Os diferentes contextos do Cálculo Fluxionário de Anastácio da Cunha

João Caramalho Domingues

Centro de Matemática
Universidade do Minho
e-mail: `jcd@math.uminho.pt`

Uma das mais conhecidas originalidades dos *Principios Mathematicos* de José Anastácio da Cunha [1790] é a sua definição de «fluxão» que, numa famosa apreciação de Youschkevitch [1973, 19], constitui a «primeira [...] definição analítica rigorosa de diferencial, retomada e utilisada mais tarde pelos matemáticos do século XIX». O primeiro desses matemáticos do século XIX a retomarem essa definição (ou pelo menos a definirem diferencial analítica e rigorosamente) seria Cauchy, em 1823.

No entanto, já numa recensão à tradução francesa dos *Principios* o matemático italiano Vincenzo Brunacci dizia que essa definição de Anastácio da Cunha era «em substância, a mesma que se dá hoje em dia [1816] das diferenciais», referindo-se a certos «novos métodos» [Brunacci, 1816].

Mas então a definição de fluxão de Anastácio da Cunha foi precursora de novos métodos populares já em 1816 ou de métodos analíticos rigorosos que se implantaram apenas mais tarde? E que «novos métodos» eram esses?

Para entender esta questão é necessário antes de mais ter em conta que o contexto europeu da análise mudou muito nos quase 25 anos que decorreram entre a morte de Anastácio da Cunha e a publicação da tradução francesa do seu livro. Seguindo parcialmente [Grattan-Guinness, 1990], podemos falar em três tradições para caracterizar o contexto da época da composição original. Antes de mais a tradição dos limites, onde sobressai Newton, um dos heróis de Anastácio da Cunha, mas também d'Alembert — o conceito de limite era usada de forma vaga e intuitiva, com poucas demonstrações, as quantidades consideravam-se como fluindo ou variando e em geral os conceitos eram geométricos. Opunha-se-lhe a tradição das diferenciais, de Leibiniz, que utilizava quantidades infinitamente pequenas — os conceitos eram também geométricos, com excepção da versão euleriana, se incluirmos Euler nesta tradição. Grattan-Guinness apresenta como terceira alternativa o cálculo de funções de Lagrange, baseada em expansões em séries de potências, mas em 1787 esta alternativa era ainda apenas uma sugestão. Uma verdadeira terceira alternativa, bem desenvolvida, era a análise pura de Euler, que embora utilizasse também diferenciais e infinitamente pequenos, se distinguia da tradição leibiniziana pela sua ênfase em quantidades analíticas abstractas e em funções como expressões analíticas.

Anastácio da Cunha não se enquadra plenamente em nenhuma destas tradições. Usa a palavra «infinitésimo», mas com um significado próprio, e (em [Cunha, 1790]) a notação leibniziana, mas a terminologia newtoniana; um manuscrito (com texto incompleto) sugere que uma versão anterior incluía uma definição de «limite» [Domingues *et al.*, 2006], mas esta foi abandonada. Provavelmente Anastácio da Cunha terá evoluído duma abordagem baseada em limites para uma abordagem muito própria mas com importantes influências eulerianas — é de notar que na secção de [Cunha, 1790] dedicada ao cálculo fluxionário o conceito de função é definido logo no início (o que não era muito comum), «fluxão» é definida para funções e não para quantidades variáveis (no mínimo muito raro) e a palavra «variável» refere-se a expressões que representam vários valores e não a quantidades que variam (o que só por si parece remeter para Euler [Domingues, 2004]).

Nas décadas seguintes o panorama da análise matemática mudou consideravelmente. Na década de 1790 Lagrange e outros desenvolveram a sua sugestão de 1772, criando uma versão da análise que se tornaria canónica nas primeiras décadas do século XIX. Nesta versão assumia-se que o incremento de qualquer função podia ser expandido em série de potências ($f(x+h) = f(x) + p\,h + q\,h^2 + \ldots$) e definia-se «derivada» da função como o coeficiente do incremento da variável nessa expansão ($f'(x) = p$, por definição) e/ou «diferencial» como o termo de primeira ordem dessa expansão (escrevendo $dx = h$, $df(x) = p\,dx$, por definição). O resultado era «análise pura» (e muitos detalhes técnicos inspiravam-se em Euler).

