Universidade do Minho
Escola de Engenharia

NAMecUM

PROJETO INTEGRADOR EM ENGENHARIA MECÂNICA II

Licenciatura em Engenharia Mecânica

Elaborado por Paulo Flores - 2023

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade do Minho
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães

pflores@dem.uminho.pt

T.04 – DINÂMICA DE SISTEMAS MECÂNICOS

1. Introdução

Neste conjunto de diapositivos são apresentados os fundamentos relativos ao estudo dinâmico de sistemas mecânicos, incluindo aspetos como a inércia, as leis de Newton e as equações do movimento.

De um modo suficientemente abrangente pode dizer-se que a análise dinâmica de sistemas mecânicos inclui o estudo das caraterísticas do movimento dos corpos, tendo em consideração as causas ou origens do movimento.

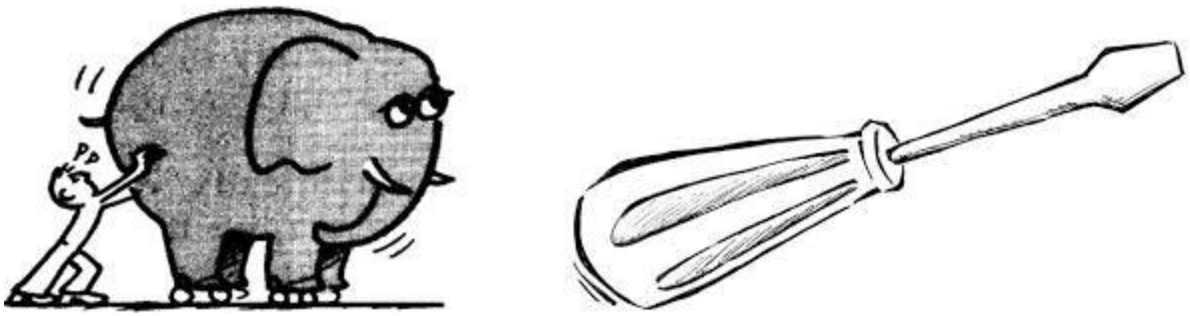
As caraterísticas do movimento dos corpos incluem, em geral, as posições, as velocidades e as acelerações, quer lineares, quer angulares.

As causas ou origens do movimento, por seu lado, referem-se fundamentalmente às forças e/ou momentos que são aplicados aos corpos.

A dinâmica é, pois, um subdomínio da Mecânica em que se estudam os movimentos dos corpos sujeitos à ação de forças e/ou momentos.

2. Inércia

De uma forma geral pode definir-se inércia como sendo a propriedade que os corpos possuem e que se carateriza pelo facto de aqueles se oporem à variação do seu estado de repouso ou de movimento, quando sobre eles são aplicadas ações, isto é, forças e/ou momentos.



Exemplos de aplicação de força e de aplicação de momento.

No contexto da Ciência de Máquinas e Mecanismos deve fazer-se a distinção entre inércia de translação e inércia de rotação.

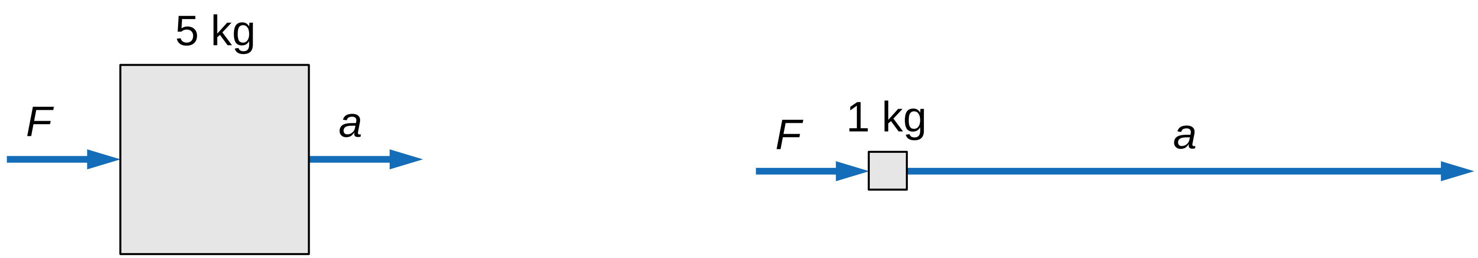
A inércia de translação associa-se à massa enquanto a inércia de rotação se associa ao momento mássico de inércia.

2. Inércia

Em dinâmica de sistemas mecânicos pode dizer-se que a massa de um corpo mede a sua inércia ou resistência ao movimento de translação.

