Universidade do Minho
Escola de Ciências

Ana Catarina Lopes Carvalho Sousa

Sistemas Dedutivos para Lógica Quântica Minimal

dezembro de 2021

Ana Catarina Sousa **Sistemas Dedutivos para Lógica Quântica Minimal**

UMinho | 2021

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Ana Catarina Lopes Carvalho Sousa

Sistemas Dedutivos para Lógica Quântica Minimal

Dissertação de Mestrado
Mestrado em Matemática

Trabalho efetuado sob a orientação do
Professor José Carlos Soares do Espírito Santo

dezembro de 2021

Agradecimentos

Foram várias as pessoas e entidades cujo contributo tornou possível a realização deste trabalho e às quais dirijo aqui os meus mais profundos agradecimentos:

Ao meu orientador, Professor José Carlos Espírito Santo, pela partilha de conhecimentos, disponibilidade, orientação e paciência ao longo da realização deste trabalho.

Aos restantes professores com quem me cruzei durante o meu percurso académico, em particular ao Professor José Joaquim e aos professores Miguel Vieira e Sara Henriques, cujos ensinamentos indubitavelmente me enriqueceram enquanto pessoa e aprendiz da Matemática.

Ao Centro de Matemática da Universidade do Minho e à Fundação Portuguesa para a Ciência e Tecnologia (FCT), pelo financiamento desta dissertação, através da Bolsa de Investigação CMAT - UIDB/00013/2020 - 02/2021.

À minha colega de mestrado, Catarina, pela sua disponibilidade e inter-ajuda ao longo deste percurso.

À Sara, ao Carlos, à Viviana, ao Rui, à Isabel, à Inês e ao meu padrinho, Paulo, pelos constantes incentivos e amizade. Ao Eduardo, à Filipa e ao Luís, não só pela amizade, como pelo seu interesse e entusiasmo pelo meu trabalho. Ao Tomás, por me ter inspirado e incentivado a arriscar neste caminho.

Ao Gauss, meu fiel amigo de 4 patas, por ser a minha sombra, companhia e fonte de lambidelas nos momentos de estudo e na vida em geral.

Ao meu pai, José, e às minhas irmãs, Cláudia e Gaby, por serem o meu maior suporte, por nunca lhes faltar uma palavra de apoio e por acreditarem sempre em mim. À pequena Francisca, por derreter o meu coração nos seus abraços e por me relembrar constantemente da magia que é ser criança e aprender algo pela primeira vez.

Por fim, à pessoa a quem dedico este trabalho: a minha mãe, Olinda, a quem agradeço por me ter dado sempre a oportunidade de seguir os meus sonhos e que, onde quer que esteja, será para sempre a minha maior inspiração e o motivo de tudo o que de bom fizer.

A todos, o meu muito obrigada!

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

Resumo

Sistemas Dedutivos para Lógica Quântica Minimal

A definição de uma lógica pode ser feita de duas formas distintas: semântica ou dedutivamente. No primeiro caso, bastar-nos-á determinar a estrutura algébrica associada a essa lógica para que esta fique univocamente definida. No segundo caso, a abordagem não é tão simples, já que podemos definir mais do que um sistema dedutivo para a mesma lógica.

A equivalência entre estas duas abordagens é garantida pelos Teoremas da Correção e da Completude. Já a equivalência entre os vários sistemas dedutivos pode ser obtida pela tradução entre os seus conjuntos de derivações ou, alternativamente, demonstrando que cada um deles é correto e completo. Assim, independentemente de se optar por uma definição semântica ou dedutiva, é garantido que se está a definir a mesma lógica.

Nesta dissertação, caraterizamos a Lógica Quântica Minimal, através da semântica algébrica dos ortorreticulados e dos seus sistemas dedutivos Dedução Natural (Quântica) e Cálculo de Sequentes (Quântico). Provamos a Correção e Completude da Dedução Natural (Quântica) e determinamos a equivalência de demonstrabilidade entre os dois sistemas dedutivos, através de traduções entre as suas derivações. No sentido de tornar a exposição mais acessível, partimos de um contexto mais familiar, a Lógica Clássica, para o qual determinamos a equivalência de demonstrabilidade entre dois dos seus sistemas dedutivos: a Dedução Natural (Clássica) e o Cálculo de Sequentes (Clássico). Fazemos ainda uma breve comparação entre ambas as lógicas, evidenciando as suas diferenças através de exemplos.

Palavras-chave: Sistemas Dedutivos, Lógica Quântica Minimal, Dedução Natural, Cálculo de Sequentes.

Abstract

Deductive Systems for Minimal Quantum Logic

The definition of a logic can be obtained in two distinct ways: semantically or deductively. In the first case, it will be sufficient to determine the algebraic structure associated with this logic for it to be univocally defined. In the second case, the approach is not that simple, as we can define more than one deductive system for the same logic.

The equivalence between these two approaches is guaranteed by the Soundness and Completeness Theorems. The equivalence between the different deductive systems can be obtained by the translation between their sets of derivations or by demonstrating that each one of them is correct and complete. Thus, regardless of whether one chooses a semantic or deductive definition, it is guaranteed that is defining the same logic.

In this dissertation, we characterize Minimal Quantum Logic through the algebraic semantics of ortholattices and its deductive systems (Quantum) Natural Deduction and (Quantum) Sequent Calculus. We prove the Soundness and Completeness of (Quantum) Natural Deduction and determine the equivalence of demonstrability between the two deductive systems, through the translations between their derivations. To make it clearer, we start from a more familiar context, the Classical Logic, for which we determined the equivalence of demonstrability between two of its deductive systems: (Classic) Natural Deduction and (Classic) Sequent Calculus. We also make a brief comparison between both logics, highlighting their differences through examples.

Keywords: Deductive Systems, Minimal Quantum Logic, Natural Deduction, Sequent Calculus.

Índice

Lista de Figuras

Siglas

GC	Cálculo de Sequentes (Clássico)
GQM	Cálculo de Sequentes (Quântico)
LC	Lógica Clássica
LQM	Lógica Quântica Minimal
NC	Dedução Natural (Clássica)
NQM	Dedução Natural (Quântica)

Capítulo 1

Introdução

O nascimento da lógica quântica acontece com a publicação do famoso artigo "The Logic of Quantum Mechanics"[1], de Birkhoff e von Neumann, numa tentativa de identificar que estruturas lógicas poderiam ser utilizadas para descrever teorias físicas, como a Mecânica Quântica, que não se coadunam com as regras da Lógica Clássica. Dois exemplos deste tipo de lógicas são a Lógica Quântica Ortomodular e a sua versão mais fraca, a Lógica Quântica Minimal, também designada por Ortológica [2], que apresentamos em detalhe neste trabalho.

A definição de uma lógica pode ser obtida semântica ou dedutivamente. Do ponto de vista semântico, enquanto a Lógica Clássica é associada às Álgebras de Boole [4], a Lógica Quântica Minimal é determinada por um tipo de estrutura algébrica ordenada, usualmente não distributiva - os ortorreticulados [7]. Já do ponto de vista dedutivo [6, 9, 13], ambas as lógicas podem ser definidas por sistemas de Dedução Natural [2, 7], Cálculos de Sequentes [3, 8, 10, 12] ou Sistemas de Hilbert, que não apresentamos neste trabalho.

Dispor de definições semânticas e dedutivas equivalentes entre si é pertinente, na medida em que, por exemplo, permite decidir se uma fórmula é ou não uma verdade lógica. Isso não é visível no caso da Lógica Clássica, pois para se demonstrar que uma fórmula é uma verdade lógica, basta provar que é verdadeira para qualquer valoração na álgebra dos valores lógicos. No entanto, no que respeita à Lógica Quântica Minimal, a forma que conhecemos de fazer a prova de uma verdade lógica semanticamente é através da Propriedade dos Modelos Finitos de Goldblatt [7], que enuncia que se uma fórmula φ é verdadeira em todos os modelos algébricos finitos, então φ é uma verdade lógica. Assim, ter à disposição sistemas dedutivos mostra-se como uma alternativa a esta abordagem.

O objetivo desta dissertação é então definir a Lógica Quântica Minimal semanticamente, através dos ortorreticulados, e dedutivamente, através dos sistemas dedutivos de Dedução Natural [2] e Cálculo de

Sequentes [10]. Embora os sistemas de Hilbert pudessem também ser aqui estudados, optamos por não o fazer. A equivalência das duas definições é garantida pelos Teoremas da Correção e da Completude, cujas provas são apresentadas. Da mesma forma, e ainda que os dois sistemas dedutivos sejam distintos e com especificidades próprias, a equivalência entre eles é obtida pela tradução entre os seus conjuntos de derivações.

Esta dissertação encontra-se dividida em 5 capítulos. No segundo capítulo, recordamos alguns conceitos semânticos sobre a Lógica Clássica, apresentamos dois dos seus sistemas dedutivos - a Dedução Natural (Clássica) e o Cálculo de Sequentes (Clássico) e provamos a equivalência de demonstrabilidade entre ambos. No terceiro capitulo, introduzimos as caraterizações semântica e dedutiva da Lógica Quântica Minimal e apresentamos uma breve comparação com a Lógica Clássica, através de exemplos ilustrativos. No quarto capítulo, derivamos uma variante da Dedução Natural (Quântica) e provamos a sua equivalência de demonstrabilidade com o Cálculo de Sequentes (Quântico). Por fim, no quinto e último capítulo, são apresentadas algumas conclusões sobre as contribuições desta dissertação, bem como a discussão sobre os resultados obtidos e tópicos deixados em aberto, que poderão ser alvo de trabalho futuro.

Capítulo 2

Revisões sobre Lógica Clássica

2.1 Sintaxe e Semântica

Utilizamos $\mathcal{V}_p$ e $\mathcal{A}_p = \mathcal{V}_p \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \perp\} \cup \{(,)\}$ para denotar, respetivamente, o conjunto numerável das variáveis proposicionais e o alfabeto proposicional. O conjunto de todas as palavras em $\mathcal{A}_p$ é representado por $\mathcal{A}_p^*$.

Definição 1 (**Conjunto de Fórmulas**). *O conjunto das fórmulas, $\mathcal{F}_p$, é o subconjunto de $\mathcal{A}_p^*$, definido indutivamente por:*

1. *para todo $p \in \mathcal{V}_p$, $p \in \mathcal{F}_p$;*
2. *$\perp \in \mathcal{F}_p$;*
3. *para todo $\varphi \in \mathcal{F}_p$, $(\neg\varphi) \in \mathcal{F}_p$;*
4. *para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_p$, $(\varphi \,\square\, \psi) \in \mathcal{F}_p$, $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$*

Por convenção, podem também ser omitidos os parêntesis mais externos de cada fórmula. Convencionamos ainda que as letras gregas minúsculas φ, ψ, σ, etc. servirão para representar fórmulas de $\mathcal{F}_p$ e a letra maiúscula F denotará um conjunto finito de fórmulas em $\mathcal{F}_p$. Se F é um subconjunto finito de $\mathcal{F}_p$ e $\diamond : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{F}_p$, então $\diamond F = \{\diamond\varphi \mid \varphi \in F\}$.

Definição 2 (**Reticulado**). *Um conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{B} = (B, \leq)$ diz-se um reticulado se, para quaisquer $a, b \in B$, existem ínfimo de $\{a, b\}$ (notação: $a \wedge b$) e supremo de $\{a, b\}$ (notação: $a \vee b$).*

Alternativamente, um reticulado é uma estrutura algébrica $\mathcal{B} = (B; \vee, \wedge)$, tal que, para quaisquer $a, b, c \in B$:

- $a \wedge b = b \wedge a$ e $a \vee b = b \vee a$ (*comutatividade*);
- $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ e $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ (*associatividade*);
- $a \wedge a = a$ e $a \vee a = a$ (*idempotência*);
- $a \wedge (a \vee b) = a$ e $a \vee (a \wedge b) = a$ (*absorção*).

Numa tal estrutura algébrica, define-se $a \leq b$ se $a \wedge b = a$. Prova-se que $\leq$ é uma relação de ordem parcial em B; $a \wedge b$ = ínfimo de $\{a, b\}$ e $a \vee b$ = supremo de $\{a, b\}$.

Definição 3 (**Álgebra de Boole**). *Um estrutura $\mathcal{B} = (B; \leq, \ ', 0, 1)$ é uma Álgebra de Boole [4] se:*

- *$(B, \leq)$ é um reticulado;*
- *$(B, \leq)$ é distributivo: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, para quaisquer $a, b, c \in B$;*
- *$(B, \leq)$ é limitado: $a \vee 0 = a$ e $a \wedge 1 = a$, para todo $a \in B$;*
- *$(B, \leq)$ é complementado: $a \vee a' = 1$ e $a \wedge a' = 0$, para todo $a \in B$.*

Um exemplo de Álgebra de Boole é a álgebra dos valores lógicos, **2** $= (\{0, 1\}, \vee, \wedge, \ ', 0, 1)$, onde $\wedge$, $\vee$ e $'$ são dados pelas familiares tabelas de verdade.

Definição 4 (**Valoração**). *Sejam $\mathcal{B} = (B; \leq, \ ', 0, 1)$ uma Álgebra de Boole e $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_p$. Uma função $v : \mathcal{F}_p \longrightarrow B$ é uma valoração em $\mathcal{B}$ se:*

- *$v(\perp) = 0$;*
- *$v(\neg\varphi) = v(\varphi)'$;*
- *$v(\varphi \mathbin{\square} \psi) = v(\varphi) \mathbin{\square} v(\psi)$, $\square \in \{\wedge, \vee\}$;*
- *$v(\varphi \longrightarrow \psi) = v(\varphi)' \vee (\psi)$.*

Definição 5 (**Verdade Lógica**). *Uma fórmula φ é uma verdade lógica (ou tautologia) da Lógica Proposicional Clássica (notação: $\models_{LC} \varphi$) se, para qualquer álgebra de Boole $\mathcal{B}$, para qualquer valoração v em $\mathcal{B}$, $v(\varphi) = 1$.*

Teorema 1. $\models_{LC} \varphi$ *se e só se, para qualquer valoração* v *em* ***2***, $v(\varphi) = 1$.

Demonstração. Detalhes da demonstração podem ser consultados em [11]. □

2.2 Axiomatização

Definição 6 (**Conjunto de todos os Multiconjuntos Finitos**). *Representamos por* $\mathbb{M}$ *o conjunto de todos os Multiconjuntos Finitos de fórmulas de* $\mathcal{F}_p$.

- *Usamos* . *para denotar o multiconjunto vazio;*
- *As letras gregas maiúsculas -* $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Theta, \ldots$ *- são utilizadas para representar multiconjuntos finitos de fórmulas;*
- *A união de dois multiconjuntos* Γ *e* Δ *é representada por* Γ, Δ.

Definição 7 (**Função G**). *A função G é a função que, a cada multiconjunto finito de* $\mathbb{M}$, Γ, *faz corresponder o conjuntos das fórmulas em* $\mathcal{F}_p$ *que são membros de* Γ *– ou seja, é o conjunto que resulta de* Γ *quando se ignoram as multiplicidades.*

Definição 8 (**Função** Σ). *A função* Σ *é a função que, a cada conjunto finito de fórmulas em* $\mathcal{F}_p$, F, *faz corresponder um multiconjunto de* $\mathbb{M}$, *constituído pelas fórmulas* φ *com multiplicidade 1, tais que* φ *é elemento de* F.

Definição 9 (**Sequente**). *Um sequente é uma expressão da forma*

$$\Gamma \vdash \Delta$$

onde Γ, Δ *representam multiconjuntos.*

À expressão à esquerda do símbolo $\vdash$ *chamamos antecedente e à expressão à direita do mesmo chamamos consequente do sequente. Ambas as expressões podem ser vazias.*

Dados $\Gamma = \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *e* $\Delta = \psi_1, \ldots, \psi_m$, *a interpretação do sequente é, intuitivamente, a mesma da fórmula:*

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m).$$

Se o antecedente for vazio, o sequente reduz-se à fórmula

$$(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m).$$

Por outro lado, se o consequente for vazio, o sequente tem o mesmo significado intuitivo da fórmula

$$(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow \perp.$$

Introduzimos dois sistemas dedutivos da Lógica Proposicional Clássica: a Dedução Natural (NC) e o Cálculo de Sequentes (GC), definindo cada um deles tendo por base os conceitos introduzidos acima.

2.2.1 Dedução Natural (NC)

A Dedução Natural (NC) consiste na definição indutiva de um conjunto de derivações, a que chamamos regras de inferência. Uma derivação $\mathcal{D}$ é uma árvore de fórmulas, cuja raiz representa a conclusão e cujas folhas são hipóteses, que podem estar ou não canceladas. Uma derivação com conclusão φ e hipóteses não canceladas $\psi_1, \ldots, \psi_n$ é uma demonstração formalizada que mostra como provar φ a partir de provas de $\psi_1, \ldots, \psi_n$.

Usamos $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}$ para denotar uma derivação de φ, isto é, uma derivação cuja conclusão é φ. Para representar uma derivação que tem ψ como hipótese cancelada (pela aplicação de uma regra de inferência etiquetada com (a)), utilizamos a notação $\begin{array}{c} a \\ [\psi] \\ \mathcal{D}\end{array}$. Denotamos ainda por $\begin{array}{c}\Gamma\\ \mathcal{D}\end{array}$ uma derivação a partir de Γ, isto é, uma derivação cujo conjunto de hipóteses não canceladas está contido em Γ.

Definimos indutivamente o conjunto das derivações da Dedução Natural (NC) [13] como sendo o sistema dedutivo constituído pelo Caso de Base:

$$\varphi$$

e pelas regras:

$$\frac{\varphi_1 \quad \varphi_2}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\ \mathsf{I}\wedge \qquad\qquad \frac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_i}\ \mathsf{E}_i\wedge, \text{onde } i \in \{1, 2\}$$

$$\frac{\begin{array}{c} a \\ [\varphi] \\ \mathcal{D} \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\ \mathsf{I} \rightarrow_{(a)} \qquad\qquad \frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi}\ \mathsf{E} \rightarrow$$

$$\frac{\begin{array}{c} a \\ [\varphi] \\ \mathcal{D} \\ \perp \end{array}}{\neg\varphi}\ \mathsf{I}\neg_{(a)} \qquad\qquad \frac{\neg\varphi \quad \varphi}{\perp}\ \mathsf{E}\neg$$

$$\frac{\bot}{\varphi}\ \mathsf{E}\bot$$

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\ \mathsf{I}_i\vee,\text{ onde } i \in \{1,2\} \qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{matrix} a \\ [\varphi] \\ \mathcal{D}_1 \\ \sigma \end{matrix} \quad \begin{matrix} b \\ [\psi] \\ \mathcal{D}_2 \\ \sigma \end{matrix}}{\sigma}\ \mathsf{E}\vee_{(a),(b)}$$

$$\frac{\begin{matrix} a \\ [\neg\varphi] \\ \mathcal{D} \\ \bot \end{matrix}}{\varphi}\ \mathsf{RAA}_{(a)}$$

2.2.2 Cálculo de Sequentes (GC)

Tal como acontece com NC, o Cálculo de Sequentes (GC) consiste na definição indutiva de um conjunto de derivações, a que chamamos regras de inferência. Uma derivação $\mathcal{D}$ é uma árvore de sequentes, cuja raiz representa a conclusão. Denotamos por $\overset{\mathcal{D}}{\Gamma \vdash \Delta}$ a derivação do sequente $\Gamma \vdash \Delta$, isto é, a derivação que tem como raiz o sequente $\Gamma \vdash \Delta$. Utilizamos um traço de inferência para representar a aplicação de uma dada regra de inferência e um traço de inferência duplo quando queremos representar a aplicação sequencial da mesma regra de inferência duas ou mais vezes.

Definimos indutivamente o conjunto das derivações do Cálculo de Sequentes (GC) [13], através das suas regras de inferência, que consistem no axioma:

$$\frac{}{\varphi \vdash \varphi}\ \mathsf{id}$$

nas regras estruturais:

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta}{\varphi, \Gamma \vdash \Theta}\ \mathsf{LW} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta, \varphi}\ \mathsf{RW}$$

$$\frac{\varphi, \varphi, \Gamma \vdash \Theta}{\varphi, \Gamma \vdash \Theta}\ \mathsf{LC} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Theta, \varphi, \varphi}{\Gamma \vdash \Theta, \varphi}\ \mathsf{RC}$$

nas regras operacionais:

$$\frac{}{\bot \vdash \varphi}\ \mathsf{L}\bot$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \vdash \Theta}\ \mathsf{L}\neg \qquad\qquad \frac{\varphi, \Gamma \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta, \neg\varphi}\ \mathsf{R}\neg$$

$$\frac{\varphi_i, \Gamma \vdash \Theta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \vdash \Theta}\ \mathsf{L}_i\wedge\text{, onde } i \in \{1,2\} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Theta, \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \Theta, \varphi_2}{\Gamma \vdash \Theta, \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ \mathsf{R}\wedge$$

$$\frac{\varphi_1, \Gamma \vdash \Theta \quad \varphi_2, \Gamma \vdash \Theta}{\varphi_1 \vee \varphi_2, \Gamma \vdash \Theta}\ \mathsf{L}\vee \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Theta, \varphi_i}{\Gamma \vdash \Theta, \varphi_1 \vee \varphi_2}\ \mathsf{R}_i\vee\text{, onde } i \in \{1,2\}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \varphi \quad \psi, \Gamma \vdash \Theta}{\varphi \to \psi, \Gamma \vdash \Theta}\ \mathsf{L}\to \qquad\qquad \frac{\varphi, \Gamma \vdash \Theta, \psi}{\Gamma \vdash \Theta, \varphi \to \psi}\ \mathsf{R}\to$$

e ainda na regra do corte:

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \varphi \quad \varphi, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, \Delta \vdash \Theta, \Lambda}\ \text{Corte}$$

2.2.3 Equivalência entre NC e GC

Demonstramos agora a equivalência entre os sistemas dedutivos NC e GC, para a Lógica Proposicional Clássica.

