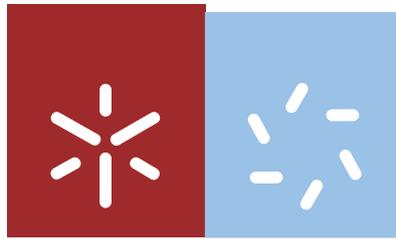


**Universidade do Minho**  
Escola de Ciências

Alexandra Margarida Soares Gaspar

**Equações Diferenciais Parciais Não Lineares  
de Primeira Ordem e Aplicações**



**Universidade do Minho**

Escola de Ciências

Alexandra Margarida Soares Gaspar

## **Equações Diferenciais Parciais Não Lineares de Primeira Ordem e Aplicações**

Dissertação de Mestrado  
Mestrado em Ciências - Formação Contínua de Professores  
Área de Especialização em Matemática

Trabalho realizado sob orientação do  
**Doutor Filipe Mena**  
e co-orientação do  
**Doutor Mahendra Panthee**

Janeiro de 2013

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTEGRAL DESTA TESE APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE;

Universidade do Minho, \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

*Para a minha filha, Eda*



# Agradecimentos

Agradeço ao Professor Doutor Filipe C. Mena e ao Professor Doutor Mahendra P. Panthee, as muitas horas de disponibilidade e discussão sobre a orientação do meu trabalho, os muitos esclarecimentos prestados, a paciência e compreensão manifestadas nos momentos mais críticos.

Aos amigos e colegas que partilharam comigo os seus conhecimentos, gostaria também de expressar o meu agradecimento. Destaco a mestre Lucinda Serra que partilhou comigo a sua experiência em Investigação Matemática e, o professor João Ferreira pelos esclarecimentos prestados na área da Física. A ambos quero agradecer igualmente as suas palavras de encorajamento.

À minha família gostaria de expressar imensa gratidão pelo carinho sempre presente e pelo seu exemplo, suporte de motivação.



# Resumo

Neste trabalho, apresentamos o método das características sem recorrer a perspectivas geométricas e lidando, diretamente, com equações diferenciais parciais de primeira ordem não lineares. Abordamos as equações de Hamilton-Jacobi através do método das características com interesse na determinação de soluções suaves. Resolvemos a equação eikonal no contexto da ótica geométrica e o problema de Kepler por um processo, invulgar, em que usamos uma equação de Hamilton-Jacobi para integrar as equações do movimento dos dois corpos. Consideramos a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, entrando na Teoria de Controlo Ótimo, onde, expomos o método da programação dinâmica na resolução de um problema de controlo ótimo, em tempo contínuo, num intervalo de tempo finito. Finalizamos com uma aplicação deste método na resolução de um problema de controlo ótimo de um tratamento de quimioterapia, resolvido por Panetta e Fister em [16] usando técnicas diferentes. Concluimos que os nossos resultados obtidos através da aplicação do método da programação dinâmica coincidem com os resultados apresentados em [16].



# Abstract

This study presents the method of characteristics without using of geometric perspectives, dealing directly with nonlinear first order partial differential equations. We approach the Hamilton-Jacobi equation through the method of characteristics, aiming to determine smooth solutions. We solve the eikonal equation in the context of geometrical optics and Kepler's problem through an unusual process using the Hamilton-Jacobi equation to integrate the two-body equations of motion. We consider the Hamilton-Jacobi-Bellman equation within Optimal Control Theory, for which we expose the dynamic programming method in the resolution of an optimal control problem, in continuous time, in a finite time interval. This work closes with the application of this method to the resolution of an optimal control problem of a chemotherapy treatment, solved by Panetta and Fister in [16] using different resolution techniques. We conclude that the our results obtained through the application of the dynamic programming method are identical to those presented in [16].



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Equações diferenciais parciais</b>	<b>5</b>
1.1	Noções básicas . . . . .	5
1.2	Procedimento para achatar a fronteira . . . . .	9
<b>2</b>	<b>O método das características</b>	<b>13</b>
2.1	EDOs características . . . . .	14
2.2	Condições iniciais para as EDOs características . . . . .	17
2.3	Existência de solução local . . . . .	22
2.4	Aplicação do método à equação eikonal . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Equações de Hamilton-Jacobi</b>	<b>35</b>
3.1	Equações Hamilton-Jacobi estacionárias . . . . .	37
3.1.1	Caraterísticas . . . . .	37
3.1.2	Equação eikonal . . . . .	37
3.2	Equações de Hamilton-Jacobi evolutivas . . . . .	40
3.2.1	Caraterísticas . . . . .	40
3.3	Problema de valor inicial . . . . .	42
3.4	O problema de Kepler . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Teoria de controlo ótimo</b>	<b>55</b>
4.1	Formulação de um problema de controlo ótimo . . . . .	55
4.2	Programação Dinâmica . . . . .	59
4.2.1	Função valor e princípio da programação dinâmica . . . . .	60
4.2.2	Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman e solução de viscosidade . . . . .	63

4.2.3	Função valor e equação de Hamilton-Jacobi-Bellman . . . . .	65
4.2.4	Determinação do controlo ótimo . . . . .	73
4.2.5	Exemplo . . . . .	74
4.3	Controlo ótimo de um tratamento de quimioterapia . . . . .	77
<b>Apêndice</b>		<b>87</b>

# Introdução

A teoria das equações diferenciais parciais (EDPs) tem vindo a ser desenvolvida há quase três séculos tendo resolvido problemas fundamentais em Engenharia, Física e outras ciências com aplicações em problemas da vida real [17].

As equações de Hamilton-Jacobi (HJ), são equações não lineares de primeira ordem que surgiram naturalmente na mecânica clássica mas que foram encontrando aplicações em muitas outras áreas, dentro e fora da Matemática, tendo vindo a ter importância em problemas de controlo ótimo [2]. Os diferentes interesses em torno destas equações e da sua aplicação, têm levado a diversas abordagens teóricas com consequentes progressos na resolução de problemas que as envolvem. Exemplos disso, são as abordagens em [2] e [6]. O método das características, é uma abordagem clássica para o estudo de equações diferenciais parciais de primeira ordem como é o caso das equações de HJ. Este método, em geral, pode ser aplicado apenas localmente. No entanto, permite-nos construir soluções suaves destas equações e explica ainda, porque não têm, em geral, uma solução suave para todos os tempos [2].

A equação eikonal, postulada por Hamilton em 1827, é uma equação de HJ estacionária extremamente importante no estudo de muitos fenómenos da Física [5]. Mais recentemente, dada a grande aplicabilidade desta equação em problemas de visão computacional, processamento de imagem, controlo ótimo, entre outros, tem sido crescente o interesse que a procura de soluções tem tido e, nesse sentido, têm surgido vários métodos de resolução em que as características, e o que estas representam, têm um papel importante. Dois exemplos de métodos recentes, são um método iterativo apresentado por Jahanandish em [12] e um método numérico apresentado por Zhao em [21].

Neste trabalho, pretendemos apresentar um estudo das equações de Hamilton-Jacobi nos domínios da matemática pura e suas aplicações. Durante o texto, inspirámo-nos na

ideia de desvendar o percurso do nosso estudo. Este trabalho começa por apresentar no Capítulo 1, algumas noções essenciais da teoria das equações diferenciais parciais. Nesse capítulo, é ainda apresentado um procedimento através do qual se inscrevem os pontos  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , de uma curva contida em  $\mathbb{R}^n$ , no plano  $x_n = 0$ , acompanhado de um exemplo de aplicação num problema de valor fronteira que resolvemos no capítulo seguinte.

No Capítulo 2, apresentamos o método das características de forma construtiva, a partir de uma equação diferencial parcial não linear na sua forma geral. Mostramos que no estudo de problemas de valor inicial ou de valor fronteira nos permite construir soluções suaves embora, em geral, apenas localmente e demonstramos os resultados sobre a existência e a unicidade de soluções. Terminamos com a aplicação do método à resolução do problema de valor fronteira que retomamos do Capítulo 1.

No Capítulo 3, abordamos as equações de Hamilton-Jacobi. Começamos por apresentar a estrutura matemática que caracteriza estas equações. Tratamos separadamente as equações estacionárias e as evolutivas. Em ambas, aplicamos o método das características e mostramos como este método nos leva às equações de Hamilton que surgem no cálculo de variações e na mecânica, ou mais precisamente, que as equações características para as equações de HJ são exatamente as equações clássicas do movimento de Hamilton. Deduzimos fórmulas para a solução das equações evolutivas, quando associadas a uma condição inicial. Resolvemos a equação eikonal no contexto da ótica geométrica e dois problemas de valor inicial para as equações evolutivas, ilustrando num caso a existência e noutro caso a não existência de solução suave para todos os tempos. Encerramos este capítulo, com uma resolução do problema de Kepler ou problema de dois corpos, em que se consegue a integração das equações do movimento pela determinação de um integral completo da equação de Hamilton-Jacobi, cujas características são essas equações do movimento. Este processo assenta num teorema que demonstramos.

No Capítulo 4, entramos no estudo da teoria de controlo ótimo. O que fazemos, não é um tratamento exaustivo do assunto, mas antes desenvolvemos a teoria em torno de um problema geral de controlo ótimo a partir de um sistema dinâmico de dimensão finita, contínuo, descrito por equações diferenciais ordinárias. Introduzimos o nosso sistema de controlo e o problema de controlo ótimo, num intervalo de tempo finito,  $[t, T]$ , com  $t \geq 0$ ,

onde pretendemos minimizar um funcional dependente de um termo integral e do estado final do sistema. Abordamos o problema através do método da programação dinâmica. Definimos a função valor associada que mostramos obedecer às condições do Princípio de Bellman ou Princípio da Programação Dinâmica. A nossa atenção passa, então, a focar-se numa equação de HJ conhecida por equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, que tem como solução a função valor. A função valor, em geral, não é diferenciável em todos os pontos pelo que, não satisfaz a equação no sentido clássico. Apresentamos, por isso, a definição de solução de viscosidade no contexto da equação de HJB num problema de valor terminal e mostramos que a função valor é de Lipschitz e que é a única solução de viscosidade da equação de HJB. Descrevemos como este resultado nos permite sintetizar o controlo ótimo e resolvemos um problema simples, sem lhe dar qualquer contexto real, com o objetivo único de exemplificar os vários passos do método da programação dinâmica. Finalizamos com uma aplicação deste método na resolução de um problema do âmbito da medicina. Fister e colaboradores [8, 16], têm desenvolvido técnicas matemáticas para controlar problemas médicos e biológicos. Essa pesquisa tem envolvido a teoria de controlo ótimo aplicada a sistemas de equações diferenciais, determinando estratégias de tratamento com fármacos para minimizar tumores. No artigo *Optimal Control Applied to Cell-Kill Strategies* [16], Panetta e Fister apresentam a modelação de três tratamentos de quimioterapia e determinam, usando a teoria de controlo ótimo aplicada a equações diferenciais ordinárias, as estratégias ótimas do respetivo tratamento mediante dois funcionais objetivo diferentes. Investigamos um desses modelos de tratamento através da aplicação do método da programação dinâmica. Concluímos que os resultados obtidos através da aplicação deste método coincidem com os resultados obtidos pelo método, diferente, usado em [16].



# Capítulo 1

## Equações diferenciais parciais

Neste capítulo, faremos uma revisão muito breve de algumas noções da teoria das equações diferenciais parciais em geral. Referimos apenas o que consideramos essencial para a compreensão do que vamos expor nos capítulos seguintes. Estas e outras noções adicionais podem ser vistas em [6], [10] e [17].

### 1.1 Noções básicas

Consideremos uma função  $u : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $U$  é um conjunto aberto.

Denotamos por:

$u_{x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , a derivada parcial,  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ , de  $u$ ;

$u_{x_i x_j}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , a derivada parcial de segunda ordem,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ , de  $u$ ;

$Du$ , o gradiente,  $(u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ , de  $u$ ;

$D^k u$  representa todas as derivadas parciais de ordem  $k$ , de  $u$ . Por exemplo, se  $k = 2$ ,

$$D^2 u = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Um vetor da forma  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , onde cada componente  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , é um inteiro não negativo, é dito um multi-índice de ordem  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

Dado um multi-índice  $\alpha$ , definimos

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u.$$

Uma equação diferencial parcial (EDP) descreve essencialmente, uma relação entre uma função desconhecida, de  $n \geq 2$  variáveis independentes,  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  e, pelo menos, algumas das suas derivadas parciais ou, somente, entre derivadas parciais de  $u$ . Para representar uma EDP na sua forma mais geral escrevemos

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, \quad (1.1)$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$  sendo  $U$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $F$  é uma função dada e  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  é a função desconhecida.

A *ordem* de uma EDP define-se como sendo a maior ordem das derivadas envolvidas na equação. Assim, se a maior ordem das derivadas envolvidas em (1.1) for  $k$ , a equação diz-se de *ordem*  $k$ . Por exemplo, em  $U \subset \mathbb{R}^2$ , a equação

$$x_1 u_{x_1} - x_2 u_{x_2} = \sin(x_1 x_2)$$

diz-se de *ordem 1* ou de *primeira ordem*, enquanto a equação

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = 0$$

diz-se de *ordem 2* ou de *segunda ordem*.

Representaremos, portanto, uma equação diferencial parcial de primeira ordem, na sua forma mais geral, por

$$F(Du(x), u(x), x) = 0. \quad (1.2)$$

Uma outra classificação das equações diferenciais parciais é a que as diferencia entre equações lineares e não-lineares. A equação (1.1) é dita *linear* se  $F$  é uma função linear da função desconhecida  $u$  e suas derivadas. Caso contrário, a equação diz-se *não-linear*. Por exemplo, em  $U \subset \mathbb{R}^2$ , a equação

$$u_{x_1} + u_{x_2} - 2 = 0$$

é linear, enquanto a equação

$$u_{x_1} u_{x_2} - u = 0$$

é não linear.

As equações diferenciais parciais não lineares distinguem-se ainda quanto ao tipo da sua não linearidade. Dizemos que a EDP (1.1) é:

1. *Semilinear*, se tem a forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0.$$

**Exemplo 1.**

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - u^3 = 0.$$

2. *Quasilinear*, se tem a forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0.$$

**Exemplo 2.**

$$(3x_2 - 2u)u_{x_1} + (u - 3x_1)u_{x_2} - 2x_1 + x_2 = 0$$

3. *Totalmente não linear*, se  $F$  é não linear em relação às derivadas parciais de maior ordem envolvidas na equação.

**Exemplo 3.**

$$u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 - 1 = 0.$$

Nem sempre é possível determinar a solução geral de uma EDP mas quando se consegue determiná-la, esta envolve, na maioria das vezes, funções arbitrárias das variáveis independentes existindo, por isso, um grau de generalidade muito grande em relação à forma da solução. A fim de obtermos uma solução única temos de suplementar a equação com condições adicionais. A equação diferencial parcial em consideração e as condições a ela associadas podem formar um dos seguintes problemas:

- *Problema de valor inicial ou de Cauchy*: Quando à equação (1.1) está associada uma condição que fixa uma das várias variáveis independentes envolvidas na equação, impondo o valor da solução  $u$  e/ou das suas derivadas parciais em relação a essa variável como função das outras variáveis. A uma condição desta forma chamamos *condição inicial*.

*Exemplo:*

$$\begin{cases} u_{x_1} + u_{x_2} = 2, & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ u(x_1, 0) = (x_1)^2. \end{cases}$$

- *Problema de valor fronteira*: Quando à equação (1.1) está associada uma condição sobre o valor da solução  $u$  e/ou das suas derivadas na fronteira de  $U$ ,  $\partial U \subset \mathbb{R}^n$ . A uma condição com esta forma chamamos *condição fronteira* ou *condição de contorno*.

*Exemplo*:

$$\begin{cases} u_{x_1} u_{x_2} - u = 0, & \text{em } U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\} \\ u(x_1, x_2) = (x_2)^2 & \text{em } \partial U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}. \end{cases}$$

- *Problema misto*: Quando à equação (1.1) estão associadas condições iniciais e condições fronteira.

*Exemplo*:

$$\begin{cases} u_t - \alpha^2(u_{x_1} + u_{x_2}) = 0, & \text{em } U \times (0, +\infty) \\ u(x_1, x_2, 0) = f(x), & \text{em } (x_1, x_2) \in \bar{U} \\ u(x_1, x_2, t) = 0, & \text{em } (x_1, x_2) \in \partial U, t \geq 0, \end{cases}$$

onde  $U$  é um aberto limitado,  $\bar{U}$  é um sólido cujo interior é  $U$ ,  $\alpha^2$  é uma constante positiva e  $f$  é uma função conhecida.

Existem muitas interpretações da noção intuitiva de que uma solução da equação (1.1) é uma função  $u$  que satisfaz a equação. A discussão em torno deste assunto é extensa e não faz parte do nosso trabalho. Sobre este assunto, sugerimos ver [6] ou [11]. A definição mais intuitiva de solução é a de solução clássica que apresentamos, a seguir, para uma equação diferencial parcial de ordem  $k$ .

**Definição 1.** *Uma função  $u$  diz-se ser uma solução clássica da equação (1.1) sobre o conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  se:*

1.  *$u$  é uma função  $C^k$  em  $U$ ;*
2.  *$u$  satisfaz a equação.*

Nas condições da definição anterior, a função  $u$  diz-se ser a *solução geral* da equação se englobar todas as soluções da equação sobre o conjunto  $U$ , ou uma *solução particular* da equação quando se especifica  $u$  mediante uma condição particular.

## 1.2 Procedimento para achatar a fronteira

Considerando uma curva contida em  $\mathbb{R}^n$ , entendemos por “achatamento” dessa curva, o processo que leva à inscrição dos seus pontos  $(x_1, \dots, x_n)$  no plano  $\{x_n = 0\}$ . Num problema de valor fronteira, as variáveis podem ser alteradas adequadamente de modo a “achatar” a parte da fronteira em consideração, transformando-o noutro problema em que a EDP mantém o seu tipo quanto à linearidade. A vantagem dessa mudança de variáveis é que ela concede, na resolução do problema, a simplificação de cálculos relevantes, enquanto que a conversão da solução obtida na solução do problema original é muito simples. Nesta secção, descreveremos e exemplificaremos este processo.

Consideremos o problema de valor fronteira:

$$\begin{cases} F(Du, u, x) = 0, & \text{em } U \subset \mathbb{R}^n \\ u(x) = g(x) & \text{em } \Gamma \subseteq \partial U, \end{cases} \quad (1.3)$$

onde  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função conhecida.

Começemos por fixar um ponto qualquer  $x^0$  de  $\partial U$  e escolher  $r$  e  $\gamma$  de acordo com a definição seguinte:

**Definição 2.** Dizemos que  $\partial U$  é  $C^k$  se, para cada ponto  $x^0 \in \partial U$ , existe  $r > 0$  e uma função  $C^k$ ,  $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que, renomeando e reorientando se necessário os eixos coordenados, temos

$$U \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) : x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

e

$$\partial U \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) : x_n = \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Definamos agora, duas aplicações  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  por, respetivamente:

$$\phi^i(x) := \begin{cases} y_i = x_i, & i = 1, \dots, n-1 \\ y_n = x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}), & i = n \end{cases} \quad (1.4)$$

e

$$\psi^i(y) := \begin{cases} x_i = y_i, & i = 1, \dots, n-1 \\ x_n = y_n + \gamma(y_1, \dots, y_{n-1}), & i = n. \end{cases} \quad (1.5)$$

Podemos então escrever  $y = \phi(x)$  e  $x = \psi(y)$  o que implica ser  $\phi = \psi^{-1}$ . Sendo assim,  $\phi$  e  $\psi$  são aplicações injetivas e  $\phi(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$ , para  $(x_1, \dots, x_n) \in \partial U$  na vizinhança de  $x^0$ . Desta forma, os pontos de  $\partial U$  próximos de  $x^0$  passam a estar no plano  $\{x_n = 0\}$ . Seguimos agora com a conseqüente transformação do problema (1.3).

Dada qualquer função  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos escrever

$$V = \phi(U)$$

e definir

$$v(y) = u(\psi(y)), \quad y \in V. \quad (1.6)$$

Assim, pelas definições de  $\psi$  e de  $\phi$ , temos

$$u(x) = v(\phi(x)), \quad x \in U. \quad (1.7)$$

Em particular, se  $u$  é uma solução  $C^1$  do problema (1.3) em  $U$ , atendendo a (1.7) temos que

$$u_{x_i}(x) = \sum_{m=1}^n v_{y_m}(\phi(x)) \phi_{x_i}^m, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ou seja,

$$Du(x) = Dv(y)D\phi(x),$$

onde

$$D\phi = \begin{pmatrix} \phi_{x_1}^1 & \cdots & \phi_{x_n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{x_1}^n & \cdots & \phi_{x_n}^n \end{pmatrix}.$$

Então, a EDP do problema (1.3) implica

$$F(Du(x), u(x), x) = F(Dv(y)D\phi(\psi(y)), v(y), \psi(y)) = 0,$$

que podemos escrever na forma

$$G(Dv(y), v(y), y) = 0, \quad \text{em } V.$$

Além disso,  $v(y) = u(\psi(y)) = g(\psi(y)) = h(y)$  na fronteira  $\Lambda = \phi(\Gamma)$  de  $V$ .

Passamos, então, a ter o problema seguinte:

$$\begin{cases} G(Dv, v, y) = 0 & \text{em } V \\ v(y) = h(y) & \text{em } \Lambda \subseteq \partial V. \end{cases} \quad (1.8)$$

Deste modo, a solução  $u$  do problema (1.3) será dada por (1.7), sendo  $v$  a solução do problema (1.8).

**Exemplo 4.**

Consideremos o problema:

$$\begin{cases} u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 - 1 = 0 & \text{em } U \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x_1, x_2) = 1 & \text{em } \Gamma \subset \partial U, \end{cases} \quad (1.9)$$

com  $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 2x_1\}$ .

Começemos por inscrever os pontos de  $\Gamma$  na reta  $x_2 = 0$ . Para isso, fixemos um ponto  $x^0 = (x_1^0, 2x_1^0) \in \Gamma$  e definamos a função

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\gamma(x_1) = 2x_1.$$

Observemos que  $\gamma$ , assim definida, respeita a Definição 2. Agora, atendendo a (1.4) e (1.5), definamos as seguintes aplicações:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \longrightarrow (y_1, y_2) = (x_1, x_2 - 2x_1)$$

e

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(y_1, y_2) \longrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2 + 2y_1),$$

que são injetivas por serem a inversa uma da outra.

Consideremos agora um ponto  $x \in \partial U$  numa vizinhança de  $x^0$ . Podemos escrever  $x = (x_1, 2x_1)$  e temos  $\phi(x) = \phi(x_1, 2x_1) = (y_1, 0)$ . A aplicação  $\phi$  transforma, portanto, cada ponto da fronteira pertencente a uma vizinhança de  $x^0$  num ponto sobre a recta  $x_2 = 0$ . Passemos agora às consequentes transformações no problema. Tomemos, em  $V = \phi(U)$ , a função

$$v(y_1, y_2) = u(\psi(y_1, y_2)) = u(y_1, y_2 + 2y_1), \quad (y_1, y_2) \in V.$$

Então, atendendo à definição de  $\psi$  e  $\phi$ ,

$$u(x_1, x_2) = v(\phi(x_1, x_2)) = v(x_1, x_2 - 2x_1), \quad (x_1, x_2) \in U. \quad (1.10)$$

Calculemos a seguir,

$$u_{x_1}(x_1, x_2) = v_{y_1}(x_1, x_2 - 2x_1) - 2v_{y_2}(x_1, x_2 - 2x_1) \quad (1.11)$$

e

$$u_{x_2}(x_1, x_2) = v_{y_2}(x_1, x_2 - 2x_1). \quad (1.12)$$

Atendendo a (1.11) e (1.12), a equação

$$u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 - 1 = 0 \quad \text{em } U$$

passa a escrever-se,

$$v_{y_1}^2 - 4v_{y_1}v_{y_2} + 5v_{y_2}^2 - 1 = 0 \quad \text{em } V.$$

Já por (1.10), a condição inicial

$$u(x_1, x_2) = 1 \quad \text{em } \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 2x_1\} \subset \partial U$$

passa a escrever-se,

$$v(y_1, y_2) = 1 \quad \text{em } \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_2 = 0\} \subset \partial V.$$

Deste modo, passamos a ter o problema,

$$\begin{cases} v_{y_1}^2 - 4v_{y_1}v_{y_2} + 5v_{y_2}^2 - 1 = 0 & \text{em } V \subset \mathbb{R}^2 \\ v(y_1, y_2) = 1 & \text{em } \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_2 = 0\} \subset \partial V. \end{cases} \quad (1.13)$$

A equação de (1.13), é uma equação diferencial parcial de primeira ordem não linear, tal como a equação de (1.9). Retomaremos este problema no próximo capítulo, com a pretensão única de exemplificar a aplicação do método das caraterísticas então exposto. Retomaremos ainda o problema na forma (1.9) no Capítulo 3, quando aplicarmos o método das caraterísticas às equações de Hamilton-Jacobi.

