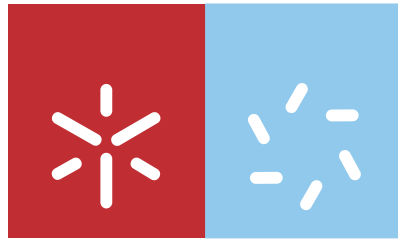


Universidade do Minho
Escola de Ciências

Isabel Margarida Ferreira Amorim

Análise Quaterniónica



Universidade do Minho
Escola de Ciências

Isabel Margarida Ferreira Amorim

Análise Quaterniónica

Mestrado em Matemática - Formação Contínua de Professores

Trabalho efectuado sob a orientação da
Professora Doutora Maria Irene Falcão

Abril de 2011

DECLARAÇÃO

Nome: Isabel Margarida Ferreira Amorim

Endereço electrónico: isamarg.amorim@sapo.pt

Número do Bilhete de Identidade: 9589830

Título da dissertação/tese – Análise Quaterniónica

Orientadora: Professora Doutora Maria Irene Falcão

Ano de conclusão: 2011

Designação do Mestrado: Mestrado em Matemática - Formação Contínua de Professores

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTEGRAL DESTA TESE/TRABALHO APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE.

Universidade do Minho, 29/04/2011

Assinatura: _____

Agradecimentos

Num trabalho como uma tese de mestrado, o resultado final terá sempre maior ou menor êxito consoante o trabalho científico coerentemente realizado bem como a força que advém dos suportes subjacentes que acompanharam esse mesmo trabalho.

Assim os meus agradecimentos vão para

- A Professora Doutora Maria Irene Falcão a quem agradeço todo o apoio prestado na concretização deste trabalho, a sua disponibilidade, o saber e o apoio científico bem como as palavras de incentivo

- A minha família e amigos por todo o apoio que me dispensaram sempre que dele necessitei

- A minha mãe que ao longo da vida sempre me apoiou em tudo, essencialmente na minha formação académica e, também, para a minha irmã e sobrinhas que sempre me perdoaram as ausências

- Por último ao meu marido pela sua compreensão, dedicação e carinho, incentivando-me a prosseguir na execução desta tese. Nem sempre foi fácil e, nesses momentos, a sua presença foi fundamental.

Análise Quaterniônica

Resumo

A Análise Quaterniônica é a mais natural generalização da Análise Complexa, preservando as funções quaterniônicas muitas das importantes propriedades das funções complexas. No entanto, no tratamento de funções quaterniônicas estão presentes dificuldades que não encontramos na análise de funções complexas e que estão associadas à não comutatividade da multiplicação.

A Análise Quaterniônica só começou a ser desenvolvida quase um século após a descoberta dos quaterniões, pelo matemático irlandês Hamilton, em 1943. Foi o matemático suíço Fueter quem desenvolveu os primeiros esforços (1935) para construir uma teoria das funções quaterniônicas holomorfas análoga à teoria das funções complexas holomorfas.

Nesta tese apresentamos os principais conceitos e propriedades dos quaterniões, fazemos uma introdução à Análise Quaterniônica e discutimos o conceito de função quaterniônica *regular*. Construimos funções quaterniônicas elementares, usando diferentes métodos e obtemos algumas das suas propriedades. A abordagem computacional deste trabalho é feita, recorrendo a *software* simbólico específico.

Quaternionic Analysis

Abstract

Quaternionic Analysis is the most natural and close generalization of complex analysis that preserves many of its important features. However, the analysis of quaternion functions is more complicated than the analysis of complex functions, since it is marked from the beginning by the left-right multiplicative dichotomy.

Quaternionic Analysis was not developed until nearly a century after the discovery of quaternions by the Irish mathematician Hamilton, in 1843. It was the Swiss mathematician Fueter, who made the first efforts (1935) to build systematically a theory of holomorphic quaternion functions of a quaternion variable.

In this thesis we present the fundamental concepts and properties of quaternions, give an introduction to Quaternionic Analysis and a discussion of *regular* functions. Elementary quaternionic functions are constructed by using several approaches and their main properties are proved. The computational aspects of this work are based on the use of specific symbolic package.

Conteúdo

Introdução	xi
1 Os quaterniões	1
1.1 Sir Hamilton e a descoberta dos quaterniões	1
1.2 Definições e resultados básicos	5
1.3 Relação entre \mathbb{H} e \mathbb{R}^4	8
1.4 Software para quaterniões	12
2 Diferenciação em \mathbb{H}	15
2.1 O caso complexo revisitado	15
2.2 A abordagem de Cauchy	18
2.3 A abordagem de Weierstrass	19
2.4 A abordagem de Cauchy-Riemann	20
2.5 A derivada de uma função monogénica	26
2.6 Considerações computacionais	30
3 Construção de funções monogénicas em \mathbb{H}	35
3.1 Rudolf Fueter	35
3.2 O método de Fueter	38

3.3	Exemplos	43
3.4	Uma variante do método de Fueter	46
3.5	Considerações computacionais	49
4	Funções elementares em \mathbb{H}	53
4.1	Recordando \mathbb{C}	53
4.2	Funções elementares não monogénicas	59
4.3	Funções elementares de Fueter	64
4.4	Funções elementares obtidas pela variante do método de Fueter	77
4.5	Considerações finais	81
	Anexo - Procedimentos em Maple	83
	Bibliografia	89

Introdução

“Felizes aqueles que se divertem com problemas que educam a alma e elevam o espírito.”
- Pitágoras de Samos

A Análise Quaterniônica é considerada como a generalização natural da Análise Complexa. R. Fueter propõe, no início dos anos 30 do século XX, uma abordagem que pode ser vista como a generalização, ao conjunto \mathbb{H} dos quaterniões, das bem conhecidas equações de Cauchy-Riemann. Provou-se posteriormente que esta abordagem fornece uma classe de funções que generaliza a classe das funções complexas holomorfas. Estas funções são actualmente conhecidas pela designação de funções monogénicas.

Este trabalho tem como objectivos principais a discussão do conceito de função quaterniônica monogénica e consequente construção de funções quaterniônicas elementares.

No Capítulo 1 é feita uma pequena introdução à Álgebra Quaterniônica seguida das definições e resultados básicos necessários nos capítulos seguintes. Em particular, é descrita a *package* para Maple, *Quat* [15] que apoia todo o trabalho computacional desenvolvido.

No Capítulo 2 revisitamos a teoria das funções holomorfas em \mathbb{C} , segundo os conceitos de Cauchy, Weierstrass e Riemann e consideramos a generalização desses conceitos a funções quaterniônicas, de modo a introduzir de forma adequada a noção de função *regular* em \mathbb{H} .

Apresentamos, no capítulo seguinte, entre outras, técnicas baseadas no trabalho de R. Fueter para construir funções monogénicas em \mathbb{H} , partindo do conhecimento da correspondente função complexa holomorfa.

O último capítulo é dedicado ao estudo das funções elementares em \mathbb{H} , começando por introduzir o caso complexo como forma de motivação para o tratamento posterior do caso quaterniónico. No entanto, contrariamente ao caso complexo, em \mathbb{H} não há uma única forma de definir as funções elementares. Esta particularidade pode (e deve) ser vista, não como uma desvantagem, mas como um desafio.

Capítulo 1

Os quaterniões

Neste capítulo é feita uma breve introdução à álgebra dos quaterniões de Hamilton. Em particular, são definidas as principais operações e correspondentes propriedades, sendo ainda apresentadas as diferentes formas de representação de quaterniões. A relação de \mathbb{H} e \mathbb{R}^4 é também destacada. O capítulo termina com a apresentação do software usado ao longo do trabalho.

1.1 Sir Hamilton e a descoberta dos quaterniões

William Rowan Hamilton, filho de Archibald Hamilton e de Sara Hutton nasce, em 1805, em Dublin, na Irlanda.

Aos cinco anos de idade Hamilton já tinha conhecimentos de Latim, Grego e Hebraico. Foi o seu tio, com quem vai viver, o reverendo James Hamilton, linguista e professor experiente, que o iniciou na aprendizagem das línguas e literaturas clássicas.

O gosto pelo domínio de vários idiomas começa muito cedo, mas foi o conhecimento com o americano Zerah Colburn que o leva a interessar-se por novas áreas do saber que considera fascinantes. Hamilton entusiasma-se pelas competições e habilidades aritméticas e torna-se um amante da Matemática.



Sir William Rowan Hamilton
(Dublin 1805 - Dunsink 1865)

No Colégio Clairaut's estuda álgebra, lê e estuda Newton e Laplace. Em 1822, muito jovem ainda, detecta um erro no estudo da Mecânica Celeste de Laplace o que leva John Brinkley, astrónomo real da Irlanda a dizer: - "*This young man, I do not say will see, but is, the first mathematician of his age*". [34]

Aos 18 anos entra para o Trinity College, em Dublin e, no primeiro ano, obtém as classificações máximas em Literaturas Clássicas, distinção raramente concedida. Ainda antes de terminar o curso apresenta, em 1824, o seu primeiro artigo na Academia Real Irlandesa, com o título "*On Caustics*".

Em 1826, Hamilton recebe a classificação *Optime* em Ciências e, novamente, em Literaturas Clássicas, acontecimento inédita na época. No seu último ano como aluno apresenta o livro de memórias "*Theory of Sistems of Rays*". Nesse documento Hamilton introduz a função característica para a Óptica. Boyton, seu examinador final, convence-o a concorrer para o cargo de Astrónomo Real no observatório Dunsink. Mais tarde, em 1827, ainda estudante e apenas com 21 anos de idade é nomeado professor de Astronomia no Trinity College. O cargo de professor universitário leva-o ao título honorário de Astrónomo Real da Irlanda, beneficiando da possibilidade de residência nesse mesmo observatório.

Hamilton viaja pela Inglaterra e Escócia, conhece o poeta Wordsworth de quem se torna amigo, passando a interessar-se também pela Poesia e chegando mesmo a relacionar a linguagem Matemática com a arte poética. Em 1830, casa com Maria Helena Bayly. Passam a lua de mel na fazenda Bayly onde Hamilton trabalha no seu terceiro suplemento "*Theory of Sistems of Rays*", que viria a publicar em 1832.

A 4 de Novembro de 1833, Hamilton apresenta um documento "*On a General Method in Dynamics*", na Academia Real Irlandesa, onde expressa os números complexos como pares ordenados de números reais. Nesta obra, ele mostra a sua primeira definição de função característica aplicada à Dinâmica, tendo ainda escrito um segundo artigo sobre este tema no ano seguinte.

Em 1834, Hamilton e Helen têm o primeiro filho, William Edwin. Em 1835, publica "*Algebra as the Science of Pure Time*", trabalho inspirado no seu estudo

sobre Kant e apresentado no encontro Advancement of Science da British Association. Hamilton é nomeado cavaleiro, em 1835, no ano do nascimento do seu segundo filho, Archibald Henry. Teve ainda uma filha, Helen Eliza Amélia.

Hamilton tenta estender a teoria a ternos de números, facto que se tornou numa obsessão e que o atormentou durante muitos anos. Conta a história que, por volta de 1842, andava tão preocupado com a *sua* teoria de ternos de números que os seus filhos captando a sua preocupação todas as manhãs lhe perguntavam [27]:

- “*Well, Papa can you multiply triplets?*”

ao que ele invariavelmente respondia que ainda só sabia somá-los e subtraí-los.

Descrevemos agora, sucintamente as dificuldades sentidas por Hamilton na sua tentativa de criar uma teoria para ternos de números. Ele pretendia construir um conjunto \mathbb{D} que fosse uma extensão de \mathbb{R} a três dimensões. Por analogia com os complexos, considerou as unidades fundamentais 1 , i e j , as quais satisfaziam naturalmente $i^2 = j^2 = -1$. Sendo $\{1, i, j\}$ uma base de \mathbb{D} , cada elemento $q \in \mathbb{D}$ poderia escrever-se como

$$q = x + yi + zj.$$

Hamilton sabia, como já foi referido, somar números deste género, mas não sabia de que forma deveria definir a multiplicação. Atendendo à estrutura de corpo que pretendia para o seu conjunto, \mathbb{D} seria fechado para a multiplicação, logo a multiplicação de i e j deveria resultar num elemento de \mathbb{D} . Vejamos, então as possibilidades:

- $ij = \pm 1$

Neste caso, $i(ij) = \pm i$ e $(ij)j = -j$. Logo $j = \mp i$, o que contradiz a condição inicial de $\{1, i, j\}$ ser uma base.