Proposição 1. *Para todo F subconjunto de $\mathcal{F}_p$ e $\varphi \in \mathcal{F}_p$, temos que: se existe uma derivação $\mathcal{D}$ em NC de φ a partir de F, então existe $\mathcal{D}'$ derivação em Cálculo de Sequentes (GC) do sequente $\Sigma(F) \vdash \varphi$.*

Demonstração. Queremos provar que, para toda a derivação $\mathcal{D}$ em NC, para todo F subconjunto de $\mathcal{F}_p$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}_p$:

$$\text{P}(\mathcal{D}) := \text{se } \begin{array}{c} F \\ \mathcal{D} \\ \varphi \end{array}\text{, então existe derivação } \mathcal{D}' \text{ em Cálculo de Sequentes do sequente } \Sigma(F) \vdash \varphi.$$

Para tal, usamos o Princípio de Indução Estrutural associado a NC. Note-se, no entanto, que, dada a natureza introdutória desta secção, apenas demonstramos em detalhe uma amostra dos casos representativos, sendo os restantes casos apresentados de forma mais sucinta.

1. *Caso de Base.*

   Sejam F subconjunto de $\mathcal{F}_p$ e $\varphi \in \mathcal{F}_p$ e suponhamos que $\mathcal{D}$ é derivação de φ a partir de F em NC. Falta ver que existe derivação do sequente $\Sigma(F) \vdash \varphi$ em Cálculo de Sequentes.

   Ora, como $\mathcal{D} = \varphi'$, temos que:

a) $\varphi = \varphi'$ (a conclusão de $\mathcal{D}$ é φ');

b) $\varphi' \in F$ (φ' é hipótese não cancelada de $\mathcal{D}$).

Então, $\Sigma(F) = \Sigma_1, \varphi'$ e uma derivação em Cálculo de Sequentes de $\Sigma(F) \vdash \varphi$ é:

$$\dfrac{\varphi' \vdash \varphi'}{\Sigma_1, \varphi' \vdash \varphi'}\ \text{LW}$$

2. *Caso $I\wedge$.*

Sejam $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ derivações em NC e suponhamos $P(\mathcal{D}_1)$ e $P(\mathcal{D}_2)$.

Seja $\mathcal{D}_3$ a derivação obtida a partir de $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$, por aplicação da regra $I\wedge$, em NC. Queremos demonstrar $P(\mathcal{D}_3)$.

Sejam F subconjunto de $\mathcal{F}_p$ e $\varphi \in \mathcal{F}_p$ e suponhamos que $\mathcal{D}_3$ é derivação de φ a partir de F, em NC. Falta ver que existe derivação do sequente $\Sigma(F) \vdash \varphi$ em Cálculo de Sequentes.

Ora, temos que:

a) $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$;

b) φ_i é conclusão de $\mathcal{D}_i$;

c) F contém as hipóteses não canceladas de $\mathcal{D}_3$.

Então:

i. Como as hipóteses não canceladas de $\mathcal{D}_1$ estão contidas no conjunto das hipóteses não canceladas de $\mathcal{D}_3$, então também estão contidas em F. Logo, $\mathcal{D}_1$ é derivação a partir de F.

ii. Analogamente, $\mathcal{D}_2$ também é derivação a partir de F.

Por $P(\mathcal{D}_1)$, temos então que existe derivação $\mathcal{D}_1'$ em Cálculo de Sequentes do sequente $\Sigma(F) \vdash \varphi_1$. De forma análoga, por $P(\mathcal{D}_2)$, temos que existe derivação $\mathcal{D}_2'$ em Cálculo de Sequentes do sequente $\Sigma(F) \vdash \varphi_2$.

Basta então tomar a seguinte derivação em Cálculo de Sequentes, obtida através da Regra de Introdução de $\wedge$ à direita:

$$\dfrac{\begin{array}{cc} \mathcal{D}_1' & \mathcal{D}_2' \\ \Sigma(F) \vdash \varphi_1 & \Sigma(F) \vdash \varphi_2 \end{array}}{\Sigma(F) \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ \text{R}\wedge$$

3. *Caso $E_i\wedge$, onde $i \in \{1,2\}$.*

   Seja $\mathcal{D}_1$ derivação em NC e suponhamos $P(\mathcal{D}_1)$.

   Seja $\mathcal{D}$ a derivação obtida a partir de $\mathcal{D}_1$, por aplicação da regra $E_i\wedge$, onde $i \in \{1,2\}$, em NC. Queremos demonstrar $P(\mathcal{D})$.

   Sejam F subconjunto de $\mathcal{F}_p$ e $\varphi \in \mathcal{F}_p$ e suponhamos que $\mathcal{D}$ é derivação de φ a partir de F, em NC. Falta ver que existe derivação do sequente $\Sigma(F) \vdash \varphi$ em Cálculo de Sequentes.

   Ora, temos que:

   a) $\varphi = \varphi_i$;

   b) $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ é conclusão de $\mathcal{D}_1$;

   c) F contém as hipóteses não canceladas de $\mathcal{D}$. Como as hipóteses não canceladas de $\mathcal{D}$ são as hipóteses não canceladas de $\mathcal{D}_1$, F contém as hipóteses não canceladas de $\mathcal{D}_1$. Logo, $\mathcal{D}_1$ é uma derivação a partir de F.

   Por $P(\mathcal{D}_1)$, temos então que existe derivação $\mathcal{D}_1'$ em Cálculo de Sequentes do sequente $\Sigma(F) \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

   Basta então tomar a seguinte derivação em Cálculo de Sequentes, obtida através da aplicação de uma Regra do Corte e da Regra de Introdução de $\wedge$ à esquerda - $L_i\wedge$, onde $i \in \{1,2\}$:

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_1'}{\Sigma(F) \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2} \qquad \dfrac{\varphi_i \vdash \varphi_i}{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \varphi_i}\,\mathsf{L}_i\wedge}{\Sigma(F) \vdash \varphi_i}\,\text{Corte}$$

4. *Caso $I_{\rightarrow}$.*

   Seja $\mathcal{D}_1$ derivação em NC e suponhamos $P(\mathcal{D}_1)$.

   Seja $\mathcal{D}$ a derivação obtida a partir de $\mathcal{D}_1$, por aplicação da regra $I_{\rightarrow}$, em NC. Queremos demonstrar $P(\mathcal{D})$.

   Sejam F subconjunto de $\mathcal{F}_p$ e $\varphi \in \mathcal{F}_p$ e suponhamos que $\mathcal{D}$ é derivação de φ a partir de F, em NC. Falta ver que existe derivação do sequente $\Sigma(F) \vdash \varphi$ em Cálculo de Sequentes.

   Ora, temos que:

   a) $\varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$;

b) φ_2 é conclusão de $\mathcal{D}_1$;

c) F contém as hipóteses não canceladas de $\mathcal{D}$. Como φ_1 é hipótese cancelada por $\mathcal{D}$, as hipóteses não canceladas de $\mathcal{D}_1$ estão contidas na união de F com $\{\varphi_1\}$ Logo, $\mathcal{D}_1$ é uma derivação a partir de $F \cup \{\varphi_1\}$.

Por $P(\mathcal{D}_1)$, temos então que existe derivação $\mathcal{D}_1'$ em Cálculo de Sequentes do sequente $\Sigma(F \cup \{\varphi_1\}) \vdash \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$. Notemos que, pela definição de Σ, $\Sigma(F \cup \{\varphi_1\}) = \Sigma(F), \varphi_1$.

Basta então tomar a seguinte derivação em Cálculo de Sequentes, obtida através da Regra de Introdução de $\rightarrow$ à direita - $R_{\rightarrow}$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1' \\ \Sigma(F), \varphi_1 \vdash \varphi_2\end{array}}{\Sigma(F) \vdash \varphi_1 \rightarrow \varphi_2}\ \mathrm{R}_{\rightarrow}$$

No que respeita aos restantes casos, apresentados abaixo, omitimos o detalhe das suas provas e apresentamo-las num estilo mais abreviado.

5. *Caso $E_{\rightarrow}$.*

A derivação, em Cálculo de Sequentes, equivalente à derivação obtida em NC, por aplicação da regra $E_{\rightarrow}$, é a seguinte e obtém-se através da aplicação de tantas Regras de Contração à Esquerda quantos os elementos de $\Sigma(F)$, de uma Regra do Corte e da Regra de Introdução de $\rightarrow$ à esquerda - $L_{\rightarrow}$, de uma regra de Enfraquecimento à Direita e de tantas Regras de Enfraquecimento à Esquerda quantos os elementos de $\Sigma(F)$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1' \\ \Sigma(F) \vdash \varphi_1 \rightarrow \varphi_2\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2' \\ \Sigma(F) \vdash \varphi_1\end{array}}{\Sigma(F) \vdash \varphi_2, \varphi_1}\ \mathrm{RW} \qquad \dfrac{\varphi_2 \vdash \varphi_2}{\varphi_2, \Sigma(F) \vdash \varphi_2}\ \mathrm{LW}}{\Sigma(F), \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \vdash \varphi_2}\ \mathrm{L}_{\rightarrow}}{\dfrac{\Sigma(F), \Sigma(F) \vdash \varphi_2}{\Sigma(F) \vdash \varphi_2}\ \mathrm{LC}}\ \mathrm{Corte}$$

em que $\mathcal{D}_1'$ e $\mathcal{D}_2'$ são dadas por hipótese de indução.

6. *Caso $I_{\neg}$.*

A derivação, em Cálculo de Sequentes, equivalente à derivação obtida em NC, por aplicação da regra $I_{\neg}$, é a seguinte e obtém-se através da aplicação da Regra de Introdução de $\neg$ à direita - $R_{\neg}$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1'\\ \Sigma(F), \varphi' \vdash \bot\end{array}}{\Sigma(F) \vdash \neg\varphi'}\ \mathrm{R}\neg$$

em que $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução.

7. *Caso* $E\neg$.

   A derivação, em Cálculo de Sequentes, equivalente à derivação obtida em NC, por aplicação da regra $E\neg$, é a seguinte e obtém-se através da aplicação de tantas Regras de Contração à Esquerda quantos os elementos de $\Sigma(F)$, de uma Regra do Corte e da Regra de Introdução de $\neg$ à esquerda - $L_\neg$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1'\\ \Sigma(F) \vdash \varphi'\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2'\\ \Sigma(F) \vdash \neg\varphi'\end{array}}{\Sigma(F), \varphi' \vdash \bot}\ \mathrm{L}\neg}{\Sigma(F), \Sigma(F) \vdash \bot}\ \mathrm{Corte}}{\Sigma(F) \vdash \bot}\ \mathrm{LC}$$

em que $\mathcal{D}_1'$ e $\mathcal{D}_2'$ são dadas por hipótese de indução.

8. *Caso* $E_\bot$.

   A derivação, em Cálculo de Sequentes, equivalente à derivação obtida em NC, por aplicação da regra $E_\bot$, é a seguinte e obtém-se através da aplicação da Regra do Corte:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1'\\ \Sigma(F) \vdash \bot\end{array} \quad \bot \vdash \varphi'}{\Sigma(F) \vdash \varphi'}\ \mathrm{Corte}$$

em que $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução.

9. *Caso* $I_i\vee$, *onde* $i \in \{1, 2\}$.

   A derivação, em Cálculo de Sequentes, equivalente à derivação obtida em NC, por aplicação da regra $I_i\vee$, é a seguinte e obtém-se através da aplicação da Regra de Introdução de $\vee$ à direita - $R_i\vee$, onde $i \in \{1, 2\}$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1'\\ \Sigma(F) \vdash \varphi_i\end{array}}{\Sigma(F) \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\ \mathrm{R}_i\vee$$

em que $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução.

10. *Caso* $E\vee$.

    A derivação, em Cálculo de Sequentes, equivalente à derivação obtida em NC, por aplicação da regra $E\vee$, é a seguinte e obtém-se através da aplicação de tantas Regras de Contração à Esquerda quantos os elementos de $\Sigma(F)$, de uma Regra do Corte e da Regra de Introdução de $\vee$ à esquerda - $L\vee$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_1'}{\Sigma(F) \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} \quad \dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_2'}{\Sigma(F), \varphi_1 \vdash \varphi'} \quad \dfrac{\mathcal{D}_3'}{\Sigma(F), \varphi_2 \vdash \varphi'}}{\Sigma(F), \varphi_1 \vee \varphi_2 \vdash \varphi'}\,\mathsf{L}\vee}{\Sigma(F), \Sigma(F) \vdash \varphi'}\,\mathsf{Corte}}{\Sigma(F) \vdash \varphi'}\,\mathsf{LC}$$

em que $\mathcal{D}_1'$, $\mathcal{D}_2'$ e $\mathcal{D}_3'$ são dadas por hipótese de indução.

11. *Caso* RAA.

    A derivação, em Cálculo de Sequentes, equivalente à derivação obtida em NC, por aplicação da regra de RAA, é a seguinte e obtém-se através da conjunção de regras de introdução de $\neg$ à esquerda e à direita e de uma Regra do Corte:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_1'}{\Sigma(F), \neg\varphi' \vdash \bot}}{\Sigma(F) \vdash \neg\neg\varphi'}\,\mathsf{R}\neg \quad \dfrac{\dfrac{\varphi' \vdash \varphi'}{\vdash \varphi', \neg\varphi'}\,\mathsf{L}\neg}{\neg\neg\varphi' \vdash \varphi'}\,\mathsf{R}\neg}{\Sigma(F) \vdash \varphi'}\,\mathsf{Corte}$$

em que $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução.

□

Proposição 2. *Para todos os* Σ, Σ' *multiconjuntos finitos de fórmulas e* $\varphi \in \mathcal{F}_p$*, temos que:*

- *se existe uma derivação* $\mathcal{D}$ *em Cálculo de Sequentes (GC) do sequente* $\Sigma \vdash \varphi, \Sigma'$*, então existe em NC uma derivação* $\mathcal{D}'$ *de* φ *a partir de* $G(\Sigma) \cup \neg G(\Sigma')$*;*

- *se existe uma derivação* $\mathcal{D}$ *em Cálculo de Sequentes (GC) do sequente* $\Sigma \vdash$*, então existe em NC uma derivação* $\mathcal{D}'$ *de* $\bot$ *a partir de* $G(\Sigma)$*.*

Demonstração. Queremos provar que, para toda a derivação $\mathcal{D}$ em Cálculo de Sequentes, quaisquer $\Sigma, \Sigma' \in \mathbb{M}$, qualquer $\varphi \in \mathcal{F}_p$:

$$P(\mathcal{D}) := P_1(\mathcal{D}) \wedge P_2(\mathcal{D})$$

em que,

- $P_1(\mathcal{D})$:= se $\overset{\mathcal{D}}{\Sigma \vdash \varphi, \Sigma'}$, então existe derivação $\mathcal{D}'$ em NC, tal que $\begin{array}{c} G(\Sigma) \cup \neg G(\Sigma') \\ \mathcal{D}' \\ \varphi \end{array}$;
- $P_2(\mathcal{D})$:= se $\overset{\mathcal{D}}{\Sigma \vdash}$, então existe derivação $\mathcal{D}'$ em NC, tal que $\begin{array}{c} G(\Sigma) \\ \mathcal{D}' \\ \bot \end{array}$.

Para tal, usamos o Princípio de Indução Estrutural associado às derivações em Cálculo de Sequentes. Uma vez mais, dada a natureza desta secção, apenas demonstramos em detalhe uma amostra dos casos representativos, sendo os restantes casos apresentados de forma mais sucinta.

1. *Identidade (id).*

   Sejam $\Sigma, \Sigma' \in \mathbb{M}$, $\varphi \in \mathcal{F}_p$ e suponhamos que $\mathcal{D}$ é derivação do sequente $\Sigma \vdash \varphi, \Sigma'$, em Cálculo de Sequentes. Falta ver que existe derivação de φ a partir de $G(\Sigma) \cup \neg G(\Sigma')$, em NC ($P_2(\mathcal{D})$ é trivialmente verdadeira).

   Ora, como $\mathcal{D} = \varphi' \vdash \varphi'$, temos que:

   a) $\varphi = \varphi'$;

   b) $\neg G(\Sigma') = \emptyset$;

   c) $\Sigma = \varphi'$, logo $G(\Sigma) = \{\varphi'\}$.

   Então, $G(\Sigma) \cup \neg G(\Sigma) = \{\varphi'\} \cup \ \emptyset = \{\varphi'\}$ e uma derivação em NC de φ a partir de $G(\Sigma) \cup \neg G(\Sigma')$ é:

$$\varphi'.$$

2. *Caso LW.*

   Seja $\mathcal{D}_1$ uma derivação em Cálculo de Sequentes de $\Gamma \vdash \Theta$ e suponhamos $P(\mathcal{D}_1)$.

Seja $\mathcal{D}$ a derivação em Cálculo de Sequentes, obtida a partir de $\mathcal{D}_1$, por aplicação da regra estrutural LW, isto é:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \Gamma \vdash \Theta\end{array}}{\varphi', \Gamma \vdash \Theta}\ \mathrm{LW}$$

Suponhamos $P(\mathcal{D}_1)$. Queremos demonstrar $P(\mathcal{D})$.

Comecemos por demonstrar $P_2(\mathcal{D})$. Seja Σ, tal que $\mathcal{D}$ é derivação de $\Sigma \vdash$. Queremos mostrar existe derivação $\mathcal{D}'$ em NC de $\perp$ a partir de $G(\Sigma)$. Como $\mathcal{D}$ é derivação de $\varphi', \Gamma \vdash \Theta$, segue que:

- $\Sigma = \varphi', \Gamma$, donde $G(\Sigma) = \{\varphi'\} \cup G(\Gamma)$;
- $\Theta = \emptyset$.

Então $\mathcal{D}_1$ é derivação de $\Gamma \vdash$ e por $P(\mathcal{D}_1)$, temos que existe derivação $\mathcal{D}'_1$ em NC, tal que:

$$\begin{array}{c} G(\Gamma)\\ \mathcal{D}'_1\\ \perp \end{array}\ .$$

Como as hipóteses não canceladas de $\mathcal{D}'_1$ pertencem a $G(\Gamma) \subseteq \{\varphi'\} \cup G(\Gamma)$, basta tomar $\mathcal{D}'$ = $\mathcal{D}'_1$.

Demonstremos agora $P_1(\mathcal{D})$. Sejam Σ, Σ', φ, tais que $\mathcal{D}$ é derivação de $\Sigma \vdash \varphi, \Sigma'$. Queremos mostrar existe derivação $\mathcal{D}'$ em NC de φ a partir de $G(\Sigma) \cup \{\varphi'\} \cup \neg G(\Sigma')$. Como $\mathcal{D}$ é derivação de $\varphi', \Gamma \vdash \Theta$, segue que:

- $\Sigma = \varphi', \Gamma$, donde $G(\Sigma) = \{\varphi'\} \cup G(\Gamma)$;
- $\Theta = \varphi, \Sigma'$.

Por $P(\mathcal{D}_1)$, temos que, para $\varphi \in \Theta$, existe derivação $\mathcal{D}'_1$ em NC, tal que:

$$\begin{array}{c} G(\Gamma) \cup \neg G(\Sigma')\\ \mathcal{D}'_1\\ \varphi \end{array}\ .$$

Como as hipóteses não canceladas de $\mathcal{D}'_1$ pertencem a $G(\Gamma) \cup \neg G(\Sigma') \subseteq G(\Gamma) \cup \{\varphi'\} \cup \neg G(\Sigma')$, basta tomar $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'_1$.

3. *Caso RW.*

   Seja $\mathcal{D}_1$ uma derivação em Cálculo de Sequentes de $\Gamma \vdash \Theta$ e suponhamos $P(\mathcal{D}_1)$.

   Seja $\mathcal{D}$ a derivação em Cálculo de Sequentes, obtida a partir de $\mathcal{D}_1$, por aplicação da regra estrutural RW, isto é:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \Gamma \vdash \Theta\end{array}}{\Gamma \vdash \Theta, \varphi'}\ \text{RW}$$

   Suponhamos $P(\mathcal{D}_1)$. Queremos demonstrar $P(\mathcal{D})$. Ora, $P_2(\mathcal{D})$ é trivialmente verdadeira.

   Sejam Σ, Σ', φ, tais que $\mathcal{D}$ é derivação de $\Sigma \vdash \varphi, \Sigma'$. Queremos mostrar existe derivação $\mathcal{D}'$ em NC de φ a partir de $G(\Sigma) \cup \neg G(\Sigma')$.

   - $\Theta = \emptyset$.

     Temos que $\mathcal{D} = \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \Gamma \vdash\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi'}\ \text{RW}$.

     Como $\mathcal{D}$ é derivação de $\Gamma \vdash \varphi'$, segue que:

     - $\Sigma = \Gamma$, donde $G(\Sigma) = G(\Gamma)$;
     - $\varphi' = \varphi, \Sigma'$, donde $\varphi = \varphi'$ e $\Sigma' = \emptyset$.

     Queremos uma derivação $\mathcal{D}'$ de φ' a partir de $G(\Gamma)$.

     Por $P(\mathcal{D}_1)$, temos que existe derivação $\mathcal{D}'_1$ em NC, tal que:

$$\begin{array}{c} G(\Gamma)\\ \mathcal{D}'_1\\ \bot \end{array}.$$

     Basta tomar a seguinte derivação em NC, obtida através de $\mathcal{D}_1$, seguida de uma aplicação da Regra $E_\bot$:

$$\begin{array}{c} G(\Gamma)\\ \mathcal{D}'_1\\ \dfrac{\bot}{\varphi'}\ \text{E}_\bot \end{array}.$$

   - $\Theta \neq \emptyset$.

     Temos que $\mathcal{D} = \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \Gamma \vdash \Theta\end{array}}{\Gamma \vdash \Theta, \varphi'}\ \text{RW}$.

     Como $\mathcal{D}$ é derivação de $\Gamma \vdash \Theta, \varphi'$, segue que:

- $\Sigma = \Gamma$, donde $G(\Sigma) = G(\Gamma)$;
- $\varphi, \Sigma' = \Theta, \varphi'$, donde:

$$\varphi = \varphi' (\varphi \notin \Theta) \text{ ou } \varphi \neq \varphi' (\varphi \in \Theta).$$

★ Se $\varphi = \varphi'$:

Seja $\varphi'' \in \Theta$. Por $P(\mathcal{D}_1)$, temos que existe derivação $\mathcal{D}_1'$ em NC, tal que:

$$\begin{array}{c} G(\Gamma), \neg G(\Sigma') \\ \mathcal{D}_1' \\ \varphi'' \end{array} \quad .$$

Queremos uma derivação $\mathcal{D}'$ de φ' a partir de $G(\Gamma) \cup \neg G(\Theta) = G(\Gamma) \cup \neg G(\Sigma') \cup \{\neg\varphi''\}$.

