



PROJETO INTEGRADOR EM ENGENHARIA MECÂNICA II

Licenciatura em Engenharia Mecânica



Elaborado por Paulo Flores - 2023

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade do Minho
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães

pflores@dem.uminho.pt



T.05 – DESEMPENHO DO CARRO

- 1. Introdução**
- 2. Diagramas de Corpo Livre**
- 3. Forças Envolvidas**
- 4. Análise Dinâmica**
- 5. Programa CARDYNA**
- 6. Revisão de Conhecimentos**
- 7. Consultas Recomendadas**

1. Introdução

Neste documento são apresentados os principais **ingredientes relativos ao desempenho dinâmica do carro**.

Para o efeito, são elaborados os **diagramas de corpo livre** dos principais elementos que constituem o carro, ou seja, o **chassis**, as **rodas traseiras** e a **roda dianteira**.

De seguida, são identificadas e **caraterizadas as principais forças** e momentos que atuam nos diversos elementos que compõem o carro.

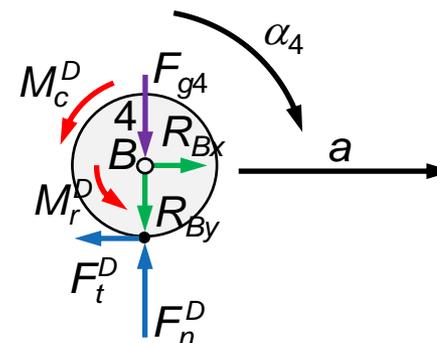
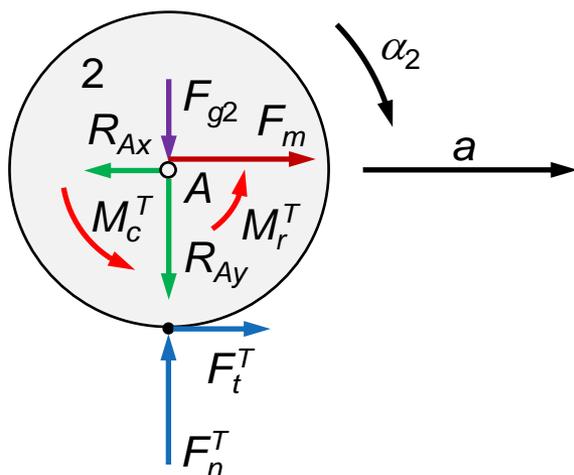
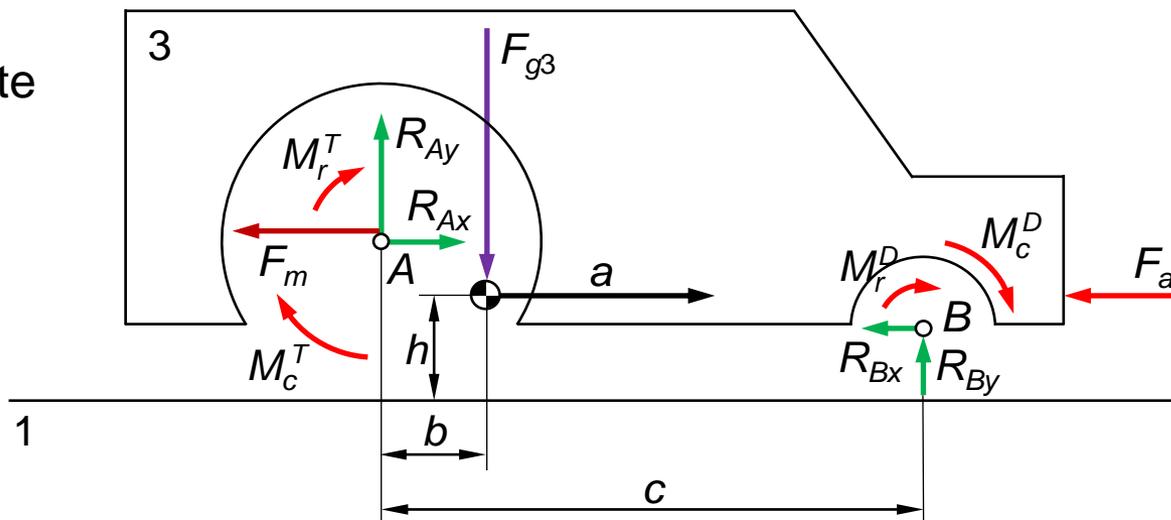
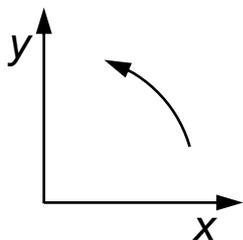
Deve, desde já, chamar-se a atenção para a necessidade de aferir, verificar e **quantificar corretamente os valores dos coeficientes e parâmetros** utilizados no projeto em consideração.

É, pois, importante estudar o desempenho do carro, tendo em vista a identificação das **variáveis dominantes e secundárias**.

2. Diagramas de Corpo Livre

Apresentam-se de seguida os **diagramas de corpo livre** do chassis, das rodas traseiras e a roda dianteira.

Nesta fase é muito importante a definição do **sistema de coordenadas** a adotar.



2. Diagramas de Corpo Livre

As **forças e os momentos** representados nos diagramas de corpo livre anteriormente elaborados têm os seguintes significados

F_{g2} – Peso das rodas traseiras (inclui as duas rodas, eixos, etc.)

F_{g3} – Peso do chassis (inclui mola, etc.)

