

# Modelo Exacto Difuso de un Proceso Fermentativo Conmutado

Enrique Herrera<sup>1</sup>, Jesús Ramírez<sup>1</sup>, Bernardino Castillo<sup>2</sup> y Eugénio C. Ferreira<sup>3</sup>

- 1.-Centro de Investigación y Asistencia en Tecnología y Diseño del Estado de Jalisco A.C., Av. Normalistas 800, C.P. 44270, Guadalajara, México. email: {eherrera; jramirez}@ciatej.net.mx
- 2.-Centro de investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N., Unidad Guadalajara, Av. Científica 1145, Colonia el bajío, C.P. 45010, Zapopan, México. email:toledo@gdl.cinvestav.mx
- 3.-IBB-Institute for Biotechnology and Bioengineering, Centre of Biological Engineering, Universidade do Minho 4710-057, Braga, Portugal. email:ecferreira@deb.uminho.pt

**Resumen**—Los modelos matemáticos de los procesos fermentativos son complejos y difíciles de trabajar, debido a las no linealidades presentes en el modelo. En este trabajo se realizó un modelo difuso Takagi-Sugeno, de un cultivo en continuo de la levadura de panificación *Saccharomyces cerevisiae*. El modelo difuso se basó en la técnica de sectores no lineales, el cual permite representar exactamente a un sistema no lineal mediante subsistemas lineales. Una característica importante del modelo fermentativo, es que puede ser dividido en dos modelos parciales: uno respiro-fermentativo (RF) con producción de etanol y otro respirativo (R) con consumo de etanol. La condición para la transición entre los modelos parciales depende de la producción o consumo del etanol. Es necesario evaluar la elección de las variables premisas, ya que estas repercuten directamente en la observabilidad y controlabilidad del sistema. Del modelo exacto difuso obtenido, es posible construir observadores y controladores difusos.

**Palabras clave:** Modelado difuso, procesos fermentativos, sistema no lineal, observabilidad

## I. INTRODUCCIÓN

Los procesos fermentativos son influenciados por factores ambientales, fisicoquímicos y biológicos, tales como la concentración de sustrato y biomasa, pH, temperatura, oxígeno disuelto e inhibidores del crecimiento (Bastin y Dochain, 1990). En un proceso fermentativo es deseable maximizar la producción de algún metabolito de interés; sin embargo, sin el adecuado conocimiento del proceso, es prácticamente imposible alcanzar el objetivo deseado. Modelar matemáticamente una fermentación presenta varias ventajas, por ejemplo, la simulación de procesos, disminuyendo el alto costo de la experimentación industrial (Volesky y Votruba, 1992), la optimización matemática de algún metabolito de interés (Modak H.C. y col, 1986), el control del proceso (Kuhlmann y col, 1998; Ramkrishna, 2003; Smets y col, 2004) entre otras aplicaciones. Diversos modelos matemáticos han sido obtenidos para procesos fermentativos (Sainz J. y col, 2003; Marín M., 1999).

En el caso que la dinámica de un proceso sea poco conocida o presente incertidumbre, la lógica difusa puede ayudar a compensar la falta de información añadiendo la experiencia del operador del proceso. Cuando el modelo no lineal del proceso fermentativo es completamente conocido un sistema difuso también puede ser utilizado. Una primera aproximación puede realizarse partiendo de los modelos difusos Takagi-Sugeno (T-S), donde la parte consecuente de la regla difusa es reemplazada por un sistema lineal. Esto se logra linealizando el sistema alrededor de puntos de operación, obteniéndose representaciones locales lineales del modelo no lineal. Otra forma de obtener modelos T-S es utilizando el método de sectores no lineales, que permite construir un modelo exacto difuso a partir del modelo no lineal, mediante subsistemas lineales.