Basta tomar a seguinte derivação em NC:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\varphi'' \qquad \begin{array}{c} G(\Gamma), \neg G(\Sigma') \\ \mathcal{D}_1' \\ \varphi'' \end{array}}{\bot} \text{E}\neg}{\varphi'} \text{E}\bot$$

★ Se $\varphi \neq \varphi'$:

Temos que $\varphi \in \Theta$ e, por $P(\mathcal{D}_1)$, temos que existe derivação $\mathcal{D}_1'$ em NC, tal que:

$$\begin{array}{c} G(\Gamma), \neg G(\Sigma') \\ \mathcal{D}_1' \\ \varphi \end{array} \quad .$$

Como as hipóteses não canceladas de $\mathcal{D}_1'$ pertencem a $G(\Gamma) \cup \neg G(\Sigma') \subseteq G(\Gamma) \cup \neg\{\varphi'\} \cup \neg G(\Sigma')$, basta tomar $\mathcal{D}' = \mathcal{D}_1'$.

4. *Caso LC.*

As derivações, em NC, equivalentes à derivação obtida em Cálculo de Sequentes, por aplicação da regra Regra de Contração à Esquerda (LC), são as seguintes:

- Se $\Theta = \emptyset$, como $\{\varphi'\} \cup \{\varphi'\} \cup G(\Gamma) = \{\varphi'\} \cup G(\Gamma)$, basta tomar a derivação:

$$\begin{array}{c} \varphi', \varphi', G(\Gamma) \\ \mathcal{D}_1' \\ \bot \end{array}$$

em que $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução.

- Se $\Theta \neq \emptyset$, como $\{\varphi'\} \cup \{\varphi'\} \cup G(\Gamma) \cup \neg G(\Sigma') = \{\varphi'\} \cup G(\Gamma) \cup \neg G(\Sigma')$, basta tomar a derivação:

$$\begin{array}{c} \varphi', \varphi', G(\Gamma), \neg G(\Sigma') \\ \mathcal{D}_1' \\ \varphi \end{array} \qquad .$$

em que $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução.

5. *Caso RC.*

As derivações, em NC, equivalentes à derivação obtida em Cálculo de Sequentes, por aplicação da regra Regra de Contração à Direita (RC), são as seguintes:

- Se $\varphi = \varphi'$, basta tomar a derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{a}{[\neg\varphi']} \qquad \begin{array}{c} G(\Gamma), \neg G(\Theta), \overset{a}{[\neg\varphi']} \\ \mathcal{D}_1' \\ \varphi' \end{array}}{\bot}\,\mathsf{E}\neg}{\varphi'}\,\mathsf{RAA}_{(a)}$$

em que $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução.

- Se $\varphi \neq \varphi'$, isto é, se $\varphi \in \Theta$, tomamos $\varphi'' \in \Theta$ e, como $G(\Gamma) \cup \neg G(\Sigma') \cup \{\neg\varphi'\} = G(\Gamma) \cup \neg G(\Sigma') \cup \{\neg\varphi'\} \cup \{\neg\varphi'\}$, basta tomar a derivação:

$$\begin{array}{c} G(\Gamma), \neg G(\Theta), \neg\varphi', \neg\varphi' \\ \mathcal{D}_1' \\ \varphi'' \end{array}$$

em que $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução.

6. *Caso $L\bot$.*

A derivação, em NC, equivalente à derivação obtida em Cálculo de Sequentes, por aplicação da regra Regra de Introdução do $\perp$ à Esquerda ($L\perp$), é a seguinte e obtém-se através da aplicação da Regra de Eliminação do $\perp$ - $E\perp$:

$$\frac{\perp}{\varphi'}\ E\perp$$

7. *Caso $L\neg$.*

   As derivações, em NC, equivalentes à derivação obtida em Cálculo de Sequentes, a partir da derivação $\mathcal{D}_1$ do sequente $\Gamma \vdash \Theta, \varphi'$, por aplicação da regra Regra de Introdução do $\neg$ à Esquerda ($L\neg$), são as seguintes:

   - Se $\Theta = \emptyset$, basta tomar a derivação:

     $$\dfrac{\neg\varphi' \qquad \begin{array}{c} G(\Gamma) \\ \mathcal{D}_1' \\ \varphi' \end{array}}{\perp}\ E\neg$$

     em que $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução.

   - Se $\Theta \neq \emptyset$, basta tomar a derivação:

     $$\begin{array}{c} G(\Gamma), \neg G(\Sigma), \neg\varphi' \\ \mathcal{D}_1' \\ \varphi'' \end{array}$$

     em que $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução.

8. *Caso $R\neg$.*

   As derivações, em NC, equivalentes à derivação obtida em Cálculo de Sequentes, a partir da derivação $\mathcal{D}_1$ do sequente $\varphi', \Gamma \vdash \Theta$, por aplicação da regra Regra de Introdução do $\neg$ à Direita ($R\neg$), são as seguintes:

   - Se $\Theta = \emptyset$, basta tomar a derivação:

     $$\dfrac{\begin{array}{c} \overset{a}{[\varphi]}, G(\Gamma) \\ \mathcal{D}_1' \\ \perp \end{array}}{\neg\varphi'}\ I\neg(a)$$

     em que $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução.

- Se $\Theta \neq \emptyset$ e $\varphi = \neg\varphi'$, basta tomar a derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\varphi'' \qquad \begin{array}{c}\overset{a}{[\varphi]}, G(\Gamma), \neg G(\Sigma')\\ \mathcal{D}'_1 \\ \varphi''\end{array}}{\perp}\ \mathsf{E}\neg}{\neg\varphi'}\ I\neg_{(a)}$$

em que $\mathcal{D}'_1$ é dada por hipótese de indução.

- Se $\Theta \neq \emptyset$ e $\varphi \neq \neg\varphi'$, isto é, $\varphi \in \Theta$, tomamos $\varphi'' \in \Theta$ e basta tomar a derivação:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\neg\neg\varphi' \quad \overset{a}{[\neg\varphi']}}{\perp}\ \mathsf{E}\neg}{\varphi'}\ \mathsf{RAA}_{(a)} \quad , G(\Gamma), \neg G(\Sigma') \\ \mathcal{D}'_1 \\ \varphi'' \end{array}$$

em que $\mathcal{D}'_1$ é dada por hipótese de indução.

9. *Caso* $L_i\wedge$, *onde* $i \in \{1, 2\}$.

   As derivações, em NC, equivalentes à derivação obtida em Cálculo de Sequentes, a partir da derivação $\mathcal{D}_i$ do sequente $\varphi_i, \Gamma \vdash \Theta', \varphi_\Theta$, por aplicação da regra Regra de Introdução de $\wedge$ à Esquerda ($L_i\wedge$), é a seguinte:

- Se $\Theta = \emptyset$, basta tomar a derivação:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_i}\ E_i\wedge \quad , G(\Gamma) \\ \mathcal{D}'_i \\ \perp \end{array}$$

em que $\mathcal{D}'_i$ é dada por hipótese de indução.

- Se $\Theta \neq \emptyset$, basta tomar a derivação:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_i}\ E_i\wedge \quad , G(\Gamma), \neg G(\Sigma') \\ \mathcal{D}'_i \\ \varphi' \end{array}$$

em que $\mathcal{D}'_i$ é dada por hipótese de indução.

10. *Caso $R\wedge$.*

   As derivações, em NC, equivalentes à derivação obtida em Cálculo de Sequentes, a partir das derivações $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ dos sequentes $\Gamma \vdash \Theta, \varphi_1$ e $\Gamma \vdash \Theta, \varphi_2$, respetivamente, por aplicação da regra Regra de Introdução do $\wedge$ à Direita ($R\wedge$), são as seguintes:

   - Se $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, basta tomar a derivação:

   $$\dfrac{\begin{matrix}G(\Gamma),\neg G(\Theta)\\ \mathcal{D}_1'\\ \varphi_1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}G(\Gamma),\neg G(\Theta)\\ \mathcal{D}_2'\\ \varphi_2\end{matrix}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\ I\wedge$$

   em que $\mathcal{D}_1'$ e $\mathcal{D}_2'$ são dadas por hipótese de indução.

   - Se $\varphi \neq \varphi_1 \wedge \varphi_2$, isto é, se $\varphi \in \Theta$, tomamos $\varphi'' \in \Theta$ e basta tomar a seguinte derivação:

   $$\dfrac{\dfrac{\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{a}{[\neg\varphi'']} \qquad \begin{matrix}G(\Gamma),\neg G(\Sigma'),\overset{b}{[\neg\varphi_1]}\\ \mathcal{D}_1'\\ \varphi''\end{matrix}}{\bot}\ \mathsf{E}\neg}{\varphi_1}\ \mathsf{RAA}_{(b)} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{a}{[\neg\varphi'']} \qquad \begin{matrix}G(\Gamma),\neg G(\Sigma'),\overset{c}{[\neg\varphi_2]}\\ \mathcal{D}_2'\\ \varphi''\end{matrix}}{\bot}\ \mathsf{E}\neg}{\varphi_2}\ \mathsf{RAA}_{(c)}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\ \mathsf{I}\wedge}{\bot}\ \mathsf{E}\neg}{\varphi''}\ \mathsf{RAA}_{(a)}$$

   em que $\mathcal{D}_1'$ e $\mathcal{D}_2'$ são dadas por hipótese de indução.

11. *Caso $L\vee$.*

   As derivações, em NC, equivalentes à derivação obtida em Cálculo de Sequentes a partir das derivações $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ dos sequentes $\varphi_1, \Gamma \vdash \Theta', \varphi_\Theta$ e $\varphi_2, \Gamma \vdash \Theta', \varphi_\Theta$, respetivamente, por aplicação da regra Regra de Introdução do $\vee$ à Esquerda ($L\vee$), são as seguinte:

   - Se $\Theta = \emptyset$, basta tomar a derivação:

   $$\dfrac{\varphi_1 \vee \varphi_2 \qquad \begin{matrix}\overset{a}{[\varphi_1]}, G(\Gamma)\\ \mathcal{D}_1'\\ \bot\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\overset{b}{[\varphi_2]}, G(\Gamma)\\ \mathcal{D}_2'\\ \bot\end{matrix}}{\bot}\ \mathsf{E}\vee_{(a),(b)}$$

   em que $\mathcal{D}_1'$ e $\mathcal{D}_2'$ são dadas por hipótese de indução.

- Se $\Theta \neq \emptyset$, basta tomar a derivação:

$$\dfrac{\varphi_1 \vee \varphi_2 \qquad \begin{array}{c} \overset{a}{[\varphi_1]}, G(\Gamma), \neg G(\Sigma') \\ \mathcal{D}_1' \\ \varphi' \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overset{b}{[\varphi_2]}, G(\Gamma), \neg G(\Sigma') \\ \mathcal{D}_2' \\ \varphi' \end{array}}{\varphi'}\ \mathsf{E}_{\vee (a),(b)}$$

em que $\mathcal{D}_1'$ e $\mathcal{D}_2'$ são dadas por hipótese de indução.

12. *Caso $R_i\vee$, onde $i \in \{1,2\}$.*

As derivações, em NC, equivalentes à derivação obtida em Cálculo de Sequentes a partir da derivação $\mathcal{D}_i$ do sequente $\Gamma \vdash \Theta, \varphi_i$, por aplicação da regra Regra de Introdução do $\vee$ à Direita ($R_i\vee$), são as seguintes:

- Se $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$, basta tomar a derivação:

$$\dfrac{\begin{array}{c} G(\Gamma), \neg G(\Theta) \\ \mathcal{D}_i' \\ \varphi_i \end{array}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\ I_i\vee$$

em que $\mathcal{D}_i'$ é dada por hipótese de indução.

- Se $\varphi \neq \varphi_1 \vee \varphi_2$, isto é, se $\varphi \in \Theta$, tomamos $\varphi' \in \Theta$ e basta tomar a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{a}{[\neg\varphi']} \qquad \begin{array}{c} G(\Gamma), \neg G(\Sigma'), \overset{b}{[\neg\varphi_i]} \\ \mathcal{D}_i' \\ \varphi' \end{array}}{\perp}\ \mathsf{E}_\neg}{\varphi_i}\ \mathsf{RAA}_{(b)}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\ \mathsf{I}_\vee}{\perp}\ \mathsf{E}_\neg}{\varphi'}\ \mathsf{RAA}_{(a)}$$

em que $\mathcal{D}_i'$ é dada por hipótese de indução.

13. *Caso $L \longrightarrow$*

As derivações, em NC, equivalentes à derivação obtida em Cálculo de Sequentes, a partir das derivações $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ dos sequentes $\Gamma \vdash \Theta, \varphi_1$ e $\varphi_2, \Delta \vdash \Lambda', \varphi_\Lambda$, respetivamente, por aplicação da regra Regra de Introdução de $\longrightarrow$ à Esquerda ($L \longrightarrow$), são as seguintes:

- Se $\Theta = \emptyset$, basta tomar a derivação:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\varphi_1 \to \varphi_2 \qquad \begin{array}{c} G(\Gamma) \\ \mathcal{D}'_1 \\ \varphi_1 \end{array}}{\varphi_2}\, E \to \\ \mathcal{D}'_2 \\ \bot \end{array} \quad , G(\Gamma)$$

  em que $\mathcal{D}'_1$ e $\mathcal{D}'_2$ são dadas por hipótese de indução.

- Se $\Theta \neq \emptyset$, basta tomar a derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{a}{[\neg\varphi']} \qquad \begin{array}{c} \overset{b}{[\varphi_2]}, G(\Gamma), \neg G(\Sigma') \\ \mathcal{D}'_2 \\ \varphi' \end{array}}{\bot}\, \mathsf{E}_\neg}{\neg\varphi_2}\, \mathsf{I}_{\neg(b)} \qquad \dfrac{\varphi_1 \to \varphi_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{a}{[\neg\varphi']} \qquad \begin{array}{c} G(\Gamma), \neg G(\Sigma'), \overset{c}{[\neg\varphi_1]} \\ \mathcal{D}'_1 \\ \varphi' \end{array}}{\bot}\, \mathsf{E}_\neg}{\varphi_1}\, \mathsf{RAA}_{(c)}}{\varphi_2}\, \mathsf{E}_\to}{\bot}\, \mathsf{E}_\neg}{\varphi'}\, \mathsf{RAA}_{(a)}$$

  em que $\mathcal{D}'_1$ e $\mathcal{D}'_2$ são dadas por hipótese de indução.

14. *Caso $R \to$.*

    As derivações, em NC, equivalentes à derivação obtida em Cálculo de Sequentes a partir da derivação $\mathcal{D}_1$ do sequente $\varphi_1, \Gamma \vdash \Theta, \varphi_2$, por aplicação da Regra de Introdução do $\to$ à Direita ($R \to$), são as seguintes:

    - Se $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$, basta tomar a derivação:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \overset{a}{[\varphi_1]}, G(\Gamma), \neg G(\Theta) \\ \mathcal{D}'_1 \\ \varphi_2 \end{array}}{\varphi_1 \to \varphi_2}\, I \to_{(a)}$$

      em que $\mathcal{D}'_1$ é dada por hipótese de indução.

    - Se $\varphi \neq \varphi_1 \to \varphi_2$, isto é, se $\varphi \in \Theta$, tomamos $\varphi' \in \Theta$ e basta tomar a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\varphi_1 \to \varphi_2) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{a}{[\neg\varphi']} \qquad \begin{array}{c}\overset{b}{[\varphi_1]}, \overset{c}{[\neg\varphi_2]}, G(\Gamma), \neg G(\Sigma')\\ \mathcal{D}'_1\\ \varphi'\end{array}}{\bot}\,\mathsf{E}_\neg}{\varphi_2}\,\mathsf{RAA}_{(c)}}{\varphi_1 \to \varphi_2}\,\mathsf{I}_{\to(b)}}{\bot}\,\mathsf{E}_\neg}{\varphi'}\,\mathsf{RAA}_{(a)}$$

em que $\mathcal{D}'_i$ é dada por hipótese de indução.

15. *Regra do Corte.*

As derivações, em NC, equivalentes à derivação obtida em Cálculo de Sequentes, a partir das derivações $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ dos sequentes $\Gamma \vdash \Theta, \varphi'$ e $\varphi', \Delta \vdash \Lambda$, respetivamente, por aplicação da regra Regra do Corte, são as seguintes:

- Se $\Theta = \emptyset$ e $\Lambda = \emptyset$, basta tomar a derivação:

$$\begin{array}{c} G(\Delta), \begin{array}{c} G(\Gamma)\\ \mathcal{D}'_1\\ \varphi' \end{array}\\ \mathcal{D}'_2\\ \bot \end{array}$$

em que $\mathcal{D}'_1$ e $\mathcal{D}'_2$ são dadas por hipótese de indução.

- Se $\Theta \neq \emptyset$ e $\Lambda = \emptyset$, basta tomar a derivação:

$$\begin{array}{c} \neg G(\Sigma'), G(\Gamma), \dfrac{\begin{array}{c} G(\Delta), \overset{a}{[\varphi']}\\ \mathcal{D}'_2\\ \bot \end{array}}{\neg\varphi'}\,\mathsf{I}_{\neg(a)}\\ \mathcal{D}'_1\\ \varphi'' \end{array}$$

em que $\mathcal{D}'_1$ e $\mathcal{D}'_2$ são dadas por hipótese de indução.

- Se $\Theta = \emptyset$ e $\Lambda \neq \emptyset$, basta tomar a derivação:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} G(\Gamma)\\ \mathcal{D}'_1\\ \varphi' \end{array}, G(\Delta), \neg G(\Sigma')\\ \mathcal{D}'_2\\ \varphi'' \end{array}$$

em que $\mathcal{D}'_1$ e $\mathcal{D}'_2$ são dadas por hipótese de indução.

- Se $\Theta \neq \emptyset$ e $\Lambda \neq \emptyset$ e $\varphi = \varphi'' \in \Lambda$, basta tomar a derivação:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} G(\Gamma), \neg G(\Theta) \\ \mathcal{D}'_1 \\ \varphi' \end{array} , G(\Delta), \neg G(\Sigma') \\ \mathcal{D}'_2 \\ \varphi'' \end{array}$$

em que $\mathcal{D}'_1$ e $\mathcal{D}'_2$ são dadas por hipótese de indução.

- Se $\Theta \neq \emptyset$ e $\Lambda \neq \emptyset$ e $\varphi = \varphi'' \in \Theta$, basta tomar a derivação:

$$\begin{array}{c} \neg G(\Sigma'), G(\Gamma), \dfrac{\dfrac{\neg\varphi''' \qquad \begin{array}{c} \overset{a}{[\varphi']}, G(\Delta), \neg G(\Lambda)\backslash\{\neg\varphi'''\} \\ \mathcal{D}'_2 \\ \varphi''' \end{array}}{\bot}\,\mathsf{E}_{\neg}}{\neg\varphi'}\,\mathsf{I}_{\neg}(a) \\ \mathcal{D}'_1 \\ \varphi'' \end{array}$$

em que $\mathcal{D}'_1$ e $\mathcal{D}'_2$ são dadas por hipótese de indução.

$\square$

Fica então provada a equivalência de demonstrabilidade entre o Cálculo de Sequentes e a Dedução Natural (NC) na Lógica Proposicional Clássica. São várias as ilações que podemos extrair desta demonstração e que estão detalhadas em cada passo da mesma. De uma forma mais geral, conseguimos perceber que:

- As regras de introdução em NC têm correspondência direta com as regras de introdução à direita em Cálculo de Sequentes.
- As regras de eliminação em NC são uma conjugação entre uma regra de introdução à esquerda, seguida da aplicação de uma regra do corte, em Cálculo de Sequentes.
- Pelo *Hauptsatz* [5], concluímos então que a correspondência entre uma derivação em NC e uma derivação em Cálculo de Sequentes não é única, porque qualquer derivação que possui uma prova no Cálculo de Sequentes que utiliza a Regra do Corte, também possui uma prova que não a utiliza.

- Nas regras de introdução à direita em Cálculo de Sequentes, quando tomamos φ igual à fórmula que foi introduzida, também há correspondência direta com as regras de introdução em NC.
- As regras de introdução à esquerda em Cálculo de Sequentes correspondem, em geral, a regras de eliminação em NC, escritas "ao contrário".
- O facto de existirem conclusões múltiplas em Cálculo de Sequentes é colmatado em NC pela introdução de hipóteses correspondentes à negação das conclusões "a mais". Por outro lado, as derivações que possuem sequentes com conclusão vazia em Cálculo de Sequentes são mapeadas para derivações de absurdo em NC.
- Numa perspetiva mais particular, a Lei do Corte em Cálculo de Sequentes corresponde a uma substituição implícita de hipóteses não canceladas pelas suas derivações. Podemos, então, entender a Lei do Corte em Cálculo de Sequentes como uma composição de derivações em NC.

Capítulo 3

Lógica Quântica Minimal

A Lógica Quântica Minimal (LQM), também designada por Ortológica, é um exemplo de abstração lógica utilizada para compreender os fenómenos da Mecânica Quântica, que não se coadunam com as leis da Física Clássica, descritas pela Lógica Clássica. Neste capítulo, aprofundamos algumas ideias sobre esta lógica, seguindo de perto as ideias do artigo [2].

3.1 Sintaxe e Semântica

Analogamente ao que acontece com a Lógica Clássica Proposicional, utilizamos $\mathcal{V}_p$ e $\mathcal{A}_p = \mathcal{V}_p \cup \{\wedge, \vee, \neg\} \cup \{(,)\}$ para denotar, respetivamente, o conjunto numerável das variáveis da Lógica Quântica Minimal e o seu alfabeto. O conjunto de todas as palavras em $\mathcal{A}_p$ é representado por $\mathcal{A}_p^*$.

Definição 10 (**Conjunto de Fórmulas**). *O conjunto $\mathcal{F}_p$ de fórmulas é o subconjunto de $\mathcal{A}_p^*$, definido indutivamente por:*

1. *para todo $p \in \mathcal{V}_p$, $p \in \mathcal{F}_p$;*
2. *para todo $\varphi \in \mathcal{F}_p$, $(\neg\varphi) \in \mathcal{F}_p$;*
3. *para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_p$, $(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}_p$.*

O conectivo de disjunção, $\vee$, é definido através da Lei de De Morgan

$$\varphi \vee \psi := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi).$$

Por convenção, podem ser omitidos os parêntesis mais externos de cada fórmula. Convencionamos também que as letras gregas minúsculas φ, ψ, σ, etc. servirão para representar fórmulas de $\mathcal{F}_p$ e as letras gregas maiúsculas Δ, Γ, etc. denotarão conjuntos finitos ou infinitos de fórmulas em $\mathcal{F}_p$ (ao contrário do que acontece na Lógica Clássica, em que os conjunto de fórmulas com que trabalhamos são somente os finitos).

