

# **Cinemática de Mecanismos**

## **4. Análise de Velocidades**

**Paulo Flores**  
**J.C. Pimenta Claro**



**Universidade do Minho**  
Escola de Engenharia

Guimarães 2007

## ÍNDICE

<b>4. Análise de Velocidades.....</b>	<b>1</b>
4.1. Definição .....	1
4.2. Movimento Curvilíneo .....	4
4.3. Velocidade de um Ponto Num Sistema Móvel .....	7
4.4. Velocidade de um Corpo Rígido .....	10
4.5. Métodos Analíticos.....	12
4.6. Métodos Gráficos .....	19
4.7. Análise de Velocidades de Mecanismos Elementares .....	25

*Take to kinematics. It will repay you. It is more fecund than geometry; it adds a fourth dimension to space.*

Chebyshev to Sylvester

## 4. ANÁLISE DE VELOCIDADES

### 4.1. DEFINIÇÃO

Em mecânica, a velocidade mede a rapidez com que um corpo muda de posição ao longo do tempo. A velocidade pode ser estudada sob o ponto de vista vectorial (direcção, sentido e módulo) ou escalar. A velocidade média pode definir-se como sendo a razão entre um deslocamento e o intervalo de tempo necessário para efectuar esse deslocamento. Quando o intervalo de tempo tende para zero, a velocidade designa-se velocidade instantânea.

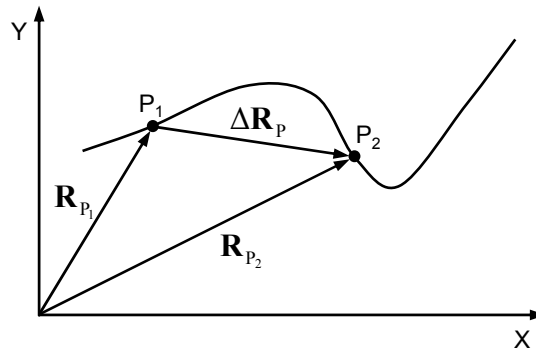


Figura 4.1 – Trajectória de um ponto.

A figura 4.1 ilustra a trajectória descrita por um ponto  $P$ , em que  $P_1$  e  $P_2$  representam duas posições do mesmo. Assim, o deslocamento relativo entre estas duas posições pode ser expresso por,

$$\Delta \mathbf{R}_P = \mathbf{R}_{P_2} - \mathbf{R}_{P_1} \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{R}_{P_1}$  e  $\mathbf{R}_{P_2}$  são os vectores que definem a localização do ponto  $P$  no início e fim do intervalo de tempo considerado. Assim, a velocidade média do ponto  $P$ , durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ , é dada por,

$$\mathbf{V}_{\text{média}} = \frac{\Delta \mathbf{R}_P}{\Delta t} \quad (4.2)$$

A velocidade instantânea, ou simplesmente velocidade, é o limite da razão dada pela equação (4.2), isto é,

$$\mathbf{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_P}{\Delta t} \quad (4.3)$$

ou seja,

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}_P}{dt} \quad (4.4)$$

ou ainda,

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}_p \quad (4.5)$$

Deve notar-se que, como  $\Delta \mathbf{R}_p$  é um vector, então o cálculo do limite ou derivada tem duas componentes, uma relacionada com o módulo e outra com a direcção.

Se um vector posição de um ponto for expresso em coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{R}_p = r^x \hat{\mathbf{i}} + r^y \hat{\mathbf{j}} + r^z \hat{\mathbf{k}} \quad (4.6)$$

então, a velocidade instantânea pode, facilmente, ser calculada como,

$$\dot{\mathbf{R}}_p = \dot{r}^x \hat{\mathbf{i}} + \dot{r}^y \hat{\mathbf{j}} + \dot{r}^z \hat{\mathbf{k}} \quad (4.7)$$

Na figura 4.2 está representado um corpo rígido que descreve um movimento de rotação em torno do eixo  $OA$ , ou seja, todos os pontos do corpo, tal como o ponto  $P$ , descrevem trajectórias circulares em torno de  $OA$ . A velocidade angular do corpo é representada pelo vector  $\boldsymbol{\omega}$ , cuja direcção é a mesma do eixo  $OA$  e o sentido é dado pela regra da mão direita. Designando o deslocamento angular de qualquer linha normal ao eixo de rotação por  $\Delta\theta$ , e o correspondente intervalo por  $\Delta t$ , então, a velocidade angular pode ser escrita como,

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (4.8)$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \quad (4.9)$$

ou ainda,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.10)$$

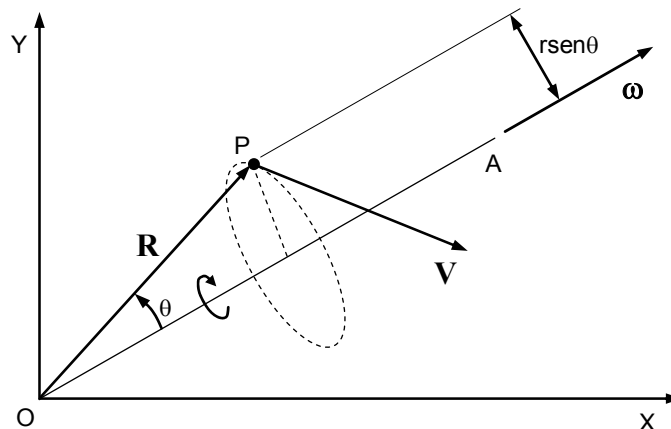


Figura 4.2 – Movimento de rotação.

Admitindo que o eixo de rotação é fixo, então o vector  $\mathbf{R}$  define a posição de um ponto  $P$  solidário com o corpo. Considerando o vector que resulta do produto externo  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$ , cujo módulo é  $\omega r \sin\theta$  em que  $\theta$  representa o ângulo formado pelos vectores  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{R}$ , e cuja direcção é tangente à trajectória em  $P$ , então, a velocidade do ponto  $P$  pode ser calculada como,

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (4.11)$$

A equação (4.11) representa, portanto, a velocidade linear de um ponto que pertence a um corpo rígido que roda em torno de um eixo fixo.

## 4.2. MOVIMENTO CURVILÍNEO

Nos mecanismos de uso corrente, os pontos dos corpos estão, de uma forma geral, constringidos de tal modo que descrevem movimentos conhecidos, tal como por exemplo, o movimento de rotação e o movimento de translação rectilínea.

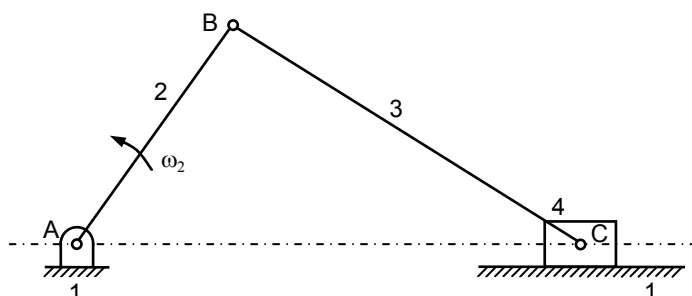


Figura 4.3 – Mecanismo biela-manivela.

Na figura 4.3 os pontos do corpo 2 descrevem trajetórias circulares, ao passo que os pontos do corpo 4 descrevem trajetórias rectilíneas. No entanto, os pontos que pertencem ao corpo 3 descrevem um movimento curvilíneo geral, o qual apresenta as propriedades dos movimentos de rotação e de translação.

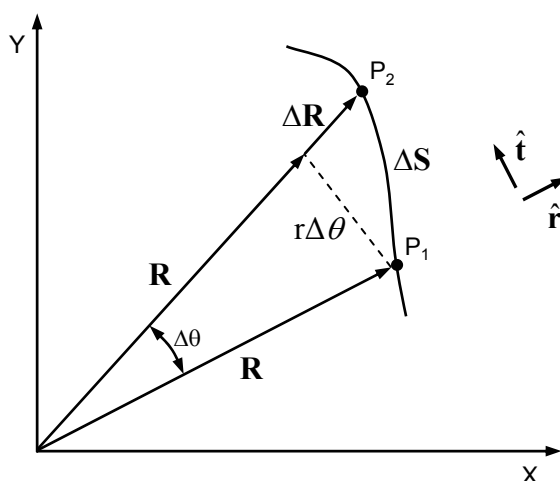


Figura 4.4 – Movimento curvilíneo.

Na figura 4.4 representa-se um ponto  $P$  que descreve uma trajetória curvilínea. O deslocamento descrito por este ponto, ao longo da trajetória  $P_1 \rightarrow P_2$ , é dado por  $\Delta S$ . Simultaneamente, o vector posição é alterado de  $\mathbf{R}$  para  $\mathbf{R} + \Delta \mathbf{R}$  e descreve também um movimento de rotação cuja amplitude é igual a  $\Delta \theta$ . Por isso, o deslocamento total efectuado pelo ponto  $P$  é igual à soma do deslocamento na direcção radial com o deslocamento na direcção tangencial, ou seja,

$$\Delta \mathbf{S} = r \hat{\mathbf{r}} + r \Delta \theta \hat{\mathbf{t}} \quad (4.12)$$

em que  $r$  é o módulo do vector  $\mathbf{R}$  e  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\hat{\mathbf{t}}$  representam os vectores unitários das direcções radial e tangencial. O vector  $\hat{\mathbf{t}}$  obtém-se rodando o vector  $\hat{\mathbf{r}}$  de um ângulo igual a  $90^\circ$  no sentido directo. O vector  $\hat{\mathbf{r}}$  é o vector unitário na direcção radial, isto

é, representa a direcção na qual o ponto  $P$  se deslocaria caso o vector  $\mathbf{R}$  variasse e  $\theta$  permanecesse constante, ao passo que o vector  $\hat{\mathbf{t}}$  é o vector unitário na direcção tangencial, isto é, representa a direcção na qual o ponto  $P$  se deslocaria caso  $\theta$  variasse e  $\mathbf{R}$  permanecesse constante.

A velocidade linear do ponto  $P$  é dada pela variação instantânea da posição em relação ao tempo,

$$\mathbf{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{S}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{r}{\Delta t} \hat{\mathbf{r}} + \frac{r \Delta \theta}{\Delta t} \hat{\mathbf{t}} \right) \quad (4.13)$$

ou seja,

$$\mathbf{V} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{t}} \quad (4.14)$$

ou ainda,

$$\mathbf{V} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \omega \hat{\mathbf{t}} \quad (4.15)$$

em que  $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ .

Usando o produto vectorial, a equação (4.15) pode ser reescrita como,

$$\mathbf{V} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + \omega \times \mathbf{R} \quad (4.16)$$

O movimento curvilíneo pode ainda ser estudado de uma outra forma que se apresenta de seguida. A figura 4.5 ilustra um ponto em trajectória curvilínea. Ainda na mesma figura estão representados os vectores unitários associados aos eixos coordenados  $X$  e  $Y$ , bem como os vectores unitários relativos às direcções radial e tangencial do movimento do ponto  $P$ .

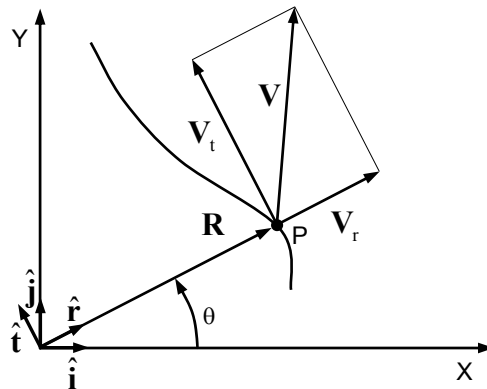


Figura 4.5 – Movimento curvilíneo geral.