- $ij = \pm i$

Como $i(ij) = \pm i^2 = \mp 1$ resulta $j = \pm 1$. Novamente se conclui que \mathbb{D} seria uma extensão a duas e não a três dimensões do conjunto \mathbb{R} .

- $ij = \pm j$

Analogamente, se $ij = \pm j$, então $(ij)j = \pm j^2 = \mp 1$, logo $i = -i(jj) = \pm 1$.

- $ij = 0$

Como $i(ij) = (ii)j = -j = 0$ resulta que $j = 0$, o que contradiz novamente a condição inicial.

Esgotadas todas as hipóteses, concluímos que não é possível construir um conjunto \mathbb{D} nas condições pretendidas por Hamilton, caindo assim por terra a *sua* teoria dos ternos ordenados de números reais. O paradoxo do valor a atribuir a ij sugeriu a Hamilton a ideia de que talvez o sistema por ele proposto estivesse incompleto. Introduz então uma nova unidade fundamental k e tenta construir um corpo considerando a base $\{1, i, j, k\}$ e as regras $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Ainda assim, o problema do resultado do produto ij continuava por resolver. Atendendo às hipóteses já anteriormente testadas, resta considerar $ij = \pm k$.

- $ij = k (= ji)$

Se $ij = k$ então $k^2 = (ij)^2 = i^2j^2 = (-1)(-1) = 1$.

- $ij = -k (= ji)$

Uma vez mais, se $ij = -k$ então $k^2 = 1$.

Foram precisos mais seis anos para que Hamilton se apercebesse de que o verdadeiro problema do seu novo sistema estava na suposição implícita da comutatividade da multiplicação. Finalmente, no dia 16 de Outubro de 1843, enquanto passeava com a sua esposa ao longo do Royal Canal em Dublin, ocorre-lhe a solução para o seu estudo e, não resistindo ao impulso, esculpe as fórmulas para os quatérnios

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

numa pedra da ponte Broom. Em 1958, a Royal Academy Irlandesa colocou uma placa comemorativa da descoberta dos quatérnios nessa ponte.

Hamilton descreveu os quatérnios como quádruplos ordenados de números reais, com um real e três imaginários, onde a primeira componente é a sua parte escalar e as três componentes restantes a parte vectorial.

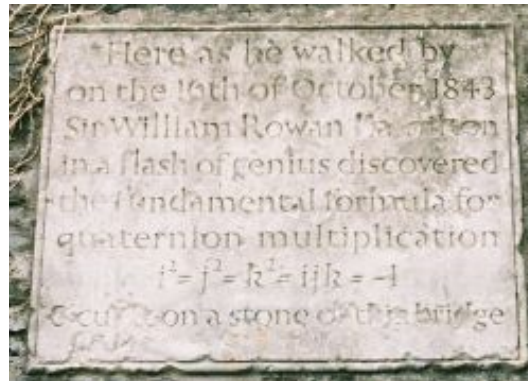


Figura 1.1: Placa comemorativa da descoberta dos quaterniões

Os quaterniões constituíram um passo fundamental e ousado para a época, pois implicavam o abandono da propriedade comutativa da multiplicação. Hamilton sentiu que esta descoberta iria revolucionar a Física e a Matemática e passa o resto de sua vida trabalhando nos quaterniões. Em [27] escreve:

- *“I still must assert that this discovery appears to me to be as important for the middle of the nineteenth century as the discovery of fluxions [the calculus] was for the close of the seventeenth.”*

Publica, em 1853, o trabalho que considera incompleto, *“Lectures on Quaternions”*. Decidido a produzir um trabalho de qualidade, começa a escrever outro livro *“Elements of Quaternions”* que estimava vir a ser uma obra com 400 páginas e que esperava completar em dois anos. Na realidade a sua obra acaba por ter o dobro das páginas previstas e demora sete anos a ser escrita. De facto, o último capítulo estava incompleto quando ele morre, em 1865. O seu livro foi finalmente publicado, em 1866, com um prefácio do seu filho William Edwin Hamilton, [19].

1.2 Definições e resultados básicos

Um quaterniãõ pode ser definido como um quádruplo ordenado de números reais $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ ou, de forma equivalente, como um elemento de \mathbb{R}^4 , $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. Os números x_0, x_1, x_2, x_3 são chamados as *componentes* do

quaterniões x .

Definição 1.1. (Igualdade de quaterniões)

Dois quaterniões $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ e $y = y_0 + y_1i + y_2j + y_3k$ são iguais, quando as suas componentes são iguais, i.e.

$$x = y \text{ sse } x_k = y_k, k = 0, 1, 2, 3.$$

Definição 1.2. (Adição e subtracção de quaterniões)

A soma/diferença de quaterniões é definida pela soma/diferença das correspondentes componentes.

$$x \pm y = (x_0 \pm y_0) + (x_1 \pm y_1)i + (x_2 \pm y_2)j + (x_3 \pm y_3)k.$$

Definição 1.3. (Multiplicação de um número real por um quaternião)

O produto de um escalar real α por um quaternião é definido pelo produto de cada componente por α

$$\alpha x = \alpha x_0 + \alpha x_1i + \alpha x_2j + \alpha x_3k.$$

Assim sendo, o conjunto dos quaterniões, actualmente denominado por \mathbb{H} , em homenagem a Hamilton, constitui um espaço vectorial real.

Notemos que até ao momento as definições apresentadas para quaterniões não trazem qualquer novidade relativa às correspondentes definições para vectores de \mathbb{R}^4 . O conceito de quaternião começa exactamente com a definição de multiplicação quaterniónica, através das regras estabelecidas por Hamilton,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \tag{1.1}$$

e

$$ijk = -1, \tag{1.2}$$

A última igualdade pode ser reescrita como

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \tag{1.3}$$

Definição 1.4. (Multiplicação de quaterniões)

As igualdades (1.1) e (1.2) (ou (1.3)) definem completamente a multiplicação de quaterniões.

$$\begin{aligned} xy &= (x_0 + x_1i + x_2j + x_3k)(y_0 + y_1i + y_2j + y_3k) \\ &= (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)i + \\ &\quad (x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1)j + (x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0)k. \end{aligned}$$

Exemplo 1.1. Seja $x = 1 + i + 2j + 3k$ e $y = 2 + 2i + j + 3k$. Então

$$xy = (1 + i + 2j + 3k)(2 + 2i + j + 3k) = -11 + 7i + 8j + 6k$$

e

$$yx = (2 + 2i + j + 3k)(1 + i + 2j + 3k) = -11 + i + 2j + 12k.$$

Definição 1.5. Seja $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in \mathbb{H}$.

- A **parte escalar** (ou real) de x é $\text{Sc}(x) = x_0$.
- A **parte vectorial** (ou imaginária) de x é $\text{Vec}(x) = \underline{x} = x_1i + x_2j + x_3k$.

Cada quaternião pode então ser escrito como

$$x = \text{Sc}(x) + \text{Vec}(x) = x_0 + \underline{x}.$$

- Quando $\text{Sc}(x) = 0$, x diz-se um **quaternião puro** ou um **vector**.

O conjunto de todos os vectores representa-se por $\text{Vec } \mathbb{H}$ e o conjunto dos escalares por $\text{Sc } \mathbb{H}$.

- O **conjugado** de x é $\bar{x} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k$.
- A **norma** de x é $|x| = \sqrt{x\bar{x}} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Da igualdade anterior resulta a existência de inverso para cada quaternião não nulo x , dado por

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}.$$

Consequentemente, todas as leis da álgebra são válidas para quaterniões, excepto a comutatividade da multiplicação quaterniônica. Assim, em termos algébricos,

o conjunto \mathbb{H} constitui uma Álgebra de Divisão, embora apresente uma diferença muito importante relativamente à Álgebra Real ou à Álgebra Complexa: existem dois quocientes de um quaternião x por um quaternião $y \neq 0$, denominados por **quociente à direita** xy^{-1} e **quociente à esquerda** $y^{-1}x$.

Exemplo 1.2. Para os quaterniões x e y considerados no exemplo anterior, tem-se

$$xy^{-1} = (1 + i + 2j + 3k) \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9}i - \frac{1}{18}j - \frac{1}{6}k \right) = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}i + \frac{1}{3}k$$

e

$$y^{-1}x = \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9}i - \frac{1}{18}j - \frac{1}{6}k \right) (1 + i + 2j + 3k) = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}i + \frac{1}{3}j.$$

Facilmente se provam agora as seguintes propriedades, usando as definições e operações anteriormente introduzidas.

Proposição 1.1. *Sejam $x, y \in \mathbb{H}$. Então,*

1. $\text{Sc}(x) = \frac{(x + \bar{x})}{2}$ e $\text{Vec}(x) = \frac{(x - \bar{x})}{2}$.
2. $\overline{\overline{x}} = x$, $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$, $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ e $\overline{\bar{x}} = x$.
3. $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, $xy \neq 0$.
4. $|xy| = |x||y|$ e $|\bar{x}| = |-x| = |x|$.
5. $|\text{Sc}(x)| \leq |x|$, $|\text{Vec}(x)| \leq |x|$.
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$.
7. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

1.3 Relação entre \mathbb{H} e \mathbb{R}^4

Salientamos agora, com mais detalhe, a relação entre a estrutura dos quaterniões e a álgebra clássica dos vectores em \mathbb{R}^4 , considerando para o efeito a base canónica do espaço vectorial euclidiano \mathbb{R}^4 :

$$e_0 = (1, 0, 0, 0), e_1 = (0, 1, 0, 0), e_2 = (0, 0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 0, 1).$$

Como já referimos anteriormente, um quaterniões $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ pode ser identificado com o elemento $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ de \mathbb{R}^4 . O conjunto $\text{Sc } \mathbb{H}$ pode ser identificado com \mathbb{R} e $\text{Vec } \mathbb{H}$ com \mathbb{R}^3 . É também possível mergulhar \mathbb{R}^3 em \mathbb{H} , identificando os vectores $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ com os chamados **quaterniões reduzidos** ou **paravectores** $x = x_0 + x_1i + x_2j$. Designamos por $\text{PVec } \mathbb{H}$ o conjunto de todos os paravectores de \mathbb{H} .

O matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895) escreveu os primeiros documentos sobre quaterniões, após Hamilton, e desenvolveu um esquema simples para descrever a multiplicação entre os elementos e_0, \dots, e_3 . De facto, esta multiplicação pode ser definida, por analogia com a multiplicação entre os elementos da base $\{1, i, j, k\}$ de \mathbb{H} , como se mostra na tabela seguinte.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$

Tabela de Cayley

Actualmente é frequente denotar as unidades imaginárias i, j e k por e_1, e_2 e e_3 . Nesta notação, um quaterniões escreve-se como $x = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, já que $e_0 = 1$ e as regras multiplicativas como

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1,$$

$$e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3.$$

A partir de agora adoptamos, por conveniência de escrita, esta notação, abandonando a originalmente introduzida por Hamilton.

Observação 1.1. Naturalmente que $\text{Vec } \mathbb{H}$, $\text{PVec } \mathbb{H}$ e $\text{Sc } \mathbb{H}$ são subespaços vectoriais reais de \mathbb{H} , mas $\text{Vec } \mathbb{H}$ e $\text{PVec } \mathbb{H}$ não são fechados para a multiplicação usual de quaterniões.

De facto, se $x = e_1 + 2e_2 + 3e_3$ e $y = 2e_1 + e_2 - 2e_3$, então $x \in \text{Vec } \mathbb{H}$ e $y \in \text{Vec } \mathbb{H}$. No entanto, $xy = 2 - 7e_1 + 8e_2 - 3e_3 \notin \text{Vec } \mathbb{H}$.

Por outro lado, escolhendo agora $x = 1 + 2e_1 - 3e_2$ e $y = 3 + 2e_1 + e_2$, tem-se que $x \in \text{PVec } \mathbb{H}$ e $y \in \text{PVec } \mathbb{H}$, mas $xy = 2 + 8e_1 - 8e_2 + 8e_3 \notin \text{PVec } \mathbb{H}$.

Vejam agora como se pode reescrever o produto de quaterniões da forma $x = x_0 + \underline{x}$ e $y = y_0 + \underline{y}$. Da Definição 1.4 resulta

$$\begin{aligned} xy &= x_0y_0 - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\ &\quad + x_0(y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) + y_0(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) \\ &\quad + (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 - (x_1y_3 - x_3y_1)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3. \end{aligned}$$

O produto xy pode ser obtido recorrendo ao produto interno e ao produto externo dos vectores de \mathbb{R}^3 \underline{x} e \underline{y} , isto é,

$$xy = x_0y_0 - \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + x_0\underline{y} + y_0\underline{x} + \underline{x} \times \underline{y}, \quad (1.4)$$

onde

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

e

$$\underline{x} \times \underline{y} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

como habitualmente.