Podemos ainda definir o conjunto de fórmulas que inclui o conectivo de disjunção, $\vee$, que será útil para definir alguns dos sistemas dedutivos:

Definição 11 (**Conjunto de Fórmulas com Disjunção**). *O conjunto $\mathcal{F}_p^{\vee}$ de fórmulas é o subconjunto de $\mathcal{A}_p^*$, definido indutivamente por:*

1. *para todo $\varphi \in \mathcal{F}_p$, $\varphi \in \mathcal{F}_p^{\vee}$;*
2. *para todo $\varphi \in \mathcal{F}_p^{\vee}$, $(\neg\varphi) \in \mathcal{F}_p^{\vee}$;*
3. *para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_p^{\vee}$, $(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}_p^{\vee}$;*
4. *para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_p^{\vee}$, $(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{F}_p^{\vee}$.*

De um ponto de vista semântico, são várias as semânticas utilizadas para caracterizar a Lógica Quântica Minimal, como a semântica de Kripke e a semântica algébrica, sendo esta última a sua caracterização mais natural. Por esse motivo, será esta a semântica que abordaremos neste trabalho. Com efeito, começamos então por definir o conceito de ortorreticulado:

Definição 12 (**Ortorreticulado**). *Uma estrutura $\mathcal{B} = (B, \sqsubseteq, ', 1, 0)$ é um ortorreticulado se:*

- *$(B, \sqsubseteq)$ é um reticulado limitado, com elemento máximo 1 e elemento mínimo 0.*
- *A operação unária $'$, que designamos por ortocomplemento, satisfaz as condições:*
  - *$a'' = a$;*
  - *$a \sqsubseteq b$ se e só se $b' \sqsubseteq a'$;*
  - *$a \sqcap a' = 0$.*

Alguns exemplos de ortorreticulados são:

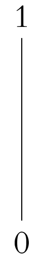

Figura 1: **2**.

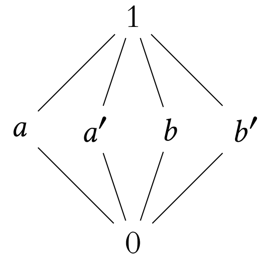

Figura 2: M_4.

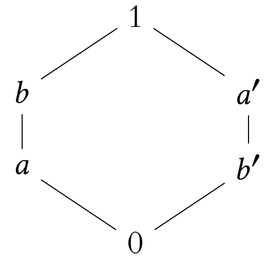

Figura 3: Hexágono.

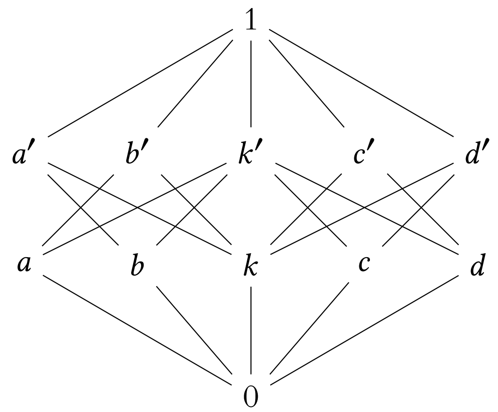

Figura 4: $\mathcal{G}_{12}$.

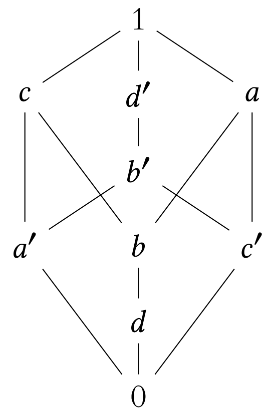

Figura 5: Outro exemplo de ortorreticulado.

Proposição 3. *Sejam $\mathcal{B} = (B, \sqsubseteq, ', 1, 0)$ um ortorreticulado e $a, b \in \mathcal{B}$. Temos que:*

1. $1' = 0$;

2. $0' = 1$;

3. $(a \sqcup b)' = a' \sqcap b'$;

4. $(a \sqcap b)' = a' \sqcup b'$;

5. $a \sqcup a' = 1$.

Demonstração. Sejam $\mathcal{B} = (B, \sqsubseteq, ', 1, 0)$ um ortorreticulado e $a, b \in \mathcal{B}$.

1. Temos que $1' \sqsupseteq 0$, já que 0 é o elemento mínimo de B. Por outro lado, $1' \sqsubseteq 0$ se e só se $0' \sqsubseteq 1''$. Como $1'' = 1$ e 1 é o elemento máximo de B, temos que $0' \sqsubseteq 1$ e, portanto, $1' \sqsubseteq 0$. Logo, $1' = 0$.

2. Temos que $0' \sqsubseteq 1$, já que 1 é o elemento máximo de B. Por outro lado, $0' \sqsupseteq 1$ se e só se $1' \sqsupseteq 0''$. Como $0'' = 0$ e 0 é o elemento mínimo de B, temos que $1' \sqsupseteq 0$ e, portanto, $0' \sqsupseteq 1$. Logo, $0' = 1$.

3. Pelas propriedades do ínfimo e do supremo, temos que $a \sqsubseteq a \sqcup b$, donde $(a \sqcup b)' \sqsubseteq a'$ e $b \sqsubseteq a \sqcup b$, donde $(a \sqcup b)' \sqsubseteq b'$. Daqui, segue que $(a \sqcup b)' \sqsubseteq a' \sqcap b'$. Por outro lado, e novamente pelas propriedades do ínfimo e do supremo, temos que $a' \sqcap b' \sqsubseteq a'$, donde $a \sqsubseteq (a' \sqcap b')'$ e $a' \sqcap b' \sqsubseteq b'$, donde $b \sqsubseteq (a' \sqcap b')'$. Daqui, segue que $a \sqcup b \sqsubseteq (a' \sqcap b')'$, donde $(a' \sqcap b')'' \sqsubseteq (a \sqcup b)'$, ou seja, $a' \sqcap b' \sqsubseteq (a \sqcup b)'$. Logo, $(a \sqcup b)' = a' \sqcap b'$.

4. Pelas propriedades do ínfimo e do supremo, temos que $a \sqcap b \sqsubseteq a$, donde $a' \sqsubseteq (a \sqcap b)'$ e $a \sqcap b \sqsubseteq b$, donde $b' \sqsubseteq (a \sqcap b)'$. Daqui, segue que $a' \sqcup b' \sqsubseteq (a \sqcap b)'$. Por outro lado, e novamente pelas propriedades do ínfimo e do supremo, temos que $a' \sqsubseteq a' \sqcup b'$, donde $(a' \sqcup b')' \sqsubseteq a'' = a$ e $b' \sqsubseteq a' \sqcup b'$, donde $(a' \sqcup b')' \sqsubseteq b'' = b$. Daqui, segue que $(a' \sqcup b')' \sqsubseteq a \sqcap b$, donde $(a \sqcap b)' \sqsubseteq (a' \sqcup b')''$, ou seja, $(a \sqcap b)' \sqsubseteq a' \sqcup b'$. Logo, $(a \sqcap b)' = a' \sqcup b'$.

5. Temos que $a \sqcup a' \sqsubseteq 1$, já que 1 é o elemento máximo de B. Por outro lado, $1 \sqsubseteq a \sqcup a'$ se e só se $(a \sqcup a')' \sqsubseteq 1'$. Ora, temos que $(a \sqcup a')' = a' \sqcap a'' = a' \sqcap a = 0$ e que $1' = 0$, donde $1 \sqsubseteq a \sqcup a'$ se e só se $0 \sqsubseteq 0$, o que é verdadeiro. Logo, $a \sqcup a' = 1$.

□

Note-se que, regra geral, os ortorreticulados não satisfazem as leis distributivas de $\sqcap$ e $\sqcup$. Por exemplo, tomando o ortorreticulado da Figura 4, temos que:

$$a \sqcap (b \sqcup c) = a \sqcap k' = a, \text{ mas } (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) = 0 \sqcup 0 = 0$$

e

$$a \sqcup (b \sqcap c) = a \sqcup 0 = a, \text{ mas } (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c) = k' \sqcap k' = k'.$$

Note-se ainda que todas as Álgebras de Boole são ortorreticulados, mas o inverso não acontece - veja-se, por exemplo, os casos da Figura 2 ou da Figura 3.

Definição 13 (Valoração). *Sejam $\mathcal{B} = (B, \sqsubseteq, ', 1, 0)$ um ortorreticulado e $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_P$. Uma função $v : \mathcal{F}_P \to \mathcal{B}$ é uma valoração em $\mathcal{B}$ se:*

- $v(\neg\varphi) = v(\varphi)'$;
- $v(\varphi \wedge \psi) = v(\varphi) \sqcap v(\psi)$.

Definição 14 (Realização Algébrica da LQM). *O par $\mathcal{A} = (B, v)$ diz-se uma realização algébrica da LQM se B é um ortorreticulado e v é uma valoração em B.*

Dada uma realização algébrica $\mathcal{A} = (B, v)$ e um conjunto finito de fórmulas $\Gamma = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$, utilizamos a notação $v(\Gamma) = v(\varphi_1) \sqcap ... \sqcap v(\varphi_n)$.

Definição 15 (Verdade e Verdade Lógica). *Sejam $\mathcal{A} = (B, v)$ uma realização algébrica da LQM e $\varphi \in \mathcal{F}_P$.*

- *Diz-se que φ é verdadeira na realização $\mathcal{A}$, e escreve-se $\models_{\mathcal{A}} \varphi$, se e só se $v(\varphi) = 1$;*
- *Diz-se que φ é uma verdade lógica da LQM, e escreve-se $\models_{LQM} \varphi$ (ou $\models \varphi$, se não houver ambiguidade), se e só se $\models_{\mathcal{A}} \varphi$ para qualquer realização algébrica $\mathcal{A}$.*

Diz-se também que $\mathcal{A}$ é um modelo de φ quando $\models_{\mathcal{A}} \varphi$. Por outro lado, $\mathcal{A}$ é um modelo de um conjunto de fórmulas Γ ($\models_{\mathcal{A}} \Gamma$) se e só se $\models_{\mathcal{A}} \psi$, para todo $\psi \in \Gamma$.

Definição 16 (Consequência numa Realização e Consequência Lógica). *Sejam $\mathcal{A} = (B, v)$ uma realização algébrica da LQM e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_P$.*

- *Diz-se que φ é uma consequência na realização $\mathcal{A}$ de Γ, e escreve-se $\Gamma \models_{\mathcal{A}} \varphi$, se e só se para qualquer elemento a de B:*

  se, para qualquer $\psi \in \Gamma, a \sqsubseteq v(\psi)$, então $a \sqsubseteq v(\varphi)$;

- *Diz-se que φ é uma consequência lógica de Γ, e escreve-se $\Gamma \models_{LQM} \varphi$ (ou $\Gamma \models \varphi$, se não houver ambiguidade), se e só se $\Gamma \models_{\mathcal{A}} \varphi$ para qualquer realização algébrica $\mathcal{A}$.*

Se $\Gamma = \{\psi\}$, em vez de $\{\psi\} \models \varphi$, escrevemos $\psi \models \varphi$, omitindo as chavetas.

Note-se que a Definição 15 não é mais do que um caso particular da Definição 16, já que $\models \varphi$ se e só se $\emptyset \models \varphi$.

Proposição 4. *Sejam $\psi \in \mathcal{F}_P$ e Γ um conjunto finito de fórmulas de $\mathcal{F}_P$. Temos que:*

$\Gamma \models \psi$ se e só se $v(\Gamma) \sqsubseteq v(\psi)$, para qualquer realização algébrica $\mathcal{A}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{A} = (B, v)$ uma realização algébrica. Suponhamos primeiramente que $\Gamma \models \psi$. Pela definição 16, temos que para qualquer $a \in B$, se para qualquer $\varphi_i \in \Gamma$, $a \sqsubseteq v(\varphi_i)$, então $a \sqsubseteq v(\psi)$. Em particular, para $a = v(\varphi_1) \sqcap ... \sqcap v(\varphi_n) = v(\Gamma)$, temos que $v(\varphi_1) \sqcap ... \sqcap v(\varphi_n) \sqsubseteq v(\varphi_i)$, para todo i, donde $v(\Gamma) \sqsubseteq v(\psi)$. Suponhamos agora que $v(\Gamma) \sqsubseteq v(\psi)$. Seja $a \in B$. Suponhamos que $a \sqsubseteq v(\varphi_i)$, para todo $\varphi_i \in \Gamma$. Então, $a \sqsubseteq v(\varphi_1) \sqcap ... \sqcap v(\varphi_n) = v(\Gamma)$. Como, $v(\Gamma) \sqsubseteq v(\psi)$, temos que $a \sqsubseteq v(\psi)$, donde $\Gamma \models \psi$. □

3.2 Problema da Implicação

Ao contrário de outras lógicas, todos os conectivos de implicação propostos para a Lógica Quântica Minimal são, de certa forma, anómalos, não respeitando certas propriedades usualmente satisfeitas por conectivos de implicação. Comecemos então por ver que condições são impostas para que um conectivo seja considerado um conectivo de implicação.

Seguindo o artigo [2], uma aproximação inicial ao conceito de conectivo de implicação é a de que um conectivo binário $\longrightarrow$ se diz um conectivo de implicação se e só se satisfaz as seguintes condições:

1. Identidade: $\varphi \longrightarrow \varphi$ é verdadeiro em qualquer realização algébrica $\mathcal{A}$;

2. *Modus Ponens*: em qualquer realização algébrica $\mathcal{A}$, se φ é verdadeiro e $\varphi \longrightarrow \psi$ é verdadeiro, então ψ é verdadeiro.

No caso particular da Lógica Quântica Minimal, uma condição suficiente para um conectivo $\longrightarrow$ ser um conectivo de implicação é:

$$\text{para qualquer realização algébrica } \mathcal{A} = (B, v),\ \models_{\mathcal{A}} \varphi \rightarrow \psi \text{ se e só se } v(\varphi) \sqsubseteq v(\psi).$$

Daqui, em conjunto com a Proposição 4, segue que:

$$\models \varphi \longrightarrow \psi \text{ se e só se } \varphi \models \psi.$$

É razoável admitir a condição suficiente como condição minimal para um conectivo ser conectivo de implicação.

No entanto, ao contrário do que acontece na Lógica Clássica, um conectivo definido por

$$\varphi \longrightarrow \psi := \neg\varphi \vee \psi$$

não origina um conectivo de implicação, pois não satisfaz a condição minimal, já que existem realizações algébricas $\mathcal{A} = (B, v)$ tais que $v(\neg\varphi \vee \psi) = 1$, mas $v(\varphi) \not\sqsubseteq v(\psi)$. Tomemos v($\varphi$)=b e v($\psi$)=c no ortorreticulado da Figura 4. É trivial que $v(\varphi) \not\sqsubseteq v(\psi)$ e temos que:

$$
\begin{aligned}
v(\neg\varphi \vee \psi) &= v(\neg(\neg(\neg\varphi) \wedge \neg\psi)) && \text{[Def. de } \vee\text{]} \\
&= (v(\neg\neg\varphi) \wedge \neg\psi))' && \text{[Def. 14]} \\
&= (v(\varphi)'' \sqcap v(\psi)')' && \text{[Def. 14]} \\
&= (v(\varphi) \sqcap v(\psi)')' && \text{[Def. 12]} \\
&= (b \sqcap c')' && [v(\varphi) = b, v(\psi) = c] \\
&= 0' && \text{[Fig. 4]} \\
&= 1. && \text{[Prop. 3]}
\end{aligned}
$$

3.3 Axiomatização

Estamos agora em condições de definir uma axiomatização para a Lógica Quântica Minimal, independente de qualquer ideia de implicação lógica quântica. Para isso, começamos por introduzir alguns conceitos, que nos conduzirão à definição de dois sistemas dedutivos para esta lógica: Dedução Natural (NQM) e Cálculo de Sequentes (GQM).

Definição 17 (**Sequente**). *Um sequente é uma expressão da forma*

$$\Gamma \vdash \Theta$$

onde Θ *e* Γ *representam conjuntos finitos (possivelmente vazio) de fórmulas.*

À expressão à esquerda do símbolo $\vdash$ *chamamos antecedente e à expressão à direita do mesmo chamamos consequente do sequente.*

Escrevemos Γ, Δ *para denotar* $\Gamma \cup \Delta$ *e, de forma análoga,* Γ, φ *para representar a expressão* $\Gamma \cup \{\varphi\}$*.*

Dados $\Gamma = \psi_1, ..., \psi_m$*,* $\Theta = \varphi_1, ..., \varphi_n$ e $\mathcal{A} = (B, v)$ *uma realização algébrica, a interpretação do sequente* $\Gamma \vdash \Theta$ *é, intuitivamente, a seguinte:*

para qualquer elemento a *em* B*: se para qualquer* $\psi_i \in \Gamma$*,* $a \sqsubseteq v(\psi_i)$ *então* $a \sqsubseteq v(\varphi_1) \sqcup \cdots \sqcup v(\varphi_n)$*.*

Como $v(\varphi_1) \sqcup \cdots \sqcup v(\varphi_n) = v(\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$*, o sequente anterior também pode ser interpretado como:*

$$\Gamma \models \varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n.$$

Se o antecedente for vazio, o sequente reduz-se a

$$\vdash \Theta.$$

Por outro lado, se o consequente for vazio, o sequente tem o mesmo significado da expressão

$$\text{para qualquer elemento } a \text{ em } B\text{: se } a \sqsubseteq v(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_m)\text{, então } a \sqsubseteq 0.$$

ou seja, $v(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_m) = 0$.

Definição 18 (**Regra de Inferência**). *Uma regra de inferência tem a forma*

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Theta_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \Theta_n}{\Gamma \vdash \Theta}.$$

Aos sequentes $\Gamma_1 \vdash \Theta_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \Theta_n$ *chamamos premissas da regra e ao sequente* $\Gamma \vdash \Theta$ *chamamos conclusão.*

Se o conjunto das premissas for vazio, estamos perante uma regra imprópria e escrevemos $\overline{\Gamma \vdash \Theta}$.

Utilizamos um traço de inferência duplo quando queremos representar a aplicação sequencial da mesma regra duas ou mais vezes.

Definição 19 (**Derivação**). *Uma derivação é uma árvore de sequentes em que a raiz representa a conclusão.*

Definição 20 (**Derivabilidade**). *Sejam* $\Gamma, \Theta \subseteq \mathcal{F}_p$. Θ *diz-se derivável a partir de* Γ *e escreve-se* $\Gamma \vdash_{LQM} \Theta$ *(ou* $\Gamma \vdash \Theta$*, se não houver ambiguidade) se existe uma derivação tal que o sequente* $\Gamma \vdash \Theta$ *é o último elemento - a raiz - da derivação.*

Estamos então em condições de partir para a definição dos sistemas dedutivos de Dedução Natural com Sequentes (NQM) e Cálculo de Sequentes (GQM).

3.3.1 Dedução Natural com Sequentes (NQM)

A Dedução Natural com Sequentes (NQM), adaptada do artigo [2] para conjuntos finitos é um sistema dedutivo independente de qualquer tipo de ideia de implicação quântica, que consiste num conjunto de regras de introdução e eliminação, num estilo de dedução natural. Os seus sequentes são da forma $\Gamma \vdash \varphi$, em que Γ é subconjunto de $\mathcal{F}_p$ e φ é uma fórmula de $\mathcal{F}_p$. O conjunto de derivações deste sistema dedutivo é definido, indutivamente, pelo seguinte conjunto de regras de inferência:

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ \text{id} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Delta, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \Delta \vdash \psi}\ \text{Corte}$$

$$\frac{}{\Gamma, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \varphi_i}\ \mathsf{E}_i\wedge\text{, onde } i \in \{1, 2\} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ \mathsf{RI}\wedge$$

$$\frac{\Gamma, \varphi_1, \varphi_2 \vdash \sigma}{\Gamma, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \sigma}\ \mathsf{LI}\wedge \qquad \frac{\varphi \vdash \psi \quad \varphi \vdash \neg\psi}{\vdash \neg\varphi}\ \mathsf{Absurdo}$$

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \neg\neg\varphi}\ \mathsf{IFraca}\neg \qquad \frac{}{\Gamma, \neg\neg\varphi \vdash \varphi}\ \mathsf{IForte}\neg$$

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \wedge \neg\varphi \vdash \psi}\ \mathsf{DS} \qquad \frac{\varphi \vdash \psi}{\neg\psi \vdash \neg\varphi}\ \mathsf{CP}$$

Este sistema possui restrições aos contextos nas regras do Absurdo, em que o antecedente da conclusão é obrigatoriamente um conjunto vazio, e da Contraposição - CP, onde tanto o antecedente como o consequente da conclusão são fórmulas negadas.

Na secção 4.1, propomos uma nova variante de NQM, cujo formato de regras se aproxima daquele que usualmente encontramos nas regras de Dedução Natural para outras lógicas.