Por outras palavras, a massa diz respeito à maior ou menor resistência dos corpos à alteração da sua velocidade de translação quando sujeitos a forças exteriores aplicadas.

Com efeito, quanto maior for a massa de um corpo, mais difícil é alterar a sua velocidade, ou retirá-lo de repouso e, por conseguinte, menor será a aceleração.



Um bloco com 5 kg de massa tem 5 vezes mais inércia do que um bloco de 1 kg.

Aplicando a mesma força a ambos os blocos, verifica-se que a aceleração produzida pelo bloco de 1 kg é 5 vezes maior.

2. Inércia

Observa-se, portanto, que aplicando uma determinada força a um dado objeto, a aceleração resultante é inversamente proporcional à sua massa de acordo com a segunda lei de Newton, ou seja

$$a = \frac{F}{m} \tag{1}$$

em que *F* representa a força aplicada ao objeto, que é expressa em newtons [N], *m* denota a massa, cuja unidade é o quilograma [kg], e *a* diz respeito à aceleração linear produzida, a qual é expressa em [m/s^2].

Relembre-se que na análise dimensional a unidade da força é estabelecida do seguinte modo

$$1\,\mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{2}$$

2. Inércia

Considerando de novo a segunda lei de Newton, a massa pode ser definida como o quociente entre a força aplicada a um determinado corpo e a aceleração que essa força produz.

A massa de um corpo pode ser determinada experimentalmente utilizando, para o efeito, balanças, ou computacionalmente recorrendo, por exemplo, aos sistemas CAD (acrónimo de *Computer Aided Drawing*).

Alternativamente, a massa pode ser calculada analiticamente fazendo a integração sobre todo o volume do corpo em questão, isto é

$$m = \iiint_V \rho \, \mathrm{d}V \tag{3}$$

em que ρ representa a massa específica ou densidade do corpo, a qual é expressa em [kg/m^3]. Para corpos homogéneos e isotrópicos a massa específica é igual em todos os seus pontos, donde resulta que

$$m = \rho V \tag{4}$$

onde V denota o volume do corpo expresso em [m^3].

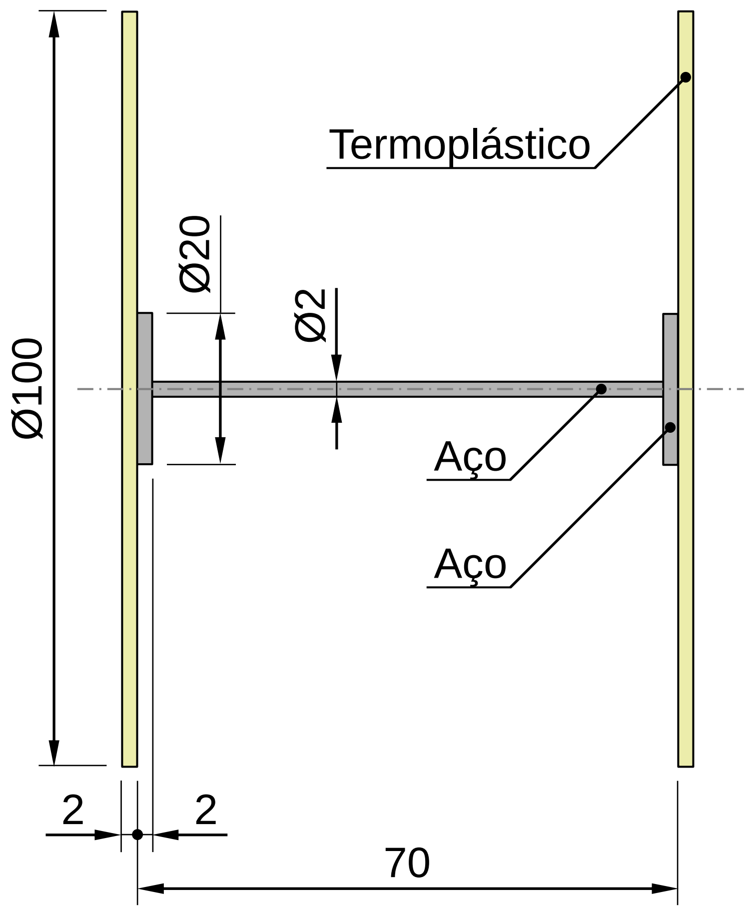
2. Inércia

A título de exemplo apresentam-se na tabela abaixo valores relativos à massa específica de alguns materiais.

