



Universidade do Minho
Escola de Ciências

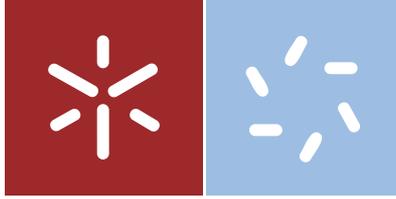
Nuno Miguel Silva Teles Oliveira

Complexidade de métodos de ponto interior
aplicados a problemas de otimização de
dimensão infinita

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR





Universidade do Minho
Escola de Ciências

Nuno Miguel Silva Teles Oliveira

Complexidade de métodos de ponto interior
aplicados a problemas de otimização de
dimensão infinita

Tese de Doutoramento em Ciências
Especialização em Matemática

Trabalho efectuado sob a orientação do
Gueorgui Vitalievitch Smirnov

DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS

Este é um trabalho académico que pode ser utilizado por terceiros desde que respeitadas as regras e boas práticas internacionalmente aceites, no que concerne aos direitos de autor e direitos conexos.

Assim, o presente trabalho pode ser utilizado nos termos previstos na licença abaixo indicada.

Caso o utilizador necessite de permissão para poder fazer um uso do trabalho em condições não previstas no licenciamento indicado, deverá contactar o autor, através do RepositóriUM da Universidade do Minho.

Licença concedida aos utilizadores deste trabalho



**Atribuição CC
BY**

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Agradecimentos

Ao professor Gueorgui Smirnov, orientador deste trabalho, pelo esforço que a ele dedicou.

Ao professor Delfim Torres, pelo seu valioso suporte bibliográfico.

A Stanislav Antontsev, pelas suas valiosas sugestões.

À Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), pelo financiamento, através da bolsa de doutoramento com referência SFRH/BD/111854/2015.

A todos que, de alguma forma, tornaram possível a realização deste trabalho.

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

Resumo

Neste trabalho, são estudadas algumas questões relativas à regularidade da solução de problemas de cálculo das variações e de Lagrange. Como resultado desse estudo, apresentamos algumas estimativas explícitas para o controlo ótimo de alguns problemas específicos. Estas estimativas são ainda utilizadas para derivar um limite para a complexidade de um método de ponto interior aplicado a um problema de Lagrange convexo.

Além disso, é ainda estudado o problema de rastreio regido pela equação do calor. Obtemos uma aproximação por um problema de otimização de dimensão finita e, baseando-nos nessa aproximação, encontramos um limite para a complexidade do método de ponto interior aplicado ao problema de rastreio regido pela equação do calor.

Abstract

In this work, some questions regarding the regularity of solution for calculus of variations and Lagrange problems are studied. As a result of this study, we present some explicit estimates for the optimal control of some specific problems. These estimates are used to obtain bound to the complexity of an interior point method applied to a convex Lagrange problem.

In addition, we study a tracking problem governed by the heat equation. We obtained an approximation by a finite-dimensional optimization problem and, based on this approximation, we find a bound for the complexity of the interior point method applied to the tracking problem governed by heat equation.

Índice

1	Introdução	1
2	Conceitos Básicos	3
2.1	Problema de Cálculo das Variações	3
2.2	Problema de Lagrange	4
2.3	Problema de Tempo Mínimo	5
2.4	Equações Parabólicas	6
2.5	Método de Minimização de Ponto Interior	9
3	Estimativas explícitas para a Constante de Lipschitz	11
3.1	Problema de Lagrange	11
3.2	Equivalência com o problema de tempo ótimo	13
3.3	Problema de cálculo das variações: $g(t, x) = 1$	19
3.4	Problema de Lagrange com $x(1)$ livre	25
3.5	Limites para a Complexidade	30
4	Problema de Rastreo	36
4.1	Enunciado do problema	36
4.2	Resultados Principais	37
5	Conclusões e Trabalho Futuro	45

1 Introdução

Os primeiros trabalhos relativos à regularidade Lipschitziana de soluções de problemas de cálculo das variações datam de há mais de um século [2, 31]. Nos últimos anos, os estudos relativos à regularidade de problemas de cálculo das variações e de controlo ótimo têm-se intensificado (ver [9, 10, 11, 5, 6, 4, 36]). Ainda assim, não temos conhecimento de nenhum resultado que nos forneça uma estimativa explícita para o controlo ótimo em problemas de Lagrange. Sob fortes condições, conseguimos obter essas estimativas. O método utilizado para obter essas estimativas é muito semelhante ao que pode ser encontrado em [27, 32] e baseia-se na equivalência entre um problema de Lagrange e um problema de tempo ótimo, sugerida por Gamkrelidze [12]. A aplicação de condições necessárias de otimalidade promove a obtenção das estimativas explícitas para o problema de Lagrange original.

No caso do problema de cálculo das variações, a regularidade Lipschitziana já tinha sido provada por Clarke e Vinter em [9]. No entanto, a prova apresentada não é construtiva, pelo que não foi obtida nenhuma estimativa explícita para a constante de Lipschitz.

Baseando-nos nas estimativas encontradas, derivamos um limite para a complexidade de um método de ponto interior aplicado a um problema convexo de controlo ótimo. Como é reconhecido da teoria da aproximação, a forma de como funções podem ser bem aproximadas por funções simples está inteiramente relacionado com a sua regularidade [15]. Usamos as propriedades de regularidade para aproximar um problema convexo de controlo ótimo por um problema de programação convexa e obter a respetiva complexidade do método de ponto interior [20].

Numa segunda fase do trabalho, debruçámo-nos sobre o problema de rastreio regido pela equação do calor. Vários aspetos acerca deste problema são discutidos em [1, 3, 13, 14, 18, 19, 24, 25, 26, 30, 34]. Este problema pode ser considerado, no ramo da information-based complexity, como um ramo da Matemática que estuda algoritmos de otimização e complexidade computacional de problemas contínuos com aplicações ao mundo real. Esta teoria lida com a dificuldade intrínseca de aproximar soluções de problemas cuja informação é parcial, contami-

nada ou precificada [33]. No entanto, a nossa atenção virou-se apenas para o ponto de vista da teoria da aproximação.

Em [23], podemos encontrar um estudo do problema de rastreo regido pela equação do calor e, em [22], um estudo do problema de rastreo regido por equações parabólicas, assumindo que o controlo é definido na fronteira e que tem a forma de uma combinação linear de funções de forma.

Neste trabalho, estudamos o problema de rastreo regido pela equação do calor, assumindo que o controlo está definido no interior do domínio. Usamos a definição de solução introduzida e estudada por Ladyzenskaja e sua escola [17]. Isso permite-nos garantir a existência de solução para o problema de rastreo e usar o princípio do máximo, a fim de obter uma aproximação por um problema de otimização de dimensão finita.

Baseados no nosso teorema de aproximação, obtivemos ainda um estimativa para a complexidade do método de ponto interior aplicado ao problema de rastreo regido pela equação do calor. Esta abordagem aqui considerada é uma alternativa para os métodos de regularização (ver [16]).

2 Conceitos Básicos

Começemos por introduzir alguma notação utilizada nos pontos seguintes. Representamos por $AC([a, b], \mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolutamente contínuas. Dado um vetor $x \in \mathbb{R}^n$, representamos por $|x|$ a sua norma Euclidiana. O produto interno de dois vetores $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ é representado por $\langle x_1, x_2 \rangle$. A distância entre $x \in \mathbb{R}^n$ e $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é denotada por $d(x, C)$. O fecho convexo de C é denotado por $\text{co } C$. Representamos o cone tangente a C em x por $\mathcal{T}(C, x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} d(x + \lambda v, C) = 0\}$. O cone conjugado de um cone K é representado por $K^* = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^*, x \rangle \geq 0, x \in K\}$. O gráfico de uma função multívoca F é representado por $\text{gr } F$.

2.1 Problema de Cálculo das Variações

Consideremos o funcional

$$J(x) = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \quad (1)$$

onde $x \in AC([a, b], \mathbb{R}^n)$ e $L : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $L(\cdot, x(\cdot), \dot{x}(\cdot))$ é integrável. À variável t chamamos tempo e à variável x chamamos estado. Dado $B \subseteq \mathbb{R}^{2n}$, podemos ainda definir a condição de fronteira

$$(x(a), x(b)) \in B \quad (2)$$

Chamamos problema de cálculo das variações ao problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar: } J(x), \\ &\text{sujeito a: } (x(a), x(b)) \in B. \end{aligned}$$

Consideramos que B é um conjunto fechado. Dizemos que x é uma trajetória admissível se $x \in AC([a, b], \mathbb{R}^n)$ e $L(\cdot, x(\cdot), \dot{x}(\cdot))$ é integrável.

Dado o problema (2.1), representamos por $H(t, x, \dot{x}, \lambda)$ a função de Hamilton definida por

$$H(t, x, \dot{x}, \lambda) = L(t, x, \dot{x}) + \langle \lambda, \dot{x} \rangle. \quad (3)$$

Teorema 2.1 ([7]). *Seja x uma trajetória admissível tal que \dot{x} é essencialmente limitada. Assumimos que x é um mínimo (local) de J (isto é, $J(x) \leq J(y)$, para todo y trajetória admissível tal que $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon$, $a \leq t \leq b$, para algum $\varepsilon > 0$). Então,*

1. *A função $\lambda(t) = -L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$ é absolutamente contínua e a igualdade*

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = L_x(t, x(t), \dot{x}(t))$$

verifica-se para quase todo $a \leq t \leq b$.

2. *A condição de transversalidade*

$$\langle L_{\dot{x}}(b, x(b), \dot{x}(b)), z_b \rangle - \langle L_{\dot{x}}(a, x(a), \dot{x}(a)), z_a \rangle \geq 0$$

verifica-se para todo (z_a, z_b) pertencente ao cone tangente a B no ponto $(x(a), x(b))$.

2.2 Problema de Lagrange

Chamamos problema de Lagrange a um problema do tipo

$$\begin{aligned} \text{minimizar: } J(x, u) &= \int_a^b L(t, x(t), u(t)) dt, \\ \text{sujeito a: } \dot{x}(t) &= g(t, x(t), u(t)) \\ u(t) &\in U \subseteq \mathbb{R}^m, \\ (x(a), x(b)) &\in B \subseteq \mathbb{R}^{2n}, \end{aligned} \tag{4}$$

onde g é uma função contínua no conjunto $A \times U$ Chamamos à variável u controle e ao par (x, u) processo.

Dado o problema (4), representamos por $H(t, x, \dot{x}, \lambda)$ a função de Hamilton definida por

$$H(t, x, u, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 L(t, x, \dot{x}) + \langle \lambda, g(t, x(t), u(t)) \rangle. \tag{5}$$

Teorema 2.2 ([7]). *Seja (x, u) um processo admissível tal que u é essencialmente limitado. Assumimos que (x, u) é um mínimo (local) de J . Então,*

1. *Existe uma função absolutamente contínua $\lambda(t)$, e uma constante $\lambda_0 \geq 0$ tais que (λ_0, λ) nunca se anula e*

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), u(t), \lambda_0, \lambda(t))$$

para quase todo $a \leq t \leq b$.

2. *A condição de transversalidade*

$$\langle \lambda(b), z_b \rangle - \langle \lambda(a), z_a \rangle = 0$$

verifica-se para todo (z_a, z_b) pertencente ao cone tangente a B no ponto $(x(a), x(b))$.

2.3 Problema de Tempo Mínimo

Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função multívoca com valores compactos e Lipschitziana, isto é, existe \mathcal{L} uma constante positiva tal que

$$F(x_1) \subseteq F(x_2) + \mathcal{L}|x_1 - x_2|B_n,$$

onde B_n representa a bola aberta unitária de dimensão n . Consideremos o problema de tempo mínimo

$$\begin{aligned} &\text{minimizar: } T, \\ &\text{sujeito a: } \dot{x} \in F(x), \\ &x(0) = x_0, \quad x(T) \in S, \end{aligned} \tag{6}$$

onde S é um conjunto fechado e convexo. Seja $\hat{x} \in AC([0, T], \mathbb{R}^n)$ uma solução do problema. Para cada $t \in [0, T]$, consideremos um cone convexo $\mathcal{K}(t) \subseteq \mathcal{T}(\text{gr co}F, (\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)))$ mensurável. Existem várias condições necessárias de otimalidade para problemas de tempo ótimo com inclusões diferenciais (ver [8, 35]). Para o nosso trabalho, a mais relevante é a proposição seguinte, que é uma consequência de [28, Teorema 5].

Proposição 2.3. *Existe uma função $p \in AC([0, T], \mathbb{R}^n)$ tal que*

1. $(\dot{p}(t), p(t)) \in -\mathcal{K}^*(t)$, $\langle p(t), \dot{\hat{x}}(t) \rangle \equiv h \geq 0$;
2. $p(T) \in (\mathcal{T}(S, \hat{x}(T)))^*$;
3. $|p(T)| > 0$.

No caso dos sistemas de controlo ótimo suaves, a aproximação seguinte ser escolhida como o cone $K(t)$. Seja $U \subset \mathbb{R}^k$ e $f : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável em x e tal que o conjunto $f(x, U)$ é convexo, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Para $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathbb{R}^n \times U$ denotemos $\hat{v} = f(\hat{x}, \hat{u})$ e $C = \nabla_x f(\hat{x}, \hat{u})$, $K = \mathcal{T}(f(\hat{x}, U), \hat{v})$. Recordemos a seguinte proposição [29, p. 38].

Proposição 2.4. *A inclusão*

$$\{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid v \in Cx + K\} \subset \mathcal{T}(\text{gr}f(\cdot, U), (\hat{x}, \hat{u}))$$

verifica-se.

Recordemos também a seguinte fórmula [29, p. 50].