O vector posição do ponto  $P$  é dado por,

$$\mathbf{R} = r \hat{\mathbf{r}} \quad (4.17)$$

A velocidade do ponto  $P$  obtém-se derivando a equação (4.17), isto é,

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad (4.18)$$

ou seja,

$$\mathbf{V} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \quad (4.19)$$

Por outro lado, da análise da figura 4.5 vem que,

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}} \cos \theta + \hat{\mathbf{j}} \sin \theta \quad (4.20)$$

$$\hat{\mathbf{t}} = -\hat{\mathbf{i}} \sin \theta + \hat{\mathbf{j}} \cos \theta \quad (4.21)$$

Então,

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = -\hat{\mathbf{i}} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + \hat{\mathbf{j}} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \quad (4.22)$$

ou seja,

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = (-\hat{\mathbf{i}} \sin \theta + \hat{\mathbf{j}} \cos \theta) \frac{d\theta}{dt} \quad (4.23)$$

ou ainda,

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \hat{\mathbf{t}} \frac{d\theta}{dt} \quad (4.24)$$

Assim, substituindo a equação (4.24) na equação (4.19) resulta que,

$$\mathbf{V} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{t}} \quad (4.25)$$

ou ainda,

$$\mathbf{V} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \omega \hat{\mathbf{t}} \quad (4.26)$$

Esta equação é igual à equação (4.15), em que os dois termos do segundo membro representam, respectivamente, as componentes radial e tangencial da velocidade do ponto  $P$ , como se ilustra na figura 4.5.



### 4.3. VELOCIDADE DE UM PONTO NUM SISTEMA MÓVEL

Ao analisar os movimentos dos vários elementos que constituem os mecanismos, é, muitas vezes, necessário e conveniente descrever o movimento de um ponto que se move relativamente a um sistema de referência móvel. Na figura 4.6, o movimento do ponto  $P$  em relação ao sistema de coordenadas  $xyz$  é conhecido. Este sistema de coordenadas move-se relativamente ao sistema de coordenadas fixo  $XYZ$ .

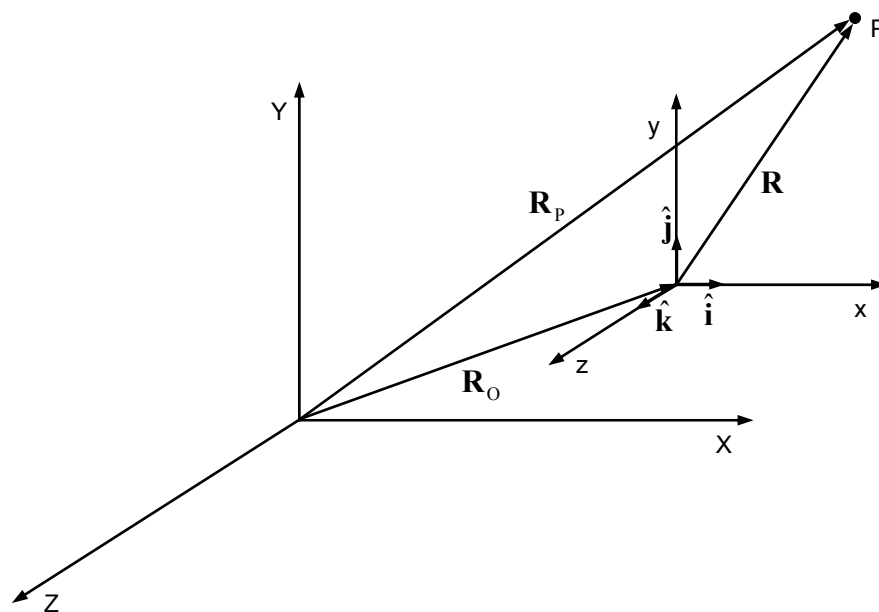


Figura 4.6 – Movimento de um ponto num sistema referencial móvel.

A posição do ponto  $P$  em relação ao sistema de coordenadas  $XYZ$  é dado por,

$$\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_O + \mathbf{R} \quad (4.27)$$

em que  $\mathbf{R}_O$  representa o vector posição da origem do sistema de coordenadas móvel e  $\mathbf{R}$  é o vector posição do ponto  $P$  em relação a este sistema de coordenadas.

Em coordenadas cartesianas o vector  $\mathbf{R}$  é escrito como,

$$\mathbf{R} = r^x \hat{\mathbf{i}} + r^y \hat{\mathbf{j}} + r^z \hat{\mathbf{k}} \quad (4.28)$$

em que  $r^x$ ,  $r^y$  e  $r^z$  são os módulos das componentes do vector  $\mathbf{R}$  nas direcções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, e  $\hat{\mathbf{i}}$ ,  $\hat{\mathbf{j}}$  e  $\hat{\mathbf{k}}$  são os vectores unitários correspondentes às mesmas direcções. Deve referir-se que estes vectores variam durante o movimento associado ao sistema de referência móvel.

A velocidade absoluta do ponto  $P$ , isto é, a velocidade expressa em relação ao sistema de coordenadas fixo  $XYZ$ , pode obter-se derivando em ordem ao tempo a equação (4.27), resultando em,

$$\mathbf{V}_P = \dot{\mathbf{R}}_P = \dot{\mathbf{R}}_O + \dot{\mathbf{R}} \quad (4.29)$$

Por outro lado, derivando a equação (4.28) em ordem ao tempo vem que,

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{r}^x \hat{\mathbf{i}} + \dot{r}^y \hat{\mathbf{j}} + \dot{r}^z \hat{\mathbf{k}} + r^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + r^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + r^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} \quad (4.30)$$

em que os três primeiros termos do segundo membro representam a velocidade do ponto  $P$  em relação ao sistema de coordenadas móvel  $xyz$ , a qual pode ser, por conveniência, escrita como,

$$\mathbf{V} = \dot{r}^x \hat{\mathbf{i}} + \dot{r}^y \hat{\mathbf{j}} + \dot{r}^z \hat{\mathbf{k}} \quad (4.31)$$

Considerem-se os três últimos termos do lado direito da equação (4.30). Assim, a velocidade do ponto que representa o *terminus* de um vector  $\mathbf{R}$ , que passa por um ponto fixo e roda em torno deste ponto com uma velocidade  $\omega$ , é dada por,

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (4.32)$$

Por outro lado, as derivadas dos vectores unitários podem ser expressas por,

$$\dot{\hat{\mathbf{i}}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{i}} \quad (4.33)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{j}}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{j}} \quad (4.34)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{k}}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{k}} \quad (4.35)$$

em que  $\omega$  representa a velocidade angular do sistema de coordenadas móvel  $xyz$  em relação ao sistema de coordenadas fixo  $XYZ$ .

Utilizando as equações (4.33), (4.34) e (4.35), pode escrever-se que,

$$r^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + r^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + r^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} = r^x (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{i}}) + r^y (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{j}}) + r^z (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{k}}) \quad (4.36)$$

ou seja,

$$r^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + r^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + r^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} = \boldsymbol{\omega} \times (r^x \hat{\mathbf{i}} + r^y \hat{\mathbf{j}} + r^z \hat{\mathbf{k}}) \quad (4.37)$$

ou ainda, usando a relação dada pela equação (4.28),

$$r^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + r^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + r^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (4.38)$$

Deve notar-se que a equação (4.38) representa a velocidade linear de um ponto que roda em torno de eixo fixo. Com efeito, pelo que acaba de ser exposto, a equação (4.30) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (4.39)$$

e, conseqüentemente, a velocidade do ponto  $P$  dada pela equação (4.29) pode ser expressa do seguinte modo,

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_O + \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (4.40)$$

em que,

$$\mathbf{V}_O = \dot{\mathbf{R}}_O \quad (4.41)$$

e onde  $\mathbf{V}_P$  é a velocidade do ponto  $P$  expressa no sistema de coordenadas fixo  $XYZ$ ,  $\mathbf{V}_O$  representa a velocidade linear da origem do sistema de coordenadas móvel  $xyz$  em relação ao sistema de coordenadas fixo  $XYZ$ ,  $\mathbf{V}$  é a velocidade do ponto  $P$  em relação ao sistema de coordenadas móvel  $xyz$ ,  $\omega$  representa a velocidade angular do sistema móvel relativamente ao sistema fixo e  $\mathbf{R}$  representa a distância da origem do sistema de coordenadas  $xyz$  ao ponto  $P$ .

Uma aplicação do que acaba de ser exposto pode ser vista ao estudar o movimento do mecanismo ilustrado na figura 4.7, em que a barra 2 roda com uma velocidade angular constante  $\omega_2$ . A velocidade do ponto  $B$  é, por isso, conhecida, a questão que se coloca é a de saber qual a velocidade do ponto  $C$ . O sistema de coordenadas fixo  $XY$  tem a origem em  $A$ , ao passo que o sistema de coordenadas móvel  $xy$  tem origem em  $B$ . Assim, a equação da velocidade do ponto  $C$  pode ser escrita como,

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_B + \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (4.42)$$

em que  $\mathbf{V}_C$  é perpendicular a  $CD$  e cujo módulo é desconhecido,  $\mathbf{V}_B$  é perpendicular a  $AB$  e tem módulo igual a  $\omega_2 AB$ ,  $\mathbf{V}$  é um vector nulo porque o ponto  $C$  é fixo em relação ao sistema de coordenadas móvel e  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$  é perpendicular a  $BC$  e em que  $\boldsymbol{\omega} = \omega_3$  e o módulo de  $\mathbf{R}$  é igual a  $BC$ . A direcção do vector  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$  pode obter-se pela aplicação da regra da mão direita.

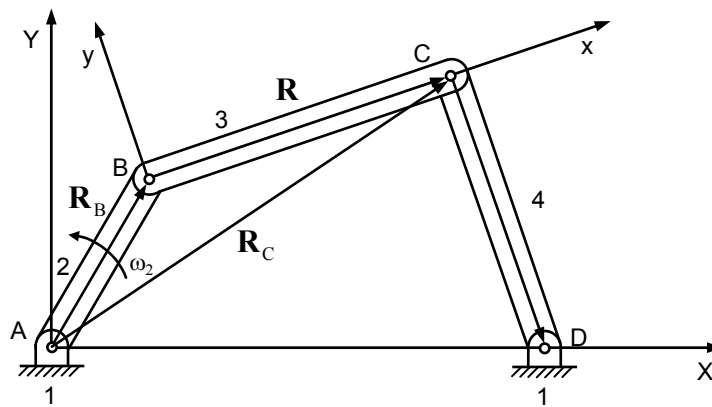


Figura 4.7 – Aplicação do movimento de um ponto num sistema referencial móvel.

#### 4.4. VELOCIDADE DE UM CORPO RÍGIDO

A figura 4.8 representa um corpo rígido animado de um movimento geral, cuja componente de rotação é caracterizada pela velocidade angular  $\omega$  e a componente de translação associada, por exemplo ao ponto  $A$ , é definida pela velocidade linear  $\mathbf{V}_A$ .