# Capítulo 2

## O método das características

O método das características é uma abordagem clássica para o estudo de equações diferenciais parciais de primeira ordem, em particular para o estudo das equações não lineares. A construção do método que vamos apresentar segue as ideias expostas em [6]. Esta exposição do método tem a particularidade de não exigir nenhuma perspectiva geométrica e de lidar diretamente com o tipo de equações de interesse no nosso estudo, as equações não lineares de primeira ordem, em exclusivo, as equações de Hamilton-Jacobi. Além disso, embora não nos dediquemos aqui por não ser necessário ao propósito do nosso estudo, tal abordagem permite aplicar o método ao estudo de equações lineares sem que se tenha de tomar algum intento excepcional.

Consideremos o problema seguinte:

$$\begin{cases} F(Du, u, x) = 0, & \text{em } U \\ u(x) = g(x), & \text{em } \Gamma \subseteq \partial U, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde a equação

$$F(Du, u, x) = 0, \quad (2.2)$$

representa uma EDP não linear de primeira ordem definida num conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  e a relação

$$u(x) = g(x), \quad (2.3)$$

sendo  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  uma função conhecida em  $\Gamma \subseteq \partial U$ , representa a condição fronteira associada à equação (2.2).

O método das características leva-nos à construção de uma solução do problema (2.1), pelo menos numa vizinhança de  $\Gamma$ . A estratégia deste método resume-se em obter os valores de  $u$  ao longo de uma curva que parte de um ponto  $x^0$  de  $\Gamma$ , através da resolução de equações diferenciais ordinárias que descrevem a evolução de  $u$  e de  $Du$  ao longo dessa curva. Em geral, a evolução de  $Du$  depende das segundas derivadas de  $u$ . Uma das particularidades mais interessantes deste método é que, pela escolha cuidadosa da curva, os termos que envolvem derivadas de segunda ordem desaparecem e obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (EDOs características). A resolução desse sistema com as condições iniciais adequadas (ternos admissíveis não característicos) fornece-nos os valores de  $u$  nos pontos da curva. Tomando diferentes pontos numa vizinhança de  $x^0$  contida em  $\Gamma$ , as curvas que partem de cada um desses pontos, tomadas em conjunto, cobrem uma vizinhança de  $x^0$  contida em  $U$ . Assim, conhecidos os valores de  $u$  ao longo de cada uma destas curvas, ficam conhecidos os valores de  $u$  em todos os pontos dessa vizinhança.

## 2.1 EDOs características

Começemos por assumir que no problema (2.1), as funções  $F$  e  $g$  são pelo menos  $C^2$ . Com base no exposto na Secção 1.2 consideremos, sem perda de generalidade, que  $\Gamma$  é uma curva plana, encontrando-se no plano  $\{x_n = 0\}$ . Pretendemos encontrar uma curva contida em  $U$  ao longo da qual consigamos calcular  $u$ . Vamos supor que a curva que procuramos é a curva representada parametricamente por

$$\omega(s) = (\omega^1(s), \dots, \omega^n(s)), \quad (2.4)$$

com  $s$  percorrendo algum subintervalo de  $\mathbb{R}$  e também que  $u$  é uma solução de classe  $C^2$  da EDP (2.2). Escrevemos então,

$$F(Du(\omega(s)), u(\omega(s)), \omega(s)) = 0. \quad (2.5)$$

Definamos agora, o valor de  $u$  e do gradiente  $Du$  ao longo da curva  $\omega(\cdot)$  por

$$z(s) = u(\omega(s)) \quad (2.6)$$

e

$$p(s) = Du(\omega(s)) \quad (2.7)$$

respetivamente. Observemos que

$$p(s) = (p^1(s), \dots, p^n(s)) \quad (2.8)$$

onde,

$$p^i(s) = u_{x_i}(\omega(s)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

De acordo com estas definições, podemos reescrever (2.5) na forma

$$F(p(s), z(s), \omega(s)) = 0.$$

No que se segue, o ponto denota a diferenciação com respeito a  $s$ . Vamos de seguida analisar qual a direção

$$\dot{\omega}(s) = (\dot{\omega}^1(s), \dots, \dot{\omega}^n(s))$$

que devemos assumir de modo a que possamos calcular  $z(s)$  e  $p(s)$ .

Nas condições descritas anteriormente, a derivada total de  $u$  ao longo da curva  $\omega$  é obtida por

$$\dot{u}(\omega(s)) = \sum_{i=1}^n u_{x_i}(\omega(s))\dot{\omega}^i(s) = \sum_{i=1}^n p^i(s)\dot{\omega}^i(s).$$

Calculemos agora, as derivadas totais de  $p$  ao longo de  $\omega(s)$ , isto é, as derivadas totais das derivadas parciais  $u_{x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Sendo  $u$  de classe  $C^2$ , possui derivadas de segunda ordem e, portanto, para cada  $i = 1, \dots, n$ , temos

$$\dot{p}^i(s) = \dot{u}_{x_i}(\omega(s)) = \sum_{j=1}^n u_{x_i x_j}(\omega(s))\dot{\omega}^j(s). \quad (2.10)$$

Por outro lado, derivando a EDP (2.2) em ordem a  $x_i$  obtemos a equação

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_{x_j}}(Du, u, x)u_{x_j x_i} + \frac{\partial F}{\partial u}(Du, u, x)u_{x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i}(Du, u, x) = 0$$

que, para  $x = \omega(s)$  e atendendo a (2.6) e (2.7), se escreve

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p^j}(p(s), z(s), \omega(s))u_{x_j x_i}(\omega(s)) + \frac{\partial F}{\partial z}(p(s), z(s), \omega(s))p^i(s) + \frac{\partial F}{\partial \omega^i}(p(s), z(s), \omega(s)) = 0. \quad (2.11)$$

Agora, por observação das relações (2.10) e (2.11), parece-nos razoável assumir que se verificam as equações

$$\dot{\omega}^j(s) = \frac{\partial F}{\partial p^j}(p(s), z(s), \omega(s)), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.12)$$

ou, em notação vetorial,

$$\dot{\omega}(s) = D_p F(p(s), z(s), \omega(s)). \quad (2.13)$$

Mostraremos de seguida que, verificando-se (2.13), conseguimos de facto determinar  $p(\cdot)$  e  $z(\cdot)$ .

**Teorema 1** (Estrutura das equações caraterísticas). *Seja  $u \in C^2(U)$  uma solução da EDP não linear de primeira ordem (2.2) em  $U$ .*

*Se  $\omega(\cdot)$  resolve a equação (2.13) onde  $p(\cdot) = Du(\omega(\cdot))$  e  $z(\cdot) = u(\omega(\cdot))$ , então  $p(\cdot)$  resolve a equação*

$$\dot{p}(s) = -D_\omega F(p(s), z(s), \omega(s)) - D_z F(p(s), z(s), \omega(s))p(s) \quad (2.14)$$

e  $z(\cdot)$  resolve a equação

$$\dot{z}(s) = D_p F(p(s), z(s), \omega(s)) \cdot p(s), \quad (2.15)$$

para todo o  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $\omega(s) \in U$ .

**Observação 1.** *Em  $D_p F(p(s), z(s), \omega(s)) \cdot p(s)$  e nas situações similares que surjam,  $\cdot$  denota o produto escalar entre os dois vetores em  $\mathbb{R}^n$ .*

*Demonstração.* Retomemos a relação (2.11), agora escrita na forma

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p^j}(p(s), z(s), \omega(s)) u_{x_j x_i}(\omega(s)) = -\frac{\partial F}{\partial \omega^i}(p(s), z(s), \omega(s)) - \frac{\partial F}{\partial z}(p(s), z(s), \omega(s)) p^i(s), \quad (2.16)$$

de onde podemos remover os termos da derivada de segunda ordem. Para isso, vamos substituir  $\dot{\omega}^j(s)$  em (2.10) por (2.12) obtendo

$$\dot{p}^i(s) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p^j}(p(s), z(s), \omega(s)) u_{x_j x_i}(\omega(s)), \quad i = 1, \dots, n,$$

o que atendendo a (2.16), implica

$$\dot{p}^i(s) = -\frac{\partial F}{\partial \omega^i}(p(s), z(s), \omega(s)) - \frac{\partial F}{\partial z}(p(s), z(s), \omega(s)) p^i(s), \quad i = 1, \dots, n.$$

Está assim provado que  $p(\cdot)$  resolve a equação (2.14). Para mostrar que  $z(\cdot)$  resolve a equação (2.15), basta derivar a relação (2.6) da qual se obtém

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial \omega^j}(\omega(s)) \dot{\omega}^j(s) = \sum_{j=1}^n p^j(s) \frac{\partial F}{\partial p^j}(p(s), z(s), \omega(s)), \quad (2.17)$$

onde a última igualdade resulta por (2.9) e (2.12). □

As equações (2.14), (2.15) e (2.13) juntas, formam um sistema de  $2n + 1$  equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, designadamente o sistema:

$$\begin{cases} (a) & \dot{p}(s) = -D_\omega F(p(s), z(s), \omega(s)) - D_z F(p(s), z(s), \omega(s))p(s) \\ (b) & \dot{z}(s) = D_p F(p(s), z(s), \omega(s)) \cdot p(s) \\ (c) & \dot{\omega}(s) = D_p F(p(s), z(s), \omega(s)). \end{cases} \quad (2.18)$$

O sistema (2.18) é formado por  $2n + 1$  equações diferenciais ordinárias de primeira ordem a que chamamos *equações caraterísticas* ou *sistema caraterístico* da equação (2.2). As soluções do sistema,  $p(\cdot)$ ,  $z(\cdot)$  e  $\omega(\cdot)$ , dizem-se as *caraterísticas* da mesma equação. A curva  $\omega(\cdot)$  é muitas vezes referida por *caraterística projetada* com o significado de ser a projeção das caraterísticas,  $(p(\cdot), z(\cdot), \omega(\cdot)) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ , na região  $U \subset \mathbb{R}^n$ .

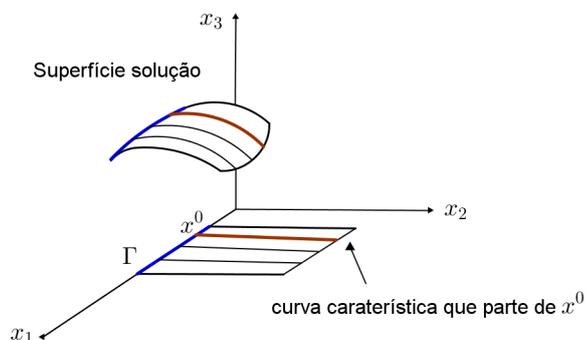


Figura 2.1: Esquema do método das caraterísticas.

## 2.2 Condições iniciais para as EDOs caraterísticas

Na solução geral do sistema (2.18) surgem várias constantes arbitrárias. Da teoria das equações diferenciais ordinárias, do teorema da existência e unicidade de soluções [20],

resulta que impondo condições iniciais às equações (2.18), as soluções  $p(\cdot)$ ,  $z(\cdot)$  e  $\omega(\cdot)$  determinam-se de modo único. Visto que, convertemos a EDP do problema (2.1) nas EDOs (2.18) com o objetivo de, através delas, conseguirmos resolver o problema (2.1), pelo menos localmente, interessam-nos as condições iniciais para  $p(\cdot)$ ,  $z(\cdot)$  e  $\omega(\cdot)$  que, tendo em conta esse objetivo, sejam compatíveis com as condições do problema. Mais precisamente, o que agora temos de fazer, é determinar as condições iniciais que nos permitam resolver o sistema (2.18) num ponto  $x^0 \in \Gamma \subseteq \partial U$  e em todos os pontos de  $\Gamma \subseteq \partial U$  suficientemente próximos de  $x^0$ , fazendo a curva  $\omega(\cdot)$  partir de cada um desses pontos, mas assegurando a referida compatibilidade.

Vamos então fixar um ponto  $x^0 \in \Gamma \subseteq \partial U$  e fazer a curva  $\omega(\cdot)$  partir de  $x^0$ . Antes de continuarmos, recordemos ter assumido que a curva  $\Gamma$  se encontra no plano  $\{x_n = 0\}$ . Assim, estamos a considerar  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, 0)$ .

Representemos por

$$p(0) = p^0, \quad z(0) = z^0 \quad e \quad \omega(0) = x^0, \quad (2.19)$$

as condições iniciais apropriadas para as equações características (2.18). Visto querermos que a curva  $\omega(\cdot)$  parta de  $x^0$ , impõe-se que

$$z^0 = g(x^0). \quad (2.20)$$

Já a condição (2.3), implica que

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \dots, x_{n-1}, 0), \quad (2.21)$$

numa vizinhança de  $x^0$ . Diferenciando (2.21) obtemos

$$u_{x_i}(x^0) = g_{x_i}(x^0), \quad i = 1, \dots, n-1$$

ou seja,

$$p_i^0 = g_{x_i}(x^0), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Por outro lado,  $p^0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$  tem também de verificar a EDP (2.2). Impomos então a  $p^0$  as duas condições seguintes:

$$\begin{cases} p_i^0 = g_{x_i}(x^0), & i = 1, \dots, n-1 \\ F(p^0, z^0, x^0) = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

As condições (2.20) e (2.22) chamam-se *condições de compatibilidade* e cada terno  $(p^0, z^0, x^0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$  que as verifique chama-se *terno admissível*.

Consideremos agora os pontos  $y = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \in \Gamma$  suficientemente próximos de  $x^0$ . Tomemos um desses pontos arbitrariamente e façamos a curva  $\omega(\cdot)$  partir desse ponto. Representemos as condições iniciais apropriadas para as equações caraterísticas (2.18), por

$$p(0) = q(y), \quad z(0) = g(y), \quad \text{e} \quad \omega(0) = y \quad (2.23)$$

onde, atendendo ao que já foi dito,  $q(\cdot) = (q^1(\cdot), \dots, q^n(\cdot))$  tem de ser uma função que verifique a condição

$$q(x^0) = p^0 \quad (2.24)$$

e, para todo o ponto  $y \in \Gamma$  perto de  $x^0$ , as condições de compatibilidade

$$\begin{cases} q_i(y) = g_{x_i}(y), & i = 1, \dots, n-1 \\ F(q(y), g(y), y) = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

A questão que agora se coloca, é se conseguimos de facto encontrar esta função  $q$ . Mostraremos uma condição suficiente para que esta função não só exista como também, seja única. Preliminarmente, consideremos a definição de jacobiano e o teorema da função implícita, cuja demonstração pode ser vista em [13].

**Definição 3** (Jacobiano). *Sejam  $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função  $C^1$  e um ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . O jacobiano de  $M$  no ponto  $x_0$ , que representamos por  $JDM(x_0)$ , corresponde ao determinante da matriz formada pelas derivadas parciais de  $M$  nesse ponto, ou seja:*

$$JDM(x_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial M^1}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial M^1}{\partial x^n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial M^n}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial M^n}{\partial x^n}(x_0) \end{vmatrix}.$$

Sejam, agora,  $M : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função  $C^1$  e  $(x, p) = (x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_m)$  um ponto genérico de  $\mathbb{R}^{n+m}$ .  $JD_p M(x, p)$  representa o determinante da matriz formada pelas derivadas parciais de  $M$  em relação a  $p$ , isto é:

$$JD_p M(x, p) = \begin{vmatrix} \frac{\partial M^1}{\partial p^1}(x, p) & \cdots & \frac{\partial M^1}{\partial p^m}(x, p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial M^m}{\partial p^1}(x, p) & \cdots & \frac{\partial M^m}{\partial p^m}(x, p) \end{vmatrix}.$$

**Teorema 2** (Teorema da função implícita). *Sejam  $U$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^{n+m}$ ,  $M : U \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função  $C^1$ ,  $(x^0, p^0) \in U$ ,  $M(x^0, p^0) = z^0$  e  $JD_p M(x^0, p^0) \neq 0$ . Então existem um conjunto aberto  $V \subset U$  com  $(x^0, p^0) \in V$ , um conjunto aberto  $W \subset \mathbb{R}^n$  com  $x^0 \in W$  e uma aplicação  $C^1$ ,  $q : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ , tais que:*

(i)  $q(x^0) = p^0$ ,

(ii)  $M(x, q(x)) = z^0$ ,  $x \in W$

e

(iii) se  $(x, p) \in V$  e  $M(x, p) = z^0$ , então  $p = q(x)$ ,

(iv) Se  $M$  é  $C^k$  então  $q$  é  $C^k$ ,  $k = 2, \dots$

**Lema 1** (Condição não caraterística). *Se*

$$F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0, \quad (2.26)$$

então existe uma solução única  $q(\cdot)$  de (2.24) e de (2.25) para todo o  $y \in \Gamma$  suficientemente próximo de  $x^0$ .

O terno admissível  $(p^0, z^0, x^0)$  que verifica (2.26) diz-se ser um *terno não caraterístico*.

*Demonstração.* Para simplificar a notação, vamos escrever temporariamente

$$y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Comecemos por considerar a função  $M : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$M(y, p) = (M^1(y, p), \dots, M^n(y, p))$$

em que,

$$\begin{cases} M^i(y, p) = p_i - g_{x_i}(y), & i = 1, \dots, n-1 \\ M^n(y, p) = F(p, g(y), y). \end{cases}$$

Tendo em vista (2.20) e (2.22), concluimos que

$$M(x^0, p^0) = 0 \in \mathbb{R}^n. \quad (2.27)$$

Verificamos ainda que  $JD_p M(x^0, p^0) \neq 0$ . De facto,

$$D_p M(x^0, p^0) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \\ F_{p_1}(p^0, z^0, x^0) & \dots & F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \end{pmatrix}_{n \times n}$$

é uma matriz triangular uma vez que todos os seus elementos acima da diagonal principal são nulos. O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal. Por conseguinte, temos

$$JD_p M(x^0, p^0) = F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0, \text{ por (2.26).}$$

Estamos portanto, em condições de aplicar o teorema da função implícita que nos garante existir uma função  $q$  tal que:

- i)  $q(x^0) = p^0$ , portanto  $q$  resolve (2.24);
- ii) Para todo o  $y$ , suficientemente próximo de  $x^0$ ,

$$M(y, q(y)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q_i(y) = g_{x_i}(y), & 1, \dots, n-1 \\ F(q(y), g(y), y) = 0, \end{cases}$$

ou seja,  $q$  também resolve (2.25);

- ii) Se  $M(y, p) = 0$  para  $y \in \Gamma$  suficientemente próximo de  $x^0$ , então  $p = q(y)$ . Tal confere a unicidade de  $q$ . □

**Observação 2.** A equação (2.18) (c) diz-nos que  $D_p F(p(s), z(s), \omega(s))$  é a velocidade da curva característica  $\omega(s)$ .  $D_p F(p^0, z^0, x^0)$  é portanto a velocidade no ponto  $x^0$  da curva  $\omega$  obtida pela resolução do sistema característico com as condições iniciais  $\omega(0) = x^0$ ,  $p(0) = p^0$  e  $z(0) = g(x^0)$ . Esta velocidade representa-se geometricamente pelo vetor tangente a  $\omega$  no ponto  $x^0$  que também é ponto de  $\Gamma$ . Se  $\nu(x^0)$  é o vetor normal unitário a  $\Gamma$  no ponto  $x^0$  então, por definição,  $\nu(x^0)$  é o vetor perpendicular à curva  $\Gamma$  em  $x^0$ . Assim, temos  $D_p F(p^0, z^0, x^0) \cdot \nu(x^0) = 0$  se e somente se a curva  $\omega$  em causa é tangente a  $\Gamma$  em  $x^0$ . Tal comportamento não interessa ao nosso propósito porque queremos que as curvas características cubram uma vizinhança de  $\Gamma$ . Então, a escolha das condições iniciais deverá ser restrita aos ternos  $(p^0, z^0, x^0)$  que obedeçam à condição  $D_p F(p^0, z^0, x^0) \cdot \nu(x^0) \neq 0$ . Contudo, no caso em que a curva  $\Gamma$  é plana, as coordenadas do vetor  $\nu(x^0)$  são nulas com exceção da última coordenada que em valor absoluto tem de ser igual a 1 para que o vetor seja unitário. Daí que, neste caso, a condição não característica se resume à condição  $F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$ .

## 2.3 Existência de solução local

Na secção anterior, provámos que se  $(p^0, z^0, x^0)$  é um terno admissível não caraterístico, existe uma função única  $q(\cdot)$  tal que,  $p^0 = q(x^0)$  e o terno  $(q(y), g(y), y)$  é admissível para todo o  $y \in \Gamma$  suficientemente próximo de  $x^0$ . Vamos então considerar que dado qualquer um desses pontos  $y = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$ ,  $p(s)$ ,  $z(s)$  e  $\omega(s)$  são as soluções das equações caraterísticas (2.18) sujeitas às condições iniciais (2.23). Para evidenciar a dependência destas soluções de  $s$  e  $y$ , usaremos a seguinte notação:

$$\begin{cases} p(s) = p(y, s) = p(y_1, \dots, y_{n-1}, s) \\ z(s) = z(y, s) = z(y_1, \dots, y_{n-1}, s) \\ \omega(s) = \omega(y, s) = \omega(y_1, \dots, y_{n-1}, s). \end{cases} \quad (2.28)$$

Nesta secção, vamos determinar através destas soluções a função  $u(x)$  que resolve o nosso problema (2.1), pelo menos para valores de  $x$  suficientemente próximos de  $x^0$ . Mostraremos não só que a solução existe mas ainda que, para cada terno admissível não caraterístico que se considere, a solução é única.

Com a notação que acabámos de referir, as definições (2.6) e (2.7) passam a escrever-se  $u(\omega(y, s)) = z(y, s)$  e  $Du(\omega(y, s)) = p(y, s)$ , respetivamente. Se queremos determinar  $u(x)$  numa vizinhança de  $x^0$  a partir das soluções (2.28), devemos primeiro garantir que podemos determinar univocamente  $y$  e  $s$  em função de  $x$  nessa vizinhança. Dito de outra forma, a aplicação  $\omega(y, s) \mapsto x$  terá de ser invertível nessa vizinhança para podermos determinar  $y$  e  $s$  únicos tais que  $x = \omega(y, s)$ . A fim de mostrarmos o próximo lema, que estabelece a condição não caraterística como suficiente para que as condições atrás referidas fiquem garantidas consideremos, a seguir, o teorema da função inversa. A demonstração deste teorema pode ver-se em [13].

**Teorema 3** (Teorema da função inversa). *Seja  $\omega : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função  $C^1$ ,  $a \in U$  e  $JD\omega(a) \neq 0$ . Então existe um conjunto aberto  $V \subset U$  com  $a \in V$  e um conjunto aberto  $W \subset \mathbb{R}^n$  com  $\omega(a) \in W$ , de modo que:*

- (i) a aplicação  $\omega : V \rightarrow W$  é injetiva e sobrejetiva,
- (ii) a função inversa  $\omega^{-1} : W \rightarrow V$  é  $C^1$ ,
- (iii) se  $\omega$  é  $C^k$  então  $\omega^{-1}$  é  $C^k$ ,  $k = 2, \dots$

**Lema 2** (invertibilidade local). *Se  $F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$  então existem um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  contendo 0, uma vizinhança  $W$  de  $x^0$  em  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$  e uma vizinhança  $V$  de  $x^0$  em  $\mathbb{R}^n$ , de modo que para cada  $x \in V$ , existem um único  $s \in I$  e um único  $y \in W$ , tais que*

$$x = \omega(y, s).$$

*As aplicações que a cada  $x \in V$  fazem corresponder  $s \in I$  e  $y \in W$  são  $C^2$ .*

*Demonstração.* Consideremos a aplicação,

$$\omega : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n$$

$$(y, s) \mapsto x.$$

A aplicação  $\omega$  é de classe  $C^2$  dadas as hipóteses anteriores de que  $u$  é de classe  $C^2$  e de conseguirmos calcular  $u$  ao longo de  $\omega(y, s)$ . Temos ainda que  $\omega(x^0, 0) = x^0$ . Vamos provar que se  $F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$  então  $JD\omega(x^0, 0) \neq 0$ . Consequentemente, podemos aplicar o teorema da função inversa que nos garante o resultado.

