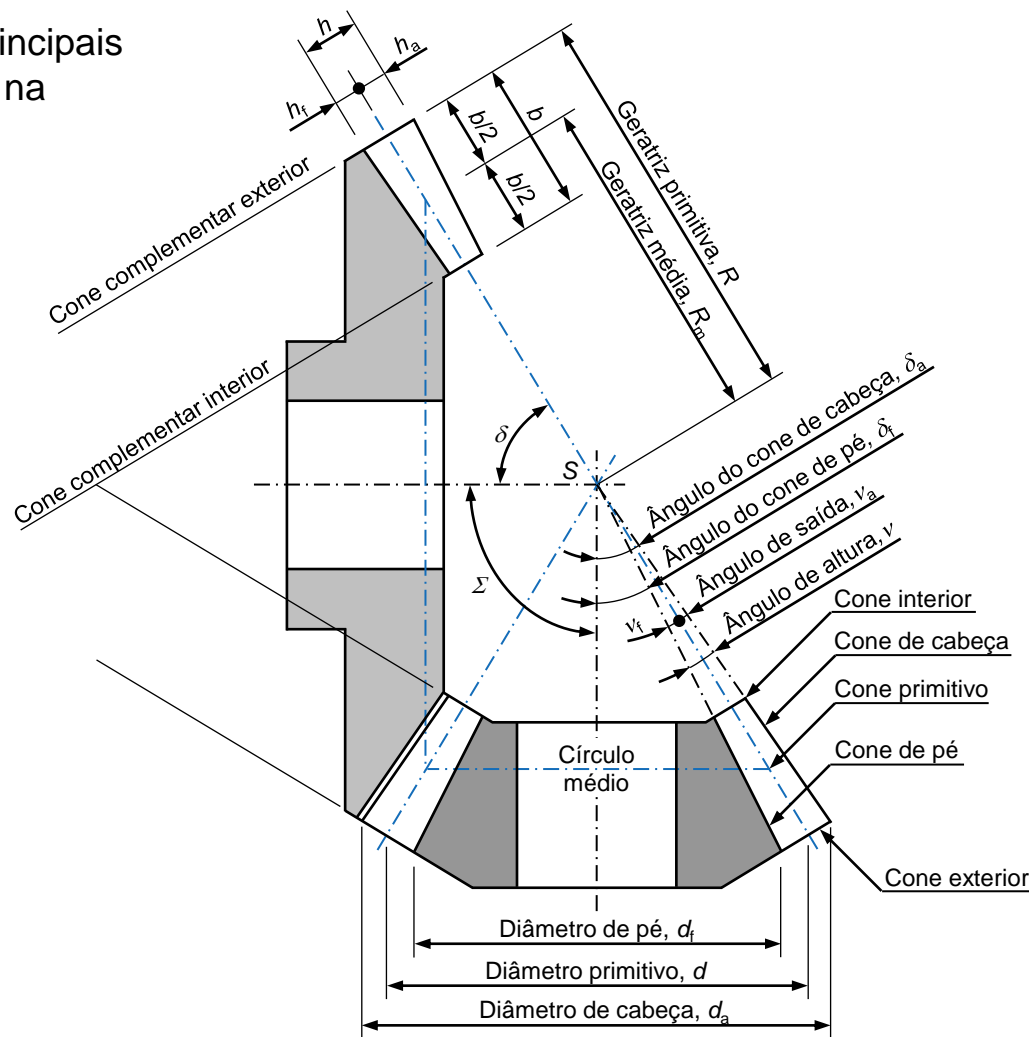
3. Terminologia Específica

Parâmetros Geométricos

Na figura do lado estão representados os principais parâmetros geométricos e termos utilizados na caracterização de uma engrenagem cônica.