3.3.2 Cálculo de Sequentes (GQM)

Uma das primeiras formulações ao estilo de Gentzen para a Lógica Quântica Minimal foi proposta por Cutland e Gibbins [3], mas apenas admitia a eliminação de certas formas de corte. Algumas formulações foram entretanto propostas, até se chegar finalmente ao Cálculo de Sequentes (GQM) de Nishimura [10], que apresentamos abaixo. Este cálculo utiliza sequentes da forma $\Gamma \vdash \Theta$, em que Γ e Θ são subconjuntos de $\mathcal{F}_p^{\vee}$ e é definido, indutivamente, pelo axioma:

$$\frac{}{\varphi \vdash \varphi}\ \mathsf{id}$$

e pelas regras de inferência:

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta}{\Delta, \Gamma \vdash \Theta, \Lambda}\ \mathsf{W}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta}{\neg\Theta, \Gamma \vdash}\ \mathsf{L}\neg \qquad \frac{\Gamma \vdash \Theta}{\vdash \Theta, \neg\Gamma}\ \mathsf{R}\neg$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \vdash \Theta}{\neg\neg\varphi, \Gamma \vdash \Theta}\ \mathsf{L}\neg\neg \qquad \frac{\Gamma \vdash \Theta, \varphi}{\Gamma \vdash \Theta, \neg\neg\varphi}\ \mathsf{R}\neg\neg$$

$$\frac{\varphi_i, \Gamma \vdash \Theta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \vdash \Theta}\ \mathsf{L}_i\wedge, \text{onde } i \in \{1,2\} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ \mathsf{R}\wedge$$

$$\frac{\varphi_1 \vdash \Theta \quad \varphi_2 \vdash \Theta}{\varphi_1 \vee \varphi_2 \vdash \Theta}\ \mathsf{L}\vee \qquad \frac{\Gamma \vdash \Theta, \varphi_i}{\Gamma \vdash \Theta, \varphi_1 \vee \varphi_2}\ \mathsf{R}_i\vee, \text{onde } i \in \{1,2\}$$

$$\frac{\neg\varphi_i, \Gamma \vdash \Theta}{\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2), \Gamma \vdash \Theta}\ \mathsf{L}_i\neg\vee, \text{onde } i \in \{1,2\} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\varphi_1 \quad \Gamma \vdash \neg\varphi_2}{\Gamma \vdash \neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)}\ \mathsf{R}\neg\vee$$

$$\frac{\neg\varphi_1 \vdash \Theta \quad \neg\varphi_2 \vdash \Theta}{\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vdash \Theta}\ \mathsf{L}\neg\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash \Theta, \neg\varphi_i}{\Gamma \vdash \Theta, \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)}\ \mathsf{R}_i\neg\wedge, \text{onde } i \in \{1,2\}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\varphi_1 \quad \Gamma \vdash \neg\varphi_2}{\varphi_1 \vee \varphi_2, \Gamma \vdash}\ \mathsf{L} \vee (\neg) \qquad \frac{\neg\varphi_1 \vdash \Theta \quad \neg\varphi_2 \vdash \Theta}{\vdash \Theta, \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ \mathsf{R} \wedge (\neg)$$

Este sistema dedutivo é constituído por um axioma, uma regra estrutural de Enfraquecimento (W), 7 regras de introdução à direita e 7 regras simétricas às anteriores, de introdução à esquerda. Destas, temos que L$\neg$, R$\neg$, L$\vee$ e R$\wedge$ possuem restrições aos contextos, exigindo, nas primeiras duas regras, respetivamente, o consequente e o antecedente da conclusão vazios e nas restantes duas, respetivamente, o antecedente e o consequente das premissas com apenas uma fórmula. No que concerne às regras estruturais, temos ainda que, à semelhança do que acontece para a Lógica Clássica no sistema GC, as regras da Contração (LC e RC) são admissíveis, já que os sequentes deste sistema são formados por conjuntos. Temos também que são admissíveis formas restritas do Corte. Mais detalhes acerca deste tema são apresentados na secção 4.2.

No que concerne à decisão de se uma fórmula é ou não uma verdade lógica, este cálculo dá-nos ainda um procedimento que torna possível obter uma resposta para este problema [10].

3.3.3 Correção e Completude de NQM

Neste capítulo, estabelecemos algumas definições sintáticas e utilizamo-las posteriormente para demonstrar os Teoremas de Correção e Completude do sistema NQM. Como no capítulo 4 provamos que os sistemas GQM e NQM derivam os mesmos sequentes, segue, desse resultado, que GMQ é também um sistema correto e completo.

Definição 21 (**Teorema Lógico**). *Seja* $\varphi \in \mathcal{F}_p$. φ *é um teorema lógico da LQM* ($\vdash \varphi$) *se e só se* $\emptyset \vdash \varphi$.

Definição 22 (**Consistência**). *Seja* $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_p$.

- Γ *diz-se inconsistente se existe* $\varphi \in \mathcal{F}_p$ *tal que* $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$*;*

- Γ *diz-se consistente, caso contrário.*

Definição 23 (**Fecho Dedutivo**). *Seja* $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_p$*. O fecho dedutivo* $\overline{\Gamma}$ *de* Γ *é o conjunto* $\{\varphi \mid \Gamma \vdash \varphi\}$*.* Γ *diz-se fechado dedutivamente se e só se* $\Gamma = \overline{\Gamma}$*.*

Definição 24 (**Compatibilidade Sintática**). *Sejam* $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}_p$*. Diz-se que* Γ *e* Δ *são sintaticamente compatíveis se e só se, para qualquer* $\varphi \in \mathcal{F}_p$*:*

$$\text{se } \Gamma \vdash \varphi, \text{ então } \Delta \nvdash \neg\varphi.$$

Teorema 2 (**Teorema Fraco de Lindenbaum**). *Sejam* $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}_p$ *e* $\varphi \in \mathcal{F}_p$*. Se* $\Gamma \nvdash \neg\varphi$*, então existe* Δ*, tal que* Δ *é compatível com* Γ *e* $\Delta \vdash \varphi$*.*

Demonstração. Seja $\varphi \in \mathcal{F}_p$. Suponhamos que $\Gamma \nvdash \neg\varphi$ e tomemos $\Delta = \{\varphi\}$. É trivial que $\varphi \vdash \varphi$ (identidade). Falta ver que $\{\varphi\}$ e Γ são sintaticamente compatíveis. Suponhamos, por absurdo, que $\{\varphi\}$ e Γ não são sintaticamente compatíveis. Então, existe $\psi \in \mathcal{F}_p$, tal que $\varphi \vdash \psi$ e $\Gamma \vdash \neg\psi$. Temos então que:

$$\frac{\varphi \vdash \psi}{\neg\psi \vdash \neg\varphi}\ \text{CP}$$

e, por transitividade, $\Gamma \vdash \neg\varphi$, o que contradiz a hipótese inicial. Logo, $\{\varphi\}$ e Γ são sintaticamente compatíveis. □

Teorema 3 (**Teorema da Correção**). *Sejam* $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_p$ *e* $\varphi \in \mathcal{F}_p$*. Se* $\Gamma \vdash \varphi$*, então* $\Gamma \models \varphi$*.*

Demonstração. Queremos provar que, para toda a derivação $\mathcal{D}$ de NQM, $P(\mathcal{D})$, onde:

$$P(\mathcal{D}) := \text{se } \Gamma \vdash \varphi, \text{ então } \Gamma \models \varphi.$$

Para tal, usamos o Princípio de Indução Estrutural associado às derivações do sistema dedutivo NQM.

1. *(Identidade)* $\mathcal{D} = \overline{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$

   Sejam $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_p$ e $\varphi \in \mathcal{F}_p$. Suponhamos que $\mathcal{D}$ é derivação do sequente $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$. Falta ver que φ é consequência lógica de Γ, φ. Seja $\mathcal{A} = (B, v)$ uma realização algébrica. Ora, pelas propriedades dos ortorreticulados, é imediato que $v(\Gamma) \sqcap v(\varphi) \sqsubseteq v(\varphi)$. Logo $\Gamma, \varphi \models \varphi$.

2. *(Corte)* $\mathcal{D} = \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Delta, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \Delta \vdash \psi}$

   Seja $\mathcal{D}_1$ uma derivação do sequente $\Gamma \vdash \varphi$ e suponhamos P($\mathcal{D}_1$). Seja $\mathcal{D}_2$ uma derivação do sequente $\Gamma \vdash \psi$ e suponhamos P($\mathcal{D}_2$). Queremos demonstrar P($\mathcal{D}$). Por P($\mathcal{D}_1$) e P($\mathcal{D}_2$) temos, respetivamente, que $v(\Gamma) \sqsubseteq v(\varphi)$ e que $v(\Delta) \sqcap v(\varphi) \sqsubseteq v(\psi)$.

   Seja $\mathcal{A} = (B, v)$ uma realização algébrica. Ora, por P($\mathcal{D}_1$), $v(\Gamma) \sqcap v(\Delta) \sqsubseteq v(\varphi) \sqcap v(\Delta)$ e, por P($\mathcal{D}_2$), $v(\varphi) \sqcap v(\Delta) \sqsubseteq v(\psi)$. Logo, $v(\Gamma) \sqcap v(\Delta) \sqsubseteq v(\psi)$ e $\Gamma, \Delta \models \psi$.

3. *(Absurdo)* $\mathcal{D} = \dfrac{\varphi \vdash \psi \quad \varphi \vdash \neg\psi}{\vdash \neg\varphi}$

   Seja $\mathcal{D}_1$ uma derivação do sequente $\varphi \vdash \psi$ e suponhamos P($\mathcal{D}_1$). Seja $\mathcal{D}_2$ uma derivação do sequente $\varphi \vdash \neg\psi$ e suponhamos P($\mathcal{D}_2$). Queremos demonstrar P($\mathcal{D}$). Por P($\mathcal{D}_1$) e P($\mathcal{D}_2$) temos, respetivamente, que $v(\varphi) \sqsubseteq v(\psi)$ e que $v(\varphi) \sqsubseteq v(\neg\psi)$, ou seja, $v(\varphi) \sqsubseteq v(\psi) \sqcap v(\psi)' = 0$.

   Seja $\mathcal{A} = (B, v)$ uma realização algébrica. Ora, por $P(\mathcal{D}_1)$ e $P(\mathcal{D}_2)$, $v(\varphi) = 0$. Logo, $v(\neg\varphi) = v(\varphi)' = 0' = 1$. Logo, $\models \neg\varphi$.

Os restantes casos são demonstrados de forma análoga aos casos apresentados. □

Teorema 4 (Teorema da Completude). *Sejam* $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_p$ *e* $\varphi \in \mathcal{F}_p$. *Se* $\Gamma \models \varphi$, *então* $\Gamma \vdash \varphi$.

Demonstração. É suficiente construir um modelo algébrico $\mathcal{A} = (B, v)$, tal que:

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ sse } \Gamma \models_{\mathcal{A}} \varphi.$$

Como consequência, é imediato que:

$$\text{Se } \Gamma \nvdash \varphi, \text{ então } \Gamma \not\models_{\mathcal{A}} \varphi$$

e, pela Definição 16, segue que:

$$\text{Se } \Gamma \not\models_{\mathcal{A}} \varphi, \text{ então } \Gamma \not\models \varphi.$$

Seja I o conjunto de todos os conjuntos de fórmulas consistentes e dedutivamente fechados. O modelo algébrico $\mathcal{A} = (B, v)$ é então definido como:

- $B = (\mathrm{B}, \sqsubseteq, {}', 1, 0)$ é um ortorreticulado, em que:

  $\mathrm{B} = \{a \subseteq I \mid a = a''\}$;

  $1 = I$;

$0 = \emptyset$;

qq $a, b \in \mathrm{B}$, $a \sqsubseteq b$ se e só se $a \subseteq b$;

$a' = \{i \in I \mid$ qq $j \in a$, i não é sintaticamente compatível com $j\}$.

- v é a função de valoração definida por $v(p) = \{i \in I \mid p \in i\}$.

É trivial que $\sqsubseteq$ é um relação de ordem parcial (é uma inclusão de conjuntos). Temos que $a \sqcap b = a \cap b$ e $a \sqcup b = (a \cup b)''$ e os elementos máximo e mínimo são os apresentados acima. Temos ainda que, para todo p, $v(p) \in B$, isto é, $v(p) = v(p)''$, que segue facilmente do facto de os elementos de I serem dedutivamente fechados. Resta ver que a operação unária de ortocomplemento satisfaz as condições da Definição 12.

Comecemos por ver que a operação unária satisfaz as condições exigidas. Sejam $a, b \in \mathrm{B}$. Ora,

1. $a = a''$:

   O resultado segue diretamente da definição de B.

2. Se $a \sqsubseteq b$, então $b' \sqsubseteq a'$:

   Suponhamos que $a \sqsubseteq b$, isto é, que $a \subseteq b$. Queremos demonstrar que $b' \subseteq a'$. Seja $i \in b'$. Falta ver que, para todo $j \in a$, i não é sintaticamente compatível com j. Ora, dado $j \in a$, $j \in b$, já que $a \subseteq b$, e i não é sintaticamente compatível com j, pois $i \in b'$. Logo, $b' \subseteq a'$, ou seja, $b' \sqsubseteq a'$.

3. $a \sqcap a' = 0$:

   Queremos demonstrar que $a \sqcap a' = 0$, isto é, que $a \cap a' = \emptyset$. A demonstração é por redução ao absurdo. Suponhamos que existe $k \in a \cap a'$. Pela definição de a' e porque $k \in a$, temos que para todo $i \in a'$, i não é sintaticamente compatível com k. Como $k \in a'$, temos, em particular, que k não é sintaticamente compatível com k. Então, existe φ tal que $k \vdash \varphi$ e $k \vdash \neg\varphi$. Logo, $k \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, donde $k \notin I$, o que é um absurdo. Logo, não existe $k \in a \cap a'$ e, portanto, $a \cap a' = \emptyset$.

Lema 1 (**Lema do modelo canónico**).

$$\textit{qq } \varphi \in \mathcal{F}_p\textit{: qq } i \in I, i \in v(\varphi) \textit{ se e só se } \varphi \in i.$$

Demonstração. Queremos provar que, para qualquer fórmula $\varphi \in \mathcal{F}_p$, $i \in v(\varphi)$ se e só se $\varphi \in i$. Para tal, usamos o Princípio de Indução Estrutural associado a $\mathcal{F}_p$.

1. $\varphi = p, p \in \mathcal{V}_p$

   Segue diretamente da definição de $v(p)$.

2. $\varphi = \neg\psi$

   Suponhamos que $i \in v(\psi)$ se e só se $\psi \in i$. Queremos demonstrar que $i \in v(\neg\psi)$ se e só se $\neg\psi \in i$.

   Suponhamos primeiramente que $i \in v(\neg\psi)$. Então, $i \in v(\psi)'$, isto é, para qualquer $k \in v(\psi)$, i não é sintaticamente compatível com k, o que, por hipótese de indução, é equivalente a: qualquer ψ, se $\psi \in k$, então i não é sintaticamente compatível com k. Como k é dedutivamente fechado, temos que: qualquer ψ, se $k \vdash \psi$, então i não é sintaticamente compatível com k. Daqui, segue imediatamente pelo contra-recíproco do Teorema 2 que $i \vdash \neg\psi$. Como i é dedutivamente fechado, temos que $\neg\psi \in i$.

   Suponhamos agora que $\neg\psi \in i$. Seja $j \in v(\psi)$. Por hipótese de indução, temos que $\psi \in j$ e, portanto, i e j são sintaticamente incompatíveis, já que i e j são conjuntos de fórmulas dedutivamente fechados e $i \vdash \neg\psi$ e $j \vdash \psi$. Segue, pela definição de ortocomplemento, que $i \in v(\psi)'$. Logo, pela definição de valoração, $i \in v(\neg\psi)$.

3. $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$

   Suponhamos que $i \in v(\varphi_1)$ se e só se $\varphi_1 \in i$ e que $i \in v(\varphi_2)$ se e só se $\varphi_2 \in i$. Queremos demonstrar que $i \in v(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ se e só se $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in i$.

   Suponhamos primeiramente que $i \in v(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$. Então $i \in v(\varphi_1) \cap v(\varphi_2)$ e, portanto, $i \in v(\varphi_1)$ e $i \in v(\varphi_2)$. Por hipótese de indução, temos que $\varphi_1 \in i$ e $\varphi_2 \in i$. Como i é um conjunto de fórmulas dedutivamente fechado, segue, por aplicação da regra $I\wedge$, que $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in i$.

   Suponhamos agora que $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in i$. Como i é um conjunto de fórmulas dedutivamente fechado, segue, por aplicação das regras $E_1\wedge$ e $E_2\wedge$, que $\varphi_1 \in i$ e $\varphi_2 \in i$. Por hipótese de indução, temos que $i \in v(\varphi_1)$ e $i \in v(\varphi_2)$, donde $i \in v(\varphi_1) \cap v(\varphi_2)$. Segue, pela definição de valoração, que $i \in v(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.

□

Estamos finalmente em condições de mostrar que $\Gamma \vdash \varphi$ se e só se $\Gamma \models_{\mathcal{A}} \varphi$. Como a implicação da esquerda para a direita é uma consequência do Teorema 3, é suficiente mostrar que se $\Gamma \nvdash \varphi$, então

$\Gamma \not\models_{\mathcal{A}} \varphi$. Para tal, adaptamos para a semântica algébrica a demonstração que já existe, em [2], para a semântica de Kripke.

Suponhamos que $\Gamma \nvdash \varphi$. Queremos mostrar que existe $a \in B$ tal que: para todo $\psi \in \Gamma$, $a \subseteq v(\psi)$ e $a \nsubseteq v(\varphi)$.

Ora, tomemos $a = \bigcap\{v(\psi) \mid \psi \in \Gamma\}$. Temos que $a \in B$ (ver Lema 2.2.2. de [2], que garante que a interseção de uma família de "proposições"é uma "proposição"). Por definição de interseção, para todo $\psi \in \Gamma$, $\bigcap\{v(\psi) \mid \psi \in \Gamma\} \subseteq v(\psi)$. Vejamos agora que $\bigcap\{v(\psi) \mid \psi \in \Gamma\} \nsubseteq v(\varphi)$. Seja $j = \overline{\Gamma}$. Temos, pelo Lema 1, que, para $\psi \in \Gamma$, $\overline{\Gamma} \in v(\psi)$ se e só se, para $\psi \in \Gamma$, $\psi \in \overline{\Gamma}$, o que é verdadeiro, já que $\Gamma \subseteq \overline{\Gamma}$. Logo, $j \in \bigcap\{v(\psi) \mid \psi \in \Gamma\}$. Mas $\Gamma \nvdash \varphi$, pelo que $\varphi \notin \overline{\Gamma}$ e, pelo Lema 1, $\overline{\Gamma} \notin v(\varphi)$. Logo, $\bigcap\{v(\psi) \mid \psi \in \Gamma\} \nsubseteq v(\varphi)$. Concluímos então que $\Gamma \not\models \varphi$. □

Corolário 1. *Sejam* $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_P$ *e* $\varphi \in \mathcal{F}_P$. $\Gamma \models \varphi$ *se e só se* $\Gamma \vdash \varphi$.

3.4 Breve comparação com a Lógica Clássica

Quando comparamos a Lógica Clássica (LC) com a Lógica Quântica Minimal (LQM), é imediato que: se $\models_{LQM} \varphi$, então $\models_{LC} \varphi$. Consideremos a seguinte proposição [10], referente ao Cálculo de Sequentes da Lógica Quântica Minimal (GQM):

Proposição 5. *Se adicionarmos a regra do Corte (sem restrições),*

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \varphi \quad \varphi, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, \Delta \vdash \Theta, \Lambda}\ \text{Corte}$$

ao cálculo de sequentes GQM, obtemos um sistema dedutivo para a Lógica Clássica.

Demonstração. Basta demonstrar que são admissíveis as seguintes regras de inferência:

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \vdash \Theta}\ (\mathsf{L}\neg)_c$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta, \neg\varphi}\ (\mathsf{R}\neg)_c$$

$$\frac{\varphi_1, \Gamma \vdash \Theta \quad \varphi_2, \Gamma \vdash \Theta}{\varphi_1 \vee \varphi_2, \Gamma \vdash \Theta}\ (\mathsf{L}\vee)_c$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \Theta, \varphi_2}{\Gamma \vdash \Theta, \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\mathsf{R}\wedge)_c$$

Ora,

1. $(\mathsf{L}\neg)_c$.

   Suponhamos que existe derivação $\mathcal{D}$ do sequente $\Gamma \vdash \Theta, \varphi$. Queremos mostrar que existe derivação do sequente $\neg\varphi, \Gamma \vdash \Theta$. Ora, basta tomar a seguinte derivação, obtida a partir da aplicação da regra L$\neg$, seguida de uma Regra do Corte:

$$\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{\Gamma \vdash \Theta, \varphi} \qquad \dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\varphi, \neg\varphi \vdash}\ \mathsf{L}\neg}{\neg\varphi, \Gamma \vdash \Theta}\ \text{Corte}$$

2. $(\mathsf{R}\neg)_c$.

   Suponhamos que existe derivação $\mathcal{D}$ do sequente $\varphi, \Gamma \vdash \Theta$. Queremos mostrar que existe derivação do sequente $\Gamma \vdash \Theta, \neg\varphi$. Ora, basta tomar a seguinte derivação, obtida a partir da aplicação da regra R$\neg$, seguida de uma Regra do Corte:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\vdash \neg\varphi, \varphi}\ \mathsf{R}\neg \qquad \overset{\mathcal{D}}{\varphi, \Gamma \vdash \Theta}}{\Gamma \vdash \Theta, \neg\varphi}\ \text{Corte}$$

3. $(\mathsf{L}\vee)_c$.

   Suponhamos que existe derivações $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ dos sequentes $\varphi_1, \Gamma \vdash \Theta$ e $\varphi_2, \Gamma \vdash \Theta$, respetivamente. Queremos mostrar que existe derivação do sequente $\varphi_1 \vee \varphi_2, \Gamma \vdash \Theta$. Ora, tomando $\Gamma = \psi_1, ..., \psi_n$, basta tomar a seguinte derivação, obtida a partir de aplicações sucessivas de regras clássicas e quânticas, seguida de aplicações sucessivas da Regra do Corte:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi_1 \vdash \psi_1}{\neg\psi_1, \psi_1 \vdash}\ \mathsf{L}\neg}{\psi_1 \vdash \neg\neg\psi_1}\ (\mathsf{R}\neg)_c \qquad \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi_n \vdash \psi_n}{\neg\psi_n, \psi_n \vdash}\ \mathsf{L}\neg}{\psi_n \vdash \neg\neg\psi_n}\ (\mathsf{R}\neg)_c \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\mathcal{D}_1}{\varphi_1, \Gamma \vdash \Theta}}{\varphi_1 \vdash \Theta, \neg\Gamma}\ (\mathsf{R}\neg)_c \quad \dfrac{\overset{\mathcal{D}_2}{\varphi_2, \Gamma \vdash \Theta}}{\varphi_2 \vdash \Theta, \neg\Gamma}\ (\mathsf{R}\neg)_c}{\varphi_1 \vee \varphi_2 \vdash \Theta, \neg\Gamma}\ \mathsf{L}\vee}{\neg\neg\psi_1, ..., \neg\neg\psi_n, \varphi_1 \vee \varphi_2 \vdash \Theta}\ (\mathsf{L}\neg)_c}{\neg\neg\psi_1, ..., \neg\neg\psi_{n-1}, \varphi_1 \vee \varphi_2, \psi_n \vdash \Theta}\ \text{Corte} \\ \vdots \\ \neg\neg\psi_1, \varphi_1 \vee \varphi_2, ..., \psi_n \vdash \Theta \end{array}}{\varphi_1 \vee \varphi_2, \psi_1, ..., \psi_n \vdash \Theta}\ \text{Corte}$$

4. $(\mathsf{R}\wedge)_c$.

