

**Universidade do Minho**  
Escola de Ciências

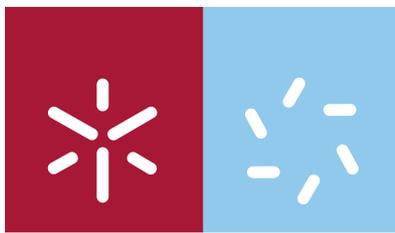
Ivone Ferreira Vieira **Complexidade Topológica**

Ivone Ferreira Vieira

## **Complexidade Topológica**

UMinho | 2009

Dezembro de 2009



**Universidade do Minho**  
Escola de Ciências

Ivone Ferreira Vieira

## **Complexidade Topológica**

Mestrado em Matemática - Formação contínua de professores

Trabalho efectuado sob a orientação do  
**Professor Doutor Thomas Kahl**

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO PARCIAL DESTA TESE APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE;

Universidade do Minho, \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

## **Agradecimentos**

Ao meu orientador, Professor Doutor Thomas Kahl, pelos conselhos e explicações, pela disponibilidade e paciência, pelo apoio e incentivo, e pela compreensão humana e profissional.

À Doutora Lucile Vandembroucq que, em conjunto com o meu orientador, me iniciou no estudo da homologia e cohomologia.

Aos meu queridos pais por me terem encorajado no prosseguimento da minha formação e ajudado a encontrar a melhor solução para os problemas diários.

Aos meus familiares, em especial ao Paulo e à Fernanda, que estiveram sempre a meu lado e me deram todo o seu apoio.

Aos meus amigos, em especial à Rita que nunca deixou de me encorajar.

À Mariana, minha afilhada, pelos seus sorrisos e mimos.

A todos, sem excepção, muito obrigada!

## Complexidade Topológica

### Resumo

A noção de complexidade topológica de um espaço  $X$  surgiu, de certa forma, devido ao problema da planificação de movimentos na área da Robótica.

Dados dois pontos  $A$  e  $B$  de um espaço  $X$ , o problema da planificação de movimentos consiste em determinar um caminho contínuo que ligue o ponto inicial  $A$  ao ponto final  $B$ . Em espaços topológicos conexos por arcos, este problema tem sempre solução, no entanto não existe um procedimento contínuo para associar a cada par de pontos um caminho que os ligue. Michael Farber iniciou o estudo deste fenómeno topológico no seu artigo “Topological complexity of motion planning” [7] de 2001. O autor associou a cada espaço topológico  $X$  conexo por arcos um número representado por  $TC(X)$  chamado de complexidade topológica de  $X$  e que é uma medida de descontinuidade da planificação de movimentos.

Neste trabalho, iremos apresentar e demonstrar algumas propriedades do invariante  $TC(X)$  e calcular o seu valor para alguns espaços topológicos.

# Topological Complexity

## Abstract

In a way, the notion of topological complexity of a space  $X$  emerged due to the motion planning problem in Robotics.

Given two points  $A$  and  $B$  of a space  $X$ , the motion planning problem consists in determining a continuous path that connects the initial point  $A$  to the final point  $B$ . In a path-connected topological space, this problem has always a solution. However, there does not exist a continuous procedure which associates to any pair of points a path connecting them. Michael Faber started the study of this topological phenomenon in his article “Topological complexity of motion planning” [7] de 2001. The author associates to any path-connected topological space  $X$  a number  $TC(X)$ , called the topological complexity of  $X$ , which is a measure of motion planning discontinuity.

In this work, we will present and demonstrate some properties of the invariant  $TC(X)$  and calculate its value for some topological spaces.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Resultados Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Teoria de Homotopia Básica . . . . .	4
1.1.1 Caminhos . . . . .	4
1.1.2 Aplicações Homotópicas e Equivalências de Homotopia	5
1.1.3 Fibrações . . . . .	8
1.1.4 CW-Complexos . . . . .	10
1.2 Categorias e Funtores . . . . .	12
1.3 Homologia e Cohomologia . . . . .	14
1.3.1 Homologia de Complexos . . . . .	14
1.3.2 Homologia Singular . . . . .	16
1.3.3 Cohomologia . . . . .	18
1.3.4 Produto Cup . . . . .	20
1.4 Categoria de Lusternik-Schnirelman . . . . .	23
<b>2 Complexidade Topológica</b>	<b>25</b>
2.1 Definição. Propriedades. . . . .	25
2.2 Limites Inferiores e Superiores para $TC(X)$ . . . . .	29

<b>3</b>	<b>Primeiros Exemplos</b>	<b>34</b>
3.1	Esferas $S^n$ . . . . .	34
3.2	Planos Projectivos . . . . .	37
3.2.1	Planos Projectivos Complexos $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . . . . .	37
3.2.2	Planos Projectivos Reais $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Complexidade Topológica do Produto de Espaços</b>	<b>40</b>
4.1	Desigualdade do Produto . . . . .	40
4.2	Exemplos . . . . .	43
4.2.1	Braço de Robô . . . . .	43
4.2.2	Superfície de genus $g$ . . . . .	45
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>47</b>
	<b>Índice</b>	<b>49</b>

# Introdução

A *complexidade topológica* de um espaço topológico  $X$ , representada por  $TC(X)$ , foi introduzida por Michael Farber, no seu artigo “Topological complexity of motion planning” [7] de 2001. É o menor número inteiro  $k$  tal que existe uma cobertura de  $k$  abertos de  $X \times X$  sobre os quais a fibração  $X^I \longrightarrow X \times X$ , que associa a cada caminho em  $X$  as suas extremidades, admite uma secção. Este invariante numérico do tipo de homotopia tem, para além do seu interesse em Topologia, aplicações na área da Robótica, mais especificamente no problema da planificação de movimentos.

Se considerarmos um espaço topológico  $X$ , o problema da planificação de movimentos consiste em, dados dois pontos  $A$  e  $B$  de  $X$ , determinar um caminho contínuo em  $X$  que ligue o ponto inicial  $A$  ao ponto final  $B$ . Dizemos que  $A$  é a configuração inicial e  $B$  a configuração final (desejada) do sistema. Iremos considerar espaços topológicos conexos por arcos, ou seja, espaços nos quais quaisquer dois pontos estão ligados por um caminho contínuo. Nestes espaços, o problema de planificação de movimentos tem sempre solução, no entanto a continuidade da planificação de movimentos não está garantida. De facto, se considerarmos dois pares de pontos  $(A, B)$  e  $(A', B')$  próximos um do outro, os respectivos caminhos  $\alpha$  e  $\alpha'$  podem não estar próximos, provocando assim instabilidade no sistema. Tomemos uma cobertura aberta

---

$\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k$  de  $X \times X$  tal que, para cada  $i$ ,  $X^I \rightarrow X \times X$  admite uma secção  $s_i$  sobre  $\mathcal{U}_i$ . Considerando um par  $(A, B)$  em  $\mathcal{U}_1$  próximo da fronteira e próximo de outro par  $(A', B')$  pertencente a  $\mathcal{U}_2 \setminus \mathcal{U}_1$ ,  $s_1(A, B)$  poderá ser completamente diferente de  $s_2(A', B')$ , uma vez que as secções são geralmente distintas nas intersecções dos seus domínios. Assim, intuitivamente, a complexidade topológica é uma medida de descontinuidade de planificação de movimentos em  $X$ .

A dissertação, cujo principal objectivo é estudar as propriedades do invariante  $TC(X)$ , está estruturada em quatro capítulos, que passamos a descrever sumariamente:

O primeiro capítulo é destinado a introduzir definições e resultados fundamentais da teoria de homotopia e da teoria da homologia e cohomologia. Para obter mais pormenores e demonstrações, os livros [3] e [4] representam uma boa referência.

No capítulo 2, introduz-se a definição de Complexidade Topológica e apresentamos e demonstramos alguns resultados que nos permitirão determinar enquadramentos para a complexidade topológica de espaços.

No capítulo 3, serão apresentados os primeiros exemplos, nos quais iremos aplicar os resultados demonstrados no capítulo anterior. Assim, será calculada a complexidade topológica das esferas e dos planos projectivos complexos. Também iremos apresentar um enquadramento para a complexidade topológica dos planos projectivos reais.

Finalmente no quarto e último capítulo, será introduzido o cálculo da complexidade topológica de produto de espaços, que nos permitirá apresen-

tar os últimos exemplos: produto de esferas de e superfícies. Neste capítulo, é calculada a complexidade topológica do problema de planificação do movimento de um braço de um robô, supondo ausência de obstáculos.

# Capítulo 1

## Resultados Preliminares

Nas secções seguintes são apresentados alguns conceitos de Topologia Geral e de Topologia Algébrica importantes para a compreensão do tema da Tese.

### 1.1 Teoria de Homotopia Básica

#### 1.1.1 Caminhos

**Definição 1.1.** *Um caminho em  $X$  é uma aplicação contínua  $\alpha : I \longrightarrow X$ . Se  $\alpha(0) = a$  e  $\alpha(1) = b$ , dizemos que  $\alpha$  é um caminho de  $a$  para  $b$ .*

**Nota 1.2.** Se  $\alpha$  é um caminho de  $a$  para  $b$ , então  $\beta(t) = \alpha(1 - t)$  define um caminho de  $b$  para  $a$ . É óbvio que  $\beta(I) = \alpha(I)$ , assim  $\beta$  e  $\alpha$  descrevem o mesmo caminho, percorrido em sentidos inversos. O caminho  $\beta$  diz-se o caminho inverso de  $\alpha$ , e denota-se por  $\beta = \alpha^{-1}$ .

**Definição 1.3.** *Um espaço  $X$  é conexo por arcos se, para cada  $a, b \in X$ ,*

existe um caminho em  $X$  de  $a$  para  $b$ .

O conjunto dos caminhos em  $X$ , denotado por  $X^I$  e definido por  $X^I = \{\alpha : I \rightarrow X \mid \alpha \text{ contínua}\}$ , é um espaço topológico munido da **topologia compacto-aberta**  $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_{K,A} \mid K \subseteq I \text{ compacta e } A \text{ aberto em } X\}$ , onde  $\mathcal{U}_{K,A} = \{\alpha : I \rightarrow X \mid \alpha(K) \subseteq A\}$ .

### 1.1.2 Aplicações Homotópicas e Equivalências de Homotopia

#### Definição 1.4. *Aplicações Homotópicas*

Duas aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow Y$  dizem-se **homotópicas** se existir uma aplicação contínua  $H : X \times I \rightarrow Y$  tal que, para todo o  $x \in X$ ,  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$ . A aplicação  $H$  diz-se **homotopia de  $f$  para  $g$** . Escrevemos  $f \simeq g$  para indicar que  $f$  e  $g$  são homotópicas.