Listam-se de seguida alguns parâmetros e termos associados às rodas cónicas:

- Σ – ângulo de conicidade,
- δ – ângulo de cone primitivo,
- δ_a – ângulo de cone de coroa,
- δ_f – ângulo de cone de raiz,
- ν – ângulo de altura do dente,
- ν_a – ângulo de saliência,
- ν_f – ângulo de raiz,
- R – geratriz primitiva,
- R_m – geratriz média,
- b – largura do dentado,
- m – módulo exterior da engrenagem.



Nomenclatura fundamental de uma engrenagem cônica

3. Terminologia Específica

Parâmetros Geométricos e Proporções dos Dentes

Deve desde já referir-se que no caso das rodas cónicas, o **passo é definido na extremidade exterior do dentado sobre os cones primitivos**.

O estabelecimento das relações matemáticas entre o **módulo**, o **passo**, o **número de dentes** e os **diâmetros primitivos** são as mesmas que se consideram para as engrenagens cilíndricas, ou seja

$$d_1 = mz_1$$

$$d_2 = mz_2$$

$$p = m\pi$$

No atinente às **proporções dos dentes**, no caso das rodas cónicas consideram-se as mesmas que no caso das engrenagens cilíndricas, isto é

$$h_a = m$$

$$h_f = 1,25m$$

$$h = 2,25m$$

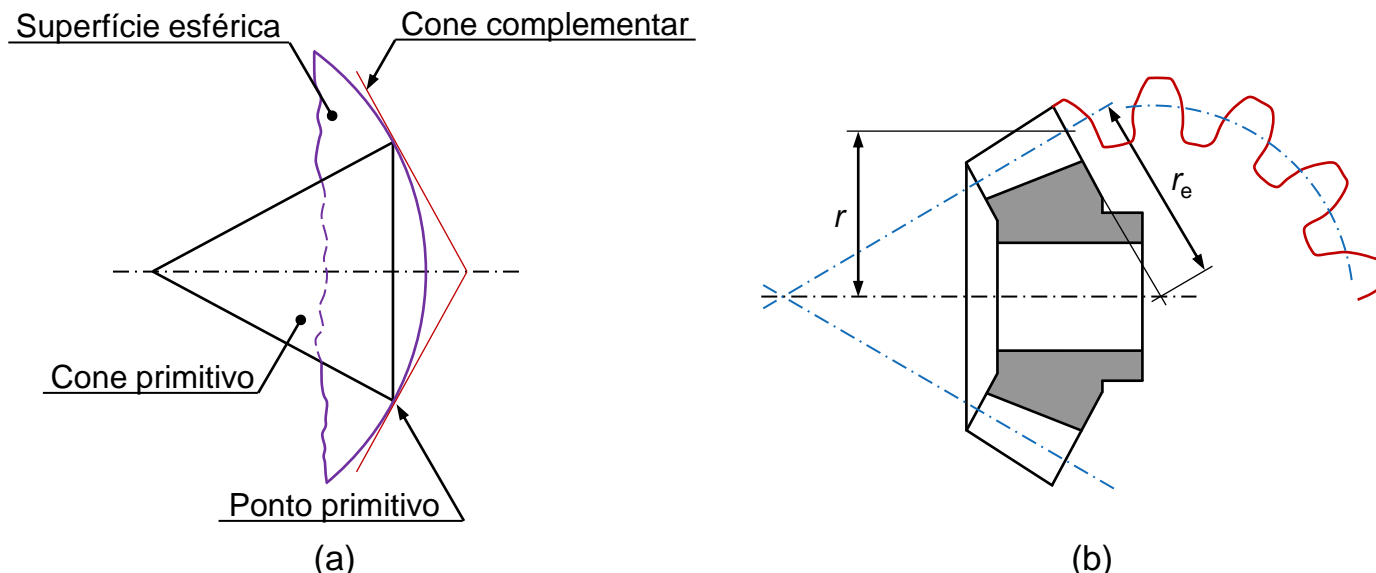
4. Aproximação de Tredgold

Roda Cilíndrica Equivalente

O traçado aproximado de Tredgold baseia-se no facto de um **cone tangente a uma esfera**, no ponto primitivo de uma engrenagem cônica, apresentar uma superfície muito próxima da de uma esfera, quando aquela está na vizinhança do ponto primitivo (cf. figura da esquerda abaixo).