A fim de escrevermos a matriz  $D\omega(x^0, 0)$ , determinemos as derivadas parciais de  $\omega$  no ponto  $(x^0, 0)$ . Temos

$$\omega(y, 0) = (y, 0), \quad y \in \Gamma,$$

pelo que, se  $i = 1, \dots, n-1$ ,

$$\frac{\partial \omega^j}{\partial y_i}(x^0, 0) = \begin{cases} \delta_{ij}, & j = 1, \dots, n-1 \\ 0, & j = n, \end{cases}$$

onde  $\delta_{ij}$  representa a função delta de Kronecker,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (2.29)$$

Além disso, a equação (c) de (2.18) implica

$$\frac{\partial \omega^j}{\partial s}(x^0, 0) = F_{p_j}(p^0, z^0, x^0).$$

E, portanto,

$$D\omega(x^0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & F_{p_1}(p^0, z^0, x^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & F_{p_{n-1}}(p^0, z^0, x^0) \\ 0 & \cdots & 0 & F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Visto tratar-se de uma matriz triangular, o seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal. Então, temos  $JD\omega(x^0, 0) = F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$  por hipótese.  $\square$

Acabámos assim de estabelecer que, para cada terno  $(p^0, z^0, x^0)$  não caraterístico,  $\omega(x^0, s)$  é localmente invertível. Podemos, portanto, definir de modo único, para  $x$  próximo de  $x^0$ , duas funções  $y(x)$  e  $s(x)$  tais que

$$\omega(y(x), s(x)) = x. \quad (2.30)$$

Definimos então

$$\begin{cases} u(x) = z(y(x), s(x)) \\ p(x) = p(y(x), s(x)) \end{cases} \quad (2.31)$$

e só nos falta mostrar que, com esta definição,  $u(x)$  resolve de facto o problema (2.1) em  $V \subset U$ .

**Teorema 4** (Teorema da existência local de soluções). *A função  $u$  definida em (2.31) é  $C^2$  e resolve a EDP*

$$F(Du(x), u(x), x) = 0, \quad x \in V,$$

*associada à condição fronteira*

$$u(x) = g(x), \quad x \in \Gamma \cap V.$$

*Demonstração.* A ideia da prova traduz-se em dois momentos: no primeiro mostraremos que, para  $u$  e  $p$  definidas como em (2.31),  $F(p(x), u(x), x) = 0$  e, no segundo, mostraremos que  $p(x) = Du(x)$ . Esta última igualdade implica que  $u$  é de classe  $C^2$  e, além disso, atendendo ao primeiro momento, mostra que  $u$  resolve a equação  $F(Du(x), u(x), x) = 0$ .

1. Começemos por fixar  $y \in \Gamma$  próximo de  $x^0$  e resolver (2.18) e (2.23), para  $p(s) = p(y, s)$ ,  $z(s) = z(y, s)$  e  $\omega(s) = \omega(y, s)$ .

Vamos mostrar que se  $y \in \Gamma$  é suficientemente próximo de  $x^0$ , então

$$f(y, s) = F(p(y, s), z(y, s), \omega(y, s)) = 0, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (2.32)$$

Para maior leveza do texto, omitiremos a escrita dos pontos de referência,  $(p(y, s), z(y, s), \omega(y, s))$  e  $(y, s)$ , sempre que tal não cause ambiguidade.

Pela condição de compatibilidade (2.25) observamos que

$$f(y, 0) = F(p(y, 0), z(y, 0), \omega(y, 0)) = F(q(y), g(y), y) = 0. \quad (2.33)$$

Além disso,

$$\frac{\partial f}{\partial s}(y, s) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \dot{p}^j(y, s) + \frac{\partial F}{\partial z} \dot{z}(y, s) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial \omega_j} \dot{\omega}^j(y, s).$$

Substituímos, nesta equação,  $\dot{p}^j$ ,  $\dot{z}$  e  $\dot{\omega}^j$  pela respectiva relação dada por (2.18).

Obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s}(y, s) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \left( -\frac{\partial F}{\partial \omega_j} - \frac{\partial F}{\partial z} p^j \right) + \frac{\partial F}{\partial z} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} p^j \right) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial \omega_j} \left( \frac{\partial F}{\partial p_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \left( \frac{\partial F}{\partial \omega_j} + \frac{\partial F}{\partial z} p^j \right) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \left( \frac{\partial F}{\partial \omega_j} + \frac{\partial F}{\partial z} p^j \right) \end{aligned}$$

e portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial s}(y, s) = 0.$$

Tal resultado implica que  $f(y, s) = F(p(y, s), z(y, s), \omega(y, s))$  seja constante. Atendendo à condição (2.33) essa constante tem de ser 0. Portanto,

$$F(p(y, s), z(y, s), \omega(y, s)) = 0.$$

Atendendo agora ao Lema 2 e às condições (2.30), (2.31) e (2.32) concluímos que

$$F(p(x), u(x), x) = 0, \quad x \in V.$$

2. Vamos mostrar agora que

$$p(x) = Du(x), \quad x \in V. \quad (2.34)$$

Para isso, vamos estabelecer primeiro que para  $s \in I$  e  $y \in W$ ,

$$\frac{\partial z}{\partial s}(y, s) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial s}(y, s) p^j(y, s) \quad (2.35)$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y^i}(y, s) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(y, s) p^j(y, s), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (2.36)$$

As equações caraterísticas (b) e (c) de (2.18) dão-nos a relação

$$\dot{z}(y, s) = \dot{\omega}(y, s) \cdot p(y, s)$$

que, tendo em mente  $x = \omega(y, s)$ , corresponde a (2.35).

Fixemos agora  $y \in \Gamma$  e, para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , definamos

$$r^i(s) = \frac{\partial z}{\partial y^i}(y, s) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(y, s) p^j(y, s). \quad (2.37)$$

A nossa ideia é estabelecer (2.36) mostrando que  $r^i(s) = 0$ .

Começemos por observar que

$$r^i(0) = \frac{\partial z}{\partial y^i}(y, 0) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(y, 0) p^j(y, 0) = g_{x_i}(y) - q^i(y) = 0,$$

atendendo à condição de compatibilidade (2.25).

Calculemos a derivada de  $r$  em relação a  $s$ . Obtemos assim a relação

$$\dot{r}^i(s) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^i \partial s} - \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial p^j}{\partial s} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^i \partial s} p^j \right). \quad (2.38)$$

Para simplificar esta expressão, vamos diferenciar primeiro a igualdade (2.35) em relação a  $y_i$ . Assim

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial y^i} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial x^j}{\partial s} \frac{\partial p^j}{\partial y^i} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial s \partial y^i} p^j \right). \quad (2.39)$$

E agora, substituimos (2.39) em (2.38). Obtemos

$$\begin{aligned} \dot{r}^i(s) &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial x^j}{\partial s} \frac{\partial p^j}{\partial y^i} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial s \partial y^i} p^j \right) - \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial p^j}{\partial s} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^i \partial s} p^j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial x^j}{\partial s} \frac{\partial p^j}{\partial y^i} - \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial p^j}{\partial s} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial F}{\partial p^j} \frac{\partial p^j}{\partial y^i} + \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \left( \frac{\partial F}{\partial x^j} + \frac{\partial F}{\partial z} p^j \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Tendo a última expressão resultado das igualdades

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial p^j}{\partial s} = -\frac{\partial F}{\partial x^j} - \frac{\partial F}{\partial z} p^j$$

e

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial p^j},$$

estabelecidas a partir das equações características (2.18) (a) e (c) respetivamente.

Diferenciemos (2.32) em relação a  $y_i$ . Obtemos

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p^j} \frac{\partial p^j}{\partial y_i} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial y_i} = 0$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial p^j} \frac{\partial p^j}{\partial y_i} + \frac{\partial F}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial y_i} \right) = - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_i}. \quad (2.41)$$

Voltemos à igualdade (2.40), que aqui reescrevemos na forma

$$\dot{r}^i(s) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial p^j} \frac{\partial p^j}{\partial y_i} + \frac{\partial F}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial y_i} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial x^j}{\partial y_i} p^j \right),$$

e empreguemos nela a relação (2.41). Ficamos com

$$\begin{aligned} \dot{r}^i(s) &= \sum_{j=1}^n \left( - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_i} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial x^j}{\partial y_i} p^j \right) \\ &= \frac{\partial F}{\partial z} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y_i} p^j - \frac{\partial z}{\partial y_i} \right) \\ &= - \frac{\partial F}{\partial z} r^i(s), \quad \text{por (2.37)}. \end{aligned}$$

Mas então,  $r^i(s)$  resolve a equação diferencial linear de primeira ordem de coeficientes constantes

$$\dot{r}^i(s) + \frac{\partial F}{\partial z} r^i(s) = 0$$

com a condição inicial associada

$$r^i(0) = 0.$$

Para a resolver, multiplicamos ambos os membros pelo fator integrante  $e^{\int \frac{\partial F}{\partial z} ds}$  e passamos a ter a equação equivalente  $\frac{d}{ds} \left( r^i(s) e^{\int \frac{\partial F}{\partial z} ds} \right) = 0$ , que podemos integrar obtendo  $r^i(s) e^{\int \frac{\partial F}{\partial z} ds} = k$ , com  $k$  constante. Através da condição inicial,  $r^i(0) = 0$ , determinamos  $k = 0$ . Dado que o fator  $e^{\int \frac{\partial F}{\partial z} ds}$  nunca se anula concluimos que  $r^i(s) = 0$  para  $i = 1, \dots, n-1$ , qualquer que seja  $s \in \mathbb{R}$ . Fica assim provada a

igualdade (2.36).

Finalmente, vamos aplicar (2.35) e (2.36) para provar (2.34).

De (2.31) consideremos  $u(x) = z(y(x), s(x))$  e determinemos a sua derivada.

Para  $j = 1, \dots, n$ , temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_j} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \left( \sum_{k=1}^n p^k \frac{\partial x^k}{\partial y_i} \right) \frac{\partial y^i}{\partial x_j} + \left( \sum_{k=1}^n p^k \frac{\partial x^k}{\partial s} \right) \frac{\partial s}{\partial x_j}, \text{ por (2.36) e (2.35)} \\
&= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial x^k}{\partial y_i} \frac{\partial y^i}{\partial x_j} + \frac{\partial x^k}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) p^k \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial x_j} p^k \\
&= \sum_{k=1}^n \delta_{jk} p^k,
\end{aligned}$$

com  $\delta_{jk}$  definido como em (2.29). Temos então,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = p^j, \text{ para } j = 1, \dots, n,$$

ou seja,

$$Du(x) = p(x).$$

□

Mostrámos que dado um ponto  $x^0 \in \Gamma$ , para cada terno  $(p^0, z^0, x^0)$  não caraterístico, podemos escolher uma vizinhança  $V \subset U$  onde existe uma solução  $u$  de classe  $C^2$  que resolve o problema (2.1) nessa vizinhança. Da unicidade da função  $q$  dada pelo Lema 1 e da invertibilidade dada pelo Lema 2 concluímos, ainda, que essa solução é única. Porém, se não existir nenhum terno admissível não é possível aplicar o método. Por outro lado, se existirem vários ternos não caraterísticos encontramos diferentes soluções, correspondendo cada uma a cada terno escolhido. Também nada podemos dizer, em geral, sobre a existência e unicidade de solução correspondente a ternos admissíveis que não obedecem à condição não caraterística. O método das caraterísticas só funciona enquanto a aplicação  $x \rightarrow \omega(x^0, s)$  for invertível. A perda de invertibilidade local pode ser interpretada como a interseção de caraterísticas projetadas. Em princípio, o método das caraterísticas não nos diz nada sobre a solução local para além desta interseção.

## 2.4 Aplicação do método à equação eikonal

Voltemos a considerar o problema do Exemplo 4:

$$\begin{cases} u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 - 1 = 0, & \text{em } U \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x_1, x_2) = 1, & \text{em } \Gamma \subset \partial U, \end{cases} \quad (2.42)$$

com  $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 2x_1\}$  que, mediante transformações adequadas que visaram o “achatamento da fronteira”, transformámos no problema

$$\begin{cases} v_{y_1}^2 - 4v_{y_1}v_{y_2} + 5v_{y_2}^2 - 1 = 0, & \text{em } V \subset \mathbb{R}^2 \\ v(y_1, y_2) = 1, & \text{em } \Lambda = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_2 = 0\} \subset \partial V. \end{cases} \quad (2.43)$$

Agora propomo-nos a:

- Resolver o problema (2.43) pela aplicação do método das caraterísticas;
- Determinar a solução do problema original (2.42) através da solução encontrada para o problema (2.43).

### 1. Sistema caraterístico.

Por, respetivamente, (2.4), (2.7) e (2.6), passamos a escrever:

$$\omega(s) = (\omega^1(s), \omega^2(s)),$$

$$p(s) = (p^1(s), p^2(s)) = (v_{y_1}(\omega^1(s), \omega^2(s)), v_{y_2}(\omega^1(s), \omega^2(s)))$$

e

$$z(s) = v(\omega^1(s), \omega^2(s)).$$

Assim, atendendo à equação do problema (2.43),

$$G(p(s), z(s), \omega(s)) = (p^1(s))^2 - 4p^1(s)p^2(s) + 5(p^2(s))^2 - 1 = 0. \quad (2.44)$$

Resultam então os cálculos:

$$D_\omega G(p(s), z(s), \omega(s)) = (0, 0),$$

$$D_p G(p(s), z(s), \omega(s)) = (2p^1(s) - 4p^2(s), 10p^2(s) - 4p^1(s))$$

e

$$D_z F(p(s), z(s), \omega(s)) = 0$$

com os quais as equações do sistema caraterístico (2.18) se concretizam em:

$$(a) \quad (\dot{p}^1(s), \dot{p}^2(s)) = (0, 0), \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \dot{z}(s) &= \begin{bmatrix} 2p^1(s) - 4p^2(s) & 10p^2(s) - 4p^1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^1(s) \\ p^2(s) \end{bmatrix} \\ &= 2((p^1(s))^2 - 4p^2(s)p^1(s) + 10(p^2(s))^2 - 4p^1(s)p^2(s)) \\ &= 2((p^1(s))^2 - 8p^1(s)p^2(s) + 10(p^2(s))^2) \\ &= 2, \quad \text{por (2.44)} \end{aligned}$$

e

$$(c) \quad (\dot{\omega}^1(s), \dot{\omega}^2(s)) = (2p^1(s) - 4p^2(s), 10p^2(s) - 4p^1(s)).$$

Ou seja,

$$\begin{cases} (a) & \dot{p}^1(s) = 0 \wedge \dot{p}^2(s) = 0 \\ (b) & \dot{z}(s) = 2 \\ (c) & \dot{\omega}^1(s) = 2p^1(s) - 4p^2(s) \wedge \dot{\omega}^2(s) = 10p^2(s) - 4p^1(s). \end{cases} \quad (2.46)$$

## 2. Condições iniciais.

Fixemos um ponto da fronteira  $x^0 = (x_1^0, 0)$ . As condições iniciais (2.19) para o nosso problema são:

- $x^0 = \omega(0) = (\omega^1(0), \omega^2(0)) = (x_1^0, 0)$ , por fazermos  $\omega(\cdot)$  partir de  $x^0 \in \Gamma$ ;
- $z^0 = z(0) = 1$ , por (2.20);
- $p^0 = (p_1^0, p_2^0) = (p^1(0), p^2(0))$  tem de verificar as condições (2.22). Então,

$$\begin{cases} p_1^0 = 0 \\ (p_1^0)^2 - 4p_1^0 p_2^0 + 5(p_2^0)^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1^0 = 0 \\ p_2^0 = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}. \end{cases}$$

Temos, portanto, dois ternos admissíveis:

$$\left( \left( 0, \frac{\sqrt{5}}{5} \right), 1, (x_1^0, 0) \right) \quad (2.47)$$

e

$$\left( \left( 0, -\frac{\sqrt{5}}{5} \right), 1, (x_1^0, 0) \right). \quad (2.48)$$

**Observação 3.** *Este exemplo mostra-nos ainda que o vetor  $p^0$  que verifica (2.22) não tem de ser único.*

### 3. Ternos não caraterísticos.

Verifiquemos a condição não caraterística

$$G_{p_2}(p^0, z^0, x^0) = -4p_1^0 + 10p_2^0 \neq 0.$$

Como

$$G_{p_2} \left( \left( 0, \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \right), 1, (x_1^0, 0) \right) = \pm 2\sqrt{5},$$

ambos os ternos admissíveis, (2.47) e (2.48), são não caraterísticos.

### 4. Solução.

Integremos as equações do sistema (2.46). Obtemos

$$\begin{cases} (a) & p^1(s) = C_1 \wedge p^2(s) = C_2 \\ (b) & z(s) = 2s + C_3 \\ (c) & \omega^1(s) = (2C_1 - 4C_2)s + C_4 \wedge \omega^2(s) = (10C_2 - 4C_1)s + C_5, \end{cases}$$

sendo  $C_i, i = 1, \dots, 5$  constantes reais.

Agora, através das condições iniciais  $p(0) = \left( 0, \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$ ,  $z(0) = 1$  e  $\omega(0) = (x^0, 0)$ , determinamos  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,  $C_3 = 1$ ,  $C_4 = x_1^0$  e  $C_5 = 0$ .

Passamos então a ter

$$\begin{cases} (a) & p^1(s) = 0 \wedge p^2(s) = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \\ (b) & z(s) = 2s + 1 \\ (c) & \omega^1(s) = \mp \frac{4}{5}\sqrt{5}s + x_1^0 \wedge \omega^2(s) = \pm \frac{10}{5}\sqrt{5}s. \end{cases} \quad (2.49)$$

Fixemos agora um ponto  $(y_1, y_2) \in V$  suficientemente próximo de  $x^0$  e façamos

$$(y_1, y_2) = (\omega^1(s), \omega^2(s)).$$

Então,

$$\begin{cases} y_1 = \mp \frac{4}{5}\sqrt{5}s + x_1^0 \\ y_2 = \pm \frac{10}{5}\sqrt{5}s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^0 = y_1 \pm \frac{2}{5}y_2 \\ s = \pm \frac{\sqrt{5}}{10}y_2 \end{cases} \quad (2.50)$$

e a solução (2.49)(b) passa a escrever-se

$$v(y_1, y_2) = z(s) = \frac{\sqrt{5}}{5}y_2 + 1, \quad (2.51)$$

se considerado o terno caraterístico (2.47), ou

$$v(y_1, y_2) = z(s) = -\frac{\sqrt{5}}{5}y_2 + 1, \quad (2.52)$$

se considerado o terno caraterístico (2.48).

##### 5. Solução do problema (2.42).

Recordemos agora a relação (1.10):

$$u(x_1, x_2) = v(x_1, x_2 - 2x_1).$$

Então, usando as soluções (2.51) e (2.52), obtemos respetivamente as duas soluções seguintes,

$$u_1 : u(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{5}}{5}(x_2 - 2x_1) + 1 \quad (2.53)$$

e

$$u_2 : u(x_1, x_2) = -\frac{\sqrt{5}}{5}(x_2 - 2x_1) + 1. \quad (2.54)$$

Podemos ainda, a partir das caraterísticas (2.50) do problema (2.43), determinar as caraterísticas respetivas do problema (2.42). Para isso, basta considerar a relação

$$(y_1, y_2) = (x_1, x_2 - 2x_1)$$

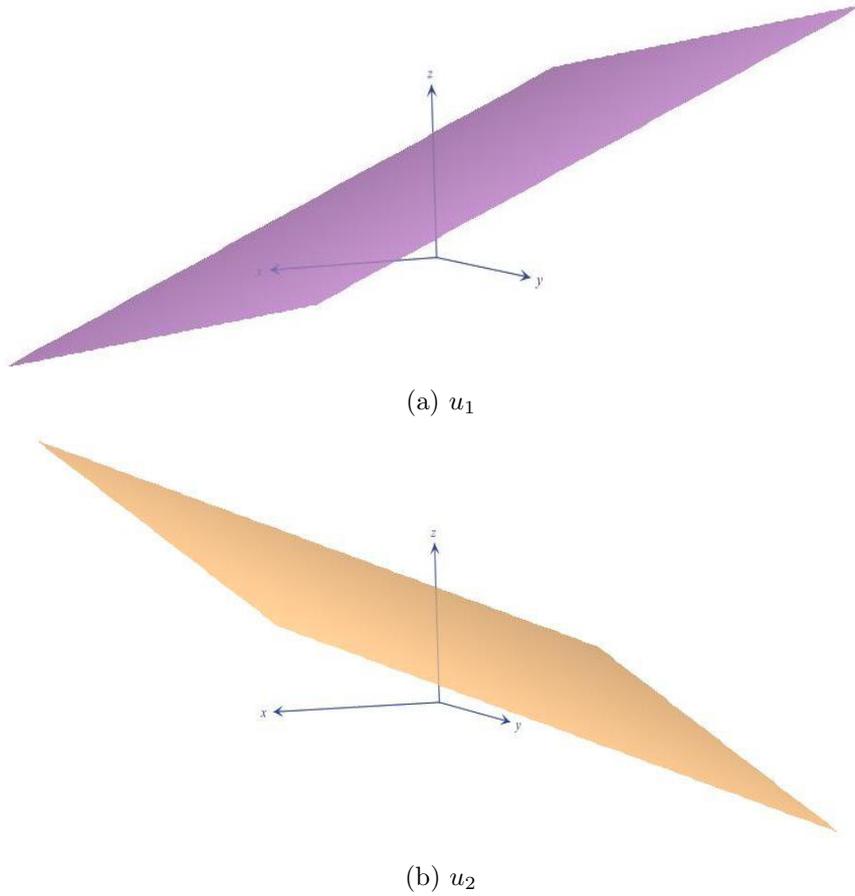


Figura 2.2: Representação gráfica das superfícies solução (2.53) e (2.54) do problema (2.42). Nas figuras, a  $x$  corresponde  $x_1$  e a  $y$  corresponde  $x_2$ .

em (2.50), da qual obtemos

$$\begin{cases} x_1 = \mp \frac{4}{5} \sqrt{5} s + x_1^0 \\ s = \pm \frac{\sqrt{5}}{10} (x_2 - 2x_1) \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2} x_1 + \frac{5}{2} x_1^0. \quad (2.55)$$

Podemos então, observar que as características são retas paralelas e portanto, nunca se intersectam. Tal permite concluir que as soluções  $u_1$  e  $u_2$  resolvem a equação do problema (2.42) em todos os pontos de  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

**Observação 4.** *Encontra-se em [17], uma apresentação diferente da resolução deste problema, cuja equação envolvida é conhecida por equação eikonal. Este problema tem um*

*significado físico interessante a que nos dedicaremos mais adiante (Cap.3, Subsec.3.1.2.).  
Aqui, quisemos focar a nossa atenção apenas nos procedimentos inerentes à aplicação do  
método das características.*

## Capítulo 3

# Equações de Hamilton-Jacobi

Consideremos a equação diferencial parcial de primeira ordem, não linear, escrita na sua forma geral,

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0. \quad (3.1)$$

Se aumentarmos artificialmente o número  $n$  de variáveis independentes para  $n + 1$ , a equação (3.1) pode ser escrita na forma

$$F \equiv u_{x_{n+1}} + H(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0,$$

passando assim, a apresentar-se como uma equação linear em relação a  $u_{x_{n+1}}$  mas que, já não depende explicitamente de  $u$ . Apresentamos aqui como proceder para obter esta transformação segundo Courant e Hilbert em [4].