F_{g4} – Peso da roda dianteira

F_t^T – Força de tração (força de atrito de deslizamento)

F_t^D – Força de atrito na roda dianteira

R_{Ax} – Reação horizontal no apoio A

R_{Ay} – Reação vertical no apoio A

R_{Bx} – Reação horizontal no apoio B

R_{By} – Reação vertical no apoio B

2. Diagramas de Corpo Livre

M_r^T – Momento de atrito de rolamento nas rodas traseiras

M_r^D – Momento de atrito de rolamento na roda dianteira

M_c^T – Momento de atrito nas chumaceiras (apoios) dos eixos traseiros

M_c^D – Momento de atrito na chumaceira (apoio) do eixo dianteiro

F_n^T – Reação normal nas rodas traseiras

F_n^D – Reação normal na roda dianteira

F_a – Força de arrasto devido ao ar

F_m – Força da mola

a – Aceleração linear do carro

α_2 – Aceleração angular das rodas traseiras

α_4 – Aceleração angular da roda dianteira

3. Forças Envolvidas

A **força de arrasto** (F_a) frontal devido à resistência do ar que é exercida sobre o carro pode ser determinada do seguinte modo

$$F_a = \frac{1}{2} \rho v^2 A C_D \quad (1)$$

em que ρ é a **massa específica** do ar [$\sim 1,16 \text{ kg/m}^3$], v representa a **velocidade instantânea** relativa entre o carro e o ar [m/s], A denota a **área projetada** segundo a direção do movimento do carro [m^2] e C_D é o **coeficiente de forma** do carro.

O coeficiente de forma é um parâmetro adimensional que pode ser determinado numérica ou experimentalmente (e.g. utilizando túneis de vento).

A título de exemplo, apresentam-se de seguida valores típicos do coeficiente de forma para diferentes veículos.



Camião (0,9)



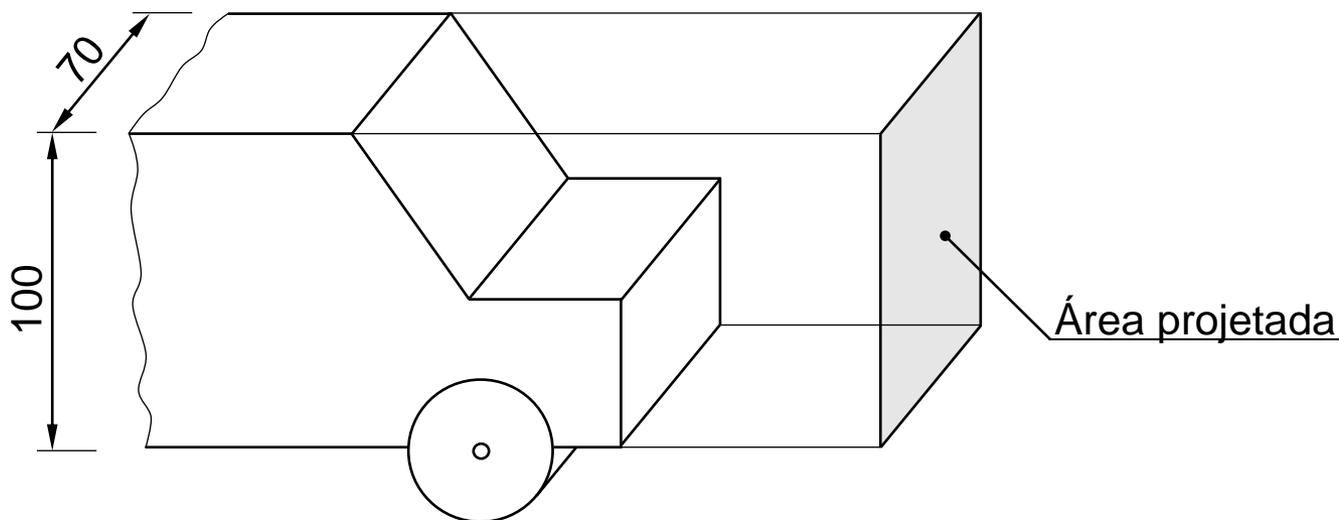
Ford T (0,8)



Toyota Prius (0,26)

3. Forças Envolvidas

Admitindo que o carro aqui analisado tem a seguinte forma



então, a **área projetada** é igual a $A = 100 \times 10^{-3} \times 70 \times 10^{-3} = 0,007 \text{ m}^2$.

Em geral, o efeito da resistência do ar no desempenho dinâmico do carro é relativamente pequeno, mas não deve ser negligenciado.

Admite-se que a força de arrasto frontal originada pela resistência do ar atua no centro de gravidade do carro, tal como se representou anteriormente.

3. Forças Envolvidas

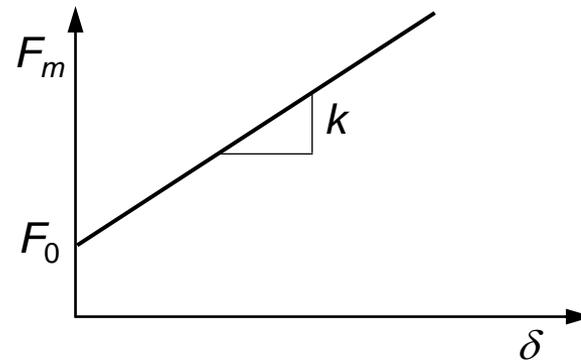
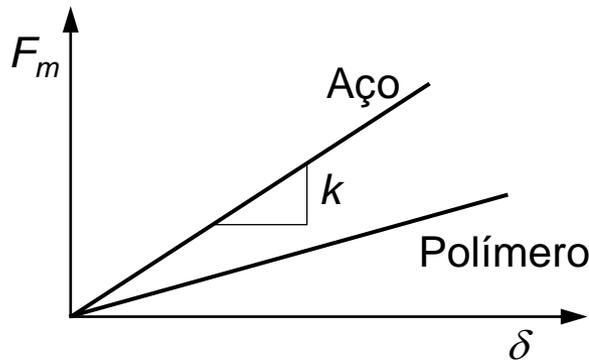
As **molas helicoidais de tração** desenvolvem forças cuja intensidade é dada pela lei de Hooke, ou seja

$$F_m = k\delta \quad (2)$$

em que **k** representa a **rigidez da mola**, expressa em [N/m] e **δ** é a **deformação da mola**, expressa em [m].