Como consequência imediata de (1.4), obtém-se

$$\text{Sc}(xy) = x_0y_0 - \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$$

e

$$\text{Vec}(xy) = x_0\underline{y} + y_0\underline{x} + \underline{x} \times \underline{y}.$$

Como caso particular das propriedades anteriores, temos ainda

$$\underline{xy} = - \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \underline{x} \times \underline{y}.$$

Mais uma vez se pode verificar que, em geral, o produto de dois quaterniões puros (ou vectores) não é um quaternião puro (ou vector) (ver Observação 1.1). Concretamente, verifica-se que $\text{Sc}(\underline{xy}) = 0$ sse \underline{x} e \underline{y} são vectores ortogonais e $\text{Vec}(\underline{xy}) = 0$ sse \underline{x} e \underline{y} são vectores colineares.

À semelhança dos números complexos, também os quaterniões se podem escrever na forma trigonométrica. Assim,

Proposição 1.2. (*Forma trigonométrica ou polar de um quaterniões*)

Todo o quaterniões $x \in \mathbb{H}$, com $\underline{x} \neq 0$ pode escrever-se na forma

$$x = |x|(\cos \varphi + \omega(\underline{x}) \operatorname{sen} \varphi),$$

onde $\varphi = \operatorname{arccotg} \frac{x_0}{|\underline{x}|}$ e $\omega(\underline{x}) := \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}$ é um vector unitário.

Demonstração. Notemos que x pode ser escrito na forma $x = x_0 + \omega(\underline{x})|\underline{x}|$.¹ Logo

$$x = |x| \left(\frac{x_0}{|x|} + \omega(\underline{x}) \frac{|\underline{x}|}{|x|} \right).$$

Como $\operatorname{cotg} \varphi = \frac{x_0}{|\underline{x}|}$, conclui-se que $\cos \varphi = \frac{x_0}{|x|}$ e $\operatorname{sen} \varphi = \frac{|\underline{x}|}{|x|}$ e o resultado é agora imediato. \square

Exemplo 1.3. Consideremos o quaterniões $x = 1 + e_1 + e_2 + e_3$. Como $x_0 = 1$, $|\underline{x}| = \sqrt{3}$ e $|x| = 2$ resulta

$$\omega(\underline{x}) = \frac{e_1 + e_2 + e_3}{\sqrt{3}}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ e a forma trigonométrica de x é:

$$x = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + \frac{e_1 + e_2 + e_3}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right).$$

Proposição 1.3. (*Fórmula de Moivre para quaterniões*)

Seja $x = |x|(\cos \varphi + \omega(\underline{x}) \operatorname{sen} \varphi)$, a forma polar do quaterniões não nulo $x = x_0 + \underline{x}$.

Então temos

$$x^n = (|x|(\cos \varphi + \omega(\underline{x}) \operatorname{sen} \varphi))^n = |x|^n (\cos n\varphi + \omega(\underline{x}) \operatorname{sen} n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. No caso de $n = 0$, o resultado é válido. Para valores de n positivos provemos por indução matemática. Assim, e supondo que a fórmula é válida para n , mostremos que ainda vale para $n + 1$. Seja $x \in \mathbb{H}$ e $x \neq 0$. Como

$$\omega^2(\underline{x}) = \left(\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} \right)^2 = -\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = -1$$

¹Esta forma é designada habitualmente na literatura por forma binária de um quaterniões.

e utilizando as fórmulas usuais da adição para o seno e cosseno obtemos

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= (|x|^n(\cos n\varphi + \omega(\underline{x}) \operatorname{sen} n\varphi))(|x|(\cos \varphi + \omega(\underline{x}) \operatorname{sen} \varphi)) \\ &= |x|^{n+1}(\cos n\varphi \cos \varphi - \operatorname{sen} n\varphi \operatorname{sen} \varphi + \omega(\underline{x})(\cos n\varphi \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} n\varphi \cos \varphi)) \\ &= |x|^{n+1}(\cos(n+1)\varphi + \omega(\underline{x}) \operatorname{sen}(n+1)\varphi) \end{aligned}$$

Para valores de expoente inteiro negativo começamos por notar que

$$x^{-1} = \frac{1}{|x|^2} \bar{x} = |x|^{-1}(\cos \varphi - \omega(\underline{x}) \operatorname{sen} \varphi).$$

Então, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$x^{-n} = (x^{-1})^n = (|x|^{-1}(\cos \varphi - \omega(\underline{x}) \operatorname{sen} \varphi))^n = |x|^{-n}(\cos n\varphi - \omega(\underline{x}) \operatorname{sen} n\varphi)$$

□

Exemplo 1.4. Retomando o exemplo anterior, tem-se

$$\begin{aligned} x^3 &= (1 + e_1 + e_2 + e_3)^3 = \left(2\left(\cos \frac{\pi}{3} + \frac{e_1+e_2+e_3}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)\right)^3 \\ &= 8\left(\cos \pi + \frac{e_1+e_2+e_3}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \pi\right) = -8 \end{aligned}$$

1.4 Software para quaterniões

Atualmente, os quaterniões são reconhecidos como uma ferramenta importante na modelação de problemas matemáticos e na simplificação dos cálculos algébricos associados a esses problemas.

Como aplicação dos quaterniões podemos referir, por exemplo, o tratamento de sinal, o tratamento de imagem, a aeronáutica e a animação computacional. Como consequência deste interesse é possível encontrar diverso software, livre ou comercial, nesta área. Para uma descrição detalhada deste tema, ver [28].

De entre as várias possibilidades de escolha, optamos pela *package Quat* para Maple, por nos parecer a mais apropriada ao trabalho que pretendíamos desenvolver. A *package Quat* é uma ferramenta para apoiar e simplificar o trabalho com quaterniões e suas aplicações e foi desenvolvida para fins pedagógicos e de investigação

na Bauhaus-University, em Weimar, por S. Bock e K. Gürlebeck e recentemente apresentada num CD-ROM incluído no livro [15].

A *package* inclui três grandes áreas:

- I. Álgebra quaterniônica
- II. Análise quaterniônica e vectorial
- III. Cálculo polinomial.

Em cada capítulo vamos ilustrar a utilização de funções relativas ao tema abordado, descrevendo alguns comandos e apresentando alguns exemplos. Em anexo, apresentamos, ainda, algumas funções que tivemos necessidade de desenvolver para situações específicas. Neste primeiro capítulo têm especial interesse as seguintes funções da álgebra quaterniônica:

- `Qconj` - conjugado de um quaterniãõ,
- `Qinv` - inverso de um quaterniãõ,
- `Qmult` - produto de quaterniões,
- `Qnorm` - norma euclidiana de um quaterniãõ,
- `Qpot` - potência de um quaterniãõ,
- `Qsc` - parte escalar de um quaterniãõ,
- `Qvec` - parte vectorial de um quaterniãõ.

Os exemplos seguintes ilustram algumas das funcionalidades da *Quat*, nomeadamente no que diz respeito à definição de quaterniões, operações com quaterniões e funções básicas.

Exemplo 1.5. Definição de quaterniões

Nesta *package* as unidades imaginárias são designadas por `qi`, `qj` e `qk`. Os quaterniões $q1 = 1 - e_1 + e_2 - 2e_3$ e $q2 = e_2 - e_3$ definem-se através das instruções:

```
> q1:=1-qi+qj-2*qk:
```

> q2:=qj-qk:

Exemplo 1.6. Operações com quaterniões

Multiplicação de quaterniões:

> Qmult(q1,q2);

> Qmult(q2,q1); # A multiplicação não é comutativa

$$-3 + qi - 2 qk$$

$$-3 - qi + 2 qj$$

A quinta potência de um quaternião:

> Qpot(q2,5);

$$4 qj - 4 qk$$

Exemplo 1.7. Funções básicas

Para o quaternião definido por q1 obtemos a sua norma, parte escalar, parte vectorial e o seu inverso, respectivamente, através dos seguintes comandos:

> Qnorm(q1);

$$\sqrt{7}$$

> Qsc(q1);

$$1$$

> Qvec(q1);

$$-qi + qj - 2 qk$$

> Qinv(q1);

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{7} qi - \frac{1}{7} qj + \frac{2}{7} qk$$

Capítulo 2

Diferenciação em \mathbb{H}

Neste capítulo revisitamos a teoria das funções holomorfas em \mathbb{C} , segundo os conceitos de Cauchy, Weierstrass e Riemann e consideramos a generalização desses conceitos a funções quaterniônicas, de modo a introduzir de forma adequada a noção de função *regular* em \mathbb{H} .

2.1 O caso complexo revisitado

Começamos por recordar os principais resultados relativos à diferenciação em \mathbb{C} . As demonstrações destes resultados podem ser encontradas em qualquer livro de análise complexa (p.e., [1, 3, 26, 29, 32]).

No que se segue, consideramos funções complexas f definidas num subconjunto aberto S de \mathbb{C} .

Definição 2.1. (Função \mathbb{C} -diferenciável)

Uma função f é **\mathbb{C} -diferenciável** em $z \in S$ se o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

com $h \in \mathbb{C}$, existe. Este limite diz-se a **derivada** de f em z e denota-se por $f'(z)$.

Definição 2.2. (Função \mathbb{C} -holomorfa)

Uma função f diz-se **\mathbb{C} -holomorfa** em $z \in S$ se é \mathbb{C} -diferenciável numa vizinhança desse ponto. Se $f'(z)$ existe para todo $z \in S$, f diz-se **\mathbb{C} -holomorfa** em S .

Definição 2.3. (Função \mathbb{C} -analítica)

Uma função f diz-se **\mathbb{C} -analítica**¹ em S , se pode ser representada, numa vizinhança de cada ponto $z_0 \in S$, pela série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$.

Em análise complexa a teoria das funções holomorfas pode desenvolver-se através de três conceitos distintos, mas equivalentes. O primeiro assenta no conceito de derivada total, no sentido de Cauchy. A segunda abordagem, seguindo Weierstrass, é baseada na teoria das séries de potências. Finalmente, a abordagem atribuída a Riemann envolve as bem conhecidas equações de Cauchy-Riemann.

Se escrevermos uma função complexa f em termos de duas funções reais u e v de duas variáveis reais

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

onde $z = x + iy$, a equivalência dos três conceitos atrás referidos pode ser formalizada do seguinte modo.

Teorema 2.1. *Seja $f \in \mathcal{C}^1(S)$ uma função complexa² e seja $z_0 = x_0 + iy_0 \in S$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

1. f é \mathbb{C} -diferenciável em todos os pontos $z_0 \in S$,
2. f é \mathbb{C} -analítica em S ,
3. f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em z_0 , i.e.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (2.1)$$

Resulta ainda do teorema anterior que se f é \mathbb{C} -diferenciável em z_0 , então

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (2.2)$$

¹Alguns autores preferem definir função analítica como função diferenciável. Optamos aqui pela definição de Weierstrass, identificando o conceito de analiticidade com a existência de representações em séries de potências.

²Supomos, para simplificar a apresentação do resultado, que f é de classe \mathcal{C}^1 , isto é, as funções componentes u e v são de classe \mathcal{C}^1 . Há vários resultados relativos a hipóteses mais fracas, mas que saem do âmbito deste trabalho.

A partir de agora e sempre que não haja lugar a equívocos, usaremos a notação simplificada $\frac{\partial g}{\partial x}$ para designar $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$. Quando g é uma função complexa, g pode ser vista como uma função de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 que a cada par (x, y) faz corresponder $g(x, y)$, sendo por isso válidas as regras do cálculo.

Observação 2.1. As equações de Cauchy-Riemann (2.1) podem ser escritas na forma complexa

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (2.3)$$

uma vez que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{e} \quad i \frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Observação 2.2. Introduzindo os operadores³

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

e usando (2.3), as equações de Cauchy-Riemann (2.1) podem também ser escritas como

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.4)$$

e a derivada (2.2) como

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0). \quad (2.5)$$

As equações de Cauchy-Riemann, na forma (2.4), evidenciam o facto de que uma função holomorfa f é independente da variável \bar{z} .

A pergunta natural que se coloca neste momento é a de saber se os três conceitos equivalentes apresentados no teorema anterior podem ser reformulados no contexto quaterniónico e, em caso afirmativo, se a equivalência de conceitos continua a ser uma realidade.

Tentaremos ao longo das secções seguintes responder a estas questões, considerando separadamente cada uma das três abordagens referidas: a de Cauchy, a de Weierstrass e a de Cauchy-Riemann.