Começemos por introduzir,  $u = x_{n+1}$ , como uma variável independente e expressar implicitamente, uma família de soluções,  $u = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n, c)$ , na forma

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = c, \quad c \text{ constante.}$$

Então, assumindo  $\phi_{x_{n+1}} \neq 0$ ,

$$(\phi_{x_1}, \dots, \phi_{x_n}, \phi_{x_{n+1}}) \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ u_{x_1} & \dots & u_{x_{n-1}} & u_{x_n} \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\phi_{x_1} + \phi_{x_{n+1}}u_{x_1}, \dots, \phi_{x_n} + \phi_{x_{n+1}}u_{x_n}) = \vec{0}.$$

Então,

$$u_{x_i} = -\frac{\phi_{x_i}}{\phi_{x_{n+1}}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Podemos substituir em (3.1)  $u$  por  $x_{n+1}$  e, para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $u_{x_i}$  pelo segundo membro da relação (3.2). Escrevemos então,

$$F \left( x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, -\frac{\phi_{x_1}}{\phi_{x_{n+1}}}, \dots, -\frac{\phi_{x_n}}{\phi_{x_{n+1}}} \right) = 0.$$

Assim, obtemos para a nova função desconhecida  $\phi$ , uma equação que não depende explicitamente de  $\phi$ . Passemos então a escrevê-la na forma

$$F \equiv G(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \phi_{x_1}, \dots, \phi_{x_n}) = 0.$$

Supondo  $G_{\phi_{x_{n+1}}} \neq 0$  e assumindo a equação anterior resolvida em ordem a  $\phi_{x_{n+1}}$ , podemos escrever

$$\phi_{x_{n+1}} = h(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \phi_{x_1}, \dots, \phi_{x_n}).$$

Se em vez de  $\phi$  escrevermos novamente  $u$ , podemos, sem perda de generalidade, considerar a equação de  $n + 1$  variáveis,  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ , para a função  $u$ , na forma

$$u_{x_{n+1}} + H(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0.$$

Se considerarmos  $x_{n+1} = t$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ , podemos ainda escrever

$$u_t + H(Du, x, t) = 0.$$

As equações diferenciais parciais com esta estrutura matemática, dizem-se *equações de Hamilton-Jacobi*. Estas equações podem classificar-se em estacionárias ou evolutivas, consoante dependem ou não da variável  $t$  que representa o tempo. Com o único propósito de tornar mais clara a determinação das equações características, trataremos separadamente as equações evolutivas e as equações estacionárias. No entanto, como facilmente se deduz, as equações estacionárias pertencem à família das equações evolutivas quando considerado  $u_t = 0$  e a função  $H$  não dependente da variável  $t$ .

## 3.1 Equações Hamilton-Jacobi estacionárias

### 3.1.1 Caraterísticas

Uma equação de Hamilton-Jacobi estacionária representa-se na sua forma mais geral por

$$H(Du(x), x) = 0, \quad (3.3)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$  e  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função pelo menos  $C^2$  conhecida e muitas vezes referida por *hamiltoniano* da equação.

Retomemos do exposto no Capítulo 2, as aplicações  $\omega(s)$ ,  $p(s)$  e  $z(s)$  definidas como em (2.4), (2.7) e (2.6), respetivamente, e as equações caraterísticas (2.18). Como na equação (3.3) o hamiltoniano não depende de  $u$ , temos

$$H_z(p(s), \omega(s)) = 0.$$

As equações caraterísticas passam, então, a escrever-se:

$$\begin{cases} \dot{p}(s) = -H_\omega(p(s), \omega(s)) \\ \dot{z}(s) = H_p(p(s), \omega(s)) \cdot p(s) \\ \dot{\omega}(s) = H_p(p(s), \omega(s)). \end{cases} \quad (3.4)$$

A função  $z(\cdot)$  não aparece envolvida no segundo membro de nenhuma das equações caraterísticas, pelo que a determinação de  $z(\cdot)$  é imediata após encontradas as soluções  $p(\cdot)$  e  $\omega(\cdot)$  do sistema

$$\begin{cases} \dot{p}(s) = -H_\omega(p(s), \omega(s)) \\ \dot{\omega}(s) = H_p(p(s), \omega(s)). \end{cases} \quad (3.5)$$

As equações (3.5) são justamente as equações do movimento de Hamilton da Mecânica, conhecidas por *equações de Hamilton* [6].

### 3.1.2 Equação eikonal

De forma geral, a equação eikonal pode escrever-se:

$$\|Du(x)\| = n,$$

onde  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $Du(x)$  representa o vetor gradiente da função escalar  $u(x)$ ,  $\|\cdot\|$  representa a norma euclidiana e  $n$  o índice de refração, que se define como sendo a razão entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz no meio considerado. Trata-se de uma equação de Hamilton-Jacobi estacionária. A equação eikonal pode entender-se como sendo uma aproximação da equação de onda, válida para a propagação de ondas com frequência infinita, que relaciona o gradiente das superfícies de fase constante (frentes de onda) com a velocidade de propagação da onda no meio. Esta derivação da equação eikonal pode ser consultada em [5].

Vamos abordar a equação eikonal no contexto da ótica geométrica, aplicando-a ao estudo da propagação de ondas de luz num meio ótico. Neste meio, as ondas de luz propagam-se ao longo de raios com uma certa velocidade  $C(x_1, x_2, x_3)$  que depende das variáveis espaciais  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ . Numa fase ótica constante, as superfícies  $u(x_1, x_2, x_3) = k$ , sendo  $k$  uma constante, são chamadas *frentes de onda*. A função  $u(x_1, x_2, x_3)$  satisfaz a equação eikonal,

$$u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2 = n^2(x_1, x_2, x_3), \quad (3.6)$$

sendo  $n = \frac{C_0}{C}$  o índice de refração, onde  $C_0$  e  $C$  representam respetivamente, a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz no meio. Num meio ótico homogéneo, o índice de refração não depende da posição  $(x_1, x_2, x_3)$  e portanto,  $n^2(x_1, x_2, x_3)$  é constante.

Embora seja uma equação estruturalmente simples, é relativamente difícil obterem-se soluções da equação eikonal devido à não linearidade envolvida. No entanto, para uma equação de duas dimensões, associada a uma condição inicial, conseguem-se obter soluções explícitas através do método das características. Um exemplo disso é o problema (2.42), cuja equação envolvida é a equação eikonal. Consideremos, novamente, esse problema

$$\begin{cases} u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 = 1 \\ u(x_1, 2x_1) = 1, \end{cases}$$

as retas características da respetiva equação,

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_1^0$$

e uma das soluções, por exemplo,

$$u_1 : u(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{5}}{5}(x_2 - 2x_1) + 1.$$

No contexto da ótica geométrica, observemos que:

- O índice de refração ser igual a 1, significa que estamos a considerar o ar como meio ótico. Embora seja um meio material e como tal, a velocidade da luz neste meio depende da frequência da luz, essa velocidade é muito próxima de  $3 \times 10^8 \text{ms}^{-1}$  ou seja, da velocidade da luz no vácuo.
- As caraterísticas representam os raios de luz;
- As frentes de onda correspondem às curvas de nível dadas por  $u(x_1, x_2) = k$ , com  $k$  constante.

Assim, no problema que estamos a considerar, os raios de luz propagam-se em linha reta na direção do vetor  $(-2, 1)$  e as frentes de onda pertencem à família de retas paralelas

$$x_2 = 2x_1 + \sqrt{5}(k - 1)$$

e portanto,  $(-2, 1)$  representa também o vetor normal às frentes de onda. Assim, concluímos que os raios de luz se propagam em linha reta, que são normais às frentes de onda e ainda que a condição inicial do problema representa uma frente de onda, mais precisamente, a frente de onda correspondente à reta de equação  $x_2 = 2x_1$ . Obviamente que chegaremos a conclusões semelhantes caso consideremos a solução (2.54).

Tomando estas últimas considerações como motivação, passemos agora a um caso mais geral. Consideremos a equação eikonal a duas dimensões, com índice de refração constante. Ou seja,

$$u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 = n^2. \quad (3.7)$$

Determinemos as equações caraterísticas desta equação. Mantendo as notações que temos vindo a adoptar, tomamos

$$H(p, \omega) = (p^1)^2 + (p^2)^2 - n^2 = 0 \quad (3.8)$$

e as equações (3.5) escrevem-se

$$\begin{cases} \dot{p}^1(s) = 0 \wedge \dot{p}^2(s) = 0 \\ \dot{\omega}^1(s) = 2p^1(s) \wedge \dot{\omega}^2(s) = 2p^2(s), \end{cases} \quad (3.9)$$

de onde se conclui que  $p^1(s)$  e  $p^2(s)$  são constantes. Consideremos agora conhecidas as condições iniciais  $(\omega^1(0), \omega^2(0)) = (x_1^0, x_2^0)$ ,  $(p^1(0), p^2(0)) = (p_0^1, p_0^2)$  e  $z(0) = z_0$ , apropriadas para as equações características. Podemos integrar as equações (3.9), obtendo

$$\begin{cases} p^1(s) = p_0^1 \wedge p^2(s) = p_0^2 \\ \omega^1(s) = 2p_0^1 s + x_1^0 \wedge \omega^2(s) = 2p_0^2 s + x_2^0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Tomemos de (3.4), a equação

$$\dot{z}(s) = D_p H(p(s), \omega(s)) \cdot p(s)$$

que, para a equação (3.7), passa então escrever-se

$$\dot{z}(s) = 2(p^1)^2 + 2(p^2)^2 = 2n^2.$$

Integrando a equação anterior, obtemos a solução

$$z(s) = 2n^2 s + z_0 \quad (3.11)$$

e fazendo  $(x_1, x_2) = (\omega^1(s), \omega^2(s))$ , para  $s$  que verifica (3.10), obtemos

$$u(x_1, x_2) = z(s),$$

que é a solução da equação (3.7) associada às condições iniciais dadas.

As curvas de nível da função  $u(x_1, x_2)$  podem ser interpretadas como sendo o lugar geométrico dos pontos com o mesmo tempo de viagem (fase), pelo que as soluções da equação eikonal não são mais do que frentes de onda. O vetor  $Du = (p^1, p^2)$  representa, por definição, o vetor normal à frente de onda  $u(x_1, x_2) = k$ , com  $k$  constante. Por outro lado, observamos em (3.10) que  $2(p^1, p^2)$  é o vetor tangente às características que representam os raios de luz. Isto confirma o facto físico conhecido (válido também para um índice de refração variável), de que os raios de luz são normais às frentes de onda [5].

## 3.2 Equações de Hamilton-Jacobi evolutivas

### 3.2.1 Características

Consideremos a equação de Hamilton-Jacobi representada na sua forma mais geral por

$$F(Du, u_t, u, x, t) = u_t + H(Du, x, t) = 0, \quad (3.12)$$

onde,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$  e o hamiltoniano,  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , é uma função  $C^2$  conhecida.

Tal como para o caso estacionário mantemos, em relação à variável espacial  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , as aplicações  $\omega(s)$  e  $p(s)$  definidas por (2.4) e (2.7), respetivamente. Definamos agora  $t = \omega^{n+1}(s)$ . Para diferenciar o papel de  $t$  em relação ao da variável  $x$ , passemos a escrever

$$y(s) = (\omega(s), \omega^{n+1}(s)),$$

$$z(s) = u(\omega(s), \omega^{n+1}(s)),$$

$$u_t(y(s)) = p^{n+1}(s)$$

e

$$q(s) = (p(s), p^{n+1}(s)).$$

A curva  $y$  deverá ser tal que

$$F(Du(y), u_t(y), u(y), y) = 0 \quad (3.13)$$

ou seja,

$$F(q, z, y) = p^{n+1} + H(p, y) = 0. \quad (3.14)$$

Determinemos agora as derivadas,

$$F_q(q, z, y) = (F_p(q, z, y), F_{p^{n+1}}(q, z, y)) = (H_p(p, y), 1), \quad (3.15)$$

$$F_y(q, z, y) = (F_\omega(q, z, y), F_{\omega^{n+1}}(q, z, y)) = (H_\omega(p, y), H_{\omega^{n+1}}(p, y))$$

e

$$F_z(q, z, y) = 0,$$

que nos permitem escrever as equações (2.18) (c), (a) e (b), respetivamente na forma:

$$\begin{cases} \dot{\omega}(s) = H_p(p(s), y(s)) \\ \dot{\omega}^{n+1}(s) = 1, \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} \dot{p}(s) = H_\omega(p(s), y(s)) \\ \dot{p}^{n+1}(s) = -H_{\omega^{n+1}}(p(s), y(s)) \end{cases} \quad (3.17)$$

e

$$\begin{aligned}\dot{z}(s) &= H_p(p(s), y(s))p(s) + p^{n+1}(s) \\ &= H_p(p(s), y(s))p(s) - H(p(s), y(s)), \quad \text{por (3.14)}.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Observemos que, em concordância com o termos definido  $t = \omega^{n+1}(s)$ , podemos identificar o parâmetro  $s$  com o tempo  $t$ . De facto, integrando a equação  $\dot{\omega}^{n+1}(s) = 1$ , obtemos  $\omega^{n+1}(s) = s + c$ , com  $c$  constante. Tendo agora em vista a condição inicial  $\omega^{n+1}(0) = 0$ , determinamos  $c = 0$  e passamos a ter a solução  $\omega^{n+1}(s) = s$ . Por isso, podemos considerar  $y(s) = (\omega(s), s)$  e escrever o sistema caraterístico para a equação (3.12) como se segue:

$$\begin{cases} \dot{p}(s) = -H_\omega(p(s), \omega(s), s) \\ \dot{z}(s) = H_p(p(s), \omega(s), s).p(s) - H(p(s), \omega(s), s) \\ \dot{\omega}(s) = H_p(p(s), \omega(s), s).\end{cases}\tag{3.19}$$

Tal como no caso das equações estacionárias, também agora a determinação de  $z(\cdot)$  é imediata após determinadas as soluções  $p(\cdot)$  e  $\omega(\cdot)$  das equações de Hamilton,

$$\begin{cases} \dot{p}(s) = -H_\omega(p(s), \omega(s), s) \\ \dot{\omega}(s) = H_p(p(s), \omega(s), s).\end{cases}\tag{3.20}$$

### 3.3 Problema de valor inicial

Nesta secção, vamos dar continuidade à aplicação do método das caraterísticas na resolução de equações de Hamilton-Jacobi com uma condição inicial associada.

Começemos pela equação de Hamilton-Jacobi na sua forma mais geral. Associemos à equação (3.12) a condição inicial  $u(x, 0) = g(x)$  e passemos a investigar a solução do problema:

$$\begin{cases} u_t(x, t) + H(Du(x, t), x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, +\infty[ \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n,\end{cases}\tag{3.21}$$

onde  $H$  e  $g$  são funções de classe  $C^2$ .

Fixemos então um ponto  $(x^0, 0) \in \Gamma = \mathbb{R}^n \times \{0\}$  e façamos a curva  $y(s) = (\omega(s), s)$  partir de  $(x^0, 0)$  ou seja, tomemos  $y(0) = (x^0, 0)$ . As condições iniciais  $q(0)$  e  $z(0)$ , que

verificam respetivamente as condições de compatibilidade (2.22) e (2.20), passam agora a escrever-se

$$q(0) = (Dg(x^0), 0)$$

e

$$z(0) = g(x^0), \quad (3.22)$$

sendo  $Dg = (g_{x_1}, \dots, g_{x_n})$ .

Como, de (3.15),  $F_{p^{n+1}}(q(0), z(0), y(0)) = 1$ , qualquer que seja a equação de Hamilton-Jacobi não estacionária que tenhamos em consideração, todo o terno admissível é não caraterístico.

As equações de Hamilton (3.20), associadas às condições iniciais  $p(0)$  e  $\omega(0)$ , escrevem-se agora,

$$\begin{cases} \dot{p}(s) = -H_\omega(p(s), \omega(s), s) \\ \dot{\omega}(s) = H_p(p(s), \omega(s), s) \\ \omega(0) = x^0 \\ p(0) = Dg(x^0) \end{cases} \quad (3.23)$$

enquanto que  $z$  satisfaz  $\dot{z}(s) = H_p(p(s), \omega(s)) \cdot p(s) - H(p(s), \omega(s))$ ,  $z(0) = g(x^0)$ . Após determinarmos as soluções  $\omega(s)$  e  $p(s)$  de (3.23), integrando a equação

$$\dot{z}(s) = H_p(p(s), \omega(s)) \cdot p(s) - H(p(s), \omega(s)),$$

obtemos

$$z(s) = \int_0^s (H_p(p(r), \omega(r), r) \cdot p(r) - H(p(r), \omega(r), r)) dr + c, \quad c \text{ constante,}$$

de onde, para  $s = 0$  resulta  $z(0) = c$ . Então, atendendo a (3.22),  $c = g(x^0)$  e portanto, podemos determinar os valores da solução do problema (3.21) ao longo da curva caraterística  $\omega$ , tomando a seguinte fórmula

$$z(s) = \int_0^s (H_p(p(r), \omega(r)) \cdot p(r) - H(p(r), \omega(r))) dr + g(x^0). \quad (3.24)$$

No caso em que o hamiltoniano da equação só depende explicitamente de  $Du$  e de  $x$ , o estudo é semelhante e obtemos um resultado idêntico.

Consideremos agora o problema de valor inicial para uma equação cujo hamiltoniano só depende explicitamente de  $Du$ :

$$\begin{cases} u_t + H(Du) = 0 & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, +\infty[ \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.25)$$

onde  $H$  e  $g$  são funções conhecidas de classe  $C^2$ .

Uma vez que  $H$  só depende de  $p$ ,

$$H_\omega(p(s)) = 0.$$

As equações de Hamilton para o problema (3.25) passam então a escrever-se,

$$\begin{cases} \dot{p}(s) = 0 \\ \dot{\omega}(s) = H_p(p(s)). \end{cases} \quad (3.26)$$

Então  $p$  é constante e, porque  $H$  só depende de  $p$ , concluímos que  $H_p(p(s))$  também é constante. Assim, considerando as condições iniciais  $\omega(0) = x^0$ ,  $p(0) = Dg(x^0)$  e  $z(0) = g(x^0)$ , as soluções das equações (3.26) são

$$\begin{cases} p(s) = Dg(x^0) \\ \omega(s) = H_p(Dg(x^0))s + x^0 \end{cases} \quad (3.27)$$

enquanto que,

$$\dot{z}(s) = H_p(p(s)) \cdot p(s) - H(p(s)). \quad (3.28)$$

Agora, por integração de (3.28), obtemos

$$z(s) = \int_0^s H_p(Dg(x^0)) \cdot Dg(x^0) - H(Dg(x^0))dr + g(x^0). \quad (3.29)$$

Esta solução depende somente do valor inicial  $g(x^0)$ , o que sugere, mesmo sem assumirmos à partida a existência da solução  $u$ , que podemos usar esta fórmula para definir uma solução [2].

O problema de valor inicial para a equação de Hamilton-Jacobi não tem, em geral, uma solução suave que a verifique para todos os tempos  $t > 0$ . Apresentamos a seguir, dois exemplos muito simples onde, através do método das caraterísticas, podemos justificar a não existência e a existência de solução suave para todos os tempos.

**Exemplo 5.**

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2} (u_x)^2 = 0 \\ u(x, 0) = -x^2. \end{cases} \quad (3.30)$$

Temos então,

$$g(x^0) = -(x^0)^2$$

e

$$H(p) = \frac{1}{2} p^2.$$

Calculemos,

$$Dg(x^0) = -2x^0$$

e

$$H_p(p) = p.$$

Assim, as equações (3.27) para este problema são,

$$\begin{cases} p(s) = -2x^0 \\ \omega(s) = -2x^0 s + x^0 \end{cases}$$

e a condição (3.29) escreve-se,

$$z(s) = \int_0^s 2(x^0)^2 dr - (x^0)^2,$$

que podemos integrar, obtendo

$$z(s) = 2(x^0)^2 s - (x^0)^2. \quad (3.31)$$

Tomando agora,  $(x, t) = (\omega(s), s)$ , podemos determinar  $x^0$  em função de  $x$  e de  $t$ , ou seja

$$\begin{cases} t = s \\ x = -2x^0 s + x^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = t \\ x^0 = \frac{x}{1 - 2t}. \end{cases} \quad (3.32)$$

Substituindo, em (3.31),  $x^0$  pela relação anterior, obtemos a solução:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= z(s) \\ &= 2 \left( \frac{x}{1 - 2t} \right)^2 t - \left( \frac{x}{1 - 2t} \right)^2 \\ &= -\frac{x^2}{1 - 2t}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Facilmente verificamos que esta solução não é regular em  $t = \frac{1}{2}$  e, embora se observe que para  $t > \frac{1}{2}$ , a função  $u$ , dada por (3.33), continua a verificar a nossa equação, tal não se verifica fisicamente [2]. Como podemos observar em (3.32), a aplicação  $(x, t) \rightarrow (\omega(s), s)$  deixa de ser invertível localmente em  $t = \frac{1}{2}$ , precisamente o instante em que as caraterísticas se interseçam e a partir desta interseção, tal como mostrámos no Capítulo 2, o método das caraterísticas não nos diz nada sobre a solução. Na verdade, a singularidade de  $u$  em  $t = \frac{1}{2}$  propaga-se para valores de  $t$  superiores. Para mais detalhes sobre a propagação de singularidades ver [10].

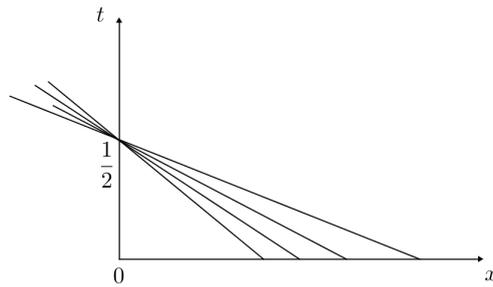


Figura 3.1: Esquema das retas caraterísticas associadas ao problema (3.30).

### Exemplo 6.

Consideremos agora o problema,

$$\begin{cases} u_t + \sqrt{1 + u_x^2} = 0 \\ u(x, 0) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.34)$$

Temos então,

$$g(x^0) = ax^0 + b,$$

e

$$H(p) = \sqrt{1 + p^2}.$$

Calculemos,

$$Dg(x^0) = a,$$

e

$$H_p(p) = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Para  $a, b \in \mathbb{R}$ , as equações (3.27) para este problema são então

$$\begin{cases} p(s) = a \\ \omega(s) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}s + x^0 \end{cases}$$

e a condição (3.29) escreve-se,

$$z(s) = \int_0^s \left( \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}} - \sqrt{1+a^2} \right) dr + ax^0 + b$$

que podemos integrar, obtendo

$$z(s) = -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}s + ax^0 + b.$$

Assim, tomando agora  $(x, t) = (\omega(s), s)$ , podemos determinar  $x^0$  em função de  $x$  e de  $t$ , ou seja

$$\begin{cases} t = s \\ x = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}s + x^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = t \\ x^0 = x - \frac{at}{\sqrt{1+a^2}} \end{cases}$$

e finalmente, obtermos a solução,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= z(s) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}t + a \left( x - \frac{at}{\sqrt{1+a^2}} \right) + b \\ &= ax - t\sqrt{1+a^2} + b. \end{aligned}$$

As caraterísticas nunca se interseam porque são retas paralelas. Esta equação tem por isso, uma solução regular em todo o tempo.

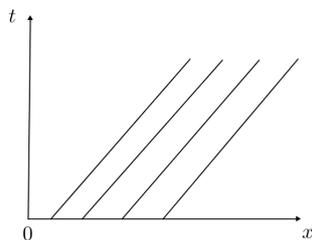


Figura 3.2: Esquema das retas caraterísticas associadas ao problema (3.34).

### 3.4 O problema de Kepler

Nesta secção, vamos resolver o problema que descreve o movimento de dois corpos que se atraem mutuamente sob a ação da gravidade, conhecido por problema de Kepler ou problema dos dois corpos. Usaremos um processo que resulta do olhar sob outro ponto de vista para a relação entre as equações de Hamilton e a correspondente equação de Hamilton-Jacobi. Na verdade, a relação que apresentámos nas secções anteriores pode ser revertida. Embora a integração de uma equação diferencial parcial seja, quase sempre, um problema mais difícil do que a integração de um sistema de equações diferenciais ordinárias, quando se trata do sistema característico, a sua integração pode ser difícil por métodos elementares enquanto que, a equação diferencial parcial correspondente é manejável [4].