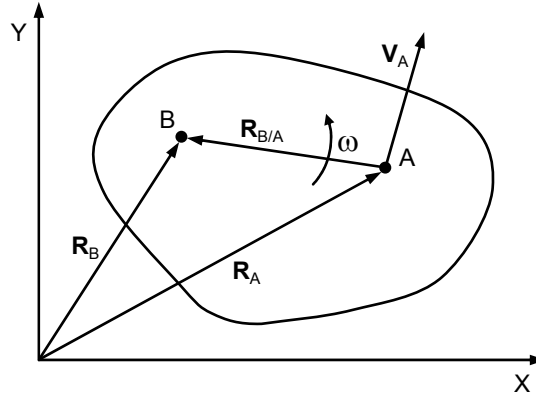


Figura 4.8 – Corpo rígido animado de um movimento geral ou misto.

A posição do ponto  $B$  pertencente ao corpo é definida por,

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_{B/A} \quad (4.43)$$

e a velocidade do mesmo ponto  $B$  é dada por,

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{B/A} \quad (4.44)$$

em que  $\mathbf{V}_A$  é a velocidade do ponto  $A$  que é conhecida à partida,  $\mathbf{V}_{B/A}$  é a velocidade de  $B$  em relação a  $A$ , *i.e.*, representa a velocidade de  $B$  num sistema de coordenadas que tem  $A$  como origem, ou seja,

$$\mathbf{V}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{B/A} \quad (4.45)$$

Substituindo a equação (4.45) em (4.44) vem que,

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{B/A} = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{B/A} \quad (4.46)$$

Comparando a equação (4.46) com a equação (4.42) verifica-se que a primeira é um caso particular da segunda, em que o ponto em estudo tem velocidade nula em relação ao sistema móvel, dado que pertence ao mesmo corpo rígido.

Da análise da equação (4.46) pode também concluir-se que a velocidade relativa de dois pontos quaisquer que pertençam ao mesmo corpo rígido é dada pela diferença das velocidades absolutas dos mesmos, ou seja,

$$\mathbf{V}_{B/A} = \mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A \quad (4.47)$$

Uma aplicação simples e concreta do que acaba de ser exposto é apresentada de seguida. A figura 4.9 mostra um mecanismo biela-manivela, em que a velocidade do ponto  $B$  é conhecida à partida e se pretende calcular a velocidade do ponto  $C$ . Como os pontos  $B$  e  $C$  pertencem ao mesmo corpo rígido, pode escrever-se que,

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_{C/B} \quad (4.48)$$

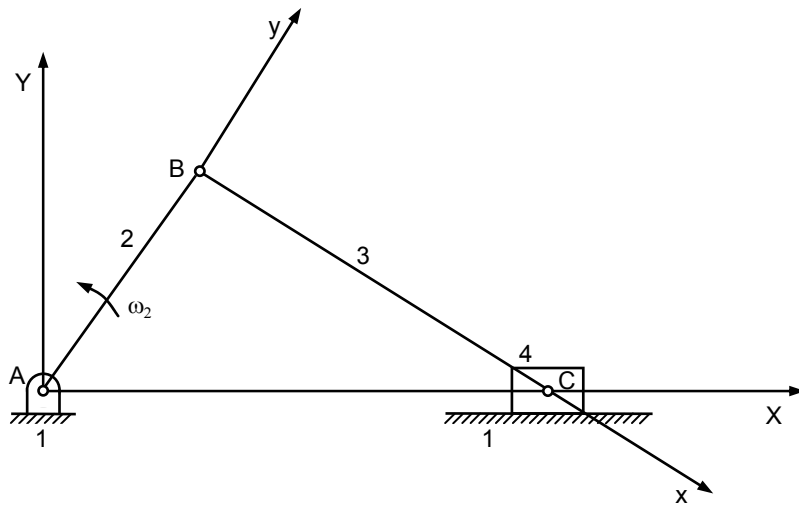


Figura 4.9 – Mecanismo biela-manivela.

## 4.5. MÉTODOS ANALÍTICOS

### 4.5.1. Método Algébrico

Considere-se o mecanismo biela-manivela representado na figura 4.10, em relação ao qual se pretende deduzir uma expressão que permita calcular, em cada instante, a velocidade da corredeira, ou seja, a velocidade do ponto C.

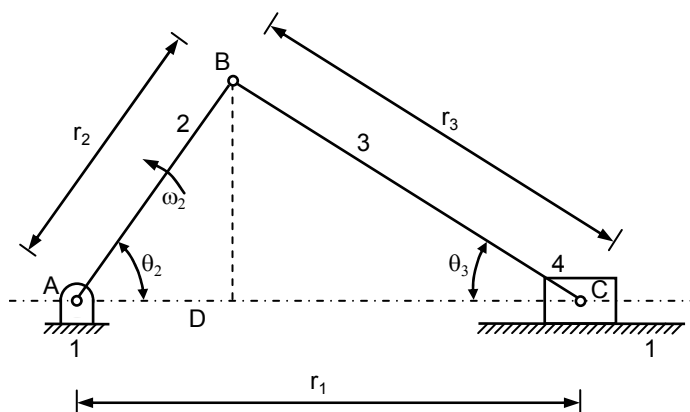


Figura 4.10 – Representação esquemática do mecanismo biela-manivela.

No presente estudo, considera-se que a manivela é o órgão motor, a qual roda em torno de A com uma velocidade angular constante, isto é,  $\theta_2 = \omega_2 t$ . Da análise de posição do mecanismo biela-manivela pode obter-se a seguinte expressão para a posição do ponto C,

$$r_1 = r_2 \cos \omega_2 t + \sqrt{r_3^2 - r_2^2 \sin^2 \omega_2 t} \quad (4.49)$$

ou, de uma forma simplificada, isto é, quando  $r_2/r_3 < 1/4$ ,

$$r_1 = r_2 \cos \omega_2 t + r_3 - \frac{r_2^2 \sin^2 \omega_2 t}{2r_3} \quad (4.50)$$

As equações (4.49) e (4.50) permitem calcular a posição da corredeira em função do tempo e das características geométricas do mecanismo biela-manivela. Assim, por simples derivação destas equações em ordem ao tempo, é possível determinar uma expressão que traduz a velocidade do ponto C, resultando, respectivamente,

$$v_1 = \dot{r}_1 = -\omega_2 r_2 \left( \sin \omega_2 t + \frac{r_2 \sin \omega_2 t \cos \omega_2 t}{\sqrt{r_3^2 - r_2^2 \sin^2 \omega_2 t}} \right) \quad (4.51)$$

$$v_1 = \dot{r}_1 = -\omega_2 r_2 \left( \sin \omega_2 t + \frac{r_2}{2r_3} \sin 2\omega_2 t \right) \quad (4.52)$$

Deve notar-se que  $\omega_2 r_2$  representa a componente tangencial da velocidade do ponto B. De um modo análogo, a aceleração da corredeira, isto é, do ponto C, poderá ser facilmente calculada por derivação das equações (4.51) e (4.52).

### 4.5.2. Método da Notação Complexa

A figura 4.11 ilustra o mecanismo biela-manivela, em que as respectivas barras foram substituídas por vectores posição equivalentes, formando, assim, uma cadeia cinemática fechada. Utilizando a notação complexa, a equação que traduz a cadeia cinemática constituída pelos vectores  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  e  $\mathbf{R}_3$  é dada por,

$$r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} - r_1 e^{i\theta_1} = 0 \quad (4.53)$$

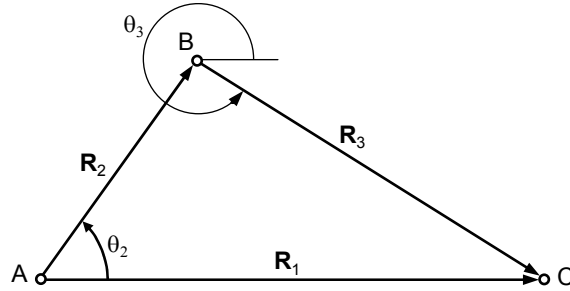


Figura 4.11 – Representação vectorial do mecanismo biela-manivela.

Derivando a equação (4.53) em ordem ao tempo obtém-se a expressão da velocidade da corrediça, ou seja,

$$\frac{dr_2}{dt} e^{i\theta_2} + r_2 i \frac{d\theta_2}{dt} e^{i\theta_2} + \frac{dr_3}{dt} e^{i\theta_3} + r_3 i \frac{d\theta_3}{dt} e^{i\theta_3} - \frac{dr_1}{dt} e^{i\theta_1} - r_1 i \frac{d\theta_1}{dt} e^{i\theta_1} = 0 \quad (4.54)$$

Atendendo a que  $r_2$ ,  $r_3$  e  $\theta_1$  são constantes, as respectivas derivadas são nulas, por outro lado, como,

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 \quad (4.55)$$

$$\frac{d\theta_3}{dt} = \omega_3 \quad (4.56)$$

$$\frac{dr_1}{dt} = v_1 \quad (4.57)$$

então, a equação (4.54) pode ser simplificada e reescrita como,

$$ir_2 \omega_2 e^{i\theta_2} + ir_3 \omega_3 e^{i\theta_3} - v_1 e^{i\theta_1} = 0 \quad (4.58)$$

Utilizando, agora, a fórmula de Euler, vem que,

$$ir_2 \omega_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) + ir_3 \omega_3 (\cos \theta_3 + i \operatorname{sen} \theta_3) - v_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) = 0 \quad (4.59)$$

Analisando a equação (4.59) observa-se que as incógnitas são  $\omega_3$  e  $v_1$ . Assim, atendendo a que  $\theta_1=0$ , separando as partes real e imaginária e resolvendo o sistema daí resultante em ordem às incógnitas, obtém-se,

$$\omega_3 = -\frac{r_2 \omega_2 \cos \theta_2}{r_3 \cos \theta_3} \quad (4.60)$$

$$v_1 = -r_2 \omega_2 (\operatorname{sen} \theta_2 - \cos \theta_2 \operatorname{tg} \theta_3) \quad (4.61)$$

O valor de  $\theta_3$  pode calcular-se utilizando a seguinte expressão, a qual se obtém da análise de posição do mesmo mecanismo,

$$\theta_3 = \arcsen\left(-\frac{r_2 \text{sen}\theta_2}{r_3}\right) \quad (4.62)$$

Deve salientar-se que este método, para além da expressão da velocidade da corrediça, permite também obter uma expressão para a velocidade angular da biela.

### 4.5.3. Método da Notação Matricial

O mecanismo biela-manivela, ilustrado na figura 4.12, é utilizado para demonstrar a aplicação do método da notação matricial no cálculo das velocidades. Na figura 4.12 as barras que constituem o mecanismo biela-manivela foram substituídas por vectores posição, os quais formam uma cadeia cinemática fechada.

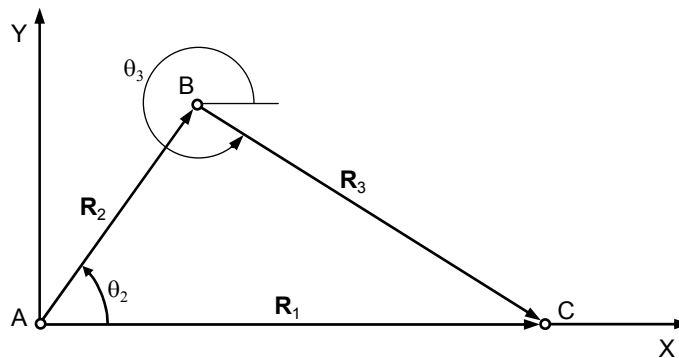


Figura 4.12 – Representação vectorial do mecanismo biela-manivela.