A equação (2) é válida para o **domínio elástico**, ou seja, na zona fora da deformação plástica dos materiais.

De um modo geral, as molas helicoidais de tração têm um **comportamento linear**, tal como expressa a equação (2) e se representa na figuras abaixo.



3. Forças Envolvidas

Quando nas molas existe uma **pré-tensão** (força inicial), a força total é dada por

$$F_m = F_0 + k\delta \quad (3)$$

em que F_0 representa a pré-tensão da mola.

A figura abaixo mostra as principais características geométricas de uma mola helicoidal de tração, em que:

L_0 – Comprimento total da mola

L – Comprimento de enrolamento, *i.e.*, comprimento da mola sem carga

D_e – Diâmetro exterior da mola

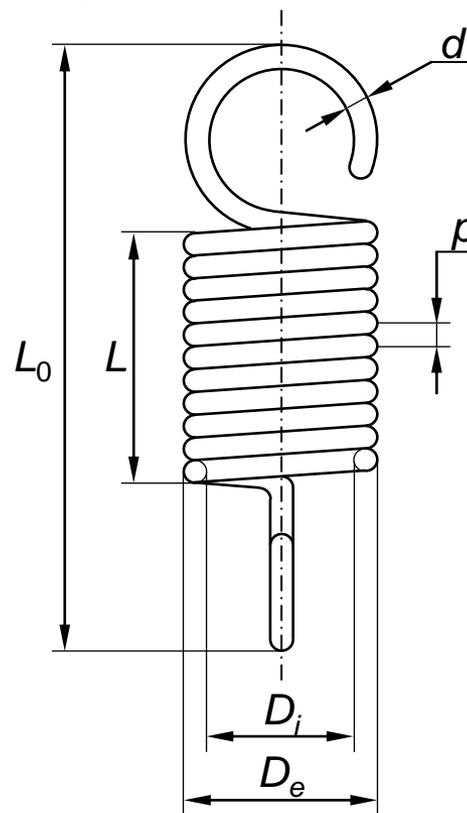
D_i – Diâmetro interior da mola

d – Diâmetro do arame

p – Passo da mola

N – Número de espiras

C – Índice de mola



3. Forças Envolvidas

O **índice de mola** é dado pelo quociente entre o diâmetro médio da mola (D) e o diâmetro do arame (d), ou seja

$$C = \frac{D}{d} \quad (4)$$

A **rigidez de uma mola helicoidal** pode ser **calculada analiticamente** ou seja

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N} \quad (5)$$

em que d é o diâmetro do arame [m], G é o módulo de elasticidade transversal do material da mola [Pa], D é o diâmetro médio da mola [m] e N representa o número total de espiras da mola.

Uma análise similar pode ser apresentada para **molas de torção**, em que o momento desenvolvido pela mola é dado por

$$M_m = k_T \theta \quad (6)$$

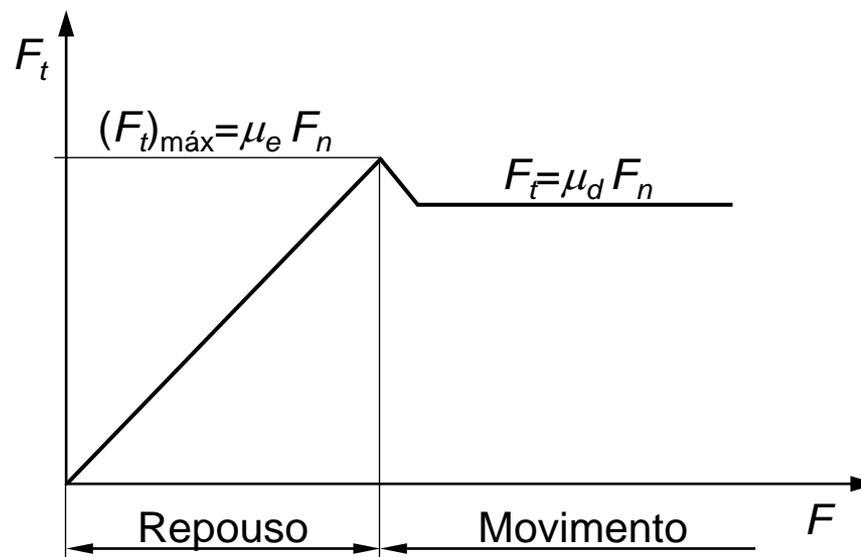
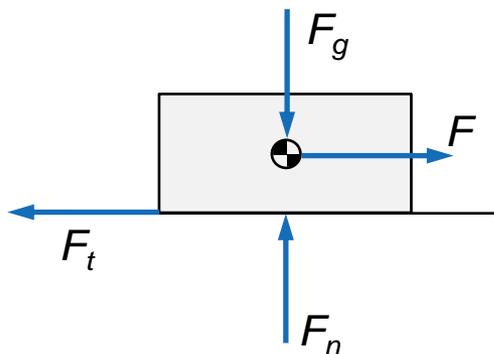
em que k_T é a rigidez torsional da mola [Nm/rad] e θ é a deformação angular da mola [rad].