O cone referido é denominado **cone complementar** e pode, por definição, ser planificado.

O perfil dos dentes de rodas cônicas, quando definido na parte de trás do cone, ou cone complementar, é idêntico ao que se obtém para uma roda cilíndrica com um **diâmetro primitivo equivalente**, tal como se representa na figura da direita abaixo.

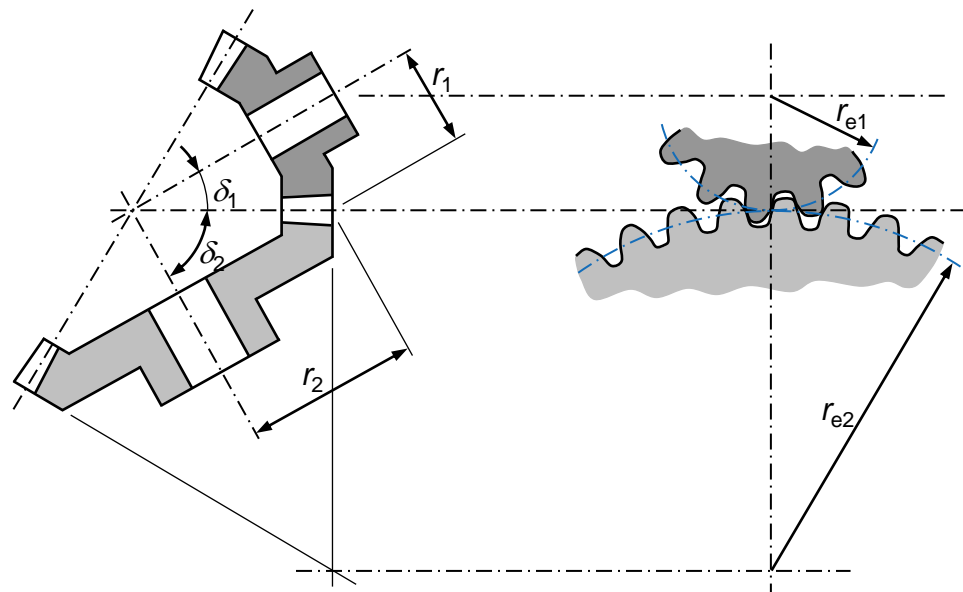


(a) Representação do traçado aproximado de Tredgold; (b) Representação da roda cilíndrica equivalente

4. Aproximação de Tredgold

Roda Cilíndrica Equivalente

A figura abaixo ilustra uma **engrenagem cônica** e a correspondente **engrenagem cilíndrica equivalente** formada a partir dos respectivos cones complementares. A engrenagem equivalente é construída a partir dos raios equivalentes representados na figura. Os raios equivalentes correspondem à geratriz dos cones complementares.



Engrenagem cônica e engrenagem cilíndrica equivalente

Da análise desta figura observa-se que os **raios equivalentes** são estabelecidos do seguinte modo

$$r_{e1} = \frac{r_1}{\cos \delta_1} \quad r_{e2} = \frac{r_2}{\cos \delta_2}$$

4. Aproximação de Tredgold

Número de Dentes Equivalente

O número de dentes das rodas cilíndricas equivalentes pode ser determinado do seguinte modo

$$z_{e1} = \frac{z_1}{\cos \delta_1} \quad z_{e2} = \frac{z_2}{\cos \delta_2}$$

Pode verificar-se que o número de dentes equivalente não é necessariamente um número inteiro.

Uma vez que o número de dentes equivalente é superior ao número de dentes real, uma **engrenagem cónica apresenta um funcionamento mais suave** do que uma engrenagem cilíndrica com o mesmo número de dentes.