O processo que vamos apresentar, consiste em determinar um integral completo da equação diferencial parcial e, através dele, resolver-se o correspondente sistema característico.

Comecemos por apresentar um conceito de integral completo para as equações de Hamilton-Jacobi,

$$p^{n+1} + H(x_1, \dots, x_n, t, p_1, \dots, p_n) = 0, \quad (3.35)$$

com  $p^{n+1} = u_t$  e  $p_i = u_{x_i}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Atendendo a que, para cada solução  $u$  da equação diferencial (3.35),  $u + c$ , sendo  $c$  uma constante arbitrária, é ainda uma solução da mesma equação, define-se:

**Definição 4.** *Se*

$$u = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n, t, a_1, a_2, \dots, a_n)$$

*é uma solução, da equação (3.35), que depende dos  $n$  parâmetros  $a_i$  tais que*

$$|\phi_{x_i a_k}| \neq 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

*então, a expressão  $u = \phi + c$  que depende dos  $n + 1$  parâmetros  $a_1, a_2, \dots, a_n, c$ , diz-se um integral completo da equação (3.35).*

Com esta definição, o conteúdo principal deste processo de reversão assenta no teorema seguinte:

**Teorema 5.** *Se*

$$u = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n, t, a_1, a_2, \dots, a_n) + c$$

*é um integral completo conhecido da equação (3.35), então pela resolução das equações*

$$\phi_{a_i} = b_i \tag{3.36}$$

*e*

$$\phi_{x_i} = p_i, \tag{3.37}$$

*para  $i = 1, 2, \dots, n$ , com  $2n$  constantes reais arbitrárias  $a_i$  e  $b_i$ , obtemos uma família, de  $2n$  parâmetros, de soluções das equações de Hamilton*

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = H_{p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -H_{x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \tag{3.38}$$

*Demonstração.* Vamos assumir que a partir das  $n$  equações de (3.36), expressamos  $x_i$  como funções de  $t$  e dos  $2n$  parâmetros  $a_i$  e  $b_i$ . Tal é possível porque, por suposição,  $\phi$  é um integral completo. Além disso, vamos considerar que introduzimos essas expressões para  $x_i$  nas  $n$  equações de (3.37). Vamos mostrar que  $x_i$  e  $p_i$ , então determinados, satisfazem as equações do sistema (3.38). Para isso, vamos derivar as equações (3.36) em relação a  $t$  e a equação de Hamilton-Jacobi

$$\phi_t + H(x_1, x_2, \dots, x_n, t, \phi_{x_1}, \phi_{x_2}, \dots, \phi_{x_n}) = 0, \tag{3.39}$$

em relação a  $a_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$  obtendo

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial a_i \partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial a_i \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial a_i \partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial a_i \partial x_k} H_{p_k} = 0. \end{cases}$$

Como  $\phi$  é um integral completo, segue-se que para  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = H_{p_i}.$$

Fixados  $a_i$  e  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , temos então  $\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{dx_i}{dt}$  e portanto,

$$\frac{dx_i}{dt} = H_{p_i}.$$

Diferenciemos agora  $p_i$  em relação a  $t$  e a equação (3.39) em relação a  $x_i$  de onde

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t} \\ 0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_k} H_{p_k} + H_{x_i}. \end{cases}$$

Como já provámos que  $\frac{dx_i}{dt} = H_{p_i}$ , para os já fixados  $a_i$  e  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , segue-se imediatamente a relação

$$\frac{dp_i}{dt} = -H_{x_i}.$$

□

Desta forma, obtemos funções  $x_i(t)$  e  $p_i(t)$  que ainda dependem dos  $2n$  parâmetros e ainda podem ser tomadas para representar a solução geral das equações (3.38). Assim, a resolução do sistema (3.38) reduz-se ao problema de encontrar um integral completo para a respetiva equação de Hamilton-Jacobi. Passemos de seguida à resolução do problema de Kepler aplicando esta teoria. Esta e uma outra aplicação, designadamente a determinação da equação das geodésicas num elipsóide, podem ser vistas em [4].

Consideremos o movimento de duas partículas  $P_1$  e  $P_2$ , com massas  $m_1$  e  $m_2$  respetivamente, que se atraem entre si sob ação da força da gravidade. Seja  $(x_1, y_1, z_1)$  a posição da partícula  $P_1$  e  $(x_2, y_2, z_2)$  a posição da partícula  $P_2$ . O movimento das duas partículas é descrito pelas leis da gravitação de Newton, ou seja, pelas equações

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = U_{x_1} \\ m_1 \ddot{y}_1 = U_{y_1} \\ m_1 \ddot{z}_1 = U_{z_1} \\ m_2 \ddot{x}_2 = U_{x_2} \\ m_2 \ddot{y}_2 = U_{y_2} \\ m_2 \ddot{z}_2 = U_{z_2}, \end{cases}$$

com

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \frac{k^2 m_1 m_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}},$$

onde  $k$  é uma constante.

Vamos supor que a partícula  $P_2$  está posicionada na origem do sistema de coordenadas. O movimento da partícula  $P_1$  permanece, neste caso, sempre no mesmo plano [4]. Podemos então escolher como sistema de coordenadas o plano  $xOy$ . Assim, para a posição  $(x, y)$  da partícula  $P_1$ , assumindo que esta é atraída para a origem, as equações do movimento descrevem-se segundo a lei da gravitação de Newton na forma:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} = U_x \\ m_1 \ddot{y} = U_y, \end{cases} \quad (3.40)$$

com

$$U(x, y) = \frac{K^2}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

onde  $K^2 = k^2 m_1 m_2$ . Definimos agora,

$$p_1 = \dot{x}, \quad p_2 = \dot{y}$$

e a função hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} ((p_1)^2 + (p_2)^2) - \frac{K^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3.41)$$

Desta forma, passamos a ter o sistema (3.40) inserido no sistema de equações seguinte:

$$\begin{cases} \dot{x} = H_{p_1} \\ \dot{y} = H_{p_2} \\ \dot{p}_1 = -H_x \\ \dot{p}_2 = -H_y. \end{cases} \quad (3.42)$$

Consideremos agora, a equação de Hamilton-Jacobi cujas equações características são precisamente as equações (3.42) ou seja, a equação

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) = \frac{K^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3.43)$$

Com base no Teorema 5, o problema de integrar as equações (3.42) é equivalente ao problema de encontrar um integral completo da equação (3.43). A gestão da equação torna-se mais fácil se mudarmos as coordenadas cartesianas  $(x, y)$  para coordenadas polares  $(r, \theta)$ . Tomamos portanto,

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

consequentemente,

$$\phi_r = \phi_x \cos \theta + \phi_y \sin \theta$$

e

$$\phi_\theta = -\phi_x r \sin \theta + \phi_y r \cos \theta.$$

Então,

$$\phi_x^2 + \phi_y^2 = \phi_r^2 + \frac{1}{r^2} \phi_\theta^2$$

e a equação (3.43) passa a escrever-se

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_r^2 + \frac{1}{r^2} \phi_\theta^2) = \frac{K^2}{r}. \quad (3.44)$$

Agora, fazendo

$$\phi_t = -\alpha, \quad \phi_\theta = -\beta, \quad (3.45)$$

com  $\alpha, \beta$  constantes, vamos obter, através de (3.44), que

$$\phi = \pm \int_{r_0}^r \sqrt{2\alpha + \frac{2K^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}} d\rho + c(t, \theta).$$

segue-se então de (3.45) que  $c(t, \theta) = -\alpha t - \beta \theta$ . Temos, portanto, uma família de soluções que depende dos dois parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $\phi = \phi(\alpha, \beta, \theta, r, t)$ , da equação de Hamilton-Jacobi (3.44). Calculemos,

$$\phi_{r\alpha} = \pm \frac{1}{\sqrt{2\alpha + \frac{2K^2}{r} - \frac{\beta^2}{r^2}}}, \quad \phi_{r\beta} = \mp \frac{\beta}{\sqrt{2\alpha + \frac{2K^2}{r} - \frac{\beta^2}{r^2}}}, \quad \phi_{\theta\alpha} = 0 \quad \text{e} \quad \phi_{\theta\beta} = \mp 1.$$

Temos então que

$$\begin{vmatrix} \phi_{r\alpha} & \phi_{\theta\alpha} \\ \phi_{r\beta} & \phi_{\theta\beta} \end{vmatrix} \neq 0$$

e portanto,

$$\phi(\alpha, \beta, \theta, r, t) = \pm \int_{r_0}^r \sqrt{2\alpha + \frac{2K^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}} d\rho - \alpha t - \beta \theta$$

é um integral completo da equação de Hamilton-Jacobi (3.44). Escolhemos,

$$\phi(\alpha, \beta, \theta, r, t) = - \int_{r_0}^r \sqrt{2\alpha + \frac{2K^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}} d\rho - \alpha t - \beta\theta$$

e calculamos,

$$\phi_\alpha = - \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\sqrt{2\alpha + \frac{2K^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}}} - t \quad \text{e} \quad \phi_\beta = \beta \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{2\alpha + \frac{2K^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}}} - \theta.$$

De acordo com o Teorema 5, definimos

$$\phi_\alpha = -t_0 \quad \text{e} \quad \phi_\beta = -\theta_0.$$

Então,

$$t - t_0 = - \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\sqrt{2\alpha + \frac{2K^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}}} \quad (3.46)$$

e

$$\theta - \theta_0 = \beta \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{2\alpha + \frac{2K^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}}}. \quad (3.47)$$

A equação (3.47) dá-nos a trajetória da partícula, enquanto que a equação (3.46) determina o movimento da partícula na sua trajetória em função do tempo. Podemos ainda determinar a trajetória da partícula explicitamente, introduzindo uma mudança na variável de integração. Se tomarmos  $\mu = \rho^{-1}$ , temos  $d\rho = -d\mu\rho^2$ , pelo que, procedendo à substituição em (3.47) obtemos,

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= -\beta \int_{\frac{1}{r_0}}^{\frac{1}{r}} \frac{d\mu}{\sqrt{2\alpha + 2K^2\mu - \beta^2\mu^2}} \\ &= -\arcsin\left(\frac{\frac{\beta^2}{K^2}\frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha\beta^2}{K^4}}}\right) + \arcsin\left(\frac{\frac{\beta^2}{K^2}\frac{1}{r_0} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha\beta^2}{K^4}}}\right). \end{aligned}$$

Definamos agora,

$$\theta_1 = \theta_0 + \arcsin\left(\frac{\frac{\beta^2}{K^2}\frac{1}{r_0} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha\beta^2}{K^4}}}\right)$$

e

$$m = \frac{\beta^2}{K^2}, \quad \epsilon^2 = \sqrt{1 + \frac{2\alpha\beta^2}{K^4}}.$$

Podemos escrever então a equação

$$\theta - \theta_1 = -\arcsin\left(\frac{\frac{m}{r} - 1}{\epsilon^2}\right)$$

e resolvê-la em ordem a  $r$  obtendo, por fim, a equação

$$r = \frac{m}{1 - \epsilon^2 \sin(\theta - \theta_1)}, \quad (3.48)$$

que representa as secções cónicas. Mais precisamente, a equação (3.48) define em coordenadas polares uma elipse se  $0 \leq \epsilon^2 < 1$ , uma parábola se  $\epsilon^2 = 1$  ou uma hipérbole se  $\epsilon^2 > 1$  (Fig. 3.3).

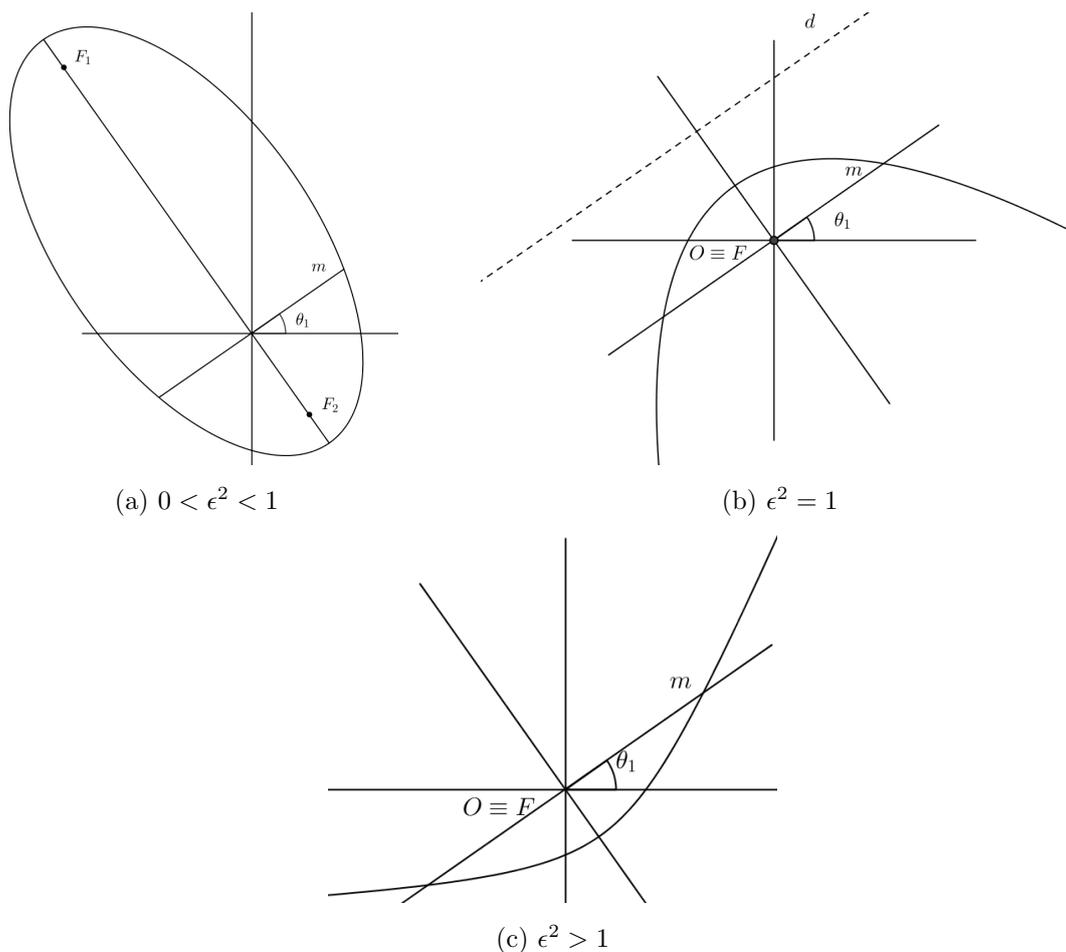


Figura 3.3: Trajetória da partícula  $P_1$ : (a) elipse com focos  $F_1 = \frac{m}{1-\epsilon^2}$  e  $F_2 = -\frac{m}{1+\epsilon^2}$ ; (b) parábola com foco  $F = (0,0)$  e diretriz  $d : y = m$ ; (c) ramo da hipérbole de focos  $F = (0,0)$  e  $(0, -\frac{2m\epsilon^2}{\epsilon^4-1})$  e que contém o ponto  $(0, m)$ .

# Capítulo 4

## Teoria de controlo ótimo

Este capítulo, pretende fornecer os conhecimentos básicos, necessários à resolução de um problema de controlo ótimo pela aplicação do método da programação dinâmica. Com esse objetivo, apresenta-se um modelo de um problema de controlo ótimo a partir de um sistema dinâmico de dimensão finita, contínuo no tempo, descrito por equações diferenciais ordinárias.

### 4.1 Formulação de um problema de controlo ótimo

O foco da teoria de controlo ótimo é algum sistema cujo comportamento através do tempo, tendo em vista um sentido específico, se deseja controlar otimamente. A maneira como um sistema muda ao longo de um dado intervalo de tempo,  $[t, T]$ ,  $t \geq 0$ , descreve-se pela especificação do comportamento, nesse intervalo, de certas funções que nominamos de *variáveis de estado* e representamos por  $X(s)$ , sendo  $s$  uma variável independente que se refere ao tempo. O comportamento das variáveis de estado depende de funções de outra classe, as *variáveis de controlo*, que representamos por  $\alpha(s)$ . Estas últimas, tomam valores cuja variação está restrita a algum subconjunto compacto  $A \subset \mathbb{R}^m$ , fixo e especificado previamente. Ao conjunto das variáveis de controlo,

$$\mathcal{A} = \{\alpha : [0, T] \rightarrow A \mid \alpha(\cdot) \text{ é mensurável}\} \quad (4.1)$$

chamamos *conjunto de controlos admissíveis*.

A forma exata da equação que representa os estados do sistema e das variáveis que

nela aparecem, é ditada pela especificidade do problema que se tenha em consideração. Em geral, a taxa de mudança de cada variável de estado depende de todas as outras variáveis de estado, de todas as variáveis de controlo, dos vários parâmetros técnicos e explicitamente do tempo. Pretendemos formular um problema de controlo ótimo partindo de um sistema muito simples, visando centrar a nossa atenção nos resultados essenciais desta teoria. Vamos, por isso, considerar um sistema hipoteticamente governado por uma única variável de estado e uma única variável de controlo, isto é, um sistema onde a taxa de variação da variável de estado depende implicitamente apenas da variável de controlo e explicitamente do tempo.

Antes de continuarmos, façamos aqui uma breve pausa para revermos algumas definições que estimam uma função e que iremos usar ao longo deste capítulo. Sempre que não cause ambiguidade, usaremos a mesma letra  $L$  para representar certa constante real sem que tal signifique, necessariamente, o mesmo valor constante.

Uma função,  $f : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , diz-se:

- *limitada*, se existir uma constante real  $L > 0$  de modo que para todo o  $(x, a) \in U$ ,

$$|f(x, a)| \leq L. \quad (4.2)$$

- *uniformemente contínua*, em  $x$  tal que  $(x, a) \in U$ , se dado um número real  $\epsilon > 0$ , existir um número real  $\delta > 0$ , de modo que para todo o  $(x_1, a), (x_2, a) \in U$ ,

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1, a) - f(x_2, a)| < \epsilon. \quad (4.3)$$

- *de Lipschitz*, em  $x$  tal que  $(x, a) \in U$ , se existe um número real  $L > 0$ , de modo que para todo  $(x_1, a), (x_2, a) \in U$ ,

$$|f(x_1, a) - f(x_2, a)| \leq L |x_1 - x_2|. \quad (4.4)$$

De (4.3) e (4.4), conclui-se que toda a função de Lipschitz é uniformemente contínua.

Voltemos agora à formulação do nosso problema de controlo ótimo. Suponhamos que a dinâmica do sistema é descrita por uma função conhecida,  $f : \mathbb{R}^n \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com

$A \subset \mathbb{R}^m$ , limitada e de Lipschitz, a que chamamos *função de transição*. A taxa de mudança da variável de estado é então descrita pela equação diferencial ordinária

$$\dot{X}(s) = f(X(s), \alpha(s)), \quad t < s < T, \quad (4.5)$$

a que nos referimos por *equação de estado do sistema*. Suponhamos ainda que é conhecido o estado do sistema no instante inicial  $t \geq 0$ , digamos  $X(t) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Assim, passamos a escrever o sistema na forma,

$$\begin{cases} \dot{X}(s) = f(X(s), \alpha(s)), & t < s < T \\ X(t) = x. \end{cases} \quad (4.6)$$

Num problema de controlo ótimo, estuda-se a possibilidade de controlar eficazmente a solução  $X(\cdot)$  do sistema (4.6). Devemos, portanto, averiguar se mediante a seleção de qualquer variável de controlo pertencente a  $\mathcal{A}$ , essa solução existe e se é única.

Cada variável de controlo  $\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}$  especifica uma trajetória  $X^\alpha(\cdot)$  que, substituída na equação (4.6), fornece um sistema de  $n$  equações diferenciais ordinárias de primeira ordem desconhecidas ou seja,

$$\begin{cases} \dot{X}^\alpha(s) = f(X^\alpha(s), \alpha(s)), & t < s < T \\ X^\alpha(t) = x, \end{cases} \quad (4.7)$$

para  $f : \mathbb{R}^n \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Como, por suposição,  $f$  é uma função de Lipschitz e limitada, e porque o valor inicial da variável de estado  $x \in \mathbb{R}^n$  é conhecido, o teorema da existência e unicidade de solução para um sistema de equações diferenciais ordinárias [20], permite-nos concluir que, para cada variável de control que se especifique, o sistema tem uma única solução de Lipschitz,  $X(\cdot) = X^\alpha(\cdot)$ , no intervalo de tempo  $[t, T]$ , que resolve a equação localmente. Portanto, o sistema responde de modo único a cada variável de controlo. Dizemos que  $X^\alpha(\cdot)$  é a *resposta* do sistema ao controlo  $\alpha(\cdot)$  e que  $X^\alpha(s)$  é o *estado* do sistema no instante  $s$ .

**Observação 5.** *A notação mais adequada seria  $X^{\alpha(\cdot)}(\cdot)$  para representar a resposta ao controlo  $\alpha(\cdot)$  e  $X^{\alpha(s)}(s)$  para representar o estado do sistema (4.6). Contudo, por vezes, optamos denotar apenas por  $\alpha$  a função de controlo com a intenção única de dar leveza ao texto.*

Resolver um problema de controlo ótimo consiste em determinar, entre todas as variáveis de controlo admissíveis, aquela que proporciona a melhor resposta do sistema, ou seja, aquela que dirige o sistema com a maior eficácia tendo em vista um determinado objetivo. Torna-se por isso, necessário medir a eficácia, o que pode ser feito se definirmos uma medida do custo da resposta. Porque a resposta do sistema a cada controlo  $\alpha(\cdot)$  é uma função no tempo, é natural e razoável que a medida do custo dessa resposta seja definida por um funcional fazendo, assim, corresponder a cada resposta  $X^\alpha(\cdot)$  um número real que representa esse custo.

**Definição 5.** Dados  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $0 \leq t \leq T$ , o custo correspondente a cada controlo  $\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}$  é determinado pelo funcional

$$J_{x,t}[\alpha(\cdot)] = \int_t^T h(X(s), \alpha(s)) ds + g(X(T)), \quad (4.8)$$

onde  $h : \mathbb{R}^n \times A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são funções conhecidas, limitadas e de Lipschitz e  $X(\cdot) = X^\alpha(\cdot)$  resolve a EDO (4.6).

Chama-se à função  $h$  o custo corrente por unidade de tempo e à função  $g$  o custo terminal. Este funcional é ainda referido como *funcional objetivo* do problema.

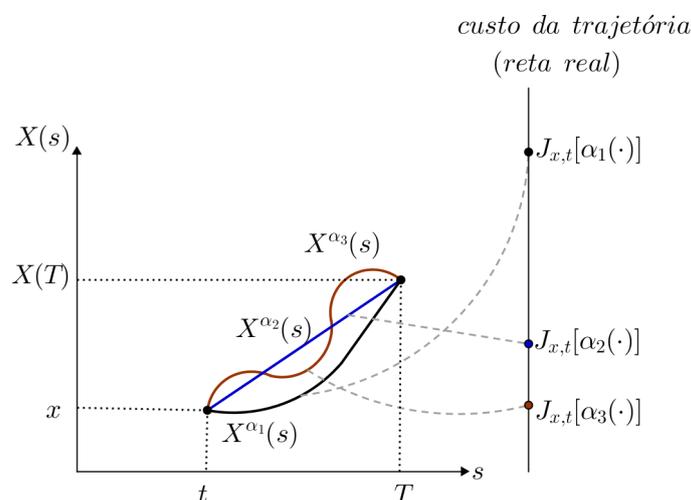


Figura 4.1: Motivação para a definição do funcional objetivo  $J_{x,t}[\alpha(\cdot)]$  [3].

O nosso problema de controlo ótimo pode, por fim, colocar-se do seguinte modo: Determinar a função  $\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}$  que resolve

$$\min_{\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}} J_{x,t}[\alpha(\cdot)] = \int_t^T h(X(s), \alpha(s)) ds + g(X(T)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.9)$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} \dot{X}(s) = f(X(s), \alpha(s)), & t < s < T \\ X(t) = x. \end{cases}$$

A função de controlo  $\alpha^*(\cdot)$  é solução do problema se corresponder à variável de controlo admissível que dirige o sistema com menor custo para determinado objetivo.