La levadura *Saccharomyces cerevisiae* es utilizada ampliamente en la producción de levadura de panificación, así como en la fermentación de bebidas alcohólicas. Esta levadura puede crecer en glucosa siguiendo tres importantes vías metabólicas, fermentación de la glucosa, oxidación de la glucosa y oxidación del etanol (Sonnleitner y Kämpeli, 1986). En la producción de levadura de panificación en condiciones aeróbicas (régimen respirativo), es deseable la producción de altas concentraciones de biomasa; sin embargo, bajo condiciones anaeróbicas o altas concentraciones de glucosa, el metabolismo respirativo (R) de la levadura es desviado al régimen respiro-fermentativo (RF), el cual se caracteriza por la producción de etanol.

La levadura de panificación es producida en cultivos por lote, lote alimentado y en continuo. En estos cultivos bajo condiciones no controladas y en presencia de perturbaciones, el régimen deseado de producción (R), puede pasar al RF produciendo etanol, disminuyendo los rendimientos de biomasa. Bajo estas circunstancias se justifica un modelo matemático del proceso fermentativo, que permita identificar los estados metabólicos de la levadura, del cual se puedan diseñar controladores y observadores que garanticen que el proceso cumpla los objetivos deseados.

En este trabajo se desarrolla un modelo exacto difuso para un sistema fermentativo no lineal, que puede conmutar entre varios estados metabólicos. Una vez construido el modelo exacto se enfatiza la importancia de escoger correctamente las variables premisas, para evitar perder información importante del modelo que repercuta en la observabilidad y/o controlabilidad del modelo exacto difuso.

## II. PRELIMINARES DE LÓGICA DIFUSA

Los modelos difusos T-S son utilizados para representar dinámicas no lineales mediante un conjunto de reglas del tipo “Si – ENTONCES”. Una característica importante de estos modelos es que la parte consecuente de la regla difusa es reemplazada por sistemas lineales, por ejemplo, linealizando el sistema no lineal alrededor de algún punto de operación mediante series de Taylor. La  $i$ -ésima regla de un modelo continuo T-S se expresa de la siguiente manera, (Tanaka y Wang, 2001).

Regla  $i$ :

$$\text{Si } z_1(t) \text{ es } M_1^i \text{ y } \dots \text{ y } z_p(t) \text{ es } M_p^i \\ \text{ENTONCES } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i = 1, \dots, r. \quad (1)$$

donde  $M_{ij}$  es el conjunto difuso,  $r$  es el número de reglas del modelo,  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de estado,  $x(t) \in \mathfrak{R}^m$  es el vector de entrada,  $x(t) \in \mathfrak{R}^q$  es el vector de salida,  $A_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es la matriz de estado,  $B_i \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  es la matriz de entrada y  $C_i \in \mathfrak{R}^{q \times n}$  es la matriz de salida.  $z_1(t), \dots, z_p(t)$  son variables premisas conocidas que pueden ser funciones de las variables de estado, perturbaciones externas y/o tiempo.

Cada ecuación lineal representada por  $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$  es llamada subsistema. Dado un par de  $(x(t), u(t))$ , la salida final del sistema difuso puede ser inferida como:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t), \quad (2)$$

donde

$$h_i(z(t)) = \frac{\prod_{j=1}^p M_j^i(z_j(t))}{\sum_{i=1}^r \prod_{j=1}^p M_j^i(z_j(t))}, \quad (3)$$

para toda  $t$ . El término  $M_j^i(z_j(t))$  es el valor de membresía de  $z_j(t)$  en  $M_j^i$ . Dado que

$$\prod_{j=1}^p M_j^i(z_j(t)) \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^r \prod_{j=1}^p M_j^i(z_j(t)) > 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

se tiene entonces que

$$h_i(z(t)) \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \quad i = 1, \dots, r,$$

Un sistema no lineal también puede ser representado mediante sectores, ver la figura 1.