Proposição 2.5. *Seja $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear e $K \subset \mathbb{R}^n$ um cone convexo. Então, verifica-se a igualdade*

$$\{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid v \in Cx + K\}^* = \{(x^*, v^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x^* = -C^*v^*, v^* \in K^*\}.$$

2.4 Equações Parabólicas

Dado um conjunto aberto $X \subseteq \mathbb{R}^n$, denotamos por $L_p(X, \mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das funções mensuráveis em X que satisfazem $\int_X |f|^p dx < \infty$, por $L_\infty(X, \mathbb{R})$ o espaço das funções essencialmente limitadas e por $\|\cdot\|_{L_p(X, \mathbb{R})}$, $1 \leq p \leq \infty$, a norma usual em $L_p(X, \mathbb{R})$. Seja Ω um subconjunto aberto, conexo e limitado de \mathbb{R}^n e $T \in \mathbb{R}^+$. Usamos a notação Q_T para o conjunto $(0, T) \times \Omega$. Dada uma função F , o seu gradiente e a matriz Hessiana são denotados, respetivamente, por $\nabla(F)$ e $\nabla^2(F)$. Definimos ainda os seguintes espaços de Hilbert:

- $W_2^2(\Omega)$ é o espaço que consiste em todas as funções $u \in L_2(\Omega, \mathbb{R})$ com derivadas generalizadas u_x e u_{xx} , munido da norma

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} + \|u_x\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} + \|u_{xx}\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})};$$

- $W_2^{1,1}(Q_T)$ é o espaço que consiste em todas as funções $u \in L_2(Q_T, \mathbb{R})$ com derivadas generalizadas u_x e u_t , munido do produto interno

$$(u, v)_{W_2^{1,1}(Q_T)} = \iint_{Q_T} (uv + u_x v_x + u_t v_t) dx dt;$$

- $W_2^{1,0}(Q_T)$ é o espaço que consiste em todas as funções u de $L_2(Q_T, \mathbb{R})$ com derivadas generalizadas u_x , munido do produto interno

$$(u, v)_{W_2^{1,0}(Q_T)} = \iint_{Q_T} (uv + u_x v_x) dx dt.$$

Ainda definimos os seguintes espaços de Banach:

- $V_2(Q_T)$ é o espaço que consiste em todas as funções $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ com norma

$$\|u\|_{V_2(Q_T)} = \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} + \|u_x\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})}$$

finita;

- $V_2^{1,0}(Q_T)$ é o espaço que consiste em todas as funções $u \in V_2(Q_T)$ tais que $\|u(t + \Delta t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} \rightarrow 0$ quando $\Delta t \rightarrow 0$.

Recordemos os seguintes resultados sobre EDP's. Seja C uma constante positiva. Consideremos o problema

$$\left. \begin{aligned} u_t &= C u_{xx} - f, \\ u(t, x) &= 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \\ u(0, x) &= \psi(x). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Seja

$$\begin{aligned} I(t_1; u, \phi) &= \int_{\Omega} u(t_1, \cdot) \phi(t_1, \cdot) dx - \int_0^{t_1} \int_{\Omega} u \phi_t dx dt \\ &\quad + \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \left(C \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{x_j} \phi_{x_i} + f \phi \right) dx dt, \end{aligned} \quad (8)$$

Dizemos que uma função $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$ é uma solução do problema (7) se a igualdade

$$I(t_1; u, \phi) = \int_{\Omega} \psi(x) \phi(0, x) dx$$

se verifica para todo $t_1 \in [0, T]$, $\phi \in W_2^{1,1}(Q_T)$ com $\phi(t, x) = 0$, $x \notin \Omega$.

Recordemos os seguintes resultados (ver, [17, ch. 3]).

Teorema 2.6 ([17]). *O problema (7) tem uma única solução $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$.*

Seja $\|\cdot\|_{q,r}$ a norma definida por

$$\|a\|_{q,r} = \left(\int_0^T \left(\int_{\Omega} a^q dx \right)^{r/q} dt \right)^{1/r}.$$

Assumimos que a condição

$$\|f\|_{q,r} \leq \mu_1, \tag{9}$$

é satisfeita quando q e r satisfazem as condições

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = 1 + \frac{n}{4}, \\ & q \in \left[\frac{2n}{n+2}, 2 \right], r \in [1, 2], \text{ para } n \geq 3, \\ & q \in (1, 2], r \in [1, 2), \text{ para } n = 2, \\ & q \in [1, 2], r \in \left[1, \frac{4}{3} \right], \text{ para } n = 1. \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

Teorema 2.7 ([17]). *Assuma-se que, para os problemas*

$$\left. \begin{aligned} & u_t = C u_{xx} - f^m, \\ & u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \\ & u(0, x) = \psi^m(x), \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

as condições (9)-(10) são satisfeitas com as mesmas constantes. Assuma-se também que as funções f^m e ψ^m convergem para f e ψ , respetivamente, nas normas dos espaços a que pertencem, de acordo com as condições (9)-(10). Então, as soluções u^m dos problemas (11) convergem fortemente em $V_2^{1,0}(Q_T)$ para a solução u do problema (7).

Seja $U = ([0, T] \times \partial\Omega) \cup (\{0\} \times \Omega)$.

Teorema 2.8 ([17]). *Seja $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$ a solução do problema (7). Se $f = 0$, então,*

$$\min\{0, \operatorname{ess\,inf}_U u(t, x)\} \leq u(t, x) \leq \max\{0, \operatorname{ess\,sup}_U u(t, x)\}$$

para quase todo (t, x) em Q_T .

Teorema 2.9 ([17]). *Considere-se a função Γ definida por $\Gamma(t, x) = \frac{1}{(4\pi Ct)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4Ct}\right\}$.*

Para todo $t > 0$, a igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, x) dx = 1$$

verifica-se.

2.5 Método de Minimização de Ponto Interior

Dado um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ e uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, usamos a notação $\|v\|_x^F = \langle [\nabla^2(F)(x)]^{-1}v, v \rangle^{1/2}$.

Seja $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Consideremos o problema

$$\left. \begin{aligned} P(x) &\rightarrow \min, \\ x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \\ x_i^2 &\leq K_i, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Seja F a função definida por

$$F(x, \sigma) = -\ln(\sigma - P(x)) - \ln(\bar{\sigma} - \sigma) - \sum_{i=1}^n \ln(K_i - x_i^2),$$

onde $\bar{\sigma} = \max_{\{x | x_i^2 \leq K_i, i = \overline{1, n}\}} P(x)$ e seja $b = (0, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Consideremos $\beta \in (0, (3 - \sqrt{5})/2)$ e $\gamma > 0$ tal que $\gamma \leq \frac{\sqrt{\beta}}{1 + \sqrt{\beta}} - \beta$. O Método de Ponto Interior é apresentado na Tabela 1 (ver [21]).

Inicialização: Tome $\alpha_0 = 0$. Escolha uma precisão $\varepsilon > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|\nabla(F)(x_0, \sigma_0)\|_{(x_0, \sigma_0)}^F \leq \beta.$$

Passo k : Faça

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \frac{\gamma}{\|b\|_{(x_k, \sigma_k)}^F},$$

$$(x_{k+1}, \sigma_{k+1}) = (x_k, \sigma_k) - [\nabla^2(F)(x_k, \sigma_k)]^{-1}(\alpha_{k+1}b + \nabla(F)(x_k, \sigma_k)).$$

Pare o processo se

$$n + 1 + \frac{(\beta + \sqrt{n+1})\beta}{1 - \beta} \leq \varepsilon\alpha_k.$$

Tabela 1: Método de ponto interior

Para encontrar um ponto inicial que satisfaça $\|\nabla(F)(x_0, \sigma_0)\|_{(x_0, \sigma_0)}^F \leq \beta$ podemos usar um método auxiliar apresentado em [21].

Seja \mathcal{N} o maior inteiro satisfazendo

$$\mathcal{N} \leq \frac{\ln \left(\frac{(1 + \beta)(n + 1) + (\beta + \sqrt{n+1})\beta}{\gamma(1 - 2\beta)\varepsilon} \|b\|_{(\tilde{x}, \tilde{\sigma})}^F \right)}{\ln \left(1 + \frac{\gamma}{\beta + \sqrt{n+1}} \right)} + 1,$$

onde $(\tilde{x}, \tilde{\sigma}) = \operatorname{argmin}(F)$.

Teorema 2.10 ([21]). *O Método de Ponto Interior termina em não mais do que \mathcal{N} passos. No momento final, obtemos $|P(x_{\mathcal{N}}) - P(\hat{x})| < \varepsilon$, onde \hat{x} é a solução do problema (12).*

3 Estimativas explícitas para a Constante de Lipschitz

O estudo da regularidade da solução de problemas de otimização é de fundamental importância. Em particular, a regularidade Lipschitziana permite-nos determinar uma classe de problemas onde o fenómeno de Lavrientiev não ocorre, permitindo-nos garantir que a solução do problema pode ser bem aproximada usando problemas de dimensão finita.

Nesta secção, estabelecemos estimativas explícitas para a constante de Lipschitz de um problema de cálculo das variações (Teorema 3.8.) e para um problema de Lagrange com ponto final livre (Teorema 3.13.) usando apenas os dados do problema. Com base nessas estimativas, derivamos um limite para a complexidade do método de ponto interior aplicado a um problema de otimização convexo.

3.1 Problema de Lagrange

Estudaremos um problema de Lagrange da forma

$$\begin{aligned} \text{minimizar: } J(x, u) &= \int_0^1 L(t, x(t), u(t)) dt, \\ \text{sujeito a: } \dot{x}(t) &= g(t, x(t))u(t), \\ x(0) &= 0, \quad x(1) \in S, \end{aligned} \tag{13}$$

onde $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, g é uma matriz de dimensão $n \times m$, S é o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$, onde A é uma matriz de dimensão $k \times n$ e $b \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^k$. A condição $x(1) \in S$ pode ainda ser substituída por $x(1) = b$, fazendo as devidas alterações. Obtemos estimativas explícitas para a constante de Lipschitz em casos especiais deste problema:

1. Problema básico de cálculo das variações: $g(t, x) = 1$;
2. Problema de Lagrange com ponto final livre: $S = \mathbb{R}^n$.

Assumimos que as seguintes condições se verificam:

(C1) A função $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ é continuamente diferenciável e satisfaz a condição de super linearidade

$$L(t, x, u) \geq \theta(|u|) > 0, \text{ para todo } t, x, u,$$

onde $\lim_{r \rightarrow \infty} r/\theta(r) = 0$.

(C2) A função $L(t, x, \cdot)$ é estritamente convexa, isto é, existe uma constante $\mu > 0$ tal que

$$L(t, x, u) + \langle \nabla_u L(t, x, u), v - u \rangle + \frac{\mu}{2} |v - u|^2 \leq L(t, x, v), \text{ para todo } t, x, u, v.$$

(C3) Existem constantes $\xi > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$|\nabla_{(t,x)} L(t, x, u)| \leq \xi L(t, x, u) + \delta, \text{ para todo } t, x, u.$$

(C4) Existem constantes $c_g > 0$ e $c_{\nabla g} > 0$ tais que

$$|g(t, x)| \leq c_g, \quad |\nabla_{(t,x)} g(t, x)| \leq c_{\nabla g}, \text{ para todo } t, x.$$

Assumimos ainda que se verifica a condição:

(C5) Existem constantes $\xi > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$|\nabla_{(t,x)} L(t, x, u)| |u| \leq \xi L^2(t, x, u) + \delta, \text{ para todo } t, x, u.$$

De facto, a condição (C5) é uma consequência das condições (C1) e (C3). Vejamos que, existe $r_0 > 1$ tal que $|u| \leq \theta(|u|)$ sempre que $|u| > r_0$. Sejam ξ_1 e δ_1 as constantes relativas à condição (C3). Sem perda de generalidade, assumimos que $\xi_1 > 1$ e $\delta_1 > 1$. Para $|u| \geq r_0$, temos

$$\begin{aligned} |\nabla_{(t,x)} L(t, x, u)| |u| &\leq (\xi_1 L(t, x, u) + \delta_1) \theta(|u|) \\ &\leq (\xi_1 L(t, x, u) + \delta_1) L(t, x, u) \\ &\leq (\xi_1 L(t, x, u) + \delta_1)^2 \\ &\leq 2\xi_1^2 L^2(t, x, u) + 2\delta_1^2. \end{aligned}$$

Se $|u| < r_0$ e $L(t, x, u) \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} |\nabla_{(t,x)} L(t, x, u)| |u| &\leq (\xi_1 L(t, x, u) + \delta_1) r_0 \\ &\leq (\xi_1 L^2(t, x, u) + \delta_1) r_0. \end{aligned}$$

Finalmente, se $|u| < r_0$ e $L(t, x, u) < 1$, temos

$$\begin{aligned} |\nabla_{(t,x)} L(t, x, u)| |u| &\leq (\xi_1 L(t, x, u) + \delta_1) r_0 \\ &\leq (\xi_1 + \delta_1) r_0 \\ &\leq (L^2(t, x, u) + 1)(\xi_1 + \delta_1) r_0. \end{aligned}$$

Assim, basta tomarmos $\xi = \max\{1, 2\xi_1^2, (\xi_1 + \delta_1)r_0\}$ e $\delta = \max\{1, 2\delta_1^2, (\xi_1 + \delta_1)r_0\}$.

Pelas condições (C1) e (C2), podemos concluir que o problema (13) tem uma solução $\hat{x} \in AC([0, 1], \mathbb{R}^n)$. Dado $(\check{x}, \check{u}) \in AC([0, 1], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([0, 1], \mathbb{R}^n)$ um processo admissível do problema (13) e $r_0 > 0$ tal que $r/\theta(r) \leq 1$, sempre que $r > r_0$, consideramos $c = r_0 + \int_0^1 L(t, \check{x}(t), \check{u}(t)) dt$. Então, dado $M = \{t \in [0, 1] \mid |\hat{u}(t)| \leq \theta(|\hat{u}(t)|)\}$, temos

$$\begin{aligned} c &\geq r_0 + \int_0^1 L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt > \int_{[0,1] \setminus M} r_0 dt + \int_M L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt \\ &\geq \int_{[0,1] \setminus M} r_0 dt + \int_M \theta(|\hat{u}(t)|) dt \geq \int_0^1 |\hat{u}(t)| dt, \end{aligned} \quad (14)$$

uma vez que, para $t \in [0, 1] \setminus M$, temos $r_0 > |\hat{u}(t)|$. Assim, podemos concluir que

$$|\hat{x}(t)| < c_g c, \quad t \in [0, 1].$$

Consideremos $\Omega = [0, 1] \times c_g c B_n$, onde B_n representa a bola aberta unitária de dimensão n .

3.2 Equivalência com o problema de tempo ótimo

O estudo deste problema será feito usando, tal como sugere Gamkrelidze (ver [12, Sec. 8]), a equivalência entre (13) e um problema de tempo ótimo, obtido através da introdução de uma nova variável τ , definida por

$$\tau(\kappa) = \int_0^\kappa L(s, x(s), u(s)) ds.$$

Notemos que τ é absolutamente contínua e monótona, uma vez que, de acordo com a condição (C1), L é estritamente positiva. Assim, a sua inversa, $\kappa(\tau)$, está definida e temos

$$\frac{d\kappa}{d\tau} = \frac{1}{L(\kappa(\tau), x(\kappa(\tau)), u(\kappa(\tau)))}.$$

Usando as variáveis $y(\tau) = x(\kappa(\tau))$ e $w(\tau) = u(\kappa(\tau))$, obtemos o problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar: } T, \\ &\text{sujeito a: } \frac{d(\kappa, y)}{d\tau}(\tau) = \frac{(1, g(\kappa(\tau), y(\tau))w(\tau))}{L(\kappa(\tau), y(\tau), w(\tau))}, \\ &(\kappa, y)(0) = (0, 0) \quad (\kappa, y)(T) \in (1, S). \end{aligned} \tag{15}$$

A equivalência entre os problemas (13) e (15) é garantida pelo teorema seguinte.