³Estes operadores são conhecidos como operadores ou derivadas de Wirtinger. Podem ser obtidos considerando f como função de z e \bar{z} e notando que $x = (z + \bar{z})/2$ e $y = (z - \bar{z})/2i$.

2.2 A abordagem de Cauchy

Iniciamos nesta secção o estudo das funções quaterniônicas, ou seja, das funções que assumem valores em \mathbb{H} . Mais concretamente, consideramos ao longo deste trabalho, funções f definidas em domínios Ω de \mathbb{R}^4 da forma

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x)e_1 + f_2(x)e_2 + f_3(x)e_3, \quad x \in \Omega,$$

onde f_0, f_1, f_2, f_3 são funções reais.

A continuidade destas funções é obtida impondo, tal como no caso complexo, a continuidade das funções componentes reais f_i . Já a generalização do conceito clássico de derivada e diferenciabilidade de uma função complexa para funções quaterniônicas levanta uma série de dificuldades que abordamos com algum pormenor ao longo deste capítulo.

A álgebra dos quaterniões é uma álgebra de divisão tal como \mathbb{C} e \mathbb{R} . Desta forma, a diferenciação poderia também ser introduzida através dos limites

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)]h^{-1} \quad \text{ou} \quad \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}[f(x+h) - f(x)], \quad (2.6)$$

com $h \in \mathbb{H}$, e chamando funções \mathbb{H} -diferenciáveis a todas as funções para as quais tais limites existem e coincidem. Infelizmente (ou não!), esta noção clássica de diferenciabilidade é possível apenas em casos triviais.

Os primeiros autores que investigaram exaustivamente a existência de (2.6) para funções quaterniônicas foram N. M. Krylov, em 1947, ([20]) e o seu discípulo A. S. Mejlíkhzhon, em 1948, ([25]).

Teorema 2.2. (Krylov, Mejlíkhzhon)

Seja $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ uma função definida em Ω com valores em \mathbb{H} . Se o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}[f(x+h) - f(x)] \quad (2.7)$$

existe para todos os pontos $x \in \Omega$, então a função f tem a forma

$$f(x) = a + xb \quad a, b \in \mathbb{H}.$$

Analogamente, o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)]h^{-1} \quad (2.8)$$

existe para todos os pontos $x \in \Omega$, para funções f da forma

$$f(x) = a + bx \quad a, b \in \mathbb{H}.$$

Os resultados de Krylov permaneceram desconhecidos por muito tempo. J. Buff [5] provou, em 1973, que funções do tipo $f(x) = a + bx$, onde $b \in \mathbb{R}$ são as únicas para as quais os dois limites existem.

No mesmo ano C. A. Deavours publicou um documento [8] sobre cálculo quaterniônico onde mencionou as expressões (2.6). Ele percebeu que, neste sentido, a função $f(z) = z^2$, por exemplo, não é uma função quaterniônica diferenciável, facto que o motivou a analisar a abordagem de Riemann.

Sudbery's também tratou este problema, em [33], apresentando uma demonstração elegante dos resultados de Mejlkhzhon e de J. Buff, identificando \mathbb{H} com \mathbb{C}^2 e usando argumentos da teoria de análise complexa com duas variáveis.

2.3 A abordagem de Weierstrass

Dado que o conceito de diferenciabilidade, segundo Cauchy, não é uma forma apropriada de generalizar a noção de função holomorfa, vejamos agora o que se passa com a abordagem de Weierstrass, baseada na representação de uma função em série de potências.

Começemos, antes de mais, por clarificar o que se poderá entender por *monómio quaterniônico*. Como a multiplicação em \mathbb{H} não é comutativa, a generalização dos monómios complexos a funções monomiais de uma variável quaterniônica $x = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ poderia ser,

$$x \rightarrow a_0 x a_1 x \dots a_{n-1} x a_n,$$

com $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{H}$.

Notemos que as componentes reais x_0, x_1, x_2, x_3 de x podem escrever-se como somas de monómios quaterniónicos, a saber,

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{4}(x - e_1xe_1 - e_2xe_2 - e_3xe_3), \\ x_1 &= \frac{1}{4e_1}(x - e_1xe_1 + e_2xe_2 + e_3xe_3), \\ x_2 &= \frac{1}{4e_2}(x + e_1xe_1 - e_2xe_2 + e_3xe_3), \\ x_3 &= \frac{1}{4e_3}(x + e_1xe_1 + e_2xe_2 - e_3xe_3). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Consequentemente, toda a função \mathbb{R} -analítica em x_0, x_1, x_2, x_3 poderia tornar-se uma função *quaterniónica analítica*, bastando para isso substituir as potências de z na expansão em série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$, directamente pelas funções monomiais mencionadas em (2.9). Por outras palavras, as funções quaterniónicas que podem ser representadas por séries de potências de monómios quaterniónicos, no sentido anteriormente introduzido, são as funções complexas que são \mathbb{R} -analíticas. Mais uma vez, podemos concluir que esta abordagem não conduz a qualquer classe nova de funções.

2.4 A abordagem de Cauchy-Riemann

Como acabámos de observar, o conceito de função \mathbb{H} -diferenciável leva-nos a uma classe de funções muito restrita, uma vez que os limites (2.6) apenas existem para funções lineares.

A abordagem de Weirstrass, baseada em expansões em série de potências conduz-nos a uma classe demasiado ampla, onde toda a função real analítica se pode escrever como uma série de potências de um quaternião. Logo, não será também este o caminho mais indicado.

Resta verificar se a generalização das equações de Cauchy-Riemann poderá conduzir a uma teoria de funções quaterniónicas *holomorfas* interessante.

Foi o matemático suíço Fueter quem desenvolveu uma generalização apropriada das equações de Cauchy-Riemann para o caso quaterniónico. As actualmente chamadas *equações de Cauchy-Riemann-Fueter*, em homenagem ao seu inventor, foram apresentadas em 1935 ([12], [13]), quase um século depois da descoberta dos quaterniões de Hamilton. No Capítulo 3 deste trabalho, referimos alguns dos importantes contributos de Fueter na área da análise quaterniónica.

Consideremos então uma função quaterniónica f de uma variável quaterniónica $x = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^4$.

Definição 2.4. (Operador de Cauchy-Riemann generalizado)

O operador quaterniónico

$$\bar{\partial} := \frac{\partial}{\partial x_0} + e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (2.10)$$

é designado por operador de *Cauchy-Riemann generalizado*, uma vez que generaliza o operador clássico de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (2.11)$$

$z \in \mathbb{C}$, (ver Observação 2.2).

O operador *conjugado de Cauchy-Riemann generalizado*

$$\partial := \frac{\partial}{\partial x_0} - e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - e_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (2.12)$$

generaliza o operador

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (2.13)$$

Devido à não comutatividade de \mathbb{H} , a acção dos operadores (2.10) e (2.12) sobre funções $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ deve ser considerada à esquerda e à direita. Mais precisamente, tem-se

$$\bar{\partial}f = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 e_i e_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad f\bar{\partial} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 e_j e_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

Podemos agora apresentar a definição de Fueter de funções regulares, actualmente designadas por funções monogénicas (cf. (2.4)).

Definição 2.5. (Função monogénica)

A função f diz-se uma função **monogénica à esquerda** se é solução da equação

$$\bar{\partial}f = 0. \quad (2.14)$$

Analogamente, f diz-se uma função **monogénica à direita** se é solução da equação

$$f\bar{\partial} = 0. \quad (2.15)$$

A função f diz-se uma **função monogénica** se é monogénica à esquerda e à direita.

Usando a notação simplificada, $\partial_k f = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$, com $k = 0, 1, 2, 3$, podemos escrever (2.14) como

$$\begin{aligned} \partial_0 f_0 + e_1 \partial_0 f_1 + e_2 \partial_0 f_2 + e_3 \partial_0 f_3 + e_1 \partial_1 f_0 - \partial_1 f_1 + e_3 \partial_1 f_2 - e_2 \partial_1 f_3 + \\ + e_2 \partial_2 f_0 - e_3 \partial_2 f_1 - \partial_2 f_2 + e_1 \partial_2 f_3 + e_3 \partial_3 f_0 + e_2 \partial_3 f_1 - e_1 \partial_3 f_2 - \partial_3 f_3 = 0. \end{aligned}$$

A equação anterior é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{cases} \partial_0 f_0 - \partial_1 f_1 - \partial_2 f_2 - \partial_3 f_3 = 0 \\ \partial_0 f_1 + \partial_1 f_0 + \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 = 0 \\ \partial_0 f_2 - \partial_1 f_3 + \partial_2 f_0 + \partial_3 f_1 = 0 \\ \partial_0 f_3 + \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 + \partial_3 f_0 = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

As equações (2.16) são conhecidas como **equações de Cauchy-Riemann-Fueter** à esquerda.

Considerando agora a acção à direita do operador $\bar{\partial}$, tem-se

$$\begin{aligned} \partial_0 f_0 + \partial_0 f_1 e_1 + \partial_0 f_2 e_2 + \partial_0 f_3 e_3 + \partial_1 f_0 e_1 - \partial_1 f_1 - \partial_1 f_2 e_3 + \partial_1 f_3 e_2 + \\ + \partial_2 f_0 e_2 + \partial_2 f_1 e_3 - \partial_2 f_2 - \partial_2 f_3 e_1 + \partial_3 f_0 e_3 - \partial_3 f_1 e_2 + \partial_3 f_2 e_1 - \partial_3 f_3 = 0. \end{aligned}$$

A equação anterior é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{cases} \partial_0 f_0 - \partial_1 f_1 - \partial_2 f_2 - \partial_3 f_3 = 0 \\ \partial_0 f_1 + \partial_1 f_0 - \partial_2 f_3 + \partial_3 f_2 = 0 \\ \partial_0 f_2 + \partial_1 f_3 + \partial_2 f_0 - \partial_3 f_1 = 0 \\ \partial_0 f_3 - \partial_1 f_2 + \partial_2 f_1 + \partial_3 f_0 = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

As equações (2.17) são conhecidas como **equações de Cauchy-Riemann-Fueter** à direita.

De (2.16) e (2.17) resulta de imediato que uma função é monogénica à esquerda e à direita (na literatura chamada algumas vezes bi-monogénica) sse

$$\begin{cases} \partial_0 f_0 - \partial_1 f_1 - \partial_2 f_2 - \partial_3 f_3 = 0 \\ \partial_0 f_0 + \partial_1 f_0 = 0 \\ \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 = 0 \\ \partial_0 f_2 + \partial_2 f_0 = 0 \\ \partial_1 f_3 - \partial_3 f_1 = 0 \\ \partial_0 f_3 + \partial_3 f_0 = 0 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Exemplo 2.1. A função $f(z) = z$ não é monogénica à direita, nem à esquerda.

De facto, escrevendo $z = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, obtém-se

$$\begin{aligned} \bar{\partial} f(z) &= (\partial_0 + e_1 \partial_1 + e_2 \partial_2 + e_3 \partial_3)(x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \\ &= \partial_0(x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) + e_1 \partial_1(x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \\ &\quad + e_2 \partial_2(x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) + e_3 \partial_3(x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \\ &= 1 - 1 - 1 - 1 = -2 \neq 0. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$f(z)\bar{\partial} = (x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3)(\partial_0 + e_1 \partial_1 + e_2 \partial_2 + e_3 \partial_3) = 1 - 1 - 1 - 1 = -2 \neq 0.$$

Exemplo 2.2. As funções⁴ $z_k = x_k - x_0 e_k, k = 1, 2, 3$, são monogénicas à direita e à esquerda. Apresentamos os cálculos para z_1 , uma vez que a situação é análoga nos outros casos.

$$\begin{aligned} \bar{\partial} z_1 &= (\partial_0 + e_1 \partial_1 + e_2 \partial_2 + e_3 \partial_3)(x_1 - x_0 e_1) \\ &= \partial_0(x_1 - x_0 e_1) + e_1 \partial_1(x_1 - x_0 e_1) + e_2 \partial_2(x_1 - x_0 e_1) + e_3 \partial_3(x_1 - x_0 e_1) \\ &= -e_1 + e_1 = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_1 \bar{\partial} &= (x_1 - x_0 e_1)(\partial_0 + e_1 \partial_1 + e_2 \partial_2 + e_3 \partial_3) \\ &= \partial_0(x_1 - x_0 e_1) + \partial_1(x_1 - x_0 e_1)e_1 + \partial_2(x_1 - x_0 e_1)e_2 + \partial_3(x_1 - x_0 e_1)e_3 \\ &= -e_1 + e_1 = 0. \end{aligned}$$

⁴Estas funções são conhecidas como funções ou variáveis de Fueter.