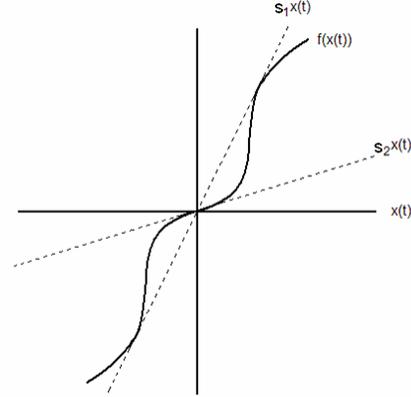


Figura 1. Representación de un sector global

La no linealidad tipo sector se basa en la siguiente idea (Tanaka y Wang, 2001), considere un sistema no lineal dado por  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  donde  $f(0) = 0$ . El objetivo es encontrar un sector global que abarque por completo la función no lineal  $f(x(t))$ ; es decir,  $\dot{x}(t) = f(x(t)) \in [s_1 \ s_2]x(t)$ , donde  $s_1 x(t)$  y  $s_2 x(t)$  son rectas. Esta aproximación garantiza la construcción de un modelo exacto difuso del modelo no lineal. Se describe a continuación el proceso fermentativo.

## III. EL MODELO FERMENTATIVO

La levadura *Saccharomyces cerevisiae* en presencia de oxígeno consume la glucosa para formar biomasa, cuando se tienen condiciones anaerobias la levadura produce principalmente etanol, el cual puede ser consumido cuando existe presencia de oxígeno y bajas concentraciones de sustrato. Un modelo matemático no lineal de un cultivo en continuo de la levadura de panificación, que pasa por las 3 vías metabólicas antes mencionadas, se puede representar por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (\mu_s^o + \mu_s^r + \mu_e^o)x_1 - Dx_1 \\ \dot{x}_2 &= (-k_1 \mu_s^o - k_2 \mu_s^r)x_1 - Dx_2 + DS_{in} \\ \dot{x}_3 &= (k_3 \mu_s^r - k_4 \mu_e^o)x_1 - Dx_3 \\ \dot{x}_4 &= (-k_5 \mu_s^o - k_6 \mu_e^o) - Dx_4 + OTR \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $x_1$  es la biomasa,  $x_2$  es la glucosa,  $x_3$  es etanol,  $x_4$  es el oxígeno disuelto,  $D$  es la tasa de dilución,  $S_{in}$  es la concentración del sustrato en el influente,  $OTR$  es la tasa de transferencia de oxígeno,  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  y  $k_6$  son términos estequiométricos,  $\mu_s^o$ ,  $\mu_s^r$  y  $\mu_e^o$  son velocidades específicas de crecimiento.

Pormealeu (1990) propuso la reformulación del modelo (4) usando dos modelos parciales: un modelo parcial respiro-fermentativo (RF) con producción de etanol y un modelo respirativo (R) con consumo de etanol. Con esta reformulación se obtienen dos modelos parciales que pueden conmutar del régimen RF al R dependiendo de si se está produciendo o consumiendo etanol en el cultivo.

Considere el sistema no lineal descrito por el modelo (4), el cual puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_i(x(t)) + Bu(t) + d(x(t)) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $f_i(x(t))$  describe ambos modelos parciales RF y R. Para RF se tiene

$$f_1 = \begin{bmatrix} (\mu_{s\_RF}^o + \mu_{s\_RF}^r)x_1 - Dx_1 \\ (-k_1\mu_{s\_RF}^o - k_2\mu_{s\_RF}^r)x_1 - Dx_2 \\ k_3\mu_{s\_RF}^r x_1 - Dx_3 \\ -k_5\mu_{s\_RF}^o x_1 - Dx_4 \end{bmatrix} := f_{RF} \quad (6)$$

y el modelo R

$$f_2 = \begin{bmatrix} (\mu_{s\_R}^o + \mu_{e\_R}^o)x_1 - Dx_1 \\ -k_1\mu_{s\_R}^o x_1 - Dx_2 \\ -k_4\mu_{e\_R}^o x_1 - Dx_3 \\ (-k_5\mu_{s\_R}^o - k_6\mu_{e\_R}^o)x_1 - Dx_4 \end{bmatrix} := f_R, \quad (7)$$

donde la entrada para ambos modelos es común y está dada por  $u(t)=S_{in}$ , el vector de entrada está dado por:  $B=[0 \ D \ 0 \ 0]^T$  y la salida  $h(x(t))=x_3$ . La tasa de transferencia de oxígeno OTR se toma como una perturbación conocida y medible, así