Proposição 3.1. *As afirmações seguintes são válidas:*

1. *Para cada processo admissível (x, u) do problema (13), existe um processo admissível (κ, y, w) do problema (15) tal que $y(T) = x(1)$ e*

$$T = \int_0^1 L(t, x(t), u(t))dt.$$

2. *Para cada processo admissível (κ, y, w) do problema (15), existe um processo admissível (x, u) do problema (13) tal que $x(1) = y(T)$ e*

$$T = \int_0^1 L(t, x(t), u(t))dt.$$

Demonstração. Seja (x, u) um processo admissível do problema (13) e $T = \int_0^1 L(t, x(t), u(t))dt$.

Sejam κ a inversa da função τ , definida por

$$\tau(\kappa) = \int_0^\kappa L(s, x(s), u(s))ds, \quad \kappa \in [0, 1].$$

A função κ é crescente e verifica $\kappa(0) = 0$ e $\kappa(T) = 1$. Consideremos ainda y e w as funções definidas por $y(\tau) = x(\kappa(\tau))$ e $w(\tau) = u(\kappa(\tau))$. Temos $y(0) = x(0) = 0$ e $y(T) = x(1) \in S$.

Além disso, as funções κ e y ainda verificam

$$\frac{d\kappa}{d\tau}(\tau) = \frac{1}{L(\kappa(\tau), x(\kappa(\tau)), u(\kappa(\tau)))} = \frac{1}{L(\kappa(\tau), y(\tau), w(\tau))}$$

e

$$\frac{dy}{d\tau}(\tau) = \frac{dx(\kappa)}{d\tau}(\tau) = \dot{x}(\kappa(\tau)) \frac{d\kappa}{d\tau}(\tau) = \frac{g(\kappa(\tau), y(\tau))w(\tau)}{L(\kappa(\tau), y(\tau), w(\tau))}.$$

Logo, (κ, y, w) é um processo admissível do problema (15).

Consideremos agora (κ, y, w) , um processo admissível do problema (15). Consideremos a função (x, u) definida por $(x, u)(\kappa(\tau)) = (y, w)(\tau)$. A função (x, u) está bem definida, uma vez que κ é monótona e absolutamente contínua. Temos $x(0) = x(\kappa(0)) = y(0) = 0$ e $x(1) = x(\kappa(T)) = y(T) \in S$. Além disso, da igualdade

$$\frac{dy}{d\tau} = \dot{x}(\kappa(\tau)) \frac{d\kappa}{d\tau}$$

temos $\dot{x}(t) = g(t, x(t))u(t)$. Logo, (x, u) é um processo admissível do problema (13). Além disso, temos

$$\int_0^1 L(t, x(t), u(t))dt = \int_0^T L(\kappa(\tau), x(\kappa(\tau)), u(\kappa(\tau))) \frac{d\kappa}{d\tau} d\tau = \int_0^T d\tau = T.$$

□

Seja β uma constante que verifica a condição $\beta > \delta/\xi$, onde δ e ξ são as constantes da condição (C3). Consideremos a função multívoca G definida por

$$G(\kappa, y) = \left\{ (v, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid v = \frac{\rho}{L(\kappa, y, w) + \beta}, \eta = \frac{\rho g(\kappa, y)w}{L(\kappa, y, w) + \beta}, w \in \mathbb{R}^n, \rho \in [0, 1] \right\}.$$

Proposição 3.2. *A função G assume valores convexos e compactos.*

Demonstração. Sejam $(v_i, \eta_i) \in G(\kappa, y)$, $i = 1, 2$. Existem $\rho_i \in [0, 1]$ e $w_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, tais que

$$v_i = \frac{\rho_i}{L(\kappa, y, w_i) + \beta}, \quad \eta_i = \frac{\rho_i g(\kappa, y)w_i}{L(\kappa, y, w_i) + \beta}, \quad i = 1, 2.$$

Vamos mostrar que, dados α_1, α_2 não negativos tais que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, se tem $\alpha_1(v_1, \eta_1) + \alpha_2(v_2, \eta_2) \in G(\kappa, y)$. Sejam

$$\alpha'_1 = \frac{\alpha_1 \rho_1}{L(\kappa, y, w_1) + \beta} \left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{L(\kappa, y, w_1) + \beta} + \frac{\alpha_2 \rho_2}{L(\kappa, y, w_2) + \beta} \right)^{-1}$$

e

$$\alpha'_2 = \frac{\alpha_2 \rho_2}{L(\kappa, y, w_2) + \beta} \left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{L(\kappa, y, w_1) + \beta} + \frac{\alpha_2 \rho_2}{L(\kappa, y, w_2) + \beta} \right)^{-1}.$$

Obviamente $\alpha'_1, \alpha'_2 \geq 0$ e $\alpha'_1 + \alpha'_2 = 1$. Tome-se $w = \alpha'_1 w_1 + \alpha'_2 w_2$. Considerando

$$\rho = \left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{L(\kappa, y, w_1) + \beta} + \frac{\alpha_2 \rho_2}{L(\kappa, y, w_2) + \beta} \right) (L(\kappa, y, w) + \beta),$$

obtemos

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \frac{\alpha_1 \rho_1}{L(\kappa, y, w_1) + \beta} + \frac{\alpha_2 \rho_2}{L(\kappa, y, w_2) + \beta} = \frac{\rho}{L(\kappa, y, w) + \beta}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2 &= \frac{\alpha_1 \rho_1 g(\kappa, y) w_1}{L(\kappa, y, w_1) + \beta} + \frac{\alpha_2 \rho_2 g(\kappa, y) w_2}{L(\kappa, y, w_2) + \beta} \\ &= \left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{L(\kappa, y, w_1) + \beta} + \frac{\alpha_2 \rho_2}{L(\kappa, y, w_2) + \beta} \right) g(\kappa, y) (\alpha'_1 w_1 + \alpha'_2 w_2) \\ &= \left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{L(\kappa, y, w_1) + \beta} + \frac{\alpha_2 \rho_2}{L(\kappa, y, w_2) + \beta} \right) g(\kappa, y) w \\ &= \frac{\rho g(\kappa, y) w}{L(\kappa, y, w) + \beta}. \end{aligned}$$

Assim, para mostrar que $G(\kappa, y)$ é convexo, basta mostrar que $\rho \in [0, 1]$. Ora, uma vez que L é convexa, temos $L(\kappa, y, w) \leq \alpha'_1 L(\kappa, y, w_1) + \alpha'_2 L(\kappa, y, w_2)$ e, assim,

$$\begin{aligned} \rho &= \left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{L(\kappa, y, w_1) + \beta} + \frac{\alpha_2 \rho_2}{L(\kappa, y, w_2) + \beta} \right) (L(\kappa, y, w) + \beta) \\ &\leq \left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{L(\kappa, y, w_1) + \beta} + \frac{\alpha_2 \rho_2}{L(\kappa, y, w_2) + \beta} \right) (\alpha'_1 L(\kappa, y, w_1) + \alpha'_2 L(\kappa, y, w_2) + \beta) \\ &= \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 \\ &\leq \alpha_1 + \alpha_2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto $G(\kappa, y)$ é convexo.

Vamos agora mostrar que $G(\kappa, y)$ é compacto. Da condição (C1) temos

$$|v| \leq \frac{1}{\theta(|w|) + \beta}, \quad |\eta| \leq \frac{c_g |w|}{\theta(|w|) + \beta}, \quad \forall (v, \eta) \in G(t, y). \quad (16)$$

Seja

$$(v_k, \eta_k) = \left(\frac{\rho_k}{L(\kappa, y, w_k) + \beta}, \frac{\rho_k g(\kappa, y) w_k}{L(\kappa, y, w_k) + \beta} \right),$$

onde $w_k \in R^n$ e $\rho_k \in [0, 1]$, uma sucessão em $G(\kappa, y)$ convergente para um ponto (v_0, η_0) . Se a sucessão w_k é limitada, então a sucessão (w_k, ρ_k) tem uma subsucessão convergente. Passando ao limite, temos $(v_0, \eta_0) \in G(\kappa, y)$. Por outro lado, se w_k não é limitada, então tem uma subsucessão que converge para infinito. Das desigualdades (16), concluímos que (v_k, η_k) converge para $(0, 0)$. Logo, $(v_0, \eta_0) = (0, 0) \in G(\kappa, y)$. Portanto $G(\kappa, y)$ é um conjunto fechado. Também de (16) concluímos que $G(\kappa, y)$ é limitado. \square

Suponhamos que se verificam (C3) ou (C5).

Proposição 3.3. *A função G é Lipschitziana no conjunto Ω .*

Demonstração. Sejam (κ_1, y_1) e (κ_2, y_2) dois pontos em Ω . Dado o ponto

$$(v_1, \eta_1) = \frac{(\rho, \rho g(\kappa_1, y_1)w)}{L(\kappa_1, y_1, w) + \beta} \in G(\kappa_1, y_1),$$

consideremos o ponto

$$(v_2, \eta_2) = \frac{(\rho, \rho g(\kappa_2, y_2)w)}{L(\kappa_2, y_2, w) + \beta} \in G(\kappa_2, y_2).$$

Uma vez que $\beta > \delta/\xi$, da condição (C3) ou (C5) temos

$$\begin{aligned} |v_1 - v_2| &\leq \max_{\lambda \in [0,1]} \left| \nabla_{(t,x)} \frac{1}{L(\lambda\kappa_1 + (1-\lambda)\kappa_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2, w) + \beta} \right| (|\kappa_1 - \kappa_2| + |y_1 - y_2|) \\ &= \max_{\lambda \in [0,1]} \frac{|\nabla_{(t,x)} L(\lambda\kappa_1 + (1-\lambda)\kappa_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2, w)|}{(L(\lambda\kappa_1 + (1-\lambda)\kappa_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2, w) + \beta)^2} (|\kappa_1 - \kappa_2| + |y_1 - y_2|) \\ &\leq \frac{\xi}{\beta} (|\kappa_1 - \kappa_2| + |y_1 - y_2|) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\eta_1 - \eta_2| &\leq \max_{\lambda \in [0,1]} \left| \nabla_{(t,x)} \frac{g(\lambda\kappa_1 + (1-\lambda)\kappa_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)w}{L(\lambda\kappa_1 + (1-\lambda)\kappa_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2, w) + \beta} \right| (|\kappa_1 - \kappa_2| + |y_1 - y_2|) \\ &\leq \left(\zeta c_{\nabla g} + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \xi c_g \right) (|\kappa_1 - \kappa_2| + |y_1 - y_2|), \end{aligned}$$

onde

$$\zeta = \sup_{r>0} \frac{r}{\theta(r) + \beta},$$

portanto, G é Lipschitziana no conjunto Ω . \square

Seja (\hat{x}, \hat{u}) uma solução do problema (13). Pela primeira parte da Proposição 3.1., existe um processo $(\hat{\kappa}, \hat{y}, \hat{w})(\tau), \tau \in [0, \hat{T}]$, do problema

$$\frac{d(\kappa, y)}{d\tau}(\tau) = \frac{(1, g(\kappa(\tau), y(\tau))w(\tau))}{L(\kappa(\tau), y(\tau), w(\tau))},$$

tal que $(\hat{\kappa}, \hat{y})(0) = (0, 0), (\hat{\kappa}, \hat{y})(\hat{T}) \in (1, S)$ e

$$\hat{T} = \int_0^1 (L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \beta) dt.$$

Consideremos

$$\Lambda_0 = \sup_{(t,x) \in \Omega} L(t, x, 0),$$

$$\Lambda_1 = \sup_{(t,x) \in \Omega} |\nabla_u L(t, x, 0)|$$

e

$$\sigma(r) = \sup_{(t,x) \in \Omega, |u| \leq r} (\langle \nabla_u L(t, x, u), u \rangle - L(t, x, u)).$$

A proposição que se segue é uma consequência imediata da condição (C2).

Proposição 3.4. *A desigualdade*

$$-\Lambda_0 - \Lambda_1|u| + \frac{\mu}{2}|u|^2 \leq L(t, x, u), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (17)$$

verifica-se. A função $\sigma(r)$ tende a infinito quando $r \rightarrow \infty$.

Demonstração. A desigualdade (17) é uma consequência de

$$L(t, x, 0) + \langle \nabla_u L(t, x, 0), u \rangle + \frac{\mu}{2}|u|^2 \leq L(t, x, u).$$

Além disso, pela condição (C2) temos

$$L(t, x, u) - \langle \nabla_u L(t, x, u), u \rangle + \frac{\mu}{2}|u|^2 \leq L(t, x, 0).$$

Portanto,

$$\frac{\mu}{2}r^2 - \Lambda_0 \leq \sigma(r).$$

□

Seja $\alpha > 0$. Pela segunda parte da Proposição 3.4. existe $0 < T_0 \leq 1$ tal que $\beta = \sigma((c + \alpha)/T_0) > \delta/\xi$. Consideremos

$$\eta = \sup_{r>0} \frac{r}{\theta(r) + \beta},$$

$$\bar{\gamma} = e^{(c\nabla_g + c_g\xi)\eta(c+T_0\beta)} \quad (18)$$

e

$$\Lambda_2 = \sup_{(t,x) \in \Omega, |u| = \bar{\gamma} + \alpha} L(t, x, u).$$

Seja $\varrho > 0$ tal que

$$\frac{r}{\max\{\theta(r), \frac{\mu}{2}r^2 - \Lambda_1 r - \Lambda_0\} + \beta} < \frac{\alpha}{\Lambda_2 + \beta}, \quad (19)$$

sempre que $r > \varrho$.

No que se segue, usaremos a notação $\hat{L}(\tau)$ para representar $L(\hat{\kappa}(\tau), \hat{y}(\tau), \hat{w}(\tau))$ e $\hat{g}(\tau)$ para representar $g(\hat{\kappa}(\tau), \hat{y}(\tau))$.

3.3 Problema de cálculo das variações: $g(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = 1$

Nesta subsecção, estudaremos o problema de cálculo das variações

$$\text{minimizar: } J(x, \dot{x}) = \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad (20)$$

$$\text{sujeito a: } x(0) = 0, \quad x(1) \in S,$$

Seja \hat{x} uma solução do problema (20). Consideremos $\hat{\kappa}$ a função inversa de $\tau(\kappa) = \int_0^\kappa L(s, \hat{x}(s), \dot{\hat{x}}(s)) ds$ e \hat{y} e \hat{w} as funções definidas por $\hat{y}(\tau) = \hat{x}(\hat{\kappa}(\tau))$ e $\hat{w}(\tau) = \dot{\hat{x}}(\hat{\kappa}(\tau))$, respetivamente.

Suponhamos que as condições (C1)-(C4) se verificam.

