Investigação,
Práticas e Contextos
em Educação
2016

Ensino de frações no 1.º ciclo do ensino básico: o significado quociente

Paula Cardoso & Ema Mamede
CIEC, Universidade do Minho, Portugal

Resumo

As orientações curriculares para a Matemática no ensino básico preconizam uma abordagem às frações durante o 1.º ciclo. Essa abordagem inclui, para além dos significados parte-todo, medida e operador, o trabalho com frações no significado quociente. Perante o tradicional, e eminentemente exclusivo, recurso dos professores aos significados parte-todo e operador para abordar o conceito de fração, é pertinente averiguar-se até que ponto os docentes estarão a adaptar-se ao currículo. A investigação desenvolvida procurou responder às seguintes questões: 1) Que papel atribuem os professores ao significado quociente na introdução do conceito de fração? 2) Como abordam este significado nas suas aulas? 3) Que dificuldades apresentam nessa abordagem? Os resultados da observação das aulas de dois professores do 1º ciclo, e subsequente análise qualitativa, sugerem que os docentes não conhecem em profundidade as orientações curriculares, e particularmente que não estão familiarizados com o significado quociente. Os professores tendem a reduzir o significado quociente ao significado parte-todo, com o qual manifestam mais familiaridade. Revelam ainda dificuldades na abordagem ao conceito de fração equivalente no contexto do significado quociente.

Palavras-chave: frações, significados de fração, conhecimento do professor.

Abstract

The Portuguese mathematics curriculum requires the teaching of fractions on the Primary school levels. Besides the part-whole, measure and operator interpretations, these guidelines imply the work with the quotient interpretation. Since teachers traditionally, and mainly, use the part-whole and operator interpretations to introduce the concept of fraction, it becomes important to know how the curriculum is actually being followed. The carried out investigation tried to answer the following questions: 1) What role do teachers give to the quotient interpretation to introduce fractions? 2) How was this interpretation explored when fractions were taught in the classroom? 3) What difficulties do teachers reveal when exploring these issues? The results of the observation of two Portuguese primary school teachers' practices, and subsequent qualitative analysis, suggest that teachers do not know in depth the guidelines of the mathematics curriulum, and particularly that they are not familiarized with the quotient interpretation of fractions. Teachers tend to reduce the quotient interpretation of fractions to their familiar part-whole interpretation. Teachers also seem to have difficulties while exploring equivalent fractions in the quotient interpretation of fractions.

Keywords: fractions, interpretations of fractions, teacher's knowledge.

Introdução

O conceito de fração é considerado complexo, e simultaneamente um conceito fundamental na aprendizagem matemática das crianças. Vários trabalhos de investigação identificam dificuldades dos alunos na aprendizagem deste conceito (ver Behr, Wachsmuth, Post & Lesh, 1984; Kerslake, 1986; Monteiro, Pinto & Figueiredo, 2005). Por outro lado, a investigação revela que os próprios professores, para além de dificuldades semelhantes com o conceito, consideram difícil o seu ensino (ver Alves & Gomes, 2009; Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Cardoso & Mamede, 2015; Post, Harel & Lesh, 1991).

As mais recentes orientações curriculares para a Matemática no ensino básico preconizam a abordagem ao conceito de fração, de forma aprofundada, ainda durante o 1.º ciclo (ver DGIDC, 2007; DGE, 2013). No entanto, pouco se sabe sobre a prática de ensino dos professores no âmbito dos novos currículos. Este trabalho procura conhecer melhor a prática de ensino de frações no 1.º ciclo.

Ensinar frações no 1.º ciclo do ensino básico

Possuir um completo conceito de fração implica saber representar e operar com frações em diferentes significados ou interpretações (Nunes, Bryant, Pretzlik, Wade, Evans & Bell, 2004). A literatura apresenta classificações de significados ou interpretações para as frações propostas por vários autores.