$$d = [0 \ 0 \ 0 \ OTR]^T \quad (8)$$

Las no linealidades del modelo fermentativo están dadas por las velocidades específicas de crecimiento, para el régimen RF:

$$\mu_{s\_RF}^o = Y_{O_2} \left( q_o^{\max} \frac{x_4}{K_o + x_4} \right) \quad (9)$$

$$\mu_{s\_RF}^r = Y_r \left( q_s^{\max} \frac{x_2}{K_s + x_2} - q_o^{\max} \frac{x_4}{K_o + x_4} \frac{Y_{O_2}}{Y_o} \right). \quad (10)$$

En el régimen R están dadas por:

$$\mu_{s\_R}^o = Y_o \left( q_s^{\max} \frac{x_2}{K_s + x_2} \right), \quad (11)$$

La velocidad específica de crecimiento  $\mu_{e\_R}^o$ , puede tomar los siguientes valores

$$\mu_{e\_R}^o = \begin{cases} q_{e_1} & SI \ q_{e_1} < q_{e_2} \\ q_{e_2} & SI \ q_{e_1} \geq q_{e_2} \end{cases}$$

donde

$$q_{e_1} = Y_e q_e^{\max} \frac{x_3}{K_e + x_3} \frac{K_i}{K_i + x_2} \quad (12)$$

$$q_{e_2} = Y_{O_2} e \left( q_o^{\max} \frac{x_4}{K_o + x_4} - \frac{Y_o}{Y_{O_2}} \left( q_s^{\max} \frac{x_2}{K_s + x_2} \right) \right) \quad (13)$$

De la ecuación (12) y (13) se puede inferir que el modelo parcial R dado por (7) debe ser dividido en dos nuevos modelos denominados (Rqe1) cuando  $\mu_{e\_R}^o = q_{e_1}$  y (Rqe2) cuando  $\mu_{e\_R}^o = q_{e_2}$ . Las condiciones de cambio entre los modelos parciales, así como los valores de los parámetros  $K_s, K_i, K_e, K_o, Y_o, Y_r, Y_o, Y_{O_2}, Y_{O_2e}, q_s^{\max}, q_o^{\max}$  y  $q_e^{\max}$  usados en las ecuaciones (9) a (13) son descritos en (Ferreira, 1995).

Para promover la transición entre los modelos parciales RF y R se varió la concentración del sustrato en el influente tal como se muestra en la figura 2, mientras que la tasa de dilución se mantuvo constante en  $0.2 \text{ h}^{-1}$ .

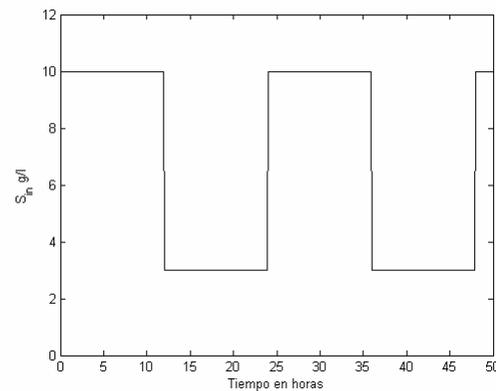


Figura 2. Concentración del sustrato en el influente.

#### IV. EL MODELO EXACTO DIFUSO

Cuando se conoce el modelo no lineal de la levadura de panificación, así como todos sus parámetros, entonces un modelo exacto difuso puede ser obtenido del modelo no lineal dado, esto requiere una aproximación por sectores no lineales (Tanaka y Wang, 2001). El procedimiento para construir el modelo exacto difuso del régimen RF se describe a continuación. Sustituyendo las ecuaciones (9) y (10) en la matriz  $f(x)$  dada por (6), del régimen RF se tiene:

$$f_{RF,j} = \begin{bmatrix} \left( Y_{O_2} q_o^{\max} \frac{x_4}{Ko+x_4} \right) + \left( Y_{Rq_s}^{\max} \frac{x_2}{Ks+x_2} - Y_{Rq_o}^{\max} \frac{x_4}{Ko+x_4} \frac{Y_{O_2}}{Y_o} \right) & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 \left( Y_{O_2} q_o^{\max} \frac{x_4}{Ko+x_4} \right) - k_2 \left( k_2 Y_{Rq_s}^{\max} \frac{x_2}{Ks+x_2} - Y_{Rq_o}^{\max} \frac{x_4}{Ko+x_4} \frac{Y_{O_2}}{Y_o} \right) & -D & 0 & 0 \\ k_3 \left( Y_{Rq_s}^{\max} \frac{x_2}{Ks+x_2} - Y_{Rq_o}^{\max} \frac{x_4}{Ko+x_4} \frac{Y_{O_2}}{Y_o} \right) & 0 & -D & 0 \\ -k_3 \left( Y_{O_2} q_o^{\max} \frac{x_4}{Ko+x_4} \right) & 0 & 0 & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (14)$$

En una primera aproximación las variables premisas del modelo (14) se escogen como  $z_1^{RF}(t) = \mu_{s_{RF}}^o$  y  $z_2^{RF}(t) = \mu_{s_{RF}}^r$  dadas por (9) y (10) respectivamente, las cuales cumplen la condición de sector. Asumiendo los rangos  $x_1(t) \in [0, 10]$ ,  $x_2(t) \in [0, 1]$ ,  $x_3(t) \in [0, 5]$  y  $x_4(t) \in [0, 0.007]$  se pueden obtener los siguientes máximos y mínimos para  $z_1^{RF}(t)$  y  $z_2^{RF}(t)$  tal como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \max_{x_4(t)} z_1^{RF}(t) &= 0.3029 = a_1; & \min_{x_4(t)} z_1^{RF}(t) &= 0 = a_2 \\ \max_{x_2(t) \text{ y } x_4(t)} z_2^{RF}(t) &= 0.3431 = b_1; & \min_{x_2(t) \text{ y } x_4(t)} z_2^{RF}(t) &= -0.0618 = b_2 \end{aligned} \quad (15)$$

De los valores máximos y mínimos las funciones de membresía pueden ser calculadas utilizando

$$z_1^{RF}(t) = \sum_{i=1}^2 M_{1i}(z_1^{RF}(t)) a_i \quad (16)$$

donde se debe cumplir que

$$M_{11}(z_1^{RF}(t)) + M_{12}(z_1^{RF}(t)) = 1 \quad (17)$$

de (16) y (17) se obtienen las siguientes funciones de membresía

$$M_{11}(z_1^{RF}(t)) = \frac{z_1(t) - a_2}{a_1 - a_2}, \quad M_{12}(z_1^{RF}(t)) = \frac{-z_1(t) + a_1}{a_1 - a_2}, \quad (18)$$

Las funciones de membresía  $M_{21}(z_2(t))$  y  $M_{22}(z_2(t))$ , se obtienen siguiendo el mismo procedimiento. De los valores máximos, mínimos y tomando en cuenta que existen 2 variables premisa se tendrán entonces  $2^2 = 4$  subsistemas lineales para el modelo parcial RF

$$A_{ij}^{RF} = \begin{bmatrix} (a_i + b_j) - D & 0 & 0 & 0 \\ (-k_1 a_i - k_2 b_j) & -D & 0 & 0 \\ k_3 b_j & 0 & -D & 0 \\ -k_3 a_i & 0 & 0 & -D \end{bmatrix} \quad (19)$$

$i, j = 1, 2$

Las reglas difusas para el modelo RF están dadas por:

- Si**  $z_1^{RF}(t)$  es “ $M_{11}(z_1(t))$ ” y  $z_2^{RF}(t)$  es “ $M_{21}(z_2(t))$ ”  
**ENTONCES**  $\dot{x}(t) = A_{11}^{RF} x(t) + Bu(t) + d$
- Si**  $z_1^{RF}(t)$  es “ $M_{11}(z_1(t))$ ” y  $z_2^{RF}(t)$  es “ $M_{22}(z_2(t))$ ”  
**ENTONCES**  $\dot{x}(t) = A_{12}^{RF} x(t) + Bu(t) + d$
- Si**  $z_1^{RF}(t)$  es “ $M_{12}(z_1(t))$ ” y  $z_2^{RF}(t)$  es “ $M_{21}(z_2(t))$ ”  
**ENTONCES**  $\dot{x}(t) = A_{21}^{RF} x(t) + Bu(t) + d$
- Si**  $z_1^{RF}(t)$  es “ $M_{12}(z_1(t))$ ” y  $z_2^{RF}(t)$  es “ $M_{22}(z_2(t))$ ”  
**ENTONCES**  $\dot{x}(t) = A_{22}^{RF} x(t) + Bu(t) + d$

El modelo agregado final se representa por

$$\begin{aligned} \dot{x}^{RF}(t) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 M_{1i}(z_1^{RF}(t)) M_{2j}(z_2^{RF}(t)) \{A_{ij}^{RF} x(t) + Bu(t) + d\} \\ y^{RF}(t) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 M_{1i}(z_1^{RF}(t)) M_{2j}(z_2^{RF}(t)) Cx(t), \end{aligned} \quad (20)$$

El modelo exacto difuso obtenido representa exactamente al modelo parcial no lineal RF en la región  $x_1(t) \in [0, 10]$ ,  $x_2(t) \in [0, 1]$ ,  $x_3(t) \in [0, 5]$  y  $x_4(t) \in [0, 0.007]$ . El modelo exacto difuso para el régimen R se construye siguiendo el mismo procedimiento y tomando como variables premisa a (11) y (12) para Rqe1 y (11) y (13) para Rqe2. Al simular el modelo exacto difuso se constata que funciona satisfactoriamente; la transición entre los modelos RF y R (Rqe1 y Rqe2) se puede apreciar en las figuras 3 y 4, así como el comportamiento de las variables de estado.

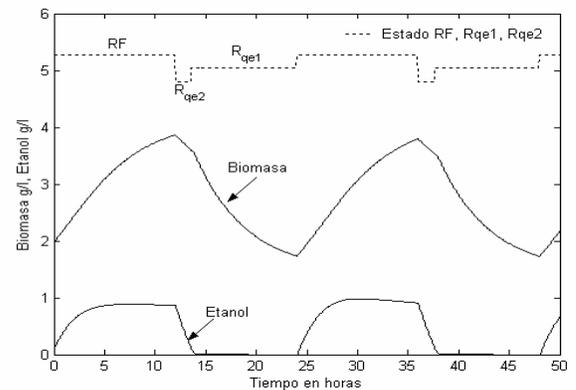


Figura 3 Simulación del modelo exacto difuso, comportamiento de la biomasa y el etanol.

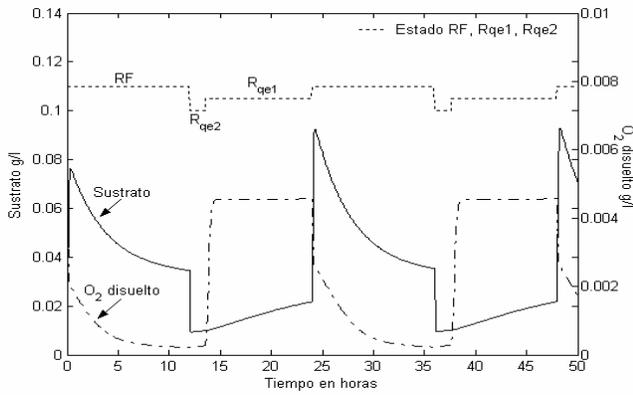


Figura 4 Simulación del modelo exacto difuso, comportamiento del sustrato y el oxígeno disuelto.

## V. MODIFICACIONES AL MODELO EXACTO

Aunque se haya obtenido un modelo difuso que represente exactamente al modelo no lineal original y funcione satisfactoriamente, es posible que se haya perdido información importante del modelo que repercute en la observabilidad y/o controlabilidad del modelo exacto difuso. Para precisar esta idea considere la representación matricial de la matriz  $f(x) = f_{RF-I}$  dada por (14), en este caso las variables premisas se escogieron a partir de las ecuaciones (9) y (10). Al probar el rango de la matriz de observabilidad de los subsistemas lineales obtenidos en (19), para las combinaciones de la matriz de salida mostradas en la tabla I, el máximo rango de la matriz de observabilidad es 2; es decir, se pierde observabilidad.