Da análise de posição do mecanismo biela-manivela, verifica-se que projectando os vectores  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  e  $\mathbf{R}_3$  segundo as direcções  $X$  e  $Y$ , obtém-se, respectivamente,

$$r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 - r_1 = 0 \quad (4.63)$$

$$r_2 \text{sen}\theta_2 - r_3 \text{sen}\theta_3 = 0 \quad (4.64)$$

Derivando estas duas expressões em ordem ao tempo resulta em,

$$-r_2 \dot{\theta}_2 \text{sen}\theta_2 - r_3 \dot{\theta}_3 \text{sen}\theta_3 - \dot{r}_1 = 0 \quad (4.65)$$

$$r_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 - r_3 \dot{\theta}_3 \cos\theta_3 = 0 \quad (4.66)$$

Atendendo a que  $\dot{\theta}_2 = \omega_2$ ,  $\dot{\theta}_3 = \omega_3$  e  $\dot{r}_1 = v_1$ , estas equações são reescritas como,

$$-r_2 \omega_2 \text{sen}\theta_2 - r_3 \omega_3 \text{sen}\theta_3 - v_1 = 0 \quad (4.67)$$

$$r_2 \omega_2 \cos\theta_2 - r_3 \omega_3 \cos\theta_3 = 0 \quad (4.68)$$

em que  $\omega_3$  e  $v_1$  são as incógnitas. Reescrevendo, as equações (4.67) e (4.68) na forma matricial resulta em,

$$\begin{bmatrix} -r_3 \text{sen}\theta_3 & -1 \\ r_3 \cos\theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_3 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2 \omega_2 \text{sen}\theta_2 \\ r_2 \omega_2 \cos\theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.69)$$



A equação (4.69) representa um sistema de equações lineares do tipo  $\mathbf{Ax}=\mathbf{c}$ , o qual pode ser resolvido, por exemplo, usando a regra de Cramer. Assim, por exemplo, um sistema de equações lineares de dimensão dois pode ser escrito como,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \quad (4.70)$$

cujas soluções é dada pela regra de Cramer é a seguinte,

$$x_1 = \frac{c_1 a_{22} - c_2 a_{12}}{D} \quad (4.71)$$

$$x_2 = \frac{a_{11} c_2 - a_{21} c_1}{D} \quad (4.72)$$

em que o determinante  $D$  é calculado como,

$$D = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \quad (4.73)$$

Com efeito, aplicando a regra de Cramer ao sistema representado pela equação (4.69) vem que,

$$\omega_3 = -\frac{r_2 \omega_2 \cos \theta_2}{r_3 \cos \theta_3} \quad (4.74)$$

$$v_1 = -\frac{r_2 \omega_2 \sin(\theta_2 + \theta_3)}{\cos \theta_3} \quad (4.75)$$

em que  $\theta_3$  é dado pela seguinte equação, a qual pode ser obtida pela análise de posição do mecanismo biela-manivela,

$$\theta_3 = \arcsen\left(-\frac{r_2 \sin \theta_2}{r_3}\right) \quad (4.76)$$

Deve referir-se que, à semelhança do método da notação complexa, o método da notação matricial, para além da expressão da velocidade linear da corrediça, permite também obter uma expressão para a velocidade angular da biela.

#### 4.5.4. Método da Decomposição do Movimento

Um movimento denomina-se geral quando nele coexistem as características dos movimentos de translação e de rotação. O movimento geral, que traduz a lei de Chasles, pode sempre ser decomposto na soma de um movimento de translação com um movimento de rotação. Este método de análise é, por conseguinte, denominado método da decomposição do movimento, o qual é de seguida utilizado no estudo do movimento do mecanismo biela-manivela como exemplo de aplicação, de modo a calcular-se a velocidade da corrediça, ou seja, do ponto  $C$ .

Na figura 4.13 está representado o mecanismo biela-manivela no qual a manivela descreve um movimento de rotação, a corrediça efectua um movimento de translação rectilínea e a biela descreve um movimento geral. Na presente situação, considera-se que a manivela é o órgão motor, e que roda com uma velocidade angular constante igual a  $\omega_2$ .

Assim, para o mecanismo representado na figura 4.13 sabe-se que a velocidade do ponto  $B$  é perpendicular à direcção  $AB$  e que a velocidade do ponto  $C$  é horizontal. Os sentidos dos vectores  $\mathbf{V}_B$  e  $\mathbf{V}_C$  estão representados na mesma figura. Como a manivela roda com velocidade angular constante, então o módulo da velocidade do ponto  $B$  é dado por,

$$v_B = \omega_2 AB \quad (4.77)$$

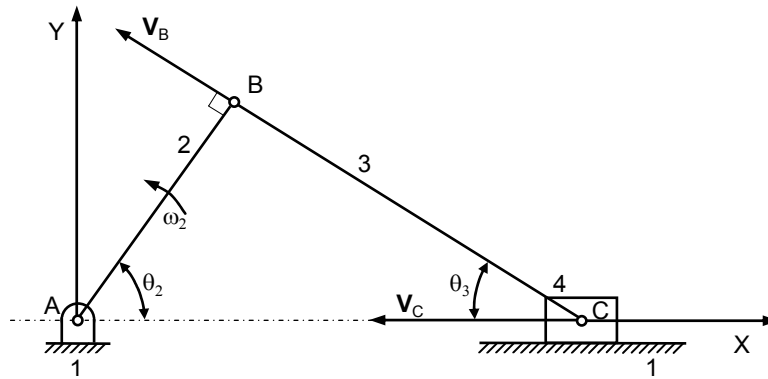
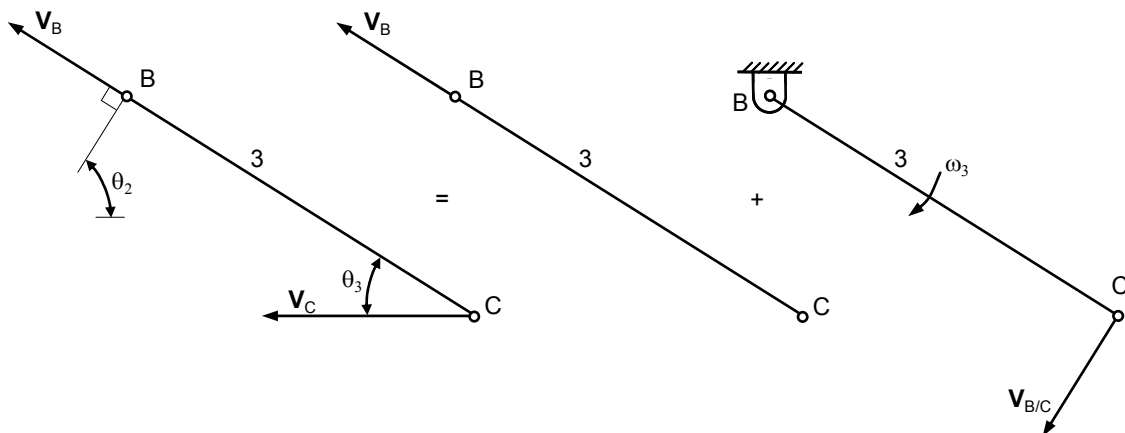


Figura 4.13 – Mecanismo biela-manivela em que estão representadas as velocidades dos pontos  $B$  e  $C$ .

Atendendo à geometria da figura 4.13, e aplicando a lei dos senos ao triângulo  $ABC$  pode calcular-se o ângulo que a biela faz com a direcção horizontal, ou seja,

$$\theta_3 = \arcsen\left(\frac{AB \sin \theta_2}{BC}\right) \quad (4.78)$$

Uma vez que a biela descreve um movimento geral, este movimento pode ser decomposto numa translação com o ponto  $B$  e numa rotação em torno do eixo que passa no mesmo ponto  $B$ , como se representa na figura 4.14. Atendendo a que o ponto  $B$  pertence simultaneamente à biela e à manivela, a sua velocidade é a mesma quer se considere o ponto pertencente a um ou outro corpo. O mesmo acontece ao ponto  $C$ , no entanto, agora, em relação à biela e à correia.



Movimento geral ou misto = translação + rotação

Figura 4.14 – Decomposição do movimento geral ou misto da biela, como sendo a soma de uma translação e de uma rotação.

A velocidade da corrediça, ou do ponto  $C$ , pode ser escrita vectorialmente como,

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_{C/B} \quad (4.79)$$

em que o módulo de  $\mathbf{V}_{C/B}$  é dado por,

$$v_{C/B} = \omega_3 BC \quad (4.80)$$

Projectando, agora, a equação (4.79) nas direcções  $X$  e  $Y$  obtém-se um sistema de duas equações a duas incógnitas, ou seja,

$$-v_C = -v_B \text{sen} \theta_2 - \omega_3 BC \text{sen} \theta_3 \quad (4.81)$$

$$0 = v_B \text{cos} \theta_2 - \omega_3 BC \text{cos} \theta_3 \quad (4.82)$$

Resolvendo este sistema em ordem a  $\omega_3$  e  $v_C$  vem que,

$$\omega_3 = \frac{v_B \text{cos} \theta_2}{BC \text{cos} \theta_3} \quad (4.83)$$

$$v_C = v_B \text{sen} \theta_2 + \omega_3 BC \text{sen} \theta_3 \quad (4.84)$$

Atendendo a que  $v_B = \omega_2 AB$ ,  $\theta_2 = \omega_2 t$ ,  $AB = r_2$ ,  $BC = r_3$  e que  $\theta_3$  é dado pela equação (4.78), após algum tratamento matemático, a equação (4.84) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$v_C = -\omega_2 r_2 \left( \text{sen} \omega_2 t + \frac{r_2 \text{sen} \omega_2 t \text{cos} \omega_2 t}{\sqrt{r_3^2 - r_2^2 \text{sen}^2 \omega_2 t}} \right) \quad (4.85)$$

Esta equação é, como seria de esperar, exactamente igual à expressão obtida pelo método algébrico.

#### 4.5.5. Método das Projecções das Velocidades

Um método simples e prático que permite determinar velocidades de corpos em movimento plano é o que se baseia no teorema das projecções das velocidades, segundo o qual “*são iguais as projecções das velocidades de dois quaisquer pontos de um corpo rígido sobre a recta por eles definida*”. Caso isto não sucedesse, o corpo deformatar-se-ia e deixaria de ser rígido, o que é uma premissa deste teorema.