Brunacci foi um dos difusores da análise lagrangiana em Itália, e é neste contexto que deve ser lida a sua recensão de Cunha [1790]. Brunacci salienta que a palavra «infinitésimo» é aplicada «não à ideia de quantidade infinitamente pequena, mas à de uma variável que se pode tornar menor do que qualquer grandeza proposta; diferindo apenas no nome dos incrementos indeterminados das variáveis segundo os novos métodos» (ou seja, h na série acima); e, mais surpreendentemente, que «a definição das fluxões, ainda que mais complicada, é em substância a mesma que se dá hoje em dia das diferenciais».

Não é completamente claro como é que a definição de Anastácio da Cunha ($df(x)$ é tal que $\frac{df(x)}{dx}$ é constante e $\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} - \frac{df(x)}{dx}$ é infinitésimo se

dx for infinitésimo) é «em substância» a mesma que a definição de diferencial como o termo $p\,dx$ na série $f(x+dx) = f(x) + p\,dx + q\,dx^2 + \ldots$.

Talvez a resposta esteja numa memória de Brunacci [1810] sobre as diferenças entre «a metafísica do cálculo sublime de Lagrange e as metafísicas dos métodos anteriores»: o cálculo de funções lagrangiano é um ramo da álgebra ordinária — não introduz novas operações nem novos princípios, as quantidades são consideradas sob o mesmo aspecto; por outro lado, o cálculo infinitesimal leibniziano requer quantidades infinitesimais; o método dos limites considera quantidades no preciso momento em que deixam de ser quantidades, o que levanta dúvidas; e o método das fluxões original depende de ideias físicas (velocidade). Sob esse ponto de vista, de facto, o cálculo fluxionário de Anastácio da Cunha partilhava com o cálculo lagrangiano o serem ramos da álgebra ordinária — isto é, puramente analíticos.

Referências

Vincenzo Brunacci, 1810. *Memoria premiata dall'Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova*, Pádua: Nicolò Zanon Bettoni.

Vincenzo Brunacci (anonimamente), 1816. Recensão de [Cunha, 1790, ed. 1816], *Giornale di Fisica, Chimica, Storia Naturale, Medicina ed Arti* IX, págs. 153–154; reimpr. com trad. port. em [Domingues, 2011, 95–98].

José Anastácio da Cunha, 1790. *Principios Mathematicos*, Lisboa. Trad. francesa por João Manuel d'Abreu, *Principes Mathématiques*, Bordeaux: André Racle, 1811; republ. como *Principes de Mathématiques*, Paris: Courcier, 1816.

João Caramalho Domingues, 2004. «Variables, limits, and infinitesimals in Portugal in the late 18th century», *Historia Mathematica* 31, 15–33.

João Caramalho Domingues, 2011. «Uma recensão italiana dos *Princípios Matemáticos* de José Anastácio da Cunha», *Boletim da SPM* 65, 89–98.

João Caramalho Domingues, Maria Elfrida Ralha, José Francisco Rodrigues, Jaime Carvalho e Silva, 2006. «Notas ao manuscrito *Principios do Calculo Fluxionario: Março de 1780* de José Anastácio da Cunha», em M. E. Ralha *et al.* (eds.), *José Anastácio da Cunha: O Tempo, as Ideias, a Obra e... os Inéditos*, Braga: ADB/CMAT/CMUP, I, 265–275.

Ivor Grattan-Guinness, 1990. «Da Cunha's calculus in its time», em Maria de Lurdes Ferraz *et al.* (eds.), *Anastácio da Cunha 1744/1787 — o matemático e o poeta*, Lisboa: INCM, 53–62.

A. P. Youschkevitch, 1973. «J. A. da Cunha et les fondements de l'analyse infinitésimale», *Revue d'histoire des sciences* 26, 3–22.