**Observação 6.** *Por vezes, a eficácia de um controlo deve ser medida como sendo o lucro em vez do custo, dependendo do contexto real do problema. Obviamente que, nesse caso, (4.8) define o lucro correspondente a cada controlo e o problema colocar-se-á na forma: Determinar a função  $\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}$  que resolve*

$$\max_{\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}} J_{x,t}[\alpha(\cdot)] = \int_t^T h(X(s), \alpha(s)) ds + g(X(T)), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} \dot{X}(s) = f(X(s), \alpha(s)), & t < s < T \\ X(t) = x. \end{cases}$$

## 4.2 Programação Dinâmica

Em 1957, Richard Bellman introduziu um princípio que se tornou uma contribuição histórica para a teoria de controlo, o *princípio da otimalidade de Bellman*, hoje o princípio da programação dinâmica, segundo o qual, uma estratégia ótima apresenta a propriedade de, independentemente das decisões tomadas para se atingir um estado particular num certo estágio, as decisões restantes a partir desse estado constituem, ainda, uma estratégia ótima [1]. Assim, este princípio leva-nos a determinar o controlo ótimo olhando para o sistema (4.6) como uma lei de feedback, ou seja, uma lei que traduz o processo em que é o estado do sistema que determina o modo como o controlo tem de ser exercido a qualquer momento. Contextualizando no problema (4.9), este princípio diz-nos que a escolha das decisões de controlo  $\alpha(\cdot)$  ideais no futuro é independente das decisões de controlo, tomadas no passado, que trouxeram o sistema ao estado atual  $X(t) = x$ . A estratégia ótima de controlo do sistema pode então ser construída “andando para trás” a partir do estado final  $X(T)$ . A chave deste procedimento é a função valor,

$$V(x, t) = \min_{\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}} J_{x,t}[\alpha(\cdot)], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.10)$$

que faz corresponder a cada estado atual,  $X(t) = x$ , as decisões mais eficazes tomadas a partir daí. Deste modo, está-se a considerar uma família inteira de problemas de controlo ótimo, todos com a mesma dinâmica (4.6) e o mesmo custo funcional (4.8). Pretendemos saber como varia o custo mínimo enquanto variam o estado  $x$ , considerado inicial, e o respetivo instante  $t$ .

Iremos mostrar, nesta secção, que a função valor (4.10) obedece às condições do princípio da programação dinâmica, satisfaz uma equação de Hamilton-Jacobi, conhecida por *equação de Hamilton-Jacobi-Bellman*, e como estes dois resultados são úteis na determinação da estratégia ótima do problema (4.9).

### 4.2.1 Função valor e princípio da programação dinâmica

Dados qualquer estado  $x$  e qualquer instante  $t$ , a função valor fornece o menor custo entre os custos de todas as trajetórias possíveis que começam nesse estado e nesse instante. A observação principal é verificar-se que, ao longo da trajetória ótima, o custo inicial mais o custo ótimo de qualquer transição, se adicionam ao custo ótimo remanescente [19].

A curva desenhada na Figura 4.2, representa um exemplo hipotético da trajetória ótima, ao longo do intervalo de tempo  $[t, T]$ , do sistema referente a um problema de controlo com as características do problema formulado em (4.9). Esta curva está dividida em duas partes,  $A$  e  $B$ , separadas no instante  $s = t + k \in [t, T]$ . O princípio da programação dinâmica afirma que a parte  $B$ , definida no intervalo  $[t + k, T]$ , deve ser a trajetória ótima nesse intervalo uma vez que, no instante  $s = t + k$ , o estado inicial tomado,  $X(t + k)$ , coincide com o estado terminal da trajetória ótima no intervalo  $[t, t + k] \subset [t, T]$ , ou seja, na parte  $A$ , que levou o sistema até lá.

O teorema seguinte, estabelece que a função valor,  $V(x, t)$ , verifica estas condições, ou seja, o princípio da programação dinâmica.

Consideremos fixos,  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $0 \leq t \leq T$ .

**Teorema 6.** *Para cada número real  $k > 0$  tão pequeno que  $t + k \leq T$ , tem-se*

$$V(x, t) = \min_{\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ \int_t^{t+k} h(X(s), \alpha(s)) ds + V(X(t+k), t+k) \right\}, \quad (4.11)$$

onde  $X(\cdot) = X^\alpha(\cdot)$ , resolve a EDO (4.6) para o controlo  $\alpha(\cdot)$ .

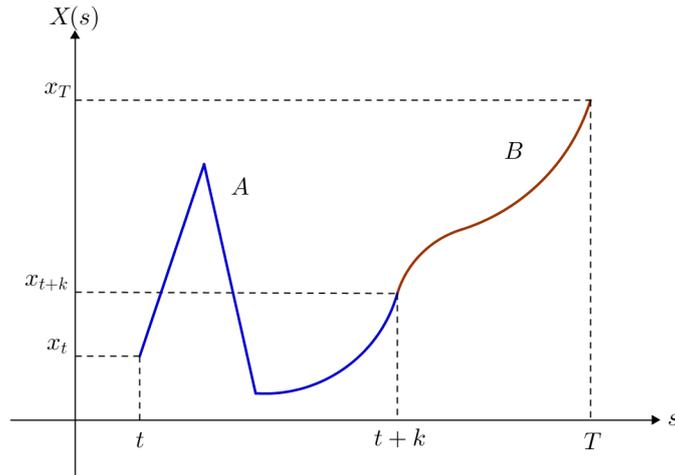


Figura 4.2: Princípio da programação dinâmica [3].

**Observação 7.** Este resultado diz-nos, por outras palavras, que o problema de controlo ótimo no intervalo  $[t, T]$ , pode dividir-se em dois problemas a resolver separadamente pela seguinte ordem:

1. O problema de controlo ótimo no subintervalo  $[t+k, T]$ , com custo corrente  $h$  e custo terminal  $g$ . Desta maneira determinamos a função valor  $V(\cdot, t+k)$  no instante  $t+k$ .
2. O problema de controlo ótimo no subintervalo  $[t, t+k]$ , com custo corrente  $h$  e o custo terminal  $V(\cdot, t+k)$  determinado no problema 1. Desta maneira, determinamos a função valor  $V(\cdot, t)$  no instante  $t$ .

Garantindo que, no instante  $t$ , a função valor  $V(\cdot, t)$  obtida na resolução do problema de 2. é a função valor correspondente ao problema de controlo ótimo global, ou seja, em todo o intervalo  $[t, T]$ .

*Demonstração.* 1. Começemos por escolher, arbitrariamente, uma função de controlo  $\alpha_1(\cdot) \in \mathcal{A}$  e resolvamos a EDO

$$\begin{cases} \dot{X}^{\alpha_1}(s) = f(X^{\alpha_1}(s), \alpha_1(s)), & t < s < t+k \\ X^{\alpha_1}(t) = x. \end{cases}$$

Fixemos  $\epsilon > 0$  e escolhamos outra função de controlo,  $\alpha_2(\cdot) \in \mathcal{A}$ , de modo que se

verifique a condição

$$V(X^{\alpha_1}(t+k), t+k) + \epsilon \geq \int_{t+k}^T h(X^{\alpha_2}(s), \alpha_2(s)) ds + g(X^{\alpha_2}(T)), \quad (4.12)$$

com

$$\begin{cases} \dot{X}^{\alpha_2}(s) = f(X^{\alpha_2}(s), \alpha_2(s)), & t+k < s < T \\ X^{\alpha_2}(t+k) = X^{\alpha_1}(t+k). \end{cases}$$

Definamos agora, à custa das funções escolhidas,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , uma outra função de controlo,  $\alpha_3$ , como se segue:

$$\alpha_3(s) = \begin{cases} \alpha_1(s), & \text{se } t \leq s < t+k \\ \alpha_2(s), & \text{se } t+k \leq s \leq T \end{cases}$$

Resolvamos a EDO

$$\begin{cases} \dot{X}^{\alpha_3}(s) = f(X^{\alpha_3}(s), \alpha_3(s)), & t < s < T \\ X^{\alpha_3}(t) = x. \end{cases}$$

Então, porque a solução da EDO (4.6) existe e é única, tem de ser

$$X^{\alpha_3}(s) = \begin{cases} X^{\alpha_1}(s), & \text{se } t \leq s < t+k \\ X^{\alpha_2}(s), & \text{se } t+k \leq s \leq T. \end{cases} \quad (4.13)$$

Tal, atendendo a (4.10) e a (4.8), implica que

$$\begin{aligned} V(x, t) &\leq J_{x,t}[\alpha_3(\cdot)] \\ &= \int_t^T h(X^{\alpha_3}(s), \alpha_3(s)) ds + g(X^{\alpha_3}(T)) \\ &= \int_t^{t+k} h(X^{\alpha_1}(s), \alpha_1(s)) ds + \int_{t+k}^T h(X^{\alpha_2}(s), \alpha_2(s)) ds + g(X^{\alpha_2}(T)) \\ &\leq \int_t^{t+k} h(X^{\alpha_1}(s), \alpha_1(s)) ds + V(X^{\alpha_1}(t+k), t+k) + \epsilon, \end{aligned} \quad (4.14)$$

tendo a última desigualdade resultado de (4.12). Como escolhemos  $\alpha_1(\cdot)$  arbitrariamente, a desigualdade (4.14) verifica-se para toda a função  $\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}$ , ou seja,

$$V(x, t) \leq \min_{\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ \int_t^{t+k} h(X(s), \alpha(s)) ds + V(X(t+k), t+k) \right\} + \epsilon, \quad (4.15)$$

sendo  $X(\cdot) = X^\alpha(\cdot)$  solução de (4.6).

2. Fixemos novamente  $\epsilon > 0$  e selecionemos agora  $\alpha_4(\cdot) \in \mathcal{A}$ , tal que

$$\begin{aligned} V(x, t) + \epsilon &\geq \int_t^T h(X^{\alpha_4}(s), \alpha_4(s)) ds + g(X^{\alpha_4}(T)) \\ &= \int_t^{t+k} h(X^{\alpha_4}(s), \alpha_4(s)) ds + \int_{t+k}^T h(X^{\alpha_4}(s), \alpha_4(s)) ds + g(X^{\alpha_4}(T)), \end{aligned} \quad (4.16)$$

com

$$\begin{cases} \dot{X}^{\alpha_4}(s) = f(X^{\alpha_4}(s), \alpha_4(s)), & t < s < T \\ X^{\alpha_4}(t) = x. \end{cases}$$

Por (4.10) e (4.8), obtemos a relação,

$$V(X^{\alpha_4}(t+k), t+k) \leq \int_{t+k}^T h(X^{\alpha_4}(s), \alpha_4(s)) ds + g(X^{\alpha_4}(T)) \quad (4.17)$$

que, juntamente com (4.16), permite-nos concluir que

$$V(x, t) + \epsilon \geq \int_t^{t+k} h(X^{\alpha_4}(s), \alpha_4(s)) ds + V(X^{\alpha_4}(t+k), t+k),$$

o que, por sua vez, implica que

$$V(x, t) \geq \min_{\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ \int_t^{t+k} h(X(s), \alpha(s)) ds + V(X(t+k), t+k) \right\} - \epsilon, \quad (4.18)$$

onde  $X(\cdot) = X^\alpha(\cdot)$  resolve (4.6).

Façamos agora  $\epsilon \rightarrow 0$  em (4.15) e em (4.18). Então, juntas, as relações obtidas permitem-nos concluir que,

$$V(x, t) = \min_{\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ \int_t^{t+k} h(X(s), \alpha(s)) ds + V(X(t+k), t+k) \right\}.$$

□

## 4.2.2 Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman e solução de viscosidade

A equação de Hamilton-Jacobi-Bellman é uma equação de Hamilton-Jacobi

$$u_t + H(x, Du) = 0, \quad (4.19)$$

sendo o hamiltoniano, a função definida por

$$H(x, Du) = \min_{a \in A} \{f(x, a) \cdot Du + h(x, a)\}, \quad (4.20)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  é um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^m$  e as funções,  $f(x, a)$  e  $h(x, a)$ , são conhecidas.

Como referimos no início desta secção, a função valor (4.10) resolve uma equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, daí que esta se torne a nossa ferramenta padrão para a resolução do problema de controlo ótimo (4.9), através do método da programação dinâmica. Contudo, a função valor não representa uma solução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman no sentido clássico, mas sim num outro sentido, no de *solução de viscosidade* [6]. Apresentamos a definição de solução de viscosidade contextualizada no problema de valor terminal para a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, e um resultado que estabelece as condições para a unicidade da solução. Encontra-se em [6] um tratamento rigoroso das soluções de viscosidade das equações de Hamilton-Jacobi assim como, a demonstração do Teorema 14.

Consideremos o problema de valor terminal,

$$\begin{cases} u_t + \min_{a \in A} \{f(x, a) \cdot Du + h(x, a)\} = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u(x, T) = g(x), & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = T\}, \end{cases} \quad (4.21)$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $h : \mathbb{R}^n \times A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são funções conhecidas.

**Definição 6.** *Uma função  $u : \mathbb{R}^n \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ , limitada e uniformemente contínua, é uma solução de viscosidade do problema de valor terminal (4.21) desde que:*

1.  $u(x, T) = g(x)$  em  $\mathbb{R}^n \times \{t = T\}$

e

2. Para cada função  $v \in C^\infty$  em  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ ,

Se  $u - v$  tem um máximo local no ponto  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$ , então

$$v_t(x_0, t_0) + \min_{a \in A} \{f(x_0, a) \cdot Dv(x_0, t_0) + h(x_0, a)\} \geq 0; \quad (4.22)$$

Se  $u - v$  tem um mínimo local no ponto  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$ , então

$$v_t(x_0, t_0) + \min_{a \in A} \{f(x_0, a) \cdot Dv(x_0, t_0) + h(x_0, a)\} \leq 0. \quad (4.23)$$

**Teorema 7** (Unicidade da solução de viscosidade). *Se o hamiltoniano (4.20) verificar as seguintes condições de Lipschitz:*

$$|H(p, x) - H(q, x)| \leq L |p - q| \quad e \quad |H(p, x) - H(q, y)| \leq L |x - y| (1 + |p|),$$

para  $x, y, p, q \in \mathbb{R}^n$  e alguma constante  $L \geq 0$ , então existe, no máximo, uma solução de viscosidade de (4.21).

### 4.2.3 Função valor e equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

O objetivo agora é mostrar que a função valor (4.10) resolve, no sentido de viscosidade, uma equação de Hamilton-Jacobi-Bellman. Antes porém, de acordo com a Definição 6, temos de mostrar que a função valor (4.10) é uma função limitada e uniformemente contínua. Para isso, devemos preliminarmente considerar o seguinte resultado:

**Lema 3** (Desigualdade de Gronwall). *Seja  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , uma função não negativa e absolutamente contínua em  $[0, T]$  que satisfaz a inequação diferencial*

$$\dot{\eta}(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t), \tag{4.24}$$

onde  $\phi$  e  $\psi$  são funções reais não negativas e somáveis em  $[0, T]$ . Então

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} [\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds], \tag{4.25}$$

para todo  $0 \leq t \leq T$ .

*Demonstração.* Considere-se a função

$$\varphi(s) = \eta(s) e^{-\int_0^s \phi(r) dr}.$$

Por (4.24), vê-se que

$$\dot{\varphi}(s) = \frac{d}{ds} \left( \eta(s) e^{-\int_0^s \phi(r) dr} \right) = e^{-\int_0^s \phi(r) dr} (\dot{\eta}(s) - \phi(s)\eta(s)) \leq e^{-\int_0^s \phi(r) dr} \psi(s),$$

para  $s \in [0, T]$ .

Consequentemente, para cada  $0 \leq t \leq T$ , tem-se

$$\begin{aligned} \eta(t) e^{-\int_0^t \phi(r) dr} &\leq \eta(0) + \int_0^t e^{-\int_0^s \phi(r) dr} \psi(s) ds \\ &\leq \eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds, \end{aligned}$$

o que implica,

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} [\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds].$$

□

**Lema 4.** A função valor  $V(x, t)$  é limitada em  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$  e de Lipschitz em relação a  $x \in \mathbb{R}^n$  e a  $t \in [0, T]$ . Mais precisamente, para todo  $(x, t), (\hat{x}, \hat{t}) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$ , existe uma constante  $L$  tal que:

$$|V(x, t)| \leq L$$

e

$$|V(x, t) - V(\hat{x}, \hat{t})| \leq L (|x - \hat{x}| + |t - \hat{t}|).$$

*Demonstração.* Por hipótese, as funções  $h : \mathbb{R}^n \times A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são limitadas. Isto implica que,

$$V(x, t) = \min_{\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}} \int_t^T h(X(s), \alpha(s)) ds + g(X(T)),$$

seja limitada em  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ .

Mostremos agora, que  $V$  é uma função de Lipschitz em  $x$ .

Fixemos  $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ , e  $0 \leq t < T$ . Consideremos um número real  $\epsilon > 0$  e escolhamos  $\hat{\alpha}(\cdot) \in \mathcal{A}$  de modo que,

$$V(\hat{x}, t) + \epsilon \geq \int_t^T h(\hat{X}(s), \hat{\alpha}(s)) ds + g(\hat{X}(T)),$$

onde  $\hat{X}(\cdot)$  resolve a EDO

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}(s) = f(\hat{X}(s), \hat{\alpha}(s)), & t < s < T \\ \hat{X}(t) = \hat{x}. \end{cases} \quad (4.26)$$

Por definição,

$$V(x, t) = \min_{\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}} \int_t^T h(X(s), \alpha(s)) ds + g(X(T)),$$

em que  $X(\cdot)$  resolve

$$\begin{cases} \dot{X}(s) = f(X(s), \hat{\alpha}(s)), & t < s < T \\ X(t) = x. \end{cases} \quad (4.27)$$

Então,

$$V(x, t) - V(\hat{x}, t) \leq \int_t^T h(X(s), \hat{\alpha}(s)) ds + g(X(T)) - \int_t^T h(\hat{X}(s), \hat{\alpha}(s)) ds - g(\hat{X}(T)) + \epsilon. \quad (4.28)$$

Como, por hipótese,  $f$  é uma função de Lipschitz, então existe alguma constante real  $C_1$ , tal que

$$|f(X(s), \hat{\alpha}(s)) - f(\hat{X}(s), \hat{\alpha}(s))| \leq C_1 |X(s) - \hat{X}(s)|.$$

Além disso, por (4.26) e (4.27), temos respectivamente,

$$f(\hat{X}(s), \hat{\alpha}(s)) = \dot{\hat{X}}(s)$$

e

$$f(X(s), \hat{\alpha}(s)) = \dot{X}(s).$$

Por conseguinte,

$$|f(X(s), \hat{\alpha}(s)) - f(\hat{X}(s), \hat{\alpha}(s))| = |\dot{X}(s) - \dot{\hat{X}}(s)| \leq C_1 |X(s) - \hat{X}(s)|. \quad (4.29)$$

Consideremos, a função  $\eta(s) = |X(s) - \hat{X}(s)|$ . Claramente que  $\eta(s)$  é uma função não negativa. Como  $\hat{X}(s)$  e  $X(s)$  são soluções de (4.26) e (4.27), respectivamente, então são funções de Lipschitz e, portanto, uniformemente contínuas. Pelo que,  $\eta(s)$  é também uniformemente contínua. Assim, podemos aplicar o Lema 3 à condição (4.29), o que implica

$$|X(s) - \hat{X}(s)| \leq C_2 |x - \hat{x}|, \quad t \leq s \leq T, \quad (4.30)$$

para alguma constante real  $C_2$ .

De (4.28), por  $h$  e  $g$  serem funções de Lipschitz e por (4.30), segue-se que

$$\begin{aligned} V(x, t) - V(\hat{x}, t) &\leq \int_t^T \left| h(X(s), \hat{\alpha}(s)) - h(\hat{X}(s), \hat{\alpha}(s)) \right| ds + \left| g(X(T)) - g(\hat{X}(T)) \right| + \epsilon \\ &\leq \int_t^T C_3 \left| X(s) - \hat{X}(s) \right| ds + C_4 \left| X(T) - \hat{X}(T) \right| + \epsilon \\ &\leq \int_t^T C_3 C_2 |x - \hat{x}| ds + C_4 C_2 |x - \hat{x}| + \epsilon \\ &\leq L |x - \hat{x}| + \epsilon, \end{aligned}$$

com  $C_3, C_4$  e  $L$  constantes reais.

Fazendo agora  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtemos a desigualdade

$$V(x, t) - V(\hat{x}, t) \leq L |x - \hat{x}|. \quad (4.31)$$

Por outro lado, invertendo os papéis de  $x$  e  $\hat{x}$ , o mesmo argumento leva-nos à desigualdade

$$V(x, t) - V(\hat{x}, t) \geq -L|x - \hat{x}|. \quad (4.32)$$

As desigualdades (4.31) e (4.32), significam que

$$|V(x, t) - V(\hat{x}, t)| \leq L|x - \hat{x}|, \quad x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Por fim, mostremos que  $V$  também é uma função de Lipschitz em  $t$ .

Consideremos  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq t < \hat{t} \leq T$ .

Tomemos  $\epsilon > 0$  e escolhamos  $\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}$  tal que

$$V(x, t) + \epsilon \geq \int_t^T h(X(s), \alpha(s)) ds + g(X(T)), \quad (4.33)$$

em que  $X(\cdot)$  resolve a EDO (4.6).

Definamos, para  $\hat{t} \leq s \leq T$ ,

$$\hat{\alpha}(s) = \alpha(s + t - \hat{t})$$

e, consideremos  $\hat{X}(\cdot)$  que resolve

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}(s) = f(\hat{X}(s), \hat{\alpha}(s)), & \hat{t} < s < T \\ \hat{X}(\hat{t}) = x. \end{cases}$$

Então,  $\hat{X}(s) = X(s + t - \hat{t})$  e, atendendo a que  $h$  e  $g$  são funções limitadas, temos

$$\begin{aligned} V(x, \hat{t}) - V(x, t) &\leq \int_{\hat{t}}^T h(\hat{X}(s), \hat{\alpha}(s)) ds + g(\hat{X}(T)) \\ &\quad - \int_t^T h(X(s), \alpha(s)) ds - g(X(T)) + \epsilon \\ &= - \int_{T+t-\hat{t}}^T h(X(s), \alpha(s)) ds + g(X(T + t - \hat{t})) - g(X(T)) + \epsilon \\ &\leq L|t - \hat{t}| + \epsilon, \end{aligned} \quad (4.34)$$

para alguma constante  $L$ .

De seguida, seleccionemos  $\hat{\alpha}$ , tal que

$$V(x, \hat{t}) + \epsilon \geq \int_{\hat{t}}^T h(\hat{X}(s), \hat{\alpha}(s)) ds + g(\hat{X}(T)),$$

onde

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}(s) = f(\hat{X}(s), \hat{\alpha}(s)), & \hat{t} < s < T. \\ \hat{X}(\hat{t}) = x. \end{cases}$$

Definamos ainda,

$$\alpha(s) = \begin{cases} \hat{\alpha}(s + \hat{t} - t), & t \leq s \leq T + t - \hat{t} \\ \hat{\alpha}(T), & T + t - \hat{t} \leq s \leq T, \end{cases}$$

e seja  $X(\cdot)$  solução de (4.6). Então,

$$\alpha(s) = \hat{\alpha}(s + \hat{t} - t)$$

e

$$X(s) = \hat{X}(s + \hat{t} - t).$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} V(x, t) - V(x, \hat{t}) &\leq \int_{T+t-\hat{t}}^T h(\hat{X}(s), \alpha(s)) ds + g(X(T)) \\ &\quad - \int_{\hat{t}}^T h(\hat{X}(s), \alpha(s)) ds - g(\hat{X}(T)) + \epsilon \\ &= \int_{T+t-\hat{t}}^T h(X(s), \alpha(s)) ds + g(X(T)) - g(X(T + t - \hat{t})) + \epsilon \\ &\leq L|t - \hat{t}| + \epsilon, \end{aligned} \tag{4.35}$$

para alguma constante  $L$ .

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , esta desigualdade juntamente com (4.34) provam que

$$|V(x, t) - V(x, \hat{t})| \leq L|t - \hat{t}|, \quad 0 \leq t \leq \hat{t} \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

□

Finalmente, apresentamos o resultado que estabelece a função valor como única solução de viscosidade da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman.

