Universidade do Minho
Instituto de Educação

Eva Daniela Barrocas Nunes

A resolução de problemas na aprendizagem de tópicos de Funções de alunos do 10º ano com recurso à calculadora gráfica

janeiro de 2022

Eva Daniela Barrocas Nunes **A resolução de problemas na aprendizagem de tópicos de Funções de alunos do 10º ano com recurso à calculadora gráfica**

UMinho | 2022

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Eva Daniela Barrocas Nunes

A resolução de problemas na aprendizagem de tópicos de Funções de alunos do 10º ano com recurso à calculadora gráfica

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho efetuado sob a orientação do
Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

janeiro de 2022

AGRADECIMENTOS

Nesta fase final do mestrado, que se encerra com este relatório de estágio, quero agradecer a todos aqueles que me ajudaram a alcançar este grande objetivo.

Primeiramente, quero agradecer veementemente ao meu supervisor, o Professor Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu, que me acompanhou em todo este processo. Sem a sua ajuda e críticas construtivas em todas as fases, não seria possível cumprir esta última etapa tão importante. O seu conhecimento, apoio e dedicação, guiaram-me e motivaram-me em plena pandemia, o que foi crucial. Representou muito mais do que "uma gota no (meu) oceano"!

Expresso o meu profundo agradecimento à orientadora cooperante deste estágio, a Professora Ana Paula Seixas Mourão, pois sem o seu contributo também não seria possível a realização deste projeto. O acolhimento que proporcionou e a sua disponibilidade, assim como, a liberdade para trabalhar com os alunos das suas turmas, depositando confiança em mim, foram importantes para o meu crescimento pessoal e profissional.

Agradeço também à direção da escola por ter possibilitado a concretização deste projeto, ao pessoal docente e não docente, pelo seu acolhimento, e a todos os alunos, pelos bons momentos e boas memórias e pelo seu envolvimento e empenho, não colocando qualquer entrave ao longo do estágio.

De seguida, quero agradecer à minha família, especialmente aos meus pais, por me terem facultado esta oportunidade. Não apenas em termos financeiros, mas também por me fazerem acreditar que era possível fazer simultaneamente dois mestrados de diferentes áreas, pois sabiam que era aquilo que eu ansiava e este o caminho que quero seguir futuramente. O incentivo de todos os meus familiares foi algo reconfortante neste desafio!

Agradeço aos meus colegas de mestrado, especialmente às minhas colegas de estágio, onde o carinho, partilha e motivação estiveram presentes, além de me ajudarem, com muita paciência e amizade, a ultrapassar os obstáculos que foram surgindo. Também quero agradecer a todos os meus amigos, os que sempre acreditaram em mim e que me ouviram nas horas mais complicadas nestes últimos anos.

De uma maneira geral, quero agradecer à UM por todo o percurso académico de muitos anos, e a toda a gente que esteve presente nesta caminhada e que sempre acreditou que este desfecho seria possível!

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA APRENDIZAGEM DE TÓPICOS DE FUNÇÕES DE ALUNOS DO 10º ANO COM RECURSO À CALCULADORA GRÁFICA

RESUMO

Este estudo pretende averiguar o contributo da resolução de problemas na aprendizagem de funções com recurso à calculadora gráfica de alunos do 10.º ano de escolaridade. Para concretizar este objetivo, foram formuladas as seguintes questões de investigação: (1) Que estratégias recorrem os alunos na resolução de problemas na aprendizagem de funções do 10.º ano? Qual o papel da calculadora gráfica nessa aprendizagem? (2) Que dificuldades manifestam os alunos do 10.º ano na aprendizagem de funções? E na resolução de problemas? (3) Que perceções têm os alunos sobre a resolução de problemas na aprendizagem de funções do 10.º ano com recurso à calculadora gráfica? De forma a responder a estas questões, recorreu-se aos seguintes métodos de recolha de dados: questionário (inicial e final); produções dos alunos; e gravações áudio e vídeo de aulas. A intervenção pedagógica foi realizada numa turma do 10.º ano de escolaridade do curso de Ciências e Tecnologias de uma escola secundária situada no concelho de Braga. Para dinamizar as atividades realizadas, integraram-se nos planos de aula problemas adequados ao objetivo delineado e a calculadora gráfica, partindo do pressuposto de se tratar de um material didático com potencialidades na exploração de tais problemas. Como o foco das aulas incidiu na atividade do aluno, o formato de ensino adotado foi o ensino exploratório. Os problemas incidiram no estudo da função definida por ramos, da função módulo e da função quadrática.

Os resultados obtidos permitem concluir que as estratégias mais utilizadas pelos alunos foram a definição de expressões algébricas e a realização e interpretação de esboços gráficos. Em contrapartida, as estratégias que os alunos menos recorreram foram a procura de um padrão e a comparação de valores. O recurso às informações dadas em linguagem natural foi fulcral, de onde se denota que os alunos não recorreram à construção de esquemas, figuras ou tabelas. Além desta vertente, o estudo também incidiu no modo como os alunos utilizam a calculadora gráfica e com que finalidade. Os alunos utilizaram a calculadora gráfica essencialmente na resolução gráfica e para verificar os resultados obtidos analiticamente. Através da exploração da calculadora gráfica, os alunos determinaram vários aspetos das funções estudadas, como os zeros, os extremos absolutos, a variável dependente e independente de uma função e a interseção de gráficos de funções. Além disto, os alunos exploraram a adaptação da janela de visualização e o catálogo da calculadora gráfica. Os alunos revelaram dificuldades na resolução dos problemas de 'resposta aberta', onde o gráfico esboçado implicava a diversidade de respostas. A passagem da informação gráfica ou diretamente da informação em linguagem natural, para a linguagem algébrica, foi onde os alunos revelaram mais dificuldade. Tanto a edição das expressões algébricas que definem funções por ramos e da função módulo na calculadora gráfica levantaram obstáculos, assim como o descuido nos esboços gráficos e a adaptação com valores incorretos na janela de visualização da calculadora gráfica. Na resolução de um problema, os alunos percorrem essencialmente três etapas: compreensão do problema, escolha de um plano e sua execução. A exploração das diferentes representações de uma função foi preponderante na construção e aprendizagem de um tópico. As perceções dos alunos quanto à resolução de problemas com a calculadora gráfica, refletem o seu contributo na compreensão de tópicos de Funções, referindo que a resolução de problemas desenvolveu o seu raciocínio, e a calculadora gráfica a verificação dos resultados obtidos analiticamente.

Palavras-chave: Alunos do 10.º ano; Aprendizagem; Calculadora gráfica; Funções; Resolução de problemas.

THE PROBLEM SOLVING IN THE LEARNING OF TOPICS OF FUNCTIONS OF STUDENTS OF THE 10TH GRADE USING THE GRAPHIC CALCULATOR

ABSTRACT

This study aims to investigate the contribution of problem solving in learning functions using the graphing calculator by 10th grade students. To achieve this goal, the following research questions were formulated: (1) What strategies do students resort to in problem solving when learning functions in the 10th grade? What is the role of the graphing calculator in this learning process? (2) What difficulties do 10th grade students have in learning functions? And in problem solving? (3) What perceptions do students have about problem solving in learning 10th grade functions using the graphing calculator? In order to answer these questions, the following data collection methods were used: questionnaire (initial and final); student productions; and audio and video recordings of lessons. The pedagogical intervention was carried out in a 10th grade class of a Science and Technology course in a secondary school located in the municipality of Braga. In order to make the activities more dynamic, we integrated into the lesson plans problems appropriate to the outlined goal and the graphing calculator, based on the assumption that it is a didactic material with potential in solving such problems. As the focus of the classes focused on student activity, the teaching format adopted was exploratory teaching. The problems were applied on the study of the branch-defined function, the modulus function and the quadratic function.

The results obtained allow us to conclude that the strategies most used by the students were the definition of algebraic expressions and the realization and interpretation of graphical sketches. In contrast, the strategies that students resorted to the least were searching for a pattern and comparing values. The use of information given in natural language was central, from which we can see that the students did not resort to constructing schemes, figures or tables. In addition to this aspect, the study also focused on how students use the graphing calculator and for what purpose. The students used the graphing calculator essentially in graphical solving and to check the results obtained analytically. Through the use of the graphing calculator, students determined several aspects of the functions studied, such as the zeros, the absolute extremes, the dependent and independent variable of a function and the intersection of function graphs. In addition to this, students explored the adaptation of the display window and the graphing calculator catalogue. Students showed difficulty in solving the 'open-ended response' problems, where the sketched graph implied a diversity of answers. Moving from graphical information, or directly from natural language information, to algebraic language was where students showed the most difficulty. Both editing the algebraic expressions defining branch functions and the modulus function on the graphing calculator raised obstacles, as well as the carelessness in graph sketching and the adaptation with incorrect values in the display window of the graphing calculator. When solving a problem, students essentially go through three steps: understanding the problem, choosing a plan and executing it. Exploring the different representations of a function was predominant in the construction and learning of a topic. The students' perceptions of problem solving with the graphing calculator reflect its contribution to their understanding of function topics, stating that problem solving developed their reasoning, and the graphing calculator the verification of the results obtained analytically.

Keywords: 10th grade students; Learning; Graphing calculator; Functions; Problem solving.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Este capítulo está organizado em três secções. Na primeira secção, apresenta-se o tema, o objetivo e as questões de investigação que orientaram este estudo. Na segunda secção, encontra-se a pertinência do estudo e, por fim, na terceira secção, descreve-se a estrutura deste relatório.

1.1. Tema, objetivo e questões de investigação

O tema desenvolvido na minha intervenção pedagógica incidiu na resolução de problemas na aprendizagem de funções de alunos do 10.º ano de escolaridade, com recurso à calculadora gráfica. A escolha deste tema prende-se com o facto de a resolução de problemas ser um dos objetivos fulcrais do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática e de ser uma atividade que muitos alunos tendem a manifestar dificuldades de realizar. O tema das Funções foi escolhido por gosto pessoal e por ser um tema predominante em todo o programa de Matemática A e que advém desde o 3.º ciclo de estudos. A calculadora gráfica por ser um material pouco usado nas aulas de Matemática e por também não me sentir segura no seu uso, foi escolhida para se aliar ao tema, pois reconheço a sua importância na aprendizagem dos alunos. Este material aliado à resolução de problemas, que também não é muito praticada em sala de aula, tornou-se um desafio para mim, pois é necessário refletir sobre os diversos caminhos seguidos numa resolução, e se a tarefa em questão é considerada um problema ou outro tipo de tarefa.

O raciocínio e a resolução de problemas são descritos como uma das áreas de competência do perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória (Ministério da Educação e Ciência (MEC), 2018). Nas Aprendizagens Essenciais (MEC, 2018), a resolução de problemas é vista como uma atividade transversal no 10.º ano, com grande ênfase no tema das funções. Segundo o NCTM (2017), a resolução de problemas desempenha um papel importante no ensino de matemática dos alunos do ensino básico e do ensino secundário. No entanto, saber como incorporar significativamente a resolução de problemas no currículo de matemática não é necessariamente óbvio para os professores. Nos 'Princípios para a Ação' (NCTM, 2017), de forma a promover o sucesso matemático para todos, uma das práticas de ensino é implementar problemas que promovam o raciocínio e a resolução dos mesmos, como também apoiar a 'luta produtiva' na aprendizagem de matemática. Envolver os alunos em problemas que incentivam o raciocínio, promove uma profunda compreensão dos conceitos matemáticos, pois os alunos tendem a ignorar o processo de raciocínio para evitar essa 'luta'. Uma forma de minimizar esta atitude por parte dos alunos, a resolução de problemas no contexto de sala de aula deve incentivar a discussão sobre diferentes estratégias e sobre diferentes formas de as comunicar.

Posamentier e Krulik (1998) defendem que alguns estudantes têm a perceção que os problemas de matemática só podem ser resolvidos de uma única forma através da aplicação de fórmulas ou de procedimentos, o que faz emergir mais a vertente mecanizada dos factos e procedimentos matemáticos do que os conceptuais. Por essas razões, os autores advogam que "são frequentemente os próprios professores que não estão cientes das variadas estratégias de solução para os problemas que podem ser usadas" (Posamentier & Krulik, 1998, p. ix).

Relativamente ao uso de tecnologia no ensino e na aprendizagem de matemática, o NCTM (2015) defende que os recursos tecnológicos são úteis para aprimorar a maneira como os alunos e professores experimentam, aprendem, comunicam e fazem matemática. A tecnologia deve ser usada deste modo, para apoiar a aprendizagem de todos os alunos sobre conceitos e procedimentos matemáticos, "incluindo aqueles que os alunos eventualmente empregam sem o auxílio da tecnologia" (NCTM, 2015, p. 1).

Quanto às funções, os conhecimentos sobre as mesmas, indispensáveis para a compreensão do mundo em que vivemos, são ampliados com base no estudo analítico, numérico e gráfico, onde se privilegia o trabalho intuitivo com funções que relacionam variáveis da vida corrente, da Geometria, da Física, da Economia e de outras disciplinas (ME, 2001, p. 26). A calculadora gráfica, pela sua portabilidade e relativo baixo custo, é uma das principais ferramentas tecnológicas usadas nas salas de aula de matemática do ensino secundário (Consciência, 2013) e principalmente para o estudo das funções. De acordo com o ME (2001):

> Ao usar a calculadora gráfica ou o computador, os estudantes devem observar que podem ser apresentadas diferentes representações gráficas de um mesmo gráfico, variando as escalas; devem sempre traçar um número apreciável de funções tanto manualmente em papel quadriculado ou papel milimétrico como usando calculadora gráfica ou computador escolhendo o melhor retângulo de visualização; devem ser incentivados a elaborar conjeturas, evitando conclusões apressadas, sendo sistematicamente treinados na análise crítica de todas as suas conclusões. (p. 27)

Tendo em consideração os pressupostos referidos, o presente estudo tem como objetivo averiguar o contributo da resolução de problemas na aprendizagem de funções com recurso à calculadora gráfica de alunos do 10.º ano. Para concretizar este objetivo, pretendo responder às seguintes questões de investigação:

Q1. Que estratégias recorrem os alunos na resolução de problemas na aprendizagem de funções do 10.º ano? Qual o papel da calculadora gráfica nessa aprendizagem?

Q2. Que dificuldades manifestam os alunos do 10.º ano na aprendizagem de funções? E na resolução de problemas?

Q3. Que perceções têm os alunos sobre a resolução de problemas na aprendizagem de funções do 10.º ano com recurso à calculadora gráfica?

1.2. Pertinência do estudo

Os alunos tendem a manifestar dificuldades no estudo da Matemática, nomeadamente no estudo das Funções (Sproesser et al., 2018). Contudo, ser capaz de raciocinar adequadamente com funções é considerado um objetivo central da educação matemática. Este conteúdo caracteriza uma forma específica de pensar em interdependências, relacionamentos ou mudanças (Sproesser et al., 2018). Pode-se ver que as funções assumem interdisciplinaridade, pois segundo Ponte (1990) aplicam-se na economia, na física, nas engenharias, assim como na comunicação e tecnologia.

O conteúdo das Funções encontra-se ligado ao Raciocínio e Resolução de Problemas. Estas áreas são referidas como uma das dez áreas de competências do "Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória" (MEC, 2017). Neste documento, no que diz respeito à resolução de problemas, é referido que: "As competências na área de Resolução de Problemas dizem respeito aos processos de encontrar respostas para uma nova situação, mobilizando o raciocínio com vista à tomada de decisão, à construção e uso de estratégias e à eventual formulação de novas questões" (p. 23). Quanto às implicações práticas pedagógicas e didáticas, com vista ao desenvolvimento do perfil dos alunos, é mencionada mais uma vez a importância da resolução de problemas: "promover de modo sistemático e intencional, na sala de aula e fora dela, atividades que permitam ao aluno fazer escolhas, confrontar pontos de vista, resolver problemas e tomar decisões com base em valores" (p. 31).

A Matemática não deve ser vista como um aglomerado de exercícios, dado que o aluno não obterá a persistência e flexibilidade necessárias quando for deparado com um problema, conforme defende Duarte (2000). Os problemas foram a base do desenvolvimento das teorias da Matemática e são importantes para desafiar a curiosidade e o desenvolvimento intelectual do aluno em sala de aula (Duarte, 2000). Enquanto um exercício se limita à prática de utilização de regras previamente conhecidas, um problema, de acordo com este autor, "é uma tarefa que difere de um exercício essencialmente pelo facto de o aluno não dispor previamente de um algoritmo ou estratégia que conduzirá a uma solução" (p. 98). Os alunos como possuem pensamento crítico, a resolução de problemas pode ser usada como ponto de partida para discussões matemáticas e incentivar os alunos a interagirem entre eles falando sobre Matemática. Segundo este autor, um problema ajuda-nos a entender o mundo e a perceber padrões e regularidades que se podem organizar mentalmente e simbolicamente. De forma a reforçar ainda mais o papel dos problemas e da sua resolução, o autor defende que:

> A resolução de problemas promove o desenvolvimento de determinados comportamentos e atitudes (autoconfiança), que apontam para níveis cognitivos elevados (compreensão, aplicação) e não apenas para o conhecimento de factos e técnicas. Modelar, simbolizar, comunicar, explorar, analisar, generalizar e provar são atividades com sentido matemático proporcionadas pela resolução de problemas. (p.99)

De realçar que Duarte (2000) também constata que, os problemas que possam ser resolvidos por vários caminhos são particularmente importantes, de forma a os alunos não pensarem que apenas existe uma só maneira de resolver qualquer problema. Neste caso, a calculadora gráfica torna-se uma ferramenta determinante na atividade matemática. Segundo o NCTM (2007), a calculadora permite a produção de exemplos próprios, formulação e teste de conjeturas e proporciona imagens visuais das ideias matemáticas, de forma a organizar e analisar os dados de diversas formas.

Rocha (2002) refere que os alunos, quando começam a utilizar uma calculadora gráfica, vêem-na como uma forma automática de realizar um conjunto limitado de procedimentos, tais como determinar valores de uma função ou representá-la graficamente. Com o aumento da confiança, os alunos recorrem a novas utilizações, como ao método de tentativa e erro. Segundo este autor, este método é eficaz "embora tenha limitações, constitui uma forma de os alunos abordarem problemas que de outro modo estariam para além das suas possibilidades" (p. 5). A adequabilidade deste método varia de acordo com a experiência matemática dos alunos. Contudo:

> A partir do momento em que os alunos passam a ter conhecimento de um certo método ou fórmula que permite a resolução de determinado tipo de problema, passam frequentemente a ser proibidos de recorrer a cálculos sistemáticos ou a qualquer outra estratégia para alcançar o resultado pretendido. Passa-lhes a ser exigido que recorram ao "método correto". Nestas circunstâncias, não é, pois, de estranhar que os alunos interiorizem a ideia de que existe apenas uma forma correta de resolver cada problema e que fiquem hesitantes, sem saber como prosseguir, ao depararem-se com um problema para o qual não conseguem recordar o "método correto". (p. 5)

Isto afeta o modo como a calculadora é utilizada. É denotado que para a maioria dos alunos a calculadora é vista, por exemplo, como um instrumento útil utilizado para fazer um gráfico, porém raramente utilizado para confirmar resultados. Isto levar a verificar que os alunos têm dificuldade a usar a calculadora. De acordo com Rocha (2002), estas têm origem na "falta de compreensão da representação simbólica e gráfica das funções, bem como da relação entre estas, e a forma como a informação deve ser introduzida ou a forma como é apresentada pela calculadora" (p. 6). Exemplos como, a interpretação da translação ocorrida no gráfico, falta da utilização adequada dos parênteses na introdução de expressões, falta da compreensão da relação existente entre a forma do gráfico e a janela de visualização utilizada ou efeitos da escala utilizada, são derivados da falta de compreensão da informação gerada pela calculadora.

Logo, pode-se verificar que é necessário colmatar estas dificuldades, implementando o uso da calculadora gráfica na sala de aula, estimulando o raciocínio dos alunos. O papel da resolução de problemas é amplamente reconhecido e objeto deste estudo, pois assim os alunos irão saber aplicar os seus conhecimentos e estabelecer estratégias para chegarem à solução pretendida, onde a tecnologia poderá ser um forte auxílio.

1.3. Estrutura do relatório

O presente relatório de estágio está organizado em quatro capítulos. O primeiro diz respeito à Introdução, e onde consta o tema, objetivo e questões de investigação para este estudo, assim como, a pertinência do mesmo e uma breve apresentação da sua estrutura.

O segundo capítulo designa-se por Enquadramento Contextual e Teórico, e aqui é feita a caracterização da escola e da turma onde foi realizada a prática pedagógica, acompanhada da sustentação teórica necessária para este estudo. As metodologias de ensino e aprendizagem ligadas às estratégias de avaliação utilizadas também se encontram neste capítulo.

No terceiro capítulo, que se denomina Intervenção Pedagógica, refere-se a calendarização de todas as aulas lecionadas e encontram-se as tarefas propostas selecionadas, sendo analisadas algumas respostas dos alunos sobre o tópico lecionado e objeto de estudo para este relatório. Com fim a analisar as perceções dos alunos sobre a resolução de problemas na aprendizagem de funções do 10.º ano com recurso à calculadora gráfica, surge a avaliação do ensino ministrado.

Por fim, o quarto capítulo diz respeito às Conclusões, Limitações e Recomendações, no qual se discutem os resultados obtidos e as respostas às questões de investigação apresentadas. Na segunda parte, são apresentadas algumas recomendações para investigações futuras, seguidas das limitações que emergiram neste estudo e, para finalizar, uma breve reflexão pessoal.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO

Este capítulo encontra-se segmentado em três subcapítulos, onde o primeiro diz respeito ao enquadramento contextual, que descreve o contexto em que foi realizada a intervenção pedagógica, nomeadamente, a caracterização a nível geral da escola e do seu agrupamento e, a nível particular, da turma onde realizei a minha intervenção pedagógica. O segundo subcapítulo diz respeito ao enquadramento teórico, fundamentando as temáticas tratadas. No último, apresentam-se as estratégias de intervenção, que integram as metodologias de ensino adotadas e as estratégias de avaliação da ação.

2.1. Enquadramento Contextual

Neste subcapítulo é descrito o contexto da minha intervenção pedagógica, nomeadamente a caracterização da escola e da turma.

2.1.1. Caracterização da Escola

A minha Intervenção Pedagógica foi realizada na escola sede de um agrupamento de escolas do distrito de Braga. Este agrupamento é constituído por 14 escolas e compreende três zonas contíguas, que engloba o ensino básico, desde o pré-escolar até ao 3.º ciclo, e o ensino secundário. Neste último caso, onde foi realizada a minha intervenção, a escola contém o 3.º ciclo de estudos e disponibiliza quatro cursos científico-humanísticos: ciências e tecnologias; línguas e humanidades; ciências socioeconómicas; e artes visuais. Também disponibiliza quatro cursos profissionais, que correspondem ao nível 4: técnico de programador de informática; técnico de eletrónica, automação e comando; técnico de produção em metalomecânica, programação e maquinação; e, por fim, técnico de desporto. No regime pós-laboral, existem cursos de educação e formação de adultos (EFA), e o ensino recorrente para o curso de ciências e tecnologias e para o curso de línguas e humanidades. Esta escola é uma escola de referência de ensino secundário recorrente.

A par da oferta curricular, a escola também desenvolve uma série de atividades extracurriculares, tais como: as olimpíadas de Física, Química, Matemática, Português, Economia e Biologia; a oficina de Mandarim e a oficina e clube da Matemática; robótica; conferências e palestras; desporto escolar; plano nacional de leitura e de cinema; clube das artes e de leitura; e feiras do livro. É de relevar que todas as salas de aula possuem computador e projetor, sendo que algumas também possuem quadros interativos.

A escola também reúne nos seus espaços todas as condições para o convívio e aprendizagem entre os alunos.

As funções docentes são asseguradas por um quadro estável e experiente constituído por mais de 300 profissionais, em todos os níveis de educação, para mais de 3000 alunos. Este agrupamento segue um modelo educativo, onde tem como missão a "mais escola" e a "melhor escola". No primeiro caso, compromete-se a responder às necessidades de todos os alunos, promovendo a igualdade, inclusão e participação, e, no segundo, a "melhor escola", onde assume uma cultura de exigência e excelência, rigor e superação.

A escola onde realizei a minha intervenção pedagógica ocupa, ano após ano, lugar de destaque nos *rankings* a nível nacional relativamente aos resultados dos seus alunos nos exames nacionais, sendo considerada a melhor escola secundária do concelho de Braga. Esta é uma preocupação da escola, que é refletida no seu Projeto Educativo, que tem como lema 'percursos com futuro'. Aqui pode-se ler: "No ensino secundário, a satisfação pessoal com as classificações e a perceção de justiça na avaliação melhora em relação às escolas do mesmo contexto" (p.15).

Na última avaliação externa, após as obras a que foram sujeitas as instalações da escola, obteve a classificação de "muito bom" em todos os domínios avaliados. Estes domínios estão sujeitos a uma escala de avaliação com o grau de insuficiente, suficiente, bom e muito bom, avaliados pela Inspeção Geral de Educação. Nesta avaliação foram analisados os resultados académicos dos alunos, a prestação do serviço educativo, a organização e gestão escolar, a liderança e a capacidade de autorregulação e melhoria da escola.

2.1.2. Caracterização da Turma

A minha intervenção pedagógica foi realizada numa turma do 10.º ano de escolaridade do curso de Ciências e Tecnologias. A turma é composta por 26 alunos, 19 raparigas e 7 rapazes, sendo que um dos elementos da turma do sexo masculino encontra-se a repetir o 10.º ano pela segunda vez e os restantes nunca tiveram uma retenção. A maioria dos alunos tem nacionalidade portuguesa, sendo que quatro são provenientes do Brasil. As idades dos alunos variam entre os 14 e os 16 anos e a média das mesmas ronda os 15 anos de idade. Nenhum dos alunos apresenta necessidades educativas especiais nem a necessidade de ensino articulado. Houve alterações na constituição da turma desde o início do ano letivo, por motivos de transferência, que englobaram novas saídas e entradas.

Dos 26 alunos da turma, três deles optaram por Mandarim como língua estrangeira, sendo que os restantes preferiram a disciplina de Inglês. Quanto aos meios tecnológicos, 11 revelaram que possuem computador em casa, assim como têm acesso à Internet, sendo que os restantes não possuem computador nem ligação à Internet no seu domicílio. Isto não se revelou no 3.° período, quando estes meios foram cruciais para implementar o meu projeto de intervenção pedagógica. Neste momento, todos os alunos acederam a um computador de sua casa e à ligação Wi-Fi.

No que diz respeito ao desempenho da turma no ano letivo anterior, nenhum aluno terminou o 9.° ano com classificação negativa a Matemática. Todos os alunos da turma têm como objetivo prosseguir estudos no ensino superior.

Relativamente aos pais dos alunos, a sua idade varia entre os 43 e os 59 anos de idade e apenas seis deles possuem formação superior (bacharelato, licenciatura ou mestrado). As mães apresentam idades entre os 39 e 55 anos de idade, possuindo sete delas formação superior (licenciatura ou mestrado). Quanto ao cargo de encarregado de educação, verifica-se que vinte são as mães dos alunos, seis são os pais, e um possui outro grau de parentesco.

Com base no questionário inicial realizado antes de implementar o meu projeto de intervenção pedagógica, foi possível recolher mais dados acerca da turma. Em relação à disciplina favorita, 10 responderam que a Matemática era a predileta. Por outro lado, também 10 alunos responderam que a mesma era a que apresentavam mais dificuldades. Dos temas estudados nesta disciplina, 16 alunos responderam que os Polinómios foi o que mais gostaram. Oito alunos também elegeram as Funções como o tema que mais apreciaram, e alguns referiram o tema da Estatística e da Geometria. Contrariamente, seis elegeram as Funções como o tema que menos apreciaram, apesar de a Geometria (no plano e/ou no espaço) ser o que menos gostaram de trabalhar, contando com 11 respostas. O tema dos Radicais também foi referido como um dos que menos apreciaram estudar. Também houve alunos que não referiram qualquer tema neste caso. Relativamente às questões do trabalho em grupo e do uso da calculadora, a maioria disse já ter trabalhado em grupo nas aulas de matemática e costumar usar a calculadora no estudo desta disciplina. Neste último caso, isto se remete apenas para a realização e confirmação de resultados.

Quanto à importância de estudarem Funções, obtive respostas como a sua aplicabilidade em outras áreas do conhecimento: “Na minha perspetiva, podemos considerar as funções como ferramentas matemáticas que nos permitem descrever e analisar inúmeros problemas das ciências em geral e situações do nosso quotidiano” (A4); “acho que entender funções é importante pois também ajuda em outras disciplinas, a entender gráficos e até os próprios conceitos de declive e ordenada que são necessários por exemplo na física" (A3). Também destacaram este tópico em situações do quotidiano: "Na minha opinião a importância de estudar funções é para facilitar o nosso quotidiano, principalmente de empresas que necessitam ter gráficos para realizarem as escolhas mais corretas para a empresa" (A2). Assim, constata-se que os alunos desta turma dão importância a este tema e indiciam ter uma perceção de se tratar de um tema muito abrangente.

Quanto à calculadora gráfica e à resolução de problemas contribuir para a aprendizagem deste tema, todos os alunos responderam afirmativamente, apesar de poderem ter dificuldades. No caso da calculadora gráfica, associaram-na à formação de gráficos e à determinação dos zeros: "Sim, ajuda-nos a formar os seus gráficos" (A7); "sim, porque com o seu auxílio podemos visualizar a sua representação no gráfico, podemos visualizar os zeros, entre muitas outras coisas" (A9), assim como ao seu auxílio para cálculos rápidos: "Contribui para ser mais rápido a resolução de alguns cálculos, pois quando somos nós a fazê-los demoramos algum tempo e também para ver os gráficos de funções" (A12).

No caso da resolução de problemas, revelaram que são importantes, pois apresentam um grau de dificuldade mais elevado: "A resolução de problemas contribui imenso para a aprendizagem de funções porque acho que é um exercício mais complexo e então testa ainda mais os nossos conhecimentos" (A6), o que ajuda numa melhor aprendizagem: "Com a resolução de problemas nós aprendemos a conseguir interpretar a matéria em diversas situações, o que ajuda na assimilação e aprendizagem da matéria" (A13); "Porque estimula a nossa interpretação tanto de gráficos como de enunciados, o que é essencial" (A19). Por outro lado, disseram que os exercícios também são importantes: "Sim, mas também é necessário fazer exercícios diretos para aprendermos a prática" (A23).

Também foi possível analisar que os alunos pensam que a diversificação de tarefas é importante e que pensam já ter trabalhado todos os tipos de tarefas (50%). Contudo, 42% responderam que apenas trabalharam exercícios e problemas, e 8% trabalharam exercícios, problemas e tarefas de exploração.

Através da observação de aulas, apercebi-me que a turma é agitada e a maioria dos alunos distrai-se com facilidade. Apesar disso, é uma turma ativa nas participações orais e no quadro. Na discussão oral das possíveis resoluções das tarefas propostas, os alunos revelam dificuldades na comunicação matemática. A partilha de ideias com os colegas e o trabalho em grupo não é estimulado, o que faz com que o processo de resolução de qualquer tarefa tenda a ser individual. Estas tarefas são maioritariamente compostas por exercícios, provavelmente porque nos problemas os alunos sentem mais dificuldades devido a não praticarem o suficiente e por envolver um raciocínio mais profundo do que nos exercícios.

Assim, penso que será benéfica a prática da resolução de problemas e toda a sua envolvente na minha intervenção pedagógica. Também a calculadora gráfica não é usada pelos alunos, apesar de assumirem e entenderem a sua importância. Deste modo, este meio será uma nova aprendizagem para os alunos e um auxílio na resolução de problemas, pois como uma aluna disse no questionário inicial, este é um recurso novo e tem de ser introduzido com a explicação de todos os seus passos: "Como esse instrumento é novo para mim ainda não fui capaz de fazer grandes coisas com ela. Acho interessante termos uma aula para aprender como mexer nessa calculadora" (A3).

Para concluir, em relação ao desempenho dos alunos no ano anterior e ao longo do presente ano letivo, os resultados serão demonstrados na tabela seguinte.

Tabela 1 - Desempenho dos alunos no 9.º e 10.º anos de escolaridade.

	9.º ano	10.º ano		
	Final (n=26)	1.º Período (n=27)	2.º Período (n=26)	3.º Período (n=26)
N.º de positivas	26	13	16	16
N.º de negativas	0	14	10	10
Média	3,96	10,52	10,69	10,73

Como foi referido, não há classificações finais negativas no 9.º ano, e a média dos alunos é aproximadamente 4 (escala 0-5). No primeiro período do ano letivo em estudo, o número de negativas superou o número de positivas, sendo que 11 correspondem a 8 valores, e as restantes a 9 valores. No segundo período, o número de negativas decresceu, sendo que a nota mais baixa foi de 5 valores (2 alunos). Devido à pandemia e ao novo sistema de avaliação adotado, não houve grandes diferenças entre o segundo e o terceiro período. Apenas uma aluna subiu 1 valor (de 7 para 8 valores), devido a uma votação no conselho de turma. A média final foi de 10,73 valores, onde se denota uma pequena subida relativamente ao primeiro período.

2.2. Enquadramento Teórico

Neste subcapítulo é descrita a fundamentação teórica deste estudo, desenvolvida à luz da literatura, onde se encontra dividida em quatro partes. Na primeira parte, consta a evolução do conceito de função e a sua integração no currículo escolar. A segunda parte foca-se na resolução de problemas e a terceira na calculadora gráfica, com a presença no currículo escolar, na aprendizagem de funções e a relação entre elas. Por último, na quarta parte, apresenta-se as dificuldades referidas em alguns estudos sobre a aprendizagem de funções através da resolução de problemas, com estudos a referir as dificuldades da resolução de problemas com o uso da calculadora gráfica.

2.2.1. A noção de função no currículo escolar

O conceito de função é considerado um dos mais importantes da Matemática (Ponte, 1990). Este conceito enquanto objeto de estudo em Matemática surgiu nos finais do séc. XVII com Leibniz. Este matemático usou o termo 'função' de uma forma geral, pois resulta da "dependência de uma curva de quantidades geométricas como as subtangentes e subnormais" (Ponte, 1990, p. 3). Desta forma, surgiram os conceitos de 'constante', 'variável' e 'parâmetro'. Por meio de uma correspondência entre Leibniz e João Bernoulli, entre os anos de 1694 e 1698, foi usada primeiramente a palavra 'função' na tradução de um termo indispensável para representar quantidades dependentes de alguma variável por meio de uma expressão analítica (Ponte, 1990).

Em 1718, Bernoulli formulou a definição de função como "uma quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constantes" (Ponte, 1990, p. 3). Passados 30 anos, Euler reformulou este conceito, substituindo o termo 'quantidade' por 'expressão analítica' (Ponte, 1990). Outrora, esta noção conduziu a diversas incoerências e limitações, pois uma função pode ser representada por diversas expressões analíticas. Fourier desenvolveu este conceito, associando-o a problemas de condução do calor nos objetos materiais, considerando a temperatura de um corpo como uma função de duas variáveis: o tempo e o espaço. Deste modo, conjeturou que, para qualquer função, seria possível obter um desenvolvimento em série trigonométrica. Dirichlet formulou as condições suficientes para a representação de uma função por uma série de Fourier, separando o conceito da sua representação analítica. Logo, uma função passou a ser uma correspondência entre duas variáveis, em que à variável independente passa a corresponder um e um só valor da variável dependente (Ponte, 1990). Através do desenvolvimento da teoria dos conjuntos por Cantor, a noção de função passou a incluir as correspondências entre quaisquer conjuntos numéricos ou não numéricos (Ponte, 1990).

O conceito de função ganhou ainda mais relevância quando ligado à Física. Galileu explicou fenómenos naturais recorrendo à noção de função. As funções de proporcionalidade direta e inversa e as funções polinomiais e trigonométricas foram úteis para o estudo do movimento dos planetas e de qualquer movimento curvilíneo, assim como para medir a força de um corpo (Ponte, 1990). Segundo Ponte (1990), este conceito tem três elementos fundamentais: a "notação algébrica", a "representação geométrica" e a "ligação com os problemas do mundo físico" (Ponte, 1990, p. 5). Atualmente, a

Matemática aplica-se não só na física, como também, entre outras áreas do conhecimento, na economia, engenharias, comunicação e tecnologia, como meio de previsão e controlo (Ponte, 1990).

Em termos curriculares, o conceito de função é introduzido no 7.º ano de escolaridade. Segundo o Programa e Metas Curriculares (MEC, 2013), na aprendizagem do conceito de função o aluno tem que saber que:

> dados conjuntos A e B, fica definida uma «função f (ou aplicação) de A em B», quando a cada elemento de x de A se associa um elemento único de B representado por $f(x)$ e utilizar corretamente os termos «objeto», «imagem», «domínio», «conjunto de chegada» e «variável». (p. 54)

A representação gráfica de uma função com a marcação dos seus pares ordenados, também é exigida neste domínio. As diferentes representações de uma função também é algo requerido de acordo com o NCTM: "é essencial que se sintam confortáveis em relacionar expressões simbólicas contendo variáveis a representações verbais, tabulares e gráficas de relações numéricas e quantitativas" (NCTM, 2007, p. 223). No descritor 'operar com funções', são referidas as funções constantes e lineares, e a função afim "como a soma de uma função linear com uma constante" (MEC, 2013, p. 54). A função de proporcionalidade direta também ganha especial enfoque neste ano de escolaridade (MEC, 2013). Segundo o NCTM (2007), os alunos devem desenvolver uma compreensão inicial de vários significados e usos diferentes de variáveis, por meio da representação de quantidades numa variedade de situações problemáticas.

No 8.º ano de escolaridade, o domínio 'gráficos de funções afins', explora o conceito de 'declive' e 'ordenada na origem' (MEC, 2013). A resolução de problemas ganha destaque, pois os alunos devem "determinar a expressão algébrica de uma função afim dados dois pontos do respetivo gráfico [e] determinar a equação de uma reta paralela..." (p. 65).

No 9.º ano de escolaridade, duas novas funções são introduzidas: a função de proporcionalidade inversa e a função quadrática. Relativamente à função de proporcionalidade inversa pretende-se desenvolver a capacidade dos alunos em reconhecer que "f é uma função dada por uma expressão da forma $f(x) = \frac{a}{x}$, onde $a = f(1)$ e concluir que a é a constante de proporcionalidade inversa" e saber que "o gráfico de uma função de proporcionalidade inversa é uma curva designada por «ramo de hipérbole»" (MEC, 2013, p. 79). Em relação à função quadrática, o objetivo consiste em "interpretar graficamente soluções de equações do segundo grau", onde o descritor 'saber' é novamente usado para designar por «parábola de eixo vertical e vértice na origem», o gráfico de uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2$.

Com todos estes conhecimentos consolidados, no ensino secundário, nomeadamente no 10.º ano, há um subdomínio sobre as 'generalidades acerca de funções', com a introdução da função composta e da função inversa de uma função bijetiva, e outro respeitante às funções reais de variável real (MEC, 2013). Neste subdomínio está presente o objetivo "identificar intervalos de monotonia de funções reais de variável real" e "identificar extremos de funções reais de variável real" (MEC, 2013, pp. 17-18). Tais tópicos incidiram na minha prática pedagógica, com o objetivo principal de "estudar funções elementares e operações algébricas sobre funções" (MEC, 2013, p. 18), as quais contemplam o estudo da função quadrática do tipo $a(x-b)^2+c$, a função módulo, funções polinomiais e as operações com funções. Por último, no objetivo 'resolver problemas', o programa destaca o símbolo "+" para assinalar que "todos os alunos devem conhecer o resultado em causa e saber aplicá-lo, [porém] a elaboração da respetiva demonstração é facultativa, não sendo, portanto, exigível aos alunos" (MEC, 2013, p. 27). Segundo o NCTM (2007), os alunos do ensino secundário devem explorar as propriedades dos diferentes tipos de funções. Por exemplo,

> devem aprender que a função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ é quadrática, pelo que o seu gráfico é uma parábola e a sua concavidade voltada para cima, porque o seu coeficiente é positivo. Também devem aprender que algumas equações quadráticas não têm raízes reais e que essa característica corresponde ao facto dos seus gráficos não intersetarem o eixo dos x. (NCTM, 2007, p. 299)

As transformações dos gráficos da família de funções quadráticas definidas por $f(x) = ax^2 + bx + c$ na nova forma introduzida no 10.º ano por $f(x) = a(x-h)^2 + k$, leva o NCTM (2007) a alertar que as mudanças do parâmetro b não são tão óbvias e "resultam na translação da parábola ao longo do eixo não vertical" e na formação do seu novo vértice e do seu eixo de simetria (p. 300).

No 11.º ano, a noção de limite é introduzida com o subdomínio 'limites segundo Heine de funções reais de variável real' e o subdomínio 'derivadas de funções reais de variável real e aplicações'. Já no último ano de escolaridade obrigatória, no domínio 'funções reais de variável real' estudam-se os limites, a continuidade e as derivadas de segunda ordem de funções. No domínio 'trigonometria e funções trigonométricas', estuda-se a diferenciação de funções trigonométricas, enquanto no domínio 'funções exponenciais e funções logarítmicas' se estudam os juros compostos, o número de Neper, os dois tipos de funções, os limites que as envolvem e os modelos exponenciais.