Tal facto, decorre da existência de maiores comprimentos de condução.

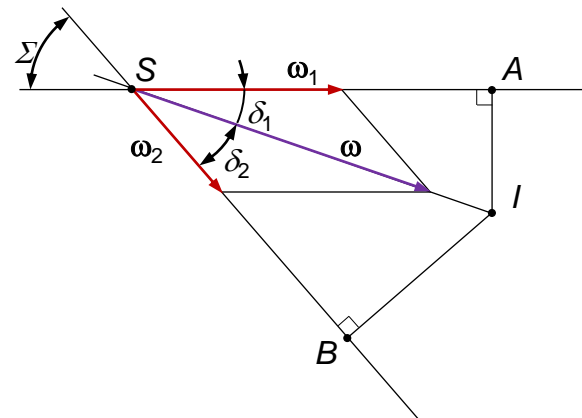
Deve ainda salientar-se que a engrenagem cónica e a engrenagem cilíndrica equivalente apresentam o **mesmo módulo**.

Assim, o estudo dos parâmetros de desempenho de uma engrenagem cónica pode ser levado a cabo considerando a análise da engrenagem cilíndrica equivalente (virtual ou imaginária), em que o número de dentes é dado pelas expressões anteriores.

5. Relações Geométricas

Relação de Transmissão

Considere a figura do lado, relativa à representação esquemática de um **engrenamento cónico**, cujas velocidades de rotação são, respetivamente, ω_1 e ω_2 . Ainda nesta figura está representado o eixo instantâneo de rotação, SI , da engrenagem, em que I denota o ponto primitivo exterior.



Engrenamento cónico

Por definição, a **velocidade linear do ponto primitivo** é dada por

$$v_1 = v_2 = \overline{IA}\omega_1 = \overline{IB}\omega_2$$

ou seja

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IA}} = \frac{z_2}{z_1}$$

Atendendo a que

$$\overline{IA} = \overline{SI}\text{sen}\delta_1 \quad \text{e} \quad \overline{IB} = \overline{SI}\text{sen}\delta_2$$