   Suponhamos que existe derivações $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ dos sequentes $\Gamma \vdash \Theta, \varphi_1$ e $\Gamma \vdash \Theta, \varphi_2$, respetivamente. Queremos mostrar que existe derivação do sequente $\Gamma \vdash \Theta, \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Ora, tomando $\Theta = \psi_1, \dots, \psi_n$, basta tomar a seguinte derivação, obtida a partir de aplicações sucessivas de regras clássicas e quânticas, seguida de aplicações sucessivas da Regra do Corte:

$$
\dfrac{
 \dfrac{
  \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \Gamma\vdash\Theta,\varphi_1\end{matrix}}{\neg\Theta,\Gamma\vdash\varphi_1}(\mathsf{L}\neg)_c \quad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ \Gamma\vdash\Theta,\varphi_2\end{matrix}}{\neg\Theta,\Gamma\vdash\varphi_2}(\mathsf{L}\neg)_c}{\neg\Theta,\Gamma\vdash\varphi_1\wedge\varphi_2}\mathsf{R}\wedge
 }{\Gamma\vdash\varphi_1\wedge\varphi_2,\neg\neg\psi_1,\dots,\neg\neg\psi_n}(\mathsf{R}\neg)_c
 \quad
 \dfrac{\dfrac{\psi_n\vdash\psi_n}{\vdash\psi_n,\neg\psi_n}\mathsf{R}\neg}{\neg\neg\psi_n\vdash\psi_n}(\mathsf{L}\neg)_c
}{\Gamma\vdash\psi_n,\varphi_1\wedge\varphi_2,\neg\neg\psi_1,\dots,\neg\neg\psi_{n-1}}\,\text{Corte}
$$

$$
\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\vdash\psi_n,\varphi_1\wedge\varphi_2,\neg\neg\psi_1,\dots,\neg\neg\psi_{n-1}\\ \vdots \\ \Gamma\vdash\dots,\psi_n,\varphi_1\wedge\varphi_2,\neg\neg\psi_1\end{matrix} \quad \dfrac{\dfrac{\psi_1\vdash\psi_1}{\vdash\psi_1,\neg\psi_1}\mathsf{R}\neg}{\neg\neg\psi_1\vdash\psi_1}(\mathsf{L}\neg)_c}{\Gamma\vdash\psi_1,\dots,\psi_n,\varphi_1\wedge\varphi_2}\,\text{Corte}
$$

□

Temos então, que se adicionarmos a Regra do Corte (sem restrições) ao Cálculo de Sequentes da Lógica Quântica Minimal, obtemos um Cálculo de Sequentes para a Lógica Clássica. Para além de não podermos adicionar a regra do Corte sem restrições, o Cálculo de Sequentes da Lógica Quântica Minimal tem algumas regras de inferências restritas, como é o caso das regras L$\vee$, R$\wedge$, L$\neg$, R$\neg$. Neste sentido, uma questão que surge naturalmente é: quais são as consequências destas restrições?

Ora, em primeiro lugar, a diferença semântica entre as álgebras de Boole e os ortorreticulados é correspondida pela diferença entre o Cálculo de Sequentes Clássico (GC) e o Cálculo de Sequentes da Lógica Quântica Minimal (GQM), devido aos meta-teoremas de Correção e Completude vigentes em ambas as lógicas.

Segundo, a diferença entre os sistemas dedutivos das duas lógicas conduz a situações em que é mais complexo derivar certas fórmulas na Lógica Quântica Minimal, devido às restrições impostas nas regras de inferências dos seus sistemas dedutivos.

Por último, há alguns casos em que é até impossível derivar tautologias da Lógica Proposicional Clássica na Lógica Quântica Minimal.

Apresentamos então, nas subsecções seguintes, alguns exemplos ilustrativos.

3.4.1 Teoremas (simultaneamente) Clássicos e Quânticos

Sejam φ e ψ fórmulas. Um exemplo de Teorema da Lógica Clássica Proposicional que é também Teorema da Lógica Quântica Minimal é:

$$(\varphi \vee \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi).$$

Uma derivação no Cálculo de Sequentes da Lógica Proposicional Clássica é:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \varphi, \psi}\ \text{RW}}{\vdash \varphi, \psi, \neg\varphi}\ \text{R}\neg \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \vdash \psi}{\psi \vdash \varphi, \psi}\ \text{RW}}{\vdash \varphi, \psi, \neg\psi}\ \text{R}\neg}{\vdash \varphi, \psi, \neg\varphi \wedge \neg\psi}\ R\wedge}{\vdash \varphi \vee \psi, \neg\varphi \wedge \neg\psi}\ \text{R}_1\vee, \text{R}_2\vee}{\vdash (\varphi \vee \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)}\ \text{R}_1\vee, \text{R}_2\vee$$

A regra de inferência R$\wedge$ na derivação anterior não é possível na Lógica Quântica Minimal, por ter mais fórmulas para além da conjunção no consequente da sua conclusão. Posto isto, uma derivação no Cálculo de Sequentes da Lógica Quântica Minimal, que faz uso das regras de inferência admissíveis da contraposição (CP) e do Corte-1:

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Theta}{\neg\Theta \vdash \neg\Gamma}\ \text{CP} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Theta, \varphi \quad \varphi \vdash \Lambda}{\Gamma \vdash \Theta, \Lambda}\ \text{Corte-1}$$

abordadas com mais profundidade na secção 4.2, tem a forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{\varphi \vee \psi \vdash \varphi \vee \psi}{\vdash \varphi \vee \psi, \neg(\varphi \vee \psi)}\ \text{R}\neg \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \varphi, \psi}\ \text{W}}{\varphi \vdash \varphi \vee \psi}\ \text{R}_1\vee, \text{R}_2\vee \\ \vdots\ (1) \\ \neg(\varphi \vee \psi) \vdash \neg\varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\psi \vdash \psi}{\psi \vdash \varphi, \psi}\ \text{W}}{\psi \vdash \varphi \vee \psi}\ \text{R}_1\vee, \text{R}_2\vee \\ \vdots\ (1) \\ \neg(\varphi \vee \psi) \vdash \neg\psi \end{array}}{\neg(\varphi \vee \psi) \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi}\ \text{R}\wedge \\ \vdots\ (2) \\ \vdash \varphi \vee \psi, \neg\varphi \wedge \neg\psi \end{array}}{\vdash (\varphi \vee \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)}\ \text{R}_1\vee, \text{R}_2\vee$$

onde em (1) (respetivamente (2)), se utilizou a admissibilidade de CP (respetivamente, Corte-1).

Ter a regra admissível CP significa que se existe uma derivação $\mathcal{D}$ de um sequente $\Gamma \vdash \Theta$, então existirá também uma derivação $\mathcal{D}'$ do sequente $\neg\Theta \vdash \neg\Gamma$, que poderá resultar de uma transformação extensa de $\mathcal{D}$, aumentando significativamente o seu comprimento. O mesmo poderá ocorrer, de forma análoga, com a aplicação da regra do Corte-1.

3.4.2 Teoremas (somente) Clássicos

Sejam φ, ψ, ω fórmulas. Temos que:

$$\alpha := \neg(\varphi \wedge (\psi \vee \omega)) \vee ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \omega))$$

é um Teorema da Lógica Proposicional Clássica, visto que existe uma derivação de α no seu Cálculo de Sequentes (GC):

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\varphi \vdash \varphi$}
\doubleLine
\RightLabel{LW, RW}
\UnaryInfC{$\varphi, \psi \vdash \varphi, \varphi \wedge \omega$}
\AxiomC{$\psi \vdash \psi$}
\doubleLine
\RightLabel{LW, RW}
\UnaryInfC{$\varphi, \psi \vdash \psi, \varphi \wedge \omega$}
\RightLabel{R$\wedge$}
\BinaryInfC{$\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi, \varphi \wedge \omega$}
\AxiomC{$\varphi \vdash \varphi$}
\doubleLine
\RightLabel{LW, RW}
\UnaryInfC{$\varphi, \omega \vdash \varphi \wedge \psi, \varphi$}
\AxiomC{$\omega \vdash \omega$}
\doubleLine
\RightLabel{LW, RW}
\UnaryInfC{$\varphi, \omega \vdash \varphi \wedge \psi, \omega$}
\RightLabel{R$\wedge$}
\BinaryInfC{$\varphi, \omega \vdash \varphi \wedge \psi, \varphi \wedge \omega$}
\RightLabel{L$\vee$}
\BinaryInfC{$\varphi, \psi \vee \omega \vdash \varphi \wedge \psi, \varphi \wedge \omega$}
\doubleLine
\RightLabel{R$_1\vee$, R$_2\vee$}
\UnaryInfC{$\varphi, \psi \vee \omega \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \omega)$}
\doubleLine
\RightLabel{L$_1\wedge$, L$_2\wedge$}
\UnaryInfC{$\varphi \wedge (\psi \vee \omega) \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \omega)$}
\RightLabel{R$\neg$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg(\varphi \wedge (\psi \vee \omega)), (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \omega)$}
\doubleLine
\RightLabel{R$_1\vee$, R$_2\vee$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg(\varphi \wedge (\psi \vee \omega)) \vee ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \omega))$}
\end{prooftree}
$$

A aplicação da regra $L\vee$ não é possível em GQM, por ter mais fórmulas para além da disjunção no antecedente da sua conclusão. No entanto, não é possível contornar a aplicação dessa regra com regras admissíveis, já que α não é uma verdade lógica na Lógica Quântica Minimal. Tomemos v(φ)=a, v(ψ)=b e v(ω)=c no ortorreticulado da Figura 4. Então,

$$
\begin{aligned}
v(\alpha) &= v(\neg(\varphi \wedge (\psi \vee \omega)) \vee ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \omega))) \\
&= v(\neg(\neg\neg(\varphi \wedge \neg(\neg\psi \wedge \neg\omega)) \wedge \neg\neg(\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \omega)))) \\
&= ((v(\varphi) \sqcap (v(\psi)' \sqcap v(\omega)')')'' \sqcap ((v(\varphi) \sqcap v(\psi))' \sqcap (v(\varphi) \sqcap v(\omega))')'')' \\
&= ((v(\varphi) \sqcap (v(\psi)' \sqcap v(\omega)')') \sqcap ((v(\varphi) \sqcap v(\psi))' \sqcap (v(\varphi) \sqcap v(\omega))'))' \\
&= ((a \sqcap (b' \sqcap c')') \sqcap ((a \sqcap b)' \sqcap (a \sqcap c)'))' \\
&= ((a \sqcap k') \sqcap (0' \sqcap 0'))' \\
&= (a \sqcap 1)' \\
&= a' \\
&\neq 1.
\end{aligned}
$$

Então, pelo meta-teorema da Correção, α não é um Teorema da Lógica Quântica Minimal.

Capítulo 4

Equivalência entre NQM e GQM

4.1 Variante da Dedução Natural (NQM*)

Nesta secção, apresentamos algumas considerações sobre o sistema dedutivo Dedução Natural com Sequentes (NQM), apresentado na secção 3.3.1, que conduzem a um novo sistema, a Variante da Dedução Natural (NQM*), cuja estrutura se aproxima aos sistemas de dedução natural a que estamos habituados, pois procura que as regras de inferência atuem no consequente dos sequentes (mantendo, ainda assim, exceções). A demonstração da equivalência das duas deduções naturais é apresentada no fim desta secção.

4.1.1 Metateoria do Sistema NQM

Apresentamos, abaixo, algumas notas sobre a Dedução Natural com Sequentes (NQM), introduzida na secção 3.3.1.

Proposição 6. *A regra do enfraquecimento:*

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}\ \mathsf{W}$$

é derivável.

Demonstração. Suponhamos que existe derivação $\mathcal{D}$ do sequente $\Gamma \vdash \varphi$. Queremos mostrar que existe derivação do sequente $\Gamma, \psi \vdash \varphi$. Ora, basta tomar a seguinte derivação, obtida a partir da aplicação da Regra do Corte:

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}}{\Gamma \vdash \varphi} \quad \dfrac{}{\psi, \varphi \vdash \varphi}\text{id}}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}\text{Corte}\ .$$

□

Proposição 7. *A regra LI∧:*

$$\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \sigma}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \sigma}\text{LI}\wedge$$

é derivável a partir das restantes regras do sistema (e, consequentemente, redundante).

Demonstração. Suponhamos que existe derivação $\mathcal{D}$ do sequente $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \sigma$. Queremos mostrar que existe derivação do sequente $\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \sigma$. Ora, basta tomar a seguinte derivação, obtida a partir da aplicação dupla da Regra do Corte:

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \psi}\text{E}_2\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \varphi}\text{E}_1\wedge \quad \dfrac{\mathcal{D}}{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \sigma}}{\Gamma, \varphi \wedge \psi, \psi \vdash \sigma}\text{Corte}}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \sigma}\text{Corte}\ .$$

□

Proposição 8. *A regra:*

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_i}\text{E'}_i\wedge\text{, onde } i \in \{1, 2\}$$

é derivável.

Demonstração. Suponhamos que existe derivação $\mathcal{D}$ do sequente $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Queremos mostrar que existe derivação do sequente $\Gamma \vdash \varphi_i$, onde $i \in \{1, 2\}$. Ora, basta tomar a seguinte derivação, obtida a partir da aplicação da regra E$_i$∧, seguida de uma Regra do Corte:

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2} \quad \dfrac{}{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \varphi_i}\text{E}_i\wedge\text{, onde } i \in \{1, 2\}}{\Gamma \vdash \varphi_i}\text{Corte}\ .$$

□

Proposição 9. *A regra:*

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}\ \text{I}\neg\neg$$

é derivável.

Demonstração. Suponhamos que existe derivação $\mathcal{D}$ do sequente $\Gamma \vdash \varphi$. Queremos mostrar que existe derivação do sequente $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$. Ora, basta tomar a seguinte derivação, obtida a partir da aplicação da regra IFraca$\neg$, seguida de uma Regra do Corte:

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \Gamma \vdash \varphi\end{matrix} \quad \dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \neg\neg\varphi}\ \text{IFraca}\neg}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}\ \text{Corte} \quad .$$

□

Proposição 10. *A regra:*

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi}\ \text{E}\neg\neg$$

é derivável.

Demonstração. Suponhamos que existe derivação $\mathcal{D}$ do sequente $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$. Queremos mostrar que existe derivação do sequente $\Gamma \vdash \varphi$. Ora, basta tomar a seguinte derivação, obtida a partir da aplicação da regra IForte$\neg$, seguida de uma Regra do Corte:

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \Gamma \vdash \neg\neg\varphi\end{matrix} \quad \dfrac{}{\Gamma, \neg\neg\varphi \vdash \varphi}\ \text{IForte}\neg}{\Gamma \vdash \varphi}\ \text{Corte} \quad .$$

□

Proposição 11. *A regra:*

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ \text{DS'}$$

é derivável.

Demonstração. Suponhamos que existe derivação $\mathcal{D}$ do sequente $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. Queremos mostrar que existe derivação do sequente $\Gamma \vdash \psi$. Ora, basta tomar a seguinte derivação, obtida a partir da aplicação da regra Duns Scotus, seguida de uma Regra do Corte:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi\end{array} \quad \dfrac{}{\Gamma, \varphi \wedge \neg\varphi \vdash \psi}\,\text{DS}}{\Gamma \vdash \psi}\,\text{Corte}.$$

□

4.1.2 Sistema NQM*

A partir da Dedução Natural com Sequentes da secção 3.3.1 e respetivas observações apresentadas na subsecção anterior, podemos definir uma nova variante da Dedução Natural (NQM*), que é constituída pelo axioma

$$\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\,\text{id}$$

e pelas regras:

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_i}\,\text{E}'_i\wedge, \text{onde } i \in \{1, 2\} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\,\text{I}\wedge$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi}\,\text{E}\neg\neg \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}\,\text{I}\neg\neg$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi}{\Gamma \vdash \psi}\,\text{DS'} \qquad \dfrac{\varphi \vdash \psi}{\neg\psi \vdash \neg\varphi}\,\text{CP}$$

$$\dfrac{\varphi \vdash \psi \quad \varphi \vdash \neg\psi}{\vdash \neg\varphi}\,\text{Absurdo} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Delta, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \Delta \vdash \psi}\,\text{Corte}$$

Note-se que esta nova versão deixa de contar com regras impróprias e redundantes e passa a ter regras de introdução e regras de eliminação para os conectivos $\wedge$ e $\neg\neg$ e uma nova versão da regra DS, para além das regras CP, Absurdo e Corte.

4.1.3 Equivalência com o sistema NQM

A equivalência entre os sistemas NQM e NQM* é obtida tomando as proposições da secção 4.1.1 e as provas de derivabilidade em NQM* apresentadas abaixo.

Proposição 12. *A regra:*

$$\frac{}{\Gamma, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \varphi_i}\ \mathsf{E}_i\wedge, \text{onde } i \in \{1,2\}$$

é derivável em NQM.*

Demonstração. Queremos mostrar que existe derivação do sequente $\Gamma, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \varphi_i$ em NQM*. Ora, basta tomar a seguinte derivação, obtida a partir da aplicação da regra $E_i\wedge$:

$$\frac{\frac{}{\Gamma, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ \mathsf{id}}{\Gamma, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \varphi_i}\ \mathsf{E}'_i\wedge, \text{onde } i \in \{1,2\}.$$

□

Proposição 13. *A regra:*

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \neg\neg\varphi}\ \mathsf{IFraca}\neg$$

é derivável em NQM.*

Demonstração. Queremos mostrar que existe derivação do sequente $\Gamma, \varphi \vdash \neg\neg\varphi$ em NQM*. Ora, basta tomar a seguinte derivação, obtida a partir da aplicação da regra $I\neg\neg$:

$$\frac{\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ \mathsf{id}}{\Gamma, \varphi \vdash \neg\neg\varphi}\ \mathsf{I}\neg\neg.$$

□

Proposição 14. *A regra:*

$$\frac{}{\Gamma, \neg\neg\varphi \vdash \varphi}\ \mathsf{IForte}\neg$$

é derivável em NQM.*

Demonstração. Queremos mostrar que existe derivação do sequente $\Gamma, \neg\neg\varphi \vdash \varphi$ em NQM*. Ora, basta tomar a seguinte derivação, obtida a partir da aplicação da regra $E\neg\neg$:

$$\frac{\frac{}{\Gamma, \neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi}\ \mathsf{id}}{\Gamma, \neg\neg\varphi \vdash \varphi}\ \mathsf{E}\neg\neg.$$

□

Proposição 15. *A regra:*

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \wedge \neg\varphi \vdash \psi}\text{ DS}$$

é derivável em NQM.*

Demonstração. Queremos mostrar que existe derivação do sequente $\Gamma, \varphi \wedge \neg\varphi \vdash \psi$ em NQM*. Ora, basta tomar a seguinte derivação, obtida a partir da aplicação da regra DS':

$$\frac{\overline{\Gamma, \varphi \wedge \neg\varphi \vdash \varphi \wedge \neg\varphi}\text{ id}}{\Gamma, \varphi \wedge \neg\varphi \vdash \psi}\text{ DS'}.$$

□

4.2 Metateoria do Sistema GQM

Vejamos algumas notas sobre a o Cálculo de Sequentes (GQM), apresentado na secção 3.3.2, que nos serão úteis para as demonstrações das secções seguintes.

Proposição 16. *A regra da Contraposição:*

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta}{\neg\Theta \vdash \neg\Gamma}\text{ CP}$$

é admissível.

Demonstração. Apresentamos apenas as linhas gerais da demonstração - os detalhes da prova podem ser consultados em [10]. Para provar a admissibilidade da regra da contraposição, é introduzido um sistema auxiliar, GQM#, que admite como axiomas os sequentes $\varphi \vdash \varphi$; $\varphi, \neg\varphi \vdash$ e $\vdash \varphi, \neg\varphi$, que não possui as regras de inferência L¬ e R¬ e que conta com duas regras de inferência adicionais:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \varphi_2}{\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2), \Gamma \vdash}\text{ L}\wedge(\neg) \qquad \frac{\varphi_1 \vdash \Theta \quad \varphi_2 \vdash \Theta}{\vdash \Theta, \neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)}\text{ R}\vee(\neg).$$

Posto isto, demonstra-se que:

1. Se um sequente $\neg\neg\varphi, \Gamma \vdash \Theta$ é derivável em GQM#, então também é derivável o sequente $\varphi, \Gamma \vdash \Theta$;
2. Se um sequente $\Gamma \vdash \Theta, \neg\neg\varphi$ é derivável em GQM#, então também é derivável o sequente $\Gamma \vdash \Theta, \varphi$.

A partir dos resultados anteriores, prova-se que:

3. A regra de inferência da Contraposição (CP) é admissível em GQM#.

Uma vez mais, fazendo uso dos resultados provados até ao momento, demonstra-se que:

4. Se um sequente $\Gamma \vdash \Theta$ é derivável em GQM#, então também é derivável o sequente $\neg\Theta, \Gamma \vdash$;

5. Se um sequente $\Gamma \vdash \Theta$ é derivável em GQM#, então também é derivável o sequente $\vdash \Theta, \neg\Gamma$.

Finalmente, recorrendo aos resultados (4) e (5), prova-se a equivalência entre os sistemas GQM e GQM# e, portanto, a admissibilidade da regra da Contraposição no sistema GQM.

□

Teorema 5 (Teorema da Eliminação do Corte). *Se os sequentes $\Gamma \vdash \Theta, \varphi$ e $\varphi, \Delta \vdash \Lambda$ são deriváveis com ou $\Delta = \emptyset$ ou $\Theta = \emptyset$, então o sequente $\Gamma, \Delta \vdash \Theta, \Lambda$ é também derivável. Por outras palavras, as regras do Corte (restritas):*

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \varphi \quad \varphi \vdash \Lambda}{\Gamma \vdash \Theta, \Lambda}\ \text{Corte-1} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \varphi, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda}\ \text{Corte-2}$$

são admissíveis.

Demonstração. A prova é feita por indução no grau das fórmulas e comprimento das derivações e os seus detalhes podem ser consultados em [10]. □

4.3 Equivalência entre NQM e GQM

4.3.1 NQM => GQM

Proposição 17. *Se $\Gamma \vdash \varphi$ é derivável em NQM*, então $\Gamma \vdash \varphi$ é derivável em GQM.*

Demonstração. Queremos provar que, para toda a derivação $\mathcal{D}$ em NQM*:

P($\mathcal{D}$) := para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_p$, $\varphi \in \mathcal{F}_p$, se $\mathcal{D}$ é derivação em NQM* do sequente $\Gamma \vdash \varphi$, então existe derivação $\mathcal{D}'$ em GQM do sequente $\Gamma \vdash \varphi$.