Material	Massa específica [kg/m^3]	Massa específica [g/cm^3]
Aço	7800	7,80
Água	1000	1,00
Alumínio	2700	2,70
Chumbo	11300	11,30
Madeira de pinho	400	0,40
Termoplástico	930	0,93
Tungsténio	19300	19,30

2. Inércia

Considere um conjunto eixo-rodas de um carro, tal como o que se representa no esquema abaixo, em relação ao qual se pretende determinar a massa total. Todos os corpos são considerados maciços e homogéneos.



2. Inércia

Comece-se por calcular a massa de cada um dos elementos do conjunto, ou seja,

$$m_{\text{eixo}} = \rho_{\text{aço}} V = 7800 \times \pi \times \left(\frac{2 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 \times (70 - 4) \times 10^{-3} = 0{,}0016 \text{ kg}$$

$$m_{\text{anéis}} = 2\rho_{\text{aço}} V = 2 \times 7800 \times \pi \times \left(\frac{20 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 \times 2 \times 10^{-3} = 0{,}0098 \text{ kg}$$

$$m_{\text{rodas}} = 2\rho_{\text{termoplástico}} V = 2 \times 930 \times \pi \times \left(\frac{100 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 \times 2 \times 10^{-3} = 0{,}0292 \text{ kg}$$

Assim, a massa total do conjunto eixo-rodas é igual a

$$m_{\text{total}} = 0{,}0016 + 0{,}0098 + 0{,}0292 = 0{,}0406 \text{ kg}$$

(4%) (24%) (72%)

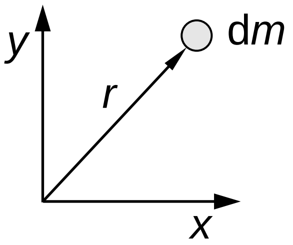
2. Inércia

O momento mássico de inércia de um corpo mede a sua inércia ou resistência ao movimento de rotação.

Por outras palavras, o momento mássico de inércia diz respeito à maior ou menor resistência dos corpos à alteração da sua velocidade de rotação quando sujeitos a ações exteriores aplicadas.

O momento mássico de inércia é, por definição, uma medida da distribuição da massa de um corpo em relação a um dado eixo, e depende da distância da massa ao eixo de rotação.

O momento mássico de inércia para corpos contínuos de partículas é dado por



$$I_z = \iiint_V r^2 \mathrm{d}m = \iiint_V r^2 \rho \,\mathrm{d}V \qquad (5)$$

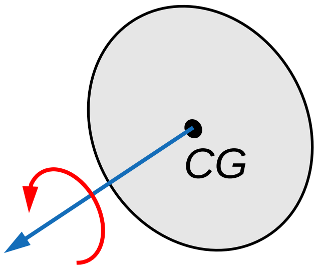
em que *r* é a distância da massa elementar ao eixo de rotação em questão.

O momento mássico de inércia é expresso em [kg·m^2].

2. Inércia

O momento mássico de inércia de um corpo depende do eixo de rotação em causa. Assim, por exemplo, o momento mássico de inércia de um disco de raio *R* em relação ao eixo axial que passa no centro de gravidade é dado por

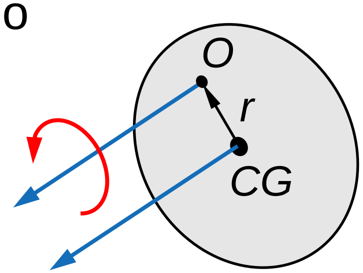
$$I_{CG} = \tfrac{1}{2} m R^2 \qquad (6)$$



onde *m* denota a massa do disco e *R* representa o raio.

O momento mássico de inércia de um disco em relação a um qualquer eixo paralelo ao eixo axial pode ser determinado do seguinte modo

$$I_O = I_{CG} + m r^2 \qquad (7)$$



em que I_{CG} é o momento mássico de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de gravidade, *m* é a massa do disco e *r* representa a distância do centro de gravidade ao ponto considerado.

A equação (7) pode ser utilizada para determinar o momento mássico de inércia de eixos paralelos de qualquer objeto e, por isso, aquela equação traduz o teorema dos eixos paralelos ou teorema de Steiner.

2. Inércia

O momento mássico de inércia de objetos compostos pode ser determinado a partir do cálculo dos momentos mássicos de inércia de cada um dos seus elementos básicos (discos, cilindros, etc.) em relação ao eixo pretendido e depois somam-se os valores obtidos para resultar o momento mássico de inércia total.

Considere novamente o conjunto eixo-rodas apresentado anteriormente e em relação ao qual se pretende determinar o momento mássico de inércia total em relação a um eixo situado na periferia das rodas.