3. Forças Envolvidas

Numa situação estática, como, por exemplo, um bloco estacionado sobre um plano horizontal, a **força de atrito de Coulomb** impede que o movimento se inicie quando sobre ele é aplicada uma força exterior.

Aplicando uma força F de intensidade variável e crescente, verifica-se que na dita situação estática, o módulo da força de atrito é igual à força aplicada F , mas atua em sentido contrário.

Estas duas forças, portanto, anulam-se, fazendo com que não haja movimento e o bloco permanece em repouso.



3. Forças Envolvidas

Durante o período de repouso verifica-se que

$$F_t = F \quad (7)$$

A força de atrito é máxima no fim do período de repouso, isto é, quando se está na eminência de se iniciar o movimento. Esta força de atrito máxima é dada por

$$(F_t)_{\text{máx}} = \mu_e F_n \quad (8)$$

em que μ_e é o coeficiente de atrito estático e F_n é a força de reação normal no plano sobre o bloco.

Esta lei pode ser verificada experimentalmente e concretiza a definição da lei de atrito de Coulomb.

Continuando a aumentar a força motriz F verifica-se que a força de atrito diminui logo após o início do movimento, e mantém-se constante, cujo valor é igual a

$$F_t = \mu_d F_n \quad (9)$$

onde μ_d representa o coeficiente de atrito dinâmico.

3. Forças Envolvidas

Observa-se, pois, que

$$\mu_e > \mu_d \quad (10)$$

Na verdade, é mais fácil manter o movimento do que iniciar esse mesmo movimento.

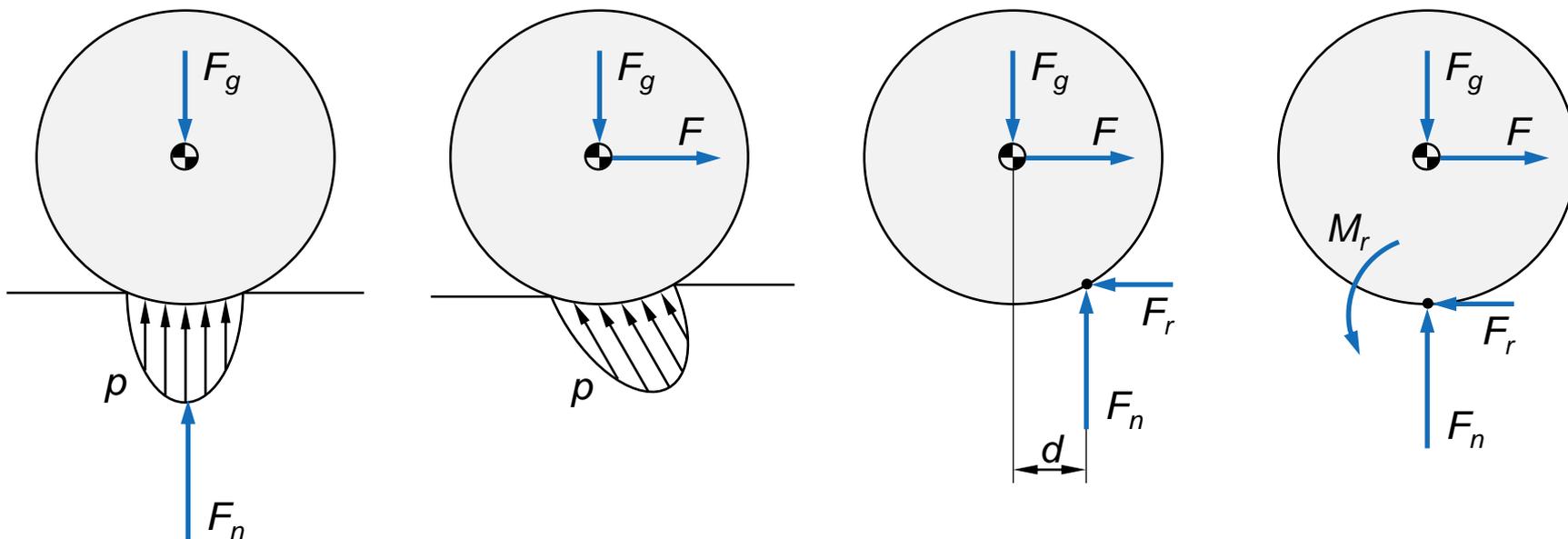
O **coeficiente de atrito depende de inúmeros fatores**, tais como, os materiais envolvidos, o acabamento superficial, a temperatura em jogo, a velocidade de deslizamento, etc.

A título de exemplo apresentam-se abaixo alguns valores para o coeficiente de atrito de deslizamento de vários pares de materiais.

Par de materiais	μ_e	μ_d
Borracha/cimento	1,0	0,7
Aço/aço	0,6	0,4
Aço/bronze	0,5	0,4

3. Forças Envolvidas

O **atrito de rolamento** acontece quando há movimento de rolamento entre dois corpos, tal como no caso de um disco sobre um plano horizontal.



Numa situação estática, a pressão de contacto origina uma força normal que é perpendicular ao solo e está alinhada com a força da gravidade.

Quando é aplicada uma força motriz F no disco, a distribuição da pressão de contacto acompanha a deformação disco-plano, deslocando o ponto de aplicação da força de reação normal de uma distância d .

3. Forças Envolvidas

Com efeito, observa-se a existência de um momento de atrito de rolamento, *i.e.*,

$$M_r = F_n d \quad (11)$$

Aumentando a força exterior aplicada, aumenta-se também a distância e , concomitantemente, o momento de atrito de rolamento.