No mecanismo biela-manivela representado na figura 4.15, a manivela tem um comprimento igual a  $r_2$  e roda com uma velocidade angular constante igual a  $\omega_2$ . A biela tem comprimento  $r_3$ , sendo as posições angulares da manivela e da biela representadas por  $\theta_2$  e  $\theta_3$ , respectivamente. Ainda na figura 4.15 estão ilustrados os vectores velocidade dos pontos  $B$  e  $C$ , cujas direcções e sentidos são conhecidos. O ângulo formado pela direcção do vector da velocidade  $\mathbf{V}_B$  e pela direcção da biela é representado por  $\alpha$ . Com efeito, da análise do mecanismo observa-se que o ponto  $B$  tem uma velocidade cujo módulo é igual a  $\omega_2 r_2$ , sendo a direcção deste vector velocidade perpendicular ao segmento  $AB$ , ao passo que o ponto  $C$  tem velocidade cujo módulo é desconhecido e o suporte é o segmento de recta  $AC$ . Assim, de acordo com o teorema das projecções das velocidades, pode escrever-se que,

$$v_B \text{cos} \alpha = v_C \text{cos} \theta_3 \quad (4.86)$$

Atendendo a que,

$$\alpha = 90 - (\theta_2 + \theta_3) \quad (4.87)$$

então a equação (4.86) pode reescrever-se como,

$$v_C = \omega_2 r_2 \frac{\cos[90 - (\theta_2 + \theta_3)]}{\cos \theta_3} \quad (4.88)$$

ou seja<sup>1</sup>,

$$v_C = \omega_2 r_2 (\sen \theta_2 + \cos \theta_2 \operatorname{tg} \theta_3) \quad (4.89)$$

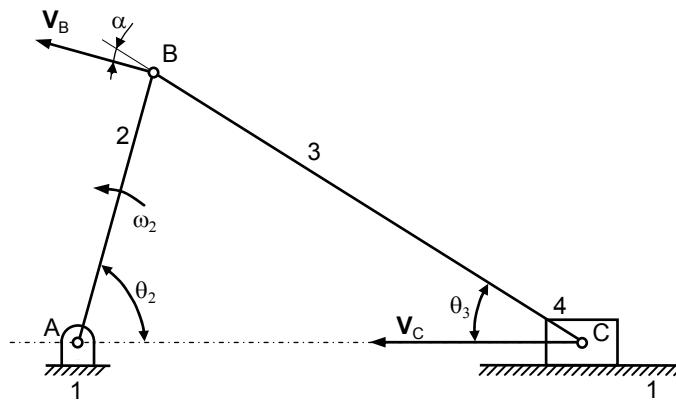


Figura 4.15 – Mecanismo biela-manivela em que estão representadas as velocidades dos pontos B e C.

Deve, agora, eliminar-se a variável  $\theta_3$  da equação (4.89), pelo que aplicando a lei dos senos ao triângulo ABC resulta que,

$$\sen \theta_3 = \frac{r_2}{r_3} \sen \theta_2 \quad (4.90)$$

e, como,

$$\operatorname{tg} \theta_3 = \frac{\sen \theta_3}{\sqrt{1 - \sen^2 \theta_3}} \quad (4.91)$$

então, após tratamento matemático, e substituindo o valor de  $\theta_2$  por  $\omega_2 t$ , a expressão que permite calcular a velocidade linear da corredeira é dada por,

$$v_C = -\omega_2 r_2 \left( \sen \omega_2 t + \frac{r_2 \sen \omega_2 t \cos \omega_2 t}{\sqrt{r_3^2 - r_2^2 \sen^2 \omega_2 t}} \right) \quad (4.92)$$

Note-se que, a equação (4.92) é, tal como seria de esperar, exactamente igual à expressão obtida pelos métodos apresentados anteriormente.

<sup>1</sup> Deve relembrar-se que  $\cos(90 - \gamma) = \sen \gamma$  e que  $\sen(\beta + \varphi) = \sen \beta \cos \varphi + \cos \beta \sen \varphi$ .

## 4.6. MÉTODOS GRÁFICOS

### 4.6.1. Método do Polígono de Velocidades

O método do polígono de velocidades baseia-se na construção e resolução gráfica de equações vectoriais. Este método, aqui, é aplicado ao mecanismo biela-manivela a título demonstrativo. Assim, considere-se o mecanismo representado na figura 4.16, em que a manivela é órgão motor que roda com uma velocidade angular constante igual a  $\omega_2$ . Utilizando o método do polígono de velocidades pretende-se determinar a velocidade linear da corredeira, isto é, a velocidade do ponto  $C$ .

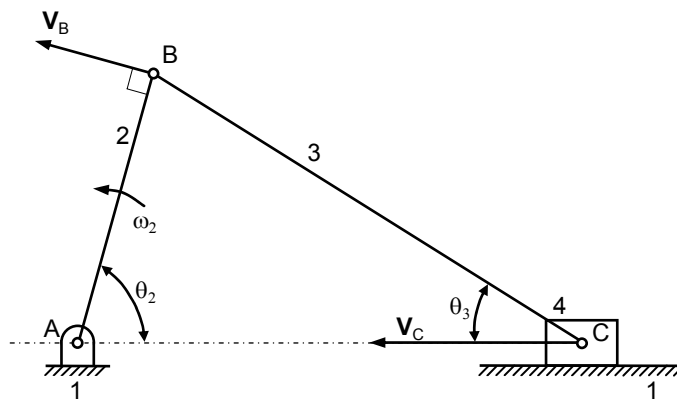


Figura 4.16 – Mecanismo biela-manivela em que estão representadas as velocidades dos pontos  $B$  e  $C$ .

Por definição de velocidade relativa entre dois pontos que pertencem a um mesmo corpo rígido sabe-se que para os pontos  $B$  e  $C$  é válida a seguinte relação,

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_{C/B} \quad (4.93)$$

em que se conhece o módulo e a direcção do vector  $\mathbf{V}_B$ , isto é, o módulo é igual a  $\omega_2 AB$  e direcção é perpendicular ao segmento  $AB$ , como se ilustra na figura 4.16. Sabe-se ainda que a direcção do vector  $\mathbf{V}_{C/B}$  é perpendicular ao segmento  $BC$ .

Deste modo, é possível traçar, a uma escala adequada, o polígono de velocidades dado pela equação (4.93). Assim, tomando uma escala adequada e a partir da escolha de um ponto  $O_V$  como sendo a origem das velocidades, representa-se o vector  $\mathbf{V}_B$ , cuja direcção é, como se sabe, perpendicular ao segmento  $AB$  e o sentido é o correspondente ao sentido de rotação da manivela. Respeitando, na sua colocação em relação a  $\mathbf{V}_B$ , as regras da adição e subtracção de vectores, e seguindo a equação (4.93), é possível completar graficamente o polígono de velocidades.

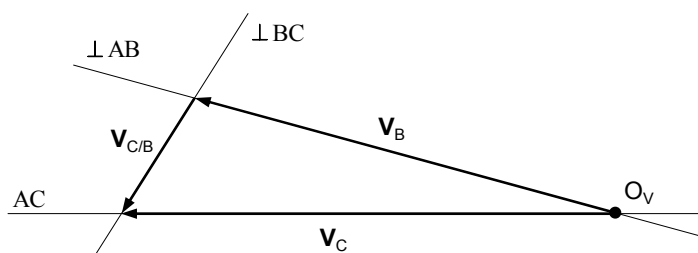


Figura 4.17 – Construção gráfica do polígono de velocidades.

Na figura 4.17 mostra-se o resultado final da construção gráfica do polígono de velocidades, onde, para além da velocidade da corrediça,  $V_C$ , é também possível calcular o valor da velocidade relativa  $V_{C/B}$ , medindo directamente sobre o desenho e afectando as medidas pelo factor de escala.

#### 4.6.2. Método da Imagem de Velocidades

Em mecanismos que contêm elementos ou corpos cuja configuração geométrica é algo complexa, torna-se útil a obtenção de uma imagem de velocidades do próprio elemento sempre que seja necessário conhecer a velocidade em determinados pontos. A título de demonstração, na figura 4.18a encontra-se esquematizado um sistema mecânico constituído por dois corpos em que o corpo 2 tem forma triangular e está animado de um movimento de rotação em torno do ponto  $A$ , com uma velocidade angular igual a  $\omega_2$ .

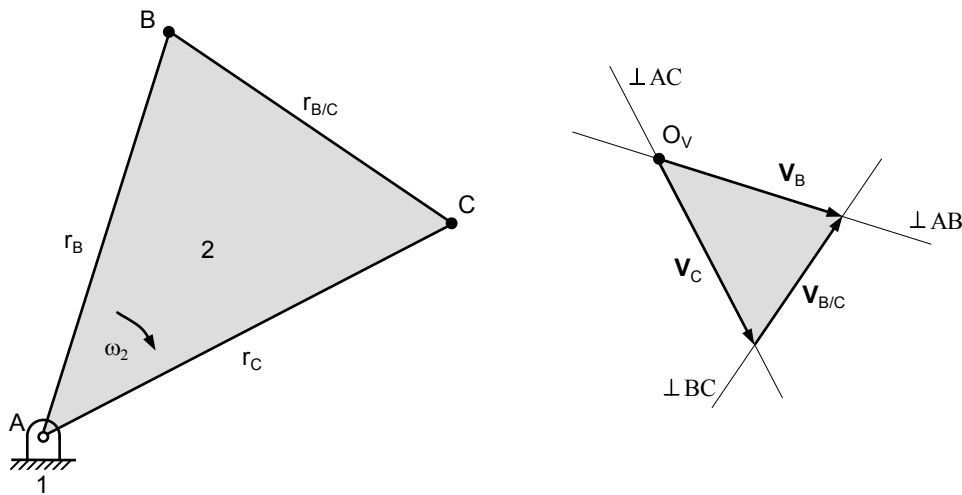


Figura 4.18 – Determinação da imagem de velocidades de um corpo.

Considerando as dimensões dos lados do triângulo  $ABC$  representadas pelos vectores  $\mathbf{R}_B$ ,  $\mathbf{R}_C$  e  $\mathbf{R}_{C/B}$ , então as respectivas velocidades são dadas por,

$$v_B = \omega_2 r_B \quad (4.94)$$

$$v_C = \omega_2 r_C \quad (4.95)$$

$$v_{B/C} = \omega_2 r_{B/C} \quad (4.96)$$

Atendendo a que as dimensões  $r_B$ ,  $r_C$  e  $r_{B/C}$  são conhecidas, torna-se possível construir a imagem de velocidades a uma dada escala, obtendo-se, deste modo, uma réplica exacta do elemento rodada  $90^\circ$  e cujos lados representam a velocidade de cada ponto considerado, como está ilustrado na figura 4.18b. Assim, a partir desta imagem de velocidades é possível determinar a velocidade de qualquer outro ponto pertencente ao elemento considerado, desde que seja conhecida a sua localização geométrica, bastando, para o efeito, traçar o respectivo vector com origem em  $O_V$  e extremo na imagem desse mesmo ponto.

Para um mecanismo articulado, este método pode ser aplicado sucessivamente aos vários elementos que o constituem, como se mostra na figura 4.19 para o mecanismo do tipo biela-manivela com corrediça.

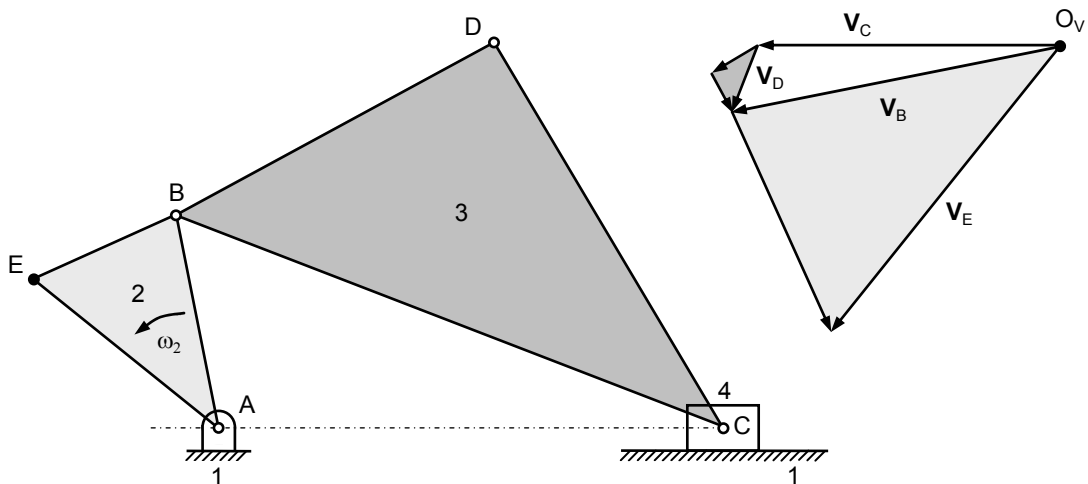


Figura 4.19 – Determinação da imagem de velocidades para o mecanismo biela-manivela.