Assim, calcule-se, em primeiro lugar, o valor do momento mássico de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro geométrico do sistema, ou seja,

$$I_{\text{eixo}} = \tfrac{1}{2} mR^2 = \tfrac{1}{2} \times 0{,}0016 \times \left(\frac{2 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 = 8{,}09 \times 10^{-10} \text{ kgm}^2$$

$$I_{\text{anéis}} = \tfrac{1}{2} mR^2 = \tfrac{1}{2} \times 0{,}0098 \times \left(\frac{20 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 = 4{,}90 \times 10^{-7} \text{ kgm}^2$$

$$I_{\text{rodas}} = \tfrac{1}{2} mR^2 = \tfrac{1}{2} \times 0{,}0292 \times \left(\frac{100 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 = 3{,}65 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$$

2. Inércia

O momento mássico de inércia total do conjunto eixo-rodas em relação ao eixo que passa pelo centro de gravidade é igual a

$$\begin{aligned} I_{CG} &= I_{\text{eixo}} + I_{\text{anéis}} + I_{\text{rodas}} \\ &= 8{,}09\times10^{-10} + 4{,}90\times10^{-7} + 3{,}65\times10^{-5} \\ &= 3{,}70\times10^{-5}\ \text{kgm}^2 \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando o teorema de Steiner, o momento mássico de inércia total do conjunto eixo-rodas em relação a um eixo que passa pela periferia das rodas é dado por

$$\begin{aligned} I_O &= I_{CG} + m_{\text{total}} R^2 \\ &= 3{,}70\times10^{-5} + 0{,}0406\times\left(\frac{100\times10^{-3}}{2}\right)^2 \\ &= 1{,}39\times10^{-4}\ \text{kgm}^2 \end{aligned}$$

3. Leis de Newton

A análise dinâmica permite prever o movimento causado por determinadas ações (forças e/ou momentos) ou vice-versa, conforme se trate de uma análise dinâmica direta ou inversa, respetivamente.

A análise dinâmica direta possibilita o cálculo as caraterísticas do movimento dos corpos, tendo como base o conhecimento das forças e/ou momentos atuantes.

A análise dinâmica inversa possibilita a determinação das forças e/ou momentos que se desenvolvem num dado sistema, tendo como base o conhecimento da sua cinemática e das propriedades inerciais dos corpos que o constituem.

Em ambos os casos utiliza-se a segunda lei de Newton, mas de forma distinta, *i.e.*

$$a = \frac{F}{m} \tag{8}$$

$$F = ma \tag{9}$$

em que a equação (8) é utilizada em dinâmica direta e a equação (9) é usada para a análise dinâmica inversa.

3. Leis de Newton

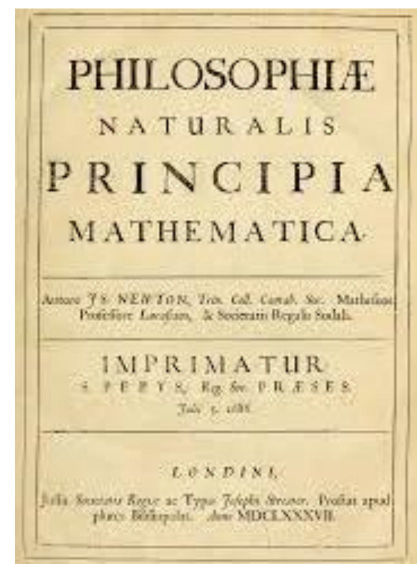
As leis de Newton (1642-1727) são três leis que possibilitam o estudo do movimento dos corpos materiais, mormente a sua análise dinâmica.

Relembre-se que o movimento diz respeito à variação temporal da posição relativa dos corpos no espaço.

Isaac Newton

Newton estabeleceu com singular genialidade as ditas leis de Newton publicadas na sua obra prima conhecida por *Principia* (*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* – Princípios Matemáticos de Filosofia Natural).