É possível encontrar na literatura diferentes classificações de significados ou interpretações de fração. Kieren (1976), baseado no conceito de 'subconstructo', distinguiu sete interpretações para o conceito de fração: quociente; medida (inclui o modelo parte-todo); razão; operador. Posteriormente, Behr *et al.* (1983), baseados na classificação inicial de Kieren, distinguiram as mesmas situações embora considerando medida e parte-todo como dois modelos distintos. Mais recentemente Nunes *et al.* (2004) propõem uma classificação de situações em que as frações são utilizadas: (1) situações parte-todo, que envolvem a divisão de quantidades contínuas, e em que o denominador da fração representa o número de partes em que o todo é dividido e o numerador indica o número dessas partes que são retiradas, (por exemplo, um bolo é dividido em 3 partes iguais e 2 foram comidas, o que significa que foram comidos 2/3 do bolo); (2) situações quociente, em que o denominador da fração representa o número de recipientes e o numerador representa o número de itens inteiros contínuos a dividir pelos recipientes (por exemplo, 2/3 significa que 3 amigos vão repartir de forma justa 2 bolos). Neste tipo de situações, a fração 2/3 representa ainda a parte de bolo que cada criança vai comer, independentemente da forma como o bolo foi cortado; (3) situações operador que envolvem quantidades discretas tomadas como um todo, e em que o denominador representa o número de grupos iguais em que o conjunto de elementos foi dividido e o numerador representa o número desses grupos que lhe foram retirados (por exemplo, o Zé tem 12 berlindes que separou em 3 grupos iguais levando para a escola apenas dois desses grupos; o Zé levou 2/3 dos seus berlindes para a escola, ou seja, levou 8 berlindes); e (4) situações de quantidades intensivas em que os números envolvidos na escrita da fração representam relações proporcionais, sendo o todo irrelevante (por exemplo, se 1 litro de sumo é feito com um copo de concentrado de sumo e 3 copos de água, teremos sumo com a mesma concentração e sabor se produzirmos 2 litros de sumo com 2 copos de concentrado de sumo a 6 copos de água). Facilmente se entende que estes diferentes significados de fração possam afetar, de modo divergente, a compreensão do conceito de fração pelas crianças.

Resultados obtidos em estudos nacionais (ver Mamede, 2007; Mamede, Nunes & Bryant, 2005) e internacionais (ver Nunes *et al.*, 2004; Streefland, 1991) sugerem que o significado quociente facilita a ligação ao conhecimento informal dos alunos sobre frações. Mas, como abordam os professores este significado?

Em Portugal, as atuais orientações curriculares para o 1.º ciclo do ensino básico apresentam uma nova abordagem ao ensino do conceito de fração que inclui os significados quociente, parte-todo, medida e operador (ver DGE, 2013; DGIDC, 2007). Tradicionalmente, a abordagem ao conceito de fração na sala de aula recai eminentemente nos significados parte-todo e operador. Face a orientações curriculares que poderão exigir do professor práticas de ensino consideradas inovadoras, torna-se pertinente averiguar até que ponto os docentes estarão a adaptar-se ao novo currículo.

Conhecimento dos professores sobre os números racionais

Estudos prévios que se vêm debruçando sobre o conhecimento dos professores relativamente aos números racionais identificam dificuldades diversas. Post, Harel, Behr e Lesh (1991) aplicaram um inquérito a 167 professores (níveis 4-6) com o objetivo de gerar perfis relativamente aos sues conhecimentos sobre os números racionais. Em geral, 20% a 30% dos professores obteve menos de 50% de pontuação no inquérito. Cerca de um terço das respostas às questões sobre a ordenação de frações e metade das questões sobre equivalência foram incorretas.

Em Portugal, Alves e Gomes (2009) entrevistaram quatro professores do 1.º ciclo do ensino básico com o objetivo de analisar o seu conhecimento no âmbito do ensino e aprendizagem dos números decimais. Os resultados evidenciaram nomeadamente dificuldades em apresentar uma definição de número decimal e em reconhecer o conjunto dos números racionais como um conjunto denso. Mais recentemente, Cardoso e Mamede (2015) entrevistaram 30 professores do 1.º ciclo do ensino básico com o intuito de analisar o seu conhecimento sobre o conceito de fração. Os resultados obtidos revelaram, nomeadamente, dificuldades dos professores em reconhecer o conjunto dos números racionais como um conjunto denso e em apresentar uma definição correta do conceito de fração. Relativamente aos significados de fração, apenas 4% das respostas às questões envolvendo a representação pictórica de frações no significado quociente foram consideradas corretas. Frequentemente os professores argumentaram não perspetivar a fração como uma relação de duas variáveis de natureza diferente. Já no que concerne à representação pictórica no significado parte-todo, os professores revelaram grande familiaridade com a mesma (90% das respostas a este tipo de questões foi considerada correta). Finalmente, no âmbito do significado operador, alguns professores não identificaram a representação pictórica de uma fração quando o número de elementos era múltiplo do valor do denominador da fração dada, mas 83% das respostas a este tipo de questões foi considerada correta.