Exemplo 2.3. O produto de duas variáveis de Fueter (distintas) não é uma função monogénica.

Consideremos, por exemplo, a função $f(z) = z_1 z_2 = (x_1 - x_0 e_1)(x_2 - x_0 e_2)$. Vejamos apenas o que se passa com $\bar{\partial}f(z)$.

$$\begin{aligned}\bar{\partial}f(z) &= \bar{\partial}(x_1 x_2 - x_1 x_0 e_2 - x_0 x_2 e_1 + x_0^2 e_3) \\ &= -x_1 e_2 - x_2 e_1 + 2x_0 e_3 + e_1(x_2 - x_0 e_2) + e_2(x_1 - x_0 e_1) \\ &= 2x_0 e_3\end{aligned}$$

Observação 2.3. Os exemplos anteriores mostram que a função z^n , mesmo para $n = 1$, não é monogénica. Além disso, o produto de funções monogénicas, como o apresentado no exemplo anterior, pode resultar numa função não monogénica.

Exemplo 2.4. O produto *simétrico*⁵ de duas variáveis de Fueter (distintas) é uma função monogénica.

Apresentamos os cálculos para $z_1 \times z_2$, uma vez que a situação é análoga nos outros casos. Uma vez mais, consideramos apenas a acção do operador à esquerda. De

$$z_1 \times z_2 = \frac{z_1 z_2 + z_2 z_1}{2} = x_1 x_2 - x_0 x_2 e_1 - x_0 x_1 e_2,$$

resulta

$$\begin{aligned}\bar{\partial}(z_1 \times z_2) &= (\partial_0 + e_1 \partial_1 + e_2 \partial_2 + e_3 \partial_3)(x_1 x_2 - x_0 x_2 e_1 - x_0 x_1 e_2) \\ &= -x_2 e_1 - x_1 e_2 + x_2 e_1 - x_0 e_3 + x_1 e_2 + x_0 e_3 = 0\end{aligned}$$

Apresentamos agora alguns resultados que tentam caracterizar as funções monogénicas em \mathbb{R}^4 e \mathbb{R}^3 . Recordamos, do capítulo anterior, que um quaternião $x = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathbb{H}$ pode ser identificado com o elemento $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$. Do mesmo modo, o paravector $x = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 \in \text{PVec } \mathbb{H}$ pode ser identificado com o elemento $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$.

Proposição 2.1. *Seja f uma função da forma*

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x)e_1 + f_2(x)e_2, \quad (2.19)$$

com $x \in \text{PVec } \mathbb{H}$, isto é, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Então, se f for uma função monogénica à esquerda, f é também monogénica à direita.

⁵Define-se produto simétrico $z \times w$ como sendo $z \times w = \frac{zw + wz}{2}$.

Demonstração. Para uma função da forma (2.19), as equações de Cauchy-Riemann-Fueter (2.16) escrevem-se como

$$\begin{cases} \partial_0 f_0 - \partial_1 f_1 - \partial_2 f_2 = 0 \\ \partial_0 f_1 + \partial_1 f_0 = 0 \\ \partial_0 f_2 + \partial_2 f_0 = 0 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

e as (2.17) como

$$\begin{cases} \partial_0 f_0 - \partial_1 f_1 - \partial_2 f_2 = 0 \\ \partial_0 f_1 + \partial_1 f_0 = 0 \\ \partial_0 f_2 + \partial_2 f_0 = 0 \\ -\partial_1 f_2 + \partial_2 f_1 = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Facilmente se conclui que, se (2.20) se verifica, isto é, se f é monogénica à esquerda, então (2.21) é válido e f é monogénica à direita. \square

Exemplo 2.5. A função $f(x_0 + \underline{x}) = x_0^2 + x_0 \underline{x} + \underline{x}^2$, onde $\underline{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2$, é monogénica à esquerda e à direita.

Como esta função é da forma (2.19), basta, pela proposição anterior, verificar que f é monogénica à esquerda, i.e. $\bar{\partial}f = 0$.

$$\begin{aligned} \bar{\partial}f &= \bar{\partial}(x_0^2 + x_0(x_1 e_1 + x_2 e_2) + (x_1 e_1 + x_2 e_2)^2) \\ &= \partial_0(x_0^2 + x_0(x_1 e_1 + x_2 e_2) + (x_1 e_1 + x_2 e_2)^2) \\ &\quad + e_1 \partial_1(x_0^2 + x_0(x_1 e_1 + x_2 e_2) + (x_1 e_1 + x_2 e_2)^2) \\ &\quad + e_2 \partial_2(x_0^2 + x_0(x_1 e_1 + x_2 e_2) + (x_1 e_1 + x_2 e_2)^2) \\ &= 2x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + e_1(x_0 e_1 - x_1) + e_2(x_0 e_2 - x_2) \\ &= 2x_0 - 2x_0 = 0. \end{aligned}$$

Proposição 2.2. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{H}$ uma função da forma*

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x)e_1 + f_2(x)e_2 + f_3(x)e_3. \quad (2.22)$$

Se f é uma função monogénica à esquerda e à direita e além disso $f(a) = 0$, para algum $a \in \Omega$, então $f_3 \equiv 0$, isto é, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Demonstração. Se f é uma função da forma (2.22), então $\partial_3 f_k = 0$, $k = 0, \dots, 3$. Sendo f monogénica à esquerda e à direita, então de (2.18) resulta

$$\partial_0 f_3 = \partial_1 f_3 = \partial_2 f_3 = 0,$$

donde se conclui que f_3 é constante em Ω . O resultado obtém-se, de imediato, uma vez que $f(a) = 0$, para algum $a \in \Omega$. \square

Observação 2.4. Se, na proposição anterior, considerarmos $x = x_0 + x_1 e_1$, então $\partial_k f_3 = \partial_k f_2 = 0$, $k = 0, \dots, 3$ e

$$\begin{cases} \partial_1 f_0 = -\partial_0 f_1 \\ \partial_0 f_0 = \partial_1 f_1 \end{cases} \quad (2.23)$$

isto é, a função é uma função de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 e as condições (2.23) são, como seria de esperar, as **condições de Cauchy-Riemann em \mathbb{C}** .

Em 1948, Mejlhzon [25] e mais tarde Sudbery [33], em 1979, mostram que a abordagem de Fueter é precisamente aquela que fornece uma classe de funções que generaliza a classe das funções complexas holomorfas. Actualmente, a teoria das funções quaterniónicas *regulares*, na terminologia de Fueter, ou funções monogénicas, na terminologia actual, contém resultados que *recuperam* (quase sem alterações importantes) os principais resultados relativos à teoria das funções holomorfas complexas.

Não podemos deixar de referir que, embora fora do âmbito do presente trabalho, existe actualmente uma teoria das funções monogénicas, baseada em abordagens não clássicas dos conceitos de Cauchy e Weierstrass de função holomorfa (ver, por exemplo, [24] para um enquadramento histórico detalhado deste problema).

2.5 A derivada de uma função monogénica

A relação do operador diferencial de Cauchy-Riemann (2.10) com o operador complexo (2.11) foi já evidenciada.

Procurando manter a analogia com \mathbb{C} e recordando (2.5) usamos, seguindo o trabalho de Malonek em [21, 22, 24],

$$\frac{1}{2}\partial f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - e_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) f, \quad (2.24)$$

como derivada hipercomplexa de uma função monogénica f e adoptamos também a notação $f' = \frac{1}{2}\partial f$.

Escrevendo

$$\bar{\partial} = \partial_0 + \partial_{\underline{x}} \quad \text{e} \quad \partial = \partial_0 - \partial_{\underline{x}}, \quad (2.25)$$

onde

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0} \quad \text{e} \quad \partial_{\underline{x}} = e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (2.26)$$

facilmente se conclui que, se f é monogénica, então $\partial f = 2\partial_0 f$, pelo que

$$f'(x) = \partial_0 f(x),$$

tal como no caso complexo (cf. (2.2)).

Exemplo 2.6. A função $f(x_0 + \underline{x}) = x_0^2 + x_0 \underline{x} + \underline{x}^2$, onde $\underline{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2$, é, como verificamos no exemplo anterior, monogénica à esquerda e à direita. Sendo assim,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\partial f(x) = \partial_0 f(x) = 2x_0 + \underline{x} = 2x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2.$$

Terminamos este capítulo com alguns resultados necessários no Capítulo 3, apresentando, nomeadamente, uma Regra de Leibniz para os operadores $\partial_{\underline{x}}$ e ∂ . Por razões históricas, começamos por considerar o operador $\partial_{\underline{x}}$ (ver [18]).

Teorema 2.3. *Regra de Leibniz para $\partial_{\underline{x}}$*

$$\partial_{\underline{x}}(fg) = (\partial_{\underline{x}}f)g + \bar{f}(\partial_{\underline{x}}g) + 2 \operatorname{Re}(f\partial_{\underline{x}})g.$$

Demonstração. Sejam $f = \sum_{i=0}^3 f_i e_i$ e $g = \sum_{j=0}^3 g_j e_j$. O produto destas duas funções pode escrever-se como

$$fg = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 f_i g_j e_i e_j.$$

Além disso

$$\partial_{\underline{x}}f = \sum_{k=1}^3 \sum_{i=0}^3 (\partial_k f_i) e_k e_i \quad \text{e} \quad f \partial_{\underline{x}} = \sum_{i=0}^3 \sum_{k=1}^3 (f_i \partial_k) e_i e_k,$$

donde se obtém

$$\text{Re}(f \partial_{\underline{x}}) = - \sum_{i=1}^3 f_i \partial_i.$$

Então

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}}(fg) &= \partial_{\underline{x}} \left(\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 f_i g_j e_i e_j \right) = \left(\sum_{k=1}^3 e_k \partial_k \right) \left(\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 f_i g_j e_i e_j \right) \\ &= \sum_{i,j=0}^3 \sum_{k=1}^3 \partial_k (f_i g_j) e_k e_i e_j \\ &= \sum_{i,j=0}^3 \sum_{k=1}^3 (\partial_k f_i) g_j e_k e_i e_j + \sum_{i,j=0}^3 \sum_{k=1}^3 f_i (\partial_k g_j) e_k e_i e_j. \end{aligned}$$

Denotando por S_1 e S_2 as somas

$$S_1 = \sum_{i,j=0}^3 \sum_{k=1}^3 (\partial_k f_i) g_j e_k e_i e_j \quad \text{e} \quad S_2 = \sum_{i,j=0}^3 \sum_{k=1}^3 f_i (\partial_k g_j) e_k e_i e_j,$$

de imediato se conclui que $S_1 = \sum_{i=0}^3 \sum_{k=1}^3 (\partial_k f_i) e_k e_i \sum_{j=0}^3 g_j e_j = (\partial_{\underline{x}}f)g$.

Para simplificar S_2 precisamos de mais alguns cálculos:

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^3 \left(f_0 (\partial_k g_j) e_k e_j + \sum_{i=1}^3 f_i (\partial_k g_j) e_k e_i e_j \right) \\ &= \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^3 f_0 (\partial_k g_j) e_k e_j + \sum_{j=0}^3 \left(\sum_{i,k=1}^3 f_i (\partial_k g_j) e_k e_i \right) e_j. \end{aligned}$$

Denotando agora por S_3 a soma $S_3 = \sum_{i,k=1}^3 f_i (\partial_k g_j) e_k e_i$ resulta

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{i,k=1, i \neq k}^3 f_i (\partial_k g_j) e_k e_i + \sum_{i=1}^3 f_i (\partial_i g_j) e_i e_i \\ &= - \sum_{i,k=1, i \neq k}^3 f_i e_i (\partial_k g_j) e_k - \sum_{i=1}^3 f_i (\partial_i g_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= - \left[\sum_{i,k=1}^3 f_i e_i (\partial_k g_j) e_k - \sum_{i=1}^3 f_i e_i (\partial_i g_j) e_i \right] - \sum_{i=1}^3 f_i (\partial_i g_j) \\
&= - \left[\sum_{i,k=1}^3 f_i e_i (\partial_k g_j) e_k + \sum_{i=1}^3 f_i (\partial_i g_j) \right] - \sum_{i=1}^3 f_i (\partial_i g_j) \\
&= - \sum_{i,k=1}^3 f_i e_i (\partial_k g_j) e_k - 2 \sum_{i=1}^3 f_i (\partial_i g_j)
\end{aligned}$$

Substituindo esta expressão na soma S_2 obtém-se

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^3 f_0 (\partial_k g_j) e_k e_j - \sum_{i,k=1}^3 \sum_{j=0}^3 f_i e_i (\partial_k g_j) e_k e_j - 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^3 f_i (\partial_i g_j) e_j \\
&= \sum_{k=1}^3 f_0 e_k \partial_k \sum_{j=0}^3 g_j e_j - \sum_{i=1}^3 f_i e_i \sum_{k=1}^3 e_k \partial_k \sum_{j=0}^3 g_j e_j - 2 \sum_{i=1}^3 f_i \partial_i \sum_{j=0}^3 g_j e_j \\
&= \left(\sum_{k=1}^3 \left(f_0 - \sum_{i=1}^3 f_i e_i \right) e_k \partial_k \right) g - 2 \left(\sum_{i=1}^3 f_i \partial_i \right) g \\
&= \left(\bar{f} \sum_{k=1}^3 e_k \partial_k \right) g + 2 \operatorname{Re}(f \partial_{\underline{x}}) g \\
&= \bar{f} \partial_{\underline{x}} g + 2 \operatorname{Re}(f \partial_{\underline{x}}) g.
\end{aligned}$$

O resultado é agora imediato somando S_1 e S_2 . □

Observação 2.5. Se f (ou g) for uma função real,

$$\partial_{\underline{x}}(fg) = (\partial_{\underline{x}}f)g + f(\partial_{\underline{x}}g).$$

Neste caso, são válidas as regras de derivação usual para obter $\partial_{\underline{x}}f$.