### 4.6.3. Método dos Centros Instantâneos de Rotação

Utilizando o conceito de centro instantâneo de rotação é possível efectuar a análise de velocidades, uma vez que, por definição, conhecida a velocidade do ponto de corpo relativamente ao seu centro instantâneo de rotação, então essa velocidade é exactamente a mesma para o ponto de outro corpo cujo centro instantâneo de rotação é comum.

Na figura 4.20 está representado o mecanismo biela-manivela, em relação ao qual se conhece a localização dos seus seis centros instantâneos de rotação. Na presente situação, admite-se que a manivela, sendo o órgão motor, roda com uma velocidade angular constante igual a  $\omega_2$ , pelo que a velocidade linear do centro  $O_{23}$  é facilmente calculável. Pretende-se, pois, utilizando o conceito de centro instantâneo de rotação determinar a velocidade linear da corredeia.

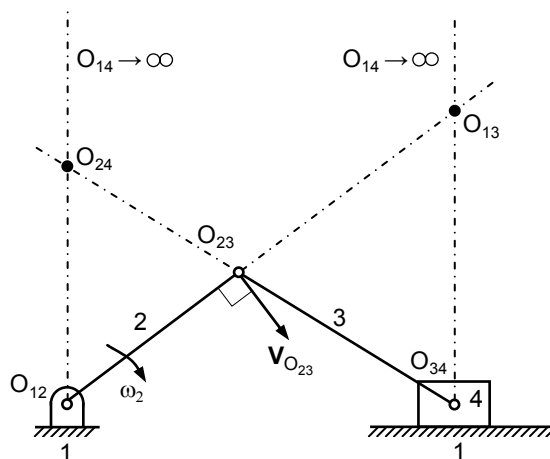


Figura 4.20 – Mecanismo biela-manivela e respectivos centros instantâneos de rotação.

Observando a figura 4.20, verifica-se que o centro  $O_{23}$  é um ponto que pertence à manivela e o centro  $O_{34}$  é um ponto que pertence à corredeia. Os corpos 2 e 4 têm em comum o centro  $O_{24}$ , o qual pode ser considerado, virtualmente, como sendo um ponto comum a ambos os corpos e que, por isso, apresenta a mesma velocidade, quer se considere como fazendo parte de um ou outro corpo. Por outro lado, sabe-se que

todos os pontos que pertencem à manivela, ou a ela virtualmente ligados, rodam em torno do eixo que passa pelo centro  $O_{12}$ . Assim, pode escrever-se a seguinte relação,

$$v_{O_{23}} = \omega_2 O_{12} O_{23} \quad (4.97)$$

e que,

$$v_{O_{24}} = \omega_2 O_{12} O_{24} \quad (4.98)$$

Combinando as equações (4.97) e (4.98) vem que,

$$v_{O_{24}} = v_{O_{23}} \frac{O_{12} O_{24}}{O_{12} O_{23}} \quad (4.99)$$

O centro  $O_{14}$  está situado no infinito e sobre uma recta perpendicular à direcção descrita pela trajectória da corrediça. Por outro lado, como a velocidade do centro  $O_{34}$  é a mesma que a do centro  $O_{24}$ , uma vez ambos os centros rodam em torno de um eixo situado no infinito (centro  $O_{14}$ ), significa que os vectores velocidade dos centros  $O_{24}$  e  $O_{34}$  têm a mesma amplitude, a mesma direcção e o mesmo sentido. Na figura 4.21 pode observar-se a construção gráfica relativa à determinação da velocidade da corrediça utilizando os centros instantâneos de rotação.

Ainda utilizando o conceito de centro instantâneo de rotação, há um procedimento alternativo que permite obter a velocidade da corrediça. Assim, a velocidade do centro  $O_{23}$  é dada por,

$$v_{O_{23}} = \omega_2 O_{12} O_{23} = \omega_3 O_{13} O_{23} \quad (4.100)$$

Por outro lado, a velocidade do centro  $O_{34}$  é calculada como,

$$v_{O_{34}} = \omega_3 O_{13} O_{34} \quad (4.101)$$

Da equação (4.100) obtém-se o valor velocidade angular  $\omega_3$ , o qual substituído na equação (4.101) permite calcular a velocidade linear da corrediça. Refira-se que a distância  $O_{13} O_{34}$  pode obter-se da análise geométrica do mecanismo biela-manivela.

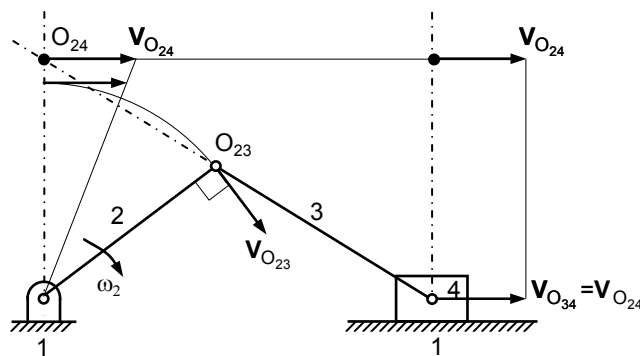


Figura 4.21 – Determinação gráfica da velocidade da corrediça utilizando os centros instantâneos de rotação.

#### 4.6.4. Método da Diferenciação Gráfica

O método diferenciação gráfica é particularmente útil quando o gráfico de deslocamentos é obtido por meios analógicos (e.g., obtidos através de registadores  $x-t$ , osciloscópios, etc.) ou quando a expressão algébrica do deslocamento é algo



complexa e, por conseguinte, de derivação laboriosa e difícil. Este método apresenta, no entanto, como principal limitação o facto de ser apenas sensível à mudança de magnitude da grandeza em análise, seja de deslocamento linear ou angular, seja de velocidade ou aceleração. Nesta secção é apresentado o procedimento que permite determinar a velocidade da corredeira do mecanismo biela-manivela para várias fases do seu funcionamento, recorrendo ao método da diferenciação gráfica.

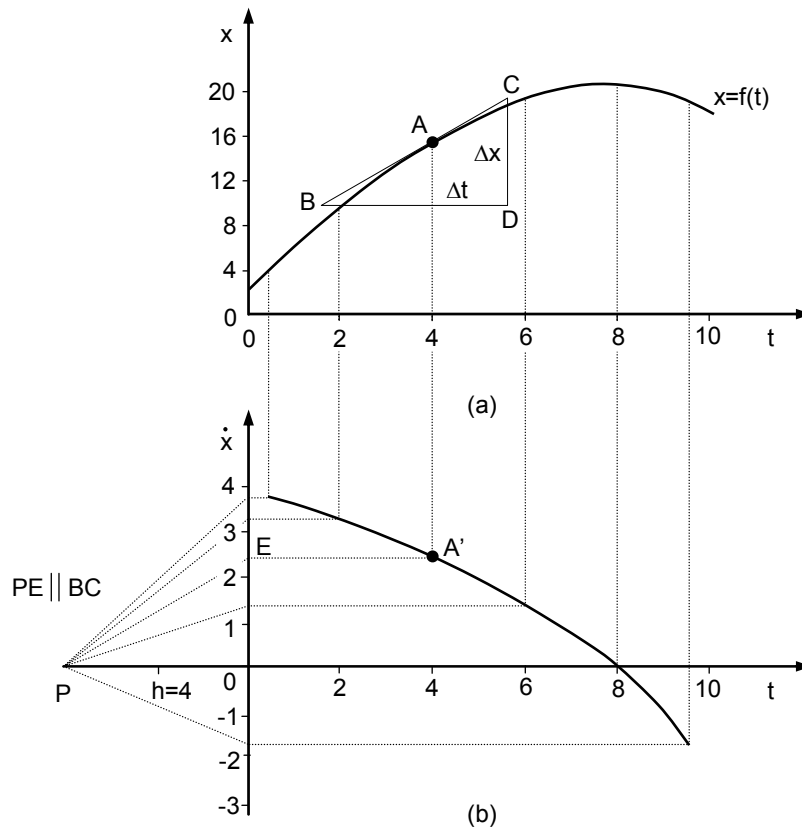


Figura 4.22 – Diferenciação gráfica de uma função: (a) Função; (b) Derivada.

De seguida, é apresentado o processo de diferenciação gráfica de uma função que pode ser escrita como,

$$x = f(t) \quad (4.102)$$

Assim, escolha-se, arbitrariamente, um ponto situado sobre a curva, por exemplo o ponto  $A$ , e trace-se a tangente  $BC$ . Por definição de derivada sabe-se que,

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4.103)$$

e, aproximadamente, a derivada no ponto  $A$  é igual a,

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \approx \frac{CD}{BD} \quad (4.104)$$

O processo de diferenciação gráfica passa, pois, pela traçagem de segmentos de recta tangentes à curva em vários dos seus pontos, para o efeito devem ser construídos triângulos, preferencialmente de abcissas,  $BD$ , iguais. Seguidamente torna-se possível construir um diagrama de derivadas, utilizando o mesmo eixo das

abscissas,  $t$ , e para cada ponto considerado, registrando em ordenadas a altura  $CD$  do respectivo triângulo, como se ilustra na figura 4.22. A distância  $PO$  é chamada distância polar e é representada por  $h$  com unidades em segundos, para o gráfico de velocidades. O ponto  $A'$ , medido a partir do eixo das abscissas, representa, portanto, a velocidade do ponto  $A$ . É conveniente que a escala de tempo nos dois gráficos seja a mesma. A escala da derivada é determinada por,

$$\dot{x} = \frac{x}{h} \quad (4.105)$$

em que  $h$  é o dobro do intervalo de tempo utilizado e igual a  $BD$ .

A precisão obtida quando se utiliza o método da diferenciação gráfica será tanto maior, quanto menor for o intervalo  $\Delta t$  seleccionado. Por outro lado, a qualidade e o rigor do traçado das tangentes pode também ter alguma influência nos resultados obtidos.

Aplicando o método da diferenciação gráfica ao mecanismo biela-manivela do qual se conhece a curva do deslocamento da corredeira, obtém-se o gráfico de velocidades ilustrado na figura 4.23.