Para tal, usamos o Princípio de Indução Estrutural associado a NQM*. Note-se, no entanto, que apenas demonstramos em detalhe os primeiros quatro casos, sendo os restantes casos apresentados de forma mais sucinta.

1. *Identidade (id).*

   Seja $\mathcal{D}$ a derivação do sequente $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ em NQM*, obtida por aplicação da regra id. Falta ver que existe derivação do sequente $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ em GQM. Ora, basta tomar a derivação em GQM, obtida através da aplicação de uma regra do enfraquecimento (W):

$$\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ \text{W}$$

2. *Caso $E_i'\wedge$, onde $i \in \{1,2\}$.*

   Seja $\mathcal{D}_1$ derivação em NQM* do sequente $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Seja $\mathcal{D}$ a derivação em NQM*, obtida a partir de $\mathcal{D}_1$, por aplicação da Regra $E_i'\wedge$, onde $i \in \{1,2\}$, isto é:

$$\mathcal{D} = \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi_i}\ \text{E}_i \wedge \text{ onde } i \in \{1,2\}$$

   Queremos demonstrar que existe derivação $\mathcal{D}'$ em GQM do sequente $\Gamma \vdash \varphi_i$.

   Ora, por $P(\mathcal{D}_1)$, temos que existe derivação $\mathcal{D}_1'$ do sequente $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$ em GQM.

   Basta então tomar a derivação em GQM, obtida através da aplicação da regra $L_i\wedge$, onde $i \in \{1,2\}$, seguida da aplicação de uma regra do Corte:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1'\\ \Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2\end{array} \qquad \dfrac{\varphi_i \vdash \varphi_i}{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \varphi_i}\ \text{L}_i\wedge}{\Gamma \vdash \varphi_i}\ \text{Corte-1}$$

3. *Caso $I\wedge$.*

   Sejam $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ derivações em NQM* dos sequentes $\Gamma \vdash \varphi_1$ e $\Gamma \vdash \varphi_2$, respetivamente. Seja $\mathcal{D}$ a derivação do sequente em NQM*, obtida a partir de $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$, por aplicação da Regra $I\wedge$, isto é:

$$\mathcal{D} = \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \Gamma \vdash \varphi_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \Gamma \vdash \varphi_2\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ \text{I}\wedge$$

   Queremos demonstrar que existe derivação $\mathcal{D}'$ em GQM do sequente $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

   Ora, por $P(\mathcal{D}_1)$ e $P(\mathcal{D}_2)$, temos que existem, respetivamente, derivação $\mathcal{D}_1'$ do sequente $\Gamma \vdash \varphi_1$ e derivação $\mathcal{D}_2'$ do sequente $\Gamma \vdash \varphi_2$ em GQM.

   Basta então tomar a derivação em GQM, obtida através da aplicação de uma regra $R\wedge$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1' \\ \Gamma \vdash \varphi_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2' \\ \Gamma \vdash \varphi_2\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ R\wedge$$

4. *Caso* $E\neg\neg$.

   Seja $\mathcal{D}_1$ derivação do sequente $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$ em NQM* e suponhamos $P(\mathcal{D}_1)$. Seja $\mathcal{D}$ a derivação em NQM*, obtida a partir de $\mathcal{D}_1$, por aplicação da Regra $E\neg\neg$, isto é:

$$\mathcal{D} = \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ \Gamma \vdash \neg\neg\varphi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi}\ \mathrm{E}\neg\neg$$

   Queremos demonstrar que existe derivação $\mathcal{D}'$ em GQM do sequente $\Gamma \vdash \varphi$.

   Ora, por $P(\mathcal{D}_1)$, temos que existe derivação $\mathcal{D}_1'$ em GQM do sequente $\Gamma \vdash \varphi$ em GQM.

   Basta então tomar a derivação em GQM, obtida através da aplicação da regra $L\neg\neg$, seguida da aplicação de uma regra do Corte-1:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1' \\ \Gamma \vdash \neg\neg\varphi\end{array} \qquad \dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\neg\neg\varphi \vdash \varphi}\ \mathrm{L}\neg\neg}{\Gamma \vdash \varphi}\ \text{Corte-1}$$

5. *Caso* $I\neg\neg$.

   A derivação, em GQM, equivalente à derivação obtida em NQM* a partir da derivação $\mathcal{D}_1$ do sequente $\Gamma \vdash \varphi$, por aplicação da regra $I\neg\neg$, é a seguinte e obtém-se através da aplicação da regra $R\neg\neg$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1' \\ \Gamma \vdash \varphi\end{array}}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}\ \mathrm{R}\neg\neg$$

   em que $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução.

6. *Caso* DS'.

   A derivação, em GQM, equivalente à derivação obtida em NQM* a partir da derivação $\mathcal{D}_1$ do sequente $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, por aplicação da regra DS', é a seguinte e obtém-se através da aplicação das regras W e $L_i\wedge$, seguida da aplicação de uma regra do Corte-1:

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1' \\ \Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi\end{matrix} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\varphi, \neg\varphi \vdash}\,\mathsf{L}\neg}{\varphi, \neg\varphi \vdash \psi}\,\mathsf{W}}{\varphi \wedge \neg\varphi \vdash \psi}\,\mathsf{L}_i\wedge}{\Gamma \vdash \psi}\,\text{Corte-1}$$

em que $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução.

7. *Caso CP.*

   A derivação, em GQM, equivalente à derivação obtida em NQM* a partir da derivação $\mathcal{D}_1$ do sequente $\varphi \vdash \psi$, por aplicação da regra CP, é a seguinte e obtém-se através da aplicação da regra admissível da Contraposição, CP:

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1' \\ \varphi \vdash \psi\end{matrix}}{\neg\psi \vdash \neg\varphi}\,\text{CP}$$

   em que $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução.

8. *Caso Absurdo.*

   A derivação, em GQM, equivalente à derivação obtida em NQM* a partir das derivações $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$, respetivamente, dos sequentes $\varphi \vdash \psi$ e $\varphi \vdash \neg\psi$, por aplicação da regra do Absurdo, é a seguinte e obtém-se através da aplicação das regras $R\neg$ e da regra admissível CP, seguida da aplicação de uma regra do Corte-1:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_2' \\ \varphi \vdash \neg\psi\end{matrix}}{\vdash \neg\psi, \neg\varphi}\,\mathsf{R}\neg \quad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1' \\ \varphi \vdash \psi\end{matrix}}{\neg\psi \vdash \neg\varphi}\,\text{CP}}{\vdash \neg\varphi}\,\text{Corte-1}$$

   em que $\mathcal{D}_1'$ e $\mathcal{D}_2'$ são dadas por hipótese de indução.

9. *Caso Corte.*

   A derivação, em GQM, equivalente à derivação obtida em NQM* a partir das derivações $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$, respetivamente, dos sequentes $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, por aplicação da regra do Corte, é a seguinte e obtém-se através da aplicação da regra do Corte-2:

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1' \\ \Gamma \vdash \varphi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_2' \\ \Delta, \varphi \vdash \psi\end{matrix}}{\Gamma, \Delta \vdash \psi}\,\text{Corte-2}$$

em que $\mathcal{D}'_1$ e $\mathcal{D}'_2$ são dadas por hipótese de indução.

□

Como os sistemas NQM e NQM* são equivalentes, fica então demonstrado que: se $\Gamma \vdash \varphi$ é derivável em NQM, então $\Gamma \vdash \varphi$ é derivável em GQM.

4.3.2 GQM => NQM

Conforme vimos na secção 3.3, os sequentes do sistema NQM (e, por conseguinte, do sistema NQM*) são da forma $\Gamma \vdash \varphi$, em que Γ é um conjunto de fórmulas (possivelmente vazio) de $\mathcal{F}_p$ e φ é uma fórmula de $\mathcal{F}_p$. Posto isto, para demonstrar a implicação pretendida, temos de definir, em primeiro lugar, uma função que traduza as fórmulas com disjunção utilizadas em GQM em fórmulas (sem disjunção) utilizadas em NQM. Note-se que a tradução inversa é apenas uma simples função de inclusão, já que $\mathcal{F}_p$ é um subconjunto de $\mathcal{F}_p^{\vee}$, pelo que, na subsecção anterior, assumimos simplesmente que qualquer fórmula de $\mathcal{F}_p$ é também uma fórmula de $\mathcal{F}_p^{\vee}$.

Definição 25 (Função F). *A função F é a função que, a cada fórmula de $\mathcal{F}_p^{\vee}$ faz corresponder uma fórmula de $\mathcal{F}_p$ e é definida, recursivamente, por:*

1. *$F(p) = p$, para todo $p \in \mathcal{V}_p$;*
2. *$F(\neg\varphi) = \neg F(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}_p^{\vee}$;*
3. *$F(\varphi \wedge \psi) = F(\varphi) \wedge F(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_p^{\vee}$;*
4. *$F(\varphi \vee \psi) = \neg(\neg F(\varphi) \wedge \neg F(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_p^{\vee}$.*

Temos que, se $\Gamma = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$, então $F(\Gamma) = \{F(\varphi_1), ..., F(\varphi_n)\}$.

Definimos ainda uma série de conceitos e resultados, que nos permitirão, como já referido, ultrapassar o facto de os sequentes do sistema NQM* terem apenas uma fórmula no seu consequente.

Como $\mathcal{F}_p^{\vee}$ é um conjunto numerável, está definida uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathcal{F}_p^{\vee}$, que nos garante que é possível definir uma relação de ordem para as fórmulas de um dado conjunto de fórmulas de $\mathcal{F}_p^{\vee}$. Assim, estamos em condições de introduzir a ideia de listas de fórmulas e da sua disjunção.

Definição 26 (Conjunto $(\mathcal{F}_p^{\vee})^+$). *O conjunto $(\mathcal{F}_p^{\vee})^+$ das listas de fórmulas de $\mathcal{F}_p^{\vee}$ é definido, indutivamente, por:*

1. se $\varphi \in \mathcal{F}_p^{\vee}$, então $\varphi \in (\mathcal{F}_p^{\vee})^+$;

2. se $\varphi \in \mathcal{F}_p^{\vee}$ e $L \in (\mathcal{F}_p^{\vee})^+$, então $(\varphi :: L) \in (\mathcal{F}_p^{\vee})^+$.

Usamos a notação $\varphi_1 :: ... :: \varphi_n$ para representar a lista $[\varphi_1, \dots, \varphi_n]$.

Definição 27 (**Função** $\vee^+$)**.** *A função $\vee^+$, que a uma lista não vazia de fórmulas de $\mathcal{F}_p^{\vee}$ faz corresponder a disjunção das suas fórmulas, é definida recursivamente por:*

- $\vee^+(\varphi) = \varphi$;
- $\vee^+(\varphi :: L) = \varphi \vee \vee^+(L)$.

Definição 28 (**Função** $\vee^*$)**.** *Seja $L \in (\mathcal{F}_p^{\vee})^+$ e ϵ a lista vazia. Fixemos uma fórmula $\alpha \in \mathcal{F}_p^{\vee}$. A função $\vee^*$, que a uma lista de fórmulas de $\mathcal{F}_p^{\vee}$ faz corresponder a disjunção das suas fórmulas, é definida por:*

- $\vee^*(L) = \vee^+(L)$, *se* $L \neq \epsilon$;
- $\vee^*(\epsilon) = \alpha \wedge \neg\alpha$.

Temos ainda que a bijeção $\mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{F}_p^{\vee}$ determina $L : \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{F}_p^{\vee}) \longrightarrow (\mathcal{F}_p^{\vee})^+$ e permite definir uma nova função $\vee^*$, como $\vee^* : \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{F}_p^{\vee}) \longrightarrow \mathcal{F}_p^{\vee}$, tal que, dado um conjunto finito de fórmulas Θ de $\mathcal{F}_p^{\vee}$, $\vee^*(\Theta) = \vee^*(L(\Theta))$.

Utilizamos a notação $\Gamma \dashv\vdash \Theta$ para indicar que Γ é derivável a partir de Θ ($\Theta \vdash \Gamma$) e Θ é derivável a partir de Γ ($\Gamma \vdash \Theta$).

Lema 2. *Se $\Gamma, \Theta \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{F}_p^{\vee})$ não vazios, então $\vee^*(\Gamma \cup \Theta) \dashv\vdash \vee^*(\Gamma) \vee \vee^*(\Theta)$ em GQM.*

Demonstração. Segue diretamente da comutatividade ($\varphi_1 \vee \varphi_2 \dashv\vdash \varphi_2 \vee \varphi_1$) e da associatividade ($\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3) \dashv\vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3$) da disjunção. □

Lema 3. *Sejam $\varphi, \varphi' \in \mathcal{F}_p^{\vee}$. A regra:*

$$\frac{\varphi \dashv\vdash \varphi'}{F(\varphi) \dashv\vdash F(\varphi')}$$

é admissível em GQM.

Demonstração. Segue diretamente de $\varphi \dashv\vdash F(\varphi)$ e de aplicações da Regra do Corte. □

Lema 4. *Se* $\varphi \dashv\vdash \varphi'$*, então:*

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash \varphi}$$

é admissível em NQM.*

Demonstração. Caso particular da Regra do Corte. □

Estamos então em condições de demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 18. *Se* $\Gamma \vdash \Theta$ *é derivável em GQM, então* $F(\Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta))$ *é derivável em NQM*.*

Demonstração. Queremos provar que, para toda a derivação $\mathcal{D}$ em GQM:

P($\mathcal{D}$) := para todo $\Gamma, \Theta \subseteq \mathcal{F}_p^{\vee}$, se $\mathcal{D}$ é derivação em GQM do sequente $\Gamma \vdash \Theta$, então existe derivação $\mathcal{D}'$ em NQM* do sequente $F(\Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta))$.

Para tal, usamos o Princípio de Indução Estrutural associado a GQM. Note-se que, uma vez mais, apenas demonstramos em detalhe uma amostra dos casos representativos, sendo os restantes casos apresentados de forma mais sucinta.

1. *Identidade (id).*

   Seja $\varphi \in \mathcal{F}_p^{\vee}$ e suponhamos que $\mathcal{D}$ é derivação do sequente $\varphi \vdash \varphi$ em GQM. Falta ver que existe derivação do sequente $F(\varphi) \vdash F(\vee^*(\varphi))$ em NQM*.

   Ora, temos que $F(\vee^*(\varphi)) = F(\varphi)$.

   Basta então tomar a derivação em NQM*:

   $$F(\varphi) \vdash F(\varphi)$$

2. *Caso W.*

   Seja $\mathcal{D}_1$ a derivação do sequente $\Gamma \vdash \Theta$ em GQM e suponhamos $P(\mathcal{D}_1)$. Seja $\mathcal{D}$ a derivação em GQM, obtida a partir de $\mathcal{D}_1$, por aplicação da Regra W, isto é:

   $$\mathcal{D} = \quad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ \Gamma, \Theta\end{array}}{\Delta, \Gamma \vdash \Theta, \Lambda}\ \mathrm{W}$$

   Queremos demonstrar que existe derivação $\mathcal{D}'$ em NQM* do sequente $F(\Delta, \Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta, \Lambda))$.

   Ora, temos que:

a) $F(\Delta, \Gamma) = F(\Delta), F(\Gamma)$;

b) Pelo Lema 2, $\vee^*(\Theta, \Lambda) \dashv\vdash \vee^*(\Theta) \vee \vee^*(\Lambda)$;

c) Segue então, pelo Lema 3, que $F(\vee^*(\Theta, \Lambda)) \dashv\vdash F(\vee^*(\Theta) \vee \vee^*(\Lambda))$;

d) Pela definição da função F, temos que $F(\vee^*(\Theta) \vee \vee^*(\Lambda)) = \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg F(\vee^*(\Lambda)))$;

e) Por $P(\mathcal{D}_1)$, existe derivação $\mathcal{D}_1'$ do sequente $F(\Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta))$ em NQM*.

Basta então tomar a seguinte derivação em NQM*:

$$
\cfrac{
\cfrac{
\genfrac{}{}{1.5pt}{}{\overset{\mathcal{D}_1'}{F(\Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta))}}{F(\Delta), F(\Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta))}\ \mathsf{W}
}{F(\Delta), F(\Gamma) \vdash \neg\neg F(\vee^*(\Theta))}\ \mathsf{I}\neg\neg
\qquad
\cfrac{
\cfrac{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg F(\vee^*(\Lambda)) \vdash \neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg F(\vee^*(\Lambda))}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg F(\vee^*(\Lambda)) \vdash \neg F(\vee^*(\Theta))}\ \mathsf{E}_1'\wedge
}{\neg\neg F(\vee^*(\Theta)) \vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg F(\vee^*(\Lambda)))}\ \mathsf{CP}
}{
\cfrac{F(\Delta), F(\Gamma) \vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg F(\vee^*(\Lambda)))}{F(\Delta, \Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta, \Lambda))}\ \text{a) a d) e Lema 4}
}\ \mathsf{Corte}
$$

3. *Caso $L\neg$.*

Seja $\mathcal{D}_1$ a derivação do sequente $\Gamma \vdash \Theta$ em GQM e suponhamos $P(\mathcal{D}_1)$. Seja $\mathcal{D}$ a derivação em GQM, obtida a partir de $\mathcal{D}_1$, por aplicação da Regra $L\neg$, isto é:

$$
\mathcal{D} = \qquad \cfrac{\overset{\mathcal{D}_1}{\Gamma \vdash \Theta}}{\neg\Theta, \Gamma \vdash}\ \mathsf{L}\neg
$$

Queremos demonstrar que existe derivação $\mathcal{D}'$ em NQM* do sequente $F(\neg\Theta, \Gamma) \vdash F(\vee^*(\emptyset))$.

Ora, tomando $\Theta = \theta_1, \ldots, \theta_n$, temos que:

a) $F(\neg\Theta, \Gamma) = \neg F(\theta_1), \ldots, \neg F(\theta_n), F(\Gamma)$;

b) Pela definição das funções F e $\vee^*$, temos que $F(\vee^*(\emptyset)) = \alpha \wedge \neg\alpha$.

c) Por $P(\mathcal{D}_1)$, existe derivação $\mathcal{D}_1'$ do sequente $F(\Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta))$ em NQM*;

d) Pela definição das funções F e $\vee^*$, temos que $F(\vee^*(\Theta)) \dashv\vdash \neg(\neg F(\theta_1) \wedge \cdots \wedge \neg F(\theta_n))$, pelo que $\mathcal{D}_1'$ é derivação do sequente $F(\Gamma) \vdash \neg(\neg F(\theta_1) \wedge \cdots \wedge \neg F(\theta_n))$.

Basta então tomar a seguinte derivação em NQM*:

$$
\cfrac{
\cfrac{
\cfrac{
\begin{matrix}\mathcal{D}_L \\ \vdots \\ \ldots \vdash \ldots\end{matrix}
\qquad
\begin{matrix}\mathcal{D}_R \\ \vdots \\ \ldots \vdash \ldots\end{matrix}
}{\neg F(\theta_1), \ldots, \neg F(\theta_n), F(\Gamma) \vdash (\neg F(\theta_1) \wedge \cdots \wedge \neg F(\theta_n)) \wedge \neg(\neg F(\theta_1) \wedge \cdots \wedge \neg F(\theta_n))}\ \mathsf{I}\wedge
}{\neg F(\theta_1), \ldots, \neg F(\theta_n), F(\Gamma) \vdash \alpha \wedge \neg\alpha}\ \mathsf{DS'}
}{F(\neg\Theta, \Gamma) \vdash F(\vee^*(\emptyset))}\ \text{a), b)}
$$

onde $\mathcal{D}_L$ é a derivação:

$$\dfrac{\neg F(\theta_1),\ldots,\neg F(\theta_n),F(\Gamma)\vdash\neg F(\theta_1)\qquad \begin{array}{c}\neg F(\theta_1),\ldots,\neg F(\theta_n),F(\Gamma)\vdash\neg F(\theta_n)\\ \vdots\ \text{I}\wedge\text{ sucessivos}\\ \neg F(\theta_1),\ldots,\neg F(\theta_n),F(\Gamma)\vdash\cdots\wedge\neg F(\theta_n)\end{array}}{\neg F(\theta_1),\ldots,\neg F(\theta_n),F(\Gamma)\vdash\neg F(\theta_1)\wedge\cdots\wedge\neg F(\theta_n)}\ \text{I}\wedge$$

e $\mathcal{D}_R$ é a derivação:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1'\\ F(\Gamma)\vdash\neg(\neg F(\theta_1)\wedge\cdots\wedge\neg F(\theta_n))\end{array}}{\neg F(\theta_1),\ldots,\neg F(\theta_n),F(\Gamma)\vdash\neg(\neg F(\theta_1)\wedge\cdots\wedge\neg F(\theta_n))}\ \text{W}$$

em que $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução.

4. *Caso $R\neg$.*

A derivação, em NQM*, equivalente à derivação obtida em GQM a partir da derivação $\mathcal{D}_1$ do sequente $\Gamma\vdash\Theta$, em que $\Gamma=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}$, por aplicação da regra $R\neg$, é a seguinte:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_L\\ \vdots\\ \ldots\vdash\ldots\end{array}\qquad\begin{array}{c}\mathcal{D}_R\\ \vdots\\ \ldots\vdash\ldots\end{array}}{\vdash\neg(\neg F(\vee^*(\Theta))\wedge\neg\neg(\neg\neg F(\gamma_1)\wedge\cdots\wedge\neg\neg F(\gamma_n)))}\ \text{Absurdo}}{\vdash F(\vee^*(\Theta,\neg\Gamma))}\ *$$

onde $\mathcal{D}_L$ é uma derivação do sequente $\neg F(\vee^*(\Theta))\wedge\neg\neg(\neg\neg F(\gamma_1)\wedge\cdots\wedge\neg\neg F(\gamma_n))\vdash F(\gamma_1)\wedge\cdots\wedge F(\gamma_n)$ fácil de obter e onde $\mathcal{D}_R$ é a derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\neg F(\vee^*(\Theta))\wedge\neg\neg(\neg\neg F(\gamma_1)\wedge\cdots\wedge\neg\neg F(\gamma_n))\vdash\neg F(\vee^*(\Theta))\wedge\neg\neg(\neg\neg F(\gamma_1)\wedge\cdots\wedge\neg\neg F(\gamma_n))}{\neg F(\vee^*(\Theta))\wedge\neg\neg(\neg\neg F(\gamma_1)\wedge\cdots\wedge\neg\neg F(\gamma_n))\vdash\neg F(\vee^*(\Theta))}\ \text{E}_1'\wedge\qquad\begin{array}{c}\mathcal{D}_R'\\ \vdots\\ \ldots\vdash\ldots\end{array}}{\neg F(\vee^*(\Theta))\wedge\neg\neg(\neg\neg F(\gamma_1)\wedge\cdots\wedge\neg\neg F(\gamma_n))\vdash\neg(F(\gamma_1)\wedge\cdots\wedge F(\gamma_n))}\ \text{Corte}$$

e, por sua vez, $\mathcal{D}_R'$ é a derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{F(\gamma_1)\wedge\cdots\wedge F(\gamma_n)\vdash F(\gamma_1)\wedge\cdots\wedge F(\gamma_n)}{F(\gamma_1)\wedge\cdots\wedge F(\gamma_n)\vdash F(\gamma_1)}\ \text{E}_1'\wedge\qquad\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1'\\ F(\gamma_1),\ldots,F(\gamma_{n-1}),F(\gamma_n)\vdash F(\vee^*(\Theta))\end{array}}{F(\gamma_1)\wedge\cdots\wedge F(\gamma_n)\vdash F(\vee^*(\Theta))}\ \text{LI}\wedge}{F(\gamma_1)\wedge\cdots\wedge F(\gamma_n)\vdash F(\vee^*(\Theta))}\ \text{Corte}}{\neg F(\vee^*(\Theta))\vdash\neg(F(\gamma_1)\wedge\cdots\wedge F(\gamma_n))}\ \text{CP}$$

em que $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução.