Corolário 2.1. *Regra de Leibniz para ∂*

$$\partial(fg) = (\partial f)g - \bar{f}(\bar{\partial}g) + 2 \operatorname{Re}(f\partial)g.$$

Demonstração. Recorrendo ao resultado provado no teorema anterior temos

$$\begin{aligned}
\partial(fg) &= (\partial_0 - \partial_{\underline{x}})(fg) = \partial_0(fg) - \partial_{\underline{x}}(fg) \\
&= (\partial_0 f)g + f(\partial_0 g) - ((\partial_{\underline{x}} f)g + \bar{f}\partial_{\underline{x}}g + 2\operatorname{Re}(f\partial_{\underline{x}})g) \\
&= (\partial_0 f - \partial_{\underline{x}} f)g + f\partial_0 g - \bar{f}\partial_{\underline{x}}g - 2\operatorname{Re}(f\partial_{\underline{x}})g \\
&= (\partial f)g + f\partial_0 g - \bar{f}\partial_{\underline{x}}g - 2\operatorname{Re}(f\partial_{\underline{x}})g.
\end{aligned}$$

Calculemos

$$\begin{aligned}
f\partial_0 g - \bar{f}\partial_{\underline{x}}g &= (f_0 + \underline{f})\partial_0 g - (f_0 - \underline{f})\partial_{\underline{x}}g = f_0(\partial_0 g - \partial_{\underline{x}}g) + \underline{f}(\partial_0 g + \partial_{\underline{x}}g) \\
&= f_0(-\partial_0 g - \partial_{\underline{x}}g + 2\partial_0 g) + \underline{f}\bar{\partial}g = (-f_0 - \underline{f})\bar{\partial}g + 2f_0\partial_0 g \\
&= -\bar{f}\bar{\partial}g + 2f_0\partial_0 g.
\end{aligned}$$

Substituindo na expressão anterior obtemos

$$\begin{aligned}
\partial(fg) &= (\partial f)g - \bar{f}\bar{\partial}g + 2f_0\partial_0 g - 2\operatorname{Re}(f\partial_{\underline{x}})g \\
&= (\partial f)g - \bar{f}(\bar{\partial}g) + 2\operatorname{Re}(f\partial)g.
\end{aligned}$$

□

Observação 2.6. Se f e g forem funções monogénicas, o resultado anterior pode escrever-se como

$$\partial(fg) = (\partial f)g + 2\operatorname{Re}(f\partial)g.$$

2.6 Considerações computacionais

No âmbito deste trabalho foram desenvolvidos quatro procedimentos em Maple que correspondem a versões simplificadas e ajustadas à notação adoptada, dos procedimentos `QpoD_L`, `QpoD_R` e `QpoDbar_L`, `QpoDbar_R` da *package Quat.*:

`QopDerivbar_L` e `QopDerivbar_R` - operador de Cauchy-Riemann em \mathbb{H} (acção à esquerda e à direita, respectivamente);

`QopDeriv_L` e `QopDeriv_R` - operador conjugado de Cauchy-Riemann em \mathbb{H} (acção à esquerda e à direita, respectivamente).

Em anexo apresentamos o código desenvolvido. Para ilustrar a aplicação destes procedimentos, retomamos alguns dos exemplos apresentados na Secção 2.4.

Exemplo 2.7. Consideremos uma vez mais a função $f(x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Vejamos novamente que esta função não é monogénica, assim como qualquer sua potência.

```
> f := x0+x1*qi+x2*qj+x3*qk:
> QopDerivbar_L(f);
                                -2
> QopDerivbar_R(f);
                                -2
> f2 := Qpot(f, 2);
    f2 := x0^2 - x1^2 - x2^2 - x3^2 + 2 x0 x1 qi + 2 x0 x2 qj + 2 x0 x3 qk
> QopDerivbar_L(f2);
                                -4 x0
> evalb(QopDerivbar_R(Qpot(f, 5)) = 0);
                                false
```

Exemplo 2.8. Consideremos agora as variáveis de Fueter z_1 e z_2 . Vejamos, novamente, que são ambas monogénicas, mas o seu produto não o é. Em contrapartida, tal como já mencionado, o produto simétrico $z_1 \times z_2$ é uma função monogénica.

```
> z1:=x1-x0*qi;z2:=x2-x0*qj:
> QopDerivbar_L(z1);QopDerivbar_R(z1);
                                0
                                0
> QopDerivbar_L(z2);QopDerivbar_R(z2);
                                0
                                0
> produto:=Qmult(z1,z2);
    produto := x1 x2 - x0 x2 qi - x1 x0 qj + x0^2 qk
```

```

> QopDerivbar_L(produto);QopDerivbar_R(produto);
      2 x0 qk
      2 x0 qk

> Psimetrico:= (Qmult(z1, z2)+Qmult(z2, z1))/2;
      Psimetrico := x1 x2 - x0 x2 qi - x1 x0 qj

> QopDerivbar_L(Psimetrico);QopDerivbar_R(Psimetrico);
      0
      0

```

Como as funções são monogénicas podemos calcular as correspondentes derivadas.

```

> z1linha := (1/2)*QopDeriv_L(z1);
      z1linha := -qi

> z2linha := (1/2)*QopDeriv_L(z2);
      z2linha := -qj

> z1z2 := (1/2)*QopDeriv_L(Psimetrico);
      z1z2 := -x2 qi - x1 qj

```

Exemplo 2.9. Pretendemos agora ilustrar que a função

$$f(x_0 + \underline{x}) = x_0^2 + \frac{2}{3}x_0\underline{x} + \frac{1}{3}\underline{x}^2$$

é monogénica. No Maple representamos $\underline{x} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ por \mathbf{a} . Obtemos com a seguinte sequência de comandos o nosso objectivo.

```

> a:=x1*qi+x2*qj+x3*qk:
> f:=x0^2+(2/3)*x0*a+(1/3)*Qpot(a,2);
      f := x0^2 + \frac{2}{3} x0 (x1 qi + x2 qj + x3 qk) - \frac{1}{3} x1^2 - \frac{1}{3} x2^2 - \frac{1}{3} x3^2
> QopDerivbar_L(f);QopDerivbar_R(f);
      0
      0

```

Como a função é monogénica, calculamos também a derivada da função da seguinte forma:

> (1/2)*QopDeriv_L(f);

$$2x_0 + \frac{2}{3}x_1q_i + \frac{2}{3}x_2q_j + \frac{2}{3}x_3q_k$$

Logo, a derivada da função é $f'(x) = 2x_0 + \frac{2}{3}x_1e_1 + \frac{2}{3}x_2e_2 + \frac{2}{3}x_3e_3$.

Capítulo 3

Construção de funções monogénicas em \mathbb{H}

Neste capítulo apresentamos técnicas, baseadas no trabalho de R. Fueter, para construir funções monogénicas em \mathbb{H} , partindo do conhecimento da correspondente função complexa holomorfa. A aplicação destes métodos é ilustrada através de vários exemplos.

3.1 Rudolf Fueter

Karl Rudolf Fueter, filho de Eduard Rudolf Fueter e de Adèle Gelzer inicia os seus estudos na sua cidade natal antes de ir para Göttingen, em 1899, estudar com Hilbert. Estuda os números quadráticos e faz o seu doutoramento, supervisionado por Hilbert, em 1903, com uma tese intitulada “*Der Klassenkörper der quadratischen Körper und die komplexe Multiplikation*”.

Após ter obtido o seu doutoramento Fueter viaja por diversos centros europeus dedicando-se sempre à actividade Matemática.



Karl Rudolf Fueter
(Basel 1880 - Brunnen 1950)

Enquanto prossegue com os seus estudos, passa algum tempo em Paris, Viena e, finalmente, em Londres. É então, em 1907, nomeado professor na Universidade de Marburg e na Mining Academy em Clausthal antes de ser nomeado professor de Matemática em Basel, em 1908. Nesse mesmo ano casa-se com Amélie von Heusinger de quem tem uma filha.

Em 1913, deixa Basel para leccionar a disciplina de Matemática na Universidade Técnica de Karlsruhe, cargo onde só se manteve por três anos mudando-se em seguida para a Universidade de Zurique.

A sua primeira e principal publicação é “*Synthetische Zahlentheori*” datada de 1917. Este trabalho é um sucesso, tendo sido publicado uma terceira edição em 1950, ano da sua morte. Fueter faz trabalhos importantes que resume numa obra em dois volumes “*Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der Funktionen elliptische*”. O primeiro dos dois volumes é publicado em 1924 e o segundo três anos mais tarde. Entre estes dois volumes publica pela primeira vez, em 1926, outra grande obra, “*Das mathematische Werkzeug des Chemikers, Biologen und Statistiker*”, seguindo-se-lhe mais três edições, a última das quais em 1947.

Fueter é co-fundador da Swiss Mathematical Society, que surge em 1910, tornando-se o seu primeiro presidente. Também assume o cargo de reitor da Universidade de Zurique, função que desempenhou entre 1920 e 1922. Como membro da Swiss Natural Science Society, trabalha como editor de um grande projecto para publicar as obras completas de Euler. Estabelece sempre contactos com matemáticos de todo o mundo tendo-lhe sido prestadas várias homenagens. Saliente-se que é também membro correspondente do Instituto de Coimbra, desde 1924. Em 1928 cria a revista *Commentarii Mathematici Helvetici*.

Fueter visita a Universidade de Coimbra, em 1932, e a Revista da Faculdade de Ciências da Universidade (volume 2, n.º 4 (1932)), publica uma nota sobre essa visita. Ele assinala a sua vinda a Coimbra, numa agradável exposição onde apresenta como referências históricas os trabalhos de Hamilton sobre quaterniões. Assim, faz reaparecer nessa faculdade, um tema que já tinha suscitado, no passado, grande interesse. De facto, em 1884, Augusto d’Arzilla Fonseca publicou o trabalho “*Princi-*

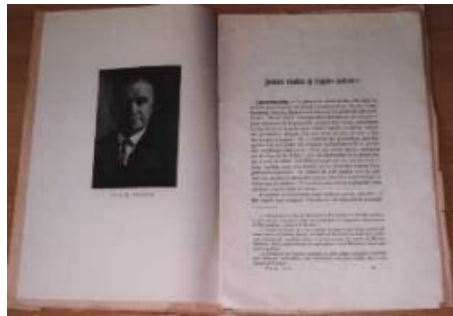


Figura 3.1: Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra

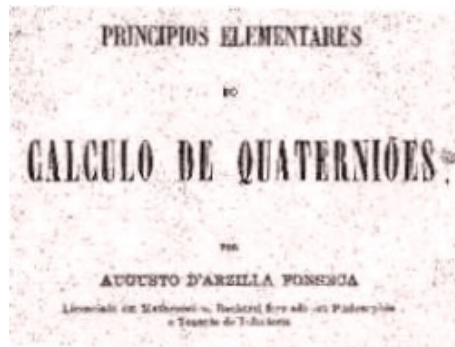


Figura 3.2: *Principios Elementares do Calculo de Quaterniões*

pios Elementares do Calculo de Quaterniões". Após a sua visita a Portugal, escreve um artigo sobre Coimbra (Figura 3.3) onde refere com dedicação aspectos da vida académica e menciona Costa Lobo como o famoso astrónomo de Coimbra.