Assim, no limite verifica-se que

$$(M_r)_{\text{máx}} = F_n d_{\text{máx}} \quad (12)$$

acima do qual se inicia o rolamento disco-solo.

Atendendo à definição de coeficiente de atrito de rolamento tem-se que

$$\mu_r = \frac{d_{\text{máx}}}{R} \quad (13)$$

donde decorre que

$$(M_r)_{\text{máx}} = \mu_r F_n R \quad (14)$$

3. Forças Envolvidas

Com efeito, observa-se o seguinte equilíbrio de momentos

$$F_r R = (M_r)_{\text{máx}} = \mu_r F_n R \quad (15)$$

ou seja

$$F_r = \mu_r F_n \quad (16)$$

em que F_r denota a força de atrito de rolamento, μ_r é o coeficiente de atrito de rolamento e F_n é a força de reação normal.

Pode, pois, afirmar-se que o atrito de rolamento é como que um momento que se opõe ao movimento de rotação.

Esta resistência está associada à deformação dos corpos em jogo, transformando um contacto pontual num contacto superficial.

É por demais evidente que o atrito de rolamento é inferior ao atrito de deslizamento. Em geral, a resistência ao rolamento é cerca de duas ordens de grandeza inferior ao atrito de deslizamento seco.

3. Forças Envolvidas

Apresentam-se abaixo exemplos de **valores típicos do coeficiente de atrito de rolamento** para diferentes pares de materiais.

Par de materiais	μ_r
Pneu/asfalto	0,020
Pneu bicicleta/cimento	0,003
Pneu bicicleta/madeira	0,001

Em teoria, o atrito não depende da área de contacto. Assim, pneus mais largos simplesmente distribuem o peso do carro por uma maior área, reduzindo o aquecimento e o desgaste.

Aumentando o número de rodas (pneus) não se aumenta o atrito, mas sim distribui-se melhor o peso e reduz-se a pressão por pneu.

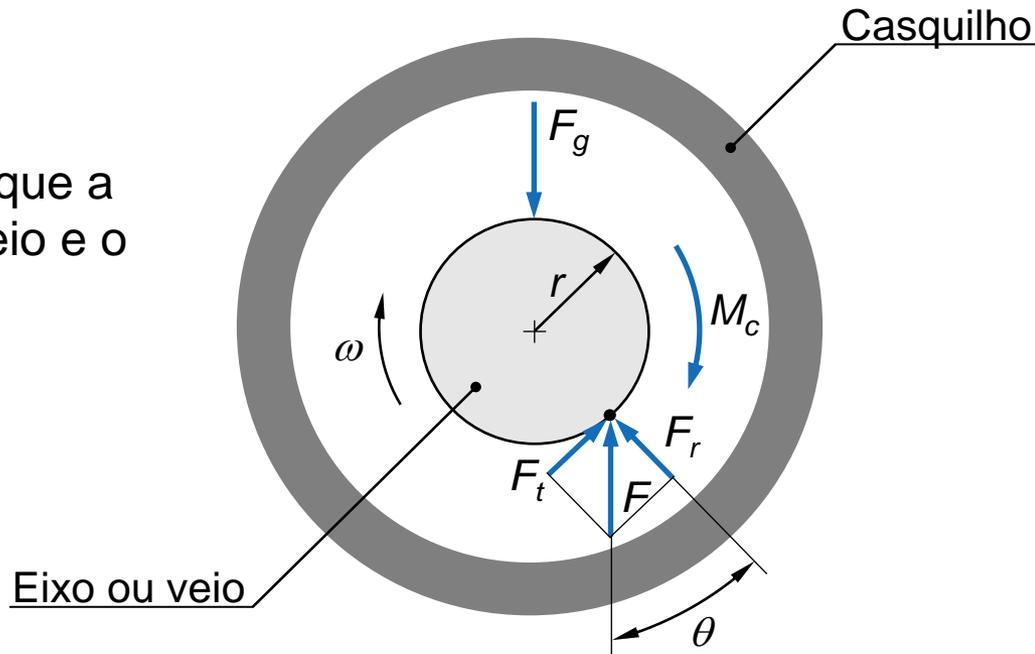
3. Forças Envolvidas

O **atrito em chumaceiras secas** faz com que exista um momento resistente relativo entre o veio (eixo ou moente) e o casquilho.

Nestes casos, o **momento necessário para vencer o atrito** entre as superfícies do veio e do casquilho, e assim proporcionar funcionamento da chumaceira, pode ser calculado do seguinte modo

$$M_c = F_t r = F r \operatorname{sen} \theta \quad (17)$$

Deve notar-se que a folga entre o veio e o casquilho está ampliada para facilitar a representação.



3. Forças Envolvidas

Para ângulos θ pequenos pode considerar-se a seguinte simplificação

$$\text{sen } \theta \approx \text{tg } \theta = \mu_c \quad (18)$$

facto que decorre da própria definição de coeficiente de atrito.

Assim, tem-se que o momento de atrito numa chumaceira é dado por

$$M_c = \mu_c F r \quad (19)$$

em que F é a força de reação na chumaceira, r é o raio do eixo e μ_c representa o coeficiente de atrito de deslizamento da chumaceira.

A força de reação total da chumaceira pode ser calculada do seguinte modo

$$F = \sqrt{F_t^2 + F_r^2} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (20)$$

3. Forças Envolvidas

Da análise da equação (19) observa-se que para diminuir o atrito numa chumaceira deve reduzir-se a força de reação, o raio do eixo ou o coeficiente de atrito da chumaceira.

Donde se pode inferir que em chumaceiras (sem rolamentos) o eixo deve ter o menor diâmetro possível.