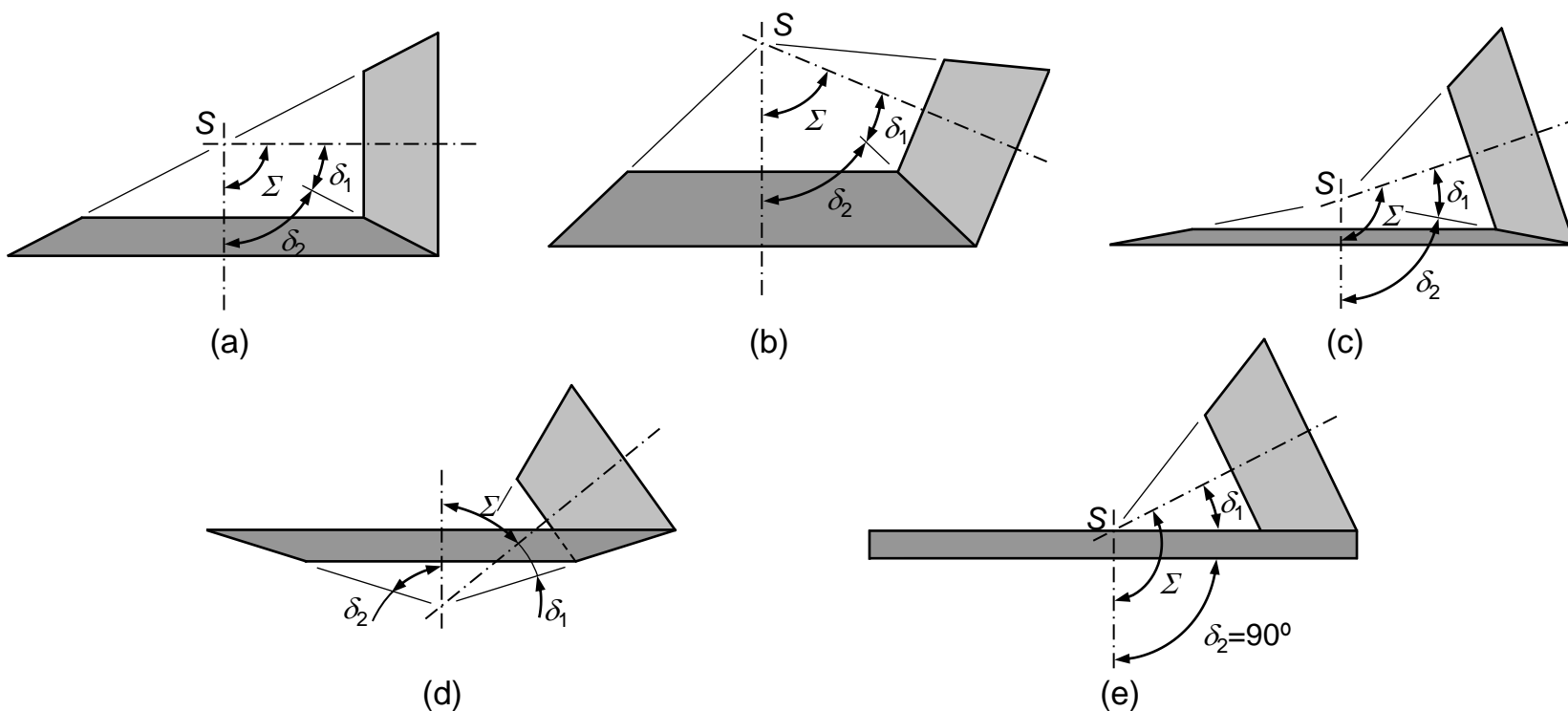
resulta que

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\text{sen}\delta_2}{\text{sen}\delta_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

5. Relações Geométricas

Posições Relativas dos Cones Primitivos

Conforme se trate de engrenagens **exteriores** ou **interiores**, o estabelecimento do valor do ângulo formado entre os eixos das rodas permite distinguir **cinco posições relativas dos cones primitivos** de duas rodas cónicas. As figuras abaixo ilustram esquematicamente estas cinco situações distintas.



Posições relativas dos cones primitivos em engrenagens cónicas: (a) Engrenagem exterior, $\Sigma=90^\circ$; (b) Engrenagem exterior, $\Sigma<90^\circ$; (c) Engrenagem exterior, $\Sigma>90^\circ$; (d) Engrenagem interior, $\Sigma<90^\circ$; (e) Engrenagem interior com roda plana (coroa), $\Sigma>90^\circ$

5. Relações Geométricas

Posições Relativas dos Cones Primitivos

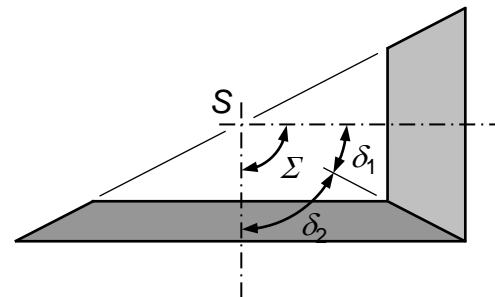
Para engrenagens **exteriores** em que $\Sigma=90^\circ$ tem-se que

$$\delta_1 + \delta_2 = \Sigma$$

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{z_1}{z_2}$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{z_2}{z_1}$$

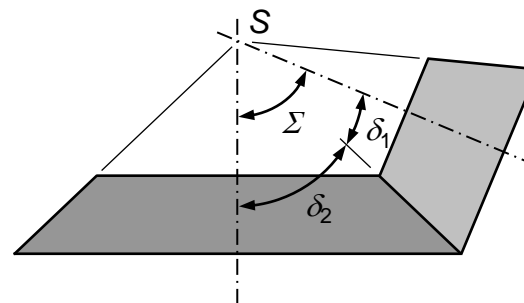
$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\operatorname{sen} \delta_2}{\operatorname{sen} \delta_1} = \frac{\operatorname{sen}(90 - \delta_1)}{\operatorname{sen} \delta_1} = \operatorname{cotg} \delta_1$$