Proposição 3.5. *Existe uma função não nula $(q, p) \in AC([0, \hat{T}], \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\frac{dq}{d\tau}(\tau) = \frac{(q(\tau) + \langle \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle) \hat{L}_t(\tau)}{(\hat{L}(\tau) + \beta)^2}, \quad (21)$$

$$\frac{dp}{d\tau}(\tau) = \frac{(q(\tau) + \langle \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle) \nabla_x \hat{L}(\tau)}{(\hat{L}(\tau) + \beta)^2}, \quad (22)$$

$$\frac{p(\tau)}{\hat{L}(\tau) + \beta} - \frac{(q(\tau) + \langle \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle) \nabla_u \hat{L}(\tau)}{(\hat{L}(\tau) + \beta)^2} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{q(\tau) + \langle \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle}{\hat{L}(\tau) + \beta} \equiv h > 0. \quad (24)$$

Demonstração. Da segunda parte da Proposição 3.1., podemos concluir que $(\hat{\kappa}, \hat{y}, \hat{w})$ é uma solução do problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar: } T, \\ &\text{sujeito a: } \frac{d(\kappa, y)}{d\tau}(\tau) = \frac{(1, w(\tau))}{L(\kappa(\tau), y(\tau), w(\tau)) + \beta}, \\ &(\kappa, y)(0) = (0, 0) \quad (\kappa, y)(T) \in (1, S). \end{aligned} \quad (25)$$

O problema de tempo ótimo

$$\begin{aligned} &\text{minimizar: } T, \\ &\text{sujeito a: } \frac{d(\kappa, y)}{d\tau}(\tau) \in G(\kappa, y), \\ &(\kappa, y)(0) = (0, 0) \quad (\kappa, y)(T) \in (1, S). \end{aligned} \quad (26)$$

também tem uma solução $(\tilde{\kappa}, \tilde{y})$. O Lema de Filippov garante-nos que existe uma função mensurável $(\tilde{\rho}, \tilde{w})$ tal que

$$\frac{d(\tilde{\kappa}, \tilde{y})}{d\tau}(\tau) = \frac{\tilde{\rho}(\tau)(1, \tilde{w}(\tau))}{L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau)) + \beta}.$$

Aplicando as Proposições 2.3.-2.5., podemos ver que existem $(q, p) \in AC([0, \tilde{T}], \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, uma

função não nula, e uma constante $h \geq 0$ tais que

$$\frac{dq}{d\tau}(\tau) = \frac{\tilde{\rho}(\tau)(q(\tau) + \langle \tilde{w}(\tau), p(\tau) \rangle) L_t(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau))}{(L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau)) + \beta)^2}, \quad (27)$$

$$\frac{dp}{d\tau}(\tau) = \frac{\tilde{\rho}(\tau)(q(\tau) + \langle \tilde{w}(\tau), p(\tau) \rangle) \nabla_x L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau))}{(L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau)) + \beta)^2}, \quad (28)$$

$$h \equiv \frac{\tilde{\rho}(\tau)(q(\tau) + \langle \tilde{w}(\tau), p(\tau) \rangle)}{L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau)) + \beta} \geq \frac{\rho(q(\tau) + \langle w, p(\tau) \rangle)}{L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), w) + \beta} \quad \rho \in [0, 1], \quad w \in R^n. \quad (29)$$

Da condição de máximo (29), temos

$$\frac{\tilde{\rho}(\tau)p(\tau)}{L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau)) + \beta} - \frac{\tilde{\rho}(\tau)(q(\tau) + \langle \tilde{w}(\tau), p(\tau) \rangle) \nabla_u L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau))}{(L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau)) + \beta)^2} = 0. \quad (30)$$

Se $d(\tilde{\kappa}, \tilde{y})/d\tau = (0, 0)$ num conjunto de medida não nula, então $h = 0$. Nos pontos onde $\tilde{\rho}(\tau) > 0$, como $q(\tau) + \langle \tilde{w}(\tau), p(\tau) \rangle = 0$, da condição (30), obtemos $p(\tau) = 0$ e, por conseguinte, $q(\tau) = 0$, o que é uma contradição. Logo, $\tilde{\rho} = 0$ em quase toda a parte, o que é impossível. Assim, $d(\tilde{\kappa}, \tilde{y})/d\tau \neq (0, 0)$, em quase todos os pontos $\tau \in [0, \tilde{T}]$. Portanto, as condições (27)-(29) são satisfeitas e $\tilde{\rho}(\tau) > 0$ em quase todos os pontos $\tau \in [0, \tilde{T}]$. Logo, $h > 0$, uma vez que a igualdade $h = 0$ implica, como acima, $(q, p) \equiv 0$. De (29) obtemos $\tilde{\rho} \equiv 1$. Assim, podemos identificar as trajetórias $(\hat{\kappa}, \hat{y})(\cdot)$ e $(\tilde{\kappa}, \tilde{y})(\cdot)$. Ambas são solução do problema de tempo ótimo (26) e satisfazem as condições de otimalidade (27)-(30) com $\tilde{\rho} = 1$. \square

Proposição 3.6. Se $q(\tau) \leq 0$, então $|\hat{w}(\tau)| \geq (c + \alpha)/T_0$.

Demonstração. Multiplicando (23) por $\hat{w}(\tau)$, obtemos

$$(\hat{L}(\tau) + \beta) \langle \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle = (q(\tau) + \langle \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle) \langle \nabla_u \hat{L}(\tau), \hat{w}(\tau) \rangle. \quad (31)$$

Uma vez que $q(\tau) \leq 0$, por (24), temos $\langle \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle > 0$. De (31), temos

$$\langle \nabla_u \hat{L}(\tau), \hat{w}(\tau) \rangle = \frac{\langle \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle}{q(\tau) + \langle \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle} (\hat{L}(\tau) + \beta) \geq \hat{L}(\tau) + \beta$$

e, portanto,

$$\beta \leq \langle \nabla_u \hat{L}(\tau), \hat{w}(\tau) \rangle - \hat{L}(\tau) \leq \sigma(|\hat{w}(\tau)|).$$

Assim, obtemos

$$|\hat{w}(\tau)| \geq \sigma^{-1}(\beta) = \sigma^{-1}\left(\sigma\left(\frac{c+\alpha}{T_0}\right)\right) = \frac{c+\alpha}{T_0}.$$

□

Proposição 3.7. Se $q(\tau_1) = 0$ e $q(\tau) < 0$, $\tau \in]\tau_1, \tau_2]$, então $|q(\tau)|/|p(\tau)| \leq \bar{\gamma}$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$.

Demonstração. Uma vez que $q(\tau) < 0$, $\tau \in]\tau_1, \tau_2]$, temos

$$\frac{q(\tau) + \langle \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle}{|p(\tau)|(\hat{L}(\tau) + \beta)} \leq \frac{|\hat{w}(\tau)|}{\theta(|\hat{w}(\tau)|) + \beta} \leq \eta.$$

Da desigualdade anterior, de (21) e da condição (C3), temos

$$\left| \frac{dq(\tau)}{d\tau} \right| \leq \frac{(q(\tau) + \langle \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle)|\hat{L}_t(\tau)|}{(\hat{L}(\tau) + \beta)^2} \leq \eta|p(\tau)| \frac{|\hat{L}_t(\tau)|}{\hat{L}(\tau) + \beta} \leq \eta\xi|p(\tau)|,$$

sempre que $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$. De modo análogo, temos

$$\left| \frac{dp(\tau)}{d\tau} \right| \leq \xi\eta|p(\tau)|.$$

Daqui, obtemos

$$\frac{d}{d\tau} \frac{|q(\tau)|}{|p(\tau)|} \leq \frac{|dq(\tau)/d\tau||p(\tau)| + |q(\tau)||dp(\tau)/d\tau|}{|p(\tau)|^2} \leq \xi\eta \left(1 + \frac{|q(\tau)|}{|p(\tau)|} \right).$$

Uma vez que $q(\tau_1) = 0$, aplicando o Lema de Gronwall, temos

$$\frac{|q(\tau)|}{|p(\tau)|} \leq e^{\xi\eta(\tau_2 - \tau_1)} - 1. \quad (32)$$

Note-se que

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{\hat{\kappa}(\tau_1)}^{\hat{\kappa}(\tau_2)} (L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \beta) dt \leq c + (\hat{\kappa}(\tau_2) - \hat{\kappa}(\tau_1))\beta,$$

e $\hat{\kappa}(\tau_2) - \hat{\kappa}(\tau_1) \leq T_0$. De facto, uma vez que $q(\tau) \leq 0$ no intervalo $[\tau_1, \tau_2]$ e $t \in [\hat{\kappa}(\tau_1), \hat{\kappa}(\tau_2)]$, pela Proposição 3.6. temos

$$|\hat{u}(t)| = |\hat{w}(\hat{\tau}(t))| \geq \frac{c+\alpha}{T_0} \geq c + \alpha.$$

Assim, a desigualdade $\hat{\kappa}(\tau_2) - \hat{\kappa}(\tau_1) > T_0$ contradiz (14). Logo, $\tau_2 - \tau_1 \leq c + T_0\beta$. Combinando isto com as condições (32) e (18), obtemos o resultado. □

Teorema 3.8. *A desigualdade*

$$|\dot{\hat{x}}(t)| \leq \ell = \max \left\{ \varrho, \sqrt{\frac{2}{\mu}} (\Lambda_0 + \beta), \frac{\Lambda_1 + \sqrt{\Lambda_1^2 + 8\mu\Lambda_0}}{2\mu} \right\}$$

verifica-se para quase todo $t \in [0, 1]$.

Demonstração. Consideremos $\tau \in [0, \hat{T}]$ de tal forma que $q(\tau) \geq 0$. Da condição (C2), temos

$$\hat{L}(\tau) - \langle \nabla_u \hat{L}(\tau), \hat{w}(\tau) \rangle + \frac{\mu}{2} |\hat{w}(\tau)|^2 \leq \Lambda_0.$$

Daqui e da igualdade (31), obtemos

$$\frac{\mu}{2} |\hat{w}(\tau)|^2 \leq \Lambda_0 - \hat{L}(\tau) + \langle \nabla_u \hat{L}(\tau), \hat{w}(\tau) \rangle = \Lambda_0 - \hat{L}(\tau) + \frac{\langle \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle}{q(\tau) + \langle \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle} (\hat{L}(\tau) + \beta).$$

Se $\langle \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle > 0$, então concluímos

$$\frac{\mu}{2} |\hat{w}(\tau)|^2 \leq \Lambda_0 - \hat{L}(\tau) + \hat{L}(\tau) + \beta = \Lambda_0 + \beta$$

e, portanto,

$$|\hat{w}(\tau)| \leq \sqrt{\frac{2}{\mu}} (\Lambda_0 + \beta). \quad (33)$$

Se $\langle \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle \leq 0$, então, pela Proposição 3.4., temos

$$\frac{\mu}{2} |\hat{w}(\tau)|^2 \leq \Lambda_0 - \hat{L}(\tau) \leq 2\Lambda_0 + \Lambda_1 |\hat{w}(\tau)| - \frac{\mu}{2} |\hat{w}(\tau)|^2$$

e, portanto, obtemos

$$|\hat{w}(\tau)| \leq \frac{\Lambda_1 + \sqrt{\Lambda_1^2 + 8\mu\Lambda_0}}{2\mu}. \quad (34)$$

Consideremos agora $\tau \in [0, \hat{T}]$ tal que $q(\tau) < 0$. Note-se que a condição $q(\tau) < 0$, para todo $\tau \in [0, 1]$ é impossível, uma vez que, neste caso, pela Proposição 3.6., teríamos

$$|\hat{u}(t)| = |\hat{w}(\hat{\tau}(t))| \geq \frac{c + \alpha}{T_0} \geq c + \alpha,$$

o que contradiz a desigualdade (14). Uma vez que $q(\tau) < 0$, pela Proposição 3.7., $q(\tau) > -\bar{\gamma}|p(\tau)|$. Pelo princípio de máximo (23), temos

$$\begin{aligned} \frac{q(\tau) + \langle \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle}{\hat{L}(\tau) + \beta} &\geq \frac{q(\tau) + (\bar{\gamma} + \alpha) \langle p(\tau)/|p(\tau)|, p(\tau) \rangle}{L(\hat{\kappa}(\tau), \hat{y}(\tau), (\bar{\gamma} + \alpha)p(\tau)/|p(\tau)|) + \beta} \\ &\geq \frac{\alpha|p(\tau)|}{L(\hat{\kappa}(\tau), \hat{y}(\tau), (\bar{\gamma} + \alpha)p(\tau)/|p(\tau)|) + \beta} \geq \frac{\alpha|p(\tau)|}{\Lambda_2 + \beta}. \end{aligned} \quad (35)$$

Uma vez que $\varrho > 0$ é um número tal que, para todo $r > \varrho$ a condição (19) se verifica, se tivermos $|w| > \varrho$, então, pela condição (C1) e pela Proposição 3.4., obtemos

$$\frac{q(\tau) + \langle w, p(\tau) \rangle}{L(\hat{t}(\tau), \hat{y}(\tau), w) + \beta} \leq \frac{|w||p(\tau)|}{\max\{\theta(|w|), \frac{\mu}{2}|w|^2 - \Lambda_1|w| - \Lambda_0\} + \beta} < \frac{\alpha|p(\tau)|}{\Lambda_2 + \beta}.$$

Ora, pela desigualdade (35), podemos ver que $w \neq \hat{w}(\tau)$. Portanto, $|\hat{w}(\tau)| \leq \varrho$. Combinando isto com as desigualdades (33) e (34), obtemos o resultado. \square

Corolário 3.9. *Se L não depende da variável t , então*

$$|\dot{x}(t)| \leq \ell = \max \left\{ \sqrt{\frac{2}{\mu}(\Lambda_0 + \beta)}, \frac{\Lambda_1 + \sqrt{\Lambda_1^2 + 8\mu\Lambda_0}}{2\mu} \right\}$$

para quase todo $t \in [0, 1]$.

Demonstração. Uma vez que L não depende da variável t , da condição (21), temos $dq/d\tau = 0$. Logo, q é constante. Como vimos anteriormente, não é possível ter $q < 0$. Logo, $q \geq 0$. Assim, a prova deste Corolário coincide com a prova do Teorema 3.8., para $q \geq 0$. \square

Exemplo 3.1. *Seja $\omega \geq 1/2$. Consideremos o problema*

$$\begin{aligned} \text{minimizar: } & \int_0^1 \left(\dot{x}^2(t) + \frac{1}{4} \right) dt, \\ \text{sujeito a: } & x(0) = 0, \quad x(1) = \omega, \end{aligned} \tag{36}$$

cuja trajetória ótima é $\hat{x}(t) = \omega t$. Tomando $\theta(r) = r^2 + 1/4$, temos $r_0 = 0$, uma vez que $\theta(r) \geq r$, para todo $r > 0$. A condição (C2) é satisfeita com $\mu = 2$ e as condições (C3) e (C5) são satisfeitas para quaisquer valores de ξ e δ positivos. Usando \hat{x} como uma trajetória admissível, obtemos $c = \omega^2 + 1/4$. Temos ainda $\Lambda_0 = 1/4$, $\Lambda_1 = 0$ e $\sigma(r) = r^2 - 1/4$. Pondo $T_0 = 1$, temos $\beta = (\omega^2 + 1/4 + \alpha)^2 - 1/4$. Desta forma, a estimativa obtida pelo Corolário 3.9. é $\omega^2 + 1/4 + \alpha$. Para valores de α suficientemente pequenos, o erro cometido por esta estimativa é aproximadamente $\omega + 1/(4\omega) - 1$, sendo aproximadamente 0, quando $\omega = 1/2$.