Em 1935, em conjunto com os seus alunos, Fueter desenvolve um conceito para a criação de funções holomorfas quaterniónicas, tendo feito importantes progressos que foram publicados. A partir de 1940, o seu grupo inicia a construção de uma teoria no estudo da Álgebra de Clifford. Nos seus trabalhos [11], [12], [13] e [14], Fueter formula um método para “transferir” funções complexas para funções quaterniónicas como estudaremos de seguida.



Figura 3.3: Neue Zürcher Zeitung; 28./29. 12, 1932

3.2 O método de Fueter

O resultado seguinte, estabelecido por Fueter em 1935 e generalizado por vários autores posteriormente, representa uma ferramenta poderosa e ainda actual no que diz respeito à construção de funções monogénicas.

Teorema 3.1. (*Teorema de Fueter*)

Consideremos uma função complexa holomorfa

$$f(x_0, y) = u(x_0, y) + iv(x_0, y),$$

definida num domínio $\Omega \subseteq \mathbb{C}^+ = \{x + iy : y > 0\}$. Seja G a função quaterniónica definida por

$$G(x_0, \underline{x}) = u(x_0, |\underline{x}|) + \omega(\underline{x})v(x_0, |\underline{x}|),$$

onde, como habitualmente, $\omega = \omega(\underline{x}) := \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}$. A função $F := \Delta G$, onde $\Delta = \partial\bar{\partial} = \bar{\partial}\partial$ é o operador de Laplace, é uma função monogénica, isto é,

$$\bar{\partial}F = \bar{\partial}(\partial\bar{\partial})G = 0.$$

Antes de iniciarmos a demonstração do Teorema de Fueter, apresentamos alguns resultados auxiliares.

Lema 3.1. *Seja $x = x_0 + \underline{x} = x_0 + \omega|\underline{x}| \in \mathbb{H}$ e $\partial_{\underline{x}}$ o operador diferencial introduzido em (2.26). Então,*

$$1. \partial_{\underline{x}}\underline{x} = -3,$$

$$2. \partial_{\underline{x}}|\underline{x}| = \omega,$$

$$3. \partial_{\underline{x}}\omega = -\frac{2}{|\underline{x}|},$$

$$4. \partial_{\underline{x}}^2|\underline{x}| = -\frac{2}{|\underline{x}|},$$

$$5. \partial_{\underline{x}}^2\omega = \frac{2}{|\underline{x}|^2}\omega,$$

$$6. \partial_{\underline{x}}\left(\frac{2}{|\underline{x}|^2}\right) = -\frac{4}{|\underline{x}|^3}\omega,$$

$$7. \text{ Se } r = |\underline{x}| \text{ e } u = u(x_0, r) \text{ é uma função real, então } \partial_{\underline{x}}u(x_0, r) = \omega \frac{\partial u}{\partial r}(x_0, r).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} 1. \partial_{\underline{x}}\underline{x} &= (e_1\partial_1 + e_2\partial_2 + e_3\partial_3)(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) \\ &= e_1^2\partial_1x_1 + e_2^2\partial_2x_2 + e_3^2\partial_3x_3 \\ &= -3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \partial_{\underline{x}}|\underline{x}| &= (e_1\partial_1 + e_2\partial_2 + e_3\partial_3)\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right) \\ &= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}e_1 + \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}e_2 + \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}e_3 \\ &= \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} = \omega. \end{aligned}$$

3. Usando a Regra de Leibniz (ver também Observação 2.5), obtém-se

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}}\omega &= \partial_{\underline{x}}\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} = (\partial_{\underline{x}}\underline{x})\frac{1}{|\underline{x}|} + \underline{x}\partial_{\underline{x}}\frac{1}{|\underline{x}|} \\ &= -\frac{3}{|\underline{x}|} + \underline{x}\left(-\frac{\partial_{\underline{x}}|\underline{x}|}{|\underline{x}|^2}\right) = -\frac{3}{|\underline{x}|} + \underline{x}\left(-\frac{\underline{x}}{|\underline{x}||\underline{x}|^2}\right) = -\frac{3}{|\underline{x}|} + \frac{1}{|\underline{x}|} \\ &= -\frac{2}{|\underline{x}|}. \end{aligned}$$

$$4. \partial_{\underline{x}}^2|\underline{x}| = \partial_{\underline{x}}\omega = -\frac{2}{|\underline{x}|}.$$

$$5. \partial_{\underline{x}}^2 \omega = \partial_{\underline{x}} \left(-\frac{2}{|\underline{x}|} \right) = \frac{2}{|\underline{x}|^2} \omega.$$

$$6. \partial_{\underline{x}} \left(\frac{2}{|\underline{x}|^2} \right) = -\frac{2\partial_{\underline{x}}(|\underline{x}|)^2}{|\underline{x}|^4} = -\frac{4|\underline{x}|\partial_{\underline{x}}|\underline{x}|}{|\underline{x}|^4} = -\frac{4|\underline{x}|\omega}{|\underline{x}|^4} = -\frac{4}{|\underline{x}|^3} \omega.$$

7. Como $\partial_{\underline{x}} u = (e_1 \partial_1 + e_2 \partial_2 + e_3 \partial_3)u$ e

$$\partial_k u = \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{x_k}{|\underline{x}|}, \quad k = 1, 2, 3,$$

então

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}} u &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{x_1}{|\underline{x}|} e_1 + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{x_2}{|\underline{x}|} e_2 + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{x_3}{|\underline{x}|} e_3 \\ &= \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3}{|\underline{x}|} \right) = \omega \frac{\partial u}{\partial r}. \end{aligned}$$

□

Demonstração do Teorema de Fueter

Dada a função quaterniônica

$$G(x_0, y) = u(x_0, y) + \omega v(x_0, y),$$

com $y = |\underline{x}|$, pretende provar-se que a função $F = \Delta G = (\partial_0^2 + \partial_{\underline{x}}^2)G$ é monogénica.

Usando a Regra de Leibniz, podemos escrever

$$\partial_{\underline{x}} G = \partial_{\underline{x}} u + \partial_{\underline{x}}(\omega v) = \partial_{\underline{x}} u + (\partial_{\underline{x}} \omega)v + \omega(\partial_{\underline{x}} v)$$

e utilizando os resultados da proposição anterior obtemos

$$\partial_{\underline{x}} G = \omega \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2}{|\underline{x}|} v + \omega^2 \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Assim,

$$\partial_{\underline{x}} G = - \left(\frac{2}{|\underline{x}|} v + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \omega \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.1)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}}^2 G &= \partial_{\underline{x}} \left(-\frac{2}{|\underline{x}|} v - \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \partial_{\underline{x}} \left(-\frac{2}{|\underline{x}|} \right) v - \frac{2}{|\underline{x}|} \partial_{\underline{x}} v - \partial_{\underline{x}} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + (\partial_{\underline{x}} \omega) \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \partial_{\underline{x}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

e finalmente,

$$\partial_{\underline{x}}^2 G = - \left(\frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \omega \left(\frac{2}{|\underline{x}|^2} v - \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (3.2)$$

Aplicamos agora o operador de Laplace a G , i.e.

$$\begin{aligned} \Delta G &= \partial_0^2 G - \partial_{\underline{x}}^2 G = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \omega \frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} - \partial_{\underline{x}}^2 G \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{2}{|\underline{x}|^2} v + \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Relembremos que a função $f(x_0, y) = u(x_0, y) + iv(x_0, y)$ é holomorfa, logo

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x_0} \end{cases} \quad (3.3)$$

donde se conclui que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_0 \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x_0} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \quad (3.4)$$

isto é, u e v são, como é bem sabido, funções harmónicas. Então,

$$\Delta G = \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial u}{\partial y} - \omega \left(\frac{2}{|\underline{x}|^2} v - \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (3.5)$$

Resta agora provar que ΔG é uma função monogénica, isto é, $\bar{\partial}(\Delta G) = 0$ ou ainda

$$(\partial_0 + \partial_{\underline{x}})(\Delta G) = 0.$$

Comecemos por observar que

$$\partial_0(\Delta G) = \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial y} - \omega \left(\frac{2}{|\underline{x}|^2} \frac{\partial v}{\partial x_0} - \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial^2 v}{\partial x_0 \partial y} \right)$$

e

$$\partial_{\underline{x}}(\Delta G) = \partial_{\underline{x}}(U + \omega V),$$

onde $U = \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial u}{\partial y}$ e $V = -\frac{2}{|\underline{x}|^2} v + \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial v}{\partial y}$. A expressão anterior é equivalente a

$$\partial_{\underline{x}}(\Delta G) = \partial_{\underline{x}}U + (\partial_{\underline{x}}\omega)V + \omega(\partial_{\underline{x}}V) = \partial_{\underline{x}}U - \frac{2}{|\underline{x}|}V + \omega(\partial_{\underline{x}}V). \quad (3.6)$$

Como

$$\partial_{\underline{x}}U = \partial_{\underline{x}} \left(\frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \partial_{\underline{x}} \left(\frac{2}{|\underline{x}|} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2}{|\underline{x}|} \partial_{\underline{x}} \frac{\partial u}{\partial y} = \omega \left(-\frac{2}{|\underline{x}|^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.7)$$

e

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}}V &= \partial_{\underline{x}} \left(-\frac{2}{|\underline{x}|^2} v + \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \partial_{\underline{x}} \left(-\frac{2}{|\underline{x}|^2} \right) v - \frac{2}{|\underline{x}|^2} \partial_{\underline{x}} v + \partial_{\underline{x}} \left(\frac{2}{|\underline{x}|} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{|\underline{x}|} \partial_{\underline{x}} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \omega \left(\frac{4}{|\underline{x}|^3} v - \frac{2}{|\underline{x}|^2} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{|\underline{x}|^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &= \omega \left(\frac{4}{|\underline{x}|^3} v - \frac{4}{|\underline{x}|^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

substituindo (3.7) e (3.8) em (3.6), obtém-se

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}}(\Delta G) &= \omega \left(-\frac{2}{|\underline{x}|^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{2}{|\underline{x}|} \left(-\frac{2}{|\underline{x}|^2} v + \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &\quad - \left(\frac{4}{|\underline{x}|^3} v - \frac{4}{|\underline{x}|^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Então,

$$\partial_{\underline{x}}(\Delta G) = -\frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \omega \left(-\frac{2}{|\underline{x}|^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{\partial}(\Delta G) = (\partial_0 + \partial_{\underline{x}})(\Delta G) &= \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial y} - \omega \left(\frac{2}{|\underline{x}|^2} \frac{\partial v}{\partial x_0} - \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial^2 v}{\partial x_0 \partial y} \right) \\ &\quad - \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \omega \left(-\frac{2}{|\underline{x}|^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \end{aligned}$$

donde se conclui, finalmente, $\bar{\partial}(\Delta G) = \frac{2}{|\underline{x}|} \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0$. \square

3.3 Exemplos

A ideia de Fueter para gerar funções monogénicas a partir de funções complexas holomorfas pode ser descrita através do seguinte algoritmo:

1. Escolher uma função complexa holomorfa

$$f(x_0, y) = u(x_0, y) + iv(x_0, y).$$

2. Substituir a unidade imaginária i por $\omega = \omega(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}$. Note-se que sendo $\omega^2 = -1$, ω pode ser visto como uma unidade imaginária variável, já que depende de \underline{x} .

3. Substituir y por

$$y(x_1, x_2, x_3) = |\underline{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

A aplicação dos passos 1. a 3. permite construir uma função quaterniónica

$$G(x_0 + \underline{x}) = u(x_0, |\underline{x}|) + \omega v(x_0, |\underline{x}|).$$

A função quaterniónica monogénica F , correspondente a f , pode obter-se aplicando a G o operador de Laplace, i.e.,

$$F(x) = \Delta G(x),$$

onde, de (3.5),

$$\Delta G(x) = \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, |\underline{x}|) - \omega \left(\frac{2}{|\underline{x}|^2} v(x_0, |\underline{x}|) - \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, |\underline{x}|) \right).$$

De seguida iremos construir várias funções quaterniónicas monogénicas partindo da correspondente função complexa.