De acordo com o NCTM (2007), à medida que os alunos estudam várias classes de funções e se familiarizam com as propriedades de cada uma, "devem começar a ver que classificar as funções como linear, quadrática ou exponencial faz sentido, pois as funções em cada uma dessas classes compartilham atributos importantes" (p. 300). Para que tal aconteça, os professores podem perguntar aos alunos:

> O que acontece com cada uma dessas funções para grandes valores positivos de x? E para grandes valores negativos de y? Onde cruzam o eixo dos y? (...) os professores devem encorajar os alunos a explorarem o que acontece nos casos em que $a < 0$ ou $0 < b < 1$. (NCTM, 2007, p. 300)

Através do trabalho analítico e exploratório, os alunos podem aprender as propriedades de várias classes de funções. Segundo o NCTM (2007), no ensino secundário, os alunos aprenderão a combinar funções, expressá-las em formas equivalentes, compô-las e encontrar a sua inversa sempre que possível. Ao fazê-lo, compreenderão o conceito de uma classe de funções e aprenderão a reconhecer as características de várias classes. O desenvolvimento do pensamento algébrico até ao final do ensino secundário "deve fornecer aos alunos perceções sobre a abstração e a estrutura matemática. Nos anos 9-12, os alunos devem desenvolver uma compreensão das propriedades algébricas que governam a manipulação de símbolos em expressões, equações e desigualdades" (p. 297). Estas manipulações podem ser feitas mentalmente, analiticamente ou por meio de um artefacto tecnológico, como, por exemplo, a calculadora gráfica, de forma a gerarem expressões que representam funções equivalentes, resolverem equações, ou para provarem resultados (NCTM, 2007).

2.2.2. A noção de problema e de resolução de problemas

Na sala de aula, são propostos vários problemas e exercícios aos alunos, o que faz com que a noção de problema seja muitas vezes confundida com a de exercício. Posamentier e Krulik (1998) definem problema como uma situação que confronta o aluno, que requer resolução e para o qual o caminho para a resposta não é conhecido imediatamente. Abrantes (1989) também defendeu que "um problema é uma situação que difere de um exercício pelo facto de o aluno não dispor de um procedimento ou algoritmo que conduzirá com certeza a uma solução" (p. 3). Segundo Abrantes (1989), esta definição tem um caráter relativo, pois, por exemplo, calcular a soma dos primeiros 100 números naturais será um exercício se o aluno conhece a fórmula da soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética, mas poderá constituir um problema no caso inverso. Isto também vai ao encontro de Ponte (2005), que defende que uma questão matemática pode ser um problema para certos alunos de certas idades e, para outros, um exercício. Schoenfeld (1996) considera que os problemas podem ter várias características, nomeadamente serem relativamente acessíveis, terem diferentes caminhos, serem boas introduções para ideias importantes e serem 'boas' explorações matemáticas.

Para Ponte (2005), as tarefas têm duas dimensões: o grau de desafio, que se relaciona com a perceção da sua dificuldade, e o grau de estrutura, que se relaciona com a clareza do que é pedido (Figura 1). Ou seja, no que se refere ao grau de desafio, a tarefa pode ser de desafio reduzido ou elevado, e de natureza fechada ou aberta no que se refere ao grau de estrutura. Assim, segundo Ponte (2005), um problema é uma tarefa fechada, onde é dito claramente o que é dado e o que é pedido, mas adquire um elevado desafio. Este autor também defende que os alunos podem realizar uma tarefa se não tiverem sido diretamente ensinados a resolvê-la, pois adquirem conhecimentos fora da sala de aula de Matemática. Isto faz com que sejam mais autónomos e descubram um método próprio de resolver a tarefa e não apenas o que é ensinado pelo professor. Com a mesma visão, Pólya (1995) defende que o professor deve "colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa na sua cabeça" (p. 4) e questionar e fornecer sugestões aos alunos "indicando a direção geral, mas deixando muito para o estudante fazer" (p. 6).

No que respeita ao exercício, Ponte (2005) classifica esta tarefa como uma tarefa fechada (como o problema), porém com um desafio reduzido. As tarefas abertas são as tarefas de exploração e as tarefas de investigação, em que as primeiras apresentam um grau de desafio reduzido, e as últimas um grau de desafio elevado (Ponte, 2005). Como as tarefas de exploração e os exercícios apresentam um grau de desafio reduzido, mais uma vez os conhecimentos prévios de cada aluno em cada idade são importantes. Por exemplo, o cálculo da média em que não é conhecida a expressão, faz com que os alunos explorem o método de resolução desta tarefa, e não apenas apliquem a expressão numérica. A autonomia dos alunos nas tarefas de caráter aberto (exploração e investigação) é evidenciada, pois não é claro o que é dado ou pedido, e os alunos têm de mobilizar todos os conhecimentos que têm e que aprendem mesmo fora da escola (Ponte, 2005).

Figura 1- Características das tarefas segundo o grau de desafio e de estrutura (Ponte, 2005).

A duração de cada tipo de tarefa também permite distingui-las. Segundo Ponte (2005), relativamente às tarefas anteriormente referidas (exploração, investigação e problemas), prevê-se que a duração seja média, enquanto a duração dos exercícios é curta. Existem outros tipos de tarefa, que reúnem as características das que foram referidas, como, por exemplo, os projetos, que apresentam uma longa duração, em que as aprendizagens são profundas (Ponte, 2005), e os jogos.

No que respeita aos problemas, importa distinguir a tarefa em si, o problema, da atividade necessária para o resolver. Enquanto o problema consiste numa tarefa com características próprias que o aluno é desafiado a resolver, as ações cognitivas, e por vezes físicas, necessárias nessa resolução determinam a atividade denominada de resolução de problemas. Para a concretização desta atividade, Pólya (1995) aponta quatro etapas fundamentais:

(i) Entender o problema, isto é, ler cuidadosamente o problema, compreender o significado de cada termo utilizado e identificar claramente as informações de que se necessita para o resolver;
(ii) Estabelecer um plano, ou seja, encontrar a conexão entre os dados e a incógnita com o objetivo de definir uma estratégia;
(iii) Executar o plano com a sua posterior reflexão. Na execução do plano é necessário compreender e executar a estratégia definida e verificar a correção de cada passo;
(iv) Rever e discutir a resolução do problema, assim como procurar utilizar o resultado ou método em outros problemas e também averiguar se há outro caminho alternativo.

Na concretização destas etapas, o aluno recorre a heurísticas, que para Pólya são regras, sugestões, guias ou técnicas que podem ser úteis para chegar à solução do problema. Assim, Pólya define cinco guias para a resolução de problemas em sala de aula:

(i) O professor deve auxiliar, nem de mais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho (p. 4).
(ii) Questões, recomendações, operações mentais, [como a questão] "qual é a incógnita?"
(iii) "Generalidade", em que se explora quais são os dados e qual é a condicionante.
(iv) "Bom senso", em que refere que estas indagações são naturais e simples, como: "Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.", que se vê que se pode generalizar para qualquer problema.
(v) Professor e aluno. Imitação e prática", em que Pólya refere que "há dois objetivos que o professor pode ter em vista ao dirigir ao seu aluno uma indagação ou uma sugestão da lista: primeiro, auxiliá-lo a resolver o problema que lhe é apresentado; segundo, desenvolver no estudante a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio." (p. 6). As indagações e as sugestões, são genéricas, pois apenas "indicam a direção geral, deixando muito para o estudante fazer.

A resolução de problemas é uma competência prática, por isso o autor até a compara à natação, pois se adquire por imitação e prática. Logo, os professores que desejam desenvolver a capacidade de resolver problemas nos seus alunos, devem proporcionar oportunidades de imitar e praticar e também incutir interesse nesta temática. De acordo com Pólya (1995), as questões 'por onde começar?', 'que posso fazer?' e 'qual a vantagem em assim proceder?', vão-se aperfeiçoando ao longo das quatro etapas definidas anteriormente. A familiarização com o problema, com a sua leitura do enunciado, da visualização como um todo, e o início da sua compreensão, ajuda na fase seguinte onde consta o aperfeiçoamento da compreensão. Aqui é necessário isolar a hipótese da conclusão, caso seja um problema de demonstração, ou isolar a incógnita, os dados e a condicionante, caso seja um problema de determinação (Pólya, 1995). Na 'procura da ideia proveitosa', os conhecimentos previamente adquiridos são importantes para estabelecer ligações com os dados que se têm e assim surgem novas questões. As questões 'que posso perceber?', 'como pode uma ideia ser proveitosa?', são utilizadas para quando o aluno tem uma ideia de um caminho a seguir na resolução do problema. Assim, surge a questão 'o que posso fazer com uma ideia incompleta?', em que se deve examinar a nova situação e questionar 'qual a vantagem em tornar a fazer isto?'. Nas fases 'execução do plano' e 'reflexão', os alunos devem realizar detalhadamente todas as operações algébricas e geométricas que já se verificaram serem viáveis. Posteriormente, é possível que se encontre uma outra resolução melhor e que se descubra factos novos e interessantes. Segundo Pólya (1995), isto irá fazer com que o aluno obtenha conhecimentos bem ordenados e prontos a serem utilizados e desenvolver a capacidade de resolver problemas.

Enquanto Pólya (1995) considera que um aluno está perante um problema quando se confronta com uma questão a que não pode dar resposta, ou com uma situação que não sabe resolver usando os conhecimentos imediatamente disponíveis, Graça (2003) considera que, para além de o problema ser uma situação para a qual um indivíduo não dispõe de um método imediato de resolução, o empenhamento na procura dessa solução constitui um aspeto fundamental. Segundo Garofalo e Lester (1985), o modelo de resolução de problemas de Pólya gerou muita pesquisa relacionada ao ensino da resolução de problemas, mas não explora diretamente a metacognição e a instrução em heurísticas. A importância de incorporar decisões metacognitivas à prática instrucional também é defendida por psicólogos experimentais. Garofalo e Lester (1985) descrevem três tipos de estudos quanto às estratégias realizadas em psicologia do desenvolvimento: 'instrução cega', 'instrução informada' e 'instrução de autorregulação'.

> A 'instrução cega' instrui ou induz os alunos a usar uma estratégia específica, mas não os ajuda a compreender seu significado. Desta forma, os alunos são informados sobre o que

> fazer, mas não porquê e em que condições o fazer. A 'instrução informada', entretanto, combina instrução e prática no uso de uma estratégia com informações sobre a importância da estratégia. O terceiro tipo de 'instrução', 'instrução de autorregulação', complementa a instrução na execução de uma estratégia e as informações sobre sua importância com 'instrução' em planeamento, monitoramento e avaliação da sua implementação. (p.173)

A 'instrução cega', embora em algumas situações possa ser bem-sucedido, os alunos ensinados dessa maneira geralmente não aprendem eficazmente e generalizam as estratégias aprendidas. O objetivo do terceiro tipo de autorregulação é supervisionar a execução da estratégia e fazer com que o aluno atinja os objetivos da tarefa. As pesquisas relacionadas com a 'instrução' em estratégias para tarefas de memória e leitura mostram que, embora a 'instrução informada' produza melhores resultados do que a 'instrução cega', no que diz respeito à manutenção e transferência, a abordagem de autocontrole/autorregulação é o de maior sucesso (Garofalo & Lester, 1985).

As funções dos problemas e da resolução de problemas prendem-se com os objetivos visados para o ensino e a aprendizagem de Matemática, o que muito tem a ver com a forma como o professor interpreta, organiza e orienta a atividade de resolução de problemas na sala de aula (Graça, 2003). Para o ensino da Matemática, Graça (2003) salienta dois aspetos importantes a considerar: só há problema se um indivíduo o quiser resolver; e não existe um método eficaz para encontrar uma solução para o problema. Logo, um problema depende da relação que cada aluno estabelece com a tarefa com que se depara e do contexto particular em que decorre a resolução. Pode-se, assim, inferir que um aluno está perante um problema quando, confrontado com uma questão, não dispõe de um processo previamente concebido.

2.2.2.1. A resolução de problemas no currículo escolar

A resolução de problemas não é um tópico distinto, mas sim um processo que deve permear no estudo da Matemática e fornecer um contexto no qual os conceitos são aprendidos (NCTM, 2007). Nos primeiros anos de escolaridade, é defendido que os alunos devem ter experiências frequentes com problemas, que os desafiam e os induzem a pensar. A resolução de problemas incentiva "a reflexão e a comunicação e podem surgir do ambiente entre os alunos ou de contextos puramente matemáticos" (NCTM, 2007, p. 183). Além de desenvolverem estratégias, os alunos precisam de se questionar e estabelecer uma discussão com o professor e com os seus colegas, em que o professor questiona as razões usadas para as suas decisões e ações. Desta forma, o professor é capaz de avaliar a compreensão dos alunos: "Para qualquer avaliação de resolução de problemas, os professores devem olhar além da resposta para verificar o raciocínio por trás da solução. Essas evidências podem ser encontradas em explicações orais e escritas, desenhos e modelos" (p. 187). Após isto, os professores podem escolher direções para o ensino futuro que se encaixem com os seus objetivos matemáticos para uma certa turma (NCTM, 2007).

No programa vigente de Matemática A, a resolução de problemas está definida como o processo que envolve, por parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, "a mobilização de conhecimentos de factos, de conceitos e de relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais" (p. 7). Aqui se revela a importância da comunicação matemática na resolução de problemas, prevalecendo a ideia de que os alunos devem expor as suas formas de pensar, comentar as afirmações dos seus colegas e do professor, e também colocar dúvidas. Também devem redigir convenientemente as suas respostas, explicando o raciocínio e as conclusões de forma clara, "escrevendo em português correto e evitando uma utilização inapropriada de símbolos matemáticos como abreviaturas estenográficas" (p. 7).

No programa do ensino básico, é acrescentado que, em particular no 1.º ciclo, o número de passos necessários à resolução dos problemas vá aumentando de ano para ano, pois "é fundamental que os alunos não terminem este ciclo de ensino conseguindo responder corretamente apenas a questões de resposta imediata" (p. 5). A resolução de problemas está presente em cada domínio de conteúdo tratado ao longo de todos os ciclos. Quanto aos descritores, os que mencionam propriedades que devem ser reconhecidas, os alunos devem aplicá-las na resolução de problemas (MEC, 2013). O uso de calculadora apenas deve ser utilizado nos anos mais avançados, pois pode comprometer o cálculo mental, e é sobretudo recomendado em situações de resolução de problemas, como na trigonometria ou com um número elevado de cálculos (MEC, 2013).

2.2.2.2. A resolução de problemas na aprendizagem de funções

Uma função, como conceito matemático, pode ser entendida de duas formas: operacionalmente, como um processo, e estruturalmente, como um objeto (Sfard, 1991). Do ponto de vista operacional, função é um processo computacional ou um método para obter um valor a partir de outro valor dado. Do ponto de vista estrutural, é um conjunto de pares ordenados e envolve o trabalho com representações gráficas, acompanhadas pela correspondência simbólica de certos parâmetros (Sfard, 1991). Estes dois modos de entender esta temática complementam-se. Esta autora refere a *Teoria da Reificação*, a qual é um modelo de desenvolvimento concetual, em que a conceção operacional aparece primeiramente, e seguidamente a conceção estrutural, pois há uma interiorização dos processos, tornando-se um objeto matemático. Este processo é faseado e lento, dividindo-se em três fases: interiorização, condensação e reificação.

Quando o aluno aprende o conceito de função, encontra-se na fase de interiorização quando "aprende a noção de variável e adquire a capacidade de usar uma fórmula para encontrar valores da variável dependente" (Sfard, 1991, p. 19). Segundo esta teoria, "o processo foi interiorizado quando pode ser realizado através de representações mentais, e quando considerado, analisado e comparado não precisar de ser efetuado no momento" (p. 18). Ou seja, os processos vão-se tornando mais acessíveis, até os alunos serem capazes de pensarem sobre o que aconteceria sem terem de os efetuar.

Na segunda fase, a de condensação, há uma evolução quando se verifica que o aluno é capaz de combinar facilmente um processo com outros processos já conhecidos, estabelecer comparações, generalizar e alternar entre diferentes representações de um conceito (Sfard, 1991). No caso das funções, quanto mais o aluno for capaz de trabalhar com uma função como um todo, mais avançado está no processo de condensação, sendo capaz de "investigar funções, desenhar os seus gráficos, combinar pares de funções (por exemplo, por composição), até encontrar a função inversa de uma dada função" (p. 19).

A terceira e última fase, a reificação, acontece quando o aluno consegue compreender as diversas representações que uma função pode assumir (passando facilmente de uma representação para outra), quando revela "capacidade de falar acerca de propriedades gerais de diferentes processos realizados com funções (como composição ou inversão) e pelo derradeiro reconhecimento de que os cálculos algébricos não são uma característica necessária dos conjuntos de pares ordenados que definem funções" (Sfard, 1991, p. 20). Esta última fase ocorre de uma forma instantânea, e pode ser definida "como sendo uma mudança ontológica – uma súbita capacidade de ver algo familiar numa perspetiva totalmente nova" (p. 19). A fase de reificação é o ponto onde começa uma interiorização de conceitos de nível superior, segundo Sfard (1991).

Uma alternativa para a reificação do conceito de função é proposta por Slavit (1997), não como uma nova teoria, mas como uma nova interpretação das teorias existentes. Este autor defende que uma função pode ser descrita pelas suas propriedades locais e globais, uma vez que o estudo das propriedades é fundamental para caracterizar famílias de funções, como zeros, assíntotas e simetrias das respetivas representações gráficas. No estudo de mais classes de funções, como as trigonométricas, exponenciais e logarítmicas, aumentam as propriedades funcionais conhecidas, o que fortalece a compreensão global das funções. Slavit (1997) realizou um estudo que indica que alguns alunos do ensino secundário reificaram determinados tipos de funções usando noções orientadas pelas propriedades. No entanto, não encontrou nenhuma evidência que sugerisse que o conceito global de função fosse reificado dessa maneira.

A resolução de problemas tem ganho um lugar de destaque em prol do desenvolvimento de capacidades e conhecimentos dos alunos. Para o professor explorar o conceito e classes de funções com os alunos, poderá recorrer a problemas. Para este efeito, pode recorrer ao 'ensino direto', onde o professor assume o papel fundamental e o aluno aprende ouvindo o que é dito e fazendo exercícios (Ponte, 2005). A resolução de exercícios apresenta-se como o lugar central, "de tal modo que, para o aluno, aprender é sobretudo "saber como se fazem" todos os tipos de exercícios suscetíveis de saírem em testes ou exames" (Ponte, 2005, p. 13). Como alternativa a este método de ensino e de aprendizagem, surge o método de 'ensino exploratório'. Neste tipo de estratégia de ensino, o professor trabalha com os alunos para chegarem aos objetivos pretendidos, procurando não explicar tudo, deixando "uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem" (Ponte, 2005, p. 13). Este tipo de ensino contempla a exploração feita pelos alunos, mas não significa que tudo o que acontece na sala de aula resulta do mesmo (Ponte, 2005). Ou seja, "não é a realização ocasional de um outro tipo de tarefa que define o carácter geral do ensino, mas a tendência geral do trabalho desenvolvido" (p. 14).

As tarefas de exploração e de investigação, assim como os problemas, adequam-se ao ensino exploratório. O mesmo acontece com a discussão entre professor e aluno e os momentos de reflexão (Ponte, 2005). Para este autor, tais considerações levam à sistematização de conceitos, à formalização e ao estabelecimento de conexões matemáticas, o que conduz ao caso das funções e à sua exploração através dos problemas. De acordo com Ponte et al. (2015), com base nas recomendações do NCTM (2007), a aprendizagem da Matemática "deve ir além da mera memorização de factos, regras e procedimentos e para isso é necessário valorizar o raciocínio matemático na sala de aula" (p. 113). Logo, o foco no raciocínio no que diz respeito à resolução de problemas é crucial, pois envolve processos dedutivos (justificações), indutivos e abdutivos (generalizações e outras conjeturas) (Ponte et al., 2015). Segundo o estudo realizado por Ponte et al. (2015), para aceder ao raciocínio é "necessário que os alunos o comuniquem, oralmente, por gestos ou por escrito, e isso só é possível através de representações" (p. 113). Duval (2006) refere que o funcionamento cognitivo da mente humana é inseparável de uma variedade de registos semióticos de representação. Por isso, considera ser impossível aprender as noções matemáticas sem recorrer às representações. Na sua perspetiva, é a diversidade das representações que dá significado a um objeto matemático. No caso das funções, as várias representações apontam para aspetos diferentes do conceito, que, em conjunto, contribuem para uma representação global. Para o NCTM (2007), "quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente" (p. 75). Consciência (2013) defende que os alunos que conseguem converter a representação gráfica de uma relação algébrica na representação verbal não estão automaticamente em posição de converter, com sucesso, a mesma relação algébrica da sua representação verbal na gráfica e vice-versa. Para a autora, este tipo de comportamento indica que os alunos não constroem o significado global do conceito de função e não conseguem captar todas as possibilidades da sua aplicação, o que pode prejudicar a resolução de problemas.

Tendo como referência o programa do ensino básico e secundário, a finalidade de 'resolver problemas' está sempre presente no domínio das funções, devendo os problemas serem trabalhados na sala de aula, promovendo a resolução de problemas que envolvam: "as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real" (MEC, 2013, p. 19); "o estudo de funções reais de variável real, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia, extremos relativos e absolutos" (MEC, 2013, p. 41); e esboçar o gráfico de funções "definidas analiticamente começando por determinar o respetivo domínio e, sempre que possível, os zeros, os intervalos de monotonia, os extremos locais e absolutos, o sentido das concavidades, os pontos de inflexão e as assíntotas do respetivo gráfico" (MEC, 2013, p. 49).

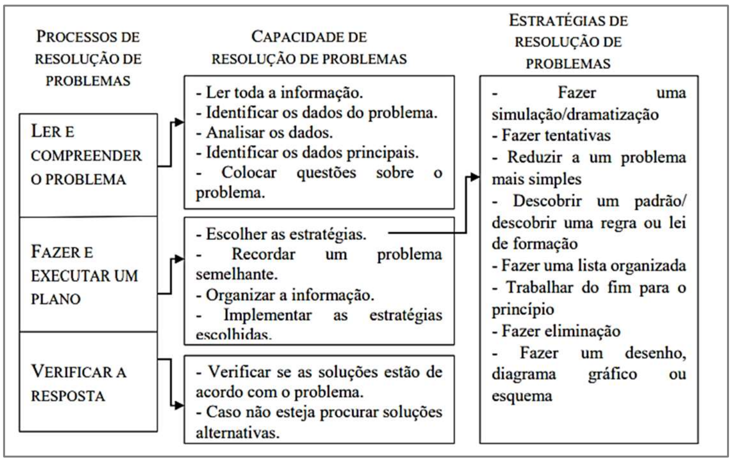
2.2.2.3. Estratégias de resolução de problemas

As estratégias de resolução de problemas debruçam-se sobre um conjunto de ferramentas que auxiliam o aluno a resolver o problema de modo a obter a sua solução (Vale & Pimentel, 2004). Tendo isto em conta, os alunos devem debater as diversas estratégias, pois não há uma forma correta de resolver um problema (Ponte & Serrazina, 2004). Seguindo as fases de Pólya, a maior dificuldade da resolução de um problema prende-se na segunda fase, onde se deve estabelecer um plano, definindo uma estratégia, onde podem ser utilizadas inúmeras (Vale & Pimentel, 2004).

Tal como Ponte e Serrazina (2004) referem que "o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas é uma parte essencial da Matemática escolar" (p.4), onde defendem que se aprende Matemática resolvendo problemas. Os problemas são um ponto de partida para a introdução de novos conceitos e ideias matemáticas, ou um modo de consolidar e aplicar esses conhecimentos (Ponte & Serrazina, 2004). Segundo o estudo destes autores, os professores consideram como finalidades e objetivos fundamentais, o desenvolvimento da capacidade de raciocínio e de resolução de problemas, comunicação, memória, rigor, espírito crítico e criatividade, onde prevalece a ideia de que os alunos devem ter conhecimento e explorar as diversas estratégias para um problema.

Pólya introduziu a noção de heurística, mais tarde referida pelos educadores matemáticos como estratégia, e de que são exemplo "fazer um desenho", "trabalhar do fim para o princípio", ou "procurar um problema semelhante", conforme refere Vale, Pimentel e Barbosa (2015). Estas estratégias foram reconhecidas como úteis para dar pistas aos alunos sobre o caminho a seguir, e ao longo dos anos foram defendidas como capacidades que são importantes o aluno desenvolver e que devem ser incutidas no ensino, assim como as fases do modelo de Pólya (Vale, Pimentel & Barbosa, 2015). No esquema seguinte, encontram-se resumidas as heurísticas/estratégias, seguindo as fases de resolução de problemas de Pólya, com as capacidades inerentes a cada fase (Figura 2).

Figura 2- Modelo de resolução de problemas de Pólya com as estratégias (Silva, 2015)



Em combinação com estas estratégias recorre-se, muitas vezes, a diferentes representações como mencionado no fim do esquema, como "fazer um desenho" ou "esquema" ou "usar uma tabela" (Boavida et al., 2008). Distinguindo o modelo de Pólya das estratégias, o modelo proporciona uma visão geral de como nos devemos movimentar na resolução de um problema, enquanto as estratégias são ferramentas que, a maior parte das vezes, se identificam com processos de raciocínio e que podem ser bastante úteis em vários momentos do processo de resolução de problemas. Desta forma, o conhecimento matemático e as estratégias de raciocínio devem ser aprendidos e usados em simultâneo e não isoladamente (Boavida et al., 2008).

Ao contrário destes autores, Freire, Cabral e Filho (2004) baseiam-se na forma como está patente o raciocínio de cada aluno na resolução de um problema. Desta forma, mencionam quatro estratégias:

(i) Estratégia simbólica;
(ii) Estratégia numérica;
(iii) Estratégia icónica;
(iv) Estratégia mista;
(v) Outras estratégias.

A estratégia simbólica envolve a resolução através do uso de equações. O aluno estrutura uma equação, de forma a chegar à solução do problema. Para o uso apenas de números e operações aritméticas, como proceder a uma divisão, os autores referem a estratégia numérica. A estratégia icónica diz respeito à resolução através da apresentação de figuras. Para problemas mais simples do ensino básico, as figuras podem representar por exemplo uma balança de dois pratos, onde estão as quantidades e relações envolvidas (Freire, Cabral & Filho, 2004). Por fim, a estratégia mista envolve a combinação das três estratégias anteriores, na mesma representação ou em representações diferentes. Freire, Cabral e Filho (2004) exemplificam o caso de "outras estratégias", como o caso de os alunos colocarem apenas a resposta e a explicação do cálculo mental realizado, ou a tentativa errada da regra de três simples. No caso em que os alunos colocam apenas a resposta, não é possível identificar a estratégia utilizada, pois não é possível inferir o raciocínio dos mesmos (Freire, Cabral e Filho, 2004).

Outrora, Ponte, Branco e Matos (2009), mencionam as estratégias relacionadas especificamente com o tópico de funções. Neste caso, também são apresentadas quatro estratégias:

(i) Interpretação do gráfico;
(ii) Recurso às informações dadas em linguagem natural;
(iii) Recurso a uma tabela;
(iv) Recurso a uma expressão algébrica.

Para traduzir o significado destas estratégias, os autores recorreram a um caso prático, como determinar a distância percorrida por um indivíduo ao fim de um certo tempo. Para isso, no problema, os alunos têm representado um gráfico que podem recorrer, onde o devem interpretar para responder às questões. Como o gráfico não tem uma escala suficiente detalhada, os alunos têm de recorrer a outras estratégias. Assim, segundo Ponte, Branco e Matos (2009), o recurso às informações dadas no problema em linguagem natural, torna-se viável, como efetuar a multiplicação do tempo decorrido pela distância percorrida por segundo, adicionando a distância inicial referida no gráfico. Outra alternativa é o recurso a tabelas. Neste caso, os alunos podem construir uma tabela que contenha diversos valores do tempo e da distância percorrida e procurar regularidades para determinar a distância percorrida. De forma mais eficaz, os alunos podem recorrer a uma expressão algébrica. Estabelecer uma expressão algébrica, que neste caso, traduza a distância percorrida pelo indivíduo em função do tempo, obtendo a imagem correspondente (Ponte, Branco & Matos, 2009).

Pode-se concluir que os alunos se deparam com diversas estratégias para o auxílio na resolução de problemas. Para isso, é necessário que os alunos aprendam a aplicar no momento adequado as estratégias de resolução de problemas e os conhecimentos adquiridos (Vale, Pimentel & Barbosa, 2015). A resolução de problemas pode também ser encarada como finalidade última do ensino da matemática, considerada como uma forma de pensamento. Isto faz com que os procedimentos rotineiros sejam apenas ferramentas, pois é necessário ensinar os alunos a pensar, preparando-os para resolver eficazmente problemas (Vale, Pimentel & Barbosa, 2015). Nesta perspetiva, assume-se que se deve proceder no ensino da resolução de problemas da seguinte forma, segundo Vale, Pimentel e Barbosa (2015):

(i) aprendizagem inicial de conceitos e procedimentos;
(ii) prática de "problemas de palavras";
(iii) exposição a uma variedade de estratégias (ex: fazer um diagrama, tentativa e erro);
(iv) experiências na aplicação destas competências na resolução de "novos problemas" ou "problemas não rotineiros".

De salientar que a resolução de problemas, com base nesta abordagem, de acordo com o estudo destes autores, não deve ser considerada como um tema independente e isolado, podendo ser considerada como uma finalidade do ensino, ou como um modo de instrução, sendo a base para ensinar vários conteúdos.

2.2.3. A calculadora gráfica na aprendizagem de funções

Com o avanço da tecnologia de informação e comunicação, é impossível evitar o impacto da tecnologia na sala de aula. Segundo o NCTM (2007), a tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática, visto que "a tecnologia pode ajudar os professores a conectar o desenvolvimento de habilidades e procedimentos ao desenvolvimento mais geral da compreensão matemática" (p. 26). A tecnologia é essencial no ensino e aprendizagem da matemática se melhora a aprendizagem dos alunos (NCTM, 2007). Porém, o NCTM (2007) defende que a tecnologia não deve ser usada como um substituto para entendimentos e intuições básicas, em vez disso, pode e deve ser usada para promover esses entendimentos e intuições.

No que respeita ao estudo das funções, os respetivos gráficos facilitam a exploração das características das classes de funções, como, por exemplo, no estudo da função linear: "O uso de calculadoras gráficas ou software de computador apropriado permite que os alunos vejam relações importantes como o valor de k na equação $y = kx$ e a inclinação da reta correspondente (NCTM, 2007, p. 282). Os alunos ao aprenderem a reconhecer como os valores dos parâmetros moldam os gráficos das funções numa classe, podem explorar facilmente, através de uma calculadora gráfica, os efeitos das mudanças desses parâmetros (NCTM, 2007). No caso da função quadrática da forma $y = ax^2 + bx + c$, as mudanças dos parâmetros a e c nos gráficos de funções são relativamente fáceis de observar, porém as alterações do parâmetro b resultam numa translação da parábola ao longo do eixo dos x (p. 299).

Através da calculadora gráfica, os alunos têm acesso à representação gráfica, o que promove o desenvolvimento de uma visão estrutural do conceito de função e contribui para uma maior flexibilidade em termos de estratégias de resolução de problemas (Consciência, 2013). A calculadora gráfica pode ser usada para exploração ou verificação. Apesar de os alunos poderem usar a calculadora para a exploração gráfica de uma tarefa, eles não a usam para esse efeito, preferindo resolver a tarefa analiticamente (Mesa, 2008). Segundo Vérillon e Rabardel (1995), tal acontece porque o artefacto ao encontrar-se acessível não significa, por si só, que se torne num instrumento útil ao aluno, pois tal só acontece quando este se apropria dele e consegue integrá-lo na sua atividade matemática, através de um processo que se denomina de génese instrumental. O processo da génese instrumental consiste na construção, pelo sujeito, de um instrumento a partir de um artefacto. É importante salientar a diferença entre instrumento e artefacto. De acordo com Vérillon e Rabardel (1995), uma calculadora não constitui imediatamente uma ferramenta/instrumento para o sujeito e só se torna um instrumento quando "o sujeito é capaz de se apropriar dele para si próprio e é capaz de subordiná-lo como um meio para o seu fim" (p. 10). Os autores propuseram um modelo para caracterizarem situações de atividade instrumentada (IAS), em que se envolve o 'sujeito', o 'objeto' e o 'instrumento' e as diversas relações. Isto aplica-se, por exemplo, no caso da visualização da representação gráfica de uma função quadrática:

> O aluno necessita ter alguns esquemas que lhe permitam visualizar a representação gráfica de uma função na calculadora (interação sujeito – instrumento). Nesse processo, o aluno adquire conhecimentos sobre o comportamento das funções quadráticas (interação sujeito – objeto mediada pelo instrumento), e esse conhecimento pode levá-lo a escolher uma janela mais apropriada numa próxima ocasião (modificação da forma de interação anterior sujeito – instrumento), e assim sucessivamente. (Consciência, 2013, p. 32).

Assim sendo, Retnawati et al. (2020) defendem que com a tecnologia a qualidade do ensino de matemática pode ser melhorada, pois o uso da tecnologia pode facilitar a aprendizagem dos alunos. Além disso, defendem que a tecnologia aprimorou os alunos mais interessados em aprender Matemática e ajudou os professores a lecionar e a realizar avaliações (Retnawati et al., 2020). De acordo com estes autores:

> A calculadora gráfica pode ser usada para várias funções, incluindo exploração, representação, afirmações e confirmações. Usando a calculadora, os professores podem apresentar conceitos matemáticos (funções de representação). Os alunos são orientados a encontrar conceitos matemáticos (funções de exploração) (...) podem calcular problemas de números complexos (funções de compensação) (...) podem usá-la para verificar as respostas (funções de afirmação). (p. 3)

Contudo, a "tecnologia não deve ser usada para substituir a compreensão e a intuição, mas sim para a fortalecer" (NCTM, 2OO7, p. 25). Tais pressupostos estão contemplados nas orientações metodológicas dos programas das sucessivas reformas curriculares. Por exemplo, o programa de Matemática A de 2001 recomendava que o trabalho com a calculadora gráfica deve ser sempre confrontado com conhecimentos teóricos, assim como o trabalho teórico pode ser finalizado com uma verificação na calculadora (ME, 2001). Apesar de distante, este programa apresenta linhas orientadoras que refletem orientações atuais para o ensino de matemática, tais como: (i) importa que os alunos descrevam os raciocínios utilizados e interpretem aquilo que se lhes apresenta de modo que não se limitem a 'copiar' o que veem; (ii) através da calculadora, os alunos podem explorar vários tipos de funções, onde os zeros e os extremos não podem ser calculados de forma exata analiticamente (ME, 2001). De acordo com Waits e Demana (2001), o aumento do acesso às calculadoras gráficas na sala de aula gera um maior envolvimento dos alunos, pois a sala é transformada num laboratório de

Matemática. Outra das vantagens das calculadoras é permitirem aos alunos a produção dos seus próprios exemplos, em vez de se limitarem passivamente a aceitar os que o professor propõe (Waits & Demana, 2001). A personalização permitida pelas calculadoras possibilita que os alunos formulem as suas próprias perguntas e prossigam, abordando os aspetos que mais lhes interessam. Os alunos expressam as suas próprias ideias, formulam as suas próprias hipóteses e testam-nas procurando enquadrar os resultados obtidos na 'teoria' que estão a tentar formular (Waits & Demana, 2001).

No programa atual, nomeadamente nas indicações metodológicas, a tecnologia na sala de aula encontra-se muito ligada ao tópico das funções, porém é referido que não deve substituir algumas das capacidades matemáticas inerentes a procedimentos como operar com polinómios, efetuar representações de gráficos de funções, resolver equações e calcular limites e derivadas, o que vai ao encontro do NCTM (2007). Contudo, as calculadoras e computadores apresentam limitações, como deduzir qualquer propriedade do gráfico de uma função que necessite do conhecimento dos valores da função numa infinidade de pontos do domínio, e não apenas num subconjunto finito do mesmo (MEC, 2013). No entanto, isto pode ser colmatado, relacionando as representações gráficas observadas e os valores encontrados, com o conhecimento teórico que permite atribuir o devido significado a essas representações e valores (MEC, 2013).

Nas aprendizagens essenciais do 10.° ano é também referida a importância da tecnologia, em que se defende que "deve ser usada de forma crítica e inteligente (...) ajudando os alunos a perceber as ideias matemáticas, a raciocinar, a resolver problemas e a comunicar" (p. 3). Logo, a tecnologia gráfica deve estar presente, quer em contexto de sala de aula, quer em contexto de avaliação externa (MEC, 2016). Conforme está contemplado no programa de Matemática A, a

> calculadora gráfica pode sempre ser utilizada para ilustrar propriedades de gráficos de funções adequadamente escolhidas pelo professor, ou para que o aluno teste o resultado de variações de parâmetros em classes de funções de que já tenha algum conhecimento teórico e, de maneira geral, para uma abordagem experimental ao estudo de funções, desde que devidamente controlada e acompanhada de uma análise crítica da validade de conjeturas que essas experiências possam induzir. (MEC, 2013, p. 29)

2.2.4. A calculadora gráfica na resolução de problemas

A calculadora gráfica desempenha um papel fundamental e facilitador na resolução de problemas, principalmente nos que envolvem funções. As calculadoras gráficas foram vistas pela primeira vez em 1985, quando foram desenvolvidas pela *Casio*, e mais tarde foram desenvolvidas ainda mais pela *Texas Instruments* em 1995 (Parrot & Leong, 2018). Outrora, apenas através dos computadores se tornava viável o acesso rápido à resolução de problemas, permitindo o acesso a gráficos, visualização de tabelas e execução de programas e aplicativos (Parrot & Leong, 2018). Assim, segundo estes autores, a calculadora gráfica é uma ferramenta exploratória, de representação gráfica, de confirmação, de resolução de problemas e por isso é uma ferramenta multidimensional. O uso da tecnologia contribui para a reflexão sobre a atividade matemática e a tomada de decisões (Parrot & Leong, 2018).

Allison (2000) realizou um estudo que lhe permitiu concluir que a calculadora gráfica amplificou a velocidade e a precisão das estratégias de resolução de problemas, incentivou os alunos a usarem abordagens gráficas para resolver problemas e influenciou as suas maneiras de pensar e aumentou a capacidade de se concentrarem e de reverem as respostas. Spinato (2011) também concluiu que as áreas específicas em que as calculadoras gráficas parecem ser mais eficazes são o início de uma estratégia, o monitoramento do progresso e também a reflexão sobre a própria solução do problema. As calculadoras gráficas podem ajudar os alunos a avaliar a razoabilidade de suas respostas, a justificar as suas respostas e, em seguida, para tirar conclusões (Spinato, 2011).

A calculadora gráfica apresenta diferenças significativas no desempenho académico dos alunos, relativamente à instrução de um tema (Kandemir & Demirbag, 2019). Segundo o estudo destes autores, o uso de calculadoras foi eficaz na compreensão do assunto e tornou a aprendizagem duradoura. De facto, bons problemas dão aos alunos a oportunidade de solidificar e ampliar o que sabem e, quando bem escolhidos, podem estimular a aprendizagem da matemática (NCTM, 2007). Por isso, a calculadora aliada aos problemas, permite que os alunos se concentrem no processo de resolução de problemas, pois estimula e melhora a aprendizagem, aplicando as estratégias determinadas pelo aluno (NCTM, 2007). Além disso, as calculadoras, no seu geral, fornecem um meio para destacar padrões e relacionamentos matemáticos (NCTM, 2007).

No ensino secundário, os alunos devem ter oportunidade de "aprofundar a sua compreensão das relações e funções, expandindo seu repertório de funções familiares. Os alunos devem usar ferramentas tecnológicas para representar e estudar o comportamento de funções polinomiais, exponenciais, racionais e periódicas, entre outras" (NCTM, 2007, p. 297). Aprenderão, assim, a expressá-las em formas equivalentes, compondo-as e encontrando a sua inversa, sempre que possível. Logo, compreenderão o conceito de uma classe de funções e aprenderão a reconhecer as características de várias classes (NCTM, 2007).

Contrariamente, no programa em vigor do ensino secundário, o descritor 'resolver problemas' não está diretamente relacionado com o uso da calculadora gráfica. Contudo, como já referido, como foco quanto à metodologia que deve ser adotada, a calculadora gráfica nestes anos ganha especial destaque, mencionando, como exemplo, a sua utilização na resolução de problemas (MEC, 2013).

De acordo com Smith (1998), os professores enfrentam o desafio de introduzir a calculadora gráfica na sala de aula de matemática. Como motivação para o seu uso, o autor identificou quatro vantagens. Uma das vantagens é a sua conveniência, pois economizam tempo para procedimentos fastidiosos ou difíceis. A segunda vantagem diz respeito à ampliação da compreensão concetual, ao oferecer múltiplas representações. A terceira vantagem deriva de a calculadora gráfica ser catalisadora para o pensamento crítico, dado que permite a exploração de questões que se possam colocar. Por último, a quarta vantagem emerge de a calculadora gráfica proporcionar a integração de conhecimentos matemáticos noutras disciplinas, tais como física ou programação (Smith, 1998).

Para Mesa (2008), a principal vantagem da calculadora gráfica é a sua portabilidade, o que já não acontece com o computador. No entanto, usar a calculadora gráfica de forma eficiente na sala de aula ou documentar o que realmente é feito com a ferramenta torna-se um desafio para os professores. As crenças dos professores e como os alunos se organizam na sala de aula são razões, segundo Mesa (2008), para a utilização da calculadora gráfica ser, por vezes, colocada de parte.