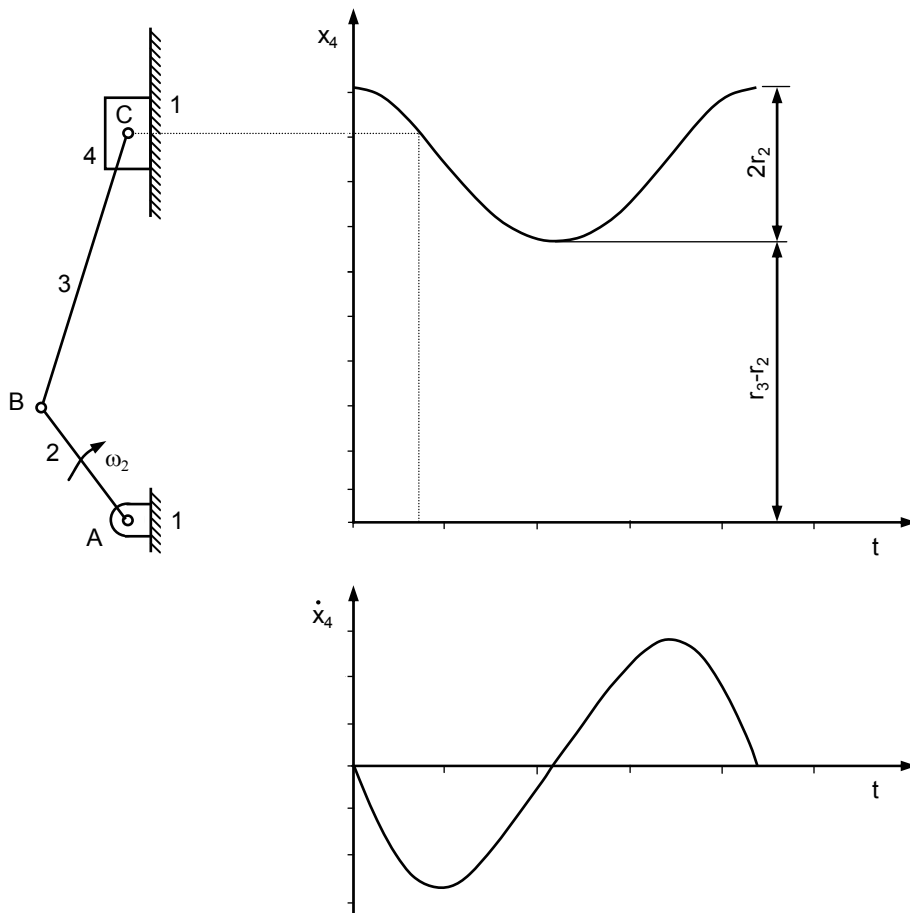


Figura 4.23 – Aplicação do método da diferenciação gráfica à curva de deslocamento da corredeira do mecanismo biela-manivela.

## 4.7. ANÁLISE DE VELOCIDADES DE MECANISMOS ELEMENTARES

### 4.7.1. Mecanismo de Quatro Barras

Na figura 4.24 está representado um mecanismo de quatro barras em relação ao qual se pretende efectuar a análise de velocidades de alguns dos seus elementos. Ainda na mesma figura estão representados os vectores posição que formam a cadeia cinemática fechada equivalente. No presente exemplo considera-se que a manivela é o órgão motor, sendo, por isso, conhecido o valor de  $\omega_2$ .

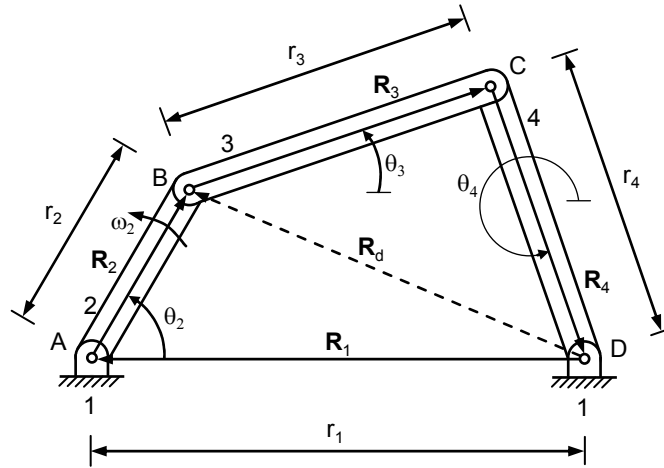


Figura 4.24 – Mecanismo de quatro barras.

Utilizando a notação complexa, a equação que representa a cadeia cinemática formada pelos vectores  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$ ,  $\mathbf{R}_3$  e  $\mathbf{R}_4$  é dada por,

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} + r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (4.106)$$

Atendendo a que  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ ,  $r_4$  e  $\theta_1$  não variam com o tempo, derivando a equação (4.106) em ordem ao tempo tem-se que,

$$r_2 i \frac{d\theta_2}{dt} e^{i\theta_2} + r_3 i \frac{d\theta_3}{dt} e^{i\theta_3} + r_4 i \frac{d\theta_4}{dt} e^{i\theta_4} = 0 \quad (4.107)$$

Por outro, sabe-se que,

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 \quad (4.108)$$

$$\frac{d\theta_3}{dt} = \omega_3 \quad (4.109)$$

$$\frac{d\theta_4}{dt} = \omega_4 \quad (4.110)$$

Assim, utilizando as equações (4.108) a (4.110) conjuntamente com a fórmula de Euler, a equação (4.107) pode ser reescrita como,

$$r_2 i \omega_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) + r_3 i \omega_3 (\cos \theta_3 + i \operatorname{sen} \theta_3) + r_4 i \omega_4 (\cos \theta_4 + i \operatorname{sen} \theta_4) = 0 \quad (4.111)$$

Separando, agora, as partes real e imaginária, vem que,

$$-r_2\omega_2\text{sen}\theta_2 - r_3\omega_3\text{sen}\theta_3 - r_4\omega_4\text{sen}\theta_4 = 0 \quad (4.112)$$

$$r_2\omega_2\text{cos}\theta_2 + r_3\omega_3\text{cos}\theta_3 + r_4\omega_4\text{cos}\theta_4 = 0 \quad (4.113)$$

As equações (4.112) e (4.113) formam um sistema de duas equações a duas incógnitas,  $\omega_3$  e  $\omega_4$ , do qual resulta que,

$$\omega_3 = \frac{r_2\omega_2}{r_3} \frac{\text{sen}(\theta_2 - \theta_4)}{\text{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \quad (4.114)$$

$$\omega_4 = \frac{r_2\omega_2}{r_4} \frac{\text{sen}(\theta_2 - \theta_3)}{\text{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \quad (4.115)$$

Deve referir-se que os valores dos ângulos  $\theta_3$  e  $\theta_4$  podem ser obtidos da análise de posição do mecanismo de quatro barras, donde resulta que,

$$\theta_3 = \theta_d \mp \arccos \frac{r_d^2 + r_3^2 - r_4^2}{2r_d r_3} \quad (4.116)$$

$$\theta_4 = \theta_d \pm \arccos \frac{r_d^2 + r_4^2 - r_3^2}{2r_d r_4} \quad (4.117)$$

em que  $\theta_d$  e  $r_d$  são dados por,

$$\theta_d = \arcsen \left( \frac{r_2}{r_d} \text{sen}\theta_2 \right) \quad (4.118)$$

$$r_d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \text{cos}\theta_2 \quad (4.119)$$

Utilizando os centros instantâneos de rotação é também possível e fácil efectuar o cálculo de velocidades. A figura 4.25 mostra a aplicação deste método ao mecanismo de quatro barras em que a manivela 2 é o órgão motor, sendo, por isso, conhecido o valor de  $\omega_2$ . As dimensões das barras 1, 2, 3 e 4 são também conhecidas à partida. Assim, para a posição ilustrada na figura 4.25 pretende-se calcular, graficamente, as velocidades de vários pontos de mecanismo.

Após determinar a localização dos centros instantâneos de rotação, conhecendo o valor de  $\omega_2$  e  $r_2$ , pode calcular-se a velocidade linear do centro  $O_{23}$ , como se ilustra na figura 4.25a e 4.25b. Esta velocidade é expressa por,

$$v_{O_{23}} = \omega_2 r_2 \quad (4.120)$$

Assim, uma vez conhecido o vector  $\mathbf{V}_{O_{23}}$ , e uma vez que  $O_{24}$  pertence também à barra 2, rodando este vector em torno do centro  $O_{12}$ , até que  $O_{23}$  se situe na linha de centros formada por  $O_{24}$ ,  $O_{12}$  e  $O_{14}$ , obtém-se a nova posição para o vector velocidade,  $\mathbf{V}'_{O_{23}}$ . Por semelhança de triângulos pode facilmente determinar-se o vector  $\mathbf{V}_{O_{24}}$ , como se ilustra na figura 4.25b.

Por outro lado, como a velocidade do centro  $O_{24}$  é a velocidade de um ponto que pertence à barra 2 e ao mesmo tempo à barra 4, então o vector velocidade  $\mathbf{V}_{O_{24}}$  pode

ser utilizado para determinar a velocidade de outros pontos que pertençam à barra 4, como por exemplo o ponto  $P$  e o centro  $O_{34}$ . Neste caso, os triângulos semelhantes têm o centro  $O_{14}$  como vértice comum, sendo  $V'_{O_{34}}$  e  $V'_P$  os respectivos vectores que devem ser rodados até se obterem  $V_{O_{34}}$  e  $V_P$ , como se ilustra na figura 4.25c.

Finalmente, para se determinar a velocidade  $V_Q$ , uma vez que o ponto  $Q$  pertence simultaneamente à barra 3 e à barra 2, e que a barra 1 é a referência fixa, então o vector  $V_{O_{23}}$  deve ser rodado em torno de  $O_{13}$  sobre a linha dos centros  $O_{13}$ ,  $O_{12}$ , e  $O_{23}$ , determinando-se, assim, o vector  $V'_Q$ , o qual rodado dá origem ao vector  $V_Q$ . Adicionalmente, pode ser confirmada a velocidade do centro  $O_{34}$ , já que este pertence simultaneamente às barras 3 e 4, como se mostra na figura 4.25d.

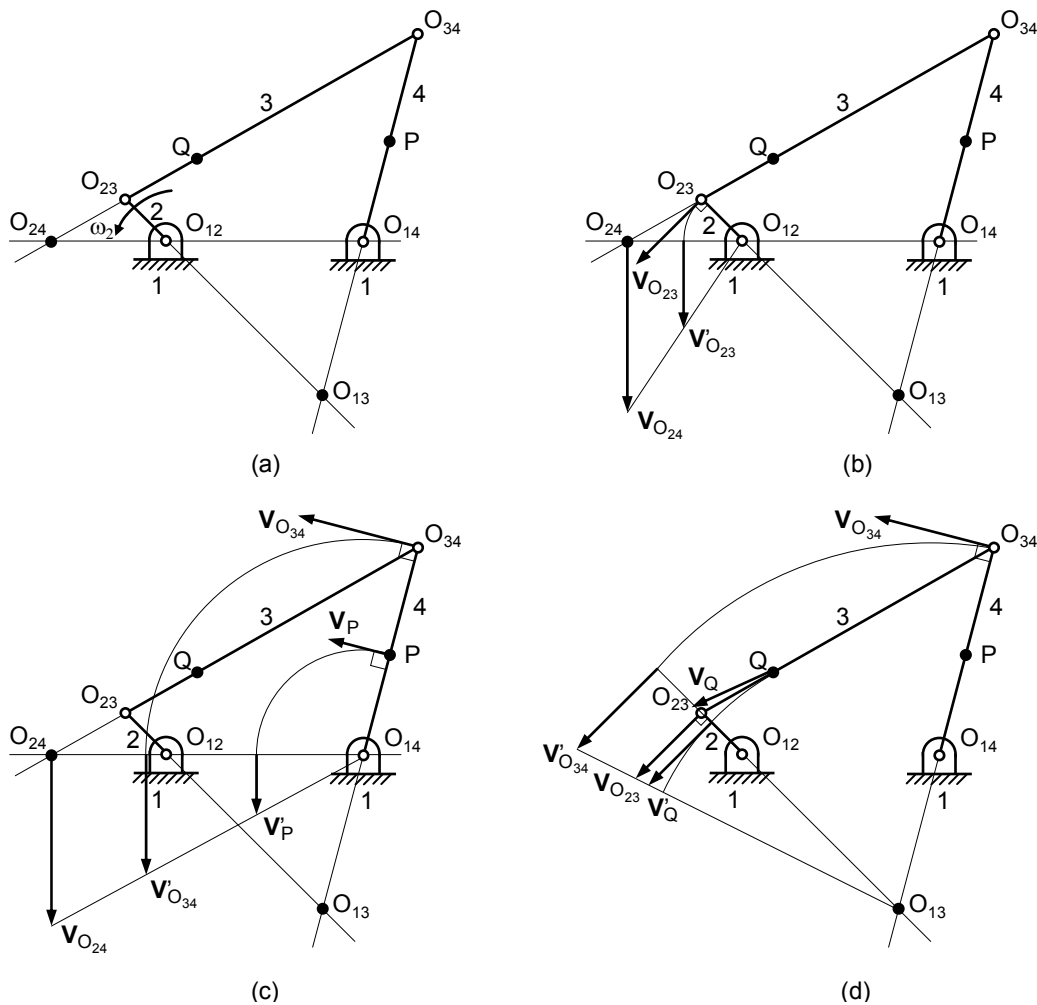


Figura 4.25 – Determinação gráfica de velocidades utilizando o conceito de centro instantâneo de rotação.