**Nota 1.5.** A relação  $\simeq$  é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações contínuas  $X \rightarrow Y$ .

#### Definição 1.6. *Equivalência de Homotopia*

Uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  diz-se **equivalência de homotopia**, e escreve-se  $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$ , se existir uma aplicação contínua  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $g \circ f \simeq id_X$  e  $f \circ g \simeq id_Y$ . Dois espaços topológicos  $X$  e  $Y$  são chamados **homotopicamente equivalentes ou do mesmo tipo de homotopia**, e escreve-se  $X \simeq Y$ , se existir uma equivalência de homotopia entre eles.

**Definição 1.7.** Se  $p : E \rightarrow B$  e  $s : B \rightarrow E$  são aplicações contínuas tais que  $p \circ s = id$ , então dizemos que  $s$  é uma **secção de  $p$** .

**Teorema 1.8.** *Sejam  $H : X \times I \longrightarrow Y$  e  $h : X \longrightarrow Y^I$  tais que  $h(x)(t) = H(x, t)$ .  $H$  é contínua se e só se  $h$  é contínua.*

Do Teorema anterior, deduz-se os seguintes corolários importantes:

**Corolário 1.9.** *A aplicação*

$$\begin{array}{ccc} Y^I \times I & \xrightarrow{ev} & Y \\ (\omega, t) & \mapsto & \omega(t) \end{array}$$

*é contínua.*

**Demonstração:** Seja  $h : Y^I \longrightarrow Y^I$  tal que  $h(\omega)(t) = ev(\omega, t) = \omega(t)$ . Assim,  $h(\omega) = \omega$ , ou seja,  $h$  é a identidade, e portanto é contínua. Deste modo, pelo teorema 1.8, vem que  $ev$  também é contínua. ■

**Corolário 1.10.** *A aplicação*

$$\begin{array}{ccc} Y^I & \xrightarrow{ev_t} & Y \\ \omega & \mapsto & \omega(t) \end{array}$$

*é contínua.*

**Corolário 1.11.** *A aplicação*

$$\begin{array}{ccc} X^I & \xrightarrow{ev} & X \times X \\ \omega & \mapsto & (\omega(0), \omega(1)) \end{array}$$

*é contínua.*

Outro resultado importante é o seguinte:

**Corolário 1.12.** *Sejam  $f, g : X \longrightarrow Y$  aplicações contínuas. Temos que  $f \simeq g$  se e só se existe uma aplicação  $h : X \longrightarrow Y^I$  contínua tal que  $ev_0 \circ h = f$  e  $ev_1 \circ h = g$ .*

**Proposição 1.13.** *A aplicação*

$$\begin{array}{ccc} X^I & \longrightarrow & X^I \\ \omega & \mapsto & \omega^{-1} \end{array}$$

*é contínua.*

**Demonstração:** Temos que  $X^I \times I \longrightarrow X$  é contínua, pois é a composta de duas aplicações contínuas:

$$\begin{array}{ccc} X^I \times I & \xrightarrow{\text{contínua}} & X^I \times I & \xrightarrow{\text{ev}} & X \\ (\omega, t) & \mapsto & (\omega, 1-t) & \mapsto & \omega(1-t) \end{array}$$

Assim, pelo teorema 1.8, vem que  $X^I \longrightarrow X^I$  é contínua.  $\blacksquare$

$$\begin{array}{ccc} X^I & \longrightarrow & X^I \\ \omega & \mapsto & \omega^{-1} \end{array}$$

Consideremos dois caminhos  $\alpha : I \longrightarrow X$  e  $\beta : I \longrightarrow X$  tais que  $\alpha(1) = \beta(0)$ . Temos que

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é um caminho de  $\alpha(0)$  para  $\beta(1)$ , chamado de **concatenação de  $\alpha$  com  $\beta$**  e denotado por  $\alpha.\beta$ .

A seguinte proposição garante-nos a continuidade da concatenação.

**Proposição 1.14.** *A aplicação*

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & X^I \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha\beta \end{array}$$

onde  $Z$  é o subespaço topológico de  $X^I \times X^I$  definido por  $Z = \{(\alpha, \beta) \in X^I \times X^I \mid \alpha(1) = \beta(0)\}$ , é contínua.

**Demonstração:** Vamos provar que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} Z \times I & \longrightarrow & X \\ (\alpha, \beta, t) & \mapsto & \alpha\beta(t) \end{array}$$

é contínua.

- $Z \times [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow X$  é contínua, pois é a composta de duas aplicações contínuas:  
 $(\alpha, \beta, t) \mapsto \alpha\beta(t) = \alpha(2t)$

$$\begin{array}{ccccc} Z \times [0, \frac{1}{2}] & \xrightarrow{\text{contínua}} & X^I \times I & \xrightarrow{\text{ev}} & X \\ (\alpha, \beta, t) & \mapsto & (\alpha, 2t) & \mapsto & \alpha(2t) \end{array}$$

- $Z \times [\frac{1}{2}, 1] \longrightarrow X$  é contínua, pois é a composta de duas aplicações contínuas:  
 $(\alpha, \beta, t) \mapsto \alpha\beta(t) = \beta(2t - 1)$

$$\begin{array}{ccccc} Z \times [\frac{1}{2}, 1] & \xrightarrow{\text{contínua}} & X^I \times I & \xrightarrow{\text{ev}} & X \\ (\alpha, \beta, t) & \mapsto & (\beta, 2t - 1) & \mapsto & \beta(2t - 1) \end{array}$$

Assim, como  $Z \times [0, \frac{1}{2}]$  e  $Z \times [\frac{1}{2}, 1]$  são fechados em  $Z \times [0, 1]$  e as restrições a  $Z \times [0, \frac{1}{2}]$  e a  $Z \times [\frac{1}{2}, 1]$  são contínuas, concluímos que

$$\begin{array}{ccc} Z \times I & \longrightarrow & X \\ (\alpha, \beta, t) & \mapsto & \alpha\beta(t) \end{array}$$

é contínua, e portanto,

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & X^I \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha\beta \end{array}$$

também é contínua. ■

### 1.1.3 Fibrações

A definição e os resultados apresentados de seguida são de particular interesse para o trabalho a que nos propomos.

**Definição 1.15.** Uma aplicação  $p : E \longrightarrow B$  contínua diz-se uma **fibração** se em todo o diagrama comutativo de setas a traço cheio:

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow i & \nearrow F & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

existe a aplicação  $F$  tal que  $F \circ i = f$  e  $p \circ F = H$ .

Vejamos agora um exemplo de fibração de grande importância para o trabalho:

**Proposição 1.16.** A aplicação

$$\begin{aligned} ev : Y^I &\longrightarrow Y \times Y \\ w &\mapsto (w(0), w(1)) \end{aligned}$$

é uma fibração.

**Demonstração:** Consideremos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & Y^I \\ \downarrow & \nearrow F & \downarrow ev \\ X \times I & \xrightarrow{H} & Y \times Y \end{array}$$

Vamos provar que a aplicação  $F$  existe.

Consideremos as aplicações contínuas  $r : I \times I \longrightarrow \{0\} \times I \cup I \times \{0, 1\}$  tal que

$$r(t, s) = \begin{cases} (t - 3s, 0), & s \leq \frac{1}{3}t \\ (0, \frac{3s-t}{3-2t}), & \frac{1}{3}t \leq s \leq 1 - \frac{1}{3}t \\ (t + 3s - 3, 1), & s \geq -\frac{1}{3}t + 1 \end{cases}$$

e  $G : X \times \{0\} \times I \cup X \times I \times \{0, 1\} \longrightarrow Y$  tal que  $G(x, 0, s) = f(x, 0)(s)$ ,  $G(x, t, 0) = pr_0 \circ H(x, t)$  e  $G(x, t, 1) = pr_1 \circ H(x, t)$ .

Seja  $F : X \times I \longrightarrow Y^I$  a aplicação contínua definida por  $F(x, t)(s) = G \circ (id_X \times r)(x, t, s)$ .

Temos que:

- $F(x, 0)(s) = G \circ (id_X \times r)(x, 0, s) = G(x, 0, s) = f(x, 0)(s)$ ;
- $ev_0 F(x, t) = F(x, t)(0) = G \circ (id_X \times r)(x, t, 0) = G(x, t, 0) = pr_0 H(x, t)$ ;
- $ev_1 F(x, t) = F(x, t)(1) = G \circ (id_X \times r)(x, t, 1) = G(x, t, 1) = pr_1 H(x, t)$ .

Logo,  $F$  existe. ■

A demonstração da seguinte proposição estabelece-se facilmente a partir da definição de fibração.

**Proposição 1.17.** *Consideremos  $p : E \longrightarrow B$ ,  $s : A \longrightarrow E$  e  $i : A \longrightarrow B$  aplicações contínuas tais que  $ps \simeq i$ .*

*Se  $p : E \longrightarrow B$  é uma fibração, então existe  $\sigma : A \longrightarrow E$  tal que  $p \circ \sigma = i$ .*

### 1.1.4 CW-Complexos

Sejam  $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$  a esfera de dimensão  $n$  e  $D^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq 1\}$  a bola de dimensão  $n$ .

**Definição 1.18.** *Um espaço topológico  $X$  diz-se **CW-complexo** se existirem*

(a) *Uma sequência de subespaços*

$$X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq X^{(2)} \subseteq \dots \subseteq X^{(n)} \subseteq \dots$$

(b) *Uma seqüência de aplicações contínuas*

$$f^n : \coprod_{i \in I_n} S_i^n \longrightarrow X^{(n)}$$

tais que:

1.  $X^{(0)}$  é discreto e não vazio;
2.  $X^{(n+1)} = X^{(n)} \cup_{f^n} \coprod D_i^{n+1} = X^{(n)} \amalg (\coprod D_i^{n+1})/x \sim f^n(x)$ ;
3.  $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)}$  e um conjunto  $A \subseteq X$  é fechado em  $X$  se e só se  $A \cap X^{(n)}$  é fechado em  $X^{(n)}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Aos elementos de  $X^{(0)}$  chamamos **0-células** de  $X$  e à imagem  $e_i^{n+1}$  de  $D_i^{n+1} \setminus S_i^n$  em  $X$  chamamos  $(n+1)$ -**célula** de  $X$ . O subconjunto  $X^{(n)}$  é chamado de **n-esqueleto** de  $X$ . Temos que  $X^{(n+1)} = X^{(n)} \cup (\cup_{i \in I_n} e_i^{n+1})$ .