A primeira lei de Newton pode ser enunciada do seguinte modo: Todos os corpos permanecem em estado de repouso, ou movimentam-se de maneira uniforme em linha reta, a não ser que sejam impelidos a mudar de situação por forças que sejam aplicadas sobre eles.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

IMPRIMATUR

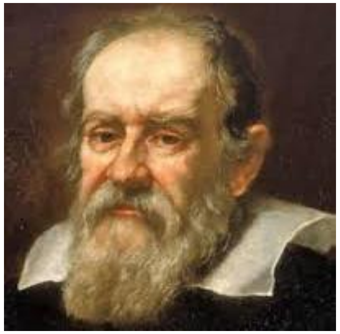
LONDINI,

Principia de Newton

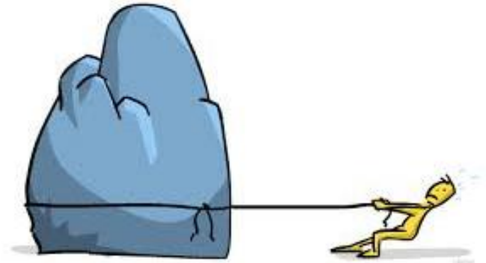
3. Leis de Newton

Na verdade, esta lei traduz o princípio da inércia primeiramente estudado por Galileu (1564-1642), o qual diz que quando é nula a força resultante num corpo em movimento, então a sua velocidade é constante.

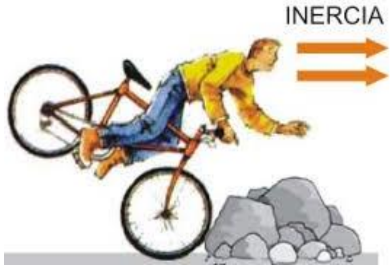
Pode, pois, inferir-se a existência de movimento sem que haja força atuantes.



Galileu Galilei



Um corpo em repouso tende a permanecer em repouso



Um corpo com velocidade constante tende a manter essa velocidade

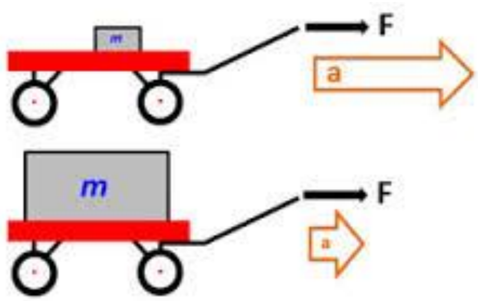
3. Leis de Newton

A segunda lei de Newton postula que: A mudança do movimento é proporcional à intensidade da força aplicada, e ocorre na direção da linha reta em que a força é aplicada.

Esta lei, também denominada lei ou princípio fundamental da dinâmica, pode ser expressa do seguinte modo,

$$F = ma \tag{10}$$

em que o produto da massa de um corpo pela aceleração causada por uma determinada força é igual, em módulo, a essa força, sendo o sentido da aceleração o mesmo que o da força.

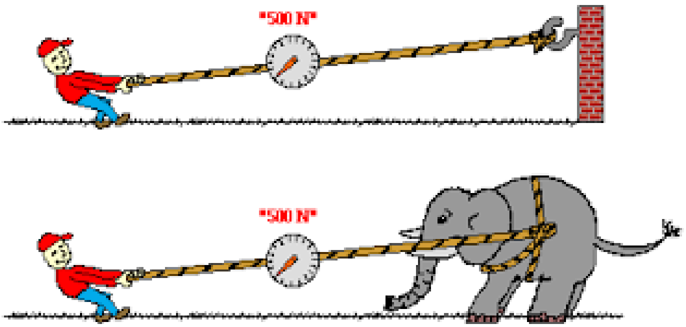


Exemplos de aplicação da segunda de lei de Newton, lei fundamental da dinâmica

3. Leis de Newton

Finalmente, a terceira lei de Newton pode ser enunciada da seguinte forma: A toda a ação corresponde sempre uma reação igual e contrária, ou as ações recíprocas de dois corpos, um sobre o outro, são sempre iguais e orientadas em sentidos opostos.

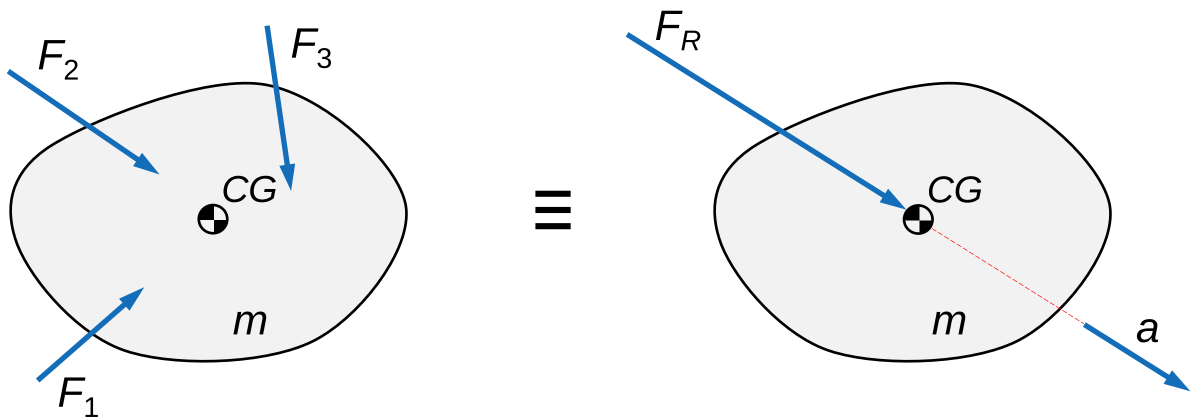
Esta lei traduz o princípio de ação e reação, ou seja, dois corpos exercem um sobre o outro forças de igual magnitude, com a mesma direção, mas atuam em sentidos opostos.