Quanto à resolução de problemas tendo a calculadora gráfica como suporte, é importante que haja uma propriedade pessoal da tecnologia e da atividade, ou seja, que cada aluno tenha a sua própria calculadora e que cada aluno individualmente aborde cada problema. Também deve haver oportunidade para a colaboração do planeamento e discussão entre pares, sendo que se a tarefa for compartilhada, o uso de calculadoras individuais mantém-se. O consenso a que se chegar deverá ser por escrito (Hennessy, Fung, & Scanlon, 2001). No estudo destes autores, verificou-se que atividades como verificar se os gráficos de duas expressões se sobrepõem não eram realizadas anteriormente por terem de realizar manualmente, contudo com o acesso à calculadora tornou-se viável. Os alunos usaram algumas tentativas e erros e também se envolveram em explorações produtivas (Hennessy, Fung, & Scanlon, 2001). Concluíram que as principais vantagens da calculadora gráfica em facilitar a aprendizagem de gráficos são a visualização de gráficos de funções, a interpretação automática entre representações e o *feedback* imediato, a criação rápida e fácil de gráficos. No seu estudo, também concluíram que os alunos ao trabalharem colaborativamente foi um fator importante que explica a riqueza da aula de resolução de problemas (Hennessy, Fung, & Scanlon, 2001).

Os resultados do estudo de Parrot e Leong (2018) também mostram o impacto benéfico da calculadora gráfica na resolução de problemas. O 'grupo experimental' do seu estudo que teve acesso à calculadora gráfica durante a aula obteve pontuação significativamente maior do que o 'grupo de controle', que não usou a calculadora gráfica. Isto indica que o uso da calculadora gráfica teve um impacto positivo na capacidade dos alunos de resolver problemas. Pilipczuk (2006) e Kandemir e Demirbag (2019) também concluem que os alunos resolvem melhor os problemas quando a calculadora gráfica é usada nas aulas e durante os momentos de avaliação. De acordo com Parrot e Leong (2018), os alunos, com o acesso à calculadora gráfica, têm mais tempo para pensar no problema em si, sem se preocupar com longos procedimentos algébricos. Logo, pode-se concluir que as calculadoras gráficas nas atividades de aprendizagem são vantajosas porque a representação múltipla de um conceito aumenta a clareza e a compreensão. Assim, "é altamente recomendável que os alunos tenham permissão para usar a calculadora gráfica por um período mais longo para permitir a familiaridade com as suas funções variadas" (Parrot & Leong, 2018, p. 146).

2.2.5. Dificuldades na aprendizagem de funções e na resolução de problemas com e sem a calculadora gráfica

O reconhecimento das dificuldades em qualquer conteúdo ou disciplina torna-se crucial para conseguir contornar este facto. O domínio das funções é um dos que os alunos costumam sentir mais dificuldade (Sajka, 2003). Quando se introduz a resolução de problemas ainda se sente mais dificuldade, o que pode ser devido aos alunos não entenderem adequadamente o tema tratado e pode levar a uma maior desmotivação e desinteresse pela disciplina ou tema. Para o professor verificar certas dificuldades na resolução de problemas, deve colocar questões aos alunos enquanto os resolvem para estimular o seu pensamento, e mostrar a outros alunos como um aluno está a pensar (Graça, 2003). O professor também deve fazer um registo das observações realizadas ou utilizar uma escala de classificação, para avaliar o desempenho dos alunos na resolução de problemas (Graça, 2003).

O papel do professor na seleção dos problemas e das tarefas matemáticas relevantes é fundamental. Ao antecipar as ideias matemáticas que possam emergir do problema e as próprias questões dos alunos, os professores podem decidir se determinados problemas poderão ou não ajudar a sua turma a atingir os objetivos propostos (NCTM, 2007). Logo, a escolha das tarefas e a sua abordagem pode ajudar a contornar as dificuldades sentidas.

De acordo com Parrot e Leong (2018), tendo como referência o trabalho realizado por Mayer, a resolução de problemas engloba quatro tipos de conhecimento: "(1) conhecimento linguístico e factual, (2) conhecimento de esquemas, (3) conhecimento algorítmico, e (4) conhecimento estratégico" (p. 140).

Desta forma, pode-se ver que a dificuldade na resolução de problemas pode ocorrer em qualquer uma das fases, ou seja, tanto na leitura, como na compreensão ou escolha da estratégia, execução de estratégias, transformação, habilidades no processo e solução (Parrot & Leong, 2018). De acordo com estes autores, habilidades matemáticas como linguagem, números, informação e aritmética são vitais na resolução de problemas: "a falha na resolução de problemas geralmente resultou da falha na organização das operações matemáticas, na escolha do método mais eficaz, na análise, na compreensão do ponto do problema e no monitoramento e controlo das operações realizadas" (p. 140).

Quanto ao conceito de função, a sua diversidade de interpretações e representações eleva a dificuldade do conceito. As condições para o sucesso ou fracasso no ensino de um conceito tão difícil foram investigadas, onde uma delas, segundo Sajka (2003), é o conhecimento profundo do professor e a compreensão do assunto. Segundo este autor, "a notação da função, por exemplo $f(x) = 2x - 3$, diz duas coisas ao mesmo tempo: como calcular o valor da função para argumentos específicos (evoca o processo) e encapsula todo o conceito de função para qualquer argumento dado (apresentando o objeto)" (p. 230). A notação de função é ambígua, pois a "flexibilidade no entendimento é necessária porque, por exemplo, $f(x)$ representa tanto o nome de uma função, como o valor da função f. A interpretação depende do contexto, o que pode confundir um aluno não avançado" (p. 230).

As representações dos diferentes tipos de funções apresentam vantagens e desvantagens para o aluno. Pierce et al. (2011), no seu estudo, verificou que a representação verbal é usada para introduzir um problema na linguagem natural, contudo "essa linguagem pode ser ambígua podendo conduzir a problemas de comunicação, ou trazer dificuldades em termos da conversão para outro sistema de representação" (p. 97). Por sua vez, a representação numérica começa por ser a mais familiar e conduz a outras representações, contudo "apesar de poder contribuir para a compreensão de determinado problema, não proporciona a generalização e pode esconder aspetos importantes" (p. 97). A representação gráfica é intuitiva e apelativa para quem prefere abordar os problemas de forma visual, ainda assim pode não permitir a precisão necessária para resolver o problema (Pierce et al., 2011). Por fim, a representação simbólica, "sendo concisa e geral, pode trazer dificuldades aos alunos pelo uso excessivo de símbolos" (p. 97).

No que respeita às dificuldades no uso da calculadora na resolução de problemas, Mitchelmore e Cavanagh (2000) apontaram para dificuldades na escala usada e a sua interpretação quando fazem 'zoom'. Por exemplo, "pares de gráficos lineares perpendiculares não aparecem necessariamente com ângulos retos na janela da calculadora" (p. 255). Ao diminuir o *zoom* para obter uma imagem real de um gráfico, também resulta em falhas (Mitchelmore & Cavanagh, 2000). De acordo com estes autores, o uso de *pixels* como representações de pontos pode causar várias dificuldades, como quando os pontos de descontinuidade não são visíveis devido à forma de como os *pixels* estão conectados. Outro fator crucial é o desconhecimento da tecnologia, pois os alunos apresentam uma experiência limitada no uso da calculadora gráfica, o que pode levar, por exemplo, à falta de progresso na unidade de transformações de gráficos (Mitchelmore & Cavanagh, 2000).

Com base em vários aspetos referidos anteriormente, compete ao professor na sua estratégia de ensino colmatar tais dificuldades nos seus alunos. Conforme defende Ponte (2005), é importante que os alunos procedam à "compreensão dos procedimentos matemáticos, ao domínio das notações e formas de representação relevantes, bem como das conexões dentro e fora da Matemática" (p. 18).

2.3. Estratégias de Intervenção

Nesta secção apresentam-se as metodologias de ensino e de aprendizagem que orientaram a minha intervenção pedagógica e as estratégias de avaliação da ação a que recorri para recolher os dados.

2.3.1. Metodologias de ensino e de aprendizagem

O objetivo geral a atingir com as aulas lecionadas foi averiguar o contributo da resolução de problemas na aprendizagem de funções com recurso à calculadora gráfica de alunos do 10.º ano de escolaridade. Tendo como foco a atividade do aluno, adotei nas minhas estratégias o formato de ensino exploratório. Para dinamizar as atividades realizadas, integrei nos meus planos de aula tarefas adequadas (problemas) aos objetivos delineados e materiais tecnológicos (calculadora gráfica) com o intuito de potenciar tais atividades.

Ensino Exploratório. O ensino exploratório contraria a ideia de transmissão unidirecional de conhecimento do professor para o aluno. No ensino direto, o professor assume um papel fundamental e "o aluno aprende ouvindo o que lhe é dito e fazendo exercícios" (Ponte, 2005, p. 12). O ensino é expositivo, em que os alunos não apresentam um grande envolvimento, e aprender consiste em "saber como se fazem" os exercícios para provas de avaliação (Ponte, 2005, p. 13). Para contrariar este tipo de ensino, o ensino exploratório proporciona condições para que os alunos aprendam através da resolução de tarefas e da sua discussão coletiva posterior, para sistematizar conhecimentos (Canavarro, 2011). Deste modo, os alunos têm "a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática" (Canavarro, 2011, p. 11). O papel do professor é fundamental neste tipo de ensino, na medida que deve escolher adequadamente as tarefas e orientar a exploração matemática, tendo em vista os objetivos pretendidos (Canavarro, 2011). Segundo Ponte (2005), nesta metodologia de ensino "o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem" (p. 13). Porém, de acordo com Canavarro (2011), tal metodologia de ensino gera desafios para o professor no processo de exploração, como a previsão de extensões matemáticas interessantes a realizar pelos grupos mais rápidos e também a antecipação das resoluções esperadas pelos alunos. Segundo a autora, também é de evitar o adiamento da discussão da tarefa e da síntese para a aula seguinte, pois perde-se o envolvimento dos alunos. O trabalho autónomo dos alunos na realização da tarefa deve ser acompanhado por questões e comentários do professor, porém com algum controlo, pois pode uniformizar as estratégias usadas na resolução da tarefa (Canavarro, 2011). Na concretização deste método, atendendo ao ensino a distância, o trabalho autónomo dos alunos era privilegiado. Os alunos tinham de resolver a tarefa prévia em casa, no dia anterior à aula síncrona, sendo posteriormente enviada momentos antes de começar a aula. Sendo assim, em momento de aula, procedia-se à sua discussão em grupo turma. Quando não era enviada qualquer tarefa previamente, na aula era dado tempo aos alunos para a resolver, e depois explicarem o seu ponto de vista e discutirem a sua resposta. O professor deve decidir quais os aspetos da tarefa a destacar, como organizar o trabalho dos alunos, que perguntas colocar de modo a constituírem um desafio aos alunos com diferentes níveis de experiência e como apoiá-los, mas sem eliminar o desafio contido na tarefa (Vale, 2012). Favorecer a discussão de ideias por parte dos alunos, com vista à aprendizagem de conceitos e procedimentos e ao desenvolvimento da comunicação matemática, é crucial, pois "a discussão e a síntese são muito mais do que um desfile de resoluções distintas apresentadas à vez por diferentes alunos" (Canavarro, 2011, p. 17). Logo, este modelo tem subjacente quatro fases: (i) introdução da tarefa; (ii) desenvolvimento da tarefa, em que pode ser resolvida em pares ou em pequenos grupos; (iii) discussão da tarefa, em que é realizada em grupo turma; e (iv) sistematização das aprendizagens, em que é valorizado o esclarecimento das ideias matemáticas emergentes e o confronto das diferentes estratégias e resoluções, mesmo que contenham erros (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012).

Natureza das tarefas- Problemas. Tendo em conta o objetivo pretendido, selecionei especialmente problemas para promover a aprendizagem dos alunos. Segundo Vale (2012), para melhorar a compreensão concetual da Matemática, as tarefas devem ser matematicamente desafiantes, que promovam o pensamento flexível, o raciocínio e a resolução de problemas. Promover a discussão dos alunos sobre as tarefas e as suas resoluções é importante, pois aprendem a partir de outras perspetivas, refletindo sobre as tarefas. Contudo, conforme defende Vale (2012), "as tarefas matematicamente desafiantes não são apenas as consideradas difíceis ou que envolvem um alto nível de matematização" (p.185), pois além de requererem mais do que elaborados conceitos matemáticos, "pretende-se um olhar diferente mobilizando os conhecimentos prévios e alguma persistência, além de que grande parte do desafio pode também ser fornecido pelo professor" (p. 185). Deste modo, o professor, de acordo com Pólya (1995), pode propor problemas aos seus alunos para que estes se possam sentir desafiados nas suas capacidades matemáticas. Os problemas são tarefas fechadas, de acordo com o grau de estrutura, mas com um elevado desafio, de acordo com o grau de desafio (Ponte, 2005). Assim, Ponte (2005) constatou que as tarefas de natureza mais fechada são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático, pois baseiam-se numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados. Por outro lado, os problemas também estão inseridos nas tarefas de natureza mais desafiante, junto com as investigações, pois são indispensáveis para os alunos experienciarem novos caminhos. Por isso, o professor em sala de aula, deve "incutir nas suas mentes (dos estudantes) algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e praticar" (Pólya, 1995, p. 6). Neste contexto, na resolução de problemas, o professor ao dirigir uma indagação ou sugestão, deve, além de auxiliar o estudante a resolver o problema proposto, desenvolver a capacidade de resolver problemas futuros por si próprio (Pólya, 1995). Esta exploração era prevista ser desenvolvida a pares ou em pequenos grupos, para uma maior entreajuda e um maior trabalho colaborativo entre os alunos, porém acabou por não ser possível, devido ao contexto pandémico vivido durante a intervenção pedagógica.

Materiais tecnológicos- Calculadora gráfica. Na era atual das novas tecnologias, o ensino-aprendizagem não se deve prender exclusivamente ao manual (Rocha, 2002). Quanto ao tópico das Funções, o uso da tecnologia torna-se imprescindível, conforme se verifica no programa em vigor e nas normas do NCTM (2007). O programa atual de Matemática considera que "no Ensino Secundário, a tecnologia, e mais especificamente a calculadora gráfica, deve ser utilizada em sala de aula e consequentemente em certos instrumentos de avaliação" (p. 29), como na resolução de problemas requerendo cálculos de valores aproximados de soluções de determinado tipo de equações ou de funções. Contudo, o uso da calculadora gráfica, deve ser acompanhado por um conhecimento prévio das propriedades analíticas de uma função, para visualizar adequadamente os gráficos e obter, por exemplo, soluções de equações, de extremos e pontos de extremo. Desta forma, os alunos precisam de saber quais ferramentas usar e quando (NCTM, 2007), como o cálculo mental, estratégias de papel e lápis, estimativa ou o uso da calculadora. Fatores como o contexto particular, a pergunta, e os dados, influenciam essa escolha (NCTM, 2007). Esta ideia vai ao encontro do que diz no programa, com o seu uso associado às funções:

> Como é evidente, a calculadora gráfica pode sempre ser utilizada para ilustrar propriedades de gráficos de funções adequadamente escolhidas pelo professor, ou para que o aluno teste o resultado de variações de parâmetros em classes de funções de que já tenha algum conhecimento teórico e, de maneira geral, para uma abordagem experimental ao estudo de funções, desde que devidamente controlada e acompanhada de uma análise crítica da validade de conjeturas que essas experiências possam induzir. (p. 29)

Assim, nos problemas propostos, propus métodos analíticos, gráficos ou ambos, de forma a avaliar a capacidade de os alunos resolverem problemas com e sem calculadora gráfica, e as suas dificuldades no seu uso. Estas dificuldades são inerentes, conforme verificou Tajudin et al. (2007) no seu estudo, no qual vários alunos tiveram dificuldade em usar a calculadora gráfica porque foi a primeira vez que esta foi apresentada como uma ferramenta de aprendizagem de matemática. A inserção de um material tecnológico é sempre um desafio para os alunos e também para os professores, pois além (do emulador) da calculadora gráfica, também recorri ao Google Classroom, Google Meet e ao PowerPoint.

O Google Classroom foi uma ferramenta útil para publicar avisos aos alunos, tarefas prévias às aulas lecionadas e as tarefas posteriores, assim como, a devida correção. Os alunos também podiam recorrer a esta ferramenta para publicar as suas dúvidas, que seriam respondidas a qualquer hora do dia e em qualquer dia da semana, o que proporcionou a interação entre aluno-professor.

O Google Meet foi a ferramenta escolhida para a realização das aulas à distância. Através desta ferramenta que proporciona a partilha do ecrã, projetava os PowerPoints elaborados por mim, que continham a teoria e prática de acordo com cada tópico. As discussões das tarefas eram realizadas nestes momentos e também esclarecidas dúvidas que surgiam nestes momentos.

O emulador da calculadora gráfica possibilitou a realização de uma forma mais eficaz das aulas à distância, pois os alunos anteriormente não tinham tido contacto com a utilização da calculadora gráfica. Desta forma, os alunos visualizavam como se deveria proceder para definir qualquer tipo de função e como se devia adequar a janela de visualização, assim como, testar possibilidades que os alunos questionavam.

Adaptação da organização das aulas. Conforme foi referido, foi implementado o uso de novas tecnologias que não estavam previstas, devido à evolução da pandemia inerente. A duração das aulas online foi afetada, sendo que as aulas síncronas passaram a ter a duração de 45 minutos e eram apenas duas por semana. As aulas assíncronas apresentavam a mesma duração, sendo que eram quatro por semana. Contudo, estas aulas eram opcionais, apesar que tinham uma considerável adesão na turma onde implementei o meu projeto de intervenção pedagógica. As tarefas prévias eram publicadas no dia anterior à aula síncrona e os alunos tinham até esse momento para as entregar. Durante a aula síncrona, era discutida e resolvida a/as tarefa(s) prévia(s), os problemas, em que tinham como efeito introduzir os conteúdos. Em alguns desses momentos, essa discussão iniciava-se com a apresentação de algumas resoluções enviadas pelos alunos, em que continham pontos de vista diferentes. Após isso, havia a explicitação do conteúdo abordado e alguma prática, com exercícios, pois também são tarefas importantes para a consolidação de conhecimentos (Ponte, 2005). Caso restasse tempo na aula, eram propostos 'desafios' aos alunos, que constavam em problemas com um grau de desafio mais elevado. Caso o tempo se tornasse escasso, estes eram realizados posteriormente, assim como, toda a prática.

2.3.2. Estratégias de avaliação da ação

Para dar resposta ao objetivo e às questões de investigação deste estudo, recorri a alguns métodos de recolha de dados, tais como: questionários (inicial e final); produções dos alunos, que resultam das suas resoluções das tarefas propostas; e gravações áudio e vídeo das aulas. Inicialmente, tinha previsto a aplicação do teste de diagnóstico e de um teste/questão aula. Porém, devido à mudança do contexto das aulas por causa da pandemia do Covid-19, tive de proceder a alterações. Como a minha Intervenção Pedagógica decorreu no 3.º período escolar, toda ela foi lecionada no regime de ensino a distância. Tal não era previsto em momento algum, o que fez com que todos tivéssemos sido apanhados desprevenidos. Deste modo, os métodos de recolha de dados iniciais já não faziam o mesmo sentido. O teste de diagnóstico realizado a distância poderia ter efeitos de plágio entre a turma ou o recurso a manuais ou outros meios. O teste/questão aula acabou por não ser aplicado, pois também neste regime os motivos são os mesmos. Os alunos acabaram por fazer uma questão aula para haver alguma forma de os avaliar, porém não serviu de efeito para o meu tema. Além disso, o capítulo das Funções é muito extenso e não foi todo lecionado por mim, sendo que o meu foco eram os tipos de funções, o que fez com que a questão aula, no momento em que foi aplicada, abordasse diversos conteúdos. Assim sendo, de seguida irei referir os instrumentos de recolha de dados utilizados.

Questionários (Inicial e Final). Ambos os questionários foram implementados no regime a distância, por isso as respostas foram enviadas pelos alunos através da plataforma *Google Classroom*. Entre as vantagens da realização de questionários surgem a forma de obter as mais rápidas e mais precisas, a maior liberdade nas respostas devido ao anonimato, menos risco de distorção das respostas pela não influência do investigador e também mais tempo para responder e numa hora que seja mais favorável para quem o vai realizar (Oliveira et al., 2016). Quanto às desvantagens dos questionários, apenas uma pequena percentagem dos questionários pode vir a ser recebida, um grande número de perguntas sem resposta, a devolução tardia, a impossibilidade de ajudar no caso de questões mal compreendidas e também o desconhecimento das circunstâncias em que foram preenchidos, o que torna difícil o controlo e verificação (Oliveira et al., 2016). Aspetos como a devolução tardia e o desconhecimento das circunstâncias, verificaram-se por terem sido realizados de modo online.

A motivação para a realização destes questionários foi analisar as dificuldades que os alunos poderiam manifestar no tópico das Funções, as perceções que os alunos tinham acerca da resolução de problemas, com recurso à calculadora, neste tópico. O questionário inicial permitiu-me conhecer, da melhor forma, a turma com que iria trabalhar, e refletir sobre as estratégias de ensino que iria adotar. Numa primeira parte, constam os dados gerais sobre cada aluno e, numa segunda parte, a sua opinião acerca do tópico das Funções e da resolução de problemas.

O questionário final foi implementado na última semana da minha intervenção. Este questionário permitiu-me analisar as perceções dos alunos quanto às estratégias de ensino que concretizei. Desta forma, analisei as perceções dos alunos segundo três dimensões: as Funções; os problemas; e a calculadora gráfica. Este questionário inicia-se com um grupo de questões fechadas, seguindo uma escala de *Likert*:: DT: Discordo Totalmente; DP: Discordo Parcialmente; I: Indiferente; CP: Concordo Parcialmente; CT: Concordo Totalmente, onde cada aluno tinha de selecionar a opção que lhe parecera mais adequada. Na análise das respostas foi considerado, para efeitos de cálculo de média e desvio padrão, a correspondência numérica: DT – 1, D – 2, I – 3, C – 4 e CT – 5. De seguida, foi apresentado um grupo constituído por questões abertas relacionadas com as vantagens e desvantagens da pandemia atual no método de ensino; as vantagens e desvantagens da resolução de problemas e da calculadora gráfica na aprendizagem de Funções, assim como as dificuldades gerais sentidas na aprendizagem deste tópico.

Produções dos alunos. As produções dos alunos foram recolhidas através do *Google Classroom*, dada à modalidade de ensino à distância. As tarefas prévias eram enviadas no dia anterior à aula, para os alunos as resolver. Na aula, no momento inicial, era o momento de correção e discussão. Para as tarefas dadas ao longo da aula, dava tempo aos alunos para refletirem sobre a sua resolução e, após isso, dizia para submeterem no *Classroom*. O método mais eficaz foi a resolução realizada no dia anterior, sendo as tarefas enviadas até ao momento da aula, apesar de não haver muita margem de tempo para uma análise prévia global. Os trabalhos de casa também eram de interesse para o meu Projeto e o seu prazo era anterior ao da tarefa prévia. Todas as dúvidas e todas as correções dos trabalhos de casa eram realizadas nas sessões assíncronas e todos os *PowerPoints* disponibilizados para os alunos no *Classroom*.

As respostas dos alunos às tarefas propostas em cada questão foram classificadas segundo quatro tipos de resposta: correta (C), parcialmente correta (PC), incorreta (I) e não realizada (NR). Estas respostas, pelo anonimato, são apresentadas por A seguido de um número atribuído a cada aluno.

Gravações das aulas. As aulas da minha intervenção pedagógica foram gravadas pelo *Meet*, plataforma usada para as aulas lecionadas a distância. As autorizações para a gravação áudio e vídeo das aulas foram dadas uns meses antes da minha Intervenção pelos encarregados de educação e pela direção da escola. Não houve quaisquer problemas em aceitarem as gravações. O regime de ensino a distância facilitou a recolha destes dados, pois a gravação ficou mais nítida e percetível, sem ruídos. Para este efeito, uma das minhas colegas de estágio gravava-me as aulas, síncronas e assíncronas. Estas gravações permitiram-me recolher toda a informação que se passava nas aulas, como diálogos, dúvidas e tudo o que acontecia nesses momentos.

CAPÍTULO 3

INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Este capítulo explicita os resultados obtidos ao longo da minha intervenção pedagógica. Na tabela seguinte, apresenta-se a organização da minha Intervenção Pedagógica: na primeira coluna encontra-se o número de aulas que lecionei; na segunda coluna, o tópico lecionado; na terceira, os objetivos de cada aula; e, por último, os recursos utilizados na dinamização das atividades dessas aulas. A calendarização das aulas foi pensada de modo a cumprir o Programa já estabelecido no início do ano letivo na escola, assim como os objetivos do meu Projeto, tendo em conta as aprendizagens dos alunos.

Tabela 2 - Aulas lecionadas no âmbito da Intervenção Pedagógica

Aula(s)	**Tópico**	**Objetivos**	**Recursos**
Aula 1:	Intervalos de monotonia de funções reais de variável real.	Identificar os intervalos de monotonia de uma função real de variável real.	Calculadora gráfica Powerpoint Google Meet
Aula 2:	Extremos de funções reais de variável real.	Identificar os extremos de uma função real de variável real.	
Aula 3:	Extremos de funções reais de variável real.	Sistematizar conhecimentos sobre os extremos de uma função real de variável real.	
Aula 4:	Função quadrática.	Estudar funções do tipo $y = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$.	
Aula 5:	Inequações do 2.º grau.	Resolver inequações quadráticas.	
Aula 6:	Função definida por ramos.	Definir funções por ramos. Representar graficamente funções definidas por ramos. Determinar o domínio e zeros de funções definidas por ramos.	
Aula 7:	Função módulo.	Representar graficamente a função $y = \|f(x)\|$. Estudar funções definidas por $f(x) = a\|x-b\| + c$.	
Aula 8:	Equações e inequações com módulos.	Resolver equações e inequações com módulos.	
Aula 9:	Inequações com módulos.	Resolver inequações com módulos.	
Aula 10:	Funções polinomiais: Função cúbica.	Definir a expressão analítica de uma função cúbica a partir de pontos notáveis da função. Resolver inequações através da análise do sinal de polinómios do 3.º grau.	
Aula 11:	Funções polinomiais: Função cúbica.	Praticar os conhecimentos obtidos na aula anterior.	
Aula 12:	Resolução de problemas acerca dos tipos de funções lecionados.	Resolver problemas com recurso à calculadora gráfica.	
Aula 13:	Operações com funções.	Operar algebricamente com funções.	
Aula 14:	Operações com funções.	Operar algebricamente com funções.	

3.1. Momentos da Intervenção pedagógica

Das 14 aulas lecionadas na minha intervenção pedagógica, analiso a informação proveniente de três (aulas 6, 7 e 12): as aulas 6 e 7 refletem as atividades de ensino e de aprendizagem da função definida por ramos e da função módulo, enquanto a aula 12 incide sobre a sistematização de conhecimentos das funções lecionadas através da resolução de problemas propostos.

3.1.1. Função definida por ramos

A introdução das funções definidas por ramos resultou da discussão sobre as resoluções dos alunos dos Problemas 1 e 2. O Problema 1 diz respeito à representação, por ramos, da função que traduz os preços de chamadas telefónicas de uma empresa de telecomunicações.

Problema 1: O custo das chamadas

Uma empresa de telecomunicações anuncia o seguinte plano de preços para as chamadas telefónicas feitas a partir de um telefone registado nessa empresa:

- 12 cêntimos pelo primeiro minuto de conversação;
- 0,1 cêntimos por segundo, a partir do primeiro minuto.

a) Que expressão/expressões dá o preço a pagar, em cêntimos, por uma chamada feita a partir de um telefone registado nessa empresa, em função do tempo t de duração da chamada, medido em segundos?

b) Representa graficamente, com recurso à calculadora gráfica, o preço a pagar por uma chamada em função do tempo nesta empresa de telecomunicações.

c) A Patrícia esteve 2,4 minutos numa chamada telefónica. Determina, analiticamente e recorrendo à calculadora gráfica, quanto gastou a Patrícia.

d) Uma outra empresa de telecomunicações tem um plano de preços de chamadas telefónicas que cobra 0,15 cêntimos por segundo. Que plano de preços escolherias? Justifica a tua resposta com sustentação gráfica.

A identificação das expressões que traduzem o pagamento das chamadas telefónicas em função dos minutos gastos permite, na segunda alínea, a sua representação gráfica e a resposta às questões colocadas nas restantes alíneas.

A alínea a) deste problema incide no facto de os alunos apresentarem as expressões respeitantes aos dois ramos da função, na alínea b), se apresentam um gráfico de acordo com o descrito no enunciado, na alínea c), se substituírem o valor com as unidades corretas, no ramo para este efeito, assim como, o procedimento na calculadora, e na última alínea, se a exploração do plano preferível for bem fundamentada, sustentada com os gráficos (C). Caso apresentem um dos critérios e falhem outro, as respostas são classificadas como parcialmente corretas (PC). Se qualquer um dos procedimentos não tiver qualquer sentido no contexto do problema, a resposta é considerada incorreta (I). Não responde (NR), caso os alunos não respondam à questão. Na Tabela 3, são apresentados os resultados das respostas dos alunos ao Problema 1.

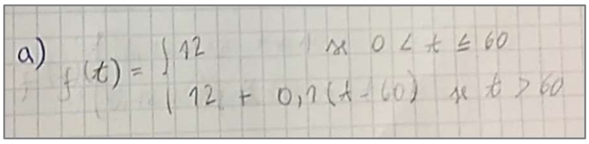
Tabela 3 - Frequência das respostas dos alunos às alíneas do Problema 1 $(n = 26)$

Alíneas e Critérios	**C**	**PC**	**I**	**NR**
a) Definir a função por ramos.	11(42,30%)	3(11,54%)	6(23,08%)	6(23,08%)
b*) Efetuar o esboço gráfico da função.	4(15,38%)	1(3,85%)	14(53,85%)	7(26,92%)
c) Determinar analiticamente o custo de uma chamada.	18(69,22%)	1(3,85%)	1(3,85%)	6(23,08%)
c*) Determinar graficamente o custo de uma chamada.	–	–	–	26(100%)
d) Discutir, analiticamente, o preço de chamadas telefónicas de duas empresas.	–	9(34,61%)	5(19,23%)	12(46,16%)
d*) Discutir, graficamente, o preço de chamadas telefónicas de duas empresas.	–	7(26,92%)	7(26,92%)	12(46,16%)

Da análise da Tabela 3, relativamente à primeira alínea, grande parte dos alunos respondeu corretamente à formulação da função descrita no problema (42,30%). Porém, demonstraram falhas, como apenas apresentar uma das funções ou interpretar de forma errada o enunciado (23,08%), o que levou à representação errada da função definida por ramos (53,85%). Nas restantes alíneas, constata-se que os alunos optaram por não resolver os problemas com recurso à calculadora gráfica. Apenas na última alínea recorreram ao gráfico para interpretar o problema, mesmo que de maneira incorreta ou parcialmente correta (53,85%). Contudo, os restantes alunos (46,16%) abordaram analiticamente ou não responderam de nenhuma forma.

Em relação à alínea a), um número significativo de alunos (42,30%) respondeu corretamente à representação analítica da função descrita no problema. Neste caso, consideraram de forma correta que, se a chamada durar um minuto ou menos, o preço a pagar é de 12 cêntimos; se durar mais do que um minuto, o total a pagar é a soma de duas parcelas, conforme exemplifica o aluno A2 (Figura 3).

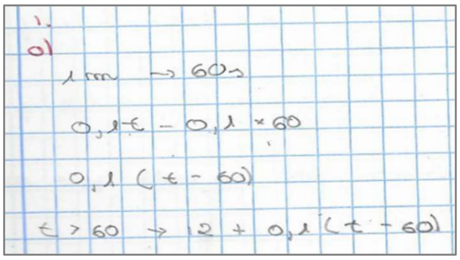
Figura 3 – Resposta correta do aluno A2 à alínea a) do Problema 1.



Na sua resolução, o aluno traduz o que Pólya (1995) chama de 'entender o problema', explicitando a informação matemática que retirou do enunciado do problema, através da conexão entre os dados e a incógnita, o que denota que compreendeu o significado de cada termo utilizado.

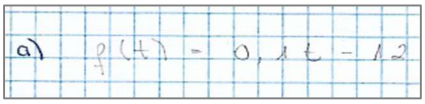
Contudo, 11,54% dos alunos não responderam de forma totalmente correta ao questionado, pois apenas definiram o ramo da função para $t > 60$, como revela a resolução do aluno A20 (Figura 4).

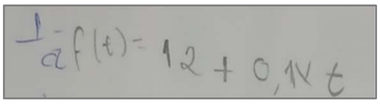
Figura 4 – Resposta parcialmente correta do aluno A20 à alínea a) do Problema 1.



Em relação às respostas incorretas, alguns alunos não consideraram o preço a pagar pelo número de segundos de conversação que decorre para além do primeiro minuto $(t - 60)$, além de também não considerarem os dois ramos que representam a função, como expressam as respostas dos alunos A21 e A18 (Figura 5).

Figura 5 - Respostas incorretas dos alunos A21 e A18 à alínea a) do Problema 1.

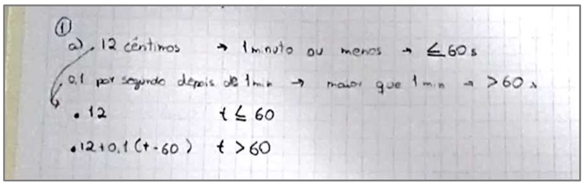




Tais respostas revelam uma interpretação inadequada do enunciado do problema, o que tende a afetar a resolução das restantes alíneas. Para Pólya (1995), esta fase é crucial para que os alunos estabeleçam uma possível estratégia de resolução de problemas.

Na aula, a distância, foram discutidas duas resoluções desta alínea efetuadas previamente, sendo uma delas a do aluno A18 (apresentada acima) e a outra do aluno A23 (Figura 6).

Figura 6 - Resposta correta do aluno A23 à alínea a) do Problema 1.



Para envolver os alunos nessa discussão, convidei um aluno, que respondeu de forma similar ao aluno A18, para explicar à turma qual das resoluções considerava correta.

Professora: Qual é que achas que é a função correta que representa a situação apresentada no problema?

A13: Eu coloquei a primeira.

Professora: Mas porque é que achas que é a primeira?

A13: Porque supostamente o t vai dependendo dos segundos e vamos ter de multiplicar $0{,}1$ por segundos de chamada, mais os 12 após o primeiro minuto.

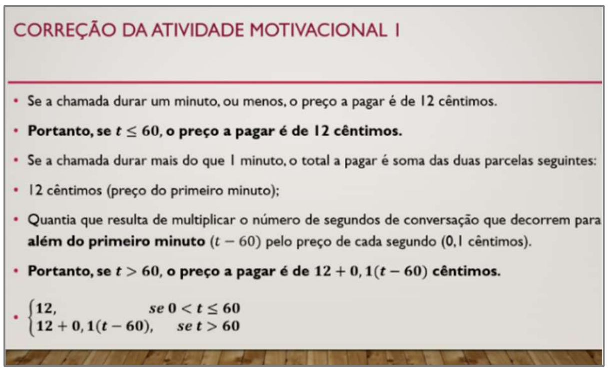
Professora: Sim, os 12 após o primeiro minuto. Por exemplo, quando a chamada dura $40s$, qual é o seu custo?

A13: É 12.

Professora:	E quando dura $50s$ ou $55s$?
A13:	Também é 12.
Professora:	E a partir do primeiro minuto?
A13:	Começa a contar os $0{,}1$.
Professora:	Então, aqui na tua expressão, tens de tirar o custo do primeiro minuto, ou seja, tens de tirar os $60\ seg$ iniciais. Até $60s$, o custo é 12, e a partir desse valor, assumimos os 12 iniciais mais os $0{,}1$, que é o preço de cada segundo, além do primeiro minuto. Imagina que a chamada dura $1{,}5$ min, ou seja, 1 min 30 seg, porque é que o preço vai ser 15 cêntimos?
A13:	Porque é 12 cêntimos pelo primeiro minuto, mais $0{,}1$ cêntimos por cada um dos 30 seg seguintes.
Professora:	Exatamente, por exemplo, se fizeres para $61\ seg$, com a função definida como tinhas, ficava $12 + 0{,}1 \times 61$ que dá aproximadamente 18 cêntimos. Mas, se fizeres $12 + 0{,}1(61 - 60)$, fica $12 + 0{,}1 \times 1$, pois só conta $1\ seg$ (a partir dos 60). Todos perceberam porque é a segunda expressão)?
Alunos:	Sim.
Professora:	Atenção que muitos de vocês, além de definirem incorretamente a função através de $12 + 0{,}1t$, não expressaram a parte da função que é constante.

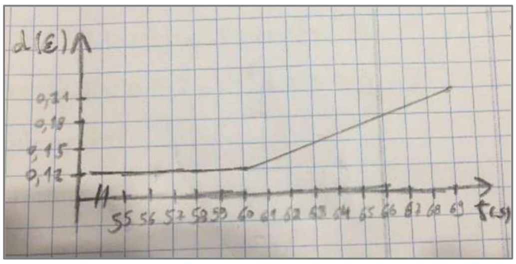
De forma a complementar este diálogo, projetei o seguinte slide:

Figura 7 - Definição da função que traduz os dados do Problema 1.



Relativamente à alínea b), 53,85% dos alunos não esboçaram corretamente o gráfico que representa a função que definiram na alínea anterior, o que só foi efetuado por 15,38% dos alunos, tal como explicita o esboço gráfico efetuado pelo aluno A9 (Figura 8).

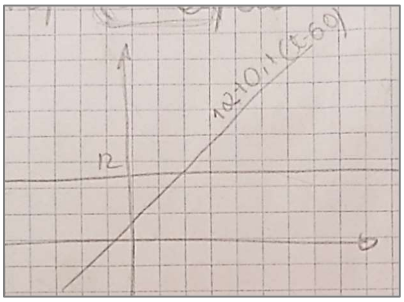
Figura 8 - Resposta correta do aluno A9 à alínea b*) do Problema 1.



O esboço gráfico efetuado por este aluno não resultou da reprodução do gráfico obtido na calculadora gráfica, visto que ainda não tinha aprendido como editar neste artefacto a expressão de uma função definida por ramos.

Porém, nem todos os alunos atendem ao contexto do problema nos esboços que efetuam, razão pela qual as suas resoluções são consideradas parcialmente corretas na alínea em análise, como exemplifica o efetuado pelo aluno A4 (Figura 9).

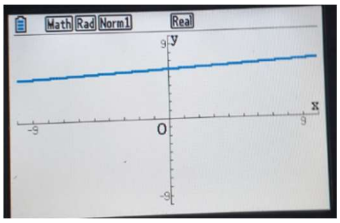
Figura 9 - Resposta parcialmente correta do aluno A4 à alínea b*) do Problema 1.



O aluno indicia falta de capacidade crítica ao considerar a parte negativa no gráfico, assim como não restringe o domínio da função. A interação com o objeto matemático pode levar o aluno a definir o domínio que contextualiza a situação em estudo, mas para isso é necessário terem conhecimentos prévios consolidados (Consciência, 2013) e interpretarem corretamente o problema (Pólya, 1995).

No caso das respostas incorretas, as quais representam mais de metade das respostas dadas, salienta-se a obtenção do gráfico na calculadora gráfica, como exemplifica o esboço gráfico obtido pelo aluno A23 (Figura 10).

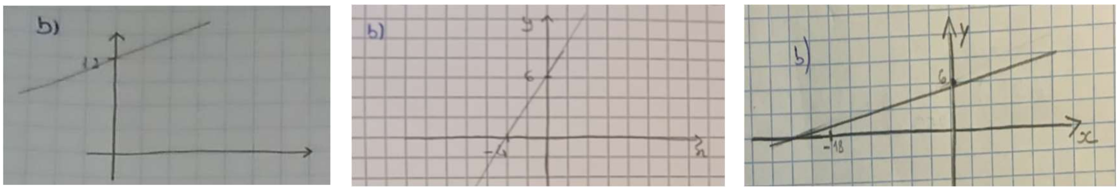
Figura 10 - Resposta incorreta do aluno A23 à alínea b*) do Problema 1.



O aluno apenas inseriu um dos ramos da função (apesar de a ter definido corretamente na alínea anterior) e não explicitou qualquer intervalo do domínio da função à luz do contexto do problema. Essa ausência repercute-se na definição da janela de visualização na calculadora gráfica da parte do gráfico que representa a função, pois aparece a parte negativa do gráfico. Percebe-se que o aluno não alterou a 'janela padrão' de visualização da calculadora, o que não lhe permitiu visualizar a representação gráfica de cada uma das expressões que define a função nos respetivos domínios de validade. Tal indefinição induziu-o a errar. Para o NCTM (2007), a tecnologia não deve ser usada para substituir a compreensão e a intuição. Contudo, estas evidências falharam neste caso, pois o aluno reproduziu, sem refletir, o que observou na calculadora.

Noutras resoluções consideradas incorretas à alínea em análise, emergem a representação inadequada dos zeros da função e a interseção do gráfico da função com o eixo O_y no ponto $y = 6$, como ilustram as resoluções dos alunos A17 e A22. A resolução do aluno A16 provém de uma definição errada da função do problema.

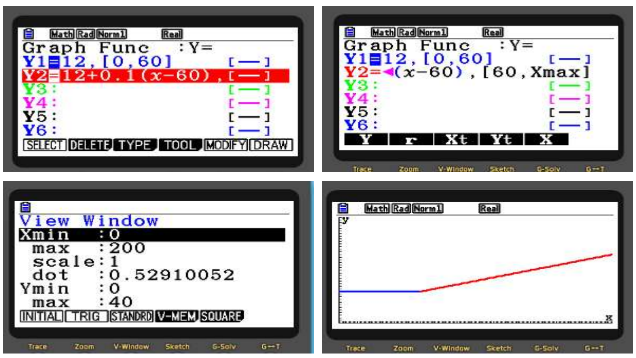
Figura 11 - Respostas incorretas dos alunos A16, A17 e A22 à alínea b*) do Problema 1.