**Teorema 8.** *A função valor  $V$ , é a única solução de viscosidade do problema de valor terminal para a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman:*

$$V_t + \min_{a \in A} \{f(x, a) \cdot DV + h(x, a)\} = 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, T), \tag{4.36}$$

com a condição terminal,

$$V(x, T) = g(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = T\}.$$

*Demonstração.* A prova consiste em mostrar que a função  $V$  obedece às condições da Definição 6.

1. Pelo Lema 4,  $V$  é limitada e de Lipschitz, portanto uniformemente contínua. Por (4.8) e (4.10), vemos que

$$V(x, T) = \min_{\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}} J_{x,T}[\alpha(\cdot)] = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

2. Tomemos uma função  $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, T))$  e, assumindo que  $V - v$  tem um máximo local no ponto  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$ , devemos provar que

$$v_t(x_0, t_0) + \min_{a \in A} \{f(x_0, a) \cdot Dv(x_0, t_0) + h(x_0, a)\} \geq 0. \quad (4.37)$$

Vamos fazê-lo por redução ao absurdo. Suponhamos que não se verifica (4.37). Então, existem  $a \in A$  e  $\theta > 0$ , de modo que

$$v_t(x, t) + f(x, a) \cdot Dv(x, t) + h(x, a) \leq -\theta < 0, \quad (4.38)$$

para todos os pontos  $(x, t)$  suficientemente próximos de  $(x_0, t_0)$ , por exemplo, tais que para um certo  $\delta > 0$ , se verifica

$$|x - x_0| + |t - t_0| < \delta. \quad (4.39)$$

Como, por hipótese,  $V - v$  tem um máximo local em  $(x_0, t_0)$ , podemos também supor que

$$(V - v)(x, t) \leq (V - v)(x_0, t_0), \quad (4.40)$$

para todo o ponto  $(x, t)$  que satisfaz (4.39).

Consideremos agora, a função de controlo constante  $\alpha(s) = a$ ,  $t_0 \leq s \leq T$ , em que  $a$  é o valor de  $A$  que satisfaz (4.38), e a correspondente dinâmica

$$\begin{cases} \dot{X}(s) = f(X(s), a), & t_0 < s < T \\ X(t_0) = x. \end{cases}$$

Escolhamos  $0 < k < \delta$ , tão pequeno que  $|X(s) - x_0| < \delta$  para  $t_0 \leq s \leq t_0 + k$ . Então, atendendo a (4.38) e a (4.39),

$$v_t(X(s), s) + f(X(s), a) \cdot Dv(X(s), s) + h(X(s), a) \leq -\theta, \quad t_0 \leq s \leq t_0 + k. \quad (4.41)$$

No entanto, através de (4.40), encontramos

$$\begin{aligned} V(X(t_0 + k), t_0 + k) - V(x_0, t_0) &\leq v(X(t_0 + k), t_0 + k) - v(x_0, t_0) \\ &= \int_{t_0}^{t_0+k} \frac{d}{ds} v(X(s), s) ds \\ &= \int_{t_0}^{t_0+k} \left( v_t(X(s), s) + Dv(X(s), s) \cdot \dot{X}(s) \right) ds \\ &= \int_{t_0}^{t_0+k} \left( v_t(X(s), s) + f(X(s), a) \cdot Dv(X(s), s) \right) ds. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Por outro lado, a condição (4.11) fornece-nos a desigualdade

$$V(x_0, t_0) \leq \int_{t_0}^{t_0+k} h(X(s), a) ds + V(X(t_0 + k), t_0 + k). \quad (4.43)$$

Combinando (4.42) e (4.43), obtemos a condição

$$0 \leq \int_{t_0}^{t_0+k} \left( v_t(X(s), s) + f(X(s), a) \cdot Dv(X(s), s) + h(X(s), a) \right) ds. \quad (4.44)$$

Mas, de acordo com (4.41)

$$\int_{t_0}^{t_0+k} \left( v_t(X(s), s) + f(X(s), a) \cdot Dv(X(s), s) + h(X(s), a) \right) ds \leq -\theta k \leq 0, \quad (4.45)$$

o que contradiz (4.44). O absurdo foi termos suposto que não se verificava (4.37), o que estabelece (4.37).

3. Agora, vamos supor que  $V - v$  tem um mínimo local no ponto  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times ]0, T[$ .

Neste caso, devemos provar que

$$v_t(x_0, t_0) + \min_{a \in A} f(x_0, a) \cdot Dv(x_0, t_0) + h(x_0, a) \leq 0. \quad (4.46)$$

Mais uma vez, vamos fazê-lo por redução ao absurdo.

Suponhamos que não se verifica (4.46). Seja  $\theta > 0$  e  $\delta > 0$  tais que,

$$v_t(x, t) + f(x, a) \cdot Dv(x, t) + h(x, a) \geq \theta > 0, \quad (4.47)$$

para todo o valor  $a \in A$  e para todos os pontos  $(x, t)$  que obedecem à condição

$$|x - x_0| + |t - t_0| < \delta. \quad (4.48)$$

Como, por hipótese,  $V - v$  tem um mínimo local em  $(x_0, t_0)$ , podemos também supor

$$(V - v)(x, t) \geq (V - v)(x_0, t_0), \quad (4.49)$$

para todo o ponto  $(x, t)$  que satisfaz (4.48).

Porque  $f$  é uma função limitada e de Lipschitz, podemos escolher  $0 < k < \delta$  tão pequeno que

$$|X(s) - x_0| < \delta, \text{ para } t_0 \leq s \leq t_0 + k,$$

onde  $X(\cdot)$  resolve

$$\begin{cases} \dot{X}(s) = f(X(s), \alpha(s)), & t_0 < s < T \\ X(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (4.50)$$

para algum  $\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}$ .

Então, usando (4.49), para qualquer função de controle  $\alpha(\cdot)$  tem-se que,

$$\begin{aligned} V(X(t_0 + k), t_0 + k) - V(x_0, t_0) &\geq v(X(t_0 + k), t_0 + k) - v(x_0, t_0) \\ &= \int_{t_0}^{t_0+k} \frac{d}{ds} v(X(s), s) ds \\ &= \int_{t_0}^{t_0+k} \left( v_t(X(s), s) + Dv(X(s), s) \cdot \dot{X}(s) \right) ds, \end{aligned}$$

de onde, por (4.50), se obtém

$$V(X(t_0 + k), t_0 + k) - V(x_0, t_0) \geq \int_{t_0}^{t_0+k} (v_t(X(s), s) + f(X(s), \alpha(s)) \cdot Dv(X(s), s)) ds. \quad (4.51)$$

Por outro lado, atendendo agora à condição (4.11), podemos selecionar uma função de controle  $\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}$ , tal que

$$V(x_0, t_0) \geq \int_{t_0}^{t_0+k} h(X(s), \alpha(s)) ds + V(X(t_0 + k), t_0 + k) - \frac{\theta k}{2}. \quad (4.52)$$

Combinadas, as condições (4.51) e (4.52), levam-nos à conclusão de que, em particular, haverá um valor  $a \in A$ , tal que

$$\int_{t_0}^{t_0+k} (v_t(X(s), s) + f(X(s), a) \cdot Dv(X(s), s) + h(X(s), a)) ds \leq \frac{\theta k}{2}.$$

Tal conclusão, contradiz a condição (4.47) em que,

$$\int_{t_0}^{t_0+k} (v_t(X(s), s) + f(X(s), a) \cdot Dv(X(s), s) + h(X(s), a)) ds \geq \theta k.$$

O absurdo resultou de admitirmos que não se verificava (4.46), o que estabelece (4.46).

A unicidade da solução está garantida pelo Teorema 7.

□

#### 4.2.4 Determinação do controlo ótimo

Começemos por observar que enquanto na equação (4.36) se procura, em  $A$ , o valor mínimo entre todos os que podem ser assumidos por  $\alpha(\cdot)$ , o problema (4.9) pede a função de controlo  $\alpha(\cdot)$  que minimiza o custo entre todas as funções de controlo admissíveis em  $\mathcal{A}$ . Vejamos, então, como podemos usar o facto da função valor (4.10) ser a única solução de viscosidade da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (4.36) na determinação do controlo ótimo,  $\alpha^*(\cdot)$ , que resolve o problema (4.9).

O procedimento resume-se no seguinte: dado um tempo inicial  $0 \leq t \leq T$  e um estado inicial  $x \in \mathbb{R}^n$ , consideremos a equação diferencial ordinária ótima

$$\begin{cases} \dot{X}^*(s) = f(X^*(s), \alpha^*(s)), & t < s < T \\ X^*(t) = x, \end{cases} \quad (4.53)$$

onde, para cada tempo  $s$ , é seleccionado  $\alpha^*(s) \in A$ , de modo a que

$$f(X^*(s), \alpha^*(s)) \cdot DV(X^*(s), s) + h(X^*(s), \alpha^*(s)) = H(DV(X^*(s), s), X^*(s)),$$

ou seja, para cada tempo  $s$ , tendo em conta que o sistema está no estado  $X^*(s)$ , nesse instante, ajusta-se o valor  $\alpha^*(s) = a \in A$ , do controlo ótimo, de modo a atingir o mínimo do hamiltoniano da equação (4.36). De um modo geral obtemos, desta forma, uma condição

para os valores ótimos de  $\alpha^*(s)$  dependente da função valor  $V$ . Substituímos então essa condição na equação (4.36), que passa a não depender explicitamente dos valores de  $\alpha^*(s)$  e determinamos, resolvendo a equação, a função valor (4.10). Por fim, conhecida a função valor, determinamos, através dela, a função de controlo ótimo  $\alpha^*(s)$ , ou seja, a solução do problema (4.9). Desta forma, obtemos, de facto, um controlo ótimo na forma de feedback, que fornece uma trajetória ideal do sistema. Contudo, nos pontos onde a função valor não é suave, surgem dificuldades sérias de interpretação [6]. Resultados para uma função valor descontínua podem ser vistos em [7].

### 4.2.5 Exemplo

Apliquemos o método da programação dinâmica na resolução do seguinte problema:

*Determinar a função de controlo  $\alpha^*(\cdot) \in \mathcal{A}$ , que resolve*

$$V(x, t) = \min_{\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}} \left[ \int_t^T (\alpha(s))^2 ds + (X(T))^2 \right], \quad \text{onde } 0 < t < T,$$

*sujeito a*

$$\begin{cases} \dot{X}(s) = X(s) + \alpha(s) \\ X(t) = x \\ X(T) = x_T, \end{cases}$$

*com  $x \in \mathbb{R}$  e  $x_T$  constante.*

A função de controlo  $\alpha(\cdot)$  pertence ao conjunto de controlos admissíveis,

$$\mathcal{A} = \{ \alpha : [0, T] \rightarrow A \mid \alpha(\cdot) \text{ é mensurável} \}.$$

A dinâmica do sistema que se pretende controlar é dada pela função,

$$f(X, \alpha) = X(s) + \alpha(s).$$

O custo corrente por unidade de tempo é dado pela função,

$$h(X, \alpha) = \alpha(s)^2.$$

O Teorema 8 estabelece a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman,

$$V_t(x, t) + \min_{a \in A} \{ (X(s) + a) \cdot V_x(x, t) + a^2 \} = 0, \quad \text{em } \mathbb{R} \times (0, T), \quad (4.54)$$

com a condição terminal,

$$V(x, T) = x_T^2, \quad \text{em } \mathbb{R} \times \{t = T\}.$$

Observemos diretamente da equação (4.54) que a função a ser minimizada é quadrática convexa em relação a  $a$ . Sendo assim, uma condição necessária e suficiente para obter o valor  $a \in A$  que minimiza esta função, é que a derivada da mesma em relação a  $a$  seja nula. Portanto,

$$2a + V_x(x, t) = 0, \quad (4.55)$$

ou seja,

$$a = -\frac{1}{2}V_x(x, t). \quad (4.56)$$

Substituindo  $a$  pelo segundo membro de (4.56) na equação (4.54), obtemos uma equação diferencial parcial que é resolvida pela função valor  $V(x, t)$ ,

$$\begin{aligned} -V_t &= \left(-\frac{1}{2}V_x(x, t)\right)^2 + V_x(x, t) \left[x - \frac{1}{2}V_x(x, t)\right] \\ &= xV_x(x, t) - \frac{1}{4}(V_x(x, t))^2. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Para resolvermos esta equação, vamos propor  $V(x, t)$  na forma:

$$V(x, t) = A(t)x^2, \quad (4.58)$$

onde  $A(\cdot)$  é a função de  $t$  que nos falta determinar de modo a satisfazer a equação (4.57).

**Observação 8.** A forma (4.58) para  $V(x, t)$  partiu da intuição de que uma solução da equação (4.54) terá a forma de um polinómio em  $x$ , uma vez que as funções envolvidas no problema de controlo ótimo em consideração, são funções quadráticas ou lineares em relação à variável de estado. Como para um polinómio em  $x$  de ordem  $k$ , o primeiro membro da equação (4.57) será um polinómio de, no máximo, ordem  $k$ , enquanto que o segundo membro da referida equação é um polinómio de ordem  $2(k-1)$ , devido ao termo  $(V_x)^2$ , para garantirmos que o primeiro e o segundo membro tenham a mesma ordem, temos de considerar  $k = 2$ . Pelo que, a forma quadrática em  $x$  para a função  $V(x, t)$  será suficiente. Em contrapartida, deixamos a suposição sobre a forma da função com respeito a  $t$ , em termos gerais.

A aplicação do método das características para a resolução da equação conduz a uma solução de difícil integração, daí que não optemos aqui por esse método.

A função que propomos em (4.58) tem obviamente de ser uma solução da equação (4.54). Então calculemos

$$\begin{aligned}V_x(x, t) &= 2A(t)x, \\V_t(x, t) &= \dot{A}(t)x^2\end{aligned}\tag{4.59}$$

e substituamos estas derivadas adequadamente na equação (4.54). Temos assim,

$$\begin{aligned}-\dot{A}(t)x^2 &= 2A(t)x^2 - \frac{1}{4}(2A(t))^2x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\dot{A}(t) + 2A(t) - A(t)^2)x^2 &= 0.\end{aligned}\tag{4.60}$$

Como (4.60) tem de se verificar para todos os valores admissíveis de  $x$ , impõe-se a resolução da equação diferencial ordinária

$$\dot{A}(t) + 2A(t) - A(t)^2 = 0 \Leftrightarrow \dot{A}(t) + 2A(t) = A(t)^2.\tag{4.61}$$

Trata-se de uma equação de Bernoulli, cujo procedimento de resolução, bem conhecido da teoria das equações diferenciais ordinárias, é o seguinte: Define-se uma nova variável na forma  $y = A^{-1}$ . Tal, implica que  $\dot{y} = A^{-2}\dot{A}$ . Multiplica-se agora, a equação (4.61) por  $-A^{-2}$ , obtendo-se  $-A^{-2}\dot{A} - 2A^{-1} = -1$  que, considerando a variável  $y$ , passa a escrever-se

$$\dot{y} + 2y = 1.\tag{4.62}$$

Obtem-se assim, uma equação diferencial ordinária linear de 1ª ordem e de coeficientes constantes. Multipliquemos então, ambos os membros da equação pelo fator integrante,  $e^{\int 2dt} = e^{2t}$ , obtendo a equação  $\frac{d}{dt}(y(t)e^{2t}) = e^{2t}$ , cuja integração nos dá a solução geral de (4.62), ou seja,

$$y(t) = \frac{1}{2} + Ce^{2t},\tag{4.63}$$

onde  $C$  é uma constante de integração que podemos determinar recorrendo à condição fronteira para a equação (4.54),

$$V(X_T, T) = (x_t)^2.$$

Como se assumiu (4.58), a condição terminal toma a forma simples  $A(T) = 1$  que, atendendo à definição de  $y$ , se traduz na condição terminal  $y(T) = 1$  para a equação (4.63). Tal, implica  $C = \frac{1}{2}e^{-2T}$  e portanto,

$$y(t) = \frac{1}{2}[1 + e^{-2(t-T)}].$$

Como fizemos  $y = A^{-1}$ , temos

$$A(t) = \frac{2}{1 + e^{-2(t-T)}}, \quad (4.64)$$

que é a solução de (4.61) que procurávamos. Chegámos assim, à função valor (4.58) de forma explícita

$$V(x, t) = \frac{2x^2}{1 + e^{2(t-T)}}. \quad (4.65)$$

Facilmente se verifica que a condição terminal é satisfeita e também, que a função dada por (4.65) satisfaz a equação (4.57). Por fim, substituindo na relação (4.56) a função dada por (4.65), obtemos a função de controlo ótimo

$$\alpha^*(s) = \frac{-2x}{1 + e^{2(s-T)}},$$

para  $t \leq s \leq T$ , que é a solução do nosso problema.

Exemplificámos com um problema muito simples os vários passos do método da programação dinâmica. Neste problema tudo “correu bem”, ou seja, caracterizámos o controlo que minimiza o hamiltoniano em termos da função valor, determinámos explicitamente a função valor e com ela, a função de controlo ótimo. Ambas as funções são contínuas com derivadas contínuas. Este problema pode também ser visto em [3].

### 4.3 Controlo ótimo de um tratamento de quimioterapia

Vários modelos matemáticos têm sido criados e investigados com o objetivo de encontrar as melhores estratégias no tratamento do cancro. As principais preocupações destes estudos são encontrar estratégias ótimas de tratamento, tendo em conta a redução do tumor e os efeitos secundários causados pelas drogas administradas durante o tratamento. Em

[16], Panetta e Fister apresentam um estudo comparativo de três modelos de tratamento mediante dois funcionais objetivo diferentes, através da teoria de controlo ótimo aplicada a sistemas de equações diferenciais ordinárias. Considerámos um desses modelos de tratamento e um dos funcionais objetivo desse estudo. Propomo-nos, agora, determinar a estratégia ótima de tratamento através da teoria de controlo ótimo, mas por aplicação do método da programação dinâmica, que não foi usado em [16].

*1. Modelo da densidade do tumor sob o efeito do fármaco quimioterapêutico.*

A densidade de um tumor sob o efeito de um fármaco quimioterapêutico é dado, na sua forma geral, por [16]:

$$\dot{N}(t) = rN(t)F(N(t)) - G(N(t), t), \quad (\dot{N}(t) \equiv \frac{dN}{dt}),$$

onde:

- $N(t)$  representa a densidade do tumor no instante  $t$ ;
- $r$  é a taxa de crescimento do tumor;
- $F(N(t))$  representa uma função generalizada de crescimento;
- $G(N(t), t)$  descreve os efeitos farmacocinéticos (efeitos do medicamento no organismo desde a sua administração até à sua eliminação) e farmacodinâmicos (efeitos fisiológicos) causados pelo fármaco no sistema.

O modelo particular que pretendemos estudar, assume o conceito de Norton e Simon [14, 15], que assenta na hipótese de que a morte das células tumorais, pela administração do fármaco quimioterapêutico, é proporcional à taxa de crescimento do tumor. O modelo de crescimento do tumor é o do crescimento Gomperteziano dado por,

$$F(N(t)) = \ln \left( \frac{1}{N(t)} \right).$$

Os efeitos farmacodinâmicos e farmacocinéticos do fármaco no sistema, são descritos com base no mecanismo log-kill de Skipper [18], ou seja por

$$G(N(t), t) = \delta\alpha(t)N(t),$$

onde  $\delta$  é a magnitude da dose de controlo  $\alpha(t)$ . Assim, se  $\alpha(t) = 0$ , significa ausência dos efeitos do fármaco, se  $\alpha(t) \geq 0$ ,  $\delta$  mede a quantidade ou a intensidade dos referidos efeitos do fármaco.

O modelo matemático do tratamento que vamos estudar é então o seguinte:

$$\dot{N}(t) = rN(t) \ln \left( \frac{1}{N} \right) - \delta\alpha(t)N(t), \quad (4.66)$$

com a condição inicial,

$$N(0) = N_0, \quad 0 < N_0 < 1. \quad (4.67)$$

## 2. Funcional objetivo.

Pretendemos controlar, eficazmente, a toxicidade do fármaco durante o tratamento e a dimensão do tumor no final do tratamento. Mais concretamente, pretendemos encontrar a estratégia de tratamento que confere a menor dimensão do tumor, no final do tratamento, com a menor toxicidade para o organismo possível. Matematicamente, este critério traduz-se através do controlo  $\alpha$  que minimiza o funcional

$$J(\alpha) = bN(T) + \int_0^T c\alpha(t)dt, \quad (4.68)$$

onde,  $b$  e  $c$  são constantes. O primeiro termo refere-se à carga tumoral no final do tratamento, e o segundo termo à toxicidade em termos de área sob a curva de concentração do fármaco. O controlo  $\alpha(\cdot)$  pertence à classe de controlos admissíveis,

$$\mathcal{A} = \{ \alpha \text{ mensurável} \mid 0 \leq \alpha(t) \leq M, t \in [0, T] \}.$$

## 3. Tratamento do problema pelo método da programação dinâmica.

Para simplificar, tomemos  $X(t) = \ln(N(t))$ , o que leva à relação  $N(t) = e^{X(t)}$ . O problema coloca-se então da seguinte forma:

*Determinar o controlo  $\alpha^*(\cdot) \in \mathcal{A}$ , que minimiza o funcional*

$$J(\alpha) = be^{X(T)} + \int_0^T c\alpha(t)dt$$

sujeito ao sistema

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = -rX(t) - \delta\alpha(t) \\ X(t) = x \\ X(T) = x_T \\ X(0) = \ln N_0, \quad 0 < N_0 < 1. \end{cases} \quad (4.69)$$

Para abreviarmos o nosso estudo, não apresentamos aqui a prova da existência de uma solução do sistema (4.69) para o controlo ótimo,  $\alpha^*(\cdot) \in \mathcal{A}$ , bem como da existência desse controlo ótimo para o problema. Essa análise encontra-se detalhada em [16].

Começemos por definir a função valor,

$$V(x, t) = \min_{\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ be^{xT} + \int_0^T c\alpha(t) dt \right\}.$$

O Teorema 8 estabelece a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman,

$$V_t(x, t) + \min_{a \in [0, M]} \{(-rx - a\delta)V_x(x, t) + ca\} = 0, \quad \text{em } \mathbb{R} \times (0, T) \quad (4.70)$$

com a condição terminal,

$$V(x, T) = be^{x(T)}, \quad \text{em } \mathbb{R} \times \{t = T\}.$$

Derivando o hamiltoniano da equação (4.70) em ordem a  $a$ , obtemos a expressão

$$\frac{dH}{da} = -\delta V_x + c,$$

através da qual podemos fazer a seguinte análise:

- se  $V_x < \frac{c}{\delta}$ , o hamiltoniano é crescente e tem um mínimo para  $a = 0$ ;
- se  $V_x > \frac{c}{\delta}$ , o hamiltoniano é decrescente e tem um mínimo para  $a = M$ .