TABLA I

Rango de la matriz de observabilidad de los subsistemas lineales utilizando  $f_{RF-I}$

	$f_{RF-I}$
$C=[1\ 0\ 0\ 0]$	1 1 1 1
$C=[0\ 1\ 0\ 0]$	2 2 2 2
$C=[0\ 0\ 1\ 0]$	2 2 2 2
$C=[0\ 0\ 0\ 1]$	2 2 2 2

Una forma de incrementar el rango de la matriz de observabilidad del sistema es describiendo la matriz  $f_{RF-I}$ , se dan a continuación dos posibles combinaciones, entre muchas otras posibles.

$$f_{RF-II} = \begin{bmatrix} \left( Y_{O_2} q_o^{\max} - Y_{O_2} q_s^{\max} \frac{Y_{O_2}}{Y_o} \right) \frac{x_4}{Ko+x_4} - D & Y_{O_2} q_s^{\max} \frac{x_1}{Ks+x_2} & 0 & 0 \\ \left( -k_1 Y_{O_2} q_o^{\max} + k_2 Y_{O_2} q_s^{\max} \frac{Y_{O_2}}{Y_o} \right) \frac{x_4}{Ko+x_4} & -k_2 Y_{O_2} q_s^{\max} \frac{x_1}{Ks+x_2} - D & 0 & 0 \\ -k_3 Y_{O_2} q_o^{\max} \frac{Y_{O_2}}{Y_o} \frac{x_4}{Ko+x_4} & k_3 Y_{O_2} q_s^{\max} \frac{x_1}{Ks+x_2} & -D & 0 \\ -k_5 Y_{O_2} q_o^{\max} \frac{x_4}{Ko+x_4} & 0 & 0 & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$f_{RF-III} = \begin{bmatrix} -Y_{O_2} q_o^{\max} \frac{Y_{O_2}}{Y_o} \frac{x_4}{Ko+x_4} - D & Y_{O_2} q_s^{\max} \frac{x_1}{Ks+x_2} & 0 & Y_{O_2} q_o^{\max} \frac{x_1}{Ko+x_4} \\ k_2 Y_{O_2} q_o^{\max} \frac{Y_{O_2}}{Y_o} \frac{x_4}{Ko+x_4} & -k_2 Y_{O_2} q_s^{\max} \frac{x_1}{Ks+x_2} - D & 0 & -k_1 Y_{O_2} q_o^{\max} \frac{x_1}{Ko+x_4} \\ -k_3 Y_{O_2} q_o^{\max} \frac{Y_{O_2}}{Y_o} \frac{x_4}{Ko+x_4} & k_3 Y_{O_2} q_s^{\max} \frac{x_1}{Ks+x_2} & -D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 Y_{O_2} q_o^{\max} \frac{x_1}{Ko+x_4} - D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Por ejemplo, con la matriz  $f_{RF-II}$  dada por (21) se tienen dos posibilidades para escoger nuevas variables premisa

$$z_1(t) = \frac{x_4}{Ko+x_4}, \quad z_2(t) = \frac{x_1}{Ks+x_2} \quad (23)$$

para la matriz  $f_{RF-III}$  dada por (22), además de las variables premisa dadas por (23), se tiene adicionalmente que:

$$z_3(t) = \frac{x_1}{Ko+x_4}$$

Partiendo de (21) o (22) se pueden crear nuevos modelos exactos difusos que permitan aumentar el rango de la matriz de observabilidad de los subsistemas lineales, tal como se muestra en la tabla II. Por ejemplo usando como salida del modelo al etanol ( $x_3$ ) es posible alcanzar rango 3 en la matriz de observabilidad para  $f_{RF-II}$  y  $f_{RF-III}$ ; sin embargo,  $f_{RF-III}$  requiere de 8 subsistemas lineales para realizar el modelo exacto difuso y  $f_{RF-II}$  sólo requiere de 4.