Apresentam-se, a título de curiosidade, alguns valores para o coeficiente de atrito em chumaceiras secas.

Tipo de chumaceira	μ_c
Polímero-polímero (deslizamento)	0,25
Polímero-polímero (rolamento)	0,10
Aço-bronze (rolamento)	0,15
Aço-polímero (rolamento)	0,20

Deve notar-se que os valores dos coeficientes de atrito dependem significativamente das condições de funcionamento, e.g., carga, velocidade, etc.

3. Forças Envolvidas

O atrito em chumaceiras pode ser reduzido utilizando **rolamentos**, os quais apresentam valores de coeficiente de atrito relativamente baixos, tal como se exemplifica na tabela abaixo.

Tipo de chumaceira	μ_c
Rolamentos radiais de esferas	0,0015
Rolamentos de rolos cilíndricos	0,0013
Rolamentos de agulhas	0,0025

Na verdade, no caso dos rolamentos, o momento de atrito é dado por

$$M_c = \mu_c F r \quad (21)$$

em que r é o raio interior do rolamento, μ_c é o coeficiente de atrito da chumaceira e F é a força aplicada no rolamento, isto é

$$F = \sqrt{F_t^2 + F_r^2} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (22)$$

4. Análise Dinâmica

A análise dinâmica do carro diz respeito fundamentalmente ao estudo das características do movimento do carro, em termos de **deslocamento, velocidade e aceleração**, bem como das diversas **forças e momentos** (motores e dissipativos) que afetam o movimento.

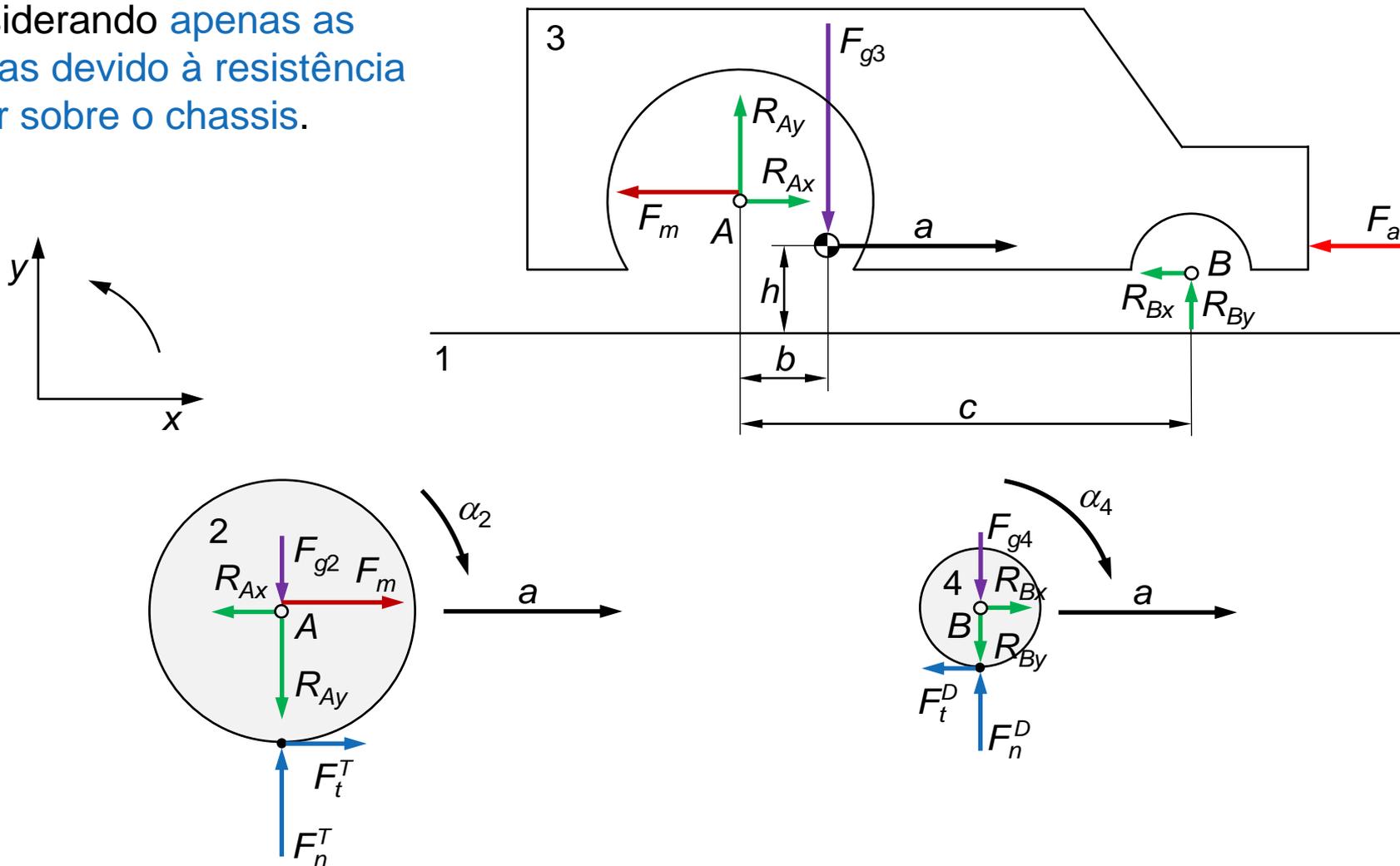
Com efeito, o procedimento relativo ao estudo do desempenho dinâmico do carro consiste, em primeiro lugar, em **determinar a aceleração** produzida pelo carro em cada instante e, posteriormente, obter, por **integração numérica**, as correspondentes **velocidades e posições**.