O passo de inferência $*$ segue de $F(\vee^*(\Theta, \neg\Gamma)) \dashv\vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(\neg\neg F(\gamma_1) \wedge \cdots \wedge \neg\neg F(\gamma_n)))$ e do Lema 4.

5. *Caso $L\neg\neg$.*

   A derivação, em NQM*, equivalente à derivação obtida em GQM a partir da derivação $\mathcal{D}_1$ do sequente $\varphi, \Gamma \vdash \Theta$, por aplicação da regra $L\neg\neg$, é a seguinte:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg F(\varphi) \vdash \neg\neg F(\varphi)}{\neg\neg F(\varphi) \vdash F(\varphi)}\,\mathsf{E}\neg\neg \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_1'\\ F(\varphi), F(\Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta))\end{array}}{\neg\neg F(\varphi), F(\Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta))}\,\mathsf{Corte}$$

   em que $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução.

6. *Caso $R\neg\neg$.*

   A derivação, em NQM*, equivalente à derivação obtida em GQM a partir da derivação $\mathcal{D}_1$ do sequente $\Gamma \vdash \Theta, \varphi$, por aplicação da regra $R\neg\neg$, é a seguinte:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1'\\ F(\Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta, \varphi))\end{array}}{F(\Gamma) \vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg F(\varphi))}\,*^2 \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_R\\ \vdots\\ \ldots \vdash \ldots\end{array}}{\neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg F(\varphi)) \vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg\neg F(\varphi))}\,\mathsf{CP}}{F(\Gamma) \vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg\neg F(\varphi))}\,\mathsf{Corte}}{F(\Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta, \neg\neg\varphi))}\,*^1$$

   onde $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução e $\mathcal{D}_R$ é a derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg\neg F(\varphi) \vdash \neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg\neg F(\varphi)}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg\neg F(\varphi) \vdash \neg F(\vee^*(\Theta))}\,\mathsf{E}_1'\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg\neg F(\varphi) \vdash \neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg\neg F(\varphi)}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg\neg F(\varphi) \vdash \neg\neg\neg F(\varphi)}\,\mathsf{E}_2'\wedge}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg\neg F(\varphi) \vdash \neg F(\varphi)}\,\mathsf{E}\neg\neg}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg\neg F(\varphi) \vdash \neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg F(\varphi)}\,\mathsf{I}\wedge$$

   e os passos de inferência $*^1$ e $*^2$ seguem de $F(\vee^*(\Theta, \neg\neg\varphi)) \dashv\vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg\neg F(\varphi))$ e $F(\vee^*(\Theta, \varphi)) \dashv\vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg F(\varphi))$, respetivamente, e do Lema 4.

7. *Caso $L_i\wedge$.*

   A derivação, em NQM*, equivalente à derivação obtida em GQM a partir da derivação $\mathcal{D}_1$ do sequente $\varphi_i, \Gamma \vdash \Theta$, por aplicação da regra $L_i\wedge$, é a seguinte:

$$\dfrac{\dfrac{F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2) \vdash F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)}{F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2) \vdash F(\varphi_i)}\,\mathsf{E}_i\wedge \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_1'\\ F(\varphi_i), F(\Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta))\end{array}}{F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2), F(\Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta))}\,\mathsf{Corte}$$

em que $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução.

8. *Caso* $R\wedge$.

   A derivação, em NQM*, equivalente à derivação obtida em GQM a partir das derivações $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ dos sequentes $\Gamma \vdash \varphi_1$ e $\Gamma \vdash \varphi_2$, por aplicação da regra $R\wedge$, é a seguinte:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1'\\ F(\Gamma) \vdash F(\varphi_1)\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2'\\ F(\Gamma) \vdash F(\varphi_2)\end{array}}{F(\Gamma) \vdash F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)}\ \mathsf{I}\wedge$$

   em que $\mathcal{D}_1'$ e $\mathcal{D}_2'$ são dadas por hipótese de indução.

9. *Caso* $L\vee$.

   A derivação, em NQM*, equivalente à derivação obtida em GQM a partir das derivações $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ dos sequentes $\varphi_1 \vdash \Theta$ e $\varphi_2 \vdash \Theta$, por aplicação da regra $L\vee$, é a seguinte:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1'\\ F(\varphi_1) \vdash F(\vee^*(\Theta))\end{array}}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \vdash \neg F(\varphi_1)}\ \mathsf{CP} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2'\\ F(\varphi_2) \vdash F(\vee^*(\Theta))\end{array}}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \vdash \neg F(\varphi_2)}\ \mathsf{CP}}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \vdash \neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)}\ \mathsf{I}\wedge}{\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)) \vdash \neg\neg F(\vee^*(\Theta))}\ \mathsf{CP}}{\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)) \vdash F(\vee^*(\Theta))}\ \mathsf{E}\neg\neg$$

   em que $\mathcal{D}_1'$ e $\mathcal{D}_2'$ são dadas por hipótese de indução.

10. *Caso* $R_i\vee$.

    A derivação, em NQM*, equivalente à derivação obtida em GQM a partir da derivação $\mathcal{D}_1$ do sequente $\Gamma \vdash \Theta, \varphi_i$, por aplicação da regra $R_i\wedge$, é a seguinte:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1'\\ F(\Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta, \varphi_i))\end{array}}{F(\Gamma) \vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg F(\varphi_i))}\ *^2 \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_R\\ \vdots\\ \ldots \vdash \ldots\end{array}}{F(\Gamma) \vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)))}\ \mathsf{Corte}}{F(\Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta, \varphi_1 \vee \varphi_2))}\ *^1$$

    onde $\mathcal{D}_1'$ é dada por hipótese de indução e $\mathcal{D}_R$ é a derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)) \vdash \neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2))}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)) \vdash \neg F(\vee^*(\Theta))}\ \mathsf{E}_1'\wedge \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_R'\\ \vdots\\ \ldots \vdash \ldots\end{array}}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)) \vdash \neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg F(\varphi_i)}\ \mathsf{I}\wedge}{\neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg F(\varphi_i)) \vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)))}\ \mathsf{CP}$$

e, por sua vez, $\mathcal{D}'_R$ é a derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)) \vdash \neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2))}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)) \vdash \neg\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2))}\,\mathsf{E}'_2\wedge}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)) \vdash \neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)}\,\mathsf{E}\neg\neg}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)) \vdash \neg F(\varphi_i)}\,\mathsf{E}_i\wedge$$

Os passos de inferência $*^1$ e $*^2$ seguem de $F(\vee^*(\Theta, \varphi_1 \vee \varphi_2)) \dashv\vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)))$ e $F(\vee^*(\Theta, \varphi_i)) \dashv\vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg F(\varphi_i))$, respetivamente, e do Lema 4.

11. *Caso $L_i\neg\vee$.*

    A derivação, em NQM*, equivalente à derivação obtida em GQM a partir da derivação $\mathcal{D}_1$ do sequente $\neg\varphi_i, \Gamma \vdash \Theta$, por aplicação da regra $L_i\neg\vee$, é a seguinte:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)) \vdash \neg\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2))}{\neg\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)) \vdash \neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)}\,\mathsf{E}\neg\neg}{\neg\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)) \vdash \neg F(\varphi_i)}\,\mathsf{E}_i\wedge \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}'_1 \\ \neg F(\varphi_i), F(\Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta))\end{matrix}}{\neg\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)), F(\Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta))}\,\mathsf{Corte}$$

    em que $\mathcal{D}'_1$ é dada por hipótese de indução.

12. *Caso $R\neg\vee$.*

    A derivação, em NQM*, equivalente à derivação obtida em GQM a partir das derivações $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ dos sequentes $\Gamma \vdash \neg\varphi_1$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi_2$, por aplicação da regra $R\neg\vee$, é a seguinte:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}'_1 \\ F(\Gamma) \vdash \neg F(\varphi_1)\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}'_2 \\ F(\Gamma) \vdash \neg F(\varphi_2)\end{matrix}}{F(\Gamma) \vdash \neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)}\,\mathsf{I}\wedge}{F(\Gamma) \vdash \neg\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2))}\,\mathsf{I}\neg\neg$$

    em que $\mathcal{D}'_1$ e $\mathcal{D}'_2$ são dadas por hipótese de indução.

13. *Caso $L\neg\wedge$.*

    A derivação, em NQM*, equivalente à derivação obtida em GQM a partir das derivações $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ dos sequentes $\neg\varphi_1 \vdash \Theta$ e $\neg\varphi_2 \vdash \Theta$, por aplicação da regra $L\neg\wedge$, é a seguinte:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}'_1 \\ \neg F(\varphi_1) \vdash F(\vee^*(\Theta))\end{matrix}}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \vdash \neg\neg F(\varphi_1)}\,\mathsf{CP}}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \vdash F(\varphi_1)}\,\mathsf{E}\neg\neg \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}'_2 \\ \neg F(\varphi_2) \vdash F(\vee^*(\Theta))\end{matrix}}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \vdash \neg\neg F(\varphi_2)}\,\mathsf{CP}}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \vdash F(\varphi_2)}\,\mathsf{E}\neg\neg}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \vdash F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)}\,\mathsf{I}\wedge}{\neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)) \vdash \neg\neg F(\vee^*(\Theta))}\,\mathsf{CP}}{\neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)) \vdash F(\vee^*(\Theta))}\,\mathsf{E}\neg\neg$$

em que $\mathcal{D}_1'$ e $\mathcal{D}_2'$ são dadas por hipótese de indução.

14. *Caso* $R_i\neg\wedge$.

    A derivação, em NQM*, equivalente à derivação obtida em GQM a partir da derivação $\mathcal{D}_1$ do sequente $\Gamma \vdash \Theta, \neg\varphi_i$, por aplicação da regra $R_i\neg\wedge$, é a seguinte:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1'\\ F(\Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta,\neg\varphi_i))\end{matrix}}{F(\Gamma) \vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg F(\varphi_i))}\,*^2 \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_R\\ \vdots\\ \ldots \vdash \ldots\end{matrix}}{\neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg F(\varphi_i)) \vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)))}\,\text{CP}}{F(\Gamma) \vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)))}\,\text{Corte}}{F(\Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta,\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)))}\,*^1
$$

onde $\mathcal{D}_1$ é dada por hipótese de indução e $\mathcal{D}_R$ é a derivação:

$$
\dfrac{\dfrac{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)) \vdash \neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2))}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)) \vdash \neg F(\vee^*(\Theta))}\,\text{E}_1'\wedge \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_R'\\ \vdots\\ \ldots \vdash \ldots\end{matrix}}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)) \vdash \neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg F(\varphi_i)}\,\text{I}\wedge
$$

e, por sua vez, $\mathcal{D}_R'$ é a derivação:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)) \vdash \neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2))}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)) \vdash \neg\neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2))}\,\text{E}_2'\wedge}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)) \vdash F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)}\,\text{E}\neg\neg}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)) \vdash F(\varphi_i)}\,\text{E}_i\wedge}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)) \vdash \neg\neg F(\varphi_i)}\,\text{I}\neg\neg
$$

Os passos de inferência $*^1$ e $*^2$ seguem de $F(\vee^*(\Theta,\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2))) \dashv\vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)))$ e $F(\vee^*(\Theta,\neg\varphi_i)) \dashv\vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg\neg F(\varphi_i))$, respetivamente, e do Lema 4.

15. *Caso* $L \vee (\neg)$.

    A derivação, em NQM*, equivalente à derivação obtida em GQM a partir das derivações $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ dos sequentes $\Gamma \vdash \neg\varphi_1$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi_2$, por aplicação da regra $L \vee (\neg)$, é a seguinte:

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_R\\ \vdots\\ \ldots \vdash \ldots\end{matrix} \qquad \neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)), F(\Gamma) \vdash \neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2))}{\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)), F(\Gamma) \vdash (\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)) \wedge \neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2))}\,\text{I}\wedge}{\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)), F(\Gamma) \vdash \alpha \wedge \neg\alpha}\,\text{DS}'
$$

onde $\mathcal{D}_R$ é a derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1' & \mathcal{D}_2' \\ F(\Gamma) \vdash \neg F(\varphi_1) & F(\Gamma) \vdash \neg F(\varphi_2)\end{array}}{F(\Gamma) \vdash \neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)}\ \mathrm{I}\wedge}{\neg(\neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)), F(\Gamma) \vdash \neg F(\varphi_1) \wedge \neg F(\varphi_2)}\ \mathrm{W}$$

em que $\mathcal{D}_1'$ e $\mathcal{D}_2'$ são dadas por hipótese de indução.

16. *Caso* $R \wedge (\neg)$.

    A derivação, em NQM*, equivalente à derivação obtida em GQM a partir das derivações $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ dos sequentes $\neg\varphi_1 \vdash \Theta$ e $\neg\varphi_2 \vdash \Theta$, por aplicação da regra $R \wedge (\neg)$, é a seguinte:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_L \\ \vdots \\ \ldots \vdash \ldots\end{array} \qquad \dfrac{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)) \vdash \neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2))}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)) \vdash \neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2))}\ \mathrm{E}_2'\wedge}{\vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)))}\ \text{Absurdo}}{\vdash F(\vee^*(\Theta, \varphi_1 \wedge \varphi_2))}\ *$$

    onde $\mathcal{D}_L$ é a derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1' \\ \neg F(\varphi_1) \vdash F(\vee^*(\Theta))\end{array}}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \vdash \neg\neg F(\varphi_1)}\ \mathrm{CP}}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \vdash F(\varphi_1)}\ \mathrm{E}\neg\neg & \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2' \\ \neg F(\varphi_2) \vdash F(\vee^*(\Theta))\end{array}}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \vdash \neg\neg F(\varphi_2)}\ \mathrm{CP}}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \vdash F(\varphi_2)}\ \mathrm{E}\neg\neg\end{array}}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \vdash F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)}\ \mathrm{I}\wedge}{\neg F(\vee^*(\Theta)), \neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)) \vdash F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)}\ \mathrm{W}}{\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)) \vdash F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)}\ \mathrm{LI}\wedge$$

    em que $\mathcal{D}_1'$ e $\mathcal{D}_2'$ são dadas por hipótese de indução.

    O passo de inferência $*$ segue de $F(\vee^*(\Theta, \varphi_1 \wedge \varphi_2)) \dashv\vdash \neg(\neg F(\vee^*(\Theta)) \wedge \neg(F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2)))$ e do Lema 4.

□

Como os sistemas NQM e NQM* são equivalentes, fica então demonstrado que: se $\Gamma \vdash \Theta$ é derivável em GQM, então $F(\Gamma) \vdash F(\vee^*(\Theta))$ é derivável em NQM.

Assim, pelas proposições 17 e 18 fica demonstrada a equivalência entre os sistemas dedutivos NQM e GQM. Analogamente ao que acontece na Lógica Clássica, a tradução das derivações da Dedução Natural (NQM) em Cálculo de Sequentes (GQM) segue o seguinte padrão:

- As regras de introdução em NQM têm correspondência direta com as regras de introdução à direita em GQM;

- As regras de eliminação em NQM são uma conjugação entre uma regra de introdução à esquerda, seguida da aplicação de uma regra do corte, em Cálculo de GQM;
- A regra DS e a regra Absurdo em NQM correspondem à aplicação, em GQM, de várias regras, seguidas de um Corte-1;
- A regra CP em NQM é mapeada diretamente para a regra CP em GQM;
- A regra do Corte em NQM corresponde à regra do Corte-2 em GQM.

Como o Cálculo de Sequentes (GQM) usufrui da propriedade de eliminação do corte [10], concluímos que a correspondência entre uma derivação em NQM e uma derivação em GQM não é única, porque qualquer derivação que possui uma prova em GQM que utiliza a Regra do Corte, também possui uma prova que não a utiliza.

Por outro lado, quando analisamos a tradução inversa das derivações do Cálculo de Sequentes (GQM) em Dedução Natural (NQM), vemos que não existe um padrão, já que regras de introdução à esquerda e à direita são mapeadas, por vezes em simultâneo, para regras de eliminação e introdução. Isto deve-se facto de o sistema NQM, mesmo depois de convertido na variante NQM*, continuar a possuir regras pouco comuns em sistemas de dedução natural, como a regra CP e a regra do Corte, que, nos sistemas de dedução natural usuais, corresponde a uma substituição implícita de hipóteses não canceladas pelas suas derivações.

Capítulo 5

Conclusões

Nesta dissertação, abordamos os sistemas dedutivos de Dedução Natural e Cálculo de Sequentes para a Lógica Quântica Minimal e provamos a equivalência entre os sistemas GQM e NQM, através da tradução das derivações de cada um dos sistemas em derivações do outro sistema. Apresentamos ainda uma revisão das caraterizações semântica e dedutiva da LQM e, através das provas dos seus Teoremas de Correção e Completude, concluímos que as duas abordagens são equivalentes.

Na prova de equivalência entre os sistemas dedutivos, verificamos que, no sentido NQM => GQM, à semelhança do que acontece na Lógica Clássica, existe um padrão: as regras de introdução (respetivamente, eliminação) do primeiro são mapeadas diretamente em regras de introdução à direita (respetivamente, introdução à esquerda, seguida de um Corte-1) do segundo; o mapeamento das regras DS e Absurdo de NQM termina com um Corte-1 em GQM e a regra do Corte em NQM tem uma correspondência direta com a regra do Corte-2 em GQM. Porém, no sentido GQM => NQM, não existem padrões de tradução como na Lógica Clássica ou na tradução inversa, o que se deve ao facto de NQM não ser um sistema de dedução natural usual, já que possui regras como a contraposição (CP) e o Corte.

Por outro lado, o facto de o sistema NQM (respetivamente, NC, na LC) restringir o consequente dos seus sequentes (respetivamente, a conclusão das derivações, na LC) a apenas uma fórmula obriga a uma adaptação dos sequentes originais no processo de tradução: em LC, as conclusões adicionais são transformadas em hipóteses negadas e, em LQM, as várias conclusões são transformadas numa única fórmula que corresponde à sua disjunção. Este processo leva naturalmente a que cada derivação dos cálculos de sequentes corresponda a mais do que uma derivação nas deduções naturais.

No que concerne à decibilidade da Lógica Quântica Minimal, o sistema GQM dá-nos um procedimento que torna possível decidir a lógica, mas o sistema NQM não, visto que possui a regra do Corte. Fica então em aberto a questão de se é possível a eliminação do Corte em NQM, como foi já provado por Nishimura [10] para GQM. A prova da equivalência entre GQM e NQM* poderia dar uma prova de eliminação do Corte em NQM*: toma-se $\mathcal{D} \in$ NQM* , traduz-se em GQM e obtém-se $\mathcal{D}_1 \in$ (GQM + Corte); pela admissibilidade do corte em GQM, obtém-se $\mathcal{D}_2$ em GQM. Porém, no passo final, a tradução de volta a NMQ* produz $\mathcal{D}_3 \in$ NMQ*, mas $\mathcal{D}_3$ tipicamente contém Corte novamente, pelo que se falha em conseguir essa prova.

A nossa conjetura é a de que o Corte não pode ser eliminado do sistema NQM*, que, a ser verdadeira, implica então que NQM* não serve para ser base de um algoritmo de decisão para a Lógica Quântica Minimal.

Bibliografia

[1] G. Birkhoff e J. von Neumann. "The Logic of Quantum Mechanics". Em: *Annals of Mathematics* (1982), pp. 823–843.

[2] M. L. D. Chiara e R. Giuntini. "Quantum Logics". Em: *Handbook of Philosophical Logic, Vol. 6* (2002), pp. 129–218.

[3] N. Cutland e P. Gibbins. "A regular sequent calculus for quantum logic in which $\wedge$ and $\vee$ are dual". Em: *Logique Et Analyse* (1982), pp. 221–248.

[4] B. Davey e H. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, 2002.

[5] G. Gentzen. "Investigations into Logical Deduction". Em: *American Philosophical Quarterly* 1 (out. de 1964). [Tradução de: G. Gentzen, "Untersuchungen über das logische Schliessen". 1934/35], pp. 288–306.

[6] J. Girard, Y. Lafont e P. Taylor. *Proofs and Types*. Cambridge University Press, 1989.

[7] R. Goldblatt. "Semantic Analysis of Orthologic". Em: *Journal of Philosophical Logic* 3(1-2) (1974), pp. 19–35.

[8] O. Laurent. "Focusing in Orthologic". Em: *Logical Methods in Computer Science* 13(3:6) (2017), pp. 1–25.

[9] S. Negri e J. von Plato. *Structural Proof Theory*. Cambridge University Press, 2001.

[10] H. Nishimura. "Gentzen Methods in Quantum Logic". Em: *Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures: Quantum Logic* (2009), pp. 227–260.

[11] M. H. Sørensen e P. Urzyczyn. *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism*. Elsevier, 2006.

[12] S. Tamura. "A Gentzen formulation without the cut rule for ortholattices". Em: *Kobe Journal of Mathematics* 5 (1988), pp. 133–150.

[13] A. Troelstra e H. Schwichtenberg. *Basic Proof Theory*. Cambridge University Press, 2000.