Porém, são escassos os estudos centrados na prática do professor relativamente ao conceito de fração. A investigação aqui descrita pretende ser um contributo para este ramo específico de pesquisa, analisando a prática do professor relativamente à abordagem do significado quociente de fração. Para tal, procurou responder-se às seguintes questões: 1) Que papel atribuem os professores ao significado quociente na introdução do conceito de fração? 2) Como abordam este significado nas suas aulas? 3) Que dificuldades apresentam nessa abordagem?

Metodologia

Participantes

Foram observadas as aulas de dois professores de uma escola pública do distrito de Braga aquando da introdução do conceito de fração tendo por base o significado quociente. Os participantes, P1 e P2, com 13 e 9 anos de experiência de ensino, lecionavam, respetivamente, a alunos do 2.º e 3.º anos de escolaridade. Os alunos em causa não haviam sido, até à data, formalmente introduzidos ao conceito de fração.

O trabalho colaborativo

O programa de trabalho colaborativo incluiu: cinco sessões de trabalho envolvendo os professores e a investigadora (uma das autoras deste trabalho); três aulas observadas, ao longo de três semanas, tendo cada uma a duração de 90 minutos; entrevistas individuais semi-estruturadas depois de cada aula observada; três sessões, uma por semana, para discussão e reflexão sobre as práticas dos professores.

As sessões de trabalho para preparar as aulas incluíram: a) análise e discussão dos diferentes significados de fração referidos nas orientações curriculares; b) análise e discussão das propostas dos professores e das propostas do investigador para introdução do conceito de fração. O presente artigo debruça-se sobre alguns dos resultados obtidos com base nas duas primeiras aulas observadas. As aulas e sessões de trabalho foram áudio gravadas, tendo sido ainda realizadas notas de campo.

Resultados

O significado quociente e a representação pictórica

P1, professor a lecionar, à data, uma turma do 2.º ano de escolaridade, optou por, previamente à introdução do conceito de fração no significado quociente, introduzir formalmente a operação de divisão, bem como a divisão como operação inversa da multiplicação. Numa mesma aula, P1 abordou demasiadas ideias matemáticas, sem que os alunos tivessem tempo para consolidá-las. A inconsistência didática verificada decorreu, nomeadamente, de uma dificuldade em considerar que a introdução ao conceito de fração pode prescindir, por um lado, da representação simbólica da operação de divisão e, por outro, da abordagem da operação de divisão como inversa da multiplicação.

A seleção de tarefas e de materiais para a aula é de uma importância crucial e requer que o professor anteveja eventuais respostas dos alunos para, em sala de aula, promover uma discussão matemática mais frutífera. Para introduzir o conceito de fração no significado quociente, P1 apresentou aos alunos uma situação de partilha equitativa de uma tablete de chocolate por dois meninos. Na folha que afixou no quadro, para além de dois meninos, estava representada uma tablete que se encontrava dividida em dezoito partes iguais. P1 registou as respostas dos alunos no quadro, destacando que cada menino comeria metade de uma tablete de chocolate. No entanto, não destacou respostas como, por exemplo, "come 9 [pedaços]", "come 3 filas", por não se enquadrarem nos objetivos, portanto limitados, pré-estabelecidos para a tarefa. Assim sendo, a exploração desta tarefa por P1 levantou seguramente dúvidas entre os alunos, dado não ter sido esclarecida a unidade de referência em causa em cada uma das respostas apresentadas (ver Transcrição 1).