Exemplos de aplicação da terceira lei de Newton, lei da ação e reação

4. Equações do Movimento

As equações do movimento de sistemas mecânicos são desenvolvidas a partir da segunda lei de Newton, a qual pode ser apresentada do seguinte modo: a força que resulta de um dado conjunto de forças, que atuam num dado corpo, produz naquele uma aceleração que atua na mesma direção e no mesmo sentido da força resultante.



Força resultante de um conjunto de forças que atua num corpo

Matematicamente, esta lei pode ser escrita do seguinte modo

$$\sum F = F_R = ma \tag{11}$$

e que traduz, como já foi dito, a segunda lei de Newton.

4. Equações do Movimento

D'Alembert (1717-1783) estabeleceu que o somatório das forças exteriores que atuam num corpo, conjuntamente com a força inércia (*ma*), formam um sistema de forças em equilíbrio. Este equilíbrio, dito equilíbrio dinâmico, pode ser traduzido da seguinte forma

$$\sum F - ma = 0 \qquad (12)$$

que é, na verdade, equivalente à segunda lei de Newton.

Deve referir-se que na abordagem acima exposta apenas se refere ao movimento de translação. Assim, de modo análogo, para o movimento de rotação é válida a seguinte relação

$$\sum M = I\alpha \qquad (13)$$

onde M representa o momento resultante (momentos puros e momentos das forças), expresso em [N·m], I é o momento mássico de inércia, expresso em [kg·m^2] e α diz respeito à aceleração angular, expressa em [rad/s^2].

4. Equações do Movimento

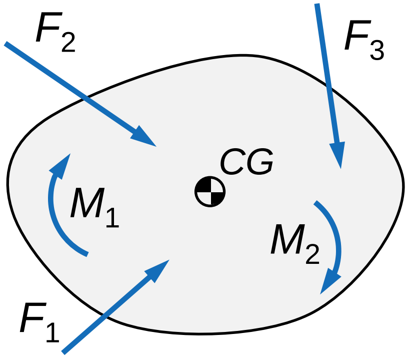
A equação (13) é equivalente à segunda lei de Newton para o caso do movimento de rotação, e é frequentemente denominada de equação de Euler (1707-1783).

No caso mais geral do movimento plano de um corpo rígido não constrangido podem ser escritas três equações do movimento. Duas relativas ao movimento de translação e uma relativa ao movimento de rotação, ou seja

$$\sum F_x = ma_x \tag{14}$$

$$\sum F_y = ma_y \tag{15}$$

$$\sum M_z = I\alpha \tag{16}$$

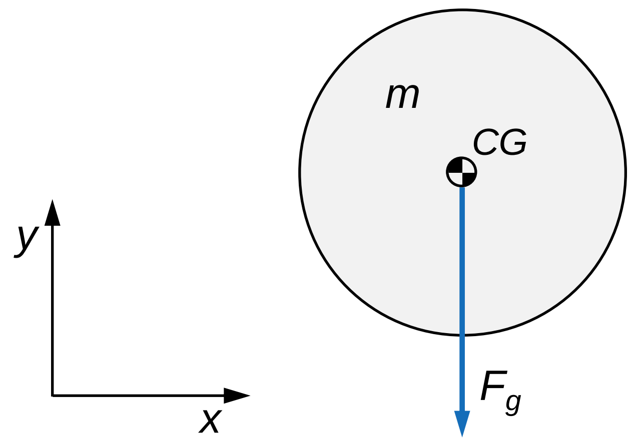


As equações (14)-(16) representam as equações do movimento de translação e de rotação de um corpo no espaço bidimensional.

Estas equações são também denominadas equações de Newton-Euler.

4. Equações do Movimento

Considere o caso simples de um corpo de massa *m*, em queda livre, em que se despreza a resistência do ar. Deste modo, a única força exterior aplicada ao corpo é a que resulta a aceleração gravítica.