3.4 Problema de Lagrange com $x(1)$ livre

Consideramos agora o problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar: } J(x, u) &= \int_0^1 L(t, x(t), u(t)) dt, \\ \text{sujeito a: } \dot{x}(t) &= g(t, x(t))u(t), \\ x(0) &= 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Seja (\hat{x}, \hat{u}) uma solução do problema (37). Consideremos $\hat{\kappa}$ a função inversa de $\tau(\kappa) = \int_0^\kappa L(s, \hat{x}(s), \hat{u}(s)) ds$ e \hat{y} e \hat{w} as funções definidas por $\hat{y}(\tau) = \hat{x}(\hat{\kappa}(\tau))$ e $\hat{w}(\tau) = \hat{u}(\hat{\kappa}(\tau))$, respetivamente.

Proposição 3.10. *Existe uma função não nula $(q, p) \in AC([0, \hat{T}], \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\frac{dq}{d\tau}(\tau) = -\frac{\langle \hat{g}_t(\tau) \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle}{\hat{L}(\tau) + \beta} + \frac{(q(\tau) + \langle \hat{g}(\tau) \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle) \hat{L}_t(\tau)}{(\hat{L}(\tau) + \beta)^2}, \tag{38}$$

$$\frac{dp}{d\tau}(\tau) = -\frac{\langle \nabla_x \hat{g}(\tau) \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle}{\hat{L}(\tau) + \beta} + \frac{(q(\tau) + \langle \hat{g}(\tau) \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle) \nabla_x \hat{L}(\tau)}{(\hat{L}(\tau) + \beta)^2}, \tag{39}$$

$$p(\hat{T}) = 0, \tag{40}$$

$$\frac{\hat{g}^*(\tau) p(\tau)}{\hat{L}(\tau) + \beta} - \frac{(q(\tau) + \langle \hat{g}(\tau) \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle) \nabla_u \hat{L}(\tau)}{(\hat{L}(\tau) + \beta)^2} = 0, \tag{41}$$

$$\frac{q(\tau) + \langle \hat{g}(\tau) \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle}{\hat{L}(\tau) + \beta} \equiv h > 0. \tag{42}$$

Demonstração. Da segunda parte da Proposição 3.1., podemos concluir que $(\hat{\kappa}, \hat{y}, \hat{w})$ é uma solução do problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar: } T, \\ \text{sujeito a: } \frac{d(\kappa, y)}{d\tau}(\tau) &= \frac{(1, g(\kappa(\tau), y(\tau))w(\tau))}{L(\kappa(\tau), y(\tau), w(\tau)) + \beta}, \\ (\kappa, y)(0) &= (0, 0) \quad \kappa(T) = 1. \end{aligned} \tag{43}$$

O problema de tempo ótimo

$$\begin{aligned} &\text{minimizar: } T, \\ &\text{sujeito a: } \frac{d(\kappa, y)}{d\tau}(\tau) \in G(\kappa, y), \\ &(\kappa, y)(0) = (0, 0) \quad \kappa(T) = 1. \end{aligned} \quad (44)$$

também tem uma solução $(\tilde{\kappa}, \tilde{y})$. O Lemma de Filippov garante-nos que existe uma função mensurável $(\tilde{\rho}, \tilde{w})$ tal que

$$\frac{d(\tilde{\kappa}, \tilde{y})(\tau)}{d\tau} = \frac{\tilde{\rho}(\tau)(1, g(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau))\tilde{w}(\tau))}{L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau)) + \beta}.$$

Aplicando as Proposições 2.3.-2.5., podemos ver que existem $(q, p) \in AC([0, \tilde{T}], R \times R^n)$, uma função não nula, e uma constante $h \geq 0$ tais que

$$\begin{aligned} \frac{dq}{d\tau}(\tau) = & -\frac{\tilde{\rho}(\tau)\langle g_t(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau))\tilde{w}(\tau), p(\tau) \rangle}{L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau)) + \beta} \\ & + \frac{\tilde{\rho}(\tau)(q(\tau) + \langle g(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau))\tilde{w}(\tau), p(\tau) \rangle)L_t(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau))}{(L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau)) + \beta)^2}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau}(\tau) = & -\frac{\tilde{\rho}(\tau)\langle \nabla_x g(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau))\tilde{w}(\tau), p(\tau) \rangle}{L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau)) + \beta} \\ & + \frac{\tilde{\rho}(\tau)(q(\tau) + \langle g(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau))\tilde{w}(\tau), p(\tau) \rangle)\nabla_x L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau))}{(L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau)) + \beta)^2}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$p(\tilde{T}) = 0, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} h \equiv & \frac{\tilde{\rho}(\tau)(q(\tau) + \langle g(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau))\tilde{w}(\tau), p(\tau) \rangle)}{L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau)) + \beta} \\ & \geq \frac{\rho(q(\tau) + \langle g(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau))w, p(\tau) \rangle)}{L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), w) + \beta} \quad \rho \in [0, 1], \quad w \in R^m. \end{aligned} \quad (48)$$

Da condição de máximo (48), temos

$$\begin{aligned} &\frac{\tilde{\rho}(\tau)g^*(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau))p(\tau)}{L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau)) + \beta} \\ & - \frac{\tilde{\rho}(\tau)(q(\tau) + \langle g(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau))\tilde{w}(\tau), p(\tau) \rangle)\nabla_u L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau))}{(L(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{w}(\tau)) + \beta)^2} = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Se $d(\tilde{\kappa}, \tilde{y})/d\tau = (0, 0)$ num conjunto de medida não nula, então $h = 0$. Nos pontos onde $\tilde{\rho}(\tau) > 0$, como $q(\tau) + \langle g(\tilde{\kappa}(\tau), \tilde{y}(\tau))\tilde{w}(\tau), p(\tau) \rangle = 0$, das condições (46) e (47), obtemos

$p(\tau) = 0$ e, por conseguinte, $q(\tau) = 0$, o que é uma contradição. Logo, $\tilde{\rho} = 0$ em quase toda a parte, o que é impossível. Assim, $d(\tilde{\kappa}, \tilde{y})/d\tau \neq (0, 0)$ em quase todos os pontos $\tau \in [0, \tilde{T}]$. Portanto, as condições (45)-(48) são satisfeitas e $\tilde{\rho}(\tau) > 0$ em quase todos os pontos $\tau \in [0, \tilde{T}]$. Logo, $h > 0$, uma vez que a igualdade $h = 0$ implica, como acima, $(q, p) \equiv 0$. De (48) obtemos $\tilde{\rho}(\tau) = 1$. Assim, podemos identificar as trajetórias $(\hat{\kappa}, \hat{y})(\cdot)$ e $(\tilde{\kappa}, \tilde{y})(\cdot)$. Ambas são solução do problema de tempo ótimo (44) e satisfazem as condições de otimalidade (45)-(49) com $\tilde{\rho} = 1$. \square

Proposição 3.11. *Se $q(\tau) \leq 0$, então $|\hat{w}(\tau)| \geq (c + \alpha)/T_0$.*

Demonstração. Multiplicando (23) por $\hat{w}(\tau)$, obtemos

$$(\hat{L}(\tau) + \beta)\langle \hat{g}(\tau)\hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle = (q(\tau) + \langle \hat{g}(\tau)\hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle)\langle \nabla_u \hat{L}(\tau), \hat{w}(\tau) \rangle. \quad (50)$$

Uma vez que $q(\tau) \leq 0$, por (24), temos $\langle \hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle > 0$. De (31), temos

$$\langle \nabla_u \hat{L}(\tau), \hat{w}(\tau) \rangle = \frac{\langle \hat{g}(\tau)\hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle}{q(\tau) + \langle \hat{g}(\tau)\hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle} (\hat{L}(\tau) + \beta) \geq \hat{L}(\tau) + \beta$$

e, portanto,

$$\beta \leq \langle \nabla_u \hat{L}(\tau), \hat{w}(\tau) \rangle - \hat{L}(\tau) \leq \sigma(|\hat{w}(\tau)|).$$

Assim, obtemos

$$|\hat{w}(\tau)| \geq \sigma^{-1}(\beta) = \sigma^{-1}\left(\sigma\left(\frac{c + \alpha}{T_0}\right)\right) = \frac{c + \alpha}{T_0}.$$

\square

Proposição 3.12. Se $q(\tau_1) = 0$ e $q(\tau) < 0$, $\tau \in]\tau_1, \tau_2]$, então $|q(\tau)|/|p(\tau)| \leq \bar{\gamma}$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$.

Demonstração. Uma vez que $q(\tau) < 0$, $\tau \in]\tau_1, \tau_2]$, temos

$$\frac{q(\tau) + \langle \hat{g}(\tau)\hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle}{|p(\tau)|(\hat{L}(\tau) + \beta)} \leq \frac{c_g|\hat{w}(\tau)|}{\theta(|\hat{w}(\tau)|) + \beta} \leq c_g\eta$$

e

$$\frac{|\langle \hat{g}_t(\tau)\hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle|}{|p(\tau)|(\hat{L}(\tau) + \beta)} \leq \frac{c_{\nabla g}|\hat{w}(\tau)|}{\theta(|\hat{w}(\tau)|) + \beta} \leq c_{\nabla g}\eta.$$

Das desigualdades anteriores, de (38) e da condição (C3), temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{dq(\tau)}{d\tau} \right| &\leq \frac{|\langle \hat{g}_t(\tau)\hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle|}{\hat{L}(\tau) + \beta} + \frac{(q(\tau) + \langle \hat{g}(\tau)\hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle)|\hat{L}_t(\tau)|}{(\hat{L}(\tau) + \beta)^2} \\ &\leq c_{\nabla g}\eta|p(\tau)| + c_g\eta|p(\tau)|\frac{|\hat{L}_t(\tau)|}{\hat{L}(\tau) + \beta} \\ &\leq (c_{\nabla g} + c_g\xi)\eta|p(\tau)|, \end{aligned}$$

sempre que $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$. De modo análogo, temos

$$\left| \frac{dp(\tau)}{d\tau} \right| \leq (c_{\nabla g} + c_g\xi)\eta|p(\tau)|.$$

Daqui, obtemos

$$\frac{d}{d\tau} \frac{|q(\tau)|}{|p(\tau)|} \leq \frac{|dq(\tau)/d\tau||p(\tau)| + |q(\tau)||dp(\tau)/d\tau|}{|p(\tau)|^2} \leq (c_{\nabla g} + c_g\xi)\eta \left(1 + \frac{|q(\tau)|}{|p(\tau)|} \right).$$

Uma vez que $q(\tau_1) = 0$, aplicando o Lema de Gronwall, temos

$$\frac{|q(\tau)|}{|p(\tau)|} \leq e^{(c_{\nabla g} + c_g\xi)\eta(\tau_2 - \tau_1)} - 1. \quad (51)$$

Note-se que

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{\hat{\kappa}(\tau_1)}^{\hat{\kappa}(\tau_2)} (L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \beta) dt \leq c + (\hat{\kappa}(\tau_2) - \hat{\kappa}(\tau_1))\beta,$$

e $\hat{\kappa}(\tau_2) - \hat{\kappa}(\tau_1) \leq T_0$. De facto, uma vez que $q(\tau) \leq 0$ no intervalo $[\tau_1, \tau_2]$ e $t \in [\hat{\kappa}(\tau_1), \hat{\kappa}(\tau_2)]$, pela Proposição 3.11. temos

$$|\hat{u}(t)| = |\hat{w}(\hat{\tau}(t))| \geq \frac{c + \alpha}{T_0} \geq c + \alpha.$$

Assim, a desigualdade $\hat{\kappa}(\tau_2) - \hat{\kappa}(\tau_1) > T_0$ contradiz (14). Logo, $\tau_2 - \tau_1 \leq c + T_0\beta$. Combinando isto com as condições (51) e (18), obtemos o resultado. \square

Teorema 3.13. *Se g não depende da variável x , então a desigualdade*

$$|\hat{u}(t)| \leq \ell = \max \left\{ \sqrt{\frac{2}{\mu} (\Lambda_0 + \beta) (1 + \bar{\gamma}\xi)}, \frac{\Lambda_1 + \sqrt{\Lambda_1^2 + 8\mu\Lambda_0}}{2\mu} \right\}$$

verifica-se para quase todo $t \in [0, 1]$.

Demonstração. Se $q(\tau) \geq 0$, então, de forma análoga à demonstração do Teorema 3.8., temos

$$|\hat{w}(\tau)| \leq \max \left\{ \sqrt{\frac{2}{\mu} (\Lambda_0 + \beta)}, \frac{\Lambda_1 + \sqrt{\Lambda_1^2 + 8\mu\Lambda_0}}{2\mu} \right\}. \quad (52)$$

Consideremos agora $\tau \in [0, \hat{T}]$ tal que $q(\tau) < 0$. Multiplicando (41) por $\hat{w}(\tau)$, obtemos

$$\langle \hat{g}(\tau)\hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle (\hat{L}(\tau) + \beta) = (q(\tau) + \langle \hat{g}(\tau)\hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle) \langle \nabla_u \hat{L}(\tau), \hat{w}(\tau) \rangle.$$

Usando a condição (42), podemos reescrever esta igualdade como

$$\langle \hat{g}(\tau)\hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle = h \langle \nabla_u \hat{L}(\tau), \hat{w}(\tau) \rangle.$$

Combinando com (42), temos

$$h = \frac{q(\tau) + h \langle \nabla_u \hat{L}(\tau), \hat{w}(\tau) \rangle}{\hat{L}(\tau) + \beta}.$$

Da condição (C2), obtemos

$$\frac{q(\tau)}{h} = \hat{L}(\tau) + \beta - \langle \nabla_u \hat{L}(\tau), \hat{w}(\tau) \rangle \leq \Lambda_0 - \frac{\mu}{2} |\hat{w}(\tau)|^2 + \beta.$$

e, portanto, uma vez que, pela Proposição 3.7., $-q(\tau) \leq \bar{\gamma}|p(\tau)|$, temos

$$\frac{\mu}{2} |\hat{w}(\tau)|^2 \leq \Lambda_0 + \beta - \frac{q(\tau)}{h} \leq \Lambda_0 + \beta + \frac{\bar{\gamma}|p(\tau)|}{h}.$$

Pela igualdade (39) e pela condição (C3), obtemos

$$\frac{d|p(t)|/h}{d\tau} \leq \frac{1}{h} \frac{(q(\tau) + \langle \hat{g}(\tau)\hat{w}(\tau), p(\tau) \rangle) |\nabla_x \hat{L}(\tau)|}{(\hat{L}(\tau) + \beta)^2} = \frac{|\nabla_x \hat{L}(\tau)|}{\hat{L}(\tau) + \beta} \leq \xi$$

e, uma vez que $p(\hat{T}) = 0$, temos $|p(t)|/h \leq \hat{T}\xi$. Para estimar \hat{T} , consideremos $\bar{\kappa}$, uma solução do problema

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa}{d\tau}(\tau) &= \frac{1}{L(\kappa(\tau), 0, 0) + \beta}, \\ \kappa(0) &= 0 \end{aligned} \quad (53)$$

e $\bar{y} \equiv 0$. O par $(\bar{\kappa}, \bar{y})$ é uma solução do problema (44) num intervalo $[0, \bar{T}]$, onde \bar{T} é tal que $\bar{\kappa}(\bar{T}) = 1$. Assim, uma vez que

$$\bar{T} = \int_0^1 (L(\bar{\kappa}(\tau), 0, 0) + \beta) d\tau \leq \int_0^1 (\Lambda_0 + \beta) d\tau = \Lambda_0 + \beta,$$

temos

$$\hat{T} \leq \bar{T} \leq \Lambda_0 + \beta,$$

o que completa a prova. □

Teorema 3.14. *Se L e g não dependem da variável t , então a desigualdade*

$$|\hat{u}(t)| \leq \ell = \max \left\{ \sqrt{\frac{2}{\mu}} (\Lambda_0 + \beta), \frac{\Lambda_1 + \sqrt{\Lambda_1^2 + 8\mu\Lambda_0}}{2\mu} \right\}$$

verifica-se para quase todo $t \in [0, 1]$.