Se  $V_x = \frac{c}{\delta}$ , passaríamos a ter a equação,

$$V_t(x, t) - rx\frac{c}{\delta} = 0, \quad \text{em } \mathbb{R} \times (0, T),$$

onde o hamiltoniano não é função de  $a$  e, portanto, não conseguiríamos caracterizar um controlo  $\alpha^*(\cdot)$  único. Além disso, se existisse um controlo  $\alpha^*(\cdot)$  único,  $V_x$  teria de ser

constante em algum intervalo de tempo, o que não poderia acontecer, uma vez que  $V_x$  será constante somente num instante  $t$ . Assim, consideramos

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } V_x < \frac{c}{\delta} \\ M, & \text{se } V_x > \frac{c}{\delta}. \end{cases}$$

O nosso interesse passa a ser determinar explicitamente  $V_x$ . Como, em qualquer um dos dois casos o controlo ótimo é constante, vamos considerar na equação (4.70),  $a = E$ , com  $E \in \{0, M\}$ . Passamos agora a investigar a solução da equação,

$$V_t(x, t) + (-rx - E\delta) V_x(x, t) + cE = 0, \quad \text{em } \mathbb{R} \times ]0, T[. \quad (4.71)$$

Trata-se de uma equação linear não homogénea que, como facilmente se verifica, admite a solução particular,

$$V_1(x, t) = -cEt + m, \quad \text{com } m \text{ constante.} \quad (4.72)$$

Se determinarmos a solução da equação linear homogénea correspondente à equação (4.71), a soma dessa solução com a solução particular (4.72) será solução de (4.71). Procuremos, então, resolver a equação linear homogénea,

$$V_t(x, t) + (-rx - E\delta)V_x(x, t) = 0, \quad \text{em } \mathbb{R} \times (0, T). \quad (4.73)$$

Vamos supor, sugerido pela própria equação, que a solução é da forma

$$V(x, t) = \varphi(x)\psi(t). \quad (4.74)$$

Sendo assim,

$$V_x(x, t) = \frac{d\varphi(x)}{dx}\psi(t)$$

e

$$V_t(x, t) = \varphi(x)\frac{d\psi}{dt}(t).$$

Como  $V(x, t)$  tem de ser solução da equação (4.73), fazemos

$$\varphi(x)\frac{d\psi}{dt}(t) = (rx + E\delta)\frac{d\varphi(x)}{dx}\psi(t) \Leftrightarrow \frac{d\psi}{dt}(t) = (rx + \delta E)\frac{\frac{d\varphi(x)}{dx}}{\varphi(x)}.$$

Nesta equação, o primeiro membro é uma função apenas de  $t$ , enquanto o segundo membro é uma função apenas de  $x$ . Existe, portanto, uma constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que

$$\frac{d\psi}{dt}(t) = \lambda \quad \text{e} \quad (rx + \delta E) \frac{d\varphi}{dx}(x) = \lambda.$$

Integrando estas duas equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem, obtemos as funções

$$\psi(t) = k_1 e^{\lambda t} \quad \text{e} \quad \varphi(x) = k_2 (rx + \delta E)^{\frac{\lambda}{r}},$$

com  $k_1$  e  $k_2$  constantes de integração.

A estratégia que temos vindo a seguir, baseia-se no método de separação de variáveis que pode ser visto em [10]. Contudo, não vamos poder dar continuidade ao método face à limitação provocada pela ausência de condições fronteira no nosso problema. Por isso, para determinar o valor de  $\lambda$ , vamos usar um argumento semelhante ao que usámos no exemplo da secção anterior e que é o seguinte: uma vez que as funções envolvidas no problema de controlo ótimo em consideração são funções lineares em relação à variável de estado  $x$ , a forma linear da função  $\varphi(x)$  será suficiente para a função  $V(x, t)$ . Fazemos então  $\lambda = r$  e obtemos

$$\psi(t) = k_1 e^{rt} \quad \text{e} \quad \varphi(x) = k_2 (rx + \delta E) = k_2 r \left( x + \frac{\delta E}{r} \right).$$

Substituindo estas funções em (4.74), passamos a escrever

$$V(x, t) = k r e^{rt} \left( x + \frac{\delta E}{r} \right), \quad \text{com } k = k_1 k_2 \text{ constante.} \quad (4.75)$$

Determinando as derivadas parciais desta função e substituindo-as na equação (4.73), observamos que, de facto, se trata de uma solução geral dessa equação.

Vamos agora determinar  $k$  usando a condição terminal para a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (4.70),

$$V(x, T) = b e^x, \quad \text{com } x = X(T).$$

Como  $x$  é apenas função de  $t$ , visto  $X(t) = x$ ,  $b e^x$  também será apenas função de  $t$ . Tal permite-nos que, na equação (4.75), para  $t = T$ , façamos

$$k r e^{rT} = b e^{X(T)},$$

o que implica,

$$k = \frac{be^{X(T)}e^{-rT}}{r}.$$

Substituindo este valor de  $k$  em (4.75), passamos a ter a solução particular

$$V_2(x, t) = be^{X(T)}e^{r(t-T)} \left( x + \frac{\delta E}{r} \right). \quad (4.76)$$

Agora, adicionando as funções (4.76) e (4.72), obtemos

$$V(x, t) = ae^{X(T)}e^{r(t-T)} \left( x + \frac{\delta E}{r} \right) - cEt + m, \quad \text{com } m \text{ constante.}$$

Impondo a condição terminal,  $V(x, T) = be^{X(T)}$ , determinamos

$$m = be^{X(T)} - be^{X(T)} \left( X(T) + \frac{\delta E}{r} \right) + cET,$$

pelo que,

$$V(x, t) = be^{X(T)}e^{r(t-T)} \left( x + \frac{\delta E}{r} \right) - cEt + ae^{X(T)} - be^{X(T)} \left( X(T) + \frac{\delta E}{r} \right) + cET \quad (4.77)$$

é a solução da equação (4.71) que pretendíamos. Para o verificar, basta determinar as derivadas parciais e substituir na equação.

Voltemos agora, às condições que se impõem à caracterização do controlo ótimo que procuramos, ou seja,

$$V_x(x, t) < \frac{c}{\delta} \Rightarrow E = \alpha^*(\cdot) = 0$$

e

$$V_x(x, t) > \frac{c}{\delta} \Rightarrow E = \alpha^*(\cdot) = M.$$

Então, por (4.77), passamos a ter

$$V(x, t) = \begin{cases} be^{X(T)}e^{r(t-T)}x + be^{X(T)} - be^{X(T)}X(T), & \text{se } V_x(x, t) < \frac{c}{\delta} \\ be^{X(T)}e^{r(t-T)} \left( x + \frac{\delta M}{r} \right) - cMt + be^{X(T)} - be^{X(T)} \left( X(T) + \frac{\delta M}{r} \right) + cMT, & \text{se } V_x(x, t) > \frac{c}{\delta}. \end{cases} \quad (4.78)$$

Calculando as derivadas parciais da função (4.78), obtemos

$$V_x(x, t) = be^{X(T)}e^{r(t-T)} \quad (4.79)$$

em ambos os ramos da função  $V$ , enquanto

$$V_t(x, t) = \begin{cases} be^{X(T)}re^{r(t-T)}x, & \text{se } V_x(x, t) < \frac{c}{\delta} \\ be^{X(T)}re^{r(t-T)}\left(x + \frac{\delta M}{r}\right) - cM, & \text{se } V_x(x, t) > \frac{c}{\delta}. \end{cases}$$

Substituindo adequadamente as derivadas parciais em (4.70), verificamos que a função (4.78) é solução dessa equação.

De (4.79), tiramos ainda

$$\begin{cases} V_x(x, t) < \frac{c}{\delta} \Leftrightarrow t < \frac{1}{r} \ln \left( \frac{ce^{rT}}{\delta be^{xT}} \right) \\ V_x(x, t) > \frac{c}{\delta} \Leftrightarrow t > \frac{1}{r} \ln \left( \frac{ce^{rT}}{\delta be^{xT}} \right). \end{cases}$$

A estratégia ótima do tratamento de quimioterapia, ou seja, a que minimiza a densidade do tumor e os efeitos secundários do fármacos, é então a seguinte:

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < \frac{1}{r} \ln \left( \frac{ce^{rT}}{\delta be^{xT}} \right) \\ M, & \text{se } t > \frac{1}{r} \ln \left( \frac{ce^{rT}}{\delta be^{xT}} \right), \end{cases}$$

com  $t \in [0, T]$ .

#### 4. Conclusões e considerações finais.

Determinámos a estratégia de controlo ótima para o modelo de tratamento de quimioterapia apresentado. No contexto do problema, esta estratégia tem a seguinte interpretação: Considerando o tempo em dias, durante os primeiros dias não se procede à administração do fármaco e durante os dias restantes, administra-se sempre a mesma dose de fármaco, uma dose em cada dia, correspondente à maior quantidade de fármaco admissível.

A estratégia ótima encontrada, adia o início da administração do fármaco para a parte final do tempo do tratamento, pelo facto do funcional objetivo minimizar a densidade do tumor no instante final.

A função de controlo ótimo apresenta uma estrutura *bang bang*, fornecendo-nos o instante em que se deve iniciar a administração do fármaco e a quantidade de fármaco que se deve administrar.

A estratégia de controlo ótimo para este modelo de tratamento de quimioterapia, determinada pelo método da programação dinâmica, coincide com a estratégia encontrada em [16], por um método, diferente, baseado na aplicação da teoria de controlo ótimo a equações diferenciais ordinárias.

Soluções numéricas do sistema ótimo em [16] mostram que, enquanto não é administrado fármaco, a densidade do tumor aumenta ao longo do tempo, começando a diminuir rapidamente logo que se inicia a administração, o que clinicamente se verifica em muitos casos. Mostram ainda que, quando se administra a mesma dose de fármaco a dois tumores de densidades diferentes, a redução da densidade é mais acentuada no tumor com maior densidade inicial. O modelo de crescimento de Gompertz que considerámos, baseia-se no facto de que o crescimento dos tumores é tanto mais rápido quanto menor for a sua densidade. É mais vantajoso esperar que a densidade do tumor aumente durante a primeira parte do intervalo de tratamento e administrar o fármaco na parte final, pois assim, a redução do tumor dá-se enquanto o seu crescimento é mais lento, permitindo uma redução mais acentuada. Se o fármaco fosse administrado durante a primeira parte do intervalo de tratamento, não só a redução do tumor seria menos acentuada, uma vez que o tumor enquanto pequeno cresce mais rápido, como durante a parte restante do intervalo de tratamento, o tumor cresceria mais rapidamente.



# Apêndice

## Soluções particulares da equação eikonal

1. Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 = n^2 \\ u(x_1, 1) = n\sqrt{1 + x_1^2}, \end{cases} \quad (1)$$

onde  $n$  é constante.

De acordo com a teoria exposta no Capítulo 3, passamos a escrever as equações (3.10). Neste caso,  $(\omega_1(0), \omega_2(0)) = (x_1^0, 1)$ , pelo que

$$\begin{cases} p_1(s) = p_1^0 \wedge p_2(s) = p_2^0 \\ \omega_1(s) = 2p_1^0 s + x_1^0 \wedge \omega_2(s) = 2p_2^0 s + 1, \end{cases} \quad (2)$$

com  $p_1^0$  e  $p_2^0$  constantes que verificam as condições de compatibilidade (2.22) apresentadas no Capítulo 2. Temos então,

$$\begin{cases} p_1^0 = n \frac{x_1^0}{\sqrt{1 + (x_1^0)^2}} \\ (p_1^0)^2 + (p_2^0)^2 = n^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1^0 = \frac{nx_1^0}{\sqrt{1 + (x_1^0)^2}} \\ p_2^0 = \pm \frac{n}{\sqrt{1 + (x_1^0)^2}}. \end{cases}$$

Observemos que se verifica a condição não caraterística. De facto,  $\nu(x^0) = (0, 1)$  é um vetor unitário normal à curva inicial  $x_2 = 1$  no ponto  $x^0 = (x_1^0, 1)$  e que verifica a condição  $\nu(x^0) \cdot (p_1^0, p_2^0) \neq 0$ .

Encontrámos, portanto, dois ternos admissíveis à resolução do problema (1):

$$\left( \left( \frac{nx_1^0}{\sqrt{1 + (x_1^0)^2}}, \pm \frac{n}{\sqrt{1 + (x_1^0)^2}} \right), n\sqrt{1 + (x_1^0)^2}, (x_1^0, 1) \right).$$

Começemos por considerar o terno admissível correspondente a  $p_0^2 = \frac{n}{\sqrt{1 + (x_1^0)^2}}$ .

Fixemos arbitrariamente um ponto  $(x_1, x_2)$  próximo de  $(x_1^0, 1)$  e façamos  $(\omega_1(s), \omega_2(s)) = (x_1, x_2)$ . Assim, as equações características (2) passam a escrever-se

$$\begin{cases} x_1 = 2 \frac{nx_1^0}{\sqrt{1 + (x_1^0)^2}} s + x_1^0 \\ x_2 = 2 \frac{n}{\sqrt{1 + (x_1^0)^2}} s + 1, \end{cases}$$

de onde, mediante operações algébricas elementares, para  $x_2 \neq 0$ , obtemos as condições

$$x_1^0 = \frac{x_1}{x_2} \quad (3)$$

e

$$s = \frac{x_2 - 1}{2n|x_2|} \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}. \quad (4)$$

Da relação (3), obtemos ainda

$$u(x_1^0, 1) = \frac{n}{|x_2|} \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}. \quad (5)$$

Substituindo na equação (3.11),  $s$  pelo segundo membro de (4) e  $z_0$  pelo segundo membro de (5), obtemos a solução

$$u(x_1, x_2) = n \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}. \quad (6)$$

A solução (6) verifica a equação eikonal em quase todos os pontos exceto no ponto  $(0, 0)$ , onde  $u_{x_1}$  e  $u_{x_2}$  são singulares. Esta solução da equação eikonal representa uma onda esférica que se propaga a partir de um único ponto, precisamente do ponto  $(0, 0)$  [17]. As frentes de onda

$$u(x_1, x_2) = k,$$

sendo  $k$  uma constante, pertencem à família de circunferências concêntricas

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

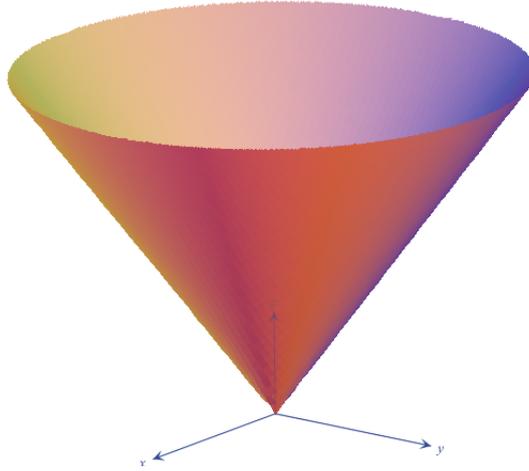


Figura 1: Representação gráfica da solução  $u(x_1, x_2) = n\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$ , para  $n = 1$ . Na figura, a  $x$  corresponde  $x_1$  e a  $y$  corresponde  $x_2$ .

Tomemos agora o terno admissível correspondente a  $p_2^0 = -\frac{n}{\sqrt{1 + (x_1^0)^2}}$ .

Procedendo de modo semelhante ao que acabámos de fazer, para  $x_2 \neq 2$ , obtemos sucessivamente,

$$x_1^0 = \frac{x_1}{2 - x_2}, \quad s = \frac{1 - x_2}{2n|2 - x_2|} \sqrt{(2 - x_2)^2 + (x_1)^2}$$

e a solução,

$$u(x_1, x_2) = n \frac{2 - x_2}{|2 - x_2|} \sqrt{(x_1)^2 + (x_2 - 2)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} n\sqrt{(x_1)^2 + (x_2 - 2)^2}, & \text{se } x_2 < 2 \\ -n\sqrt{(x_1)^2 + (x_2 - 2)^2}, & \text{se } x_2 > 2. \end{cases}$$

Esta solução também verifica a equação eikonal em quase todos os pontos exceto, agora, no ponto  $(0, 2)$  onde  $u_{x_1}$  e  $u_{x_2}$  são singulares.

As frentes de onda  $u(x_1, x_2) = k$ , sendo  $k$  uma constante, pertencem à família de círculos concêntricos

$$(x_1)^2 + (x_2 - 2)^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

Pode ler-se uma outra proposta de resolução deste problema em [17].

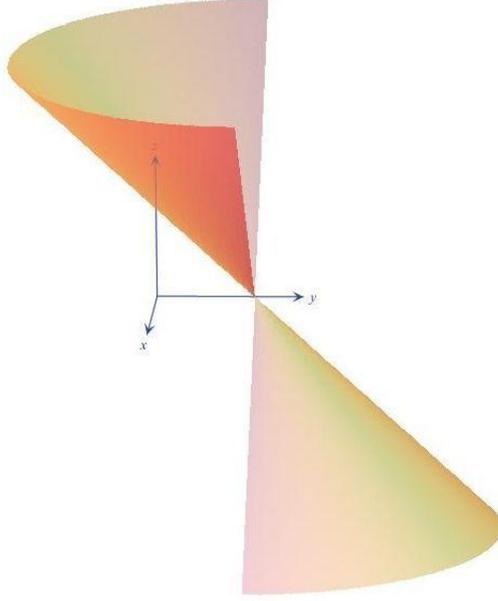


Figura 2: Representação gráfica da solução  $u(x_1, x_2) = n \frac{2 - x_2}{|2 - x_2|} \sqrt{(x_1)^2 + (x_2 - 2)^2}$ , para  $n = 1$ . Na figura, a  $x$  corresponde  $x_1$  e a  $y$  corresponde  $x_2$ .

2. Consideremos agora, o problema:

$$\begin{cases} u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 = n^2 \\ u \left( \frac{\cos \theta}{1 - \cos \theta}, \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right) = \frac{n \cos \theta}{1 - \cos \theta}. \end{cases}$$

As condições iniciais para este problema são

$$(x_1^0, x_2^0) = \left( \frac{\cos \theta}{1 - \cos \theta}, \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right),$$

$$z^0 = \frac{n \cos \theta}{1 - \cos \theta}$$

e falta-nos determinar  $(p_1^0, p_2^0)$ , de modo a verificarem-se simultaneamente as condições:

$$(p_1^0)^2 + (p_2^0)^2 = n^2 \quad (7)$$

e

$$p_1^0 \frac{dx_1^0}{d\theta} + p_2^0 \frac{dx_2^0}{d\theta} = \frac{dz^0}{d\theta}. \quad (8)$$

Para isso, calculamos

$$\frac{dx_1^0}{d\theta} = -\frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2}, \quad \frac{dx_2^0}{d\theta} = -\frac{1}{(1 - \cos \theta)}$$

e

$$\frac{dz^0}{d\theta} = -n \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2}.$$

Substituimos estes resultados em (8) e, mediante operações algébricas elementares, obtemos a relação

$$p_2^0 = \frac{\sin \theta (n - p_1^0)}{1 - \cos \theta}. \quad (9)$$

Voltando à condição (7), com este resultado, passamos a ter

$$(p_1^0)^2 + \left( \frac{\sin \theta (n - p_1^0)}{1 - \cos \theta} \right)^2 = n^2.$$

Após novos cálculos elementares, esta equação simplifica-se numa equação do segundo grau em ordem a  $p_1^0$ , mais precisamente na equação,

$$(p_1^0)^2 - n(1 + \cos \theta)p_1^0 + n^2 \cos \theta = 0,$$

cujas soluções nos confere duas soluções:  $p_1^0 = n$  ou  $p_1^0 = n \cos \theta$ , determinando cada uma delas um valor de  $p_2^0$  através de (9). Assim temos,

(a)  $p_1^0 = n$  e  $p_2^0 = 0$ ,

(b)  $p_1^0 = n \cos \theta$  e  $p_2^0 = n \sin \theta$ .

Estamos, assim, perante dois casos que vamos resolver separadamente.

Antes porém, investiguemos se os vetores  $(p_1^0, p_2^0)$  obedecem à condição não característica. As condições iniciais

$$(x_1^0, x_2^0) = \left( \frac{\cos \theta}{1 - \cos \theta}, \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right),$$

determinam a curva inicial

$$(x_2)^2 = 2x_1 + 1,$$

que representa uma parábola com vértice em  $(-\frac{1}{2}, 0)$  e foco em  $(0, 0)$ . O vetor

$$\left( \frac{dx_1^0}{d\theta}, \frac{dx_2^0}{d\theta} \right) = \left( -\frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2}, -\frac{1}{(1 - \cos \theta)} \right),$$

é tangente à curva inicial no ponto  $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ . Um vetor normal unitário a este ponto é o vetor

$$\nu(x^0) = \left( -\frac{\sqrt{1 - \cos \theta}}{\sqrt{2}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{2 - 2 \cos \theta}} \right).$$

Com cálculos simples vemos que

(a)  $(n, 0) \cdot \nu(x^0) \neq 0$ ;

(b)  $(n \cos \theta, n \sin \theta) \cdot \nu(x^0) \neq 0$ .

Verificando-se, portanto, a condição não característica em ambos os casos.

No caso (a), as características (2) passam a escrever-se,

$$\begin{cases} x_1 = 2ns + \frac{\cos \theta}{1 - \cos \theta} \\ x_2 = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \end{cases}$$

de onde resulta,

$$s = \frac{1}{2n} \left( x_1 - \frac{\cos \theta}{1 - \cos \theta} \right).$$

Então, por (3.11), determinamos

$$u(x_1, x_2) = nx_1.$$

As curvas de nível que representam as frentes de onda, dadas por  $u(x_1, x_2) = k$ , sendo  $k$  uma constante, pertencem neste caso à família de retas paralelas ao eixo  $Ox_2$ ,

$$x_1 = \frac{k}{n}.$$

No caso (b), as características (2) escrevem-se agora

$$\begin{cases} x_1 = 2n \cos \theta s + \frac{\cos \theta}{1 - \cos \theta} \\ x_2 = 2n \sin \theta s + \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}. \end{cases}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros de cada equação, adicionando as equações membro a membro e procedendo a algumas simplificações algébricas simples, obtemos

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = \left( 2ns + \frac{1}{1 - \cos \theta} \right)^2,$$

que resolvendo em ordem a  $s$ , nos leva à relação

$$s = \left( \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} - \frac{1}{1 - \cos \theta} \right) \frac{1}{2n}.$$

Então, por (3.11), determinamos por fim a solução,

$$u(x_1, x_2) = n \left( \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} - 1 \right).$$

As curvas de nível que representam as frentes de onda pertencem, neste caso, à família de circunferências concêntricas

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = \left(\frac{k}{n} + 1\right)^2.$$

Neste problema, seguimos a resolução proposta em [5].

# Bibliografia

- [1] Bellman R.; *Dynamic Programming*, Princeton: Princeton University Press, 1957.
- [2] Cannarsa P., Sinestrari C.; *Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi Equations and optimal control*, Boston: Birkäuser, 2004.
- [3] Caputo M. R.; *Foundations of Dynamic Economic Analysis, Optimal control theory and applications*, Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [4] Courant R., Hilbert D.; *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, 3 ed., New York: Interscience Publishers, 1966.
- [5] Debnath L.; *Nonlinear Partial differential equations for scientists and engineers*, 2 ed., Boston: Birkhäuser, 2005.
- [6] Evans L. C.; *Partial Differential Equations*, Vol. 19, New York: American Mathematical Society, 1998.
- [7] Fleming W. H., Soner H. M.; *Controlled Markov Process and Viscosity Solutions*, 2 ed., New York: Springer, 2006.
- [8] Fister K. R., Lenhart S., McNally J.; *Optimizing Chemotherapy in an HIV*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 1998, No. 32, pg. 1-12, 1998.
- [9] Fister K. R., Panetta J. C.; *Cell-Cycle-Specific Chemotherapy and Optimal Control*, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 60, No. 3, pg. 1059-1072, 2000.

- [10] Iório V.; *EDP um curso de graduação*, 3 ed., Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2007.
- [11] Iório R. Jr., Iório V. M.; *Equações diferenciais parciais: Uma Introdução*, Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 1988.
- [12] Jahanandish M. A.; *Geometric-Band Numerical solution of Eikonal Equation over a Closed Level Curve*, Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A, Vol. 34 , pg. 47-58, 2010.
- [13] Lima E. L.; *Curso de Análise*, 11 ed., Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Projeto Euclides, 2011.
- [14] Norton L., Simon R.; *Tumor size, sensitivity to therapy, and design of treatment schedules*, Cancer Treatment Report, Vol. 61, No. 7, pg. 1307-17, 1977.
- [15] Norton L., Simon R.; *The Norton-Simon hypothesis revisited*, Cancer Treatment Reports, Vol. 70, No. 1, pg. 163-9, 1986.
- [16] Panetta J. C., Fister K. R.; *Optimal Control Applied to Competing Chemotherapeutic Cell-Kill Strategies*, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 63, No. 6, pg. 1954-71, 2003.
- [17] Pinchover Y., Rubinstein J.; *An introduction to Partial Differential Equations*, 1 ed., Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [18] Skipper H. E., Schabel F. M. Jr., Wilcox W. S.; *Experimental evaluation of potential anticancer agents*, XIII, On the criteria and kinetics associated with curability of experimental leukemia, Cancer Chemother Reports, Vol. 35, pg. 1-111, 1964.
- [19] Sontag E. D.; *Mathematical Control Theory, Deterministic Finite Dimensional Systems*, 2 ed., New York: Springer, 1998.
- [20] Yosida K.; *Lectures on differential and integral equations*, New York: Dover Publications, 1991.

- [21] Zhao H.; *A Fast Sweeping method for Eikonal Equations*, Mathematics of computation, Vol. 74, pg. 603-27, 2005.