A aplicação  $f^n$  é a **aplicação de colamento** e a aplicação  $D_i^{n+1} \longrightarrow X$  induzida por  $f^n$  é chamada de **aplicação característica** da célula  $e_i^{n+1}$ .

Um CW-complexo diz-se **de tipo finito** se cada dimensão tem um número finito de células.

Se  $X = X^{(n)}$ , isto é, não há células de dimensão superior a  $n$  então  $X$  diz-se de **dimensão finita**. Se  $X$  é de dimensão finita e  $n$  é o menor inteiro tal que  $X = X^{(n)}$ ,  $X$  diz-se de dimensão  $n$  e escreve-se  $\dim(X) = n$ .

**Exemplo 1.19.** *São exemplos de CW-complexos os seguintes espaços topológicos:*

- 1)  $S^n$ , esferas de dimensão  $n$ . Temos que  $S^n = \{*\} \cup e^n$ .
- 2) *Espaços projectivos.* Temos que  $\mathbb{R}P^n = S^1 \cup e^2 \cup e^3 \cup \dots \cup e^n$  e  $\mathbb{C}P^n = S^2 \cup e^4 \cup e^6 \cup \dots \cup e^{2n}$ .

- 3) Se  $X, Y$  são CW complexos de tipo finito, então  $X \times Y$  é um CW-complexo.
- 4) Se  $X, Y$  são CW complexos e  $X$  admite uma decomposição com um número finito de células, então  $X \times Y$  é um CW-complexo.

## 1.2 Categorias e Functores

Começemos por uma definição:

**Definição 1.20.** Uma **Categoria**  $\mathcal{C}$  consiste em:

- (a) Uma classe de objectos, denotada por  $\text{obj}$ .
- (b) Para cada par ordenado de objectos  $X$  e  $Y$ , um conjunto  $\text{Hom}(X, Y)$  de morfismos com domínio  $X$  e contradomínio  $Y$ ; se  $f \in \text{Hom}(X, Y)$ , escrevemos  $f : X \longrightarrow Y$  ou  $X \xrightarrow{f} Y$ .
- (c) Uma operação que associa aos morfismos  $f : X \longrightarrow Y$  e  $g : Y \longrightarrow Z$ , o morfismo composto  $gf = g \circ f : X \longrightarrow Z$ .

Os seguintes axiomas devem ser satisfeitos:

*Associatividade.* Se  $f : X \longrightarrow Y$ ,  $g : Y \longrightarrow Z$  e  $h : Z \longrightarrow W$ , então  $h(gf) = (hg)f : X \longrightarrow W$ .

*Identidade.* Para cada objecto  $Y$ , existe um morfismo  $1_Y : Y \longrightarrow Y$  tal que, se  $f : X \longrightarrow Y$ , então  $1_Y f = f$ , e se  $h : Y \longrightarrow Z$ , então  $h1_Y = h$ .

**Exemplo 1.21.** A categoria dos espaços topológicos e das aplicações contínuas, denotada por **Top**.

**Exemplo 1.22.** A categoria dos conjuntos e das aplicações, denotada por **Sets**.

**Exemplo 1.23.** A categoria dos grupos e dos homomorfismos, denotada por **Groups**.

Iremos, de seguida, definir funtores, aplicações de uma categoria para outra, e transformações naturais entre funtores, assim como apresentar exemplos de grande importância para o trabalho.

**Definição 1.24.** Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}$  categorias. Um **functor**  $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$  associa a cada objecto  $A$  de  $\mathcal{A}$  um objecto  $TA$  de  $\mathcal{C}$  e a cada morfismo  $f : A \longrightarrow A'$  em  $\mathcal{A}$ , um morfismo  $Tf : TA \longrightarrow TA'$  em  $\mathcal{C}$  tal que:

(i) Se  $f, g$  são morfismos em  $\mathcal{A}$  para os quais  $g \circ f$  está definida, então

$$T(g \circ f) = (Tg) \circ (Tf);$$

(ii)  $T(1_A) = 1_{TA}$ , para cada  $A \in \text{obj}\mathcal{A}$ .

**Exemplo 1.25.** O functor  $\text{Top} \longrightarrow \text{Top}$  que a cada espaço topológico  $X$  associa o espaço  $X^I$  e que a cada morfismo  $f : X \longrightarrow Y$  associa o morfismo  $f^I : X^I \longrightarrow Y^I$  definido por  $f^I(\omega) = f \circ \omega$ .

**Nota 1.26.** A composição de funtores, obtida de forma intuitiva, é ainda um functor.

**Definição 1.27.** Sejam  $F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$  funtores. Um sistema de aplicações  $\{\varphi_X : FX \longrightarrow GX\}$  diz-se uma **transformação natural** se, para todo o morfismo  $f : X \longrightarrow Y$ , o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\varphi_X} & GX \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FY & \xrightarrow{\varphi_Y} & GY \end{array} \quad (1.1)$$

**Exemplo 1.28.** A aplicação  $ev : X^I \longrightarrow X \times X$  é uma transformação natural, pois para toda a aplicação  $f : X \longrightarrow Y$ , o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X^I & \xrightarrow{ev} & X \times X \\ f^I \downarrow & & \downarrow f \times f \\ Y^I & \xrightarrow{ev} & Y \times Y \end{array}$$

**Definição 1.29.** Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}$  categorias. Um **cofunctor** ou **functor contravariante**  $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  associa a cada  $A \in \text{obj}\mathcal{A}$ , um objecto  $SA \in \text{obj}\mathcal{C}$  e a cada morfismo  $f : A \longrightarrow A'$  em  $\mathcal{A}$  um morfismo  $Sf : SA' \longrightarrow SA$  em  $\mathcal{C}$ , tal que:

(i) Se  $f, g$  são morfismos em  $\mathcal{A}$  para os quais  $g \circ f$  está definida, então

$$S(g \circ f) = (Sf) \circ (Sg);$$

(ii)  $S(1_A) = 1_{SA}$ , para cada  $A \in \text{obj}\mathcal{A}$ .

Existe uma definição de transformação natural para cofuntores  $F$  e  $G$  similar à enunciada anteriormente para funtores, basta inverter ambas as setas verticais do diagrama (1.1).

## 1.3 Homologia e Cohomologia

### 1.3.1 Homologia de Complexos

Seja  $R$  um anel comutativo com unidade.

**Definição 1.30.** (Sequências exactas)

- Uma seqüência  $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$  de morfismos de  $R$ -módulos é **exacta** se  $\text{Nuc } g = \text{Im } f$ .
- Uma seqüência  $\dots \rightarrow M_2 \xrightarrow{f_2} M_1 \xrightarrow{f_1} M_0 \xrightarrow{f_0} M_{-1} \rightarrow \dots$  é **exacta** se, para cada  $n$ ,  $M_{n+2} \xrightarrow{f_{n+2}} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n$  é exacta.

Uma seqüência exacta do tipo

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

é chamada **curta seqüência exacta**.

**Exemplo 1.31.** A seqüência  $0 \longrightarrow M \hookrightarrow N \xrightarrow{g} N/M \longrightarrow 0$ , onde  $g$  é o morfismo de  $R$ -módulos definido por  $g(n) = n + M$ , é exacta.

**Definição 1.32.** Um **complexo de cadeias**  $K$  é uma seqüência de  $R$ -módulos  $K_n (n \in \mathbb{Z})$  e de morfismos  $\partial_n$  (de  $R$ -módulos)

$$\dots \longleftarrow K_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} K_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} K_{n+1} \longleftarrow \dots$$

tais que  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ .

Aos morfismos  $\partial_n$  chamamos “operadores bordos” e aos elementos de  $K_n$  chamamos “**n-cadeias**”.

De  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ , resulta que  $\text{Im } \partial_{n+1} \subset \text{Nuc } \partial_n$ . Mas, em geral, a seqüência **não** é exacta.

A “falha” de exactidão é dada, para cada  $n$ , pelo  $n$ -ésimo  **$R$ -módulo de homologia de  $K$** .

$$H_n K := \text{Nuc } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$$

**Notação:**

- $Z_n K := Nuc \partial_n = \{z \in K_n \mid \partial_n z = 0\}$

Os elementos de  $Z_n K$  são os  $n$ -ciclos

- $B_n K := Im \partial_{n+1} = \{z \in K_n \mid \exists x \in K_{n+1} : z = \partial_{n+1} x\}$

Os elementos de  $B_n K$  são os  $n$ -bordos

**Definição 1.33. Aplicação (ou morfismo) de complexos de cadeias**

$$f : K \longrightarrow K'$$

É uma seqüência  $f_n : K_n \longrightarrow K'_n$  de morfismos de  $R$ -módulos tal que, para cada  $n$ ,  $\partial'_n f_n = f_{n-1} \partial_n$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \longleftarrow & K_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n} & K_n & \xleftarrow{\partial_{n+1}} & K_{n+1} & \longleftarrow \\ & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+1} & \\ \longleftarrow & K'_{n-1} & \xleftarrow{\partial'_n} & K'_n & \xleftarrow{\partial'_{n+1}} & K'_{n+1} & \longleftarrow \end{array}$$

Com esses morfismos obtemos a **categoria dos complexos de cadeias** e o  $n$ -ésimo  $R$ -módulo de homologia é um **functor** da categoria dos complexos de cadeias para a categoria dos  $R$ -módulos, que a cada morfismo  $f : K \longrightarrow L$  de complexos de cadeias associa o morfismo de  $R$ -módulos  $f_* = H_n(f) : H_n(K) \longrightarrow H_n(L)$ ,  $[z] \mapsto [f_n(z)]$ .

### 1.3.2 Homologia Singular

**Definição 1.34.  $q$ -simplexo modelo.**

Para  $q \in \mathbb{N}_0$ , o  $q$ -simplexo modelo, denotado por  $\Delta_q$ , é o seguinte conjunto:

$$\Delta_q := \{x \in \mathbb{R}^{q+1} \mid 0 \leq x_i \leq 1, \sum_{i=0}^q x_i = 1\}.$$

Assim,  $\Delta_0 = \{1\}$ ,  $\Delta_1$  é o segmento de recta em  $\mathbb{R}^2$  que une os pontos  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  e  $\Delta_2$  é um triângulo em  $\mathbb{R}^3$  cujos vértices são os pontos  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ .

Os vértices do simplexo  $\Delta_q$  são  $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_1 = (0, 1, \dots, 0), \dots$ ,  $e_q = (0, \dots, 0, 1)$

**Definição 1.35.**  $\delta_q^j : \Delta_{q-1} \longrightarrow \Delta_q$  ( $j = 0, \dots, q$ ) é a restrição da aplicação linear  $\mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^{q+1}$  definida por:

$$\delta_q^j(e_i) = \begin{cases} e_i, & i < j \\ e_{i+1}, & i \geq j \end{cases}$$

Assim, da definição anterior, vem que:

$$\delta_q^j(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}) = (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{q-1}).$$

Um complexo, chamado **complexo singular de  $X$**  e denotado por  $S_*X = (S_qX)_{q \in \mathbb{Z}}$ , é definido por:

- Para  $q \geq 0$ ,  $S_qX = S_q(X; R) = \bigoplus_{\substack{\sigma: \Delta_q \rightarrow X \\ \text{contínua}}} R \cdot \sigma$ , ou seja,  $S_qX$  é o  $R$ -módulo livre gerado pelas aplicações contínuas  $\sigma : \Delta_q \longrightarrow X$ . Os elementos de  $S_qX$  são designados por “ $q$ -cadeias singulares”;
- Para  $q < 0$ ,  $S_qX = \emptyset$ ;
- O operador bordo do complexo é  $\partial : S_qX \longrightarrow S_{q-1}X$  tal que

$$\partial\sigma = \partial_q(\sigma) = \sum_{j=0}^q (-1)^j \sigma \circ \delta_q^j$$

Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma aplicação contínua e  $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$  um simplexo singular de  $X$ , então a composta  $f\sigma : \Delta_q \rightarrow Y$  é um simplexo singular de  $Y$ . Obtemos assim o homomorfismo  $S_q f : S_q X \rightarrow S_q Y$  definido por  $S_q f(\sigma) = f \circ \sigma$ . A sequência  $S_q f : S_q X \rightarrow S_q Y$  é uma aplicação de cadeias.

Assim,  $S_*$  é um **functor** entre a categoria dos espaços topológicos e a categoria dos complexos de cadeia.

O  $q$ -ésimo  $R$ -módulo de homologia de um espaço topológico  $X$  é:

$$H_q(X) = H_q(X; R) = H_q(S(X; R))$$

O  $q$ -ésimo  $R$ -módulo de homologia é um **functor** (pois é a composta de dois funtores) da categoria dos espaços topológicos para a categoria dos  $R$ -módulos, que a cada morfismo  $f : X \rightarrow Y$  associa o homomorfismo de  $R$ -módulos  $f_* = H(f) = H(Sf) : H(X) \rightarrow H(Y)$ .

### 1.3.3 Cohomologia

Um **complexo de cocadeias**  $V$  é uma sequência de  $R$ -módulos  $V^q$  ( $q \in \mathbb{Z}$ ) e de homomorfismos  $d^q$  (de  $R$ -módulos)

$$\dots \longrightarrow V^q \xrightarrow{d^q} V^{q+1} \xrightarrow{d^{q+1}} V^{q+2} \longrightarrow \dots$$

tais que  $d^2 = 0$ .

Aos homomorfismos  $d^q$  chamamos “**operadores cobordos**” e aos elementos de  $V^q$  chamamos “**cocadeias**”.

Uma **aplicação de cocadeias**  $f : V \rightarrow W$  é uma sequência de aplicações lineares  $f = (f^q : V^q \rightarrow W^q)_{q \in \mathbb{Z}}$  tal que  $df = fd$ .

O  $q$ -ésimo  $R$ -módulo de cohomologia de um complexo de cocadeias é:

$$H^q(V) = Nuc d^q / Im d^{q-1}.$$

Os elementos de  $Nuc d$  são chamados de **cociclos** e os de  $Im d$  de **cobordos**.

Uma aplicação de cocadeias  $f : V \longrightarrow W$  induz uma aplicação de cocadeias  $Ff : HV \longrightarrow HW$ .

A um *complexo de cadeias*  $C$

$$\dots \longrightarrow C^{q+1} \xrightarrow{\partial} C^q \xrightarrow{\partial} C^{q-1} \longrightarrow \dots$$

associamos o *complexo de cocadeias*  $Hom(C, R)$  definido por:

$$Hom(C, R)^q = Hom(C_q, R).$$

O operador cobordo  $d : Hom(C, R)^q \longrightarrow Hom(C, R)^{q+1}$  é definido por

$$d(f) = f \circ \partial.$$

Dada uma aplicação de cadeias  $\varphi : C \longrightarrow D$ , obtemos a aplicação de cocadeias:

$$\begin{aligned} Hom(\varphi, R) : Hom(D, R) &\longrightarrow Hom(C, R) \\ f : D \rightarrow R &\mapsto f \circ \varphi : C \rightarrow R \end{aligned}$$

Obtemos assim um cofunctor entre a categoria dos complexos de cadeias e a categoria dos complexos de cocadeias.

Seja  $X$  um espaço topológico. O complexo de cocadeias singulares de  $X$ ,  $S^*(X)$ , é definido por

$$S^*(X) = S^*(X; R) = Hom(S_*(X); R).$$

Nota-se que esta construção é functorial. O functor  $S^*$  estende-se à categoria dos pares de espaços topológicos:

Para um par  $(X, A)$ , ou seja  $A$  subespaço de  $X$ ,  $S^*(X, A)$  é definido por

$$S^*(X, A) = S^*(X, A; R) = \text{Hom}(S_*(X, A); R).$$

onde  $S_*(X, A)$  é o complexo de cadeias quociente  $S_*(X)/S_*(A)$  (dado por  $(S_*(X)/S_*(A))_q = S_q X/S_q A$ ).

O  $q$ -ésimo módulo de cohomologia singular de  $X$  (respectivamente,  $(X, A)$ ) é definido por  $H^q(X) = H^q(X; R) = H^q(S^*(X); R)$  (respectivamente  $H^q(X, A) = H^q(X, A; R) = H^q(S^*(X, A); R)$ ).

As demonstrações dos seguintes teoremas podem ser consultadas em [3] na página 240.

**Teorema 1.36.** *Se  $f \simeq g$ , então, para cada  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $H^q(f) = H^q(g)$ .*

**Teorema 1.37.** *Para cada par  $(X, A)$ , existe uma longa sequência exacta longa em cohomologia:*

$$\dots \longrightarrow H^q(X, A) \longrightarrow H^q(X) \xrightarrow{i^*} H^q(A) \longrightarrow H^{q+1}(X, A) \longrightarrow \dots$$

### 1.3.4 Produto Cup

Um  $R$ -módulo graduado  $M$  é uma família de  $R$ -módulos  $(M^q)_{q \in \mathbb{Z}}$ . O produto tensorial de  $R$ -módulos graduados  $C$  e  $D$  é o  $R$ -módulo graduado  $C \otimes D$  dado por  $(C \otimes D)^n = \bigoplus_{p+q=n} C^p \otimes D^q$ .

**Definição 1.38.** *Uma R-álgebra graduada comutativa é um R-módulo graduado  $A = (A^q)_{q \in \mathbb{Z}}$  munido de uma multiplicação*

$$\begin{aligned} \mu : A \otimes A &\longrightarrow A \\ a \otimes b &\longrightarrow a.b \end{aligned}$$

(isto é, uma família de homomorfismos  $\mu^q : (A \otimes A)^q = \bigoplus_{i+j=q} A^i \otimes A^j \longrightarrow A^q$ ) e uma unidade  $1 \in A^0$  tais que:

- 1) A multiplicação é associativa, isto é,  $(a.b).c = a.(b.c)$ ;
- 2) A multiplicação é unitária, isto é,  $1.a = a = a.1$ .
- 3) A multiplicação é comutativa (no sentido graduado), isto é,  $a.b = (-1)^{|a| \cdot |b|} b.a$ ;

Um morfismo de álgebras  $f : A \longrightarrow B$  é um morfismo de R-módulos graduados (isto é, é uma família de homomorfismos  $f^q : A^q \longrightarrow B^q$ ) tal que  $f(a.b) = f(a).f(b)$  e  $f(1) = 1$ . Com estes morfismos, obtemos a categoria das álgebras graduadas comutativas.

A cohomologia de um espaço topológico é uma álgebra graduada comutativa:

- O seu produto, chamado de **produto cup** e denotado por  $\cup$ , é definido por:

$$\begin{aligned} \cup : H^*(X) \otimes H^*(X) &\longrightarrow H^*(X) \\ [\alpha] \otimes [\beta] &\longrightarrow [\alpha] \cup [\beta] = [\alpha \cup \beta] \end{aligned}$$

em que, para cocadeias  $\alpha \in S^p(X)$  e  $\beta \in S^q(X)$ , a cocadeia  $\alpha \cup \beta \in S^{p+q}(X) = \text{Hom}(S_{p+q}(X); R)$  é dada por:

$$\alpha \cup \beta(\sigma) = \alpha(\sigma \circ \langle e_0, \dots, e_p \rangle) \cdot \beta(\sigma \circ \langle e_p, \dots, e_{p+q} \rangle)$$

onde

$$\begin{array}{ccc} \langle e_0, \dots, e_p \rangle : \Delta^p &\longrightarrow \Delta^{p+q} & \langle e_p, \dots, e_{p+q} \rangle : \Delta^q &\longrightarrow \Delta^{p+q} \\ e_i &\mapsto e_i & e_i &\mapsto e_{i+p} \end{array}$$

- 1 é a classe de cohomologia de cociclo  $z : S_0X \longrightarrow R$ ,  $z(\sigma) = 1$ .

A cohomologia é um functor dos espaços topológicos para as álgebras graduadas comutativas.

Nota-se que existe uma versão relativa do produto cup para espaços topológicos. Sendo  $A$  e  $B$  subespaços abertos de  $X$ ,

$$\cup : H^*(X; A) \otimes H^*(X; B) \longrightarrow H^*(X; A \cup B).$$

Sejam  $A, B$  duas álgebras graduadas comutativas. O produto tensorial  $A \otimes B$  é ainda uma álgebra comutativa cujo produto é  $(a \otimes b).(a' \otimes b') = (-1)^{|b| \cdot |a'|} aa' \otimes bb'$  e cuja unidade é  $1_{A \otimes B} = 1_A \otimes 1_B$ .

Sejam  $X, Y$  dois espaços topológicos e sejam  $pr_X : X \times Y \rightarrow X$  e  $pr_Y : X \times Y \rightarrow Y$  as projecções. Passando à cohomologia, obtemos os morfismos  $pr_X^* : H^*X \rightarrow H^*(X \times Y)$  e  $pr_Y^* : H^*Y \rightarrow H^*(X \times Y)$ . Consideremos o morfismo de álgebras:

$$\begin{aligned} \times : H^*X \otimes H^*Y &\longrightarrow H^*(X \times Y) \\ \alpha \otimes \beta &\longrightarrow \alpha \times \beta := pr_X^* \alpha \cup pr_Y^* \beta \end{aligned}$$

**(produto exterior em cohomologia)**

Temos que  $\Delta^* \circ \times = \cup$  em que  $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ ,  $x \mapsto (x, x)$ , é a diagonal [1, 8.14].