Demonstração. Uma vez que, neste caso, o problema é autónomo, a condição (38) é equivalente a $dq/d\tau = 0$. Assim, da Proposição 3.11. e da desigualdade (14), podemos concluir que q é uma constante positiva. Assim, a demonstração deste teorema é análoga à demonstração do Teorema 3.8., com $q \geq 0$. □

3.5 Limites para a Complexidade

Consideremos agora que $g = g(t)$, isto é,

$$\begin{aligned} \text{minimizar: } J(x, \dot{x}) &= \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt, \\ \text{sujeito a: } \dot{x}(t) &= g(t)u(t), \\ x(0) &= 0, \quad x(1) \in S, \end{aligned} \tag{54}$$

Assumimos que $|\hat{u}(t)| \leq \ell$, $t \in [0, 1]$. Assumimos também que a função L é estritamente convexa nas variáveis (x, u) , isto é,

$$\begin{aligned} L(t, x_1, u_1) + \langle \nabla_x L(t, x_1, u_1), x_2 - x_1 \rangle + \langle \nabla_u L(t, x_1, u_1), u_2 - u_1 \rangle \\ + \frac{\mu}{2} (|x_2 - x_1|^2 + |u_2 - u_1|^2) \leq L(t, x_2, u_2), \quad \text{para todo } t, x_1, x_2, u_1, u_2. \end{aligned} \tag{55}$$

Seja

$$K_L = \max_{t \in [0,1], |x| \leq \ell c_g, |u| \leq \ell} |\nabla_{(t,x,u)} L(t, x, u)|.$$

Para estudarmos a complexidade do Método de Ponto Interior aplicado ao problema (54), vamos considerar o problema discreto

$$\begin{aligned} \text{minimizar: } J(x, \dot{x}) &= \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt, \\ \text{sujeito a: } \dot{x}(t) &= g(t)u(t), \quad u \in \mathcal{U}_N, \\ x(0) &= 0, \quad x(1) \in S, \end{aligned} \tag{56}$$

onde $\mathcal{U}_N \subset L_\infty([0, 1], \mathbb{R}^m)$ denota o conjunto de todas as funções constantes por partes $u(\cdot)$ que tomam valores $u(t) = u(\tau k)$, $t \in]\tau k, \tau(k+1)]$, $k = \overline{0, N-1}$, $\tau = 1/N$ e satisfazem $|u(t)| \leq \ell$. Obviamente, este problema tem também uma solução (\tilde{x}, \tilde{u}) .

Seja $\mathcal{F} : \mathcal{U}_N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u, \sigma) &= -\ln \left(\sigma - \int_0^1 L \left(t, \int_0^t g(s)u(s)ds, u(t) \right) dt \right) - \ln(\bar{\sigma} - \sigma) \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \ln \left(b_i - \left(A \int_0^1 g(s)u(s)ds \right)^{(i)} \right) - \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{N-1} \ln(\ell^2 - (u^{(i)}(\tau k))^2), \end{aligned}$$

onde

$$\bar{\sigma} = L(0, 0, 0) + K_L(1 + \ell(1 + c_g)) \geq \max_{\{u \mid |u| \leq \ell\}} \int_0^1 L \left(t, \int_0^t g(s)u(s)ds, u(t) \right) dt. \tag{57}$$

Sejam $\beta \in (0, (3 - \sqrt{5})/2)$ e $\gamma > 0$ tal que $\gamma \leq \frac{\sqrt{\beta}}{1 + \sqrt{\beta}} - \beta$.

Teorema 3.15. *Seja $\varepsilon > 0$,*

$$N > \frac{2(2 + \ell(c_{\nabla g} + 2c_g))K_L}{\varepsilon},$$

e

$$\mathcal{N} \geq \frac{\ln \left(2 \frac{(1 + \beta)(k + mN + 1) + (\beta + \sqrt{k + mN + 1})\beta}{\gamma(1 - 2\beta)\varepsilon} \|v\|_{(\dot{x}, \bar{\sigma})}^{\mathcal{F}} \right)}{\ln \left(1 + \frac{\gamma}{\beta + \sqrt{k + mN + 1}} \right)} + 1, \quad v = (0, 1).$$

O Método de Ponto Interior encontra um controlo admissível $\check{u} \in \mathcal{U}_N$ e a respetiva trajetória

$$\check{x}(t) = \int_0^t g(s)\check{u}(s)ds$$

satisfazendo

$$\left| \int_0^1 (L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - L(t, \check{x}(t), \dot{\check{x}}(t))) dt \right| < \varepsilon$$

e

$$\int_0^1 (|\check{x}(t) - \hat{x}(t)|^2 + |\check{u}(t) - \hat{u}(t)|^2) dt \leq \frac{2}{\mu} \varepsilon,$$

em, no máximo, \mathcal{N} iterações.

Demonstração. Seja $\bar{x}(\cdot) \in AC([0, 1], R^n)$ a função definida por

$$\begin{aligned} \bar{x}(0) &= 0, \\ \bar{x}(t) &= \bar{x}(k\tau) + \frac{1}{\tau} \int_{k\tau}^t g(s)ds \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \hat{u}(s)ds, \\ t &\in [k\tau, (k+1)\tau), \quad k \in \overline{0, N-1}, \quad \tau = 1/N. \end{aligned} \tag{58}$$

Por indução, temos

$$\begin{aligned} &|\bar{x}((k+1)\tau) - \hat{x}((k+1)\tau)| \\ &\leq |\bar{x}(k\tau) - \hat{x}(k\tau)| + \left| \frac{1}{\tau} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} g(s)ds \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \hat{u}(s)ds - \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} g(s)\hat{u}(s)ds \right| \\ &= |\bar{x}(k\tau) - \hat{x}(k\tau)| + \left| \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \frac{1}{\tau} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} g(r)dr \hat{u}(s)ds - \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} g(s)\hat{u}(s)ds \right| \\ &= |\bar{x}(k\tau) - \hat{x}(k\tau)| + \left| \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \frac{1}{\tau} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} (g(r) - g(s))dr \hat{u}(s)ds \right| \\ &\leq |\bar{x}(k\tau) - \hat{x}(k\tau)| + \ell\tau^2 c_{\nabla g}, \end{aligned}$$

e, portanto, $|\bar{x}(k\tau) - \hat{x}(k\tau)| \leq \ell\tau c_{\nabla g}$, $k \in \overline{0, N-1}$. Notemos também que, se $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$, então

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \bar{x}(k\tau) + \frac{1}{\tau} \int_{k\tau}^t g(s)ds \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \hat{u}(s)ds \\ &= \bar{x}((k+1)\tau) + \frac{1}{\tau} \int_{(k+1)\tau}^t g(s)ds \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \hat{u}(s)ds. \end{aligned}$$

Assim, se $t \in [k\tau, (k + \frac{1}{2})\tau)$, temos

$$\begin{aligned}
|\bar{x}(t) - \hat{x}(t)| &\leq |\bar{x}(k\tau) - \hat{x}(k\tau)| + \left| \frac{1}{\tau} \int_{k\tau}^t g(s) ds \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \hat{u}(s) ds - \int_{k\tau}^t g(s) \hat{u}(s) ds \right| \\
&\leq \ell\tau c_{\nabla g} + \left| \frac{1}{\tau} \int_{k\tau}^t g(s) \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} (\hat{u}(r) - \hat{u}(s)) dr ds \right| \\
&\leq \ell\tau c_{\nabla g} + \frac{1}{\tau} \int_{k\tau}^{(k+\frac{1}{2})\tau} c_g \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} 2\ell dr ds \\
&= \ell\tau c_{\nabla g} + \ell\tau c_g
\end{aligned}$$

e, se $t \in [(k + \frac{1}{2})\tau, (k + 1)\tau)$, temos

$$\begin{aligned}
|\bar{x}(t) - \hat{x}(t)| &\leq |\bar{x}((k+1)\tau) - \hat{x}((k+1)\tau)| + \left| \frac{1}{\tau} \int_{(k+1)\tau}^t g(s) ds \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \hat{u}(s) ds - \int_{(k+1)\tau}^t g(s) \hat{u}(s) ds \right| \\
&\leq \ell\tau c_{\nabla g} + \left| \frac{1}{\tau} \int_{(k+1)\tau}^t g(s) \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} (\hat{u}(r) - \hat{u}(s)) dr ds \right| \\
&= \ell\tau c_{\nabla g} + \ell\tau c_g.
\end{aligned}$$

Logo, $|\bar{x}(t) - \hat{x}(t)| \leq \ell\tau(c_{\nabla g} + c_g)$, $t \in [0, 1]$. Uma vez que a função $L(t, x, \cdot)$ é convexa e contínua, e que a função $L(\cdot, \cdot, u)$ é Lipschitziana com constante K_L no conjunto $\{(t, x, u) \mid t \in [0, 1], |x| \leq \ell c_g, |u| \leq \ell\}$, tomando $\bar{u}(t) = \frac{1}{\tau} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \hat{u}(s) ds$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} L\left(t, \bar{x}(t), \frac{1}{\tau} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \hat{u}(s) ds\right) dt \\
&\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} L\left(k\tau, \hat{x}(k\tau), \frac{1}{\tau} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \hat{u}(s) ds\right) dt + \tau K_L(\ell(c_{\nabla g} + c_g) + 1) \\
&\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \frac{1}{\tau} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} L(k\tau, \hat{x}(k\tau), \hat{u}(s)) ds dt + \tau K_L(\ell(c_{\nabla g} + c_g) + 1) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} L(k\tau, \hat{x}(k\tau), \hat{u}(t)) dt + \tau K_L(\ell(c_{\nabla g} + c_g) + 1) \\
&\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt + \tau K_L(\ell(c_{\nabla g} + 2c_g) + 2) \\
&= \int_0^1 L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt + \tau K_L(\ell(c_{\nabla g} + 2c_g) + 2).
\end{aligned}$$

Uma vez que (\tilde{x}, \tilde{u}) é uma solução do problema (56), temos

$$\int_0^1 L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt \leq \int_0^1 L(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt \leq \int_0^1 L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt,$$

e, portanto, obtemos

$$\left| \int_0^1 L(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt - \int_0^1 L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt \right| \leq \tau K_L (\ell(c_{\nabla g} + 2c_g) + 2).$$

Pela desigualdade

$$N > \frac{2(2 + \ell(c_{\nabla g} + 2c_g))K_L}{\varepsilon},$$

temos

$$\left| \int_0^1 L(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt - \int_0^1 L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Usando o Método de Ponto Interior, encontramos $\check{u} \in \mathcal{U}_N$ tal que

$$\check{x}(t) = \int_0^t g(s)\check{u}(s) ds.$$

é uma solução admissível para o problema (56) e que satisfaz

$$\left| \int_0^1 L(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt - \int_0^1 L(t, \check{x}(s), \check{u}(t)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto, temos

$$\left| \int_0^1 L(t, \check{x}(s), \check{u}(t)) dt - \int_0^1 L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Uma vez que $|\hat{u}| \leq \ell$ podemos usar as condições de otimalidade (Teorema 2.1.)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \nabla_u L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) &= \nabla_x L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)), \\ \langle \nabla_u L(1, \hat{x}(1), \hat{u}(1)), z - \hat{x}(1) \rangle &\geq 0, \quad z \in S. \end{aligned} \tag{59}$$

De (55), obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^1 L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt \\ &+ \int_0^1 (\langle \nabla_x L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)), \check{x}(t) - \hat{x}(t) \rangle + \langle \nabla_u L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)), \check{u}(t) - \hat{u}(t) \rangle) dt \\ &+ \int_0^1 \frac{\mu}{2} (|\check{x}(t) - \hat{x}(t)|^2 + |\check{u}(t) - \hat{u}(t)|^2) dt \leq \int_0^1 L(t, \check{x}(t), \check{u}(t)) dt. \end{aligned}$$

Ora, integrando por partes o terceiro termo do lado esquerdo da desigualdade e usando as condições (59), obtemos

$$\int_0^1 (|\check{x}(t) - \hat{x}(t)|^2 + |\check{u}(t) - \hat{u}(t)|^2) dt \leq \frac{2}{\mu} \left| \int_0^1 L(t, \check{x}(t), \check{u}(t)) dt - \int_0^1 L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt \right| \leq \frac{2}{\mu} \varepsilon.$$

O número de iterações necessárias é obtido pelo Teorema 2.10. □

Exemplo 3.2. Consideremos novamente o problema (36), com $\omega = 1/\sqrt{2}$,

$$\begin{aligned} \text{minimizar: } & \int_0^1 \left(\dot{x}^2(t) + \frac{1}{4} \right) dt, \\ \text{sujeito a: } & x(0) = 0, \quad x(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Neste caso, temos $K_L = 2\ell$. Usando a estimativa do Corolário 3.9, temos $\ell = 3/4$.

Seja

$$\mathcal{F}(u, \sigma) = -\ln \left(\sigma - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 - \frac{1}{4} \right) - \ln(\bar{\sigma} - \sigma) - \ln \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \sum_{k=0}^{N-1} \ln(\ell^2 - u_k^2),$$

onde $u = (u_0, \dots, u_{N-1})$ e $\bar{\sigma} = 4$.