Tais considerações não fazem sentido, pois a função não admite zeros e não é da família de uma função afim.

Na discussão sobre a resolução desta alínea com o grupo turma, apresentei duas resoluções, sendo uma parcialmente correta (do aluno A4) e outra incorreta (do aluno A6), a qual é semelhante à resolução do aluno A22. Nestas resoluções os alunos não conseguiram esboçar corretamente o gráfico que representa a função através da calculadora: não representaram a parte da função constante $f(t) = 12$ e não restringiram os domínios, $t \in [0, 60]$ para a parte constante da função (1.º ramo) e $t \in [60, +\infty[$ para o segundo ramo da função. Como era a primeira vez que em contexto de sala de aula os alunos eram confrontados com a representação gráfica de uma função definida por ramos, procurei elucidá-los como se efetuava essa representação na calculadora gráfica (Figura 12).

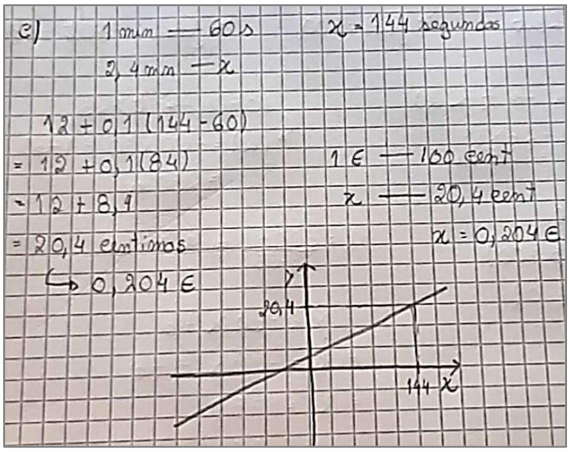
Figura 12 - Representação gráfica de uma função definida por ramos através da calculadora gráfica à alínea b*)



Em tal representação importa inserir corretamente os intervalos das variáveis, com a particularidade de atender se são abertos ou fechados. Para este efeito, ilustrei como se inseria o $xmax$ através do catálogo $(shift - 4)$. De seguida, mostrei que sem a janela adequada não se visualiza o gráfico pretendido, atribuindo valores adequados, o que lhes fez ver a importância da janela escolhida e como se altera os valores $(v - window - f3)$.

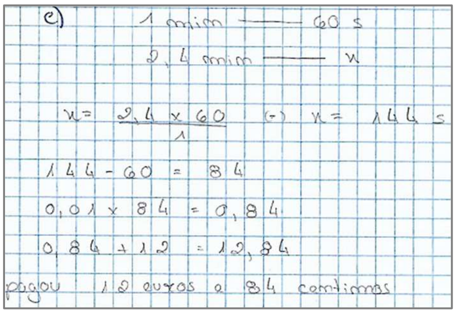
Na alínea c), os alunos não recorreram à calculadora gráfica para obter a resposta necessária, preferindo resolver apenas analiticamente. Isto vai ao encontro do estudo de Mesa (2008), que refere que os alunos preferem optar por estratégias analíticas em vez de usarem a calculadora para explorarem o problema (estratégia gráfica). Neste caso, as 69,22% respostas corretas seguiram o mesmo raciocínio, e revelaram que foi a alínea na qual os alunos sentiram menos dificuldade. Os alunos tinham de converter os minutos para segundos e, seguidamente, substituir os 144 segundos na expressão da função definida para valores superiores a 60 segundos, determinando o valor em cêntimos, tal como exemplifica a resolução do aluno A5 (Figura 13).

Figura 13 - Resposta correta do aluno A5 à alínea c) do Problema 1.



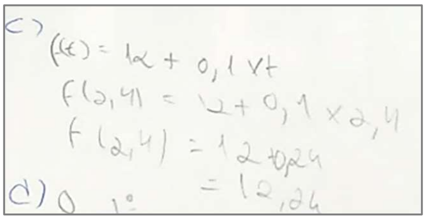
Nesta alínea, apenas houve uma resposta parcialmente correta. O aluno A21 apesar de ter definido incorretamente a função na primeira alínea, nesta alínea respondeu corretamente, somou os 12 cêntimos e retirou os 60 segundos iniciais ao valor descrito no enunciado. Porém, multiplicou por 0,01 cêntimos e não por 0,1 cêntimos por segundo a partir dos 84 segundos, o que lhe fez ter obtido um valor errado assim como a unidade de medida (em cêntimos e não em euros) (Figura 14).

Figura 14 - Resposta parcialmente correta do aluno A21 à alínea c) do Problema 1.



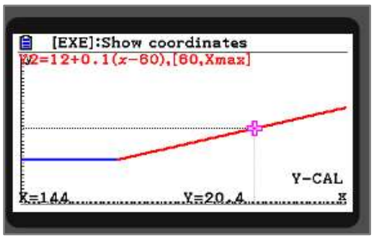
Da mesma forma, apenas houve uma resposta incorreta e outras sem qualquer resposta (23,08%). A resposta incorreta a que chegou o aluno A18 é semelhante à que chegou o aluno A21 (parcialmente correta), contudo o aluno A18 não converteu os 2,4 minutos para segundos e usou uma expressão incorreta da função (Figura 15).

Figura 15 - Resposta incorreta do aluno A18 à alínea c) do Problema 1.



Para determinar quanto gastou a Patrícia, na terceira alínea, os alunos não revelaram dificuldades, visto que somente tinham que utilizar a parte da função $f(t) = 12 + 0{,}1(t - 60)$, pois $t > 60$, e converter o resultado para segundos. Como não conseguiram esboçar o gráfico que representa a função pela calculadora, utilizaram métodos analíticos. Por isso, mostrei como se chegava ao pretendido, para além dos procedimentos analíticos (Figura 16).

Figura 16 - Representação da alínea c*) através da calculadora gráfica.

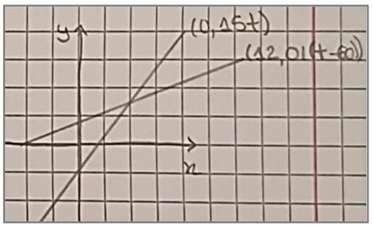


Por último, quanto à última alínea, foi pedido aos alunos que escolhessem entre o plano de preços da empresa referido no problema e o de uma nova empresa. Quase metade dos alunos (46,16%) não recorreram à representação gráfica para analisar o problema e não responderam à questão, e 26,92%

responderam de forma parcialmente correta. Tanto graficamente como analiticamente verifica-se que não houve respostas corretas. No caso das respostas sem recurso ao gráfico, há mais respostas parcialmente corretas (34,61%).

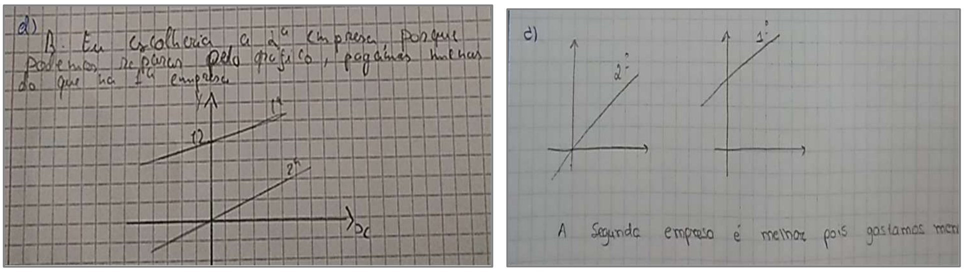
Após a análise das respostas relativamente à escolha do plano de preços, constata-se que as respostas foram repartidas, 10 alunos (38,46%) optaram pelo plano de preços antigo e os outros 10 pelo plano de preços novo. Os restantes seis alunos (23,08%) não responderam ao problema proposto. No que respeita à resolução gráfica, ao esboçar o gráfico os alunos inseriram a expressão da nova função ($f(t) = 0{,}15t$) e, neste caso, optaram pelo plano antigo. A resolução do aluno A17 (Figura 17) exemplifica as resoluções onde o gráfico se encontra parcialmente correto e que não identificaram o ponto de interseção onde ocorre a mudança da preferência pelo plano mais económico. Também consideraram a parte negativa do gráfico, o que não faz sentido no contexto do problema, assim como não representaram corretamente o gráfico do plano antigo, visto que falta o ramo de $[0, 60]$ segundos. Isto faz com que, apesar de o gráfico esboçado ser apto para dar uma resposta ao problema, tenham respondido de forma incompleta, pois denota-se que o plano novo é mais económico até ao ponto de interseção (120 segundos).

Figura 17- Resposta parcialmente correta do aluno A17 à alínea d*) do Problema 1.



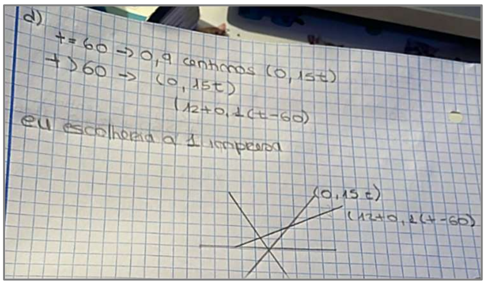
Relativamente às respostas incorretas (26,92%), quatro das sete respostas foram ao encontro da resolução do aluno A8 (Figura 18), definindo incorretamente a função que traduz o problema, colocando na calculadora $f(t) = 0{,}1t + 12$, mas colocando corretamente a expressão que representa a nova função $f(t) = 0{,}15t$. Assim, pode-se ver que os gráficos das funções não se cruzam e que o plano novo é o mais económico, conforme optaram, o que se encontra errado. O aluno A16 também optou pelo plano da nova empresa, sendo a única diferença, relativamente ao descrito anteriormente, ter apresentado os gráficos separadamente.

Figura 18 - Respostas incorretas dos alunos A8 e A16 à alínea d*) do Problema 1.



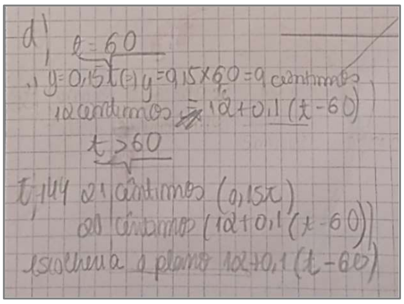
No caso das respostas incorretas à resolução gráfica, um dos alunos optou pelo plano da primeira empresa. Porém, o gráfico também se encontra mal esboçado, sem representação dos eixos coordenados e com três funções representadas, sendo uma delas simétrica à função $f(t) = 0{,}15t$.

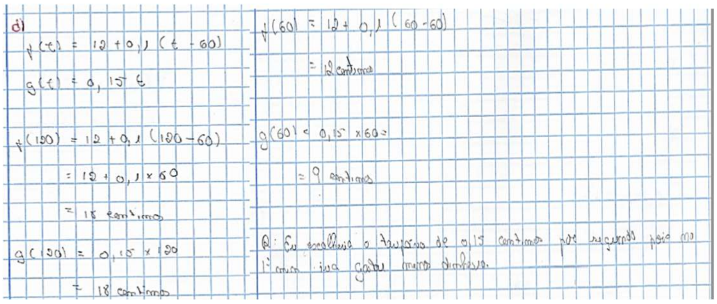
Figura 19- Resposta incorreta do aluno A19 à alínea d*) do Problema 1.



Quanto às respostas à última alínea recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, também não se apresenta nenhuma resolução totalmente correta, pois os alunos não concluíram de forma correta que a escolha quanto ao plano de preços ideal variava com o tempo da chamada. Quanto às respostas parcialmente corretas, os alunos substituíram $t = 60$, e para $t > 60$, no caso do aluno A4, substituíram por $t = 144$, e no caso do aluno A20, por $t = 120$. Estas resoluções exemplificam o raciocínio apresentado pelos restantes alunos, porém, o aluno A4 concluiu que o plano antigo era o preferível, enquanto o aluno A20 concluiu que era o plano novo. Ambos os alunos fizeram corretamente os cálculos, porém o aluno A4 não reparou que para $t = 60$ (e até $t = 120$) o plano novo apresentava melhores preços relativamente ao escolhido. O aluno A20 reparou neste facto, mas não fez os cálculos para $t > 120$, para concluir que o antigo, neste caso, já seria o escolhido.

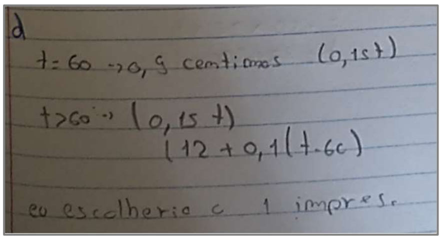
Figura 20 - Respostas parcialmente corretas dos alunos A4 e A20 à alínea d) do Problema 1.

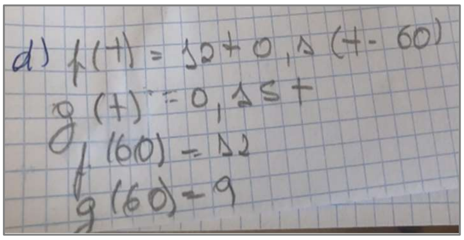




No que respeita às resoluções incorretas, os alunos optaram pelo primeiro plano, contudo não justificaram a razão da sua escolha. O aluno A11 apenas apresentou os cálculos para a função que traduz o segundo plano, exemplificando a maioria dos casos. O aluno A7 apresentou os cálculos para o primeiro plano, contudo apenas no primeiro minuto.

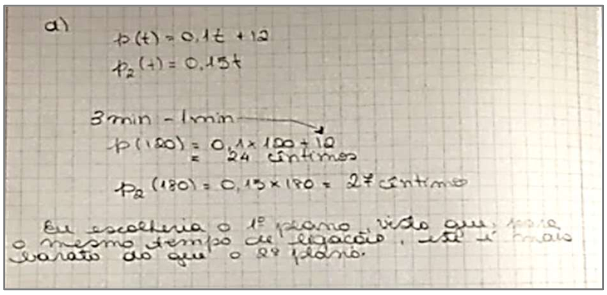
Figura 21 - Respostas incorretas dos alunos A11 e A7 à alínea d) do Problema 1.





Na análise das resoluções dos alunos na aula a esta alínea, houve uma maior divergência de respostas, como era esperado. Mais uma vez, apresentei duas respostas dos alunos, uma incorreta (do aluno A16 (Figura 18) de forma gráfica, e outra parcialmente correta (do aluno A3) de forma analítica (Figura 22).

Figura 22 - Resposta parcialmente correta do aluno A3 à alínea d) do Problema 1.

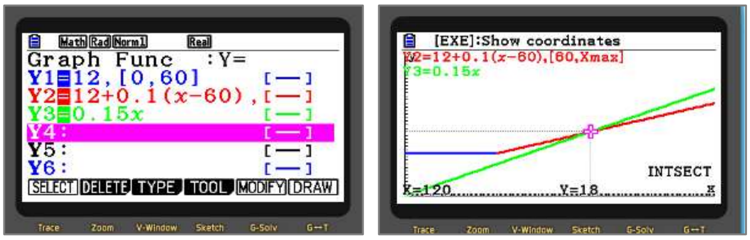


O aluno A16 escolheu o segundo plano, enquanto o aluno A3 escolheu o primeiro. No caso do aluno A16, assumiu que a nova função, $f(t) = 0{,}15t$, como o seu gráfico passa na origem do sistema de eixos cartesiano, se gasta menos. Por outro lado, o aluno A3, utilizou um exemplo, para 180 segundos (3 minutos), para mostrar que é mais económico o primeiro plano. Neste caso, a resposta está correta, apesar de não estar bem definida a função: não é $f(t) = 0{,}1t + 12$, mas sim $f(t) = 0{,}1(t - 60) + 12$. Contudo, a 'nova' função está bem representada e, nos cálculos, para o plano 1, o aluno A3 colocou $f(120)$ e não $f(180)$. Para os 180 segundos, o plano 1 é o mais económico, mas o mesmo não acontece nos outros casos. Na aula, houve o seguinte diálogo, após a explicação das resoluções projetadas:

Professora: Qual acham que é o plano mais económico?
A3: Eu acho que é o 2.º, pelo gráfico parece que é "de um jeito"... mas analiticamente é por outro.
Professora: No gráfico, vocês já perceberam que não definiram bem os intervalos, têm de definir o domínio para cada uma das expressões...
A6: Eu pus o 1.º plano.
Professora: Porquê?
A6: Eu fiz para $t > 60$, e era mais caro no 2.º...
Professora: Ok, era mais caro no 2.º... e como é que viste isso? Pelo gráfico?
A6: Substituí analiticamente os valores na expressão.
Professora: Como neste segundo exemplo?
A6: Sim. Substituí os valores e depois fiz o gráfico.

De seguida, exemplifiquei com a calculadora gráfica para perceberem que há um ponto de interseção entre os gráficos que representam o custo de chamadas das duas empresas, o que irá diferenciar a escolha entre os planos.

Figura 23 - Resolução da alínea d*) através da calculadora gráfica



Assim, ficou claro que, até aos 120 segundos de chamada, o plano da nova empresa de telecomunicações é mais económico. A partir desse tempo, é mais económico o plano da primeira empresa de telecomunicações.

De modo a aprofundar o estudo de funções definidas por ramos, os alunos foram desafiados a resolver o Problema 2:

Problema 2: O trajeto da caminhada do Tomás

O Tomás efetuou uma caminhada a partir da sua casa. Mantendo uma velocidade constante, percorreu 500 metros em 20 minutos. Neste instante, encontrou um amigo e ficaram a conversar durante 5 minutos. Apercebendo-se que se tinha esquecido do telemóvel, regressou a casa a um ritmo constante tendo demorado 10 minutos.

a) Esboça o gráfico que descreve a caminhada do Tomás, que relaciona a distância, d, em relação à sua casa, em metros, com o tempo, t, em minutos.

b) Define, analiticamente, a função que relaciona a distância, d, do Tomás em relação à sua casa, em metros, com o tempo, t, em minutos, que demorou o seu percurso.

c) Calcula, analiticamente e com recurso à calculadora gráfica, a distância em relação a casa ao fim de 13 minutos. E ao fim de 30 minutos, a que distância se encontra?

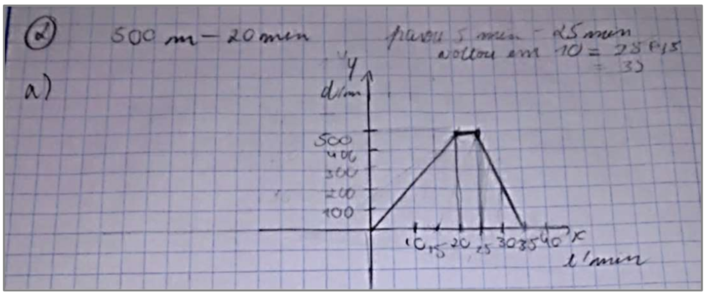
As respostas à alínea a) deste problema são consideradas corretas (C), se apresentam um gráfico de acordo com o descrito no enunciado, na alínea b), caso definam as três expressões de modo a representar a função definida por ramos, e, por último, caso substituam no ramo correto os valores indicados para calcular as distâncias. Neste caso, também é pedido que recorram à calculadora, com a correta edição das funções e procedimento explícito para o que é pedido (C). Caso apresentem um dos critérios e falhem outro, as respostas são classificadas como parcialmente corretas (PC). Em qualquer uma das questões, se os procedimentos utilizados não tiverem qualquer sentido no contexto do problema, a resposta é considerada incorreta (I). Os restantes casos representam situações em que os alunos não apresentam qualquer resposta à(s) questão(ões) (NR). Na Tabela 4, são apresentados os resultados das respostas dos alunos ao Problema 2.

Tabela 4 - Frequência das respostas dos alunos às alíneas do Problema 2 $(n = 26)$

Alíneas e Critérios	**C**	**PC**	**I**	**NR**
a) Efetuar o esboço gráfico da situação descrita.	19 (73,08%)	–	–	7 (26,92%)
b) Definir a função por ramos.	11 (42,30%)	–	1 (3,85%)	14 (53,85%)
c) Determinar analiticamente a distância percorrida.	13 (50%)	–	1 (3,85%)	12 (46,15%)
c*) Determinar graficamente a distância percorrida.	2 (7,69%)	–	–	24 (92,31%)

Em relação à alínea a), a maioria dos alunos (73,08%) não revelou dificuldades para representar o gráfico que traduz a situação do problema, tal como ilustra a resolução do aluno A6 (Figura 24).

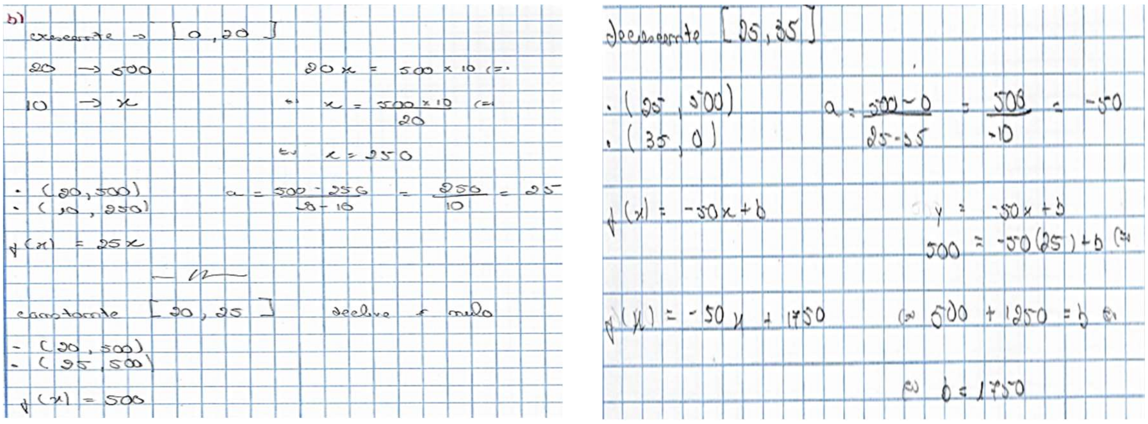
Figura 24 - Resposta correta do aluno A6 à alínea a) do Problema 2



A resolução do aluno traduz uma das fases de Sfard (1991), a ‘condensação’, ao combinar um processo com outros já conhecidos, sendo, portanto, capaz de desenhar o gráfico esperado.

Na segunda alínea, os alunos tinham que recorrer ao cálculo do declive de segmentos de reta, para representar graficamente o trajeto da caminhada do Tomás quando se afasta e quando regressa a casa, como também traduzir que no intervalo $[20, 25[$, a função é constante, como exemplifica a resolução do aluno A20 (Figura 25).

Figura 25 - Resposta correta do aluno A20 à alínea b) do Problema 2.



Nesta alínea, o aluno A23, além de apresentar uma resolução analítica correta, após a determinação das expressões de cada um dos três ramos, também representou o gráfico na calculadora gráfica. Nessa representação, começou por esboçar o gráfico do ramo em que a função é crescente; de seguida do ramo em que a função é constante; do ramo em que a função é decrescente; e, por fim, a representação gráfica da função na totalidade. Em todos os casos, apresentou as janelas utilizadas, as quais não se encontram bem enquadradas no $xmin$ e $xmax$. No caso do $ymax$, na representação gráfica da função na totalidade, também podia ter assumido valores maiores quanto à ordenada, para uma melhor visualização.

Figura 26 - Resposta correta do aluno A23 à alínea b) do Problema 2.

No que respeita ainda a esta alínea, um dos alunos, A9, apresentou diretamente a função, definindo-a incorretamente. A função encontra-se definida por ramos, com os valores dos intervalos corretos, porém os intervalos encontram-se com a nomenclatura errada. Na última expressão, o aluno A9 representou erradamente os sinais de menor e maior entre os quais t está definido, pois deveria ser: $25 \leq t \leq 35$, onde neste caso apresentou como sendo x. Além disso, na maioria dos restantes intervalos do domínio da função, a abertura dos intervalos não se encontra correta: $0 \leq t < 20$ e $20 \leq t < 25$. Contudo, os erros fulcrais da sua resolução dizem respeito à definição das expressões algébricas para as partes do domínio onde a função é crescente e decrescente. O aluno remeteu-se ao gráfico esboçado, sem determinação de pontos, por exemplo, $(20{,}500), (25{,}500), (35{,}0))$, para o cálculo correto do declive e, na última expressão, da ordenada na origem (Figura 27).

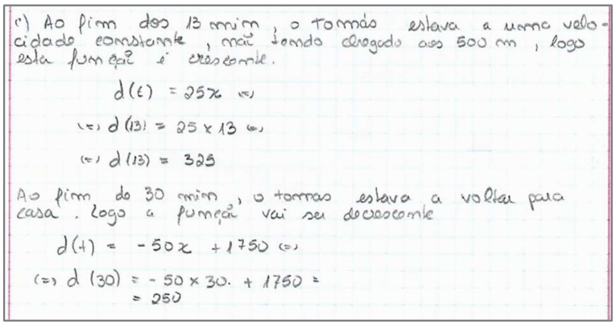
Figura 27 - Resposta incorreta do aluno A9 à alínea b) do Problema 2.

b)

$$f(t) = \begin{cases} x & se\ 20 > t > 0 \\ 500 & se\ 20 \leq t \leq 25 \\ -(x-35) & se\ 25 > x > 35 \end{cases}$$

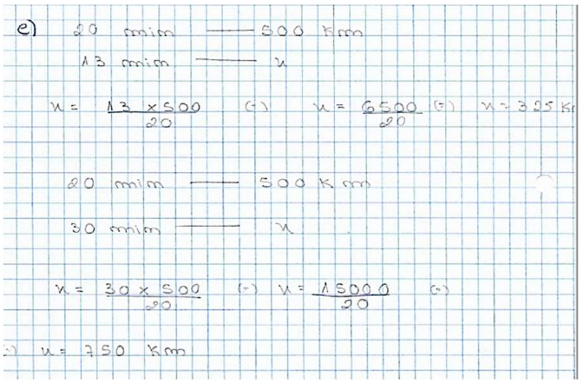
Na última alínea era pedido aos alunos que interpretassem a situação contemplada no problema, já com a função representada analiticamente e graficamente. Metade dos alunos respondeu corretamente a esta alínea de maneira analítica. Neste caso, tinham de escolher os ramos corretos para o caso da distância aos 13 e 30 minutos, conforme explicita o aluno A10. Na resolução deste aluno, emerge um erro de simbologia algébrica ao substituir a variável t por x, o que indicia dever-se ao hábito de traduzir a variável independente por esta letra (Figura 28).

Figura 28 – Resposta correta do aluno A10 à alínea c) do Problema 2.



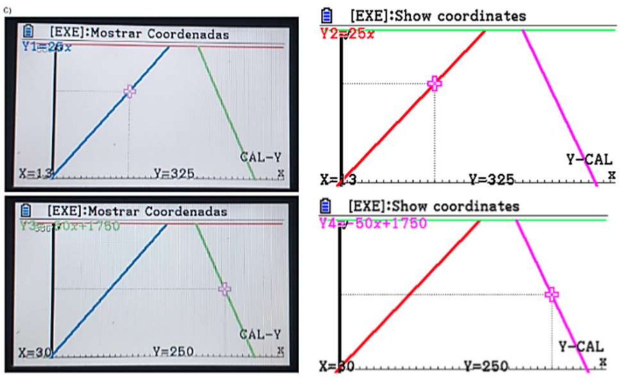
Quanto à resolução incorreta, como o aluno A21 não definiu a função, aplicou a regra de três simples com os dados que tinha, sem atender à unidade de medida (Figura 29).

Figura 29 – Resposta incorreta do aluno A21 à alínea c) do Problema 2.



Quanto à resolução gráfica, dois alunos recorreram à calculadora como era pedido, para chegar aos resultados pretendidos. Tanto o aluno A23 como o aluno A3 recorreram à opção $y - calc$ para determinar os valores de x pretendidos, selecionando os ramos corretos. Apenas na introdução das expressões que definem a função, como no problema 1 se verificou, não introduziram os intervalos para cada uma das três expressões, o que não comprometeu a resolução do problema.

Figura 30 - Respostas corretas dos alunos A23 e A3 à alínea c*) do Problema 2.



Síntese

Na resolução dos problemas propostos nas aulas, os alunos recorreram à calculadora gráfica como instrumento para a realização das mesmas. A génese instrumental integra os esquemas de uso, os quais se encontram diretamente ligados ao instrumento, como selecionar os comandos específicos de cada ação, e os esquemas de ação instrumentada, que traduzem as atividades ligadas ao objeto da ação, ou seja, ao seu procedimento. Da resolução dos problemas foram analisados dois métodos – o método gráfico encontra-se ligado à calculadora gráfica e, por isso, à génese instrumental; e o método analítico –, tendo como referência as fases de resolução de problemas segundo Pólya e as estratégias de resolução inerentes a cada alínea (Tabela 5).

Tabela 5 – Estratégias dos alunos na resolução do Problema 1 no estudo de funções definidas por ramos.

Atividades	**Estratégias**	**Fases da resolução de problemas**
a) Definir a função por ramos.	▪ Interpretar informação dada em linguagem natural. ▪ Fazer tentativas. ▪ Definir expressões algébricas.	▪ Compreender o problema. ▪ Estabelecer um plano.
b*) Efetuar o esboço gráfico da função.	▪ Representar graficamente as expressões algébricas.	▪ Executar o plano.
c) Determinar analiticamente o custo de uma chamada.	▪ Identificar a expressão algébrica que traduz o valor considerado. ▪ Verificar analiticamente se a solução está em conformidade com o contexto do problema.	▪ Refletir sobre o resultado obtido.
c*) Determinar graficamente o custo de uma chamada.	▪ Efetuar o esboço gráfico da função. ▪ Verificar graficamente se a solução está em conformidade com o contexto do problema.	▪ Refletir sobre o resultado.
d) Discutir, analiticamente, o preço de chamadas telefónicas de duas empresas.	▪ Definir a expressão algébrica que traduz o preço de chamadas telefónicas de uma empresa.	▪ Compreender novos dados do problema. ▪ Estabelecer o plano. ▪ Executar o plano.
d*) Discutir, graficamente, o preço de chamadas telefónicas de duas empresas.	▪ Comparar valores. ▪ Interpretar a informação de um gráfico. ▪ Verificar graficamente se as soluções estão de acordo com o contexto do problema.	▪ Refletir sobre o resultado obtido.

Neste primeiro problema, a interpretação do que está presente em linguagem natural no seu enunciado permitiu a definição das expressões algébricas que traduzem dois ramos da função que representa o contexto do problema. Com a expressão algébrica do segundo ramo, os alunos revelaram entender que se teria de converter unidades de tempo, minutos para segundos, e substituir o objeto na expressão (o tempo) para se obter a imagem pretendida (o custo). Atendendo à natureza da função obtida, nem todos os alunos conseguiram explorar o seu estudo com recurso à calculadora gráfica na resolução das outras alíneas. Verificou-se, neste estádio de desenvolvimento dos alunos, que os processos analíticos lhes eram mais favoráveis do que os gráficos a partir da utilização deste artefacto. Assim, as respostas com sustentação gráfica surgiram mais por tentativa e erro do que derivadas pela edição adequada na calculadora gráfica das expressões algébricas que definem a função em partes distintas do seu domínio. Assim, a discussão de preços de chamadas telefónicas oferecidas por duas empresas distintas de comunicações ficou comprometida através da estratégia gráfica, visto que era a estratégia mais adequada para os alunos. Nesta alínea, a terceira e quarta fase de Pólya (1995) falharam, pois, os alunos não executaram "o plano" com a sua posterior reflexão. A necessidade de rever e discutir a resolução do problema, assim como averiguar se há outro caminho alternativo, tornam-se cruciais para a obtenção de uma resposta correta, caso que não aconteceu na última alínea.

Relativamente à forma como os alunos se apropriam da calculadora gráfica na sua atividade, importa identificar que esquemas recorrem na resolução das alíneas do problema (Tabela 6).

Tabela 6 – Esquemas usados pelos alunos na resolução com a calculadora gráfica do Problema 1.

Atividades	**Esquemas de uso**	**Esquemas de ação instrumentada**
a) Definir a função por ramos.	(Não contemplado)	(Não contemplado)
b*) Efetuar o esboço gráfico da função.	▪ Ativar o Menu – Graph. ▪ Editar a expressão constante. ▪ Colocar "," e selecionar Shift - [. ▪ Editar a 'expressão afim'. ▪ Colocar "," e selecionar Shift - [. ▪ Selecionar Shift- Catolog- $Xmin/Xmax$. ▪ Selecionar Shift- V-Win. ▪ Definir a janela de visualização.	▪ Explorar a representação gráfica. ▪ Definir a janela de visualização de acordo com o domínio e contradomínio das funções. ▪ Averiguar se a representação gráfica se adequa ao contexto do problema.
c) Determinar analiticamente o custo de uma chamada.	(Não contemplado)	(Não contemplado).
c*) Determinar graficamente o custo de uma chamada.	▪ Ativar o Menu- Graph. ▪ Selecionar Shift- G-Solv- Seta(F6)- Y-Calc ($x = 144$).	▪ Averiguar se o resultado se adequa ao contexto do problema.
d) Discutir, analiticamente, o preço de chamadas telefónicas de duas empresas.	(Não contemplado)	(Não contemplado)
d*) Discutir, graficamente, o preço de chamadas telefónicas de duas empresas.	▪ Ativar o Menu- Graph. ▪ Editar a expressão algébrica da 'nova' função. ▪ Selecionar Shift- G-Solv- Isct.	▪ Identificar os valores de t para os quais o custo privilegia uma ou outra empresa. ▪ Explorar o valor da interseção dos gráficos que representam as funções.

Da análise da informação contemplada na Tabela 6, constata-se que os alunos ao integrarem a calculadora gráfica na sua atividade, recorreram a esquemas de uso para editar expressões algébricas que definem funções que são objeto do estudo dos alunos, definir os domínios de validade de cada uma dessas expressões, definir a janela de visualização do ecrã da calculadora gráfica e determinar valores dessas funções. Tais esquemas tendem a promover nos alunos o significado matemático que resulta da utilização dos esquemas de ação instrumentada, no caso relativos à criação mental da imagem de uma representação gráfica de uma função definida por ramos, à adequação dessa representação ao contexto do problema e à discussão da plausibilidade dos planos de custo de chamadas promovidos por empresas de telecomunicações. Porém, ao tratar-se de uma primeira experiência com funções definidas por ramos, verificou-se alguma resistência dos alunos à exploração deste instrumento.

No segundo problema, as respostas não foram tão repartidas, o que revela a aquisição da noção de uma função definida por ramos. Na resolução deste problema os alunos recorreram a uma diversidade de estratégias (Tabela 7).

Tabela 7 – Estratégias dos alunos na resolução do Problema 2 no estudo de funções definidas por ramos

Atividades	Estratégias	Fases da resolução de problemas
a) Efetuar o esboço gráfico da situação descrita.	▪ Interpretar informação dada em linguagem natural. ▪ Elaborar um gráfico.	▪ Compreender o problema. ▪ Estabelecer um plano.
b) Definir a função por ramos.	▪ Definir expressões algébricas.	▪ Executar o plano.
c) Determinar analiticamente a distância percorrida.	▪ Identificar a expressão algébrica que traduz o valor considerado. ▪ Verificar analiticamente se a solução está em conformidade com o contexto do problema.	▪ Refletir sobre o resultado obtido.
c*) Determinar graficamente a distância percorrida.	▪ Efetuar o esboço gráfico da função. ▪ Verificar graficamente se a solução está em conformidade com o contexto do problema.	▪ Refletir sobre o resultado.

Neste problema, os alunos não tiveram dificuldade em esboçar gráfico que traduz o percurso da caminhada descrita no enunciado, o que comprova que a compreensão do problema os ajudou a estabelecer um plano. Para executarem o que delinearam, exploraram as expressões algébricas que definiram a função por ramos que traduz as condicionantes do problema. Neste caso, ao contrário do que se verificou no problema anterior, os alunos não apresentaram dificuldades. De uma maneira geral, os alunos conseguiram traduzir os dados do enunciado para um gráfico. Com a função já definida, a maior parte dos alunos não teve dificuldade em dizer qual dos ramos se deveria escolher para cada um dos casos em estudo. Nesta alínea, também se verificou que os processos analíticos foram os privilegiados pelos alunos, o que denota que a maioria não verificou nem refletiu, de um modo gráfico, o resultado obtido.

Em relação ao instrumento que auxiliou a resolução deste problema, foram identificados esquemas a que os alunos recorreram na integração da calculadora gráfica na sua atividade (Tabela 8).

Tabela 8 – Esquemas usados pelos alunos na resolução com a calculadora gráfica do Problema 2.

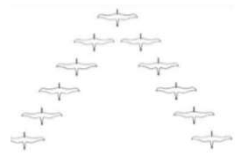
Atividades	Esquemas de uso	Esquemas de ação instrumentada
a) Efetuar o esboço gráfico da situação descrita.	(Não contemplado)	(Não contemplado)
b) Definir a função por ramos.	(Não contemplado)	(Não contemplado)
c) Determinar analiticamente a distância percorrida.	(Não contemplado)	(Não contemplado).
c*) Determinar graficamente a distância percorrida.	▪ Ativar o Menu- Graph. ▪ Editar a 'expressão linear'. ▪ Colocar "," e selecionar Shift- [. ▪ Editar a expressão constante. ▪ Colocar "," e selecionar Shift- [. ▪ Editar a 'expressão afim'. ▪ Colocar "," e selecionar Shift- [. ▪ Selecionar Draw. ▪ Selecionar Shift- V-Win. ▪ Definir a janela de visualização. ▪ Selecionar Shift- G-Solv- Seta(F6)- Y-Calc. ▪ Selecionar a expressão pretendida para cada caso. ▪ Introduzir $x = 13/x = 30$.	▪ Explorar a representação gráfica. ▪ Definir a janela de visualização de acordo com o domínio e contradomínio das funções. ▪ Averiguar se a função definida é a adequada. ▪ Averiguar se o resultado se adequa ao contexto do problema.

Neste problema, apenas a última alínea foi objeto de uso da calculadora gráfica, que envolveu vários esquemas de uso, pois anteriormente o gráfico foi esboçado com 'papel e lápis'. Nessa utilização, recorreram à edição de expressões algébricas, com a definição dos seus domínios de validade. Para efetuar o esboço do gráfico na calculadora, adaptaram a janela de visualização às condições do problema. Posteriormente, puderam confrontar o que obtiveram na calculadora gráfica com o que efetuaram com 'papel e lápis' e determinar os valores pretendidos no contexto do problema. Estes procedimentos resultaram também como verificação das alíneas anteriores, pois os alunos apropriam-se de esquemas de ação instrumentada, para explorar e averiguar se a função e o gráfico previamente definidos se adequavam ao contexto do problema.

3.1.2. Função módulo

No estudo da função módulo, os alunos começaram por resolver o problema 'O voo dos gansos', com a finalidade de os envolver na definição a função cuja representação gráfica melhor se ajusta aos pontos que traduzem a posição dos gansos no referencial cartesiano.

Problema 3: O voo dos gansos



Os gansos voam com a forma ilustrada na figura para economizar a energia gasta pelo grupo. Quando uma ave dá um impulso com as asas provoca um fluxo de ar ascendente que é aproveitado pela ave que se segue, reduzindo a energia que esta tem de despender. Deste modo, só a ave que lidera a formação não tem vantagem imediata, pelo menos até ser substituída por uma das outras.

a) Escolhe um referencial adequado para reproduzir a imagem da figura. De seguida, escolhe uma unidade e determina as coordenadas de pontos que traduzam a posição de três ou quatro gansos.

b) Define analiticamente a função que melhor se ajusta à posição dos gansos e representa-a através da calculadora gráfica.

A análise das respostas dos alunos às alíneas do Problema 3 incide sobre a exploração do tipo de função cuja representação gráfica se adequa à imagem do voo dos gansos. Na alínea a), as respostas são consideradas corretas (C), se representarem num referencial a imagem contemplada no enunciado do problema e determinarem as coordenadas dos pontos que representam a posição dos gansos no referencial escolhido. Caso acertem um destes critérios e falhem o outro, as respostas são classificadas de parcialmente corretas (PC). As respostas são consideradas incorretas (I) se a imagem desenhada no referencial cartesiano não reflita a forma que traduz o voo dos gansos e se determinam coordenadas de pontos que não traduzem a posição dos gansos.

Na alínea b), são consideradas respostas corretas (C) as que apresentam uma definição adequada da função que traduz o que é representado na alínea anterior e explicitem essa representação com recurso à calculadora gráfica. As respostas são parcialmente corretas (PC) caso respeitem pelo menos um dos critérios referidos. As respostas incorretas (I) traduzem uma definição inadequada da função em estudo e uma representação gráfica sem nexo. Por fim, em qualquer alínea, a ausência de resposta é representada por NR. A seguinte tabela apresenta os resultados das respostas dos alunos ao Problema 3.