Se  $X, Y$  são CW-complexos de tipo finito e  $R$  é um corpo, então o produto exterior  $\times : H^*X \otimes H^*Y \longrightarrow H^*(X \times Y)$  é um **isomorfismo de álgebras graduadas comutativas**, chamado de **isomorfismo de Künneth** [1, 8.18].

## 1.4 Categoria de Lusternik-Schnirelman

**Definição 1.39.** (*Categoria de Lusternik-Schnirelman*) A Categoria de Lusternik-Schnirelman ou de L.S. de um espaço  $X$  é o menor inteiro  $n$  tal que existe uma cobertura aberta,  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$  de  $X$  com cada  $\mathcal{U}_i$  contractível a um ponto no espaço  $X$ . Denotamos por  $\text{cat}(X)$ .

Se tal inteiro não existir, escrevemos  $\text{cat}(X) = \infty$ .

Sejam  $X$  um espaço topológico e  $\mathcal{U}$  um subespaço aberto de  $X$ . Dizemos que  $\mathcal{U}$  é **categórico** em  $X$  se é contractível em  $X$ . Uma cobertura aberta de  $X$  formada por abertos categóricos diz-se uma **cobertura categórica**. Assim a categoria de Lusternik-Schnirelman de um espaço  $X$  é o menor inteiro  $n$ , tal que existe uma cobertura categórica com  $n$  abertos de  $X$ .

**Nota 1.40.** Alguns autores consideram, na definição anterior, que  $\text{cat}(X) = n - 1$ . A nossa escolha permitirá uma apresentação mais simplificada dos resultados estudados no próximo capítulo.

**Teorema 1.41.** [6, 5.1.30] *Seja  $X$  um CW-complexo conexo por arcos com um número finito de células. Temos que*

$$\text{cat}(X) \leq \dim(X) + 1.$$

Vejamos agora um teorema para a categoria do produto de espaços, cuja demonstração pode ser consultada em [9], teorema 1.37 da página 18:

**Teorema 1.42.** *Suponhamos que  $X$  e  $Y$  são CW-complexos de tipo finito conexos por arcos. Então*

$$\text{cat}(X \times Y) \leq \text{cat}(X) + \text{cat}(Y) - 1.$$

**Exemplo 1.43.** *A categoria de LS de um ponto é igual a um.*

**Exemplo 1.44.** *A categoria de LS de esferas de dimensão  $n$  é igual a 2.*

**Exemplo 1.45.** *A categoria de LS dos planos projectivos de dimensão  $n$ , reais ou complexos, é igual a  $n + 1$ . Podemos consultar a dedução destes resultados em [9], exemplo 1.51 da página 23 e exemplo 1.6 da página 4 para  $\mathbb{C}P^n$ , e exemplo 1.8 página 4 para  $\mathbb{R}P^n$ .*

# Capítulo 2

## Complexidade Topológica

Neste capítulo, iremos iniciar o estudo do tema da dissertação, pelo que, numa primeira secção serão apresentadas a definição de complexidade topológica e algumas propriedades. Na secção seguinte, iremos demonstrar teoremas que nos permitem determinar limites superiores e limites inferiores para o referido invariante.

No trabalho são utilizadas as seguintes notações:

- $i_{\mathcal{U}}$  representa a inclusão de  $\mathcal{U}$ ;
- $\{A_0\}$  representa uma função constante.

### 2.1 Definição. Propriedades.

**Definição 2.1. Complexidade Topológica**

Seja  $X$  um espaço topológico conexo por arcos. Define-se **complexidade topológica de  $X$** , e denota-se  $TC(X)$ , como sendo o menor número  $k$  tal

que o produto cartesiano  $X \times X$  admite uma cobertura de  $k$  conjuntos abertos

$$X \times X = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \dots \cup \mathcal{U}_k$$

e tal que para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$  existe uma aplicação contínua  $s_i : \mathcal{U}_i \rightarrow X^I$ ,  $ev \circ s_i = i_{\mathcal{U}_i}$ .

Se não existir tal  $k$ , dizemos que  $TC(X) = \infty$ .

Da definição anterior, facilmente se deduz que a complexidade topológica de um espaço  $X$  é igual a 1 se e só se existe  $s : X \times X \rightarrow X^I$  contínua tal que  $ev \circ s = id_{X \times X}$ . Nestes casos, a planificação de movimentos em  $X$  é contínua, mas infelizmente esta planificação contínua só existe em casos muito simples. Vejamos o que nos diz o seguinte teorema:

**Teorema 2.2.** *Seja  $X$  um espaço topológico não vazio.  $X$  é contractível se e só se  $TC(X) = 1$ .*

**Demonstração:**  $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $TC(X) = 1$ , ou seja, existe uma secção contínua  $s : X \times X \rightarrow X^I$  de  $ev$ .

Vamos provar que  $X$  é um espaço contractível.

Seja  $A_0 \in X$  fixo.

Consideremos a aplicação  $h_t : X \rightarrow X$  definida por  $h_t(B) = s(A_0, B)(t)$ , para qualquer  $B \in X$  e  $t \in [0, 1]$ .

Temos que:

- $h_0(B) = s(A_0, B)(0) = A_0$ , logo  $h_0$  é uma aplicação constante;
- $h_1(B) = s(A_0, B)(1) = B$ , logo  $h_1$  é a identidade em  $X$ .

Concluimos assim que  $id_X \simeq \{A_0\}$ , ou seja,  $X$  é contractível.

$\Rightarrow$ ) Suponhamos agora que  $X$  é contractível, ou seja, existem uma homotopia  $h_t : X \rightarrow X$  e um ponto  $A_0 \in X$  tais que  $h_0(A) = A$  e  $h_1(A) = A_0$ , para qualquer  $A \in X$ .

Vamos provar que existe uma secção  $s : X \times X \rightarrow X^I$  de  $ev$ .

Seja  $(A, B) \in X \times X$ .

Consideremos a aplicação contínua

$$\begin{aligned} s : X \times X &\longrightarrow X^I \\ (A, B) &\longrightarrow h(A).h(B)^{-1} \end{aligned}$$

Temos que  $ev \circ s = id_{X \times X}$ , pois

$$\begin{aligned} ev \circ s(A, B) &= (h(A).h(B)^{-1}(0), h(A).h(B)^{-1}(1)) \\ &= (h(A)(0), h(B)^{-1}(1)) \\ &= (A, h(B)(0)) \\ &= (A, B) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A complexidade topológica é um invariante topológico, como o comprova o seguinte teorema:

**Teorema 2.3.**  *$TC(X)$  depende somente do tipo de homotopia de  $X$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que  $X$  domina  $Y$ , isto é, existem aplicações contínuas  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$  tais que  $f \circ g \simeq id_Y$ .

Vamos provar que  $TC(Y) \leq TC(X)$ .

Suponhamos que  $\mathcal{U} \subset X \times X$  é um aberto e que existe uma aplicação contínua  $s : \mathcal{U} \rightarrow X^I$  tal que  $ev^X \circ s = id_{\mathcal{U}}$ .

Seja  $\mathcal{V} = (g \times g)^{-1}(\mathcal{U}) \subset Y \times Y$ .

Temos que  $\mathcal{V}$  é um aberto, pois é a imagem inversa de um aberto por uma função contínua.

Vamos mostrar que existe uma aplicação contínua  $\sigma : \mathcal{V} \longrightarrow Y^I$  tal que  $ev^Y \circ \sigma = i_{\mathcal{V}}$ .

Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y^I & \xrightarrow{g^I} & X^I & \xrightarrow{f^I} & Y^I & & (2.1) \\
 & & \downarrow ev^Y & & \downarrow ev^X & & \downarrow ev^Y & & \\
 & & Y \times Y & \xrightarrow{s} & X \times X & \xrightarrow{f \times f} & Y \times Y & & \\
 & \nearrow i_{\mathcal{V}} & & & & & & & \\
 \mathcal{V} = (g \times g)^{-1}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{(g \times g)|_{\mathcal{V}}} & \mathcal{U} & & & & & & 
 \end{array}$$

Temos que o diagrama (2.1) é comutativo pois  $ev$  é uma aplicação natural.

Queremos provar que  $ev^Y \circ (f^I \circ s \circ (g \times g)|_{\mathcal{V}}) \simeq i_{\mathcal{V}}$ .

Ora,

$$\begin{aligned}
 ev^Y \circ f^I \circ s \circ (g \times g)|_{\mathcal{V}} &= (f \times f) \circ ev^X \circ s \circ (g \times g)|_{\mathcal{V}} \\
 &= (f \times f) \circ i_{\mathcal{U}} \circ (g \times g)|_{\mathcal{V}} \\
 &= (f \times f) \circ (g \times g) \circ i_{\mathcal{V}} \\
 &= (f \circ g \times f \circ g) \circ i_{\mathcal{V}} \\
 &\simeq (id_Y \times id_Y) \circ i_{\mathcal{V}}, \text{ uma vez que } f \circ g \simeq id_Y \\
 &= i_{\mathcal{V}}
 \end{aligned}$$

Assim, temos que  $ev^Y \circ (f^I \circ s \circ (g \times g)|_{\mathcal{V}}) \simeq i_{\mathcal{V}}$ . Como  $ev^Y : Y^I \longrightarrow Y \times Y$  é uma fibração, podemos concluir que existe uma aplicação contínua  $\sigma : \mathcal{V} \longrightarrow Y^I$  tal que  $ev^Y \circ \sigma = i_{\mathcal{V}}$ .

Deste modo, para cada  $\mathcal{U} \subset X \times X$  aberto tal que existe uma aplicação contínua  $s : \mathcal{U} \longrightarrow X^I$  com  $ev \circ s = i_{\mathcal{U}}$ , existe um aberto  $\mathcal{V} \subset Y \times Y$  e existe uma aplicação contínua  $\sigma : \mathcal{V} \longrightarrow Y^I$  tal que  $ev^Y \circ \sigma = i_{\mathcal{V}}$ .

Concluimos assim que  $TC(Y) \leq TC(X)$  e, conseqüentemente,  $TC(X)$  depende somente do tipo de homotopia de  $X$ . ■

## 2.2 Limites Inferiores e Superiores para $TC(X)$

**Teorema 2.4.** *Se  $X$  é um CW-complexo de tipo finito conexo por arcos, então*

$$cat(X) \leq TC(X) \leq 2cat(X) - 1$$

**Demonstração:**

- Vamos começar por provar que  $TC(X) \geq cat(X)$ .