Sejam $\beta = 1/9$, $\gamma = 5/36$ e $\varepsilon = 10^{-14}$. Usando $N = 15$, obtemos a solução $\tilde{u} = \{0.7071\}^{15}$, ao fim de 364 iterações. A estimativa para o número máximo de iterações, neste caso, é 1189.

4 Problema de Rastreo

Nesta secção, estudaremos a complexidade do método de ponto interior para o problema de rastreo regido pela equação do calor.

4.1 Enunciado do problema

Sejam $\check{\theta} \in V_2^{1,0}(Q_T) \cap L_\infty(Q_T, \mathbb{R})$ e $\varphi(\theta) = |\check{\theta}(t, x) - \theta(t, x)|^2$. Consideremos $Q_j \in W_2^2(\Omega)$, $j = \overline{1, m}$, $K_j > 0$, $j = \overline{1, m}$ e $\theta_0 \in L_2(\Omega, \mathbb{R})$. Assumimos que Q_j pode ser prolongado continuamente a \mathbb{R}^n fazendo $Q_j(x) = 0$, $x \notin \Omega$ e que θ_0 satisfaz a condição de compatibilidade $\theta_0(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$. Fixemos $0 < C \in \mathbb{R}$. Consideraremos o problema de rastreo

$$\text{minimizar: } J(\theta) = \iint_{Q_T} \varphi(\theta(t, x)) dx dt, \quad (60)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{sujeito a: } \theta_t(t, x) &= C\theta_{xx}(t, x) + \sum_{j=1}^m Q_j(x)q_j(t), \\ \theta(t, x) &= 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \\ \theta(0, x) &= \theta_0(x), \\ q_j(0) &= 0, \quad \|\dot{q}_j\|_{L_\infty((0, T), \mathbb{R})} \leq K_j, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

onde $(\theta, q_1, \dots, q_m)$ pertence ao espaço $V_2^{1,0}(Q_T) \times (AC([0, T], \mathbb{R}))^m$.

Seja Λ a função definida por

$$\Lambda(t, x, q_1, \dots, q_j) = \int_0^t \int_\Omega \Gamma(t - \tau, x - \xi) \left(\sum_{j=1}^m Q_j(\xi) q_j(\tau) \right) d\xi d\tau, \quad (62)$$

onde $\Gamma(t, x) = \frac{1}{(4\pi Ct)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4Ct}\right\}$. Ao longo da resolução deste problema, iremos considerar também o problema auxiliar

$$\left. \begin{aligned} \theta_t^\bullet(t, x) &= C\theta_{xx}^\bullet(t, x), \\ \theta^\bullet(t, x) &= -\Lambda(t, x, q_1, \dots, q_j), \quad (x, t) \in [0, T] \times \partial\Omega, \\ \theta^\bullet(0, x) &= \theta_0(x), \\ q_j(0) &= 0, \quad \|\dot{q}_j\|_{L_\infty((0, T), \mathbb{R})} \leq K_j, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

4.2 Resultados Principais

Vamos necessitar dos seguintes resultados no que se segue.

Lema 4.1. *Sejam $(\theta, q_1, \dots, q_m) \in V_2^{1,0}(Q_T) \times (AC([0, T], \mathbb{R}))^m$ funções que satisfazem (63).*

Então, a desigualdade

$$\|\theta\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \leq \max \left\{ \|\theta_0\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})}, T^2 \left\| \sum_{j=1}^m Q_j \dot{q}_j \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \right\}$$

verifica-se.

Demonstração. Usando o Teorema 2.9 e a desigualdade de Holder, temos

$$\begin{aligned} |\Lambda(t, x, q_1, \dots, q_j)| &= \left| \int_0^t \int_\Omega \Gamma(t - \tau, x - \xi) \left(\sum_{j=1}^m Q_j(\xi) q_j(\tau) \right) d\xi d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_0^t \int_\Omega \Gamma(t - \tau, x - \xi) d\xi d\tau \right| \left\| \sum_{j=1}^m Q_j q_j \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \\ &\leq T \left\| \sum_{j=1}^m Q_j q_j \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \\ &\leq T^2 \left\| \sum_{j=1}^m Q_j \dot{q}_j \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.8, obtemos

$$\|\theta\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \leq \max \{ \|\theta_0\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})}, \|\Lambda(\cdot, \cdot, q_1, \dots, q_j)\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \},$$

o que completa a prova. \square

Uma vez que, pelo Teorema anterior, as trajetórias admissíveis θ do problema (60), (61) pertencem a um conjunto limitado, Θ , definimos

$$K_\varphi = \inf \{ \ell \mid |\varphi(\theta_1) - \varphi(\theta_2)| \leq \ell |\theta_1 - \theta_2|, \theta_1, \theta_2 \in \Theta \}.$$

Lema 4.2. *Sejam $(\theta^{(l)}, q_1^{(l)}, \dots, q_m^{(l)}) \in V_2^{1,0}(Q_T) \times (AC([0, T], \mathbb{R}))^m$, $l \in \{1, 2\}$, funções satisfazendo o problema (63). Então, a desigualdade*

$$|J(\theta^{(1)}) - J(\theta^{(2)})| \leq T^3 V_\Omega K_\varphi \left\| \sum_{j=1}^m Q_j (\dot{q}_j^{(1)} - \dot{q}_j^{(2)}) \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})}$$

verifica-se.

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} |J(\theta^{(1)}) - J(\theta^{(2)})| &= \left| \iint_{Q_T} (\varphi(\theta^{(1)}(t, x)) - \varphi(\theta^{(2)}(t, x))) dxdt \right| \\ &\leq \iint_{Q_T} K_\varphi |\theta^{(1)}(t, x) - \theta^{(2)}(t, x)| dxdt \\ &\leq TV_\Omega K_\varphi \|\theta^{(1)} - \theta^{(2)}\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.1, obtemos

$$\|\theta^{(1)} - \theta^{(2)}\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \leq T^2 \left\| \sum_{j=1}^m Q_j (\dot{q}_j^{(1)} - \dot{q}_j^{(2)}) \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})}.$$

Portanto, temos

$$|J(\theta^{(1)}) - J(\theta^{(2)})| \leq T^3 V_\Omega K_\varphi \left\| \sum_{j=1}^m Q_j (\dot{q}_j^{(1)} - \dot{q}_j^{(2)}) \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})}.$$

□

Teorema 4.3. *O problema (60)-(61) tem uma solução.*

Demonstração. Seja ℓ o ínfimo do problema (60)-(61) e $(\theta^l, q_1^l, \dots, q_m^l)$ funções que satisfazem (61) e tais que $J(\theta^l) \rightarrow \ell$. Usando a notação $\Lambda^l(\cdot, \cdot) = \Lambda(\cdot, \cdot, q_1^l, \dots, q_m^l)$ temos

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_t^l(t, x) &= C\Lambda_{xx}^l(t, x) + \sum_{j=1}^m Q_j(x)q_j^l(t), \\ \Lambda^l(0, x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Logo, as funções $(\theta^l - \Lambda^l, q_1^l, \dots, q_m^l)$ satisfazem (63).

Seja $\eta^l = (\dot{q}_1^l, \dots, \dot{q}_m^l)$. Uma vez que $\{\eta^l\}$ é limitada em $L_2((0, T), \mathbb{R}^m)$, existe uma subsequência $\{\eta^{l_k}\}$ fracamente convergente em $L_2((0, T), \mathbb{R}^m)$. Seja η^0 o limite fraco de $\{\eta^{l_k}\}$. Pelo Teorema de Mazur, existe uma sucessão de combinações convexas de $\{\eta^{l_k}\}$, $\xi^p = \sum_{i=p}^{I(p)} \lambda_i \eta^{l_i}$, tal que $\xi^p \rightarrow \eta^0$ em $L_2((0, T), \mathbb{R}^m)$. Uma vez que o problema (63) é linear, pelo Teorema 2.7, temos $\sum_{i=p}^{I(p)} \lambda_i (\theta^{l_i} - \Lambda^{l_i}) \rightarrow \theta^0$ em $V_2^{1,0}(Q_T) \subseteq L_2(Q_T, \mathbb{R})$ e $\sum_{i=p}^{I(p)} \lambda_i q^{l_i} \rightarrow q^0$ em $L_2((0, T), \mathbb{R}^m)$.

Uma vez que (θ^0, q^0) verificam (63), também $(\theta^0 + \Lambda^0, q^0)$, onde $\Lambda^0(\cdot, \cdot) = \Lambda(\cdot, \cdot, q_1^0, \dots, q_m^0)$, satisfazem (61). Portanto, uma vez que J é convexo, pelo Lema 4.2, obtemos

$$\begin{aligned}
J(\theta^0 + \Lambda^0) &= J \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=p}^{I(p)} \lambda_i (\theta^{l_i} - \Lambda^{l_i}) + \Lambda_0 \right) \\
&= J \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=p}^{I(p)} \lambda_i \theta^{l_i} + \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=p}^{I(p)} \lambda_i (-\Lambda^{l_i} + \Lambda_0) \right) \\
&= J \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=p}^{I(p)} \lambda_i \theta^{l_i} \right) \\
&= \lim_{p \rightarrow \infty} J \left(\sum_{i=p}^{I(p)} \lambda_i \theta^{l_i} \right) \\
&\leq \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=p}^{I(p)} \lambda_i J(\theta^{l_i}) \\
&= \ell.
\end{aligned}$$

Logo, $(\theta^0 + \Lambda^0, q^0)$ é a solução de (60)-(61). \square

No que se segue, denotamos por $(\hat{\theta}, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_m)$ um processo ótimo do problema (60)-(61) no espaço $V_2^{1,0}(Q_T) \times (AC([0, T], \mathbb{R}))^m$.

Consideremos \mathcal{H}_N , o espaço das funções lineares por partes $\eta \in L_2((0, T), \mathbb{R})$ cujas respectivas derivadas tomam valores $\dot{\eta}(t) = \dot{\eta}(\tau k)$, $t \in (\tau k, \tau(k+1)]$, $k = \overline{0, N-1}$, $\tau = T/N$. O problema (60)-(61) também tem uma solução ótima no espaço $V_2^{1,0}(Q_T) \times (\mathcal{H}_N)^m$. Isto segue da compacidade do conjunto de controlos e do Teorema 2.7.

De seguida, vamos mostrar que a diferença entre $J(\hat{\hat{\theta}})$ e $J(\hat{\theta})$, onde $(\hat{\hat{\theta}}, \hat{\hat{q}}_1, \dots, \hat{\hat{q}}_m)$ é um processo ótimo do problema (60)-(61) no espaço $V_2^{1,0}(Q_T) \times (\mathcal{H}_N)^m$, pode ser feita arbitrariamente pequena quando N é suficientemente grande. Consideremos as funções $q_j(t)$, $j = \overline{1, m}$ definidas por

$$\tilde{q}_j(0) = 0,$$

e

$$\tilde{q}_j(t) = \tilde{q}_j(k\tau) + \frac{t - k\tau}{\tau} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \dot{\tilde{q}}_j(s) ds,$$

$$j = \overline{1, m}, \quad t \in (k\tau, (k+1)\tau], \quad \tau = \frac{T}{N}, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Obviamente, estas funções são lineares por partes, contínuas e satisfazem a condição $|\dot{\tilde{q}}_j(t)| \leq K_j$, $t \in [0, T]$, $j = \overline{1, m}$. A função $\sum_{j=1}^m Q_j \tilde{q}_j$ aproxima-se da função $\sum_{j=1}^m Q_j \hat{q}_j$ no sentido seguinte.

Lema 4.4. *A desigualdade*

$$\left\| \sum_{j=1}^m Q_j (\tilde{q}_j - \hat{q}_j) \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \leq \tau \sum_{j=1}^m \left(\|Q_j\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})} K_j \right) \quad (65)$$

verifica-se.

Demonstração. Por indução, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m Q_j(x) \tilde{q}_j((k+1)\tau) &= \sum_{j=1}^m Q_j(x) \tilde{q}_j(k\tau) + \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \dot{\tilde{q}}_j(s) ds \\ &= \sum_{j=1}^m Q_j(x) \hat{q}_j(k\tau) + \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \dot{\hat{q}}_j(s) ds \\ &= \sum_{j=1}^m Q_j(x) \hat{q}_j((k+1)\tau) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\sum_{j=1}^m Q_j(x) \tilde{q}_j(k\tau) = \sum_{j=1}^m Q_j(x) \hat{q}_j(k\tau), \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (66)$$

Vejamos que, para todo $t \in (k\tau, (k+1)\tau]$, se tem

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m Q_j(x) \tilde{q}_j(t) &= \sum_{j=1}^m Q_j(x) \tilde{q}_j(k\tau) + \frac{t - k\tau}{\tau} \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \dot{\tilde{q}}_j(s) ds \\ &= \sum_{j=1}^m Q_j(x) \tilde{q}_j((k+1)\tau) + \frac{t - (k+1)\tau}{\tau} \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \dot{\tilde{q}}_j(s) ds. \end{aligned}$$

Se $t \in (k\tau, (k + \frac{1}{2})\tau]$, então obtemos

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{j=1}^m Q_j(x) (\tilde{q}_j(t) - \hat{q}_j(t)) \right| \\
&= \left| \frac{t - k\tau}{\tau} \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \dot{\hat{q}}_j(s) ds - \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{k\tau}^t \dot{\hat{q}}_j(s) ds \right| \\
&\leq \frac{t - k\tau}{\tau} \left| \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \dot{\hat{q}}_j(s) ds \right| + \left| \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{k\tau}^t \dot{\hat{q}}_j(s) ds \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m |Q_j(x)| \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} |\dot{\hat{q}}_j(s)| ds + \sum_{j=1}^m |Q_j(x)| \int_{k\tau}^t |\dot{\hat{q}}_j(s)| ds \\
&\leq \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^m |Q_j(x)| K_j + \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^m |Q_j(x)| K_j \\
&= \tau \sum_{j=1}^m |Q_j(x)| K_j
\end{aligned}$$

e, se $t \in ((k + \frac{1}{2})\tau, (k + 1)\tau]$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{j=1}^m Q_j(x) (\tilde{q}_j(t) - \hat{q}_j(t)) \right| \\
&= \left| \frac{t - (k + 1)\tau}{\tau} \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \dot{\hat{q}}_j(s) ds - \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_t^{(k+1)\tau} \dot{\hat{q}}_j(s) ds \right| \\
&\leq \frac{(k + 1)\tau - t}{\tau} \left| \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \dot{\hat{q}}_j(s) ds \right| + \left| \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_t^{\tau(k+1)} \dot{\hat{q}}_j(s) ds \right| \\
&\leq \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^m |Q_j(x)| K_j + \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^m |Q_j(x)| K_j \\
&= \tau \sum_{j=1}^m |Q_j(x)| K_j.
\end{aligned}$$

Logo, temos (65). □

Usando o princípio de máximo (Teorema 2.8.) vamos encontrar uma estimativa para a diferença entre a solução ótima do problema (60)-(61) nos espaços $V_2^{1,0}(Q_T) \times (AC([0, T], \mathbb{R}))^m$ e $V_2^{1,0}(Q_T) \times (\mathcal{H}_N)^m$.