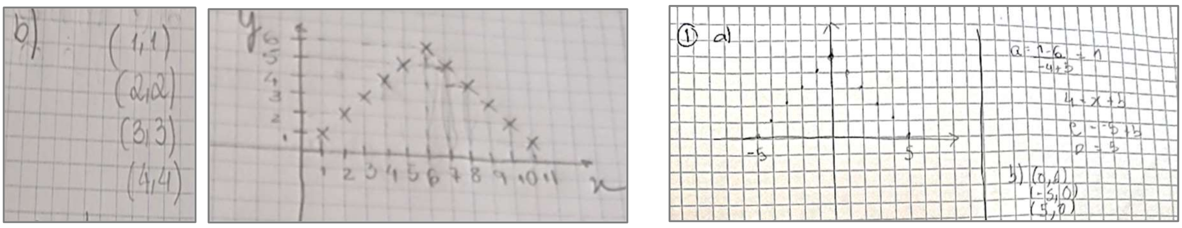
Tabela 9 - Frequência (%) do tipo de respostas dos alunos às alíneas do Problema 3 ($n = 26$)

Alíneas e Critérios	**C**	**PC**	**I**	**NR**
a) Escolher um referencial adequado e determinar as coordenadas dos gansos.	9 (34,62%)	2 (7,69%)	7 (26,92%)	8 (30,77%)
b) Definir a função que traduz a situação do problema.	4 (15,39%)	2 (7,69%)	7 (26,92%)	13 (50%)
b*) Representar a função através da calculadora gráfica.	–	–	–	26 (100%)

Da análise da Tabela 9, constata-se que os alunos tiveram dificuldade em responder a ambas as alíneas, sendo que na primeira revelaram menos dificuldade (34,62%) do que na segunda. Apesar de escolherem um referencial adequado e determinarem corretamente as coordenadas, alguns alunos tiveram dificuldade em definir a respetiva função (15,39%). Também se pode concluir que a dificuldade no manuseamento na calculadora gráfica ou a preferência pelos métodos analíticos se mantém.

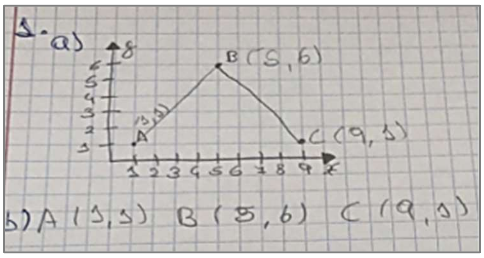
Em relação à primeira alínea, houve diferentes representações da figura que representa o voo dos gansos. Para o aluno A4, o eixo de simetria do gráfico é $x = 6$, enquanto para o aluno A5 é o eixo O_y (Figura 31). Nestas duas resoluções, vê-se que os alunos discriminaram os pontos que correspondem à localização dos gansos no sistema de eixos coordenados, determinaram as coordenadas dessa localização (na resolução do aluno A5 consta uma gralha, pois, segundo o seu gráfico o vértice é $(0{,}5)$ e não $(0{,}6)$) (Figura 31). As restantes resoluções corretas assemelham-se a estes exemplos.

Figura 31 - Respostas corretas dos alunos A4 e A5 à alínea a) do Problema 3.



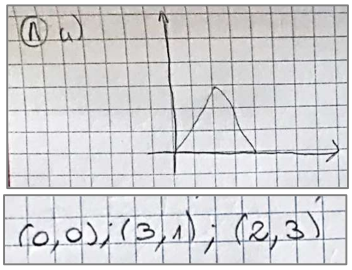
Já para o aluno A7, o eixo de simetria do gráfico é $x = 5$, mas a sua resposta não se encontra totalmente correta, apesar das coordenadas corresponderem ao gráfico esboçado. Para corresponder à determinação das coordenadas que localizam todos os gansos da figura, deveriam estar representados os pontos: $(0{,}0)$ e $(10{,}0)$ (em vez de o aluno ter apresentado como ponto inicial, o ponto $(1{,}1)$), além do vértice representado $(5{,}6)$. Ter em conta que, neste caso, os pontos não se encontram discriminados no gráfico, da mesma forma como nos casos anteriores.

Figura 32 - Resposta parcialmente correta do aluno A7 à alínea a) do Problema 3.



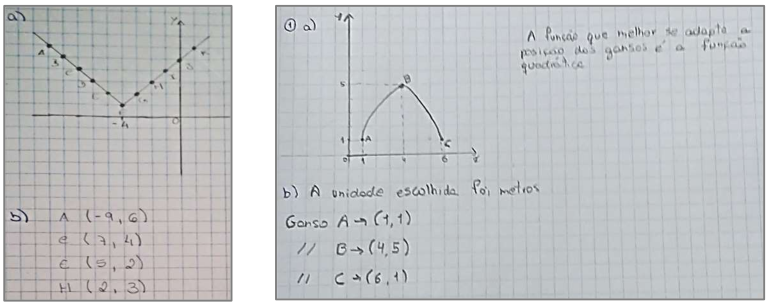
As resoluções consideradas incorretas são similares à resolução do aluno A14 (Figura 33). O gráfico não se encontra esboçado com o devido rigor, além de não explicitar os pontos que lhe deram origem. Infere-se que o 'vértice' do gráfico é o ponto $(2,3)$ e que o ponto $(3,1)$ não pertence ao gráfico traçado. Contudo, este gráfico, assim como os pontos referidos, não correspondem à figura deste problema.

Figura 33 - Resposta incorreta do aluno A14 à alínea a) do Problema 3.



As respostas incorretas traduzem-se num valor significativo, indiciando dever-se à falta de capacidade crítica desses alunos. Por exemplo, o aluno A21 representou o gráfico invertido que não traduz a forma que resulta do posicionamento dos gansos no seu voo. Já para o aluno A23 a função cujo gráfico modela o voo dos gansos é uma função quadrática (Figura 34).

Figura 34 - Respostas incorretas do aluno A21 e A23 à alínea a) do Problema 3.



Na aula, solicitei os alunos que explicassem a sua resolução:

Professora: Como é que vocês definiram o referencial?

A4: Eu defini a função no primeiro quadrante e depois escolhi as abcissas e as ordenadas, na escala de 1 em 1.

Professora: Colocaste no primeiro quadrante e começaste no ponto 0 ou no ponto 1?

A4: Comecei no ponto 1.

Professora: É uma escolha possível e muito intuitiva. Quem fez de uma forma diferente?

A6: Eu pus que o eixo de simetria era o eixo O_y.

Professora: Ou seja, colocaste os gansos no primeiro e no segundo quadrante, sendo o eixo de simetria o eixo das ordenadas. E porque fizeste assim?

A6: Bem…. porque há uma simetria nos gansos.

Professora: Muito bem, quem colocou o referencial de outra forma?

A3: Eu fiz igual ao aluno A4, colocando no primeiro quadrante e no ponto $(1,1)$..

A5: Eu fiz como o aluno A6.

Professora: Ninguém fez de forma diferente?

A13: Eu fiz a partir do ponto $(2,0)$.

Professora: Então colocaste no primeiro quadrante, também está correto começares nesse ponto, dependendo do eixo de simetria que identificaste. E algum de vocês conseguiu determinar a função do vosso gráfico mediante o vosso referencial?

A23: Eu fiz mas não sei está certo... Eu escolhi a função quadrática e usei a função $f(x) = a(x+h)^2 + k$, e usei o ponto do ganso da frente como sendo $(4,5)$, e assim só tinha de descobrir o a (com $h = 4$ e $k = 5$). Depois usei o ponto $(1,1)$ no x e y e substituí para determinar o valor de a.

Professora: Definiste a função descobrindo o valor de a, porém achas que a imagem dos gansos define uma parábola?

A23: Pois, não é uma curva...

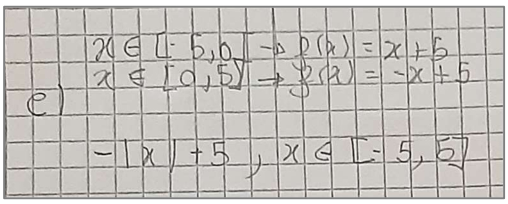
Professora: Então achas que há uma simetria ou não?

A23: Acho que sim, relativamente ao eixo O_y.

A4: Mas então como podemos definir analiticamente a função? Eu defini por ramos...

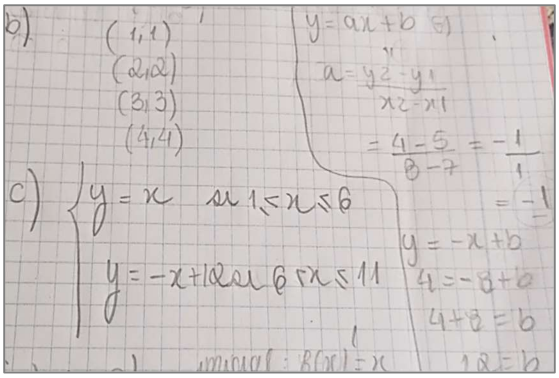
No que respeita à última alínea, que permite representar o gráfico que representa a função que modela o voo dos gansos, a título de exemplo, a resolução do aluno A5 comprova a simetria da função módulo ($|x|$) e a translação vertical de cinco unidades para cima do seu gráfico. Esta resolução corresponde à maioria das restantes respostas consideradas corretas à alínea b) (Figura 35).

Figura 35 - Resposta correta do aluno A5 à alínea b) do Problema 3.



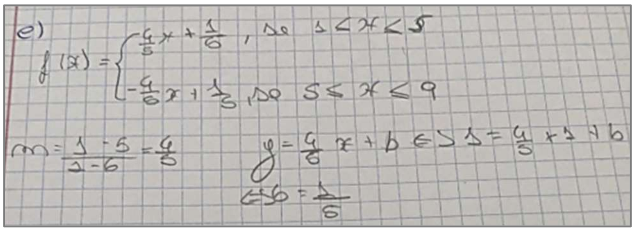
Entre as respostas consideradas corretas destaca-se a resolução do aluno A4, que definiu corretamente as expressões quer para $x \in [1,6]$ quer para $x \in]6,11]$ (Figura 36). Diferentemente dos restantes casos, não recorreu à simbologia do módulo (podendo ser definida da seguinte forma: $y = -|x-6| + 6$), recorrendo à representação correta de uma função definida por ramos.

Figura 36 - Resposta correta do aluno A4 à alínea b) do Problema 3.



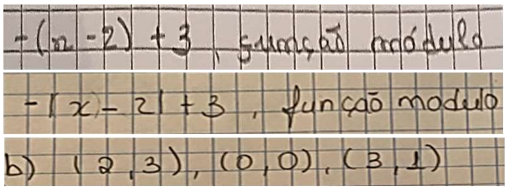
Quanto às respostas parcialmente corretas, houve dois alunos que seguiram um raciocínio correto, mas cometeram lapsos de cálculo, caso este representado pelo aluno A7. A expressão para $x \in [1,5]$ encontrar-se-ia corretamente definida se o aluno tivesse usado na determinação do declive do segmento de reta, o ponto $(5,6)$ e não o ponto $(6,5)$, como mencionou corretamente na primeira alínea. No cálculo da ordenada na origem para o primeiro ramo, o aluno A7 procedeu de maneira correta, utilizando o ponto $(1,1)$, contudo o resultado está incorreto, porque na determinação do declive do segmento de reta trocou na fração a ordem da diferença entre as coordenadas de dois pontos. O declive, tendo em conta o seu gráfico e os pontos determinados, seria: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-1}{5-1} = \frac{5}{4}$. Na expressão algébrica correspondente à ordenada na origem, substituindo pelas coordenadas $(1,1)$ ou $(5,6)$, seria $b = -\frac{1}{4}$. Devido ao referido, a expressão definida para $x \in [5,9]$ encontra-se também com o declive deste segmento de reta incorreto, apesar de o aluno ter mostrado entender que o valor seria o simétrico do calculado no primeiro ramo. A ordenada na origem está de qualquer forma incorreta. O aluno A7, assim como o outro aluno, não usou um ponto do ramo da função que pretendia determinar, usando o ponto $(1,1)$, onde deveria ter usado, por exemplo, o ponto $(9,1)$, ficando $f(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{49}{4}$ para o respetivo intervalo. Logo, para este caso, a função definida por ramos seria $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}, & 1 \leq x < 5 \\ -\frac{5}{4}x + \frac{49}{4}, & 5 \leq x \leq 9 \end{cases}$.

Figura 37 - Resposta parcialmente correta do aluno A7 à alínea b) do Problema 3.



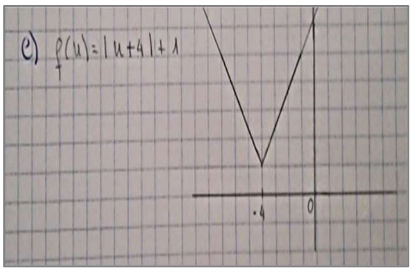
Constata-se que 50% dos alunos não conseguiram definir uma função que representasse a situação descrita no problema, e quase 27% responderam incorretamente. Estas respostas recaíram maioritariamente sobre a função $f(x) = -|x-2| + 3$ ou $f(x) = -(x-2) + 3$, decorrendo esta última de erros de simbologia. O gráfico da primeira função mencionada não reproduz o gráfico com as coordenadas referidas pelos alunos, sendo que corretamente seria $(-1,0), (2,3)$ e $(5,0)$, o que faz com que o gráfico desenhado não corresponda ao pretendido no problema (Figura 38).

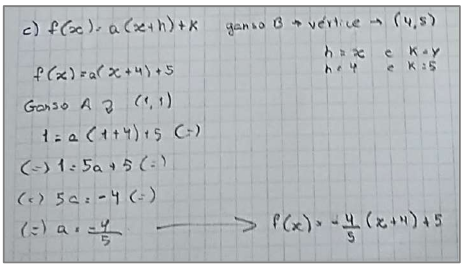
Figura 38 - Respostas incorretas dos alunos A17 e A19 à alínea b) do Problema 3.



O aluno A21 representou incorretamente o gráfico da função, o que fez com que definisse incorretamente a função que modela o problema. Mediante a função representada, o gráfico encontra-se correto. De forma a se aproximar ao que se expressa no problema, deveria ser a função simétrica em relação ao eixo das abcissas ($f(x) = -|x+4| + 1$). O aluno A23 indicia que a função se tratava de uma função quadrática (faltando elevar a função determinada ao quadrado), o que se encontra incorreto, sendo que o gráfico da função $f(x) = -\frac{4}{5}(x+4)^2 + 5$ pertence ao semieixo negativo das abcissas, o que faz com que o ponto usado $(1,1)$ não pertença ao gráfico desta função.

Figura 39 – Respostas incorretas dos alunos A21 e A23 à alínea b) do Problema 3.





Em momento de aula, projetei a calculadora gráfica para clarificar as várias resoluções, começando com a função definida pelo aluno A4, pois foi o único que apresentou uma resolução diferente.

Professora: Porque é que colocaste $-x$ na segunda função?

A4: Primeiro, sabemos que o segundo ramo é decrescente, por isso o declive vai ser negativo. E depois peguei em dois pontos desse ramo, $(7,5)$ e $(8,4)$, e determinei o declive que deu -1 e, após isso, determinei o b.

Professora: Muito bem. Há várias formas possíveis de definir outra função definida por ramos no mesmo intervalo, basta definir outros pontos. Num ramo, o declive é positivo, por isso a função será por exemplo, $y = x$ e no outro, será $y = -x + b$, ou por exemplo, $y = \frac{6}{5}x - \frac{6}{5}$, com $x \in [1,6]$ e $y = -\frac{6}{5}x + \frac{66}{5}$, com $x \in [6,11]$, utilizando outros pontos. Alguém conseguiu definir outra função definida por ramos?

A6: Eu pus que quando $x \in [-5,0]: f(x) = x + 5$ e quando $x \in [0,5]: f(x) = -x + 5$.

Professora: Vamos ver este caso na calculadora. Há uma simetria, por isso o declive no segundo ramo também é negativo, como o gráfico que o aluno A6 já tinha referido na primeira alínea, onde aqui restringiu o domínio para cada ramo. E sem ser por ramos, alguém definiu?

A6: Eu defini mas não sei se está certo... Defini $f(x) = -|x| + 5$, com $x \in [-5,5]$.

Professora: O aluno A6 falou no módulo... o que é o módulo ou o valor absoluto de um número?

A6: Por exemplo, $|-2| = 2$, os números são positivos...

Exemplifiquei com a calculadora o que significa o valor absoluto de um número, começando por representar a função $y = x$, e de seguida questionar, o que tinha de fazer ao gráfico da função para que os valores se tornassem positivos, ou seja, que transformação seria necessária. Os alunos entenderam que o gráfico da função teria de pertencer ao segundo quadrante, e não ao terceiro, para tomar valores positivos. Concluíram que teria de se proceder a uma reflexão relativamente ao eixo O_x. Desta forma, introduzi o conceito de módulo e como se introduz na calculadora ($optn - f5 - f1 \text{ ou } shift - 4$), para selecionar "$abs$". Logo, puderam ver que a função pertence ao primeiro e segundo quadrante e há uma simetria relativa ao eixo O_y.

No quarto problema, como os alunos já têm conhecimento da função definida por ramos, é pedido que no caso da função módulo a definam por ramos, para assim tirarem ilações acerca do comportamento da mesma e ganharem destreza sem utilização do módulo.

Problema 4: Transformação e representação por ramos da função módulo
Considera a função f definida por $f(x) = |x - 2|$.
a) Define a função f por ramos.
b) Representa graficamente a função f, explicando todos os procedimentos. Após isso, confirma na calculadora gráfica, explicando todos os passos.

Na definição da função módulo por ramos, a maioria dos alunos não soube responder a esta alínea, assim como, à tarefa em geral (53,85%) (Tabela 10). Apenas dois alunos responderam incorretamente (7,69%) e os restantes (38,46%) responderam corretamente. No caso da sua representação na calculadora, 11,54% dos alunos já conseguiu proceder ao seu manuseamento. No caso da representação analítica, as respostas foram mais repartidas, onde também se vê que a maioria não conseguiu dar qualquer resposta (50% e 88,46%).

As respostas dos alunos à alínea a) do Problema 4, são consideradas corretas (C), se definirem corretamente os dois ramos, com os respetivos intervalos com a devida simbologia. Erros nestes casos, fazem com que a resposta seja considerada parcialmente correta (PC). Falhas na compreensão do significado de módulo e na sua simetria, fazem com que a resposta seja incorreta (I). Na alínea b), se os alunos representarem o gráfico da função com todos os pontos necessários, a resposta é considerada correta (C). Na calculadora, a explicação ou exemplificação da janela utilizada e as funções introduzidas, recaem na resposta ideal. O caso das respostas parcialmente corretas (PC), reflete o esboço do gráfico sem marcação dos eixos, sem explicação do procedimento e/ou de maneira pouco cuidada. As respostas incorretas (I) recaem no facto de os alunos procederem à transformação errada do gráfico. Os restantes casos acontecem quando os alunos não dão qualquer resposta (NR).

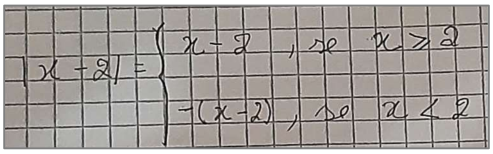
Analogamente à análise realizada anteriormente, a tabela seguinte expressa a frequência dos tipos de respostas dos alunos, neste caso, à representação da função módulo por ramos e à sua representação por ambos os métodos (Tabela 10).

Tabela 10 - Frequência (%) do tipo de respostas dos alunos às alíneas do Problema 4 ($n = 26$)

Alíneas e Critérios	**C**	**PC**	**I**	**NR**
a) Definir a função por ramos.	10 (38,46%)	–	2 (7,69%)	14 (53,85%)
b) Efetuar o esboço gráfico da função.	4 (15,39%)	7 (26,92%)	2 (7,69%)	13 (50%)
b*) Efetuar o esboço gráfico através da calculadora gráfica.	3 (11,54%)	–	–	23 (88,46%)

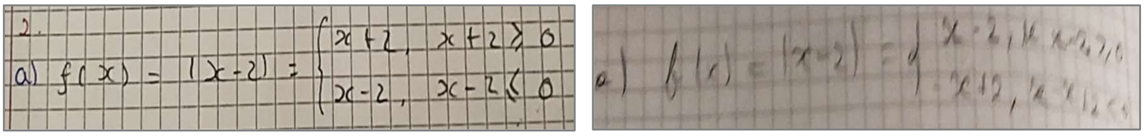
Apesar da maioria dos alunos não aplicar o que aprendeu no estudo da função definida por ramos na função módulo (53,85%), uma grande parte dos alunos (38,46%) respondeu assertivamente, conforme mostra o aluno A5. As restantes respostas seguiram o mesmo exemplo, apenas se diferenciando no desenvolvimento das expressões.

Figura 40 – Resposta correta do aluno A5 à alínea a) do Problema 4.



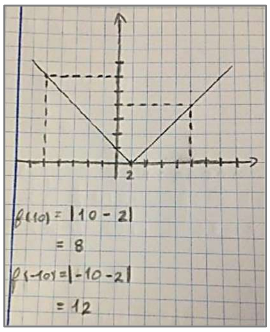
Dois alunos responderam incorretamente, onde se vê que o aluno A8 mostra não entender o significado de módulo e apenas troca os sinais nas duas expressões. Ambos os alunos responderam incorretamente na definição de ambas as expressões, devendo ser $x - 2 \geq 0$ e $x - 2 < 0$.

Figura 41 – Respostas incorretas dos alunos A8 e A13 à alínea a) do Problema 4.



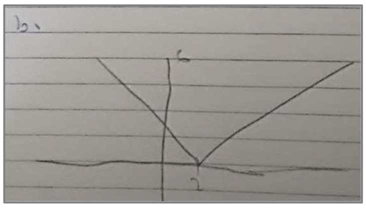
Quanto à representação gráfica da função, sem utilização da calculadora, o aluno A9 determinou dois pontos utilizando a função módulo. Para traçar o gráfico, teve em conta que o gráfico da função se desloca duas unidades para a direita, ou seja, uma translação associada ao vetor $\vec{u}\,(2{,}0)$, sendo, portanto, o vértice no ponto $x = 2$.

Figura 42 – Resposta correta do aluno A9 à alínea b) do Problema 4.



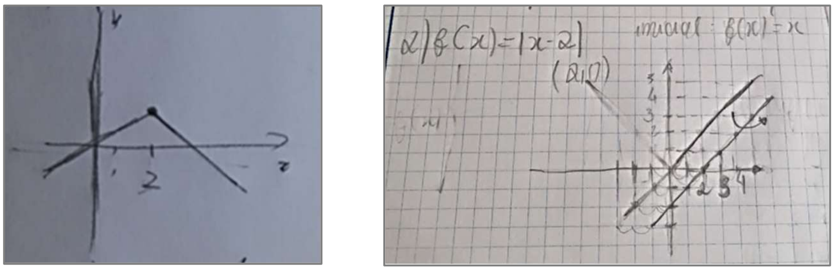
As respostas parcialmente corretas, que representam cerca de 27% das respostas, seguiram a mesma tipologia do exemplo seguinte. Os alunos representaram corretamente o ponto $(2{,}0)$, correspondente ao vértice do gráfico, assim como, um esboço correspondente ao gráfico de uma função módulo. Porém, não tiveram cuidado na representação gráfica nem na apresentação dos cálculos/raciocínio, conforme era pedido.

Figura 43 – Resposta parcialmente correta do aluno A11 à alínea b) do Problema 4.



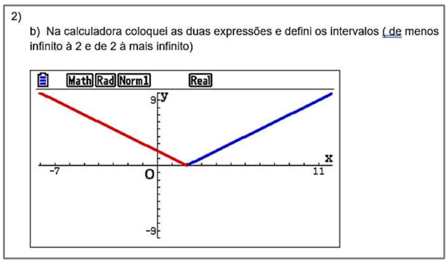
As respostas incorretas apresentadas por dois alunos foram diferenciadas, onde se vê que o aluno A18 apresentou o gráfico invertido, sendo o seu vértice um máximo de coordenadas $(2, y)$, não sendo, portanto $(2{,}0)$. O aluno A4, começou o seu raciocínio corretamente, representando $y = x$ e aplicando ao seu gráfico uma translação segundo o vetor $(2{,}0)$, ficando $y = x - 2$, porém não concluiu, pois o que era pedido era o seu módulo. Denota-se que o aluno hesitou e apagou a função $y = |x|$, que o levaria à solução correta, preferindo representar assim duas expressões afins (Figura 44).

Figura 44 – Respostas incorretas dos alunos A18 e A4 à alínea b) do Problema 4.



Quanto à representação através da calculadora gráfica, o aluno A3 apenas procedeu a este tipo de resolução, onde explicou que definiu na calculadora as duas expressões derivadas da função módulo por ramos.

Figura 45 – Resposta correta do aluno A3 à alínea b*) do Problema 4.

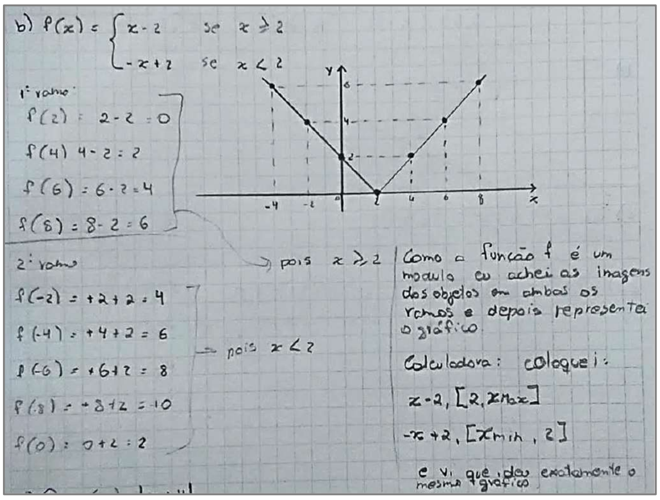


De forma similar, o aluno A9 representou as duas expressões na calculadora, porém usando uma janela da calculadora diferente, com valores muito elevados. O aluno deveria ter ajustado o 'zoom', usando valores bem mais reduzidos quanto aos valores de x e y, pois assim induz em erro que o vértice é na origem do referencial. Apesar deste facto, o gráfico encontra-se correto e a introdução das expressões que definem a função em partes distintas do seu domínio bem exemplificada.

Figura 46 – Resposta correta do aluno A9 à alínea b*) do Problema 4.

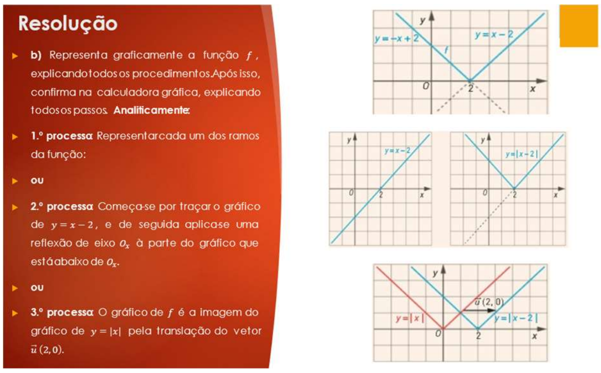
Na ilustração seguinte, o aluno A23 explicitou a resolução analítica e gráfica desta alínea. Procedeu da mesma forma que os outros alunos e concluiu que o gráfico de ambos os casos é o mesmo, explicando todos os procedimentos (Figura 47).

Figura 47 – Resposta correta do aluno A23 à alínea b) e b*) do Problema 4.



Nesta alínea, no que respeita à representação do gráfico sem recurso à calculadora, na aula foram exemplificados os três casos seguintes, de forma a ilustrar aos alunos como obter o gráfico pretendido, através da simetria, reflexão ou translação (Figura 48).

Figura 48 - Quadro de aula da alínea b) do Problema 4.



Síntese

De seguida, serão analisadas de forma sintetizada as estratégias de resolução que os alunos recorreram nos dois problemas desta aula, enquadrando cada fase do processo de resolução de um problema (Tabela 11). No que respeita às alíneas que envolvem a utilização da calculadora gráfica, serão mencionados os esquemas de uso e os esquemas de ação instrumentada associados (Tabela 12).

Tabela 11 -– Estratégias dos alunos na resolução das alíneas do Problema 3 no estudo da função módulo.

Atividades	Estratégias	Fases da resolução de problemas
a) Escolher um referencial adequado e determinar as coordenadas dos gansos.	▪ Interpretar informação dada em linguagem natural. ▪ Fazer tentativas. ▪ Efetuar o esboço gráfico da função.	▪ Compreender o problema. ▪ Estabelecer um plano.
b) Definir a função que traduz a situação do problema.	▪ Interpretar as informações de um gráfico. ▪ Definir expressões algébricas. ▪ Verificar se a função traduz o gráfico esboçado.	▪ Executar o plano. ▪ Refletir sobre o resultado obtido.
b*) Representar a função através da calculadora gráfica.	▪ Representar graficamente as expressões algébricas.	▪ Refletir sobre o resultado obtido.

Os alunos neste problema, por ter uma estrutura aberta, apresentaram dificuldades na sua resolução e na interpretação do enunciado, mediante o que era pedido. Isto fez com que, mesmo que traçassem um possível referencial que traduzisse a situação do problema, a função definida não correspondia a tal esboço. As fases definidas por Pólya tornaram-se cruciais neste problema, pois requerem que os alunos entendam o enunciado do problema, identifiquem os dados e o que se pretende determinar, e se o plano estabelecido reflete efetivamente o pretendido. A reflexão posterior da função que definiram permitiu-lhes testarem se não cometeram qualquer erro e se há outras estratégias diferentes. Neste problema específico, tal possibilidade verifica-se, pois há várias estratégias possíveis para abordar o mesmo problema.

No que respeita à forma como os alunos se apropriam da calculadora gráfica na resolução do problema, tal só faz sentido nas alíneas em que os alunos eram explicitamente solicitados a recorrer a este instrumento (Tabela 12).

Tabela 12 – Esquemas usados pelos alunos na resolução com a calculadora gráfica das alíneas do Problema 3.

Atividades	Esquemas de uso	Esquemas de ação instrumentada
a) Escolher um referencial adequado e determinar as coordenadas dos gansos.	(Não contemplado)	(Não contemplado)
b) Definir a função que traduz a situação do problema.	(Não contemplado)	(Não contemplado)
b*) Representar a função através da calculadora gráfica.	▪ Ativar o Menu- Graph. ▪ Selecionar Optn- G-Solv- Abs. ▪ Ou Selecionar Optn- G-Solv- Abs. ▪ Introduzir a(s) função(ões). ▪ Ativar Draw.	▪ Explorar a representação gráfica. ▪ Averiguar se a representação gráfica se adequa ao contexto do problema.

No Problema 3, percebe-se ver que os alunos ainda não estavam familiarizados com a utilização da calculadora gráfica, pois optaram por não realizar o esboço do gráfico com recurso a este instrumento. Neste caso, houve diferentes opções na escolha do referencial e os alunos representaram-no através de processos com 'papel e lápis', o que não foi concretizado através da calculadora gráfica. Antes da realização do problema proposto, os alunos não tinham conhecimento de como se introduzia o símbolo do módulo na calculadora gráfica, tendo como opção editar uma função definida por ramos, que os levaria ao mesmo resultado. Devido ao grau de dificuldade da tarefa em geral, os alunos focaram-se em definir a função que descreve o problema e não em representá-la na calculadora, que serviria como verificação.

O Problema 4 implicava a representação da função módulo por ramos e a estratégia implícita no esboço do seu gráfico, por ambos os métodos (Tabela 13).

Tabela 13 – Estratégias dos alunos na resolução das alíneas do Problema 4 no estudo da função módulo.

Atividades	Estratégias	Fases da resolução de problemas
a) Definir a função por ramos.	▪ Descobrir um padrão. ▪ Definir expressões algébricas.	▪ Compreender o problema. ▪ Estabelecer um plano.
b) Efetuar o esboço gráfico da função.	▪ Elaborar um gráfico.	▪ Executar o plano.
b*) Efetuar o esboço gráfico através da calculadora gráfica.	▪ Efetuar o esboço gráfico da função. ▪ Verificar graficamente o esboço analítico.	▪ Refletir sobre o resultado obtido.

No Problema 4, como os alunos já tinham conhecimento da função definida por ramos, foi pedido que definissem a função módulo por ramos, ou seja, que descobrissem um 'padrão'. Neste problema, vê-se que a maioria definiu incorretamente a função módulo por ramos, pois não compreenderam o significado do módulo de uma expressão. O problema trata-se de introduzir as transformações que acontecem a partir do gráfico da função $f(x) = |x|$ para a nova função, onde se verifica um deslocamento, neste caso, uma translação horizontal de duas unidades para a direita. Facto este que era esperado que os alunos concluíssem na representação sem recurso à calculadora gráfica, assim como outras opções, como a reflexão do semieixo negativo de O_x do gráfico da expressão sem módulo $f(x) = x - 2$. A maioria dos alunos recorreu apenas à representação das duas expressões definidas através dos ramos, onde se vê a simetria. Contudo, representaram como eixo de simetria $x = 2$, o que determina os intervalos definidos na função módulo por ramos ($x \geq 2$ e $x < 2$), o que leva os alunos a refletir sobre as transformações dos gráficos aprendidas previamente no estudo da função quadrática.

Para a introdução deste tipo de função, módulo, na calculadora gráfica foram identificados esquemas de uso e esquemas de ação instrumentada a que os alunos recorreram (Tabela 14).

Tabela 14 – Esquemas usados pelos alunos na resolução com a calculadora gráfica das alíneas do Problema 4.

Atividades	Esquemas de uso	Esquemas de ação instrumentada
a) Definir a função por ramos.	(Não contemplado)	(Não contemplado)
b) Efetuar o esboço gráfico da função.	(Não contemplado)	(Não contemplado)
b*) Efetuar o esboço gráfico através da calculadora gráfica.	▪ Ativar o Menu – Graph. ▪ Selecionar Optn- G-Solv- Abs. ▪ Ou Selecionar Shift- Catalog- Abs. ▪ Introduzir a função módulo. ▪ Ativar Draw. ▪ Ou Introduzir as duas funções. ▪ Colocar “,” e selecionar Shift - [▪ Selecionar Shift- Catolog- $Xmin/Xmax$. ▪ Selecionar Shift- G-Solv- Min.	▪ Explorar a representação gráfica. ▪ Definir a janela de visualização de modo a visualizar com clareza o extremo do gráfico da função.

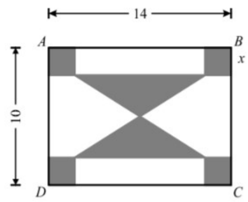
Os alunos, na última alínea, tinham de recorrer à edição de expressões algébricas, com a definição dos seus domínios de validade, no caso de utilizarem a função por ramos. Além disto, tinham a opção de introduzir as expressões que definem a função resultante do problema, recorrendo à edição adequada da simbologia da função módulo neste instrumento. Através da utilização de tais esquemas, os alunos atribuem extremos ao gráfico da função. Os intervalos com a nomenclatura para valores mínimos e máximos foram o caminho eleito pelos alunos. Isto contempla o aprendido na aula anterior relativamente à função definida por ramos e a todos os procedimentos com este instrumento.

3.1.3. Resolução de problemas sobre tópicos lecionados

De forma a sistematizar os tópicos lecionados através da resolução de problemas, com recurso à calculadora gráfica, os alunos resolveram cinco problemas, os quais foram resolvidos previamente e discutidas as suas resoluções na sala de aula. Desses problemas, analiso as resoluções de dois deles: um que diz respeito à função quadrática e outro que incide sobre a função módulo. Relativamente à sistematização do estudo efetuado sobre a função quadrática, os alunos foram desafiados a resolver o seguinte problema:

Problema 5: Função quadrática

Na figura seguinte está representado um retângulo $[ABCD]$. O retângulo é o esboço de uma placa decorativa de 14 cm de comprimento por 10 cm de largura e que será constituída por uma parte de metal (representada a cinzento) e por uma parte em madeira (representada a branco). A parte em metal é formada por dois triângulos iguais e por quatro quadrados também iguais. Cada triângulo tem um vértice no centro do retângulo $[ABCD]$. Seja x o lado de cada quadrado, medido em cm ($x \in]0, 5[$).



a) Mostra que a área, em cm^2, da parte em metal da placa decorativa é dada, em função de x, por $A(x) = 6x^2 - 24x + 70$.

b) Resolvendo analiticamente **e** recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determina o valor de x para o qual a área da parte em metal é mínima e calcula essa área.

c) Resolvendo analiticamente **e** recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determina o valor de x para o qual a área da parte em metal é igual à área da parte em madeira.

Da interpretação dos dados que os alunos retiraram da leitura do enunciado do problema, as respostas à alínea a) foram consideradas corretas (C) se apresentam as expressões que determinam a área dos quadrados, dos triângulos e da parte metalizada da placa decorativa. Caso acertem um destes critérios e falhem pelo menos um dos outros, as respostas são classificadas como parcialmente corretas (PC). As respostas que não consideram nenhum dos critérios estipulados são consideradas incorretas (I). Na alínea b), são consideradas respostas corretas (C) as que procedam ao completamento do quadrado para determinação das coordenadas do 'vértice' e, na calculadora, que recorram à funcionalidade que permite determinar o mínimo de uma função. As respostas são parcialmente corretas (PC) caso falhem um destes critérios. As respostas incorretas (I) traduzem respostas que não considerem qualquer critério estipulado. Na alínea c), as respostas são consideradas corretas (C) caso apresentem uma expressão algébrica que represente a área da parte pretendida da figura, assim como a sua resolução. Caso falhe algum critério, as respostas são parcialmente corretas (PC), e são consideradas incorretas (I) se os alunos assumirem uma igualdade sem sentido. Por fim, em qualquer alínea, a ausência de resposta é representada por NR. A seguinte tabela apresenta os resultados das respostas dos alunos ao Problema 5.

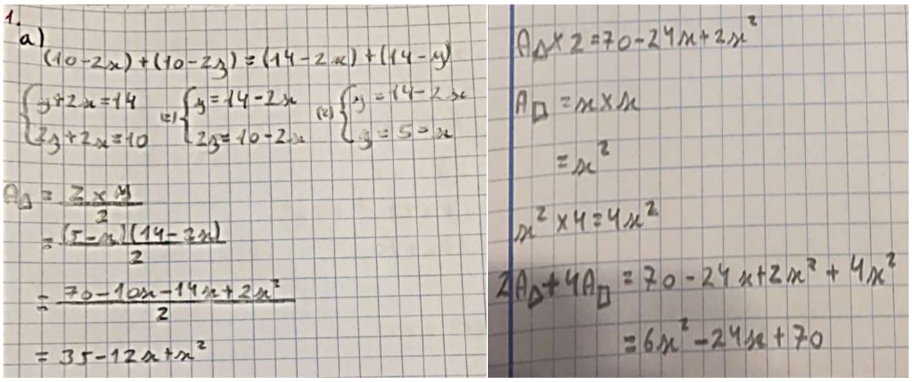
Tabela 15 – Frequência (%) do tipo de respostas dos alunos às alíneas do Problema 5 ($n = 26$)

Itens e Critérios	**C**	**PC**	**I**	**NR**
a) Determinar a expressão da área da parte metalizada.	13 (50%)	5 (19,23%)	–	8 (30,77%)
b) Determinar a área mínima da parte metalizada.	9 (34,62%)	–	–	17(65,38%)
b*) Determinar a área mínima da parte metalizada através da calculadora gráfica.	10 (38,46%)	–	–	16(61,54%)
c) Determinar o valor para o qual a área da parte metalizada é igual à parte em madeira.	8 (30,77%)	5 (19,23%)	1 (3,85%)	12(46,15%)
c*) Determinar o valor para o qual a área da parte metalizada é igual à parte em madeira através da calculadora gráfica.	4 (15,38%)	–	–	22(84,62%)

Da análise da Tabela 15, denota-se que as resoluções dos alunos, no geral, não apresentam respostas incorretas, traduzindo-se essencialmente em respostas corretas ou não respondidas.

Na alínea a), os alunos calcularam corretamente a expressão que traduz a área dos triângulos e somaram-na com a expressão que determina a área dos quadrados, tendo em conta os dados descritos no enunciado do problema, tal como exemplifica a resolução do aluno A9 (Figura 49).

Figura 49 – Resposta correta do aluno A9 à alínea a) do Problema 5.

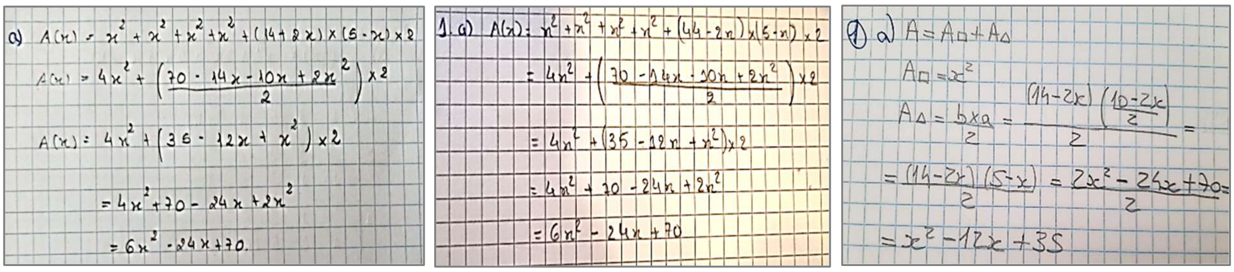


Nesta resolução, o aluno, ao contrário dos restantes, procedeu à resolução de um sistema para retirar as expressões necessárias para o cálculo da área do triângulo. Para este efeito, denominou y, sendo a base, e z representando a altura do triângulo. A igualdade descrita inicialmente não se encontra correta, embora não afete a resolução do problema. O aluno assumiu como igualdade a soma das expressões da largura da placa decorativa (retangular) com a soma das expressões que representam o seu comprimento. Assim, $y + 2x = 14$ (o comprimento da placa) e $2z + 2x = 10$ (a largura da placa), o que resulta em $y = 14 - 2x$ (base do triângulo) e $z = 5 - x$ (altura de um triângulo), procedendo depois à simplificação da expressão que permite determinar a área de um triângulo e, após isso, a área total.

Quanto às respostas parcialmente corretas, no caso do aluno A16, o sinal positivo na expressão da base do triângulo $(14 + 2x)$ encontra-se incorreto, assim como o cálculo respeitante à área do triângulo não se encontra dividido pela metade, logo seria o dobro de $\frac{(14-2x)\left(\frac{10-2x}{2}\right)}{2} = \frac{(14-2\ \ )(5-x)}{2}$ (por serem dois triângulos geometricamente iguais).