Suponhamos que  $TC(X) = k$ . Então existe uma cobertura aberta  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_k$  de  $X \times X$  tal que, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , existe uma aplicação contínua  $s_i : \mathcal{U}_i \rightarrow X^I$  com  $ev \circ s_i = i_{\mathcal{U}_i}$ .

Seja  $A_0 \in X$  um ponto fixo. Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow X \times X \\ x &\longmapsto (A_0, x) \end{aligned}$$

Temos que:

- $f$  é uma aplicação contínua e  $\mathcal{U}_i$  é um aberto de  $X \times X$ . Logo,  $f^{-1}(\mathcal{U}_i)$  é um aberto de  $X$  (pois é a imagem inversa de um aberto por uma aplicação contínua).
- $f^{-1}(\mathcal{U}_i)$  é contractível em  $X$ , pois  $f^{-1}(\mathcal{U}_i) \xrightarrow{f} \mathcal{U}_i \xrightarrow{s} X^I$  é uma homotopia entre a aplicação constante  $x \mapsto A_0$  e a inclusão  $f^{-1}(\mathcal{U}_i) \hookrightarrow X$ . Pois,  $ev \circ s \circ f(x) = ev \circ s(A_0, x) = (A_0, x)$ .

Logo os conjuntos  $f^{-1}(\mathcal{U}_i)$  formam uma cobertura categórica de  $X$ . Portanto,  $TC(X) \geq \text{cat}(X)$ .

- Vejamos agora que  $TC(X) \leq 2\text{cat}(X) - 1$ .

Vamos começar por verificar que  $TC(X) \leq \text{cat}(X \times X)$ . Assim, suponhamos que  $\text{cat}(X \times X) = n$ . Então existe uma cobertura aberta,  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ , de  $X \times X$  tal que, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathcal{U}_i$  é contractível a um ponto no espaço  $X \times X$ . Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & * & \longrightarrow X^I \\
 & \nearrow & \searrow \\
 \mathcal{U}_i & \xrightarrow{\quad} & X \times X \\
 & & \downarrow ev \\
 & & X^I
 \end{array}$$

$\cong$

Sendo,  $ev$  uma fibração, vem que existe uma aplicação  $s_i : \mathcal{U}_i \longrightarrow X^I$  tal que  $ev \circ s_i = i_{\mathcal{U}_i}$ . Concluimos assim, que  $TC(X) \leq \text{cat}(X \times X)$ .

Assim pelo Teorema 1.42 vem que  $TC(X) \leq \text{cat}(X) + \text{cat}(X) - 1$ , ou seja,  $TC(X) \leq 2\text{cat}(X) - 1$ . ■

**Teorema 2.5.** *Para qualquer CW-complexo  $X$  finito e conexo por arcos, temos:*

$$TC(X) \leq 2 \cdot \dim X + 1 \tag{2.2}$$

**Demonstração:** Pelo Teorema anterior, temos que  $TC(X) \leq 2 \cdot \text{cat}(X) - 1$

e pelo teorema 1.41 sabemos que  $cat(X) \leq dim(X) + 1$ . Logo,

$$\begin{aligned} TC(X) &\leq 2 \cdot cat(X) - 1 \\ &\leq 2 \cdot (dim(X) + 1) - 1 \\ &\leq 2dim(X) + 1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Para os resultados seguintes, será considerado um corpo  $K$ .

**Definição 2.6.** O núcleo do produto cup será designado por ideal dos divisores de zero de  $H^*(X; K)$ . A nilpotência do ideal é o maior  $n$  tal que  $a_1 \cdot a_2 \dots a_n \neq 0$ , sendo  $a_1, a_2, \dots, a_n \in Nuc\cup$ .

**Teorema 2.7.** Seja  $X$  um CW-complexo de tipo finito. A complexidade topológica  $TC(X)$  é maior que a nilpotência do ideal dos divisores de zero de  $H^*(X; K)$ .

**Demonstração:** Suponhamos que  $TC(X) = n$ . Então existem  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_n \subset X \times X$  tais que, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , existe uma aplicação contínua  $s_i : \mathcal{U}_i \rightarrow X^I$  e  $ev \circ s_i = i_{\mathcal{U}_i}$ . Isto é, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & X^I \\ & \nearrow s_i & \downarrow ev \\ U_i & \xrightarrow{i_{U_i}} & X \times X \end{array}$$

Vamos mostrar que a nilpotência de  $Nuc\cup$  é menor do que  $n$ .

Consideremos o seguinte diagrama comutativo,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X^I \\ & \searrow \Delta & \downarrow ev \\ & & X \times X \end{array}$$

onde  $\alpha$  associa a cada  $x$  de  $X$  o caminho constante  $[0, 1] \rightarrow X$  nesse ponto, e  $\Delta$  é a aplicação diagonal, isto é,  $\Delta(x) = (x, x)$ .

Temos que  $\alpha$  é uma equivalência de homotopia [3, cap 2, secção 8, n.º 9].

Pelo diagrama anterior e pelo isomorfismo de Künneth, obtemos o seguinte diagrama comutativo de álgebras graduadas comutativas:

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(X) \otimes H^*(X) & \xrightarrow{\cong} & H^*(X \times X) \\
 \cup \downarrow & \swarrow \Delta^* & \downarrow ev^* \\
 H^*(X) & \xleftarrow[\alpha^*]{\cong} & H^*(X^I)
 \end{array}$$

Temos então que  $Nuc \cup \cong Nuc ev^*$  e assim basta ver que  $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_n = 0$ ,  $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in Nuc ev^*$ .

Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , temos a seguinte longa sequência exacta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & H^q(X^I) & & & \\
 & & & \uparrow ev^* & & & \\
 & & s_i^* & & & & \\
 & & \swarrow & & & & \\
 \dots & H^{q+1}(X \times X; \mathcal{U}_i) & \longleftarrow & H^q(\mathcal{U}_i) & \longleftarrow & H^q(X \times X) & \longleftarrow & H^q(X \times X; \mathcal{U}_i) & \longleftarrow & \dots \\
 & & & \downarrow i_{\mathcal{U}_i}^* & & \uparrow f_i^* & & & & \\
 & & & Nuc(ev^*) & & & & & & 
 \end{array}$$

Sejam  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in Nuc(ev^*)$ . Como a sequência é exacta vem que existem  $\beta_i \in H^*(X \times X; \mathcal{U}_i)$  tais que  $f_i^*(\beta_i) = \alpha_i$ .

Através do seguinte diagrama comutativo, facilmente se verifica que  $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_n = 0$ :

$$\begin{array}{ccc}
H^*(X \times X; \mathcal{U}_1) \otimes \dots \otimes H^*(X \times X; \mathcal{U}_n) & \xrightarrow{\cup} & H^*(X \times X; \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n) \\
\downarrow f_1^* \otimes \dots \otimes f_n^* & & \downarrow \\
H^*(X \times X) \otimes \dots \otimes H^*(X \times X) & \xrightarrow{\cup} & H^*(X \times X)
\end{array}$$

Pois, por hipótese,  $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n = X \times X$ , logo:

$$H^*(X \times X, \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n) = H^*(X \times X, X \times X) = 0$$

Assim,  $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_n = f_1^*(\beta_1) \cup f_2^*(\beta_2) \cup \dots \cup f_n^*(\beta_n) = 0$ . ■

# Capítulo 3

## Primeiros Exemplos

Neste capítulo, iremos calcular a complexidade topológica das esferas  $S^n$  e dos espaços projectivos.

### 3.1 Esferas $S^n$

**Teorema 3.1.** *A Complexidade topológica de uma esfera de dimensão  $n$  é dada por*

$$TC(S^n) = \begin{cases} 2, & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 3, & \text{se } n \text{ par.} \end{cases}$$

**Demonstração:** Numa primeira parte, iremos mostrar que  $TC(S^n) \geq 2$  se  $n$  é ímpar e  $TC(S^n) \geq 3$  se  $n$  é par, utilizando o teorema 2.7.

Consideremos o produto cup  $\cup : H^*(S^n; \mathbb{Q}) \otimes H^*(S^n; \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(S^n; \mathbb{Q})$ .  
Sejam  $u \in H^n(S^n; \mathbb{Q})$  a classe fundamental e  $1 \in H^0(S^n; \mathbb{Q})$  a unidade.

Temos que  $a = 1 \otimes u - u \otimes 1 \in H^*(S^n; \mathbb{Q}) \otimes H^*(S^n; \mathbb{Q})$  e  $b = u \otimes u$  são divisores de zero, pois  $1 \cup u - u \cup 1 = 0$  e  $u \cup u = 0$ .

Observa-se que  $a$  e  $b$  são os geradores de  $Nuc \cup$ . Podemos então determinar a nilpotência de  $H^*(S^n; \mathbb{Q})$ .

Sendo assim, temos que:

- $b^2 = (u \otimes u).(u \otimes u)$   
 $= (-1)^{n.n}u^2 \otimes u^2$   
 $= 0.$
- $a.b = (1 \otimes u - u \otimes 1).(u \otimes u)$   
 $= 1 \otimes u.u \otimes u - u \otimes 1.u \otimes u$   
 $= (-1)^{n.n}u \otimes u^2 - (-1)^0u^2 \otimes u$   
 $= 0 - 0 = 0.$
- $a^2 = (1 \otimes u - u \otimes 1).(1 \otimes u - u \otimes 1)$   
 $= 1 \otimes u.1 \otimes u - 1 \otimes u.u \otimes 1 - u \otimes 1.1 \otimes u + u \otimes 1.u \otimes 1$   
 $= (-1)^01 \otimes u^2 - (-1)^{n.n}u \otimes u - (-1)^0u \otimes u + (-1)^0u^2 \otimes 1$   
 $= 1 \otimes u^2 - (-1)^n u \otimes u - u \otimes u + u^2 \otimes 1$   
 $= 1 \otimes u^2 + (-1)^{n-1}u \otimes u - u \otimes u + u^2 \otimes 1$   
 $= (-1)^{n-1}u \otimes u - u \otimes u$   
 $= ((-1)^{n-1} - 1)u \otimes u.$

Temos que:

$$a^2 = \begin{cases} -2b, & \text{se } n \text{ par} \\ 0, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Concluimos assim que se  $n$  é par a nilpotência é 2 e se  $n$  é ímpar então a nilpotência é 1. Portanto, pelo teorema 2.7, vem que:

- $TC(S^n) \geq 3$  se  $n$  é par;
- $TC(S^n) \geq 2$  se  $n$  é ímpar.

Consideremos agora as esferas de dimensão  $n$  com  $n$  ímpar. Vamos provar que  $TC(S^n) \leq 2$ .