Assim, da aplicação das equações do movimento resulta que

$$\sum F_y = -ma_y \Rightarrow -F_g = -ma_y \qquad (17)$$

ou seja

$$-mg = -ma_y \Rightarrow a_y = g \qquad (18)$$

4. Equações do Movimento

Tal como seria expectável, um corpo em queda livre, em que a resistência do ar é desprezada, move-se com uma aceleração igual à aceleração da gravidade.

Numa abordagem numérico-computacional genérica, no que diz respeito à análise dinâmica, podem estabelecer-se os seguintes passos:

1. Definir as condições iniciais, ou seja, y_0, v_0, t_0, t_{final} e Δt

2. Calcular as forças que atuam no corpo, isto é, $F_g = mg$

3. Calcular, para o instante t, a aceleração do corpo, resolvendo, para o efeito, a equação (17)

$$a_t = \frac{F_g}{m} \tag{19}$$

4. Calcular a velocidade no instante seguinte, integrando a aceleração, isto é

$$v_{t+\Delta t} = v_t + a_t \Delta t \tag{20}$$

4. Equações do Movimento

5. Integrar a velocidade para obter a posição, ou seja,

$$y_{t+\Delta t} = y_t + v_t \Delta t \qquad (21)$$

6. Atualizar as variáveis de estado, voltar ao passo 2 e prosseguir a análise até se atingir o tempo final da simulação (t_{final}), em que se incrementa o tempo, isto é,

$$t = t + \Delta t \qquad (22)$$

Na metodologia apresentada utiliza-se como algoritmo de integração o método de Euler, que sendo bastante simples proporciona resultados aceitáveis quando o passo de integração (Δt) é adequado (suficientemente pequeno).

Esta metodologia é bastante fácil de implementar em programas computacionais, tais como o *Excel* e o *MATLAB*.

5. Exemplos de Aplicação

Considere 4 objetos distintos, feitos do mesmo material, colocados sobre uma rampa, cuja inclinação é igual a 10º. A posição inicial dos objetos corresponde a uma altura de 200 mm. Os objetos em estudo são uma esfera maciça, um cilindro maciço, uma esfera oca e um anel. Os 4 objetos em estudo têm as seguintes caraterísticas:

Esfera maciça:	m = 32 g,	R =11,0 mm,	$I = 1{,}549 \times 10^{-6}$ kgm^2
Cilindro maciço:	m = 250 g,	R =12,6 mm,	$I = 1{,}985 \times 10^{-5}$ kgm^2
Esfera oca:	m = 3 g,	R =12,6 mm,	$I = 3{,}175 \times 10^{-7}$ kgm^2
Anel:	m = 2 g,	R =12,6 mm,	$I = 3{,}175 \times 10^{-7}$ kgm^2

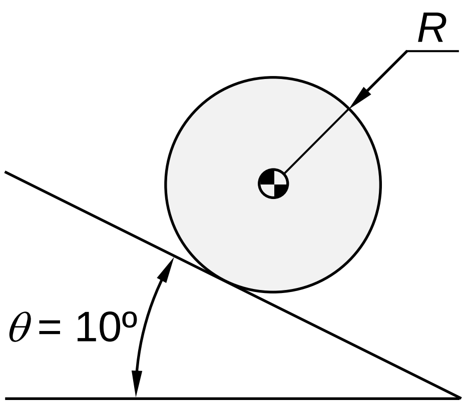
Deve relembrar-se que:

$$I_{\text{esfera maciça}} = \frac{2}{5} mR^2 \qquad I_{\text{cilindro maciço}} = \frac{1}{2} mR^2 \qquad I_{\text{esfera oca}} = \frac{2}{3} mR^2 \qquad I_{\text{anel}} = mR^2$$

Assim, atendendo a que os objetos têm caraterísticas idênticas no contacto com a rampa, determine a ordem de chegada dos objetos quando estes são largados, simultaneamente, da mesma posição inicial e com velocidade inicial nula.

5. Exemplos de Aplicação

Comece-se por elaborar o diagrama do corpo livre genérico, o qual é idêntico para os 4 objetos.