Deve ainda referir-se que uma relação válida para qualquer mecanismo de quatro barras, conhecida como teorema da razão de velocidades angulares, postula que, “a razão de velocidades angulares entre dois elementos, relativamente a um terceiro, é inversamente proporcional ao comprimento dos segmentos formados na linha de centros pela intersecção do centro instantâneo de rotação”, e que para o mecanismo da figura 4.25 se pode escrever como,

$$\frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{O_{12}O_{24}}{O_{14}O_{24}} \quad (4.121)$$

Pode também provar-se que esta razão é positiva quando o centro instantâneo comum se encontra para lá dos dois centros fixos, como no presente exemplo, e é negativa quando o centro instantâneo de rotação comum se encontra entre os dois centros fixos.

#### 4.7.2. Mecanismo de Corrediça

A figura 4.26 ilustra o mecanismo de corrediça e os respectivos vectores posição equivalentes. Sabendo que a barra 2 é o órgão motor, *i.e.*, o valor de  $\omega_2$  é conhecido, pretende-se determinar, utilizando o método da notação complexa, as componentes de translação e de rotação da velocidade da corrediça.

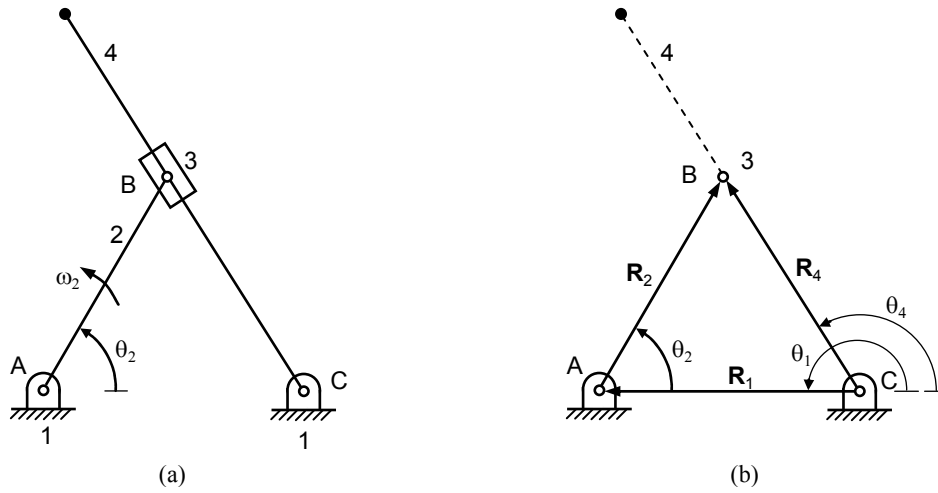


Figura 4.26 – (a) Mecanismo de corrediça; (b) Representação vectorial equivalente.

Assim, com base na notação complexa, a cadeia cinemática fechada constituída pelos vectores  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  e  $\mathbf{R}_4$  pode ser escrita como,

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} - r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (4.122)$$

Atendendo a que os parâmetros  $r_1$ ,  $r_2$  e  $\theta_1$  não variam com o tempo, da derivação da equação (4.122) em ordem ao tempo resulta que,

$$r_2 i \frac{d\theta_2}{dt} e^{i\theta_2} - \frac{dr_4}{dt} e^{i\theta_4} - r_4 i \frac{d\theta_4}{dt} e^{i\theta_4} = 0 \quad (4.123)$$

Por outro lado, como,

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 \quad (4.124)$$

$$\frac{dr_4}{dt} = \dot{r}_4 \quad (4.125)$$

$$\frac{d\theta_4}{dt} = \omega_4 \quad (4.126)$$

então, a equação (4.123) pode ser reescrita como,

$$r_2 i \omega_2 e^{i\theta_2} - \dot{r}_4 e^{i\theta_4} - r_4 i \omega_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (4.127)$$

Aplicando a fórmula de Euler à equação (4.127) e separando as partes real e imaginária, vem que,

$$-r_2 \omega_2 \text{sen} \theta_2 - \dot{r}_4 \text{cos} \theta_4 + r_4 \omega_4 \text{sen} \theta_4 = 0 \quad (4.128)$$

$$r_2 \omega_2 \text{cos} \theta_2 - \dot{r}_4 \text{sen} \theta_4 - r_4 \omega_4 \text{cos} \theta_4 = 0 \quad (4.129)$$

As equações (4.128) e (4.129) formam um sistema de duas equações a duas incógnitas,  $\dot{r}_4$  e  $\omega_4$ , cujas soluções são dadas por,

$$\dot{r}_4 = r_2 \omega_2 \text{sen}(\theta_4 - \theta_2) \quad (4.130)$$

$$\omega_4 = \frac{r_2 \omega_2}{r_4} \text{cos}(\theta_4 - \theta_2) \quad (4.131)$$

em que  $\theta_2$  é conhecido à partida, uma vez que a barra 2 é o órgão motor, e  $\theta_4$  é dado pela seguinte equação obtida na análise de posição,

$$\theta_4 = \text{arctg} \frac{r_2 \text{sen} \theta_2}{r_2 \text{cos} \theta_2 - r_1} \quad (4.132)$$

### 4.7.3. Mecanismo Biela-Manivela com Excentricidade

Na figura 4.27 está representado o mecanismo biela-manivela com excentricidade entre o eixo de rotação da manivela e o eixo que define a direcção de translação da corredeira. A manivela é o órgão motor, a qual roda com velocidade angular constante igual a  $\omega_2$ , e pretende-se conhecer o valor da velocidade linear da corredeira.

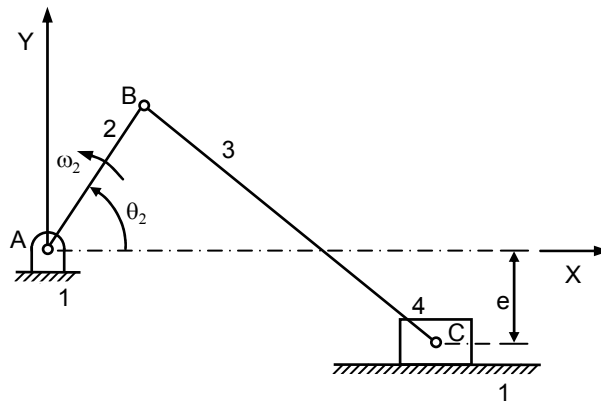


Figura 4.27 – Mecanismo biela-manivela com excentricidade.

Aplicando o método algébrico ao mecanismo ilustrado na figura 4.27, obtém-se a seguinte expressão para a posição da corredeira,

$$x_4 = r_2 \text{cos} \omega_2 t + \sqrt{r_3^2 - (r_2 \text{sen} \omega_2 t + e)^2} \quad (4.133)$$

em que  $r_2$ ,  $r_3$  e  $e$  são características geométricas do mecanismo,  $\omega_2$  é a velocidade angular da manivela e  $t$  é a variável tempo.

Assim, derivando a equação (4.133) em ordem ao tempo, e após tratamento matemático, obtém-se uma expressão que permite calcular a velocidade linear da corrediça em cada instante, a qual é expressa como,

$$v_4 = -\omega_2 r_2 \text{sen} \omega_2 t - \frac{\omega_2 r_2^2 \cos \omega_2 t \text{sen} \omega_2 t}{\sqrt{r_3^2 - (r_2 \text{sen} \omega_2 t + e)^2}} \quad (4.134)$$

#### 4.7.4. Mecanismo Biela-Manivela Invertido

A figura 4.28 ilustra um mecanismo biela-manivela invertido, em que as barras foram substituídas por vectores posição equivalentes, os quais constituem uma cadeia cinemática fechada. Admite-se que, na presente situação a manivela é o órgão motor e roda com uma velocidade angular constante igual a  $\omega_2$ .

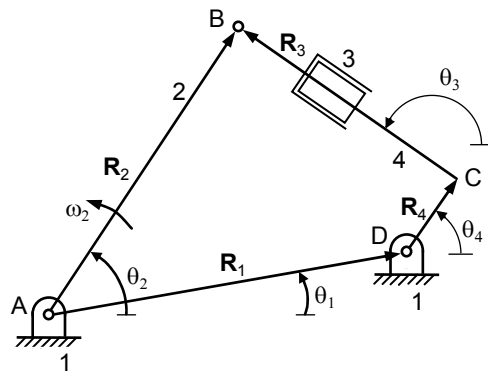


Figura 4.28 – Mecanismo biela-manivela invertido.

Da análise geométrica do mecanismo ilustrado na figura 4.28, e utilizando a notação complexa, pode escrever-se que,

$$r_2 e^{i\theta_2} - r_1 e^{i\theta_1} - r_3 e^{i\theta_3} - r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (4.135)$$

Por outro lado, da análise de posição são válidas as seguintes relações,

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - r_4^2 - 2r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2)} \quad (4.136)$$

$$a = r_2 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1 \quad (4.137)$$

$$\theta_4 = \theta_3 - 90 \quad (4.138)$$

$$\theta_3 = \text{arctg} \left( \frac{r_4 + \beta \sqrt{r_4^2 - a^2 + r_3^2}}{a + r_3} \right) \quad (4.139)$$

onde  $\beta = \pm 1$ .

Atendendo a que  $r_1$ ,  $r_4$  e  $\theta_1$  são constantes, derivando em ordem ao tempo a equação (4.135) vem que,

$$r_2 i \omega_2 e^{i\theta_2} - \dot{r}_3 e^{i\theta_3} - r_3 i \omega_3 e^{i\theta_3} - r_4 i \omega_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (4.140)$$

Aplicando a fórmula de Euler, separando as partes real e imaginária e resolvendo as equações daí resultantes obtém-se o seguinte sistema de equações,



$$\begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -r_3\sin\theta_3 - r_4\sin\theta_4 \\ \sin\theta_3 & r_3\cos\theta_3 + r_4\cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_2\omega_2\sin\theta_2 \\ r_2\omega_2\cos\theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.141)$$

Este sistema pode ser resolvido, utilizando, por exemplo, a regra de Cramer anteriormente apresentada, em ordem às velocidades  $\dot{r}_3$  e  $\omega_3$ . Os restantes parâmetros da equação (4.141) são previamente conhecidos ou calculados usando as equações (4.136)-(4.139).