Seja  $\mathcal{U}_1 \subset S^n \times S^n$  tal que  $\mathcal{U}_1 = \{(A, B) \mid A \neq -B\}$ . Temos que  $\mathcal{U}_1$  é aberto. Consideremos o caminho mais curto  $\alpha_{A,B} : I \rightarrow S^n$  percorrido a velocidade constante tal que  $\alpha_{A,B}(0) = A$  e  $\alpha_{A,B}(1) = B$ . Podemos assim construir a seguinte aplicação contínua:

$$\begin{aligned} s_1 : \mathcal{U}_1 &\longrightarrow (S^n)^I \\ (A, B) &\longmapsto \alpha_{A,B} \end{aligned}$$

Temos que  $ev \circ s_1 = i_{\mathcal{U}_1}$ .

Seja  $\mathcal{U}_2 \subset S^n \times S^n$  tal que  $\mathcal{U}_2 = \{(A, B) \mid A \neq B\}$ . Temos que  $\mathcal{U}_2$  é aberto e  $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = S^n \times S^n$ .

Consideremos o caminho contínuo  $\gamma_{A,B} : I \rightarrow S^n$  definido por

$$\gamma_{A,B}(t) = \begin{cases} \alpha_{A,-B}(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta_{-B,B}(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

tal que:

- $\alpha_{A,-B}$  é o caminho acima definido;
- $\beta_{-B,B}$  é o caminho que liga  $-B$  a  $B$  ao longo do arco esférico  $-\cos(\pi t).B + \sin(\pi t).v(B)$ , sendo  $v$  um campo de vectores tangentes unitários. (Note-se que este campo de vectores existe uma vez que  $n$  é ímpar.)

Deste modo, podemos construir a aplicação contínua

$$\begin{aligned} s_2 : \mathcal{U}_2 &\longrightarrow (S^n)^I \\ (A, B) &\longmapsto \gamma_{A,B} \end{aligned}$$

Temos que  $ev \circ s_2 = i_{\mathcal{U}_2}$ .

Provamos assim que  $TC(S^n) \leq 2$  se  $n$  é ímpar.

Concluimos que, se  $n$  é ímpar,  $TC(S^n) = 2$ .

Falta agora mostrar que  $TC(S^n) = 3$  se  $n$  é par. Consideremos então  $n$  par e mostremos que  $TC(S^n) \leq 3$ .

Pelo Teorema 2.4, temos que

$$TC(S^n) \leq 2cat(S^n) - 1.$$

Temos que  $cat(S^n) = 2$ , logo

$$TC(S^n) \leq 3.$$

Conclui-se assim, que, se  $n$  é par,  $TC(S^n) = 3$ . ■

## 3.2 Planos Projectivos

### 3.2.1 Planos Projectivos Complexos $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

**Teorema 3.2.** *A complexidade topológica do plano projectivo complexo de dimensão  $n$  é dada por*

$$TC(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = 2n + 1$$

**Demonstração:** Numa primeira parte, iremos mostrar que  $TC(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \geq 2n + 1$ .

Consideremos o produto  $\cup : H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Q}) \otimes H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Q})$ .  
Sejam  $u \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Q})$  o gerador e  $1 \in H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Q})$  a unidade. Temos que

$a = 1 \otimes u - u \otimes 1 \in Nuc \cup$ . Assim,

$$\begin{aligned}
a^{2n} &= (1 \otimes u - u \otimes 1)^{2n} \\
&= \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} (-1)^p u^p \otimes u^{2n-p} \\
&= (-1)^0 \binom{2n}{0} 1 \otimes u^{2n} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{2n}{n-1} u^{n-1} \otimes u^{n+1} + (-1)^n \binom{2n}{n} u^n \otimes u^n + \\
&\quad + (-1)^{n+1} \binom{2n}{n+1} u^{n+1} \otimes u^{n-1} + \dots + (-1)^{2n} \binom{2n}{2n} u^{2n} \otimes 1 \\
&= 0 + \dots + 0 + (-1)^n \binom{2n}{n} u^n \otimes u^n + 0 + \dots + 0 \\
&= (-1)^n \binom{2n}{n} u^n \otimes u^n \neq 0
\end{aligned}$$

Pelo teorema 2.7 concluímos que  $TC(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \geq 2n + 1$ .

Por outro lado, pelo teorema 2.4, temos que  $TC(X) \leq 2cat(X) - 1$ . Como  $cat(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = n + 1$ , vem que  $TC(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \leq 2(n + 1) - 1$ , ou seja,  $TC(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \leq 2n + 1$ .

Deste modo, vem que  $TC(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = 2n + 1$ . ■

### 3.2.2 Planos Projectivos Reais $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$

**Teorema 3.3.** *Para qualquer  $n$  temos que*

$$n + 1 \leq TC(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \leq 2n + 1.$$

**Demonstração:** Temos que a categoria de Lusternik - Schnirelman de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  é igual a  $n + 1$ . Assim, aplicando o teorema 2.4, a prova fica completa. ■

**Nota 3.4.** O enquadramento apresentado no teorema anterior não é o melhor, pois Michael Farber, Serge Tabachnikov e Sergey Yuzvinsky determinaram  $2n$  como limite superior da complexidade topológica de qualquer

---

plano projectivo real de dimensão  $n$  (em [8]), utilizando imersões. Neste mesmo artigo, as técnicas de cálculo utilizadas permitiram ao autor determinar  $TC(\mathbb{R}\mathbb{P}^n)$  até  $n = 23$ .

# Capítulo 4

## Complexidade Topológica do Produto de Espaços

### 4.1 Desigualdade do Produto

**Teorema 4.1.** *Sejam  $X$  e  $Y$  CW-complexos conexos por arcos e de tipo finito. Temos que*

$$TC(X \times Y) \leq TC(X) + TC(Y) - 1.$$

**Demonstração:** Suponhamos que  $TC(X) = n$  e  $TC(Y) = m$ . Então existe uma cobertura aberta de  $X \times X$ ,  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ , tal que, para cada  $i = 1, \dots, n$ , existe uma secção  $s_i : \mathcal{U}_i \rightarrow X^I$  de  $ev$ . Do mesmo modo, existe uma cobertura aberta de  $Y \times Y$ ,  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_m$ , tal que, para cada  $j = 1, \dots, m$  existe uma secção  $\sigma_j : \mathcal{V}_j \rightarrow Y^I$  de  $ev$ . Consideremos  $f_i : X \times X \rightarrow [0, 1]$ , com  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $g_j : Y \times Y \rightarrow [0, 1]$ , com  $j \in \{1, \dots, m\}$  partições de

unidade para  $\{\mathcal{U}_i\}$  e  $\{\mathcal{V}_i\}$ , respectivamente. Por hipótese  $X \times X$  e  $Y \times Y$  são CW-complexos, logo estas partições de unidade existem.

Para qualquer par de conjuntos não vazios  $S \subset \{1, \dots, n\}$  e  $T \subset \{1, \dots, m\}$ , seja  $W(S, T) \subset (X \times Y) \times (X \times Y)$  tal que

$$W(S, T) = \{(A, B, C, D) \mid f_i(A, C) \cdot g_j(B, D) > 0, \forall (i, j) \in S \times T \wedge \\ \wedge f_i(A, C) \cdot g_j(B, D) > f_{i'}(A, C) \cdot g_{j'}(B, D), \forall (i, j) \in S \times T, \forall (i', j') \notin S \times T\}$$

Temos que:

(a) Cada conjunto  $W(S, T)$  é aberto.

Sejam  $(i, j) \in S \times T$  e  $(i', j') \notin S \times T$ . Consideremos as seguintes aplicações contínuas  $G_{i,j}, H_{i,j,i',j'} : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$G_{i,j}(A, B, C, D) = f_i(A, C) \cdot g_j(B, D)$$

e

$$H_{i,j,i',j'}(A, B, C, D) = f_i(A, C) \cdot g_j(B, D) - f_{i'}(A, C) \cdot g_{j'}(B, D).$$

Temos que

$$W(S, T) = \bigcap_{(i,j) \in S \times T} G_{i,j}^{-1}(\mathbb{R}^+) \bigcap_{\substack{(i,j) \in S \times T \\ (i',j') \notin S \times T}} H_{i,j,i',j'}^{-1}(\mathbb{R}^+).$$

Sendo  $G_{i,j}^{-1}(\mathbb{R}^+)$  e  $H_{i,j,i',j'}^{-1}(\mathbb{R}^+)$  abertos (pois são imagens inversas de um aberto por aplicações contínuas), vem que  $W(S, T)$  também é aberto.

(b)  $W(S, T)$  e  $W(S', T')$  são disjuntos se  $S \times T \not\subset S' \times T'$  e  $S' \times T' \not\subset S \times T$ .

Suponhamos que  $S \times T \not\subset S' \times T'$  e  $S' \times T' \not\subset S \times T$  (\*) e que existe  $(A, B, C, D) \in W(S, T) \cap W(S', T')$ .

De (\*) vem que existe  $(i, j) \in (S \times T) \setminus (S' \times T')$  e  $(i', j') \in (S' \times T') \setminus (S \times T)$

Como  $(A, B, C, D) \in W(S, T)$ , temos

$$f_i(A, C).g_j(B, D) > f_{i'}(A, C).g_{j'}(B, D),$$

Como  $(A, B, C, D) \in W(S', T')$ , temos que

$$f_{i'}(A, C).g_{j'}(B, D) > f_i(A, C).g_j(B, D).$$

Logo  $f_i(A, C).g_j(B, D) > f_i(A, C).g_j(B, D)$ , o que é absurdo.

Concluimos deste modo que  $W(S, T)$  e  $W(S', T')$  são disjuntos.

(c) Se  $(i, j) \in S \times T$ , então  $W(S, T)$  está contido em  $\mathcal{U}_i \times \mathcal{V}_j$ . Assim, existe uma secção de  $ev$  para cada  $W(S, T)$ .

A primeira parte é imediata, pois para cada  $(A, B, C, D) \in W(S, T)$ , temos  $(A, C, B, D) \in \mathcal{U}_i \times \mathcal{V}_j$ . Consideremos a aplicação contínua  $w : W(S, T) \longrightarrow (X \times Y)^I = X^I \times Y^I$ , tal que  $w(A, B, C, D) = (s_i(A, C), \sigma_j(B, D))$ . Temos que:

- $w(A, B, C, D)(0) = (s_i(A, C)(0), \sigma_j(B, D)(0)) = (A, B)$
- $w(A, B, C, D)(1) = (s_i(A, C)(1), \sigma_j(B, D)(1)) = (C, D)$

Logo,  $ev \circ w(A, B, C, D) = (A, B, C, D)$ .