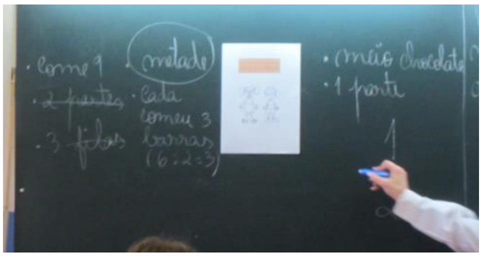

Figura 1 — Realização de uma tarefa sobre a divisão de uma tablete de chocolate por duas crianças

P1 — [Regista no quadro as respostas: come 9; metade; meio chocolate; 2 partes; cada comeu 3 barras; uma parte; 3 filas (ver Figura 1)] Quem escreveu nove pedaços que explique porquê?
Aluno 1 (A1) — O chocolate tem dezoito bocadinhos. Se cortarmos ao meio ficam 9 para cada um.
[...]
P1 — Estão todas bem... Tirando a resposta das “2 partes”. Mas o que eu queria era a metade [assinala a resposta “metade” e prossegue referindo o significado do numerador e denominador na interpretação quociente (ver Figura 1)].

Transcrição 1 — Tarefa sobre a divisão de uma tablete de chocolate por duas crianças

O significado quociente e o significado parte-todo

Ambos os professores começaram por apresentar tarefas sobre a partilha equitativa, seguidas de tarefas sobre a representação de frações no significado quociente. Os alunos responderam com sucesso a estas questões, aplicando os seus conhecimentos sobre o significado dos valores do numerador e do denominador quando se tratava da interpretação quociente.

P2, a lecionar, à data, uma turma do 3.º ano de escolaridade, apresentou também tarefas sobre a ordenação de frações envolvendo o significado quociente, tendo aqui revelado fragilidades. Nomeadamente, não recorreu, como convinha, aos significados dos valores do numerador e do denominador na interpretação quociente, tendo antes recorrido a uma interpretação mais familiar: parte-todo. Por exemplo, numa das questões que colocou à turma, solicitava aos alunos que comparassem as frações $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{6}$. Terminou esta intervenção comparando, também com base no significado parte-todo, as frações $\frac{8}{20}$ e $\frac{11}{20}$ (ver Transcrição 2). A estratégia didática deste professor é questionável, uma vez que os alunos tinham sido introduzidos somente à interpretação quociente de fração, não dominando por isso o significado dos valores do numerador e do denominador na interpretação parte-todo. Atendo-se à interpretação quociente, já conhecida dos alunos, P2 poderia comparar as frações estabelecendo um raciocínio proporcional sobre as magnitudes envolvidas na fração.

Importa ainda fazer referência ao facto de, em ambos os pares de frações selecionados por P2 ($\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$ e $\frac{8}{20}$, $\frac{11}{20}$), os denominadores serem iguais. Este tipo de comparação não promove a abordagem a uma relação essencial para a compreensão da ordenação de frações: a relação inversa entre a magnitude da fração e o valor do denominador quando o valor do numerador se mantém.

P2 — Agora se olharmos para aqui [referindo-se a $\frac{3}{6}$] e se olharmos para aqui [referindo-se a $\frac{2}{6}$] quais são os meninos que comem mais?
A1 — [Silêncio]
P2 — Quantas partes comes nesta [apontando para $\frac{2}{6}$]?
Alunos — Três.
P2 — E quantas partes comes nesta [apontando para $\frac{2}{6}$]?
Alunos — Duas.
P2 — Então onde é que comes mais?
Alunos — É na primeira.
P2 — É na primeira. Se dividirmos alguma coisa em seis, aqui comem-se três partes [referindo-se a $\frac{3}{6}$] e aqui comem-se duas [referindo-se a $\frac{2}{6}$]. Onde é que se come mais?
Alunos — Na primeira [referindo-se a $\frac{3}{6}$].
P2 — Reparem neste exemplo [P2 escreve $\frac{11}{20}$ e $\frac{8}{20}$] No primeiro caso tenho 11 partes de 20 e no segundo tenho 8 partes de 20. Por isso come-se mais na primeira.

Transcrição 2 — Comparação dos pares de frações: $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$ e $\frac{8}{20}$, $\frac{11}{20}$.