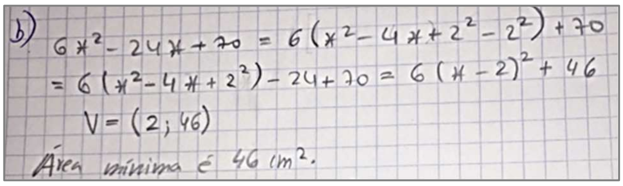
De forma semelhante, o aluno A17 também apresentou a expressão final, em que a solução e o restante desenvolvimento se encontram corretos, mas com erros semelhantes ao aluno A16. Além de não ter dividido a expressão que diz respeito à área do triângulo, a expressão que representa a base do triângulo também está incorreta, pois o aluno considerou $44 - 2x$. Também o aluno A16 comete lapsos na determinação dessa expressão, que deveria ser $14 - 2x$. Já o aluno A25 apresentou a sua resolução incompleta, pois falta o cálculo da área final, dos quatro quadrados e dos dois triângulos (Figura 50).

Figura 50 – Respostas parcialmente corretas dos alunos A16, A17 e A25 à alínea a) do Problema 5.



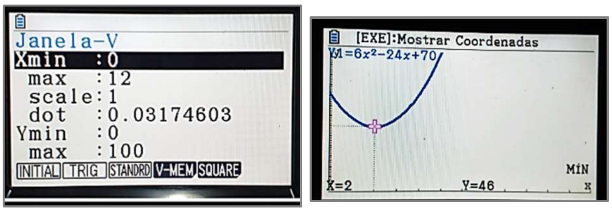
Quanto à segunda alínea, os alunos tinham de proceder ao completamento do quadrado, para determinar o minimizante da função que representa a área da figura em função de x e o valor dessa área, como exemplifica a resolução do aluno A2.

Figura 51 – Resposta correta do aluno A2 à alínea b) do Problema 5.



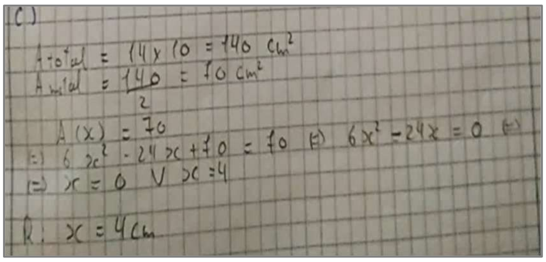
Nesta alínea, a resolução gráfica (38,46%) e a resolução analítica (34,62%) apresentam aproximadamente o mesmo número de respostas corretas. A maioria dos alunos elegeu um dos métodos, o que fez o número de 'não respostas' ser acima dos 60% nos dois casos. A resolução do aluno A14 exemplifica as resoluções dos alunos que recorreram à calculadora gráfica, diferindo apenas nos valores da janela utilizada (Figura 52).

Figura 52 – Resposta correta do aluno A14 à alínea b*) do Problema 5.



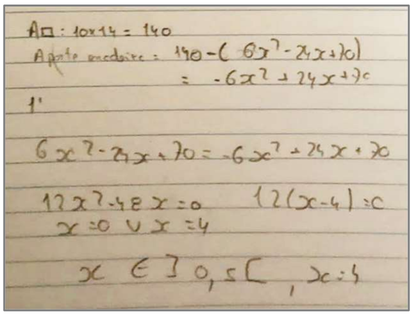
A última alínea foi a que os alunos apresentaram mais dificuldade, traduzindo-se num menor número de respostas corretas tanto na resolução analítica (30,77%) como na gráfica (15,38%). Os alunos igualaram a expressão que traduz a área da parte em metal com a metade da expressão que representa a área da placa (área total). Uma menor percentagem dos alunos (19,23%) respondeu de acordo com a resolução do aluno A8 (Figura 53).

Figura 53 – Resposta correta do aluno A8 à alínea c) do Problema 5.



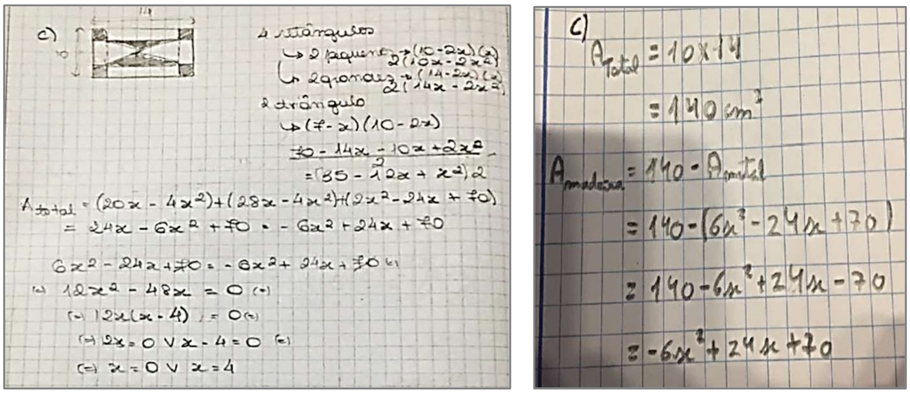
Nos restantes casos de respostas corretas, os alunos não assumiram que se a área da parte em metal é igual à área da parte em madeira então a área da parte metalizada é metade da área da placa, ou seja, não igualaram a expressão inicial a $70\ cm^2$. Em vez disso, calcularam a área da parte em madeira, fazendo a diferença entre o valor da área total e a expressão da área em metal. A maioria dos alunos (30,77%) respondeu em conformidade como fez o aluno A11, que apenas apresenta um lapso no desenvolvimento da equação, onde deveria estar: $12x(x-4)=0$ (Figura 54).

Figura 54 – Resposta correta do aluno A11 à alínea c) do Problema 5.



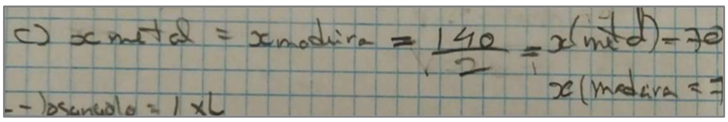
No caso das respostas parcialmente corretas, o aluno A9 apresentou a sua resolução incompleta, apesar da resolução apresentada se encontrar correta. Este aluno não apresentou a igualdade das duas expressões (valor ou expressão da área da parte em metal igualada à expressão da área da parte em madeira) e a resolução dessa equação, todavia apresentou esse procedimento através da calculadora gráfica (como se irá ver de seguida). O aluno A3, assim como outro aluno, procedeu a uma resolução correta do problema através de outro procedimento. Este aluno determinou a expressão para a área em madeira (parte branca da figura), através da determinação das expressões algébricas respeitantes a cada uma das áreas da figura (os quatro retângulos e os dois triângulos). Denominou "área total" à área correspondente à madeira e igualou-a corretamente à área em metal. Contudo, apenas é considerada uma resposta parcialmente correta, assim como nos outros casos (15,38%), pois não concluiu que a resposta correta será apenas uma das duas soluções da equação, no contexto do problema (Figura 55).

Figura 55 – Respostas parcialmente corretas dos alunos A3 e A9 à alínea c) do Problema 5.



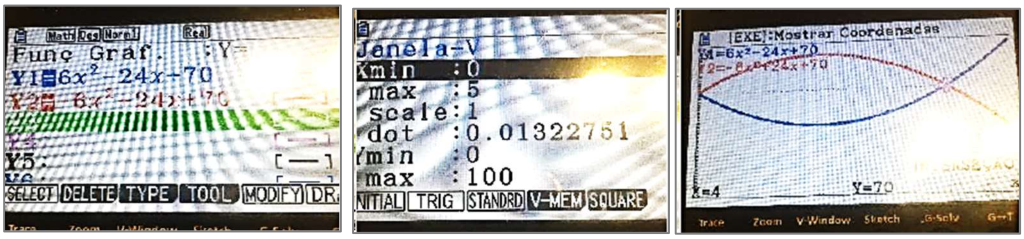
Quanto à resposta incorreta, o aluno A18 assumiu que a área da parte metalizada era metade da área total, assumindo os valores de x e não de $A(x)$. Concluiu erradamente que o valor de x para o qual a área da parte em metal é igual à área da parte em madeira, tinha de valor $70\ cm$ (Figura 56).

Figura 56 – Resposta incorreta do aluno A18 à alínea c) do Problema 5.



Nesta alínea, todas as respostas com a calculadora igualaram as expressões algébricas obtidas, $6x^2 - 24x + 70 = -6x^2 + 24x + 70$. Os alunos apresentaram uma janela adequada e usaram a função $intsect$ da calculadora gráfica para calcular o ponto de interseção entre os gráficos das duas funções, conforme o aluno A9.

Figura 57 – Resposta correta do aluno A9 à alínea c*) do Problema 5.



Quanto à sistematização do estudo efetuado sobre a função módulo, os alunos resolveram o Problema 6. Esperava que os alunos manifestassem dificuldades na interpretação do problema e em estabelecer uma estratégia de resolução.

Problema 6: Função módulo Determina a área de um losango, sabendo que três dos seus vértices e dois dos seus lados são obtidos a partir do gráfico cartesiano função definida por $f(x) = 3|x-4| - 5$.

Na resolução deste problema, as respostas são consideras corretas (C) caso apresentem o cálculo da área de um losango de acordo com o descrito no enunciado. Caso não apresentem todos os seus vértices com o raciocínio explícito, a resposta é considerada parcialmente correta (PC). Se for apresentada uma resolução sem nexo no contexto do problema, a resposta encontra-se incorreta (I). Se não apresentarem qualquer resposta neste problema, a resposta é considerada não respondida (NR) (Tabela 16).

Tabela 16 - Frequência (%) do tipo de respostas dos alunos às questões do Problema 6 $(n = 26)$

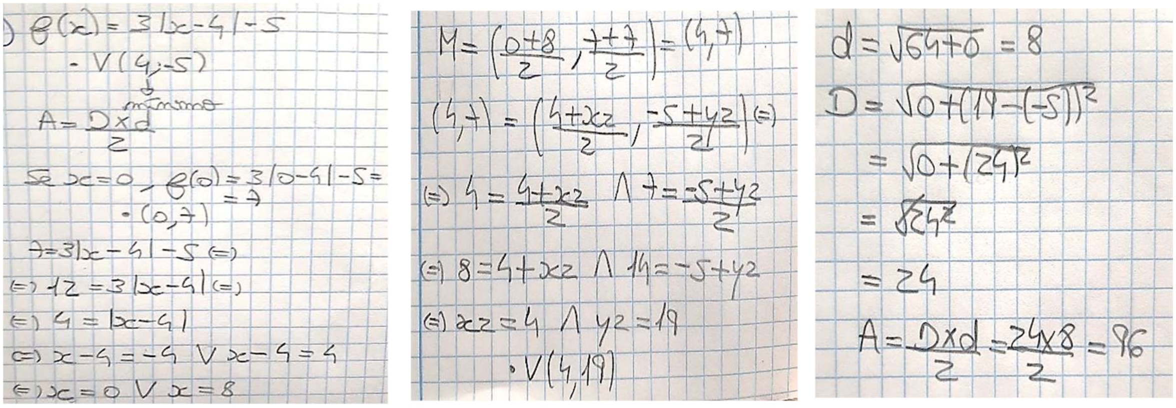
Itens e Critérios	**C**	**PC**	**I**	**NR**
a) Determinar uma área possível para o losango.	7 (26,93%)	4 (15,38%)	–	15(57,69%)
a*) Determinar através da calculadora gráfica uma área possível para o losango.	2 (7,69%)	–	–	24(92,31%)

Neste problema foram apresentadas menos respostas que no anterior, devido à sua natureza aberta. Os alunos poderiam optar pelo método analítico e/ou gráfico. Quanto às respostas corretas (26,93%), foram apresentados três tipos de resposta. Foram apresentadas respostas parcialmente corretas (15,38%), mas nenhuma resposta incorreta, cenário semelhante ao problema anterior. As respostas corretas com a calculadora gráfica (7,69%), seguiram o mesmo raciocínio e representaram corretamente todos os passos seguidos.

Na resolução do aluno A25, como a maioria dos alunos (26,93%), a área do losango foi de $96\ u.a.$ Este aluno teve em conta as transformações do gráfico da função, identificou o 'vértice', calculou

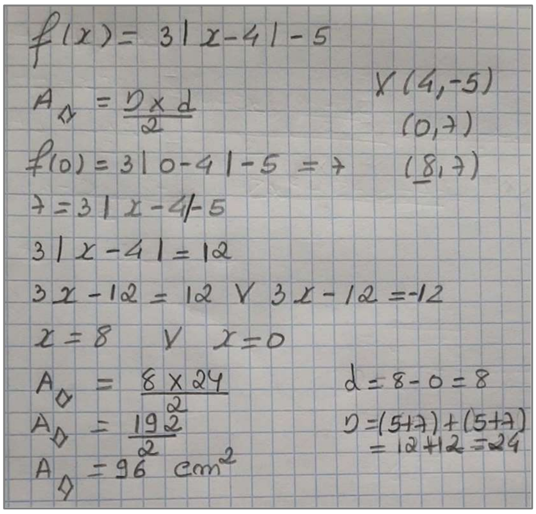
$f(0)$ e calculou os objetos para a imagem anteriormente determinada $(f(x) = 7)$. Para determinar as duas diagonais do losango, procedeu de uma forma geométrica, calculando o seu ponto médio e aplicando a distância entre dois pontos (Figura 58).

Figura 58 – Resposta correta do aluno A25 à alínea a) do Problema 6.



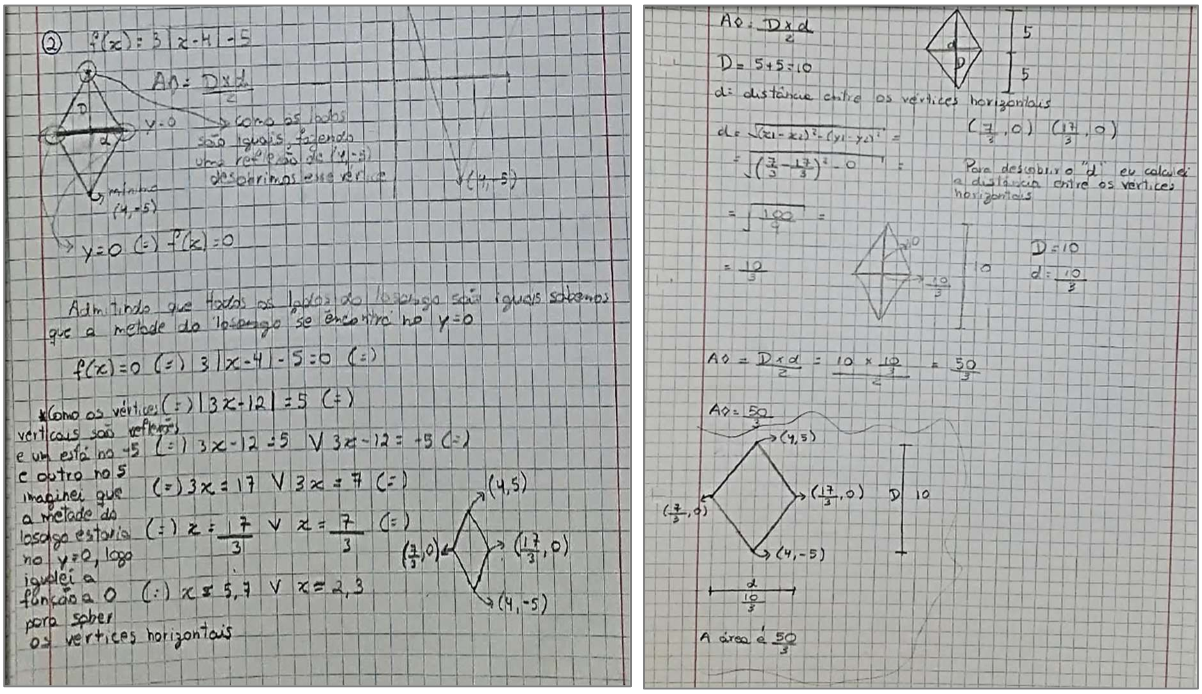
O aluno A1 procedeu de forma semelhante, calculando as coordenadas do 'vértice', a imagem para $x = 0$ e os valores de x que verificam a equação $f(x) = 7$. Porém, não necessitou de calcular o ponto médio da diagonal menor (ponto o qual as diagonais se bissetam), para o cálculo do 'vértice' correspondente ao máximo da figura, como procedeu o aluno A25. De uma forma simplificada, o aluno A1 concluiu que a diagonal menor é de 8 unidades, e a diagonal maior é de $(7 + 5) \times 2 = 24$ unidades, tendo em conta os cálculos efetuados e a figura ser um losango (Figura 59).

Figura 59 – Resposta correta do aluno A1 à alínea a) do Problema 6.



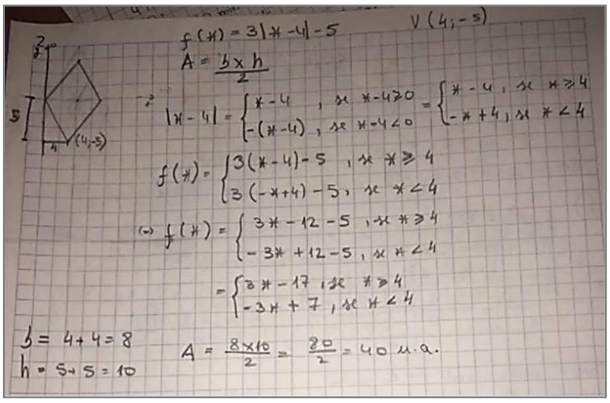
O aluno A23 apresentou outra resposta possível para o problema, determinando o valor da área como sendo $\frac{50}{3}u.a$, o que também foi obtido por 7,69% dos alunos. O aluno A23 calculou os zeros da função e a distância entre esses pontos para determinar o comprimento da diagonal menor ($\frac{10}{3}$). Para a diagonal maior, assumiu uma simetria relativamente a O_x, o que fez com que a ordenada de um dos 'vértices' fosse o mínimo do gráfico da função, e o outro assumisse o valor simétrico da sua ordenada.

Figura 60 – Resposta correta do aluno A23 à alínea a) do Problema 6.



Quanto às respostas parcialmente corretas, surgiu a opção de a área final ser de $40\,u.a.$, resultado obtido por 7,69% dos alunos. O aluno A2 definiu a função módulo corretamente por ramos, apesar de não ser necessário para este problema. Determinou corretamente o 'vértice' do gráfico da função, o que fez assumir incorretamente que as diagonais do losango eram o dobro desses valores. A imagem que desenhou induziu-o em erro, pois se a diagonal menor medir 8 unidades, a diagonal maior não pode medir 10 unidades, ou vice-versa, como foi analisado nos casos anteriores, pois assim a imagem formada não seria a do problema.

Figura 61 – Resposta parcialmente correta do aluno A2 à alínea a) do Problema 6.



Na aula foi analisada esta resolução, assim como a anterior.

Professora: Reparem que os valores das áreas são diferentes (resoluções dos alunos A2 e A23), 40 e $\frac{50}{3}$.

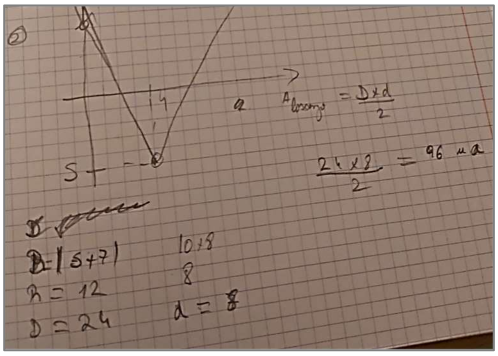
A6: Eu acho que depende dos vértices, mas não me deu nenhuma dessas respostas.

A4: A mim também não... Acho que é porque as diagonais vão depender desses valores que damos aos vértices.

De seguida, expliquei o processo de resolução de cada um dos exemplos e, após isso, exemplifiquei o processo de uma resolução semelhante ao do aluno A1: o método a que os alunos mais recorreram (a área do losango ser de $96\ u.a.$).

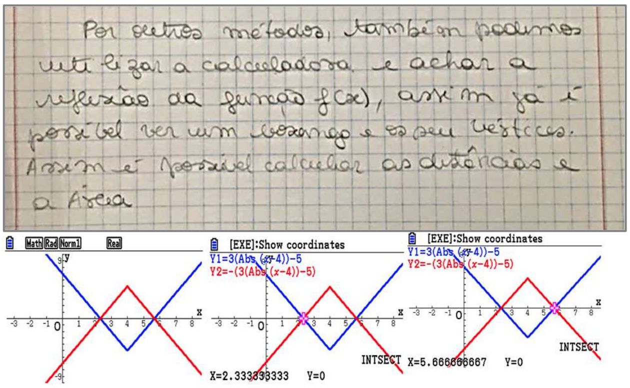
As restantes respostas parcialmente corretas intercalam com a determinação adequada de $96\ u.a.$. Porém, não mencionaram todos os cálculos esperados, como as coordenadas do 'vértice' $(8,7)$, pois apesar de estar mencionada corretamente a diagonal maior, não se encontra explícito como se procedeu ou se utilizaram a calculadora para determinar diretamente os valores escritos (Figura 62).

Figura 62 – Resposta parcialmente correta do aluno A13 à alínea a) do Problema 6.



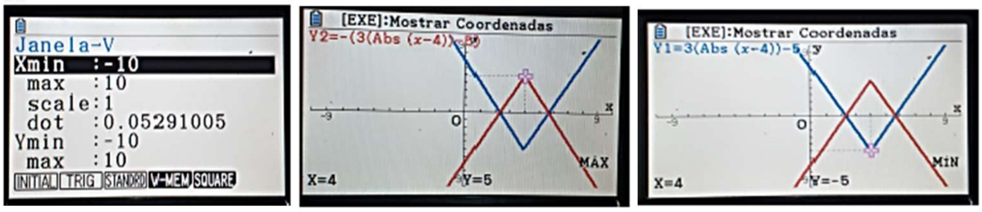
No que respeita à utilização da calculadora gráfica, dois alunos responderam a esta alínea com ambos os métodos para determinar a área do losango de $\frac{50}{3}\ u.a.$ Na calculadora gráfica, editaram a expressão que define a função que traduz o problema e a expressão que define a função simétrica, para assim visualizarem os quatro vértices do losango. Neste tipo de resolução, era necessário o cálculo dos zeros, o que pode ser feito pelos dois pontos determinados pela interseção dos gráficos das duas funções (Figura 63).

Figura 63 – Resposta correta do aluno A3 à alínea a*) do Problema 6.



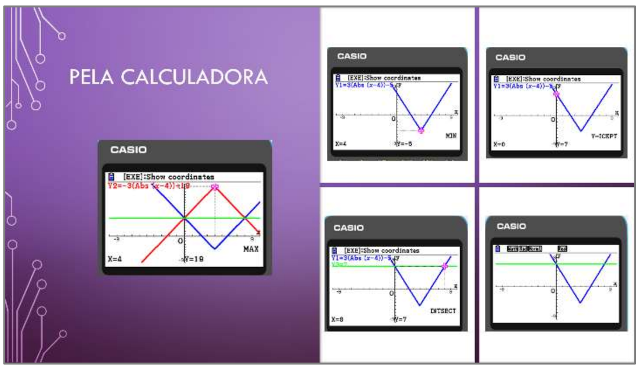
O aluno A23 complementou com a representação do máximo e mínimo, selecionando os ramos respetivos (Figura 64).

Figura 64 – Resposta correta do aluno A23 à alínea a*) do Problema 6.



Na aula, explicitei todos os passos da resolução analítica, o que também aconteceu com a resolução através da calculadora gráfica, determinando os valores dos quatro vértices da figura (Figura 65).

Figura 65 – Representação através do emulador da Casio à alínea a*) do Problema 6.



Síntese

Da mesma forma como exemplificado nas outras aulas, foram analisadas as estratégias da resolução de problemas e os esquemas a que os alunos recorreram na resolução dos dois problemas da aula. Na tabela seguinte será apresentado o método analítico do Problema 5 (Tabela 17).

Tabela 17 – Estratégias dos alunos na resolução do Problema 5 no estudo da função quadrática.

Atividades	**Estratégias**	**Fases da resolução de problemas**
a) Determinar a expressão da área da parte metalizada.	▪ Interpretar informação dada em linguagem natural. ▪ Definir expressões algébricas.	▪ Compreender o problema. ▪ Estabelecer um plano.
b) Determinar a área mínima da parte metalizada.	▪ Recurso a uma expressão algébrica. ▪ Fazer tentativas.	▪ Executar o plano. ▪ Refletir sobre o resultado obtido.
b*) Determinar a área mínima da parte metalizada através da calculadora gráfica.	▪ Efetuar o esboço gráfico da função. ▪ Verificar graficamente se a solução está em conformidade com o contexto do problema.	▪ Refletir sobre o resultado obtido.
c) Determinar o valor para o qual a área da parte metalizada é igual à parte em madeira.	▪ Interpretar informação dada em linguagem natural. ▪ Definir a expressão algébrica que traduz a igualdade de áreas. ▪ Verificar analiticamente se a solução está em conformidade com o contexto do problema	▪ Estabelecer um novo plano. ▪ Executar o plano.
c*) Determinar o valor para o qual a área da parte metalizada é igual à parte em madeira através da calculadora gráfica.	▪ Interpretar a informação dos gráficos. ▪ Verificar graficamente se as soluções estão de acordo com o contexto do problema.	▪ Refletir sobre o resultado obtido.

Neste problema, tendo em conta as estratégias dos alunos, verifica-se que recorreram às informações dadas em linguagem natural para a traduzirem para a linguagem algébrica. No processo da determinação do 'vértice', recorreram a tentativas, no desenvolvimento do completamento do quadrado, que representa a área mínima. Porém, não refletiram sobre o resultado obtido. O instrumento utilizado, a calculadora gráfica, serviu de verificação do que foi realizado analiticamente, de interpretação e reflexão dos resultados obtidos no contexto do problema. Na última alínea, estabelecem um novo plano, que tem ligação à primeira alínea, o que remete para uma nova leitura do problema. Com a calculadora gráfica, os alunos são desafiados a refletir se a solução que obtiveram é efetivamente a solução do problema.

Na tabela seguinte será apresentado o método gráfico do Problema 5 (Tabela 18).

Tabela 18 – Esquemas usados pelos alunos na resolução com a calculadora gráfica das alíneas do Problema 5.

Atividades	**Esquemas de uso**	**Esquemas de ação instrumentada**
a) Determinar a expressão da área da parte metalizada	(Não contemplado)	(Não contemplado)
b) Determinar a área mínima da parte metalizada.	(Não contemplado)	(Não contemplado)

b*) Determinar a área mínima da parte metalizada através da calculadora gráfica.	▪ Ativar o Menu- Graph. ▪ Introduzir a função. ▪ Selecionar Shift-G-Solv- Min.	▪ Explorar a representação gráfica. ▪ Averiguar se a representação gráfica se adequa ao contexto do problema.
c) Determinar o valor para o qual a área da parte metalizada é igual à parte em madeira**.**	(Não contemplado)	(Não contemplado)
c*) Determinar o valor para o qual a área da parte metalizada é igual à parte em madeira através da calculadora gráfica.	▪ Ativar o Menu- Graph. ▪ Introduzir as funções. ▪ Selecionar Shift- G-Solv- Isct. ▪ Ou Introduzir a função. ▪ Selecionar Shift- G-Solv- Seta(F6)- X-Calc. ▪ Introduzir $y = 70$.	▪ Explorar a representação gráfica. ▪ Definir a janela com os valores adequados no contexto do problema. ▪ Identificar o ponto de interseção.

Com este problema, por ter sido dos últimos realizados no decorrer do ano letivo, verificou-se que os alunos já se encontravam mais familiarizados com a calculadora gráfica. Além de a usarem como instrumento de verificação, elegerem-na como método na determinação do mínimo do gráfico de uma função, em vez de processos analíticos. Quando recorreram a este instrumento, editaram as expressões de duas funções e determinaram as interseções dos gráficos das mesmas. A opção de determinar o objeto de uma certa imagem por uma função, não foi usada pelos alunos. Esta opção, assim como o inverso, o $y - calc$ e o $y - icpt$, foram exploradas no momento da discussão sobre as resoluções de um problema sobre outra função quadrática. A resolução do presente problema foi efetuada em conjunto com os alunos, utilizando métodos gráficos e analíticos, como também diversas funcionalidades da calculadora gráfica.

O segundo problema apresenta uma 'estrutura aberta', sendo os resultados distintos (Tabela 19).

Tabela 19 – Estratégias dos alunos na resolução do Problema 6 no estudo da função módulo.

Atividades	**Estratégias**	**Fases da resolução de problemas**
a) Determinar uma área possível para o losango.	▪ Fazer tentativas. ▪ Descobrir um padrão. ▪ Usar expressões e equações algébricas.	▪ Compreender o problema. ▪ Estabelecer um plano. ▪ Executar o plano.
a*) Determinar através da calculadora gráfica uma área possível para o losango.	▪ Elaborar dois gráficos (recurso a pontos de interseção e a extremos absolutos).	▪ Executar o plano. ▪ Refletir sobre o resultado.

No Problema 6, os alunos exploraram o enunciado do problema para estabelecer um plano, de mais de uma maneira possível dependendo da construção do losango, tendo em conta a função definida por uma expressão com módulo. Os vértices poderiam ser os zeros da função ou resultado da interseção do gráfico com o eixo O_y. Logo, procederam a tentativas e de seguida à descoberta de um 'padrão' a seguir. Conclui-se que os alunos entenderam eficazmente as transformações que um gráfico pode tomar. Assumiram uma visão geométrica do problema, calculando o ponto médio das duas diagonais e aplicando o procedimento que lhes permitiu determinar a distância entre dois pontos. Outro caso alternativo, foi "estabelecer o plano", onde o segundo vértice interseta o eixo das ordenadas, e não das abcissas. A interpretação de quais seriam as duas diagonais em qualquer um dos casos, envolve a exploração do problema e de um raciocínio específico para cada caso, o qual os alunos explicitaram corretamente. Denota-se, assim, uma evolução da capacidade de resolução de problemas e da explicação do seu raciocínio por parte dos alunos.

Desta forma, na tabela seguinte, serão apresentados os esquemas a que os alunos recorreram neste problema (Tabela 20).

Tabela 20 – Esquemas usados pelos alunos na resolução com a calculadora gráfica das alíneas do Problema 6.

Atividades	**Esquemas de uso**	**Esquemas de ação instrumentada**
a) Determinar uma área possível para o losango.	(Não contemplado)	(Não contemplado)
a*) Determinar através da calculadora gráfica uma área possível para o losango.	▪ Ativar o Menu – Graph. ▪ Selecionar Optn- G-Solv- Abs. ▪ Ou Selecionar Shift- Catalog- Abs. ▪ Introduzir as funções módulo. ▪ Selecionar Shift- G-Solv- Min. ▪ Selecionar Shift- G-Solv- Root. ▪ Ou Selecionar Shift- G-Solv- Y-Icpt; ▪ Ou Y-Calc ($x = 0$); ▪ Introduzir a função constante $y = 7$; ▪ Selecionar Shift- G-Solv- Isct; ▪ Selecionar Shift- G-Solv- Max.	▪ Explorar a representação gráfica. ▪ Definir a janela de visualização de modo a visualizar com clareza todos os extremos dos gráficos. ▪ Averiguar se a representação gráfica se adequa ao contexto do problema.

Neste problema final, houve menos respostas pela calculadora gráfica do que no anterior. Os alunos tinham de determinar a área de figura através da construção de uma parte da mesma. Os alunos que procederam à resolução através dos zeros da função, conseguiram-na representar através da calculadora. Neste caso, não aplicaram a funcionalidade '$root$', preferindo usar a funcionalidade '$intsect$', pois introduziram inicialmente ambas as funções. Neste tipo de resolução, torna-se de rápida visualização o 'min' e o 'max' do gráfico da função. O outro tipo de resolução possível para este problema, o qual os alunos acharam mais intuitivo analiticamente, outrora, por este instrumento, já não se torna tão intuitivo pois não se consegue visualizar a diagonal menor, sem antes se descobrir o segundo vértice. Os alunos, neste caso, tiveram em conta que a diagonal maior não é dada pelo valor direto da ordenada do ponto máximo do gráfico, mas sim adicionando cinco unidades, devido ao referencial cartesiano e à posição do losango dada pelo gráfico da função que descreve o seu comportamento. Recorrendo a uma resolução exclusivamente gráfica, estas particularidades requerem uma atenção especial por parte dos alunos e a um esboço que reflita o seu raciocínio, tendo em conta os gráficos gerados.

3.2. Avaliação do ensino ministrado

De forma a dar resposta à última questão de investigação, foi proposto um questionário final aos alunos com o objetivo de perceber quais as suas perceções sobre a resolução de problemas na aprendizagem de funções do 10.º ano com recurso à calculadora gráfica. Para este efeito, elaborei um conjunto de questões de natureza fechada, cuja resposta se traduziu segundo uma escala tipo Likert, de forma a os alunos selecionassem a sua opção de concordância. Tais respostas foram analisadas em torno das seguintes categorias: (i) tópico de funções; (ii) resolução de problemas; (iii) calculadora gráfica; (iv) dificuldades; e (v) método de ensino. Para a análise dos dados recolhidos, considerou-se a frequência de resposta a cada questão, o valor da média e do desvio padrão, sendo atribuído a cada grau da escala de Likert um valor: um para discordo totalmente (DT), dois para discordo parcialmente (DP), três para indiferente (I), quatro para concordo parcialmente (CP) e cinco para concordo totalmente (CT). Na Tabela 21, apresenta-se a avaliação que os alunos fazem da aprendizagem dos tópicos de funções estudados.

Tabela 21 - Frequência (%) das perceções dos alunos relativamente ao tópico funções $(n = 21)$

Afirmação	**DT/DP**	**I**	**CP/CT**	$\bar{x}$	s
Gostei de aprender os tópicos de Funções.	3 (14%)	3 (14%)	15 (72%)	3,86	1,066
O estudo de tópico de Funções não é importante para a minha formação.	6 (29%)	8 (38%)	7 (33%)	3,19	1,139
Tive mais dificuldades na aprendizagem de tópicos de Funções do que noutros tópicos matemáticos.	3 (14%)	5 (24%)	13(62%)	3,62	1,174

Com base na análise da tabela anterior, constata-se que a maioria dos alunos expressa que gostou de estudar o tópico de Funções, o que já não se verificou para alguns alunos que apontam o seu grau de discordância ou de indiferença. Quanto à relevância do estudo das Funções, os resultados foram divididos, sendo que o maior número de respostas recaiu na indiferença. Estes resultados não são tão favoráveis, pois 33% dos alunos referiram que este tópico não é importante para a sua formação. Mais de metade dos alunos reconhece que sentiram mais dificuldades no tópico de funções do que nos restantes, o que se pode dever ao ténue desenvolvimento do raciocínio funcional, ainda na sua génese.

Relativamente à resolução de problemas, os alunos reconhecem massivamente que a resolução de problemas os ajudou na aprendizagem do tópico de funções (90%). Também reconhecem que os desafiou a pensar (86%), sendo que nenhum aluno discordou desta afirmação. Em contrapartida, quase metade dos alunos (43%) afirmou que, quando os problemas são complexos, sentem uma maior vontade de desistir, contudo a maioria discordou (52%). No mesmo seguimento, mais de metade dos alunos afirmou que sentiu dificuldade na interpretação dos enunciados dos problemas (62%), atividade que levou a 90% dos alunos a afirma que procuraram ler várias vezes o enunciado até perceber o que é pedido (Tabela 22).

Tabela 22 - Frequência (%) das perceções dos alunos relativamente à resolução de problemas na aprendizagem de tópicos de funções $(n = 21)$

Afirmação	**DT/DP**	**I**	**CP/CT**	$\bar{x}$	s
A resolução de problemas ajudou-me a compreender os tópicos de Funções.	–	2 (10%)	19 (90%)	4,48	0,663
Ao resolver problemas, sinto vontade de desistir quando os problemas são complexos.	11 (52%)	1 (5%)	9 (43%)	2,67	1,357
A resolução de problemas desafia-me a pensar.	–	3 (14%)	18 (86%)	4,48	0,732
Na resolução de problemas tenho dificuldades na interpretação do enunciado.	4 (19%)	4 (19%)	13 (62%)	3,48	0,852
Quando resolvo problemas, procuro ler várias vezes o enunciado até perceber o que é pedido.	–	2 (10%)	19 (90%)	4,52	0,663

Quanto às estratégias utilizadas na resolução de problemas, as respostas dos alunos foram repartidas, quer quanto ao uso de esquemas ou tabelas quer na indiferença em recorrer a estas estratégias. No que se refere à tentativa e erro, a maior parte dos alunos não recorreu a esta estratégia, o que já aconteceu com 38% deles. A maioria dos alunos reconhece que a resolução de problemas desenvolveu a sua capacidade de argumentar estratégias e resultados. A capacidade de discussão de ideias também prevaleceu na maioria dos alunos quanto ao contributo da resolução de problemas no desenvolvimento desta capacidade (Tabela 23).

Tabela 23 - Frequência (%) das perceções dos alunos relativamente às estratégias usadas na resolução de problemas na aprendizagem de tópicos de funções $(n = 21)$

Afirmação	**DT/DP**	**I**	**CP/CT**	$\bar{x}$	s
Na resolução de problemas recorri a esquemas/tabelas para entender melhor o que é pedido.	1 (5%)	11 (52%)	9 (43%)	3,52	0,853
Na resolução de problemas recorri à estratégia de tentativa e erro.	11 (52%)	2 (10%)	8 (38%)	2,81	1,006
A resolução de problemas desenvolveu a minha capacidade de argumentar estratégias e resultados.	–	6 (29%)	15 (71%)	3,91	0,683
A resolução de problemas desenvolveu a minha capacidade de discutir ideias.	3 (14%)	4 (19%)	14 (67%)	3,62	0,999

Relativamente ao uso da calculadora gráfica, a maior parte dos alunos concorda que a informação gerada pela calculadora gráfica foi essencial para a aprendizagem de tópicos de funções, como também concordam que favoreceu a conexão entre a resolução gráfica e a resolução analítica e os desafiou quer a pensar sobre as suas atividades quer a repensar sobre as suas estratégias de resolução dos problemas (Tabela 24).

Tabela 24 - Frequência (%) das perceções dos alunos relativamente à calculadora gráfica na aprendizagem de tópicos de funções ($n = 21$)

Afirmação	DT/DP	I	CP/CT	$\bar{x}$	s
A interpretação da informação gerada pela calculadora gráfica foi essencial na aprendizagem de tópicos de Funções.	–	5 (24%)	16 (76%)	3,52	1,123
A utilização da calculadora gráfica incentivou-me a estabelecer conexões entre a resolução gráfica e a analítica das tarefas propostas.	–	4 (19%)	17 (81%)	4,14	0,710
A utilização da calculadora gráfica desafiou-me a pensar sobre as atividades realizadas.	–	8 (38%)	13 (62%)	3,91	0,811
O uso da calculadora gráfica levou-me a repensar as minhas estratégias de resolução de problemas	–	7 (33%)	14 (67%)	3,86	0,710

Sendo questionados acerca da aprendizagem através da resolução analítica e gráfica das tarefas propostas, a maioria dos alunos concorda que recorreu à calculadora gráfica para validar os resultados obtidos analiticamente, enquanto o caso inverso suscitou mais diferenças. Uma menor percentagem dos alunos (67%) recorreu a processos analíticos para validar resultados obtidos na calculadora. Quanto ao método preferível para uma melhor aprendizagem do tópico de funções, 43% dos alunos concordam que preferiam métodos exclusivamente analíticos, enquanto outros 43% não revelaram esta preferência. Quanto aos métodos gráficos, quase metade dos alunos (47%) discorda que tenha aprendido melhor tópicos de Funções quando usou a calculadora gráfica do que processos analíticos. Contudo, de forma mais unânime, os alunos concordam que aprenderam melhor recorrendo a ambos os métodos, analíticos e gráficos (Tabela 25).

Tabela 25 - Frequência (%) das perceções dos alunos relativamente à aprendizagem no confronto entre a resolução analítica e a resolução gráfica ($n = 21$)

Afirmação	DT/DP	I	CP/CT	$\bar{x}$	s
Recorri à calculadora gráfica para validar resultados obtidos analiticamente na resolução de problemas.	1 (5%)	1 (5%)	19 (90%)	4,48	0,794
Recorri a processos analíticos para validar resultados obtidos na calculadora gráfica.	3 (14%)	4 (19%)	14 (67%)	3,76	0,971
Aprendi melhor os tópicos de Funções quando utilizava processos analíticos do que com a calculadora gráfica.	3 (14%)	9 (43%)	9 (43%)	3,48	0,957
Aprendi melhor os tópicos de Funções quando utilizava a calculadora gráfica do que com processos analíticos.	10 (47%)	6 (29%)	5 (24%)	2,71	1,030
Aprendi melhor os tópicos de Funções quando utilizava simultaneamente a calculadora gráfica e processos analíticos.	1 (5%)	4 (19%)	16 (76%)	4,05	0,999

Em relação às dificuldades na aprendizagem de funções com a calculadora gráfica, aliada também à resolução de problemas, os alunos afirmam que, após elaborarem a resolução de um problema, sentiram dificuldade em comprovar os resultados na calculadora (29%), o que já não se verificou para a maioria dos alunos. Da mesma forma, a dificuldade na transcrição para o caderno da informação obtida pela calculadora, quase metade dos alunos (47%) não a sentiu, expressando os restantes um misto de dificuldade nessa transcrição ou de indiferença. Os alunos reconhecem a importância da calculadora gráfica na aprendizagem de funções (Tabela 26).