(d) Os conjuntos  $W(S, T)$  formam uma cobertura de  $(X \times Y) \times (X \times Y)$ .

Suponhamos que  $(A, B, C, D) \in (X \times Y) \times (X \times Y)$ . Seja  $S$  o conjunto dos índices  $i \in \{1, \dots, n\}$  tais que  $f_i(A, C) = \max\{f_k(A, C) \mid k = 1, \dots, n\}$ . Do mesmo modo, consideremos  $T$  o conjunto dos índices  $j \in \{1, \dots, m\}$ , tais que  $g_j(B, D) = \max\{g_l(B, D) \mid l = 1, \dots, m\}$ . Então  $(A, B, C, D) \in W(S, T)$ .

Vamos agora mostrar que  $TC(X \times Y) \leq TC(X) + TC(Y) - 1$ .

Seja  $W_k \subset (X \times Y) \times (X \times Y)$  a reunião dos conjuntos  $W(S, T)$  tais que  $|S| + |T| = k$ . Temos que  $k = 2, 3, \dots, n + m$ . Os conjuntos  $W_2, \dots, W_{n+m}$  formam uma cobertura aberta de  $(X \times Y) \times (X \times Y)$ . Se  $|S| + |T| = |S'| + |T'| = k$ , então os conjuntos correspondentes  $W(S, T)$  e  $W(S', T')$  ou são coincidentes (se  $S = S'$  e  $T = T'$ ) ou são disjuntos (por **(b)**). Assim, por **(c)**, vem que existe uma secção de  $ev$  sobre  $W_k$ .

Conclui-se assim, que  $TC(X \times Y) \leq n + m - 1$ . ■

## 4.2 Exemplos

### 4.2.1 Braço de Robô

**Teorema 4.2.** *Seja  $X = S^m \times S^m \times \dots \times S^m$  o produto cartesiano de  $n$  esferas de dimensão  $m$ . Então,*

$$TC(X) = \begin{cases} n + 1, & \text{se } m \text{ é ímpar} \\ 2n + 1, & \text{se } m \text{ é par} \end{cases}$$

**Demonstração:** Já determinamos que:

$$TC(S^m) = \begin{cases} 2, & \text{se } m \text{ ímpar} \\ 3, & \text{se } m \text{ par.} \end{cases}$$

Assim, utilizando o teorema 4.1, vem que:

- Se  $m$  é ímpar,

$$\begin{aligned} TC(S^m \times \dots \times S^m) &\leq TC(S^m) + \dots + TC(S^m) - (n - 1) \\ &\leq 2 + \dots + 2 - (n - 1) \\ &\leq 2n - n + 1 \\ &\leq n + 1. \end{aligned}$$

- Se  $m$  é par,

$$\begin{aligned}
TC(S^m \times \dots \times S^m) &\leq TC(S^m) + \dots + TC(S^m) - (n-1) \\
&\leq 3 + \dots + 3 - (n-1) \\
&\leq 3n - n + 1 \\
&\leq 2n + 1.
\end{aligned}$$

Consideremos o produto  $\cup : H^*(X; \mathbb{Q}) \otimes H^*(X; \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(X; \mathbb{Q})$ .

Sejam  $a_1, \dots, a_n$  uma base de  $H^m(X; \mathbb{Q})$  e  $1 \in H^0(X; \mathbb{Q})$  a unidade.

Temos que

$$\prod_{i=1}^n (1 \otimes a_i - a_i \otimes 1) \neq 0 \in Nuc \cup$$

Pois,

$$\prod_{i=1}^n (1 \otimes a_i - a_i \otimes 1) = 1 \otimes a_1 a_2 \dots a_n \pm a_1 a_2 \dots a_n \otimes 1 \pm S,$$

onde  $S$  é uma soma de termos de  $H^{>0} X \otimes H^{>0} X$  e os dois primeiros termos são não nulos:  $1 \otimes a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$  e  $a_1 a_2 \dots a_n \otimes 1 \neq 0$ .

Logo a nilpotência de  $Nuc \cup$  é pelo menos igual a  $n$ .

Se  $m$  for par, então

$$\prod_{i=1}^n (1 \otimes a_i - a_i \otimes 1)^2 \neq 0 \in Nuc \cup$$

Pois,

$$\prod_{i=1}^n (1 \otimes a_i - a_i \otimes 1)^2 = \prod_{i=1}^n -2(a_i \otimes a_i) = (-2)^n (a_1 a_2 \dots a_n) \otimes (a_1 a_2 \dots a_n) \neq 0$$

Assim, se  $m$  par, a nilpotência de  $Nuc \cup$  é pelo menos igual a  $2n$

Aplicando o teorema 2.7, vem que  $TC(S^m \times \dots \times S^m) \geq n + 1$  se  $n$  é ímpar, e  $TC(S^m \times \dots \times S^m) \geq 2n + 1$  se  $n$  é par. ■

Consideremos o braço de um robô formado por  $n$  barras,  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , tais que o ponto inicial de  $L_1$  está fixo e  $L_i$  e  $L_{i+1}$  estão ligados por um ponto flexível.

No plano, a configuração do braço do robô é determinado por  $n$  ângulos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , onde  $\alpha_i$  é o ângulo formado por  $L_i$  e pelo eixo dos  $xx$ . Assim, sendo o ponto inicial de  $L_1$  fixo, o ângulo  $\alpha_1$  varia entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ , quando não existem obstáculos. Consequentemente o ponto final de  $L_1$  descreve uma circunferência, acontecendo o mesmo com as restantes barras. Assim, no plano, a configuração do braço é o toro de dimensão  $n$

$$T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1.$$

Utilizando um raciocínio semelhante facilmente se conclui que, no espaço  $\mathbb{R}^3$ , a configuração do braço do robô é o produto cartesiano de  $n$  esferas de dimensão 2

$$X = S^2 \times S^2 \times \dots \times S^2.$$

**Teorema 4.3.** *A complexidade topológica da configuração plana do braço de um robô de  $n$  barras é igual a  $n + 1$ . A complexidade topológica da configuração espacial do braço de um robô de  $n$  barras é igual a  $2n + 1$ .*

**Nota 4.4.** O teorema 4.3 é uma caso particular do teorema 4.2.

### 4.2.2 Superfície de genus $g$

**Teorema 4.5.** *Seja  $X = \sum_g$  uma superfície compacta e orientável de genus  $g$ . Então*

$$TC(X) = \begin{cases} 3, & \text{se } g \leq 1 \\ 5, & \text{se } g > 1 \end{cases}.$$

**Demonstração:** Se  $g = 0$ , então  $X = S^2$ . Assim, pelo teorema 3.1, vem que  $TC(X) = 3$ .

Se  $g = 1$ , então  $X = T^2$ , isto é,  $X = S^1 \times S^1$ , e portanto, pelo teorema 4.2, vem que  $TC(X) = 2 + 1 = 3$ .

Resta provar que, se  $g \geq 2$ ,  $TC(X) = 5$ .

Neste caso, consideremos  $1 \in H^0(X; \mathbb{Q})$  a unidade. Temos que existem  $u_1, v_1, u_2, v_2 \in H^1(X; \mathbb{Q})$  tais que  $u_i^2 = 0, v_i^2 = 0, v_i u_j = v_j v_i = u_i u_j = 0$  para  $i \neq j$ , e  $u_1 v_1 = u_2 v_2 = A \neq 0$ , onde  $A \in H^2(X; \mathbb{Q})$  é a classe fundamental. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [2], no exemplo 3.7. da subsecção 3.2.

Assim,

$$\prod_{i=1}^2 (1 \otimes u_i - u_i \otimes 1)(1 \otimes v_i - v_i \otimes 1) = 2A \otimes A \neq 0$$

Logo, pelo Teorema 2.7, vem que  $TC(X) \geq 5$ .

Por outro lado, aplicando o teorema 2.5 obtemos  $TC(X) \leq 5$ , pois  $\dim X = 2$ .

Concluimos assim que se  $g \geq 2$ ,  $TC(X) = 5$ . ■

# Bibliografia

- [1] A. Dold: *Lectures on Algebraic Topology*, Springer-Verlag (1972).
- [2] A. Hatcher: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2008).
- [3] E.H. Spanier: *Algebraic Topology*, Springer-Verlag (1966).
- [4] G.W. Whitehead: *Elements of Homotopy theory*, G.T.M. Springer (1978).
- [5] J.J. Rotman: *An Introduction to Algebraic Topology*, G.T.M. 119 Springer (1988).
- [6] M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto: *Algebraic Topology from a homotopical Viewpoint*, Springer Universitext (2002).
- [7] M. Farber : *Topological complexity of motion planning*, arXiv:math.AT/0111197 v1. (2001)
- [8] M. Farber, S. Tabachnikov, S. Yuzvinsky: *Topological Robotics: Motion Planning in Projective Spaces*, arXiv:math.AT/0210018 v1.(2002)
- [9] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea, D. Tanré: *Lusternik-Schnirelmann Category*, Mathematical surveys and monographs, no. 103 (2003).

- [10] R. A. Piccinini: *Lectures on Homotopy Theory*, (1992).
- [11] W. S. Massey: *Algebraic Topology: An Introduction*, GTM Springer (1967).

# Índice

- aplicação
  - característica, 14
  - de cocadeias, 21
  - de colamento, 14
  - de complexos de cadeias, 18
- aplicações homotópicas, 5
- categoria, 14
  - das álgebras graduadas comutativas, 23
  - dos complexos de cadeia, 19
  - Groups, 15
  - Sets, 15
  - Top, 15
- categoria de LS, 25
- cofunctor, 16
- cohomologia, 21
  - de espaços topológicos, 23
  - singular, 22
- complexidade topológica, 27
  - de  $\mathbb{C}P^n$ , 39
  - de  $\mathbb{R}P^n$ , 40
  - de  $S^n$ , 36
  - de espaços contractíveis, 28
  - de produto de esferas, 45
  - de superfície de genus, 47
- complexo
  - de cadeias, 18
  - de cadeias quociente, 22
  - de cocadeias, 21
  - de cocadeias singulares, 22
  - singular, 20
- CW-complexo, 13
  - de tipo finito, 14
- desigualdade do produto, 42
- dimensão
  - de CW-complexo, 14
- equivalência de homotopia, 5
- fibração, 11
- functor, 15

homologia, 18

  de espaço topológico, 20

ideal dos divisores de zero, 33

nilpotência, 33

produto

  cup, 23

produto exterior, 25

pullback, 8

pushout, 10

R-álgebra graduada comutativa, 23

R-módulo graduado, 23

secção, 5

sequências exactas, 17

simplexo, 19

transformação natural, 16