No presente texto **apenas se consideram as perdas devido ao efeito aerodinâmico** do ar. Nesta fase, não são consideradas as perdas por atrito nos eixos, nem devido ao rolamento das rodas.

Deve lembrar-se que as rodas (traseiras e dianteira) devem descrever um movimento de **rolamento puro**.

4. Análise Dinâmica

Apresentam-se de seguida os **diagramas de corpo livre** do chassis, das rodas traseiras e a roda dianteira, considerando **apenas as perdas devido à resistência do ar sobre o chassis**.



4. Análise Dinâmica

Aplicando a [segunda lei de Newton](#) para o movimento de translação horizontal das rodas traseiras, materializadas no diagrama do corpo livre anteriormente elaborado, resulta que

$$\sum F_{2x} = m_2 a \Rightarrow F_m - R_{Ax} + F_t^T = m_2 a \quad (23)$$

Aplicando a [segunda lei de Newton](#) para o movimento de rotação das rodas traseiras, resulta que

$$\sum M_{2CG} = -I_{2CG} \alpha_2 \Rightarrow F_t^T R_2 - F_m r_2 = -I_{2CG} \alpha_2 \quad (24)$$

Por outro lado, do movimento puro de rotação das rodas traseiras tem-se que

$$a = \alpha_2 R_2 \quad (25)$$

Combinando as equações (24) e (25) resulta que

$$F_t^T = F_m \frac{r_2}{R_2} - I_{2CG} \frac{a}{R_2^2} \quad (26)$$

4. Análise Dinâmica

Substituindo a equação (26) na equação (23) resulta que

$$R_{Ax} = F_m + F_m \frac{r_2}{R_2} - I_{2CG} \frac{a}{R_2^2} - m_2 a \quad (27)$$

Aplicando a [segunda lei de Newton](#) para o movimento de translação horizontal da roda dianteira, vem que

$$\sum F_{4x} = m_4 a \Rightarrow R_{Bx} - F_t^D = m_4 a \quad (28)$$

Aplicando a [segunda lei de Newton](#) para o movimento de rotação da roda dianteira, resulta que

$$\sum M_{4CG} = -I_{4CG} \alpha_4 \Rightarrow -F_t^D R_4 = -I_{4CG} \alpha_4 \quad (29)$$

Por outro lado, do movimento puro de rotação da roda dianteira tem-se que

$$a = \alpha_4 R_4 \quad (30)$$

4. Análise Dinâmica

Combinando as equações (29) e (30) resulta que

$$F_t^D = I_{4CG} \frac{a}{R_4^2} \quad (31)$$

Substituindo agora a equação (31) na equação (28) resulta que

$$R_{Bx} = m_4 a + I_{4CG} \frac{a}{R_4^2} \quad (32)$$

Aplicando a [segunda lei de Newton](#) para o movimento de translação do chassis, resulta que

$$\sum F_{3x} = m_3 a \Rightarrow R_{Ax} - F_m - R_{Bx} - F_a = m_3 a \quad (33)$$

Finalmente, introduzindo agora as equações (27) e (32) na equação (33) vem que

$$a = \frac{F_m (r_2 / R_2) - F_a}{m_2 + m_3 + m_4 + I_{2CG} / R_2^2 + I_{4CG} / R_4^2} \quad (34)$$

4. Análise Dinâmica

Para efetuar a análise do movimento do carro deve proceder-se do seguinte modo

1. Definir as condições iniciais: x_0 , v_0 , t_0 , t_{final} e Δt
2. Determinar as ações (forças e momentos) que atuam no carro
3. Calcular a aceleração do carro utilizando a equação (34)
4. Calcular a velocidade do carro, integrando numericamente a aceleração, *i.e.*

$$v_{t+\Delta t} = v_t + a\Delta t \quad (35)$$

5. Calcular a posição do carro, integrando numericamente a velocidade, *i.e.*

$$x_{t+\Delta t} = x_t + v\Delta t \quad (36)$$

6. Atualizar as variáveis de estado, voltar ao passo 2 e prosseguir a análise do movimento do carro até se atingir o tempo final de simulação (t_{final}), ou seja