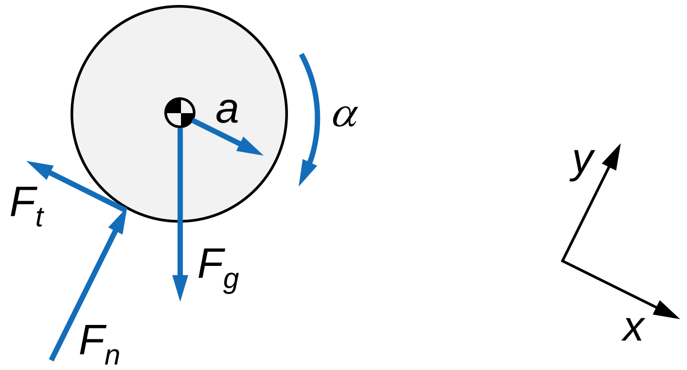


Diagrama do corpo livre

Deve chamar-se a atenção para o facto de que o movimento de descida dos objetos ao longo da rampa faz-se sem escorregamento ou deslizamento, ou seja, trata-se de um movimento de rolamento puro.

Assim, pelo facto de não haver deslizamento, o ponto de contacto entre os objetos e o solo está instantaneamente em repouso. Este ponto é, na verdade, um centro instantâneo de rotação.

5. Exemplos de Aplicação

Para o movimento de rolamento puro, a força de atrito que atua no ponto de contacto é do tipo estático, ou seja, $F_a = \mu N$, pelo que não há perda de potência ($P = F_a v$), pois, relembre-se, é nula a velocidade no ponto de contacto.

Em suma, há conservação da energia mecânica, pois admite-se que não há perdas por atrito de rolamento.

Aplicando as leis de Newton ao diagrama do corpo livre genérico vem que

$$\sum F_x = ma \Rightarrow mg\,\mathrm{sen}\,\theta - F_t = ma \tag{23}$$

$$\sum M_{CG} = -I\alpha \Rightarrow -F_t R = -I\alpha \tag{24}$$

Da equação (17) resulta que

$$F_t = I\frac{\alpha}{R} \tag{25}$$

que representa a força da atrito estática, uma vez que se trata de rolamento puro. Note-se que quanto maior for a inércia, maior é a força de atrito.

5. Exemplos de Aplicação

Atendendo a que os objetos rodam sem escorregar é válida a seguinte relação

$$a = \alpha R \tag{26}$$

donde resulta que

$$F_t = I \frac{a}{R^2} \tag{27}$$

Introduzindo a equação (27) na equação (23) vem que

$$mg\mathrm{sen}\,\theta - I\frac{a}{R^2} = ma \tag{28}$$

ou seja

$$a\left(m + \frac{I}{R^2}\right) = mg\mathrm{sen}\,\theta \tag{29}$$

$$a = \frac{mg\mathrm{sen}\,\theta}{m + I/R^2} \tag{30}$$

5. Exemplos de Aplicação

Da análise da equação (30) observa-se que quanto maior for o momento mássico de inércia (*I*), menor é a aceleração linear e, por conseguinte, maior é a dificuldade em rodar. Note que os corpos só descem se rodarem!

Atente-se a que a aceleração dos objetos dada pela equação (30) é constante, pelo que é válida a análise para o movimento uniformemente acelerado, ou seja

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 \qquad (31)$$

donde resulta que

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} \qquad (32)$$

Assim, considerando os dados dos 4 objetos em estudo, obtêm-se os seguintes resultados para os tempos de descida:

Esfera maciça:	1,38 s
Cilindro maciço:	1,43 s
Esfera oca:	1,51 s
Anel:	1,65 s

6. Revisão de Conhecimentos

Defina inércia.

Distinga inércia de translação de inércia de rotação.

Faça a distinção entre inércia estática e inércia dinâmica.

Apresente as equações de Newton-Euler para um corpo rígido.

Estude, utilizando as equações de Newton-Euler, o movimento de um corpo em queda livre considerando a resistência do ar.

Apresente o conceito de força.

Descreva a lei de Hooke no âmbito de molas helicoidais de tração.

Caraterize as principais forças existentes nos sistemas mecânicos.

Apresente as principais caraterísticas da lei de atrito de Coulomb.

Caraterize a força de arrasto devido à resistência do ar.

7. Consultas Recomendadas

Flores, P., Marques, F. (2017) *Sobre a Dinâmica do Carro: Teoria e Aplicação*. Publindústria, Porto.

https://pt.wikipedia.org/wiki/Inércia

https://pt.wikipedia.org/wiki/Massa

https://pt.wikipedia.org/wiki/Momento_de_inércia

https://pt.wikipedia.org/wiki/Dinâmica

https://pt.wikipedia.org/wiki/Equações_de_movimento

https://pt.wikipedia.org/wiki/Força

https://www.youtube.com/watch?v=iH48Lc7wq0U

https://www.youtube.com/watch?v=Yf0BN0kq7OU

https://www.youtube.com/watch?v=MkMEF5ccGD0