O significado quociente e a equivalência de frações

P2 apresentou ainda tarefas sobre a equivalência de frações no significado quociente, tendo revelado aqui novamente algumas fragilidades. Por exemplo, numa tarefa sobre a partilha de 3 queijos por 6 amigos, A1 respondeu que cada amigo comeria $\frac{1}{2}$. Contudo, P2 induziu A1 a responder $\frac{3}{6}$, não fazendo referência ao conceito de fração equivalente implícito no comentário de A1. Estando o raciocínio proporcional naturalmente associado ao significado quociente, a resposta deste aluno poderia então, e deveria, ter constituído um mote para a exploração do conceito de fração equivalente (ver Figura 2 e Transcrição 3).

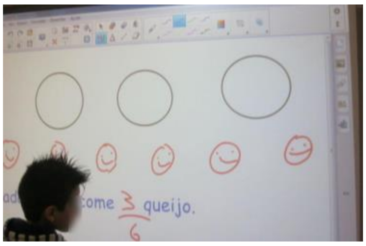

Figura 2 — Realização de uma tarefa sobre a partilha de três queijos por seis meninos.

A1 — [A1 responde a uma tarefa sobre a partilha de 3 queijos por 6 meninos] Dava dois meninos para cada queijo.
P2 — O A1 já viu ali uma relação de um queijo para dois meninos. Mas eu só quero que apresentes a fração. Segue a lógica do que fizemos antes.
A1 — [A1 responde corretamente $\frac{3}{6}$.] (ver **Erro! A origem da referência não foi encontrada.**)
P2 — Temos três queijos para seis meninos. Está certo?
Alunos — Está!

Transcrição 3 — Tarefa sobre a partilha de 3 queijos por 6 meninos

Face à insistência de alguns alunos em considerar que cada menino receberia metade de um queijo, P2 abordou a equivalência de frações, embora com recurso à realização de sequências dos valores do numerador e do denominador. Desta forma, P2 reduziu o que poderia ter sido uma abordagem ao conceito de fração equivalente no significado quociente a uma simples, e indesejável, realização de sequências de números inteiros (ver Figura 3 e Transcrição 4).

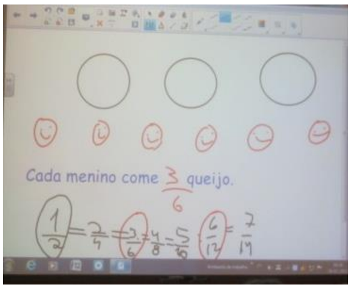

Figura 3 — Realização de uma tarefa sobre frações equivalentes a $\frac{1}{2}$

P2 — Alguém tem alguma coisa a acrescentar.
A1 — Três sextos é metade.
P2 — Porquê?
A1 — Porque três é metade de seis. [A1 escreve no quadro $\frac{1}{2}$]
P2 — Muito bem. Escreve outra fração que representa a metade.
A1 — [Por solicitação do professor A1 escreve no quadro: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14}$ (ver Figura 1)]
[...]
P2 — Em cima [apontando para o numerador] vai de um em um e em baixo [apontando para o denominador] ...
Alunos — Vai de dois em dois.

Transcrição 4 — Frações equivalentes a $\frac{1}{2}$

Discussão e conclusões

Os resultados deste estudo sugerem, para além de um conhecimento pouco aprofundado das orientações curriculares, dificuldades dos professores na introdução do conceito de fração com base no significado quociente. Estes aspetos ficaram evidentes, nomeadamente, em abordagens que não abrangiam o conceito de unidade de referência, a relação inversa entre a quantidade representada pela fração e o denominador quando o numerador se mantém e o conceito de fração equivalente. Por este motivo, o decurso das aulas não permitiu a consideração de respostas de alunos igualmente válidas para, e até mesmo favoráveis a, uma exploração e uma discussão mais abrangentes. Também Post, Harel, Behr e Lesh (1991) identificaram dificuldades dos professores (níveis 4-6) com a ordenação e equivalência de frações. No entanto, o trabalho destes investigadores consistiu na realização de entrevistas, ao passo que no presente estudo, os resultados resultam da observação de aulas. Cardoso e Mamede (2015) ao entrevistarem professores do 1.º ciclo identificaram dificuldades com o conceito de fração, em particular, com a representação de frações no significado quociente. De acordo com as autoras, a perspetiva dos professores sobre este significado parece ser condicionada pelo facto de não considerarem que uma fração pode representar uma relação entre duas variáveis de natureza diferente (itens e recipientes).