Con estos modelos y las salidas dadas por la tabla I, no es posible alcanzar rango completo en la matriz de observabilidad; sin embargo, es posible implementar un observador tal como se describe en (Herrera E. y col, 2007). El mismo análisis se puede aplicar para el caso de la controlabilidad, tanto para los modelos RF, Rqe1 y Rqe2. Cuando la entrada del modelo está dada por  $u(t)=D$  el modelo exacto se complica, dado que se incrementa el número de variables premisa.

TABLA II

Rango de la matriz de observabilidad de los subsistemas lineales utilizando  $f_{RF-II}$  y  $f_{RF-III}$

	$f_{RF-II}$	$f_{RF-III}$
$C=[1\ 0\ 0\ 0]$	2 2 2 2	3 3 3 3 3 3 3 3
$C=[0\ 1\ 0\ 0]$	2 2 1 2	3 3 2 3 2 3 2 3
$C=[0\ 0\ 1\ 0]$	3 3 3 3	3 3 3 3 3 3 3 3
$C=[0\ 0\ 0\ 1]$	3 3 3 3	1 1 1 1 1 1 1 1

## VI. CONCLUSIONES

Partiendo de un sistema fermentativo conmutado se realizó un modelo exacto difuso a partir del uso de sectores, el modelo obtenido representó exactamente el modelo no lineal original. Sin embargo, especial cuidado se debe tener al escoger las variables premisas, dado que se puede afectar la observabilidad y controlabilidad del modelo exacto difuso.

## VII. AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo recibido en el proyecto 41148 y la beca de doctorado 70662 y la Dra. Dulce María Díaz Montaña.

## REFERENCIAS

- Bastin G. y D. Dochain (1990). *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*. Elsevier. Amsterdam.
- Ferreira E. (1995). *Identificação e controlo adaptivo de processos biotecnológicos*. Ph. D Thesis, Universidade do Porto, Portugal.
- Herrera E., B. Castillo, J. Ramirez y E.C. Ferreira (2007). Fuzzy exact observer for a baker's yeast fermentation process. *Computer Applications in Biotechnology*, preprints I.
- Kuhlmann Ch., I.D.L. Bogle y Z.S. Chalabi (1998). Robust operation of fed-batch fermenters. *Bioprocess Engineering*, 19, 53-59.
- Marín M. (1999). Alcoholic fermentation modelling: current state and perspectives. *Am. J. Enol. Vitic.*, 50, 2, 166-178.
- Modak J.M, H.C. Lim y Y.J. Tayeb (1986). General characteristics of optimal feed rate profiles for various fed-batch fermentation processes. *Biotechnology and Bioengineering*, 28, 1396-1407.
- Pormeleanu Y. (1990). *Modelisation et controle d'un procédé fed-batch de culture des levures á pain (saccharomyces cerevisiae)*. Ph. D. Thesis. Ecole Polytechnique de Montréal, Canada.
- Ramkrishna D. (2003). On modeling of bioreactors for control. *Journal of Process Control*, 13, 581-589.
- Sainz J., F. Pizarro, C.J.R Perez y E. Agosin (2003). Modeling of yeast metabolism and process dynamics in batch fermentation. *Biotechnology and Bioengineering*, 81, 7, 818-828.
- Smets I.Y., J.E. Claes, E.J. November, G.P. Bastin y J.F. Van Impe (2004). Optimal adaptive control of (bio)chemical reactors: past, present and future. *Journal of Process Control*, 14, 795-805.
- Sonnleitner B. y O. Käppli (1986). Growth of *saccharomyces cerevisiae* is controlled by its limited respiratory capacity: formulation and verification of a hypothesis, *Biotechnology and Bioengineering*, 28, 927-937.
- Tanaka K. y H. Wang (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis, a Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley & Sons. United States of America.
- Volesky B. y H. Votruba (1992). *Modeling and Optimization of Fermentation Processes*. Elsevier. The Netherlands.