Tabela 26 - Frequência (%) das perceções dos alunos relativamente às dificuldades na aprendizagem de funções e na utilização da calculadora gráfica $(n = 21)$

Afirmação	**DT/DP**	**I**	**CP/CT**	$\bar{x}$	s
Senti dificuldades em comprovar na calculadora gráfica as resoluções de problemas efetuadas no caderno.	12 (57%)	3 (14%)	6 (29%)	2,62	1,133
Senti dificuldades em transcrever para o caderno a informação obtida pela calculadora gráfica.	10 (47%)	6 (29%)	5 (24%)	2,38	1,214
A calculadora gráfica dificultou a minha aprendizagem de tópicos de Funções.	19 (90%)	1 (5%)	1 (5%)	1,57	0,791

Quanto à utilização da calculadora gráfica na resolução de problemas, a maioria dos alunos concorda que tal utilização tornou as aulas mais dinâmicas e desenvolveu a capacidade de comunicação. A calculadora gráfica tornou-se um instrumento indispensável na resolução de problemas (Tabela 27).

Tabela 27 - Frequência (%) das perceções dos alunos relativamente ao confronto entre a calculadora gráfica e a resolução de problemas $(n = 21)$

Afirmação	**DT/DP**	**I**	**CP/CT**	$\bar{x}$	s
A resolução de problemas torna as aulas mais dinâmicas.	–	8 (38%)	13 (62%)	3,95	0,844
A explicação do meu raciocínio aliada à representação na calculadora gráfica desenvolveu a minha capacidade de comunicação na resolução de problemas.	–	8 (38%)	13 (62%)	3,81	0,732
Não precisei de utilizar a calculadora gráfica na resolução de problemas relativos ao estudo de tópico de Funções.	15 (72%)	3 (14%)	3 (14%)	2,10	0,960

Relativamente às perceções dos alunos no que respeita ao método de ensino adotado e às suas preferências, a maior parte dos alunos concorda de que gostaria de aprender outros tópicos matemáticos quer com recurso à calculadora quer à resolução de problemas. Em relação à metodologia de ensino, os alunos respondem massivamente (95%) que aprendem mais quando o professor expõe a matéria e resolve os problemas na aula, como também quando o docente promove a discussão das resoluções dos mesmos. Por fim, no que respeita à troca de ideias com os colegas, a maioria dos alunos concorda que se aprende mais desta forma. Importa considerar que os resultados obtidos tendem a ser influenciados pela alteração da metodologia de ensino usual devido à pandemia vivida, o que fez com que os alunos não pudessem interagir de igual forma com os seus colegas e não terem discutido os problemas da mesma forma como se fosse numa sala de aula (Tabela 28).

Tabela 28 - Frequência (%) das perceções dos alunos relativamente ao método de ensino $(n = 21)$

Afirmação	**DT/DP**	**I**	**CP/CT**	$\overline{x}$	s
Gostaria de aprender outros tópicos matemáticos com recurso à calculadora gráfica.	2 (10%)	3 (14%)	16 (76%)	4,05	0,950
Gostaria de aprender outros tópicos matemáticos com recurso à resolução de problemas.	2 (10%)	8 (38%)	11 (52%)	3,52	0,957
Aprendo mais quando o professor expõe a matéria e resolve os problemas na aula.	1 (5%)	–	20 (95%)	4,43	0,904
Aprendo mais quando o professor promove a discussão das resoluções de problemas dos alunos.	2 (10%)	5 (24%)	14 (66%)	3,81	0,906
Aprendo mais quando o professor me incentiva a explicar o que fiz e a trocar ideias com os meus colegas.	2 (10%)	6 (28%)	13 (62%)	3,76	0,921

Na segunda parte do questionário, com o objetivo de averiguar as perceções dos alunos quanto às estratégias de ensino implementadas no âmbito da intervenção pedagógica, os alunos depararam-se com questões de cariz aberto. Primeiramente, foi pedido que indicassem três vantagens e três desvantagens que sentiram no ensino à distância. Em relação à resolução de problemas e à utilização da calculadora gráfica, também foram indagados seguindo a mesma tipologia. Por fim, foi pedido que referissem que dificuldades sentiram na aprendizagem de tópicos de funções.

Quanto às vantagens do ensino à distância, os alunos destacam o aumento da autonomia que sentiram e a menor carga horária das aulas, o que fez com que gerissem com maior facilidade o seu tempo de trabalho. Também consideram um aumento de responsabilidade, pois tiveram que se organizar para cumprir todas as tarefas dentro do prazo estipulado. Como as aulas passaram a ter 45 minutos e a metodologia de ensino foi alterada, alguns alunos também sentiram que as aulas foram menos cansativas desta forma (Tabela 29).

Tabela 29 - Frequência das vantagens do ensino à distância na aprendizagem $(n = 21)$

Categorias	**Fr.**
Aumento da autonomia do aluno.	11
Menor carga horária/maior gestão do tempo.	11
Aumento da aprendizagem/responsabilidade.	9
Aulas menos cansativas.	5
Maior quantidade de materiais de apoio com maior organização.	3
Melhor meio para exploração da calculadora gráfica.	3
Maior concentração.	1

Alguns alunos também referiram que tiveram acesso a uma maior quantidade de materiais e que as aulas virtuais proporcionaram um meio para a exploração de novos recursos tecnológicos, neste caso, a calculadora gráfica. Por um aluno também foi referido que aumentou a sua concentração através deste método de ensino.

Quanto às principais desvantagens mencionadas pelos alunos, no ensino à distância, os alunos sentiram que a aprendizagem foi mais reduzida, devido à transmissão de conteúdos ter passado a ser virtual. A interação professor-aluno também sofreu alterações na visão dos alunos, assim como, falhas na rede que pode ter prejudicado a sua aprendizagem. Alguns alunos também referiram que as aulas de matemática deveriam ter sido mais longas, pois tiveram que, num curto espaço de tempo, assimilar todos os conteúdos. A interajuda entre os colegas também foi afetada e também referiram que houve uma maior carga de tarefas nas várias disciplinas. No decorrer da realização de uma tarefa, sentiram a falta do professor na supervisão da mesma e as atividades de avaliação que tiveram, apesar de escassas, tiveram pouco tempo para as realizar, além de uma maior desconcentração por estarem num ambiente familiar (Tabela 30).

Tabela 30 - Frequência das desvantagens do ensino à distância na aprendizagem $(n = 21)$

Categorias	**Fr.**
Menor aprendizagem dos conteúdos.	11
Maior dificuldade em obter ajuda dos professores/interação professor-aluno.	9
Possíveis falhas da internet.	7
Curta duração das aulas de matemática.	7
Diminuição do convívio e interajuda entre os colegas/ interação aluno-aluno.	6
Aumento da carga de tarefas.	5
Falta de supervisão por parte dos professores.	4
Atividades de avaliação com pouco tempo e maior desconcentração.	4
Maior desconcentração.	4
Maior desmotivação.	3
Maior dificuldade na participação.	2
Falhas na avaliação.	1

Por estarem diante de um material tecnológico, sentiram uma maior desmotivação e uma maior dificuldade em participar. Como um aluno tinha como objetivo melhorar a sua classificação, devido ao eventual plágio que poderia ocorrer, não houve alterações relativamente ao período anterior, o que foi mencionado com uma desvantagem deste tipo de ensino.

No que concerne à resolução de problemas, nas vantagens destacam-se o desenvolvimento do raciocínio, o que gerou um melhor entendimento da matéria. Também tiveram a perceção da possibilidade de diferentes métodos de resolução e o desenvolvimento da capacidade de discussão de ideias. A interpretação derivada dos problemas no contexto real propostos, a interação de vários conteúdos estudado em diferentes temas, como a Geometria, a identificação das dificuldades, a perseverança sentida, a ajuda na realização das tarefas prévias e nos trabalhos de casa e a interação com os colegas, também foram vantagens sentidas pelos alunos na resolução de problemas (Tabela 31).

Tabela 31 - Frequência das vantagens da resolução de problemas na aprendizagem $(n = 21)$

Categorias	**Fr.**
Desenvolvimento do raciocínio.	11
Entendimento da matéria.	10
Aprendizagem de diferentes métodos de resolução.	7
Melhoria da capacidade de discussão de ideias.	5
Melhoria da interpretação com problemas do dia a dia.	5
Interação de vários conteúdos.	2
Visualização das dificuldades.	2
Perseverança.	2
Ajuda na realização das tarefas prévias e das posteriores.	2
Interação com os colegas.	1

A maior parte dos alunos reconhece que a resolução de problemas não trouxe qualquer desvantagem. Alguns alunos revelam dificuldades na interpretação do enunciado e referem que para algumas resoluções tiveram que despender muito tempo, o que gerou alguma perda de motivação devido também ao grau de exigência. Um menor número de alunos refere que uma das desvantagens foi a dificuldade em encontrar a estratégia adequada e, com os problemas, os restantes tipos de tarefas tiveram menor tempo despendido (Tabela 32).

Tabela 32 - Frequência das desvantagens da resolução de problemas na aprendizagem $(n = 21)$

Categorias	**Fr.**
Nenhuma.	10
Dificuldade na interpretação do enunciado.	6
Tempo investido para a solução do problema.	4
Exigência e perda de motivação para o resolver e entender a matéria.	4
Dificuldade em encontrar o método adequado.	1
Menor tempo para exercícios e matéria.	1

Nas vantagens mencionadas quanto à utilização da calculadora gráfica, destacam-se a melhor compreensão dos tópicos de funções, a oportunidade de comprovar os resultados analíticos e que através dos gráficos chegaram aos resultados pretendidos. Com este instrumento, constataram que despenderam menos tempo em cálculos extensos e na resolução de problemas, o que provocou uma maior motivação (Tabela 33).

Tabela 33 - Frequência das vantagens da utilização da calculadora gráfica na aprendizagem $(n = 21)$

Categorias	**Fr.**
Melhoria da compreensão da matéria (funções).	9
Comprovação dos resultados.	8
Conexão entre a resolução gráfica e analítica através do gráfico.	8
Ajuda na resolução dos problemas.	6
Substituição de cálculos analíticos extensos para determinar zeros, extremos, etc.	5
Diminuição do tempo a resolver um problema.	3
Motivação.	3

As desvantagens no uso da calculadora gráfica sentida pelos alunos foram escassas. A maioria não apresentou qualquer desvantagem e as restantes respostas debruçam-se sobre a dificuldade no seu manuseamento. Também constatam que este instrumento pode gerar uma certa dependência e poucos alunos referem que a leitura do gráfico no contexto do problema por vezes pode ser difícil (Tabela 34).

Tabela 34 - Frequência das desvantagens da utilização da calculadora gráfica na aprendizagem $(n = 21)$

Categorias	**Fr.**
Nenhuma.	11
Dificuldades no uso.	5
Gera dependência.	5
Dificuldades em interpretar o gráfico no contexto do problema.	2

Por fim, quanto às dificuldades sentidas na aprendizagem de tópicos de funções, as respostas foram divididas. Alguns alunos referem que não sentiram dificuldade nos tópicos estudados, enquanto um maior número de alunos aponta as tarefas terem sido o foco das suas dificuldades. O ensino a distância e a falta de bases são considerados por alguns alunos como a raiz das suas dificuldades. A compreensão dos conceitos, a ligação das Funções com a Geometria e o tema das operações com funções, também foram referidas por alguns alunos. Tópicos como a função quadrática, a função com módulos, a caracterização de funções, as funções compostas e inversas e, por último, a calculadora gráfica como novo instrumento, apesar de pouco referidas, também foram temas mencionados referentes às dificuldades no estudo de tópicos de Funções.

Tabela 35 - Frequência das dificuldades dos alunos na aprendizagem de tópicos de funções $(n = 21)$

Categorias	**Fr.**
Nenhuma.	5
Tarefas.	5
Falta de bases.	5
Ensino à distância.	5
Compreensão dos conceitos.	2
Operações com funções.	2
Interligação das funções com geometria.	2
Função quadrática.	1
Função com módulos.	1
Caracterização de funções.	1
Funções compostas e inversas.	1
Calculadora gráfica.	1

De um modo geral, os alunos consideram que a resolução de problemas teve um contributo positivo na aprendizagem de tópicos de funções, apesar das dificuldades sentidas. Na ótica dos alunos, a utilização da calculadora gráfica levou-os a compreender melhor o tópico lecionado e a comprovarem os resultados analíticos. Neste tópico, o grau de dificuldade das tarefas propostas e o facto de alguns alunos considerarem as Funções um tópico de mais difícil compreensão, assim como, todas as aulas terem sido realizadas a distância, foram os principais fatores referidos pelos alunos na dificuldade das Funções em geral.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Este capítulo está dividido em quatro secções. A primeira secção apresenta as conclusões deste estudo, com o objetivo de dar resposta às questões de investigação delineadas. A segunda secção elenca algumas sugestões para investigações futuras e, na terceira secção, as limitações sentidas para a realização deste estudo. Por fim, na quarta secção, apresenta-se uma reflexão acerca da minha prática pedagógica.

4.1. Conclusões

O presente estudo tem como objetivo averiguar o contributo da resolução de problemas na aprendizagem de funções com recurso à calculadora gráfica de alunos do 10.º ano. Para concretizar este objetivo, pretende responder às seguintes questões de investigação:

(1) Que estratégias recorrem os alunos na resolução de problemas na aprendizagem de funções do 10.º ano? Qual o papel da calculadora gráfica nessa aprendizagem?

(2) Que dificuldades manifestam os alunos do 10.º ano na aprendizagem de funções? E na resolução de problemas?

(3) Que perceções têm os alunos sobre a resolução de problemas na aprendizagem de funções do 10.º ano com recurso à calculadora gráfica?

As respostas a estas questões emergem da informação que é apresentada na ilustração dos momentos da prática pedagógica, aliada ao enquadramento teórico, e também nas respostas dos alunos a um questionário sobre as estratégias de ensino utilizadas.

4.1.1. Que estratégias recorrem os alunos na resolução de problemas na aprendizagem de funções do 10º ano? Qual o papel da calculadora gráfica nessa aprendizagem?

Na resolução de problemas com que se depararam, os alunos recorreram a diversas estratégias, tais como proceder a uma leitura do enunciado do problema, compreender e estabelecer um plano para resolver cada um dos problemas. Após a leitura do enunciado do problema, os alunos indiciaram compreender o que era pedido em cada problema, identificando os dados, e encontrando uma conexão entre esses dados e a incógnita do problema, tal como é perspetivado por Pólya (1995). Quanto a ‘estabelecer e executar um plano’, os alunos foram interpelados a implementar as estratégias escolhidas, que neste caso foram diversas. Tal como advogam Ponte, Branco e Matos (2009), perante problemas sobre tópicos de funções, os alunos recorreram à interpretação de gráficos, às informações dadas em linguagem natural e às expressões algébricas.

O recurso a uma tabela, de forma a organizar a informação, para determinar alguma regularidade, não foi uma estratégia a que os alunos recorreram nos problemas propostos para este estudo. Já o recurso a expressões algébricas foi das estratégias que mais recorreram, o que fez emergir a linguagem simbólica característica da disciplina de Matemática, como, por exemplo, na resolução de equações (Frei, Cabral & Filho, 2004). No que concerne à aplicação de fórmulas, envolvendo operações aritméticas, como os problemas que os alunos resolveram para determinar o valor da área de uma figura geométrica, recorreram a estratégias numéricas. Como esta estratégia surgiu aliada à representação de uma figura num referencial cartesiano (estratégia icónica), à exploração das expressões algébricas (estratégia simbólica), e também à aplicação de uma fórmula para a resposta final (estratégia numérica), leva a concluir que os alunos recorreram a uma estratégia mista, como, por exemplo, na resolução do problema sobre a determinação da área do losango (função módulo).

De um modo geral, recorrendo às estratégias delineadas por Pólya (1995) na resolução de problemas, os alunos recorreram, por ordem decrescente, às seguintes estratégias: (i) Definir expressões algébricas/aplicação de fórmulas/resolução de equações; (ii) Efetuar o esboço gráfico de uma função/interpretação e verificação gráfica; (iii) Interpretar informação dada em linguagem natural; (iv) Fazer tentativas e erro; (v) Descobrir um padrão/generalizar; e (vi) Comparar valores.

Na resolução de todos os problemas, os alunos recorreram a uma ou mais expressões algébricas, de forma a chegar à solução do problema. Recorreram a expressões algébricas para definir a função que resultava da informação dos problemas, substituir os valores pretendidos na variável dependente ou independente, e para representar graficamente a função definida. Através desta representação, para determinarem interseções de gráficos de funções, com ou sem calculadora, tiveram que proceder à resolução de uma equação para chegar diretamente à solução do problema ou este ser um dos mecanismos necessários para lá chegar. Segundo defende Kaput (1999), a Álgebra reduz-se ao ensino de um conjunto de procedimentos que se apresentam muitas vezes isolados, sem aparente relação entre si e sem ligação ao mundo real, por isso os problemas em contexto real foram incutidos. Este autor considera que as aplicações da Álgebra propostas aos alunos são ‘artificiais’, o que os limita na articulação e reflexão daquilo que fazem, levando-os a memorizar processos e fórmulas que lhes permitam resolver os problemas apresentados. Isto revelou-se na quarte e última fase de Pólya, a reflexão, pois os alunos não mostraram refletir se a solução obtida era ou não a solução do problema.

No problema que envolvia a função quadrática, tinham de optar por uma das soluções da equação tendo em conta o contexto do problema, caso este que alguns alunos responderam assertivamente. Contudo nos problemas que envolviam a função definida por ramos, por exemplo, na determinação da variável dependente, os alunos não verificaram nem discutiram se a expressão definida fazia sentido ou se a solução determinada estava correta. Por isso, Kaput (1999) defende o recurso a outro tipo de representações, nomeadamente gráficos e tabelas, que podem ser encaradas como ferramentas mais eficazes ou complementares na evolução do seu raciocínio. Para este efeito, todos os problemas envolveram a construção de um gráfico e a sua interpretação, em que este era pedido antes ou depois da definição da(s) função(ões) que emergia(m) dos problemas e que servia de base para a resposta das restantes alíneas. Contudo, os alunos não apresentaram qualquer discussão acerca dos dois métodos de resolução a que procediam, servindo a calculadora como método de verificação e não de reflexão acerca do que foi feito, facto este importante para o caso da janela de visualização da calculadora gráfica se encontrar desajustada e não refletir qualquer solução no contexto do problema. No caso da resolução com 'papel e lápis', não procediam à verificação da equação que resolviam.

Na resolução de problemas sobre tópicos de funções, Sfard (1991) considera que a passagem da forma estrutural (como um objeto) para a operacional (como um processo) da noção de função, envolve, como já foi referido, três fases de evolução: (1) Interiorização (capacidade de realizar processos matemáticos como a manipulação de expressões algébricas); (2) Condensação (capacidade de pensar nos processos como um todo, trabalhando com correspondências sem considerar valores específicos); e (3) Reificação (capacidade para identificar novas identidades, independentes de outras, compreendendo e alternando entre as múltiplas representações das funções).

A manipulação de expressões algébricas, que conduzem à compreensão da noção de variável e capacidade de usar uma fórmula para determinar valores da variável dependente, está presente na fase da interiorização, a qual esteve presente na resolução dos problemas propostos. A construção de gráficos está presente na segunda fase, a da condensação, que uma parte significativa dos alunos alcançou com sucesso. Os alunos mostraram-se cada vez mais capazes de pensar sobre o processo como um todo: "É nesta fase que podemos considerar que nascem os novos conceitos. Graças à condensação podemos considerar que a combinação entre vários processos, a realização de comparações e a generalização se tornam muito mais fáceis" (Domingos, 2003, p. 43). Os alunos, conforme foi estudado nos problemas propostos, revelaram capacidade em alternar entre as diferentes representações do conceito de função, o que fez com que o conceito de função tivesse sido reificado. Nesta fase, os alunos ocorreram à criação de novos conceitos, apesar das dificuldades expressas por alguns alunos. Por exemplo, o facto de os alunos terem a capacidade de associar a noção de 'parábola' e 'vértice' à função quadrática, e entender que se estava a tratar de funções módulo a partir de funções definidas por ramos e pela simetria existente no gráfico da função, através do descrito no enunciado de um problema, sendo funções nunca antes trabalhadas.

A tecnologia apresenta um papel importante na evolução da compreensão dos conceitos, porém deve funcionar como um complemento, não como uma substituição (NCTM, 2007). Todos os problemas tinham pelo menos uma alínea que envolvia a utilização da calculadora gráfica, para exploração ou verificação. Os alunos procederam à sua utilização para construção de gráficos e para verificar o procedimento analítico. Na maioria das alíneas, tinham de proceder à resposta através de métodos analíticos, ou seja, com 'papel e lápis', e de métodos gráficos, ou seja, com a calculadora gráfica, sendo a ordem opcional. Neste caso, faziam apenas os cálculos analíticos e não apenas a representação e interpretação gráfica. No geral, poucos alunos procederam a ambos os métodos, onde preferiram resolver primeiramente analiticamente e, após isso, graficamente, onde confirmavam a sua resposta. Em casos de não se encontrar explícito o método a seguir, os alunos optavam pelo método analítico. Waits e Demana (1998) consideram que, quanto à utilização deste instrumento, os alunos têm três opções: recorrer à calculadora para verificar os resultados obtidos analiticamente; resolver primeiro com a calculadora e posteriormente verificar analiticamente; resolver com a calculadora quando não é possível fazê-lo analiticamente. Com base neste estudo, os alunos seguiram a primeira opção. Isto vai ao encontro do que defende Mesa (2008), apesar de os alunos poderem usar a calculadora para a exploração gráfica de uma tarefa, eles não a usam para esse efeito, preferindo resolver a tarefa analiticamente.

Quando era pedido o esboço gráfico, os alunos recorriam à calculadora gráfica para ilustrar o gráfico, como também é referido por Consciência (2013). Esta autora também refere que, quando é dada a expressão analítica da função, os alunos também recorrem à calculadora. Porém, na maioria dos problemas propostos, os alunos não tinham ao seu dispor a função para editar na calculadora, tendo previamente que a definir e depois esboçar o seu gráfico, ou vice-versa. Isto aconteceu, pois foi privilegiada a interpretação da linguagem natural de cada problema e a estratégia que iriam seguir. Além disto, mesmo depois de definirem a função que traduzia os problemas, para elaborarem o esboço gráfico, tentavam recorrer a este instrumento, porém inicialmente sem sucesso devido a não terem aprendido os casos particulares da introdução na calculadora os tipos de função lecionados.

Denota-se que a função definida por ramos e a função módulo são funções que anteriormente os alunos nunca tinham estudado, além que a sua introdução na calculadora gráfica incide sobre vários aspetos que os alunos têm de tomar atenção. A função quadrática já era do conhecimento dos alunos, pois estudaram-na no ano anterior, porém neste ano estudaram outros aspetos do seu comportamento. Nas primeiras aulas lecionadas no âmbito do projeto, foi dado destaque à função quadrática e à sua introdução na calculadora gráfica, com a explicação de procedimentos como a determinação do mínimo ou máximo do seu gráfico, dos zeros e da interseção com outro gráfico de uma nova função. Com isto, na aula em que foram resolvidos apenas problemas sobre os variados tipos de funções que aprenderam, no problema que envolveu a função quadrática, os alunos já se apropriaram de uma melhor forma da calculadora. Nos restantes problemas, também se pode aferir uma evolução neste aspeto, porém os alunos mostram alguma resistência a este instrumento, por este ser o primeiro ano que têm esta experiência. Em problemas de 'resposta aberta' (os da função módulo), este facto era mais realçado. Ao longo das aulas, foram sendo explicados todos os procedimentos possíveis com a calculadora gráfica, onde os alunos tinham oportunidade para esclarecer as suas dúvidas, denotando-se que as suas dificuldades iam diminuindo. Porém, na análise posterior dos problemas realizados, como tinham ao seu dispor os dois métodos de resolução, iniciavam a resolução através de métodos analíticos, onde o mesmo número de respostas não recaía sobre os métodos gráficos, por esquecimento ou por dificuldade em explorar a calculadora gráfica. Contudo, como defende o NCTM (2015), a tecnologia deve ser usada para a aprendizagem de procedimentos matemáticos, mesmo que as tarefas possam ser resolvidas sem ela, conforme se estudou.

De uma maneira geral, os alunos apropriaram-se dos seguintes esquemas de uso, ou seja, os procedimentos realizados ao clicar nas teclas da calculadora gráfica: Editar as funções; Introduzir os intervalos definidos para cada expressão; Recorrer ao catálogo da calculadora para introduzir o símbolo do módulo, valores mínimos e máximos; Ajustar os valores da janela de visualização; Determinar os zeros; Determinar os extremos absolutos; Determinar a variável dependente e independente de uma função, tendo o valor de uma das variáveis; Determinar os valores de x para interseção de dois ou mais gráficos de funções. Estes esquemas estão dependentes dos esquemas de ação instrumentada, os quais dão significado à informação retirada na calculadora gráfica, como explorar o significado da interseção dos gráficos ou ajustar a janela de visualização. Como referido, nas aulas mencionadas, foi especificamente referida a forma como se introduzia os domínios restritos para as funções definidas por ramos, e como se recorria ao catálogo para este tipo de funções e para a função módulo, pois os alunos não tinham conhecimento destas possibilidades. Os restantes esquemas, assim como o recurso à representação numérica na tabela, foram sendo referidos ao longo das restantes aulas, conforme o problema que os alunos se deparavam. Contudo, como Consciência (2013) refere, os alunos articulam diferentes menus na sua resolução dos problemas, sendo o recurso ao editor de funções preferível à representação numérica na tabela, o qual ocorre para analisar simultaneamente valores de duas ou mais funções.

Conclui-se que os alunos preferem certas representações e funcionalidades da calculadora, como recorrer ao editor de funções, ajustar a janela de visualização, determinar a interseção de gráficos de funções e explorar a determinação de valores da variável independente através de $x - calc$. A utilização da calculadora gráfica, assim como a resolução de problemas, potencia a aprendizagem dos alunos, sendo áreas transversais segundo o programa em vigor.

4.1.2. Que dificuldades manifestam os alunos do 10º ano na aprendizagem de funções? E na resolução de problemas?

No tópico de Funções, os alunos apresentam algumas dificuldades, embora seja um tópico que já advém do ensino básico, nomeadamente do 7.º ano de escolaridade, o que pode ter acarretado inseguranças e dificuldades já desde essa altura. A linguagem específica e as diversas representações de uma função traduzem um certo estigma por parte dos alunos, como se sentiu desde o início da lecionação deste tema. Tais dificuldades traduzem as apresentadas por Ponte, Branco e Matos (2009), que consideram que se devem na transição de pensamento aritmético para o pensamento algébrico, tais como: ver a letra como representando um número ou um conjunto de números; atribuir significado às letras existentes numa expressão; dar sentido a uma expressão algébrica; e traduzir a informação da linguagem natural para a algébrica. Os alunos costumam mostrar dificuldade em lidar eficazmente com a simbologia $x, y, f(x)$, como interpretar $f(5) = 3$. Segundo estes autores, os alunos "compreendem perfeitamente do que se está a falar quando se diz que "a imagem de 5 é 3" mas não conseguem entender a expressão $f(5) = 3$" (p. 122). Deste modo, como esta é uma simbologia largamente usada no estudo das funções, desde o 3.º ciclo do ensino básico até ao ensino secundário, torna-se importante utilizá-la na sala de aula, levando os alunos a fazer uma apropriação progressiva, para que venham a usá-la adequadamente. Logo, os problemas apresentam um papel importante neste processo, pois esta linguagem adquire um significado mais percetível em situações contextualizadas. Os alunos nos problemas das aulas tinham de determinar imagens correspondentes a determinados objetos, assim como, o caso contrário, onde se pôde ver que não apresentaram grandes dificuldades. A compreensão do que é pedido torna-se mais fácil pois está integrado num problema, com a descrição de 'objeto' e 'imagem' correspondente. Isto vai ao encontro do que defendem Ponte, Branco e Matos (2009): "os alunos devem ser capazes de (...) passar a informação de uma representação para outra e, ainda, de usar a informação dada para a resolução de problemas" (p. 123).

Os alunos não tiveram dificuldade em transpor a linguagem natural de um problema para a sua representação gráfica. A dificuldade sentida foi em transpor a informação que era representada no gráfico, ou diretamente da linguagem natural, para definir expressões algébricas. Lopes (2003) refere esta dificuldade, considerando que os alunos apresentam dificuldades na interpretação da representação gráfica e na conversão desta para a linguagem algébrica.

As diferentes representações assumem uma grande importância na compreensão do conceito de função, como defende Duval (2006). Quanto à representação gráfica, o descuido nos esboços com 'papel e lápis' levou a incorreções nos esboços gráficos apresentados pelos alunos. A escolha incorreta dos parâmetros na janela de visualização da calculadora gráfica levou a uma representação incorreta do gráfico do problema. O último caso foi observado na medida em que os alunos procederam, por vezes, à apresentação de uma janela de visualização com valores demasiado elevados para o que era necessário, apesar de este facto não ter comprometido a resposta correta ao problema. Mitchelmore e Cavanagh (2000) apontam para dificuldades na escala usada e para a sua interpretação quando fazem 'zoom' do gráfico ou parte dele. Porém, não se conseguiu averiguar se a transcrição do gráfico para o caderno se iria encontrar incorreta, pois quando os alunos recorriam à calculadora gráfica apenas efetuaram um 'print' do que a mesma apresentava, assim como de todo o procedimento. A maioria dos casos apenas se encontrava com 'papel e lápis', onde se pode constatar que os alunos recorreram à calculadora gráfica apesar de não se encontrarem apresentados os passos seguidos, como no caso da apresentação do gráfico da função definida por ramos. Neste caso, a janela deveria ter que apresentar valores mais elevados, em vez da janela 'standard' a que os alunos recorreram, o que levou à não observação do esboço gráfico de um dos ramos da função. Além deste facto, era imprescindível a apresentação dos intervalos para cada ramo, o que nem sempre foi concretizado. Neste tipo de função, os alunos mostraram dificuldade em entender de que tipo de função se tratava e em efetuar o esboço gráfico. Como a introdução dos tipos de funções foi através de problemas, os alunos foram confrontados com vários aspetos a serem trabalhados em todos os casos e em que contexto cada função aparece. Já com a função definida por ramos aprendida, os alunos tiveram dificuldade em representar a função módulo por ramos devido à não compreensão do conceito de módulo de uma expressão algébrica.

Ao longo das aulas, denotou que os problemas de maior dificuldade para os alunos foram os que apresentavam um desafio mais elevado, onde havia menos quantidade de informação do que os restantes e mais de uma resposta possível: os problemas da função módulo quanto à localização dos gansos e da área de um losango. Apesar da dificuldade que os alunos tiveram para iniciar estes problemas e do número elevado de não respostas, foram apresentadas respostas distintas com a explicação coerente do raciocínio.

As dificuldades da interpretação da linguagem natural foram sentidas nestes problemas, dado que foi uma competência requerida em todos os problemas propostos aos alunos. De acordo com Costa e Fonseca (2009), o desempenho dos alunos na resolução de problemas não depende apenas das competências a nível matemático, mas "essencialmente das competências manifestadas na Língua Portuguesa" (p. 7). Neste sentido, as dificuldades ao nível do Português repercutem-se na resolução de problemas, principalmente ao nível da compreensão e interpretação de enunciados, assim como na justificação e explicação dos raciocínios efetuados, como se viu nas alíneas que tinham de discutir e justificar a opção tomada. Logo, estes autores assumem a ligação do Português à Matemática, pois as dificuldades de leitura e compreensão do texto e do desconhecimento de algumas expressões estão relacionadas com as dificuldades na compreensão e interpretação do enunciado. Além deste fator, os alunos têm de apresentar motivação para resolver o problema, pois como defende Pólya (1995), não basta ao aluno compreender o problema, mas também deve desejar resolvê-lo.

Ao nível da justificação do raciocínio usando a expressão oral e escrita, salienta-se que "se comunicar oralmente o nosso pensamento a terceiros exige um esforço de organização de ideias, passá-lo ao formato escrito é ainda mais exigente" (Boavida et al., 2008, p. 68). Contudo, os registos escritos acrescentam uma maior profundidade à reflexão, pois o ato de escrever obriga a refletir sobre o próprio trabalho e a clarificar pensamentos sobre as ideias desenvolvidas, conforme defendem estes autores. Isto vai ao encontro da última fase da resolução de problemas de Pólya, uma vez que o aluno precisa de refletir sobre o que fez e sobre o resultado obtido. Vale e Pimentel (2004) referem que a segunda fase, estabelecer um plano, é a fase com maior dificuldade, pois os alunos têm de delinear uma estratégia, contudo após a análise dos dados e tendo em conta a abordagem nas aulas, denota-se que foi a última fase, a reflexão. Os alunos não se questionam sobre a solução obtida, pensando que o primeiro resultado é a resposta correta e registam-no sem o verificarem. Isto pode estar associado ao vocabulário, mas também com a exigência do ato de refletir sobre a resposta. Conforme defende Pólya (1995), "ao olhar para trás para a solução concluída, ao reconsiderar e reexaminar o resultado e o caminho que levou a ele, eles poderiam consolidar os seus conhecimentos e desenvolver a sua capacidade de resolver problemas" (p. 27).

Apesar das dificuldades sentidas, os alunos contruíram o conceito das funções lecionadas, mediante o confronto entre a representação gráfica, verbal e algébrica. Partindo do que os alunos já conhecem, foi possível a construção do conceito de uma função diferente das conhecidas anteriormente, como a função definida por ramos, a função módulo e a nova representação da função quadrática.

4.1.3. Que perceções têm os alunos sobre a resolução de problemas na aprendizagem de funções do 10º ano com recurso à calculadora gráfica?

Durante a minha intervenção pedagógica foram lecionados diversos conceitos, referentes a alguns tipos de funções existentes, como também intervalos de monotonia, extremos, equações e inequações com módulos e expressões quadráticas, operações com funções, e vários aspetos que envolviam cada tópico tratado. Para este estudo, foram propostos problemas aos alunos, tanto para a introdução como para a consolidação da aprendizagem. Esta abordagem pretendia perceber qual o contributo da resolução de problemas na aprendizagem de funções com recurso à calculadora gráfica. Deste modo, torna-se importante perceber quais as perceções dos alunos sobre a resolução de problemas associada à tecnologia.

Antes da minha intervenção pedagógica, foi proposto um questionário inicial, onde se denotou que os alunos reconhecem a importância de estudarem Funções, apesar do gosto por este tema não ser unânime, e de referirem as dificuldades que sempre tiveram. Também é de referir que todos os alunos reconhecem o facto de a calculadora gráfica e a resolução de problemas contribuir para esta aprendizagem.

Após a minha intervenção pedagógica, foi proposto um questionário final, onde se compara algumas opiniões manifestadas pelos alunos inicialmente, assim como se averigua a sua opinião sobre as práticas adotadas. Desta análise, evidencia-se que a maioria dos alunos gostou de aprender tópicos de funções, assumindo que tiveram mais dificuldade no estudo deste tópico do que noutros, porém contrariamente ao referido anteriormente, assumiram que este estudo não é importante para a sua formação.

No que concerne à resolução de problemas, neste caso, ninguém discordou que a mesma os ajudou a compreender os tópicos de Funções. Assumiram que os desafiou a pensar e que para isto procuraram ler várias vezes o enunciado até perceber o que era pedido. Com base nisto, revelaram a sua dificuldade na interpretação do enunciado, sendo que uma ligeira minoria discordou desta afirmação. Neste seguimento, de forma repartida, revelaram sentir vontade de desistir quando os problemas são complexos.

Do ponto de vista dos alunos, a resolução de problemas desenvolveu a sua capacidade de argumentar estratégias e resultados e de discutir ideias (NCTM, 2007). Estratégias como a tentativa e erro, foi dito, por uma ligeira maioria, que não recorreram a esta estratégia, assim como ao recurso a esquemas/tabelas.

Quanto à importância do uso da calculadora gráfica, é destacado que nenhum aluno discordou deste facto, sendo apresentadas com grande peso respostas de concordância e com menor peso de indiferença. A interpretação da informação gerada tornou-se essencial nesta aprendizagem, da mesma forma que os ajudou a estabelecer conexões entre este tipo de resolução e a resolução analítica (Consciência, 2013). A utilização da calculadora gráfica desafiou-os a pensar sobre as atividades realizadas e a repensar sobre estratégias de resolução de problemas utilizadas.

Quase a totalidade dos alunos revelou que recorreu à calculadora gráfica para validar os resultados obtidos analiticamente na resolução de problemas. O caso contrário apresentou uma menor percentagem de concordância, e um número mais elevado de discordância e indiferença relativamente ao anterior. Quanto ao melhor método de aprendizagem, o destaque recaiu sobre a utilização simultânea da calculadora gráfica e dos processos analíticos. Entre os dois casos, os alunos afirmaram que aprendem melhor quando utilizam processos analíticos, em vez de através da calculadora gráfica.

Os alunos não consideraram que a calculadora tenha dificultado a aprendizagem de tópicos de funções, porém as respostas quanto à dificuldade sentida em transcrever para o caderno a informação obtida pela calculadora ou vice-versa, levou a resultados repartidos, mas semelhantes entre si. Por uma ligeira diferença, os alunos sentiram mais facilidade em comprovar na calculadora as resoluções efetuadas analiticamente. Desta forma, constataram que explicação do raciocínio aliada à representação na calculadora gráfica desenvolveu a sua capacidade de comunicação na resolução de problemas, onde a mesma foi favorável pois tornou as aulas mais dinâmicas. A maioria afirmou que necessitou de utilizar a calculadora gráfica na resolução de problemas (Waits & Demana, 2001).

Os alunos manifestaram interesse em aprender outros tópicos matemáticos com recurso à calculadora gráfica, assim como com recurso à resolução de problemas. Quanto à metodologia de ensino preferível, os alunos, onde apenas um discordou, revelou que aprende mais quando o professor expõe a matéria e resolve os problemas na aula. Nas restantes afirmações, o peso nas respostas foi semelhante entre elas, sendo mais de metade a afirmar preferir que o professor promova a discussão das resoluções dos problemas, e também a preferir que os incentive a explicar o que fizeram e a trocar ideias com os colegas.

A resolução de problemas na aprendizagem dos alunos conduziu a diversas vantagens, como o desenvolvimento do raciocínio e um melhor entendimento da matéria, segundo os alunos. Também referiram que aprendem diferentes métodos de resolução para o mesmo problema e melhoram a capacidade de discussão de ideias. Por outro lado, foram apontadas algumas desvantagens da resolução de problemas, sendo que a maior parte das respostas revela não existir qualquer desvantagem na aprendizagem. Contudo, é referida a dificuldade na interpretação do enunciado, e que o tempo investido para chegar à solução pretendida é vasto e pode levar a desmotivação para a sua resolução e para entender o tópico tratado.

A calculadora gráfica também conduziu a várias vantagens, como ajudar na compreensão dos tópicos de Funções e comprovar resultados obtidos analiticamente. De acordo com os alunos, os gráficos apresentados na calculadora gráfica estabelecem uma conexão entre a resolução analítica e gráfica, ajudou-os na resolução de problemas, diminuindo o tempo para os resolver, pois é um meio eficaz para cálculos como os extremos do gráfico de uma função. Contrariamente ao referido na resolução de problemas, os alunos referem que se sentem mais motivados na aprendizagem através da calculadora gráfica. São apontadas poucas desvantagens, onde a maioria diz apenas haver vantagens. Como os alunos nunca tinham tido contacto com as potencialidades da calculadora gráfica, mencionaram dificuldades no seu uso. Além disso, como entendem que devem praticar e saber como proceder sem a calculadora gráfica, assumem que a mesma pode levar a uma certa dependência, na medida em que podem recorrer sempre a este instrumento para determinar as respostas aos problemas. A interpretação do gráfico apresentado no contexto do problema também levantou dificuldades.

Como a aprendizagem dos conteúdos pode ter sido afetada pelo contexto virtual que sucedeu, os alunos também foram indagados pelas vantagens e desvantagens deste método de ensino. Mencionaram que isto gerou um aumento da sua autonomia e uma maior capacidade de gestão de tempo e menor cansaço, devida à redução da carga horária para cada disciplina. Deste modo, assumiram que a sua responsabilidade na entrega da resolução das tarefas aumentou, assim como foi um melhor meio para explorarem a calculadora gráfica. Quanto às desvantagens do ensino a distância, apesar dos fatores mencionados, revelaram uma menor aprendizagem dos conteúdos e mencionaram a menor interação professor-aluno, que reduziu a ajuda que poderiam precisar, assim como a partilha de ideias com os colegas. As falhas na tecnologia prejudicaram a compreensão do que foi tratado nas aulas. Houve alunos que referiram que este método levou a uma maior desconcentração e desmotivação. Há alunos que apontaram como desvantagem a curta duração das aulas de Matemática. Quanto às tarefas, referiram que, por este método, houve uma maior carga de tarefas propostas. Assim, nas dificuldades quanto aos tópicos de funções, referiram o ensino a distância, as tarefas, assim como a falta de bases referentes às Funções.

4.2. Recomendações para futuras investigações

Neste estudo foi solicitado aos alunos a resolução de problemas com e sem calculadora gráfica sobre tópicos de Funções que integram o programa de Matemática do 10.º ano de escolaridade. Assim, puderam confrontar as suas dificuldades e aprendizagens por ambos os métodos. Contudo, o uso da calculadora gráfica não apresentou resultados tão favoráveis como os analíticos, o que faz com que seja necessário aprofundar esta utilização, como, por exemplo, na resolução de problemas que não sejam possíveis resolver analiticamente, sendo o uso da calculadora gráfica imprescindível.