Recordemos que, se $(\theta, q_1, \dots, q_m)$ satisfaz (61), então $(\theta - \Lambda, q_1, \dots, q_m)$ satisfaz (63), onde $\Lambda(\cdot, \cdot) = \Lambda(\cdot, \cdot, q_1, \dots, q_m)$. Usaremos a notação

$$\tilde{\Lambda}(\cdot, \cdot) = \Lambda(\cdot, \cdot, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_m) \quad \text{e} \quad \hat{\Lambda}(\cdot, \cdot) = \Lambda(\cdot, \cdot, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_m).$$

Lema 4.5. *Sejam \tilde{q}_j as funções definidas acima e $\tilde{\theta}$ uma função tal que $(\tilde{\theta}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_m)$ satisfaz (63). Então, a desigualdade*

$$\left\| \tilde{\theta} + \tilde{\Lambda} - \hat{\theta} \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \leq 2T^2 \left(\sum_{j=1}^m \|Q_j\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})} K_j \right) / N.$$

verifica-se.

Demonstração. Seja $\delta\theta = \tilde{\theta} - \hat{\theta} + \hat{\Lambda}$. A função $\delta\theta$ verifica as condições

$$\left. \begin{aligned} (\delta\theta)_t &= C(\delta\theta)_{xx}, \\ \delta\theta(t, x) &= \hat{\Lambda}(t, x) - \tilde{\Lambda}(t, x), \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \\ \delta\theta(0, x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Pelos Teoremas 2.8, 2.9 e pelo Lema 4.4, temos,

$$\begin{aligned} \|\delta\theta\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} &\leq \left\| \hat{\Lambda} - \tilde{\Lambda} \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \\ &\leq T \left\| \sum_{j=1}^m Q_j(\tilde{q}_j - \hat{q}_j) \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \\ &\leq \frac{T^2}{N} \sum_{j=1}^m \|Q_j\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})} K_j. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\theta} + \tilde{\Lambda} - \hat{\theta} \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} &\leq \left\| \tilde{\theta} - \hat{\theta} + \hat{\Lambda} \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} + \left\| \tilde{\Lambda} - \hat{\Lambda} \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \\ &\leq 2 \frac{T^2}{N} \sum_{j=1}^m \|Q_j\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})} K_j. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.6. *Seja $(\hat{\theta}, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_m)$ um processo ótimo do problema (60)-(61) no espaço $V_2^{1,0}(Q_T) \times (AC([0, T], \mathbb{R}))^m$ e $(\tilde{\theta}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_m)$ um processo ótimo no espaço $V_2^{1,0}(Q_T) \times (\mathcal{H}_N)^m$. Então,*

$$\left| J(\hat{\theta}) - J(\tilde{\theta}) \right| \leq 2 \frac{T^3}{N} V_\Omega K_\varphi \sum_{j=1}^m \|Q_j\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})} K_j,$$

onde $V_\Omega = \int_\Omega dx$.

Demonstração. Sejam \tilde{q}_j as funções definidas acima e $\tilde{\theta}$ uma função tal que $(\tilde{\theta}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_m)$ satisfaz (63). Assim como na prova do Lema 4.2., obtemos

$$\begin{aligned} \left| J(\tilde{\theta} + \tilde{\Lambda}) - J(\hat{\theta}) \right| &= \left| \iint_{Q_T} (\varphi(\tilde{\theta} + \tilde{\Lambda}) - \varphi(\hat{\theta})) dx dt \right| \\ &\leq TV_\Omega K_\varphi \|\tilde{\theta} + \tilde{\Lambda} - \hat{\theta}\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.5., temos

$$\begin{aligned} \left| J(\tilde{\theta} + \tilde{\Lambda}) - J(\hat{\theta}) \right| &\leq TV_\Omega K_\varphi \|\tilde{\theta} + \tilde{\Lambda} - \hat{\theta}\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \\ &\leq 2 \frac{T^3}{N} \left(V_\Omega K_\varphi \sum_{j=1}^m \|Q_j\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})} K_j \right). \end{aligned}$$

Assim, uma vez que

$$J(\hat{\theta}) \leq J(\tilde{\theta}) \leq J(\tilde{\theta} + \tilde{\Lambda}),$$

temos

$$\left| J(\hat{\theta}) - J(\tilde{\theta}) \right| \leq 2 \frac{T^3}{N} \left(V_\Omega K_\varphi \sum_{j=1}^m \|Q_j\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})} K_j \right).$$

□

Seja

$$\mathcal{F}(\bar{\theta}, \sigma) = -\ln(\sigma - J(\bar{\theta})) - \ln(\bar{\sigma} - \sigma) - \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{N-1} \ln(K_i - (\dot{\bar{q}}_i(\tau k))^2), \quad (68)$$

onde

$$\bar{\sigma} = \max\{J(\theta) | (\theta, q_1, \dots, q_m) \in V_2^{1,0}(Q_T) \times (\mathcal{H}_N)^m \text{ satisfaz (61)}\}.$$

Seja $\varepsilon > 0$,

$$N > \frac{4 \left(V_{\Omega} K_{\varphi} \sum_{j=1}^m \left(\|Q_j\|_{L_{\infty}(\Omega, \mathbb{R})} K_j \right) \right) T^3}{\varepsilon}, \quad (69)$$

e

$$\mathcal{N} \geq \frac{\ln \left(2 \frac{(1 + \beta)(Nm + 1) + (\beta + \sqrt{Nm + 1})\beta}{\gamma(1 - 2\beta)\varepsilon} \|b\|_{(\bar{x}, \bar{\sigma})}^{\mathcal{F}} \right)}{\ln \left(1 + \frac{\gamma}{\beta + \sqrt{Nm + 1}} \right)} + 1, \quad (70)$$

onde $b = (0, 1)$.

Teorema 4.7. *O Método de Ponto Interior encontra $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_m) \in (\mathcal{H}_N)^m$ tal que $|J(\bar{\theta} - \bar{\Lambda}) - J(\hat{\theta})| \leq \varepsilon$, onde $(\bar{\theta}, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_m)$ satisfaz (63) e $\bar{\Lambda}(\cdot, \cdot) = \Lambda(\cdot, \cdot, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_m)$, em, no máximo, \mathcal{N} iterações.*

Demonstração. Seja

$$N > \frac{4 \left(V_{\Omega} K_{\varphi} \sum_{j=1}^m \|Q_j\|_{L_{\infty}(\Omega, \mathbb{R})} K_j \right) T^3}{\varepsilon}.$$

Pelo Teorema 4.6, temos $|J(\hat{\bar{\theta}}) - J(\hat{\theta})| < \varepsilon/2$. Usando o Método de Ponto Interior, encontramos $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_m)$ tal que $|J(\bar{\theta} - \bar{\Lambda}) - J(\hat{\bar{\theta}})| \leq \varepsilon/2$, onde $(\bar{\theta}, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_m)$ satisfaz (63). O número de iterações necessárias é dado pelo Teorema 2.10. Assim, temos

$$|J(\bar{\theta} - \bar{\Lambda}) - J(\hat{\theta})| \leq |J(\bar{\theta} - \bar{\Lambda}) - J(\hat{\bar{\theta}})| + |J(\hat{\bar{\theta}}) - J(\hat{\theta})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

5 Conclusões e Trabalho Futuro

O método utilizado no capítulo 3 deste trabalho levou-nos à obtenção de estimativas explícitas para a constante de Lipschitz da solução de dois problemas de Lagrange particulares. Através de um exemplo, pudemos verificar que estas estimativas são de ótima qualidade, atingindo mesmo o valor real em alguns casos específicos.

Constatamos ainda que, o método numérico aplicado garante-nos uma excelente aproximação (finita) da solução real, após um número de iterações que pode ser estimado a priori, utilizando apenas os dados do problema.

No capítulo 4, obtivemos um majorante para a complexidade do Método de Ponto Interior aplicado ao problema de rastreamento regido pela equação do calor. Para isso, construímos uma aproximação adequada da solução real, através do uso do princípio de máximo (Teorema 2.8.) e da função Γ . Este problema admite uma resolução eficaz com recurso a este método.

Futuramente, seria interessante procurar classes de problemas onde as estimativas encontradas possam ser melhoradas. Num outro sentido, talvez até mais interessante, está a busca por alargar estas estimativas a classes de problemas mais gerais.

O conhecimento de uma estimativa para a constante de Lipschitz da solução de um problema de otimização pode também levar-nos à obtenção de um método de otimização para problemas de dimensão infinita, através da aproximação da solução ótima por funções de classe C^1 .

No que toca ao problema de rastreamento, um caminho futuro será a generalização dos resultados encontrados para um problema regido por uma equação parabólica mais geral.

Referências

- [1] Badkoubeh A. e Guchuan Z., *Tracking Control of a Linear Parabolic PDE with In-domain Point Actuators*, World Academy of Science, Engineering and Technology, Vol. 5, No. 11, 2011, pp. 650-655.
- [2] Bernstein S., *Sur les équations du calcul des variations*, Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup., Vol. 3, 1912, pp. 431-485.
- [3] Byrnes I., Gilliam S., Isidori A. e Shubov I., *Interior Point Control of a Heat Equation Using Zero Dynamics Design*, American Control Conference, 2006 Jun 14-16, Minneapolis, MN, IEEE Conference Publications, 2006.
- [4] Cannarsa P., Frankowska H. e Marchini E.M., *Existence and Lipschitz regularity of solutions to Bolza problems in optimal control*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 361, 2009, pp. 4491-4517.
- [5] Cellina A., *The classical problem of the calculus of variations in the autonomous case: Relaxation and Lipschitzianity of solutions*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 356, 2004, pp. 415-426.
- [6] Cellina A. e Ferriero A., *Existence of Lipschitzian solutions to the classical problem of the calculus of variations in the autonomous case*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, Vol. 20, 2003, pp. 911-919.
- [7] Cesari L., *Optimization - Theory and Applications*, Springer, New York, 1983.
- [8] Clarke F.H., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, New York, 1983.
- [9] Clarke F.H. e Vinter R., *Regularity properties of solutions to the basic problem in the calculus of variations*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 289, 1985, pp. 73-98.
- [10] Clarke F.H. e Vinter R., *A regularity theory for variational problems with higher order derivatives*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 320, 1990, pp. 227-251.

- [11] Clarke F.H. e Vinter R., *Regularity properties of optimal controls*, SIAM J. Control and Optimization, Vol. 28, pp. 980-997.
- [12] Gamkrelidze R.V., *Principles of Optimal Control*, Plenum Press, New York, 1978.
- [13] Gonzalez Andrade S, Borzi A., *Multigrid second-order accurate solution of parabolic control-constrained problems*, Computational Optimization and Applications, Vol. 51, 2012, pp. 835-866.
- [14] Huntley E., *Optimal boundary control of a tracking problem for a parabolic distributed parameter system*, International Journal of Control, Vol. 42, No. 2, 1985, pp. 411-431.
- [15] Kolmogorov A.N. e Tikhomirov V.M., *Epsilon-entropy and epsilon-capacity of sets in function space*, Selected Works of A. N. Kolmogorov, V. III: Information Theory and the Theory of Algorithms, Shiriyayev, Ed., Springer, 1993, pp. 86-170.
- [16] Kruse F., Ulbrich M., *A self-concordant interior point approach for optimal control with state constraints*, SIAM Journal of Optimization, Vol. 25, 2015, pp. 770-806.
- [17] Ladyženskaja O., Solonnikov V. e Ural'ceva N., *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, 1968.
- [18] Lions J.L., *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod, 1969.
- [19] Malanowski K., *Convergence of approximations vs. regularity of solutions for convex, control-constrained optimal-control problems*, Applied Mathematics and Optimization, Vol. 8, 1981, pp. 69-95.
- [20] Nesterov Y. e Nemirovskii A., *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*, SIAM, Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- [21] Nesterov Y., *Introductory Lectures on Convex Programming*, Kluwe Academic Publishers, 2004.

- [22] Oliveira M. e Smirnov G., *On the Complexity of the Path-following Method for a Tracking Problem Governed by Parabolic Equations*, Pure and Applied Functional Analysis, Vol. 1, No 2, 2016, pp. 257-275.
- [23] Oliveira M. e Smirnov G., *On the complexity of tracking problem for heat equations*, 14th International Conference on Computational Science and Its Applications, 2014 Jun 30-Jul 3, Guimarães, IEEE Conference Publications, 2014. DOI: 10.1109/ICCSA.2014.26
- [24] Pandolfi L. e Priola E., *Tracking Control of Parabolic Systems. In: System Modeling and Optimization*, Springer US, Vol. 166, 2005, pp. 135-146.
- [25] Pisano A., Orlov Y. e Usai E., *Tracking Control of the Uncertain Heat and Wave Equation Via Power-fractional and Sliding-mode Techniques*, SIAM J. Control Optim., Vol. 49, No 2, 2011, pp. 363-382.
- [26] Rebelo P. e Smirnov G., *Uniform cooling of alloys*, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 11, No 3, 2005, 413-432.
- [27] Sarychev A.V. e Torres D.M., *Lipschitzian Regularity of Minimizers for Optimal Control Problems with Control-Affine Dynamics*, Appl Math Optim, Vol. 41, 2000, pp. 237-254.
- [28] Smirnov G.V., *Extremal problems for differential inclusions with phase constraints*, Soviet. Math. Dokl., Vol. 38, 1989, 308-311.
- [29] Smirnov G.V., *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*, Graduate Studies in Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, Vol. 41, 2002.
- [30] Stonier R. e Drumm M., *Optimal boundary control of a tracking problem for a parabolic distributed system with open-loop control using evolutionary algorithms*, Journal of Systemics, Cybernetics and Informatics, Vol. 1, No. 4, 2003, pp. 38-43.
- [31] Tonelli L., *Sur une méthode directe du calcul des variations*, Rend. Circ. Mat., Palermo, Vol. 39, 1915, pp. 233-264.

- [32] Torres D.M., *Lipschitzian regularity of the minimizing trajectories for nonlinear optimal control problems*, Math. Control Signals Systems, Vol. 16, 2003, pp. 158-174.
- [33] Traub J.F., Woźniakowski H. e Wasilkowski G.W. *Information-Based Complexity*, Academic Press, 1988.
- [34] Tröltzsch F., *Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods and Applications*, American Mathematical Society, 2010.
- [35] Vinter R., *Optimal Control*, Birkhäuser, Boston, 2010.
- [36] Zaslavski A.J., *Nonconvex Optimal Control and Variational Problems*, Springer, New York, 2013.