Perante as lacunas de conhecimento no significado quociente, e eventuais impasses que daí advêm em sala de aula, os professores tendem, à luz dos resultados deste estudo, a refugiar-se em áreas mais familiares, neste caso o significado parte-todo. O procedimento de redução à interpretação parte-todo poderá dever-se a uma tradição fortemente estabelecida de introduzir as frações com base neste significado. Com efeito, de acordo com Monteiro, Pinto e Figueiredo (2005), a primeira (e por vezes única) abordagem às frações é feita, nas escolas portuguesas, através das interpretações parte-todo e operador. Porém, um tipo de ensino centrado quase exclusivamente nestes significados limita o desenvolvimento do conceito de fração por parte dos alunos (ver Kerslake, 1986). Limita, por exemplo, o desenvolvimento da ideia de que uma fração pode ser maior do que 'um'. Efetivamente, o procedimento de começar com um 'todo' que é dividido em várias partes iguais das quais algumas são retiradas não se adapta facilmente, por exemplo, à fração 4/3 (Kerslake, 1986).

No entanto, com vista a uma perceção mais sólida destas e de outras dificuldades nas práticas de ensino dos professores, é naturalmente necessário alargar o horizonte comparativo deste tema de investigação através de mais estudos. O próprio trabalho colaborativo no âmbito destes estudos, tal como sucedeu relativamente à investigação aqui apresentada, contribui já para esclarecer eventuais dúvidas dos professores e para melhorar práticas de ensino.

Referências bibliográficas

Alves, B. & Gomes, A. (2009). O conhecimento de professores do 1º ciclo do Ensino Básico sobre a densidade do conjunto dos números decimais. In Gomes, A. (Ed.), *Elementary Mathematics Education. Proceedings of the 3rd International Meeting* (pp. 73-85). Braga: AEME-Universidade do Minho.

Ball, D., Lubienski, S. & Mewborn, D. (2001). Research on Teaching Mathematics: The Unsolved Problem of Teachers' Mathematical Knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching*, 4th ed., (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational-Number Concepts. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes (pp. 92-127). New York: Academic Press.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T. & Lesh, R. (1984). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15 (5), 323-341.

Cardoso (2009). *O conceito de fração: um estudo com alunos do 6.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado. Universidade do Minho.

Cardoso, P. & Mamede, E. (2015). O conceito de fração – um estudo sobre o conhecimento de professores do 1.º ciclo. *Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación*, Extr.(6), 229-233.

DGE (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Documento recuperado em 09/01/2010 em http://dge.mec.pt/metascurriculares/index.php?s=directorio&pid=17

DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. Ministério da Educação. Acedido em 4 de Janeiro, 2008, de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/PressReleases/Paginas/ProgramadeMatematicadoEnsinoBasico.aspx

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors – A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. Berkshire: NFER-NELSON.

Kieren, T. (1976). On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. In R. Lesh (Ed.), Number and Measurement: Paper from a Research workshop, (pp.101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Mamede, E. (2007). A compreensão do conceito de fracção – Que papel têm as situações*? Actas do XVIII SIEM*. Lisboa: APM.

Mamede, E., Nunes, T., Bryant, P. (2005). The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quotient situations. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, pp. 281-288). Melbourne: University of Melbourne.

Monteiro, C. & Pinto, H. (2005). A Aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, 14(1), 89-104.

Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Evans, D., Wade. J. & Bell, D. (2004). Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching. *Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences*, Paper presented in Paris: 28-31, January.

Post, T., Harel, G., Behr, M. & Lesh, R. (1991). Intermediate Teachers' Knowledge of Rational Number Concepts. In E. Fennema, T. Carpenter, S. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 177-198). NY: State University of NY Press.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.