Estudar o contributo de outro tipo de tarefas, como as tarefas de exploração e de investigação na aprendizagem de Funções, pois as tarefas de estrutura aberta tornam o estudo de tópicos deste tema mais abrangente, podendo-se comparar as dificuldades e as preferências dos alunos pelos diferentes tipos de tarefas.

O confronto entre os erros dos alunos na aprendizagem de tópicos de Funções, torna-se importante na medida em que gera discussão de ideias se for realizado no grupo turma. Neste caso, seria interessante que as tarefas propostas fossem realizadas em pequenos grupos, e não individualmente, como era previsto para este projeto. Isto gera uma maior entreajuda entre os alunos e leva a uma maior diversidade de estratégias utilizadas. No fim do desenvolvimento das tarefas propostas, também pode ser pedido aos alunos que reflitam sobre as suas resoluções e se essas geram efetivamente a resposta correta, como também se há outras estratégias alternativas.

O uso de outro tipo de tecnologia, como o 'GeoGebra', no ensino e na aprendizagem de tópicos de funções permitem ao professor mostrar ao aluno de uma forma dinâmica a conexão entre a componente algébrica e a gráfica.

Para finalizar, a exploração dos diferentes menus da calculadora gráfica, assim como as limitações deste instrumento para a aprendizagem é um estudo que potencia o significado que os alunos dão ao que aprendem.

4.3. Limitações do estudo

Tendo em conta o objetivo, a pertinência deste estudo e as conclusões obtidas, torna-se pertinente esclarecer algumas limitações à sua execução. A principal limitação foi o ensino a distância, que fez com que tivesse de alterar alguns aspetos planeados inicialmente. Como o tempo das aulas foi reduzido para metade, sendo divididas em aula síncronas e assíncronas, o que fazia com que se tivesse que ter uma boa capacidade de gestão de tempo. Isto também fez com que as aulas se focassem na resolução das tarefas pelos alunos e a sua discussão, e após isso a explicação do tópico dessa aula, o que levou a ter menos tempo para a realização da prática, que recaía essencialmente em exercícios, de forma que os alunos aplicassem o que aprenderam.

Devido às aulas não se terem realizado em sala de aula e como os problemas tinham como finalidade introduzir, sistematizar e avaliar as aprendizagens dos alunos, a maioria dos problemas foi resolvida antes da aula. Quanto tentei que os alunos fizessem e entregassem em momento de aula o que realizavam, isto levava a um atraso na aula e a respostas muito semelhantes. Com a redução do tempo de aula e a metodologia seguida, era importante que o Programa fosse cumprido, dada a extensão do capítulo das Funções e o atraso que os alunos já tinham no seu calendário escolar. Desta forma, foram abordados problemas com o uso de ambos os métodos, analíticos e gráficos, sendo que poderiam ter sido explorados mais frequentemente os diversos menus da calculadora gráfica.

A preparação prévia das aulas foi mais exaustiva, pois tive de preparar PowerPoints para todos os conteúdos lecionados, assim como a resolução dos trabalhos de casa, para esclarecimento das dúvidas nas aulas assíncronas. Os métodos de recolha de dados também foram uma limitação. Os alunos podiam procurar ajuda de um colega ou obter informações do manual. Isto levou a obter respostas iguais, como também alguns alunos não responderam a qualquer tarefa. A fotografia das suas resoluções muitas vezes era de baixa qualidade, o que afetava a sua análise. A participação dos alunos costumava ser em torno dos mesmos alunos, apesar de tentar chamar outros alunos para responder, de modo a diversificar a participação. Contudo, as falhas na internet, como o ruído de fundo ou a videochamada deixar de funcionar, assim como não terem microfone, impossibilitaram esta tentativa.

De forma a envolver mais os alunos na participação e com o intuito de explorar a comunicação matemática e as estratégias seguidas, a exploração dos problemas seria a pares ou em pequenos grupos, o que acabou por não ser possível. Além disto, a projeção da calculadora gráfica na aula foi imprescindível para os alunos entenderem como se procedia, porém isto levava a um maior tempo para cada problema. No primeiro contacto dos alunos com alguma funcionalidade nova denotava-se que o tempo gasto era maior. Neste caso, os alunos tinham mais dúvidas e questionavam o caso de a calculadora deles, por algum motivo, não dar o mesmo resultado, o que fez com que tivesse de explicar todos os passos a ser seguidos e tentar à distância entender qual o erro a que tinham procedido. Também tinha de parar a projeção do PowerPoint e projetar o emulador da calculadora gráfica, sendo que em casos de testar diferentes respostas este meio tornava-se mais demorado, porém mais interessante.

4.4. Reflexão

Após a concretização deste estudo, realizando uma reflexão final, considero que esta experiência enriqueceu a minha formação. Todas as vivências foram benéficas para o meu crescimento pessoal e profissional, desde as observações de aulas até à lecionação e tudo o que aprendi e fiz no âmbito do Estágio. Os pontos críticos das aulas que lecionei, tanto positivos como negativos, ajudaram na minha evolução.

A minha principal atenção foi a aprendizagem dos alunos, na medida em que a implementação das minhas estratégias de ensino não prejudicasse a sua aprendizagem. Foi denotado que os alunos reconheceram a importância da implementação das estratégias de ensino, pois não costumavam lidar com a resolução de problemas, muito menos com a utilização da calculadora gráfica. Ao longo das aulas, fui tentando que os alunos se apropriassem da calculadora gráfica, passando de um artefacto para um instrumento. Quanto à resolução de problemas, foi pedido que os alunos explicitassem todo o seu raciocínio, o que foi sendo revelado. Sendo assim, tive que desempenhar além do papel de professora, o papel de investigadora, analisando todo o pensamento que os alunos tiveram que desenvolver para cada problema proposto.

Não esperava que o meu Projeto de Intervenção fosse implementado a distância, contudo foi mais um grande desafio. Foi um desafio que trouxe algumas dificuldades para todos os envolventes. Lecionar as aulas para uma câmara e sem conseguir ver todos os alunos prende-se a algo fora do normal. Como também não tinha um quadro, tive que elaborar PowerPoints para explicar a matéria aos alunos e corrigir todas as tarefas da aula, assim como todos os trabalhos de casa. Estar disponível 24 horas para tirar dúvidas aos alunos, por email ou pelo Classroom, também foi desafiante, pois tinha que ter a capacidade de responder a qualquer dúvida a qualquer momento. Contudo, isto promoveu o meu desenvolvimento pessoal e a ter contacto com uma diversidade de recursos didáticos.

Os objetivos que pretendia alcançar com a minha Intervenção foram atingidos, com a colaboração de todos os alunos da turma, apesar de um período atípico, com fatores que exigiam ainda mais empenho e atenção por parte deles. A resolução de problemas e a calculadora gráfica não eram algo que os alunos se sentissem à vontade. Deste modo, um dos meus objetivos era que se envolvessem afincadamente na resolução dos problemas e fossem persistentes, mesmo que não estivessem a visualizar a estratégia de resolução, ou se o método por eles utilizado não estivesse a resultar. Com base nisto, a discussão do que foi sendo feito foi importante, mesmo para os restantes colegas refletirem se fizeram através da mesma estratégia ou de outra, e se a deles também estaria correta ou não. Não foi possível dividir os alunos em grupos, o que aconteceria se as aulas fossem presenciais, contudo, houve partilha de ideias dentro do possível. Quanto à calculadora gráfica, esta nunca tinha sido trabalhada com estes alunos, o que fez com que eu sentisse que contribuí, de alguma maneira, para o crescimento deles e para o desenvolvimento das suas capacidades.

A Matemática é uma disciplina com uma 'fama ingrata', por isso sentir que começaram a sentir mais interesse ou a gostar de algum conteúdo já foi muito gratificante. Fora das aulas, também fui auxiliando os alunos quando eles precisavam, o que fez com que criasse uma boa relação com todos eles.

Apesar das dúvidas em percorrer este caminho profissional, depois de estar efetivamente no contexto real, vejo que é o caminho que quero percorrer no meu futuro, apesar de todas as adversidades que possam surgir. A entreajuda e orientação sentida em todo o processo, levou a colmatar todo o receio ou insegurança que pude sentir, passando a ser capaz de responder a qualquer adversidade da melhor forma possível. O tema do meu Projeto, o contexto na escola e a distância, a imprevisibilidade do que acontece em sala de aula, foram desafios que enriqueceram a minha formação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só). *Educação e Matemática, 8,* 7-10.

Allison, J. A. (2000). *High school students' problem solving with a graphing calculator*. University of Georgia, Ann Arbor. ProQuest Dissertations & Theses Global database.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico.* ME-DGIDC.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.

Canavarro, A., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Prática de ensino exploratório da matemática: O caso de Célia. In *Investigação em Educação Matemática: Prática de ensino da Matemática* (pp. 255-266). SPIEM.

Consciência, M. (2013). *A calculadora gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Costa, A. M., & Fonseca, L. (2009). Os números na interface da Língua Portuguesa e da Matemática. In *SPIEM: Atas do XIXEIEM*. Vila Real: 2009, 1-11.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados: A Matemática no início do superior.* Tese de Doutoramento, Universidade Nova de Lisboa.

Duarte, J. (2000). A resolução de problemas no ensino da Matemática. *Educação & Comunicação, 4*, 97-100.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103–13.

Freire, S., Cabral, C., & Filho, C. (2004). Estratégias e erros utilizados na resolução de problemas algébricos. In *Anais do VIII ENEM-Comunicação Científica GT 2- Educação Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental.*

Garofalo, J., & Lester, F. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (3), 163–176.

Graça, M. (2003). Avaliação da resolução de problemas: Que relação entre as concepções e as práticas lectivas dos professores? *Quadrante, 12* (1), 53-73.

Hennessy, S., Fung, P., & Scanlon, E. (2001). The role of the graphic calculator in mediating graphing activity. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, *32(2)*, 267-290.

Kandemir, M. A., & Demirbag-Keskin, P. (2019). Effect of graphing calculator program supported problem solving instruction on mathematical achievement and attitude. *International Journal of Research in Education and Science, 5* (1), 203-223.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Erlbaum.

Lopes, W. S. (2003). *A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função: uma proposta de ensino*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Católica de São Paulo.

ME (2001). *Programa de Matemática A – 10.º ano*. Ministério da Educação.

MEC (2013). *Programa de Matemática A*. Ministério de Educação e Ciência.

MEC (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória.* MEC.

MEC (2018). *Aprendizagens Essenciais de Matemática A: Articulação com o perfil dos alunos*. Ministério de Educação e Ciência.

Mesa, V. (2008). Solving problems on functions: role of the graphing calculator. *PNA*, *2* (3), 109-135.

Mitchelmore, M., & Cavanagh, M. (2000). Students' difficulties in operating a graphics calculator. *Mathematics Education Research Journal, 12*, 254-268.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Associação de Professores de Matemática.

NCTM (2015). *Strategic use of technology in teaching and learning mathematics: A position of the National Council of Teachers of Mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2017). *Princípios para a ação – Assegurar a todos o sucesso em Matemática.* Associação de Professores de Matemática.

Oliveira, J. C. P., Oliveira, A. L., Morais, F. A. M., Silva, G. M., & Silva, C. N. M. (2016). O questionário, o formulário e a entrevista como instrumentos de coleta de dados: vantagens e desvantagens do seu uso na pesquisa de campo em ciências humanas. In *Anais III CONEDU – Congresso Nacional de Educação.* Realize Editora.

Parrot, M. A. S., & Leong, K. E. (2018). Impact of using graphing calculator in problem solving. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 13* (3), 139-148.

Pierce, R., Stacey, K., Wander, R., & Ball, L. (2011). The design of lessons using mathematics analysis software to support multiple representations in secondary school mathematics. *Technology, Pedagogy and Education, 20* (1), 95–112.

Pilipczuk, C. H. (2006). *The effect of graphing technology on students' understanding of functions in a precalculus course.* Master's Thesis of Education, Faculty of the University of Delaware.

Pólya, G. (1995). *A arte de resolver problemas: Um novo aspeto do método matemático.* Interciência.

Ponte, J. P. (1990). O conceito de função no currículo de matemática. *Educação e Matemática*, 15, 3-9.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). As práticas dos professores de Matemática em Portugal. *Educação e Matemática*, *80*, 8-12.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Ministério da Educação, DGIDC.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2015). Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula*. Quadrante*, Vol. XXIV, Nº 2, 111-116.

Posamentier, A. S., & Krulik, S. (1998). *Problem solving in mathematics, Grades 3-6: Powerful strategies to deepen understanding.* Corwin.

Projeto Educativo (2019-2022). *Percursos com futuro.* Agrupamento de escolas (pp. 1-19).

Retnawati, H., Wijava, A., Yunianto, W., Laksmiwati, P. A., Meilina, M., Amanti, P. G., & Irawan, R. (2020). Mapping of mathematics topics that can be integrated their learning utilizing calculator*. Journal of Physics: Conference Series*, 1-9.

Rocha, H. (2002). A utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica nas aulas de Matemática. *Quadrant*e, XI (2), 3-28.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function – A case study. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 229–254.

Schoenfeld, A. H. (1996). In fostering communities of inquiry, must it matter that the teacher knows the "answer"? *For the Learning of Mathematics, 16* (3), 11-16.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Silva, C. (2015). *A resolução de problemas da vida real no 1.º ciclo do ensino básico.* Relatório de Estágio, Universidade de Aveiro.

Slavit, D. (1997). An alternative route to the reification of function*. Educational Studies in Mathematics, 33,* 259-281.

Spinato, H. J. (2011). *The effects of graphing calculator use on high-school students' reasoning in integral calculus*. University of New Orleans.

Smith, J. P. (1998). *Graphing calculators in the mathematics classroom. ERIC Digest.*

Sproesser, U., Vogel, M., Dörfler, T., & Eichler A. (2018). *How to deal with learning difficulties related to functions – assessing teachers' knowledge and introducing a coaching*. In Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 2996–3003). DCU Institute of Education and ERME.

Tajudin, N. M., Tarmizi, R. A., Ali, W. Z., & Konting, M. M. (2007). Effects of use of graphic calculators on oerformance in teaching and learning of mathematics. *Educationist*, *1*(1), 1-9.

Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas. In P. Palhares (Ed.), *Elementos da Matemática para Professores do Ensino Básico* (pp. 7-52). Lidel.

Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de matemática: Um desafio para professores e alunos. *Interacções, 20*, 181-207.

Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante, 24* (2), 39-60.

Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artefact: A contribution to the study of tought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology in Education, 9 (3)*, 77-101.

Waits, B. K., & Demana, F. (1998). *The role of graphing calculators in mathematics reform*. ERIC Document Reproductive Service No. ED 458108.

Waits, B. K., & Demana, F. (2001). *Calculators in mathematics teaching and learning: Past, present, and future. Part 2: Technology and the mathematics classroom*. ERIC Document Reproductive Service No. ED 482731.

ANEXOS

Anexo 1 – Pedido de Autorização aos Encarregados de Educação

Exmo(a). Senhor(a). Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade de Minho, enquanto professora estagiária, pretendo desenvolver experiências de ensino que potenciem a aprendizagem dos alunos do tema "A resolução de problemas na aprendizagem de tópicos de funções do 10.º ano com recurso à calculadora gráfica". O desenvolvimento dessas experiências implica a recolha de dados, que serão obtidos através da resolução de tarefas e da observação das aulas. Para uma melhor compreensão das atividades que se desenvolvem na aula de Matemática necessito de proceder à recolha de dados através de gravações (áudio e vídeo). Para esse fim, venho por este meio solicitar a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio e vídeo dos dados necessários à concretização das experiências de ensino e de aprendizagem na sala de aula do seu educando.

Comprometo-me a usar os dados apenas para fins académicos e a não divulgar o nome da escola e dos alunos, nem expor qualquer indicador que envolva o seu educando. Só me interessa a informação que me ajude a melhorar as minhas estratégias de ensino. Os dados das gravações serão apenas usados para efeitos do estudo a realizar e não terão qualquer influência nas classificações dos alunos. Comprometo-me ainda a proceder à destruição de todas as gravações após a realização do estágio.

Agradeço desde já a sua colaboração.

Braga, fevereiro de 2020

A estagiária de Matemática

____

(Eva Daniela Barrocas Nunes)

\- -

Autorização

Eu, ______________________________________, Encarregado de Educação do(a) aluno(a) __________________________________, autorizo que se faça o registo em áudio e vídeo das atividades de ensino e de aprendizagem nas aulas de Matemática que envolvem o meu educando desde que seja salvaguardado o anonimato do seu nome e de qualquer indicador que o indicie.

O Encarregado(a) de Educação,

____

Anexo 2 – Questionário Inicial

Este questionário tem como finalidade recolher informação que me permita conhecer características dos alunos da tua turma relativamente à disciplina de Matemática. As tuas opiniões são importantes para o estudo que estou a realizar relativamente à resolução de problemas na aprendizagem de tópicos de Funções de alunos do 10.º ano com recurso à calculadora gráfica. Para obter resultados válidos, é da maior importância que respondas de forma refletida a todas as questões que te são apresentadas. Comprometo-me a utilizar os dados apenas para efeitos da investigação e de forma anónima.

Dados Gerais

1. Idade: ________

2. Sexo: M ☐ F ☐

3. Dos temas que estudaste na disciplina de Matemática, quais são os que <u>mais</u> aprecias? Porquê?

____

4. E quais são os temas que <u>menos</u> aprecias? Porquê? ______________________________

____

5. Quais são as tuas disciplinas preferidas? Porquê? ______________________________

____

6. Em que disciplinas sentes mais dificuldades? Porquê? ______________________________

____

7. Que classificação obtiveste na disciplina de Matemática no ano anterior? ________________

8. Costumas usar a calculadora quando estudas Matemática? Sim ☐ Não ☐

Se sim, com que finalidade? ____

____

9. Nas aulas de Matemática, em anos anteriores, costumavas trabalhar em grupo?

Sim ☐ Não ☐

Se sim, em que contribuiu o trabalho de grupo para a tua aprendizagem? __________________

____

10. Desde o 7.º ano que estudas Funções. Como caracterizas a tua relação com este tema?

11. Na tua perspetiva, qual é a importância de estudares tópicos de Funções?

12. A calculadora gráfica contribui para a aprendizagem de tópicos de Funções?

Sim ☐ Não ☐ Porquê? ______________________________

13. Nas aulas de Matemática, são usados diferentes tipos de tarefas, tais como exercícios, problemas, tarefas de exploração e de investigação, entre outros. Ao longo do teu percurso escolar, quais destes tipos de tarefas exploraste? Com que finalidade?

14. A resolução de problemas contribui para a aprendizagem de tópicos de Funções?

Sim ☐ Não ☐ Porquê? ______________________________

Obrigada pela tua colaboração!

Anexo 3 – Planos de Aula

Plano de Aula 6

Tópico: Função definida por ramos.

Objetivos: Definir funções por ramos. Representar graficamente funções definidas por ramos. Determinar o domínio e os zeros de funções definidas por ramos.

Formato de ensino: Ensino exploratório.

Atividade Motivacional

1. Uma empresa de telecomunicações anuncia o seguinte plano de preços para as chamadas telefónicas feitas a partir de um telefone registado nessa empresa:

- 12 cêntimos pelo primeiro minuto de conversação;
- 0,1 cêntimos por segundo, a partir do primeiro minuto.

a) Que expressão/expressões dá o preço a pagar, em cêntimos, por uma chamada feita a partir de um telefone registado nessa empresa, em função do tempo t de duração da chamada, medido em segundos?

b) Representa graficamente, com recurso à calculadora gráfica, o preço a pagar por uma chamada em função do tempo nesta empresa de telecomunicações.

c) A Patrícia esteve 2,4 minutos numa chamada telefónica. Determina, analiticamente e recorrendo à calculadora gráfica, quanto gastou a Patrícia.

d) Uma outra empresa de telecomunicações tem um plano de preços de chamadas telefónicas que cobra 0,15 cêntimos por segundo. Que plano de preços escolherias? Justifica a tua resposta com sustentação gráfica.

2. O Tomás efetuou uma caminhada a partir da sua casa. Mantendo uma velocidade constante, percorreu 500 metros em 20 minutos. Neste instante, encontrou um amigo e ficaram a conversar durante 5 minutos. Apercebendo-se que se tinha esquecido do telemóvel, regressou a casa a um ritmo constante tendo demorado 10 minutos.

a) Esboça o gráfico que descreve a caminhada do Tomás, que relaciona a distância, d, em relação à sua casa, em metros, com o tempo, t, em minutos.

b) Define, analiticamente, a função que relaciona a distância, d, do Tomás em relação à sua casa, em metros, com o tempo, t, em minutos, que demorou o seu percurso.

c) Calcula, analiticamente e com recurso à calculadora gráfica, a distância em relação a casa ao fim de 13 minutos. E ao fim de 30 minutos, a que distância se encontra?

Prática

1. Considera a função f definida por:

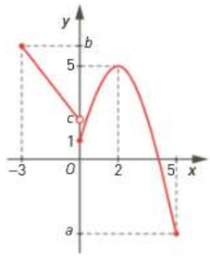
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & se\ x \in [-1, 3] \\ 5, & se\ x \in \,]3, 8] \end{cases}$$

a) Indica o domínio da função f.

b) Faz o esboço da representação gráfica da função f através da calculadora gráfica.

c) Determina, analiticamente e com recurso à calculadora gráfica, o(s) zero(s) da função.

2. Na figura está representada a função f de domínio $[-3, 5]$. O gráfico é constituído por parte de uma parábola e parte de uma reta de equação $y = -\frac{4}{3}x + 2$. Sabe-se que o contradomínio de f é $[a, b]$ e $f(0) = 1$.



a) Define a função f por ramos.

b) Determina os valores de $a, b\ e\ c$.

c) Resolve as equações, por processos analíticos e recorrendo à calculadora:

c1) $f(x) = 4$

c2) $f(x) = \frac{1}{2}$

Comentários

Turma do 10.º ano do curso científico humanístico de Ciências e Tecnologias.

Duração: 45 minutos

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) Introdução da tarefa; (ii) Exploração da tarefa; (iii) Discussão.

Estas duas tarefas têm como intuito a introdução das funções definidas por ramos, em contexto de problemas.

Nesta secção, é pedido que os alunos definem as funções por ramos, representem-nas graficamente, determinem os seus zeros, as suas imagens, identifiquem o domínio e resolvam equações.

3. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x + 1, & se\ x < \dfrac{1}{2} \\ -4x + 1, & se\ x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

a) Determina, caso exista, $x \in \mathbb{R}^-$ tal que $g(x) = 1$.

b) Determina os zeros de g.

c) Verifica se -1 pertence ao contradomínio de g

Desafio

Numa localidade A, o preço a pagar, por mês, pelo consumo de água, é a soma das seguintes parcelas:

- 2,5 € pelo aluguer do contador;
- 1 € por cada metro cúbico de água consumido até de 10 metros cúbicos;
- 2 € por cada metro cúbico de água consumido para além de 10 metros cúbicos.

a) Define, por uma expressão analítica, a função que relaciona o preço, p, a pagar, em euros, com a quantidade de água consumida, a, em metros cúbicos.

b) Representa graficamente a função definida anteriormente. Usa as potencialidades da calculadora gráfica.

c) Numa localidade B, o preçário é o seguinte:

- 3 € pelo aluguer do contador;
- 1,25 € por cada metro cúbico de água consumido.

Em que localidade, a água é mais barata?

d) Na localidade A, um consumidor, após refletir um pouco, decidiu que lhe era vantajoso alugar mais um contador.
Qual é o número mínimo de metros cúbicos, que este consumidor deve gastar, de forma a ser mais vantajosa a existência de dois contadores, admitindo que o consumo de água é distribuído de forma equitativa nos dois contadores?

O desafio trata de um problema que envolve o raciocínio matemático nesta temática. É pedida a definição da função, assim como, a sua representação pela calculadora gráfica. Na 3ª e 4ª alíneas, os alunos terão que realizar inequações para determinar o consumo ótimo.

Tarefa Adicional

1. Na figura está representado o gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, constituído por uma semirreta e parte de uma parábola.

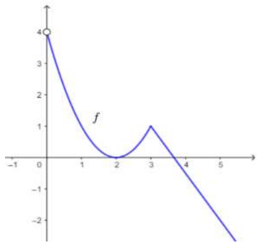
a) Define a função f por ramos (confirma na calculadora gráfica).

b) Determina:

b1) $f(\frac{1}{2})$

b2) $f(3)$

b3) $f(12)$



2. Numa frutaria há uma promoção na venda de laranjas. Nas compras até 5 kg, o preço por quilograma, é de 0,80 € por quilograma. Em compras superiores a 5 kg, o preço do que excede 5 kg, é de 0,50 € por quilograma.

Por cada x, seja $p(x)$ o preço de x quilogramas de laranjas.

a) Define a função p por ramos.

b) Representa g graficamente através da calculadora gráfica.

c) Calcula analiticamente e pela calculadora:

c1) $p(4{,}5)$

c2) $p(8)$

As tarefas adicionais serão para os alunos resolverem em aula, caso haja tempo restante, senão serão para resolverem em casa. Trata da interpretação de um problema e de uma tarefa prática.

Materiais: Calculadora gráfica; PowerPoint; manual do aluno; papel; caneta.

Plano de Aula 7

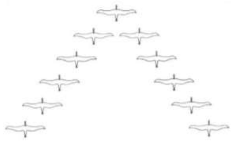
Tópico: Função módulo.

Objetivos: Representar graficamente a função $y = |f(x)|$. Estudar funções definidas por $f(x) = a|x - b| + c$.

Formato de ensino: Ensino exploratório.

Atividade Motivacional: O voo dos gansos

1. Os gansos voam com a forma ilustrada na figura para economizar a energia gasta pelo grupo. Quando uma ave dá um impulso com as asas provoca um fluxo de ar ascendente que é aproveitado pela ave que se segue, reduzindo a energia que esta tem de despender. Deste modo, só a ave que lidera a formação não tem vantagem imediata, pelo menos até ser substituída por uma das outras.



a) Escolhe um referencial adequado para reproduzir a imagem da figura. De seguida, escolhe uma unidade e determina as coordenadas de pontos que traduzam a posição de três ou quatro gansos.

b) Define analiticamente a função que melhor se ajusta à posição dos gansos e representa-a através da calculadora gráfica.

2. Considera a função f definida por $f(x) = |x - 2|$.

a) Define a função f por ramos.

b) Representa graficamente a função f, explicando todos os procedimentos. Após isso, confirma na calculadora gráfica, explicando todos os passos.

3. Considera a função g definida por $g(x) = |x + 4|$.

a) Faz uma representação gráfica da função g e indica uma equação do eixo de simetria.

b) Determina o contradomínio e uma equação do eixo de simetria do gráfico da função h, sabendo que:

b1) $h(x) = -2 + g(x)$

b2) $h(x) = g(x - 2) + 3$

b3) $h(x) = g(x + 1) - \frac{1}{2}$

b4) $h(x) = 2\,g(x) - 1$

b5) $h(x) = \frac{1}{3}\,g(x - 3) + 2$

Representa as funções geradas com a calculadora, descrevendo as transformações associadas a cada gráfico da função h.

Prática

1. Define analiticamente, por ramos, sem usar o símbolo de valor absoluto, as funções representadas a seguir:

a) $f(x) = |x - 2|$

b) $g(x) = |x + 3|$

c) $h(x) = |\frac{1}{2} - 3x|$

2. Considera as funções f, g e h definidas por:

$f(x) = 2|x|$; $g(x) = -2|x|$; $h(x) = \frac{1}{3}|x|$

a) Representa graficamente e analiticamente cada função.

b) Para cada uma das funções, indica: O domínio; O contradomínio; Os zeros; Os intervalos de monotonia.

3. Define por uma expressão da forma $y = a|x - b| + c$, as funções de domínio $\mathbb{R}$ representadas a seguir:

Comentários

Turma do 10.º ano do curso científico humanístico de Ciências e Tecnologias.

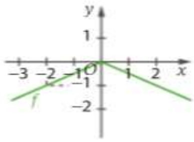
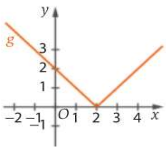
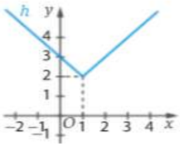
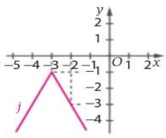
Duração: 45 minutos

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) Introdução da tarefa; (ii) Exploração da tarefa; (iii) Discussão.

O problema refere-se à função módulo, e será para ser feito antes da aula e discutido em momento de aula.

Estas duas tarefas têm como intuito a introdução das funções módulo, com a sua representação por ramos e a sua representação gráfica, assim como, o estudo das funções módulo por meio das transformações.

Nesta secção, é pedido que os alunos definam as funções sem usar o símbolo de valor absoluto, estudem as funções e representem-nas na calculadora. Nas duas últimas tarefas, é pedido que expressem na forma $y = a|x - b| + c$.

4. Considera a função f, domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{2}|x-1| - 3$.

a) Indica as coordenadas do vértice e uma equação do eixo de simetria do gráfico de f.

b) Indica o contradomínio, indica e caracteriza o extremo e apresenta os intervalos de monotonia de f.

c) Calcula os zeros de f, se existirem, e caracteriza o sinal da função.

d) Esboça o gráfico de f, através da calculadora gráfica.

e) Justifica que a função f não é par nem ímpar.

Desafio

Considera a função h definida por:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & se \;\; x < -1 \\ |x+1| - 3, & se \;\; x \geq -1 \end{cases}$$

a) Define a função h sem utilizar o sinal de módulo.

b) Faz um esboço da representação gráfica de h, utilizando a calculadora.

c) Determina, analiticamente e usando a calculadora, os zeros de h.

d) Resolve, analiticamente e usando a calculadora, a equação $h(x) = 5$.

O desafio trata de uma função definida por ramos que envolve uma função quadrática e uma função módulo. O estudo desta função é para ser feito com o auxílio da calculadora gráfica.

Tarefa Adicional

1. Considera a família de funções f tal que:

$$f(x) = 2|x+1| + k.$$

a) Para que valores de k a função f não tem zeros?

b) Determina k, sabendo que o mínimo absoluto de f é -3.

c) Determina k de modo que o gráfico de f intersete o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 3.

A tarefa adicional será para os alunos resolverem em aula, caso haja tempo restante, senão será para resolver em casa.

Materiais: Calculadora gráfica; PowerPoint; manual do aluno; papel; caneta.

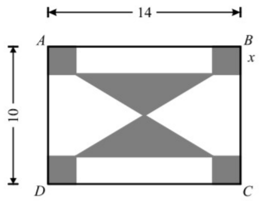
Plano de Aula 12

Tópico: Resolução de problemas acerca dos tipos de funções lecionados.

Objetivo: Resolver problemas com recurso à calculadora gráfica.

Formato de ensino: Ensino exploratório.

Problema 1: Função quadrática
Na figura seguinte está representado um retângulo $[ABCD]$.



O retângulo é o esboço de uma placa decorativa de 14 cm de comprimento por 10 cm de largura e que será constituída por uma parte de metal (representada a cinzento) e por uma parte em madeira (representada a branco). A parte em metal é formada por dois triângulos iguais e por quatro quadrados também iguais. Cada triângulo tem um vértice no centro do retângulo $[ABCD]$. Seja x o lado de cada quadrado, medido em cm ($x \in]0,5[$)

a) Mostra que a área, em cm^2, da parte em metal da placa decorativa é dada, em função de x, por $A(x) = 6x^2 - 24x + 70$.

b) Resolvendo analiticamente e recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determina o valor de x para o qual a área da parte em metal é mínima e calcula essa área.

c) Resolvendo analiticamente e recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determina o valor de x para o qual a área da parte em metal é igual à área da parte em madeira.

Problema 2: Função módulo

Determina a área de um losango, sabendo que três dos seus vértices e dois dos seus lados são obtidos a partir do gráfico cartesiano função definida por $f(x) = 3|x - 4| - 5$.

.

Problema 3: Função definida por ramos

Num lagar, o azeite é colocado num depósito formado por dois cilindros, onde é filtrado para que lhe sejam retiradas algumas impurezas. Os reservatórios estão sobrepostos e comunicam entre si por um pequeno orifício com um filtro. Os cilindros têm bases e alturas diferentes. A área da base do cilindro menor é $\frac{2}{3}m^2$ e a do cilindro maior é $\frac{4}{3}m^2$. A altura do cilindro menor é $1{,}5m$ e a do cilindro maior é $4{,}5m$. Os cilindros encontram-se cheios na altura em que é aberta a torneira.

a) Define, por ramos, a função h que dá a altura do azeite no depósito, em metros, para cada valor do volume V, ocupado pelo azeite, em m^3.

b) Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determina o volume de azeite no depósito, quando a altura é $1{,}5m$.

c) Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determina a altura do azeite no depósito, quando o volume é $6{,}5m^3$.

Problema 4: Inequações quadráticas
No decorrer do copo-d'água de um casamento, a noiva cumpriu a tradição e atirou o *bouquet* ao grupo de solteiras presentes. A trajetória do centro de gravidade do *bouquet* é descrita

Comentários

Turma do 10.º ano do curso científico humanístico de Ciências e Tecnologias.

Duração: 45 minutos

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) Introdução da tarefa; (ii) Exploração da tarefa; (iii) Discussão.

Esta tarefa tem como finalidade os alunos demonstrarem a área pedida, mediante o esquema, e recorrerem à calculadora nas restantes alíneas.

Com esta tarefa, os alunos terão que esboçar o gráfico da função módulo através da calculadora, marcar os pontos pedidos para a área, e manipular a calculadora e o seu raciocínio para as restantes alíneas.

Os alunos, nesta tarefa, irão aplicar os seus conhecimentos acerca das funções definidas por ramos, em que terão que interpretar o enunciado para representar a função por ramos. Nas restantes alíneas, terão que recorrer às capacidades da calculadora, para determinar os valores de x e y pedidos.

Esta tarefa aborda a função quadrática e dá origem a diferentes inequações no contexto do problema.

pela equação $y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}x + 2$, onde y é a altura, em metros, a que o *bouquet* está do chão, e x a distância na horizontal, em metros, até à noiva.

(Resolve as seguintes alíneas analiticamente e/ou com recurso à calculadora)

a) De que altura foi lançado o *bouquet*?

b) A Raquel, que estava no plano da trajetória, a 3 metros da noiva, consegue saltar a 1,90 metros de altura. Será que conseguiu apanhar o *bouquet*?

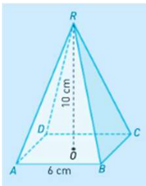
c) Supondo que ninguém conseguiu apanhar o *bouquet*, a que distância da noiva é que este caiu?

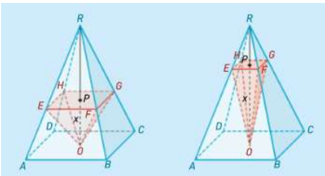
d) Para que valores de x é que a altura do *bouquet*, relativamente ao chão da sala, é inferior a 2 metros?

e) Qual é a possível altura mínima da sala onde o *bouquet* foi lançado para que este não bata no teto?

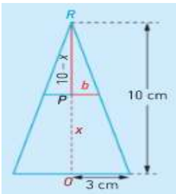
Tarefa adicional: Função cúbica

Considera uma pirâmide quadrangular regular de altura $10cm$ em que a aresta da base mede $6cm$.
Com vértice em O, centro da base da pirâmide, considera outras pirâmides em que as bases são paralelas à base da pirâmide dada, como é sugerido nas figuras seguintes.





O ponto P é móvel, deslocando-se de O para R, nunca coincidindo com O nem com R. Para cada posição do ponto P, seja $x = \overline{OP}$, que representa a altura da pirâmide de vértice O.



a) Mostra que, o lado l da base dessa pirâmide é dado, em função de x, por

$$l(x) = \frac{3}{5}(10 - x)$$

Sugestão: Recorre à semelhança de triângulos e à figura anterior.

b) Designa por V o volume da pirâmide de vértice O. Mostra que V é dado, em função de x, pela expressão $V(x) = \frac{3}{25}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 12x$. Indica o intervalo de variação de x.

c) Recorrendo à calculadora gráfica, determina para que valor de x o volume é máximo.

d) Seja S a função que a cada x faz corresponder o volume da região limitada pelas superfícies das duas pirâmides.

d1) Mostra que $S(x) = 120 - V(x)$.

d2) Explica como podes obter o gráfico da função S, a partir do gráfico da função V.

Esta tarefa aborda a função cúbica na determinação do volume da pirâmide, começando pela demonstração da expressão para a medida do lado da base. Para determinar o volume máximo, será necessário a calculadora. A última alínea diz respeito às transformações, assim como, a demonstração de outra expressão com base na expressão anterior.

Será para os alunos resolverem em aula, caso haja tempo restante, senão será para ser resolvida em casa.

Materiais: Calculadora gráfica; PowerPoint; manual do aluno; papel; caneta.

Anexo 4 – Questionário Final

As tuas opções são importantes para o estudo que estou a realizar relativamente à resolução de problemas na aprendizagem de tópicos de Funções com recurso à calculadora gráfica. Para obter resultados válidos é de maior importância que respondas de forma refletida a todas as questões que te são apresentadas. A informação recolhida será utilizada apenas para efeitos do meu estudo e asseguro o anonimato da mesma.

1. Das afirmações que se seguem, assinala com uma cruz **(X)** a opção que mais se adequa ao teu grau de concordância atendendo à seguinte escala: **DT:** Discordo Totalmente; **DP:** Discordo Parcialmente; **I:** Indiferente; **CP:** Concordo Parcialmente; **CT:** Concordo Totalmente.

Afirmações	**DT**	**DP**	**I**	**CP**	**CT**
Gostei de aprender os tópicos de Funções.					
A resolução de problemas ajudou-me a compreender os tópicos de Funções.					
Tive mais dificuldades na aprendizagem de tópicos de Funções do que noutros tópicos matemáticos.					
A interpretação da informação gerada pela calculadora gráfica foi essencial na aprendizagem de tópicos de Funções.					
Ao resolver problemas, sinto vontade de desistir quando os problemas são complexos.					
A resolução de problemas desafia-me a pensar.					
O estudo de tópico de Funções não é importante para a minha formação.					
Na resolução de problemas tenho dificuldades na interpretação do enunciado.					
A utilização da calculadora gráfica incentivou-me a estabelecer conexões entre a resolução gráfica e a analítica das tarefas propostas.					
Na resolução de problemas recorri a esquemas/tabelas para entender melhor o que é pedido.					
Na resolução de problemas recorri à estratégia de tentativa e erro.					
A resolução de problemas desenvolveu a minha capacidade de argumentar estratégias e resultados.					
Senti dificuldades em comprovar na calculadora gráfica as resoluções de problemas efetuadas no caderno.					
A utilização da calculadora gráfica desafiou-me a pensar sobre as atividades realizadas.					
Senti dificuldades em transcrever para o caderno a informação obtida pela calculadora gráfica.					
A resolução de problemas desenvolveu a minha capacidade de discutir ideias.					
Quando resolvo problemas, procuro ler várias vezes o enunciado até perceber o que é pedido.					
O uso da calculadora gráfica levou-me a repensar as minhas estratégias de resolução de problemas					
Recorri à calculadora gráfica para validar resultados obtidos analiticamente na resolução de problemas.					
Recorri a processos analíticos para validar resultados obtidos na calculadora gráfica.					
A resolução de problemas torna as aulas mais dinâmicas.					
Aprendi melhor os tópicos de Funções quando utilizava processos analíticos do que com a calculadora gráfica.					
Aprendi melhor os tópicos de Funções quando utilizava a calculadora gráfica do que com processos analíticos.					
Aprendi melhor os tópicos de Funções quando utilizava simultaneamente a calculadora gráfica e processos analíticos.					
A explicação do meu raciocínio aliada à representação na calculadora gráfica desenvolveu a minha capacidade de comunicação na resolução de problemas.					
A calculadora gráfica dificultou a minha aprendizagem de tópicos de Funções.					
Não precisei de utilizar a calculadora gráfica na resolução de problemas relativos ao estudo de tópico de Funções.					
Gostaria de aprender outros tópicos matemáticos com recurso à calculadora gráfica.					
Gostaria de aprender outros tópicos matemáticos com recurso à resolução de problemas.					
Aprendo mais quando o professor expõe a matéria e resolve os problemas na aula.					

Aprendo mais quando o professor promove a discussão das resoluções de problemas dos alunos.					
Aprendo mais quando o professor me incentiva a explicar o que fiz e a trocar ideias com os meus colegas.					

2. Devido ao Covid-19, o método de ensino passou a ser virtual (aulas assíncronas e síncronas). Indica **três vantagens** deste método de ensino.

____

____

____

3. Devido ao Covid-19, o método de ensino passou a ser virtual (aulas assíncronas e síncronas). Indica **três desvantagens** deste método de ensino.

____

____

____

4. A resolução de problemas foi um método utilizado nas estratégias de ensino de tópicos de Funções. Indica **três vantagens** da resolução de problemas para a tua aprendizagem de tópicos de Funções.

____

____

____

5. A resolução de problemas foi um método utilizado nas estratégias de ensino de tópicos de Funções. Indica **três desvantagens** da resolução de problemas para a tua aprendizagem de tópicos de Funções.

____

____

____

6. O ensino de tópico de Funções foi realizado com recurso à calculadora gráfica. Indica **três vantagens** da utilização da calculadora gráfica na tua aprendizagem.

____

____

____

7. O ensino de tópico de Funções foi realizado com recurso à calculadora gráfica. Indica **três desvantagens** da utilização da calculadora gráfica na tua aprendizagem.

____

____

____

8. Que **dificuldades** sentiste na aprendizagem de tópicos de Funções?

____

____

____

Obrigada pela tua colaboração!
Eva Nunes