Para engrenagens **exteriores** em que $\Sigma < 90^\circ$ tem-se que

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\operatorname{sen} \Sigma}{\frac{z_1}{z_2} + \cos \Sigma}$$

$$\delta_1 = \Sigma - \delta_2$$



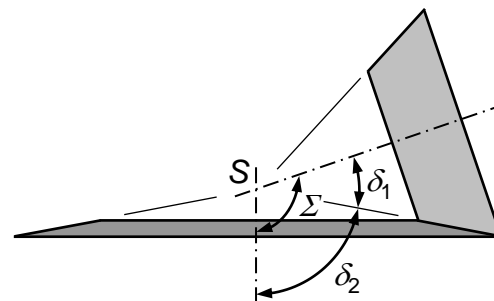
5. Relações Geométricas

Posições Relativas dos Cones Primitivos

Para engrenagens **exteriores** em que $\Sigma > 90^\circ$ tem-se que

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\operatorname{sen}(180 - \Sigma)}{\frac{z_1}{z_2} - \cos(180 - \Sigma)}$$

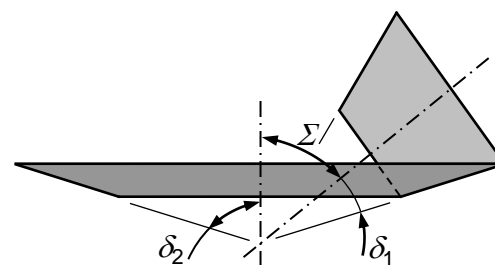
$$\delta_1 = \Sigma - \delta_2$$



Para engrenagens **interiores** em que $\Sigma < 90^\circ$ tem-se que

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\operatorname{sen} \Sigma}{\operatorname{sen} \Sigma - \frac{z_1}{z_2}}$$

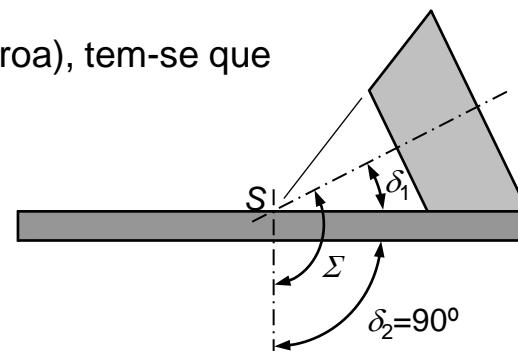
$$\delta_1 = \delta_2 - \Sigma$$



Para engrenagens **interiores** em que $\Sigma > 90^\circ$, sendo a roda plana (coroa), tem-se que

$$\delta_2 = 90^\circ$$

$$\delta_1 = \Sigma - \delta_2$$



5. Relações Geométricas

Proporções dos Dentes

As proporções dos dentes são estabelecidas na **extremidade exterior dos dentes sobre as circunferências primitivas**. O passo é definido na extremidade exterior do dentado sobre os cones primitivos.

$$h_a = m$$

$$h_f = 1,25m$$

$$\operatorname{tg} \nu_a = \frac{2\operatorname{sen} \delta}{z}$$

$$\operatorname{tg} \nu_f = \frac{2,5\operatorname{sen} \delta}{z}$$

$$d_a = d \frac{\operatorname{sen}(\delta + \nu_a)}{\operatorname{sen} \delta \cos \nu_a} = d + 2h_a \cos \delta$$

$$d_f = d \frac{\operatorname{sen}(\delta + \nu_f)}{\operatorname{sen} \delta \cos \nu_f} = d - 2h_f \cos \delta$$

$$R = \frac{d}{2\operatorname{sen} \delta} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$

$$R_m = R - \frac{b}{2}$$

6. Parâmetros de Desempenho

Relação de Condução

Para engrenagens cônicas de dentes retos, a **relação de condução** pode ser calculada do seguinte modo