$$t = t + \Delta t \quad (37)$$

4. Análise Dinâmica

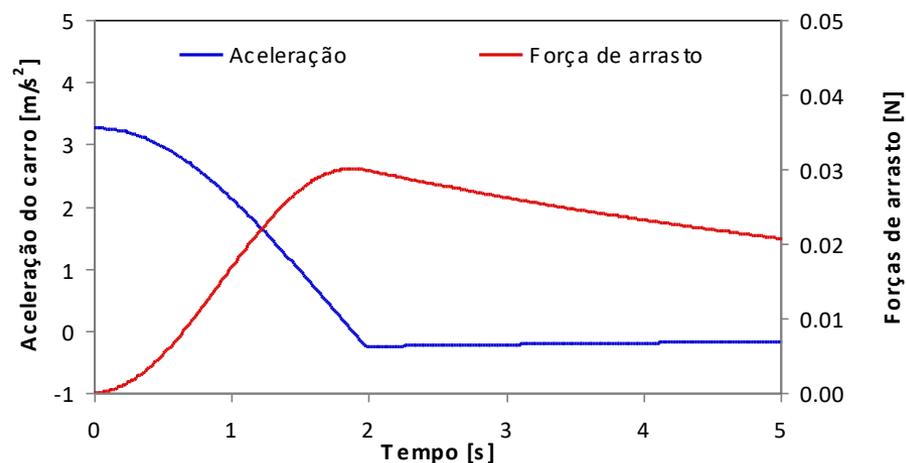
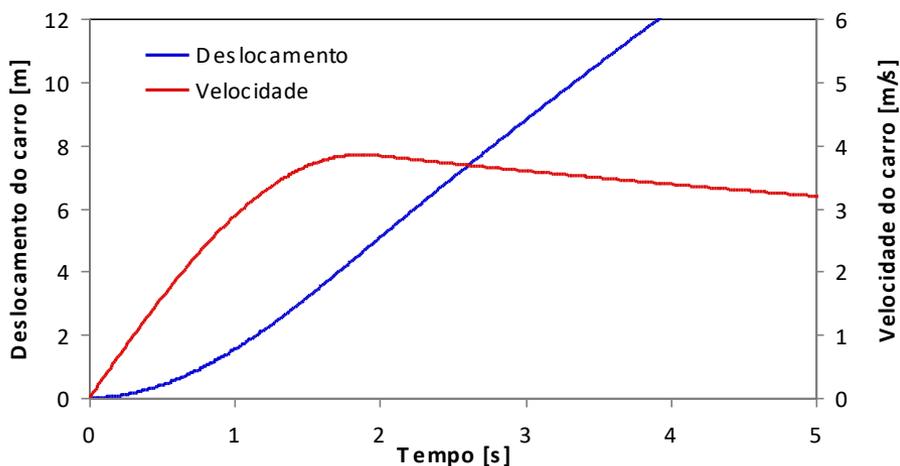
As figuras abaixo ilustram o desempenho do carro no que diz respeito ao deslocamento, à velocidade, à aceleração e à força de arrasto.

Para além dos dados anteriormente apresentados, consideram-se ainda os seguintes elementos no cálculo da força de arrasto:

$$\rho_{ar} = 1,16 \text{ kg/m}^3$$

$$A = 0,007 \text{ m}^2$$

$$C_D = 0,5$$



5. Programa CARDYNA

O código CARDYNA, desenvolvido em MATLAB, permite estudar o desempenho do carro, bem como visualizar o seu movimento.

Universidade do Minho Departamento de Engenharia Mecânica

Análise do Desempenho Dinâmico de um Carro

Por: F. Marques e P. Flores

V01.2023

Informação Geral

Posição Inicial, x_0 [m] Velocidade Inicial, v_0 [m/s] Passo de Integração, Δt [s] Distância a percorrer [m]

	Chassis				Eixo Traseiro				Eixo Dianteiro				Mola		
	Massa m_3 [kg]	d.e.e. c [mm]	Altura CG h [mm]	Dist. CG-ET b [mm]	Massa m_2 [kg]	M. inércia I_{2CG} [kg.m ²]	Raio roda R_2 [mm]	Raio ch. r_2 [mm]	Massa m_4 [kg]	M. inércia I_{4CG} [kg.m ²]	Raio roda R_4 [mm]	Raio ch. r_4 [mm]	Rigidez k [N/m]	Deform. máx. δ_{max} [mm]	Raio eixo r_e [mm]
Carro 1	0.055	180	40	40	0.04	3.7e-05	50	1	0.005	1.1e-06	25	1	190	100	2
Carro 2	0.055	180	40	40	0.04	3.7e-05	50	1	0.005	1.1e-06	25	1	190	100	1

	Coeficientes de Atrito						Aerodinâmica			Resultados da Simulação [s]
	Coef. at. est. R_2, μ_T	Coef. at. est. R_4, μ_D	Coef. at. rol. R_2, μ_{rr}	Coef. at. rol. R_4, μ_{rD}	Coef. at. ch. r_2, μ_{cT}	Coef. at. ch. r_4, μ_{cD}	Coef. forma C_f	Área frontal A [m ²]	Massa esp. ar ρ_{ar} [kg/m ³]	
Carro 1	0.8	0.8	0.02	0.02	0.1	0.1	0.5	0.007	1.16	3.29
Carro 2	0.8	0.8	0.02	0.02	0.1	0.1	0.5	0.007	1.16	3.78

Análise de Resultados

Carro 1 Carro 2 Ambos

Ver Simulação

Velocidade da Simulação

Posição do carro [m]

6. Revisão de Conhecimentos

Apresentam-se de seguida algumas questões que merecem uma reflexão mais profunda no decorrer da realização do projeto do carro.

Qual é a influência da vantagem mecânica no desempenho do carro?

Qual é a influência da inércia translacional do chassis no desempenho do carro?

Qual é a influência da inércia rotacional das rodas no desempenho do carro?

Qual é a força resistente que tem maior influência no desempenho do carro?

Qual é a influência da posição do centro de massa no desempenho do carro?

Qual é a influência da distância entre eixos no desempenho do carro?

Qual é a influência da dimensão das rodas no desempenho do carro?

Qual é a influência do número de rodas no desempenho do carro?

Qual é a influência da largura das rodas no desempenho do carro?

7. Consultas Recomendadas

Flores, P. (2012) *Análise Cinemática e Dinâmica de Mecanismos – Exercícios resolvidos e propostos*. Publindústria, Porto.

Flores, P., Marques, F. (2017) *Sobre a Dinâmica do Carro – Teoria e Aplicação*. Publindústria, Porto.

Marques, F., Flores, P. (2021) *Da Dinâmica de Sistemas Multicorpo*. Engebook, Porto.

https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_equation

https://en.wikipedia.org/wiki/Coil_spring

https://en.wikipedia.org/wiki/Rolling_resistance

<http://www.tribology-abc.com/abc/cof.htm>

http://www.roymech.co.uk/Useful_Tables/Tribology/co_of_frict.htm

<https://www.youtube.com/@RaceParty/videos>