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi \cos \alpha} \left(\sqrt{\frac{z_{e2}^2}{4} \sin^2 \alpha + z_{e2} + 1} + \sqrt{\frac{z_{e1}^2}{4} \sin^2 \alpha + z_{e1} + 1} - \frac{z_{e1} + z_{e2}}{2} \sin \alpha \right)$$

Para **engrenagens cônicas de dentes inclinados**, a relação de condução é escrita da seguinte forma

$$\varepsilon = \frac{l}{\pi m_t \cos \alpha_t} + \frac{btg\beta}{\pi m_t}$$

onde o primeiro termo do segundo membro desta equação é dado por

$$\frac{1}{\pi \cos \alpha_t} \left(\sqrt{\frac{z_{e2}^2}{4} \sin^2 \alpha_t + z_{e2} \cos \beta + \cos^2 \beta} + \sqrt{\frac{z_{e1}^2}{4} \sin^2 \alpha_t + z_{e1} \cos \beta + \cos^2 \beta} - \frac{z_{e1} + z_{e2}}{2} \sin \alpha_t \right)$$

em que α_t denota o ângulo de pressão aparente, β representa o ângulo de inclinação primitivo, sendo z_{e1} e z_{e2} o número de dentes equivalente e b diz respeito à largura dos dentes.

6. Parâmetros de Desempenho

Rendimento e Interferências

Relembre-se que o ângulo de pressão real, α_n , o ângulo de pressão aparente, α_t , e o ângulo de inclinação da hélice primitiva, β , podem relacionar-se do seguinte modo

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \alpha_t \cos \beta$$

Por seu lado, o módulo real, m_n , e o módulo aparente, m_t , relacionam-se da seguinte forma

$$m_n = m_t \cos \beta$$

No cálculo do **rendimento** nas engrenagens cônicas podem ser consideradas as expressões apresentadas para os casos das engrenagens cilíndricas de dentes retos ou helicoidais, uma vez obtidas as engrenagens equivalentes correspondentes, utilizando, para o efeito, o traçado aproximado de Tredgold.

Do mesmo modo, a temática das **interferências de funcionamento** pode ser analisada tendo em consideração as expressões relativas às engrenagens cilíndricas de dentado reto ou de dentado inclinado, desde que se substituam o valor de z_1 e z_2 pelos números de dentes equivalentes, ou seja

$$z_1 \geq -z_2 \frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2} + \sqrt{\left(z_2 \frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2} \right)^2 + \frac{4 \cos \delta_1 (z_2 + \cos \delta_2) \cos \delta_1}{\sin^2 \alpha} \frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2}}$$

Quando z_2 tende para infinito, esta equação pode ser simplificada do seguinte modo

$$z_1 \geq \frac{2 \cos \delta_1}{\sin^2 \alpha}$$

7. Hipoides

Rodas Cónicas Descentradas

As hipoides são engrenagens **mais suaves do que as engrenagens cónicas** de dentes curvos, e garantem **maior capacidade** de carga. Na verdade, as hipoides proporcionam um maior número de dentes em contacto ao mesmo tempo, tornando o engrenamento mais silencioso.

Como inconvenientes, as hipoides têm um funcionamento que **combina rolamento com escorregamento**. Quanto maior for o descentramento dos eixos das rodas, maior será o escorregamento entre as superfícies dos dentes. Por isso, as hipoides apresentam **rendimentos mais baixos** devido ao escorregamento existente, e requerem a utilização de lubrificantes adequados às cargas e temperaturas em jogo.

As hipoides encontram aplicação em caixas redutoras de motores elétricos, diferenciais, entre outras.



Ilustração de uma engrenagem hipóide