Exemplo 3.1. Consideremos a função polinomial complexa $f(z) = z^3$. Esta função pode escrever-se como

$$f(z) = f(x_0, y) = (x_0 + iy)^3 = x_0^3 - 3x_0y^2 + i(3x_0^2y - y^3),$$

ou seja,

$$f(x_0, y) = u(x_0, y) + iv(x_0, y),$$

onde

$$u(x_0, y) = x_0^3 - 3x_0y^2 \quad \text{e} \quad v(x_0, y) = 3x_0^2y - y^3.$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y) = -6x_0y \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y) = 3x_0^2 - 3y^2,$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \Delta G(x_0 + \underline{x}) &= \frac{2}{|\underline{x}|}(-6x_0|\underline{x}|) - \omega \left(\frac{2}{|\underline{x}|^2}(3x_0^2|\underline{x}| - |\underline{x}|^3) - \frac{2}{|\underline{x}|}(3x_0^2 - 3|\underline{x}|^2) \right) \\ &= -12x_0 - 4\omega|\underline{x}|. \end{aligned}$$

A função quaterniônica que se obtém aplicando o operador de Laplace à função G é a seguinte função monogénica:

$$F(x_0 + \underline{x}) = \Delta G(x_0 + \underline{x}) = -12x_0 - 4\underline{x}.$$

A generalização deste procedimento para potências de grau n pode também ser feita.

Exemplo 3.2. Consideremos a função polinomial $f(z) = z^n$. Como

$$\begin{aligned} (x_0 + iy)^n &= \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} x_0^{n-s} (iy)^s \\ &= \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2m} x_0^{n-2m} (iy)^{2m} + \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2m+1} x_0^{n-2m-1} (iy)^{2m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2m} (-1)^m x_0^{n-2m} y^{2m} + i \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2m+1} (-1)^m x_0^{n-2m-1} y^{2m+1}, \end{aligned}$$

as funções u e v são, neste caso,

$$u(x_0, y) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2m} (-1)^m x_0^{n-2m} y^{2m}$$

e

$$v(x_0, y) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2m+1} (-1)^m x_0^{n-2m-1} y^{2m+1}.$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y) = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2m} (-1)^m x_0^{n-2m} 2m y^{2m-1}$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2m+1} (-1)^m x_0^{n-2m-1} (2m+1) y^{2m}.$$

Então

$$\frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, |\underline{x}|) = 4 \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2m} (-1)^m m x_0^{n-2m} |\underline{x}|^{2m-2}$$

e

$$\begin{aligned} -\frac{2}{|\underline{x}|^2} v(x_0, |\underline{x}|) + \frac{2}{|\underline{x}|} \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, |\underline{x}|) &= -2 \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2m+1} (-1)^m x_0^{n-2m-1} |\underline{x}|^{2m-1} \\ &\quad + 2 \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2m+1} (-1)^m x_0^{n-2m-1} (2m+1) |\underline{x}|^{2m-1} \\ &= 4 \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2m+1} (-1)^m m x_0^{n-2m-1} |\underline{x}|^{2m-1}. \end{aligned}$$

Assim, a função monogénica correspondente às potências complexas de ordem n , tem como parte *imaginária*

$$V(x_0, |\underline{x}|) = 4 \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2m+1} (-1)^m m x_0^{n-2m-1} |\underline{x}|^{2m-1}$$

e como parte real

$$U(x_0, |\underline{x}|) = 4 \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2m} (-1)^m m x_0^{n-2m} |\underline{x}|^{2m-2}.$$

Observação 3.1. Notemos que, se $n = 3$, então

$$U(x_0, |\underline{x}|) = 4 \sum_{m=1}^1 \binom{3}{2m} (-1)^m m x_0^{3-2m} |\underline{x}|^{2m-2} = -12x_0$$

e

$$V(x_0, |\underline{x}|) = 4 \sum_{m=1}^1 \binom{3}{2m+1} (-1)^m m x_0^{3-2m-1} |\underline{x}|^{2m-1} = -4|\underline{x}|,$$

obtendo-se como seria de esperar,

$$F := \Delta G = -12x_0 - 4|\underline{x}|\omega(\underline{x}) = -12x_0 - 4\underline{x},$$

(cf. Exemplo 3.1).

Exemplo 3.3. Consideremos a função complexa $f(z) = \frac{1}{z}$. Como

$$f(z) = f(x_0, y) = \frac{1}{x_0 + iy} = \frac{x_0}{x_0^2 + y^2} - i \frac{y}{x_0^2 + y^2},$$

conclui-se que

$$u(x_0, y) = \frac{x_0}{x_0^2 + y^2} \quad \text{e} \quad v(x_0, y) = -\frac{y}{x_0^2 + y^2}.$$

Assim

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y) = -\frac{2yx_0}{(x_0^2 + y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y) = -\frac{x_0^2 - y^2}{(x_0^2 + y^2)^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta G(x_0 + \underline{x}) &= \frac{2}{|\underline{x}|} \left(\frac{-2|\underline{x}|x_0}{(x_0^2 + |\underline{x}|^2)^2} \right) - \omega \left(\frac{2}{|\underline{x}|^2} \left(-\frac{|\underline{x}|}{x_0^2 + |\underline{x}|^2} \right) - \frac{2}{|\underline{x}|} \left(-\frac{x_0^2 - |\underline{x}|^2}{(x_0^2 + |\underline{x}|^2)^2} \right) \right) \\ &= -\frac{4x_0}{(x_0^2 + |\underline{x}|^2)^2} - \omega \left(-\frac{2}{|\underline{x}|(x_0^2 + |\underline{x}|^2)} + \frac{2x_0^2 - 2|\underline{x}|^2}{|\underline{x}|(x_0^2 + |\underline{x}|^2)^2} \right) \\ &= -\frac{4x_0}{(x_0^2 + |\underline{x}|^2)^2} - \omega \left(\frac{-2x_0^2 - 2|\underline{x}|^2 + 2x_0^2 - 2|\underline{x}|^2}{|\underline{x}|(x_0^2 + |\underline{x}|^2)^2} \right) \\ &= -\frac{4x_0}{|x|^2} + \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} \frac{4|\underline{x}|}{|\underline{x}|^2} = -\frac{4}{|x|^2}(x_0 - \underline{x}) = -\frac{4\bar{x}}{|x|^2}. \end{aligned}$$

3.4 Uma variante do método de Fueter

O método de Fueter para gerar funções monogénicas serviu de inspiração a vários autores que conseguiram obter variantes deste método, assim como generalizações

para dimensões superiores a 4. Ainda em \mathbb{R}^4 , uma ideia muito simples foi apresentada em [10], a qual pode facilmente ser usada, com um menor esforço computacional, para produzir funções monogénicas em \mathbb{H} .

Teorema 3.2. *Seja $f(x_0, y) = u(x_0, y) + iv(x_0, y)$ uma função complexa holomorfa definida num domínio $G \subseteq \mathbb{C}$. Designemos por F a função obtida de f substituindo:*

1. a unidade imaginária i por $\mathbf{i} = i_1e_1 + i_2e_2 + i_3e_3$ com

$$\mathbf{i}^2 = -1 \Leftrightarrow i_1^2 + i_2^2 + i_3^2 = 1$$

2. Substituir y por $\mathbf{y} = i_1x_1 + i_2x_2 + i_3x_3 + c$, com c constante real, isto é,

$$F(x_0, y) = u(x_0, \mathbf{y}) + \mathbf{i}v(x_0, \mathbf{y}).$$

Então, $\bar{\partial}F = F\bar{\partial} = 0$, ou seja, F é uma função monogénica.

Demonstração. De definição de \mathbf{y} resulta que

$$\partial_{\underline{x}}\mathbf{y} = (e_1\partial_1 + e_2\partial_2 + e_3\partial_3)(i_1x_1 + i_2x_2 + i_3x_3 + c) = i_1e_1 + i_2e_2 + i_3e_3 = \mathbf{i}.$$

Por outro lado, se $f(x_0, y) = u(x_0, y) + iv(x_0, y)$ é uma função holomorfa, então

$$\partial_{\underline{x}}u(x_0, \mathbf{y}) = \partial_{\underline{x}}\mathbf{y} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{y}}(x_0, \mathbf{y}) = \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{y}}(x_0, \mathbf{y}) = -\mathbf{i} \frac{\partial v}{\partial x_0}(x_0, \mathbf{y}) = -\mathbf{i}\partial_0v(x_0, \mathbf{y})$$

e

$$\partial_{\underline{x}}v(x_0, \mathbf{y}) = \partial_{\underline{x}}\mathbf{y} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{y}}(x_0, \mathbf{y}) = \mathbf{i} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{y}}(x_0, \mathbf{y}) = \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x_0}(x_0, \mathbf{y}) = \mathbf{i}\partial_0u(x_0, \mathbf{y}).$$

Então

$$\begin{aligned} \bar{\partial}F &= (\partial_0 + \partial_{\underline{x}})(u(x_0, \mathbf{y}) + \mathbf{i}v(x_0, \mathbf{y})) \\ &= \partial_0u(x_0, \mathbf{y}) + \mathbf{i}\partial_0v(x_0, \mathbf{y}) + \partial_{\underline{x}}u(x_0, \mathbf{y}) + \mathbf{i}\partial_{\underline{x}}v(x_0, \mathbf{y}) \\ &= \partial_0u(x_0, \mathbf{y}) + \mathbf{i}\partial_0v(x_0, \mathbf{y}) - \mathbf{i}\partial_0v(x_0, \mathbf{y}) + \mathbf{i}^2\partial_0u(x_0, \mathbf{y}) = 0. \end{aligned}$$

□

Observação 3.2. Uma escolha possível para \mathbf{i} e \mathbf{y} é fazer $i_1 = i_2 = i_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $c = 0$. Neste caso a função quaterniônica monogénica que se obtém é

$$F(x) = u\left(x_0, \frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}}\right) + \frac{e_1+e_2+e_3}{\sqrt{3}}v\left(x_0, \frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}}\right). \quad (3.9)$$

Exemplo 3.4. Consideremos a função polinomial complexa $f(z) = z^3$. Aplicando (3.9) a

$$f(z) = z^3 = x_0^3 - 3x_0y^2 + i(3x_0^2y - y^3),$$

obtém-se

$$F(x) = x_0^3 - 3x_0\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{e_1+e_2+e_3}{\sqrt{3}}\left(3x_0^2\frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}} - \frac{(x_1+x_2+x_3)^3}{3\sqrt{3}}\right),$$

isto é,

$$F(x) = x_0^3 - x_0(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (e_1 + e_2 + e_3)\left(x_0^2(x_1 + x_2 + x_3) - \frac{1}{9}(x_1 + x_2 + x_3)^3\right).$$

Facilmente se verifica que $\bar{\partial}F = 0$ logo, tal como seria de esperar, F é monogénica.

Exemplo 3.5. Consideremos a função polinomial complexa $f(z) = z^n$. Recordando o Exemplo 3.2, como

$$u(x_0, y) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2m} (-1)^m x_0^{n-2m} y^{2m}$$

e

$$v(x_0, y) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2m+1} (-1)^m x_0^{n-2m-1} y^{2m+1},$$

obtém-se

$$U(x_0, \mathbf{y}) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2m} (-1)^m x_0^{n-2m} \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}}\right)^{2m}$$

e

$$V(x_0, \mathbf{y}) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2m+1} (-1)^m x_0^{n-2m-1} \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}}\right)^{2m+1}.$$

Logo

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2m} (-1)^m x_0^{n-2m} \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}} \right)^{2m} \\ + \frac{e_1+e_2+e_3}{\sqrt{3}} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2m+1} (-1)^m x_0^{n-2m-1} \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}} \right)^{2m+1},$$

isto é,

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2m} (-3)^{-m} x_0^{n-2m} r^{2m} \\ + \frac{1}{3} (e_1 + e_2 + e_3) \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2m+1} (-3)^{-m} x_0^{n-2m-1} r^{2m+1},$$

onde $r = x_1 + x_2 + x_3$.

3.5 Considerações computacionais

A aplicação do teorema de Fueter pode ser facilmente implementada no Maple. Os exemplos que atrás considerámos podem ser confirmados através de comandos simples. Por exemplo, podemos reproduzir os resultados do Exemplo 3.1, começando por definir:

```
> x:=x0+x1*qi+x2*qj+x3*qk; a:=Qvec(x); b:=Qnorm(Qvec(x));
```

$$x := x0 + x1 qi + x2 qj + x3 qk$$

$$a := x1 qi + x2 qj + x3 qk$$

$$b := \sqrt{x1^2 + x2^2 + x3^2}$$

A função G correspondente é (cf. Exemplo 3.1)

```
> G:=x0^3-3*x0*b^2+a*(3*x0^2-b^2):
```

```
> G:=collect(simplify(G),{qi,qj,qk});
```

$$(3 x3 x0^2 - x3 x1^2 - x3 x2^2 - x3^3) qk + (3 x2 x0^2 - x2 x1^2 - x2^3 - x2 x3^2) qj \\ + (3 x1 x0^2 - x1^3 - x1 x2^2 - x1 x3^2) qi + x0^3 - 3 x0 x1^2 - 3 x0 x2^2 - 3 x0 x3^2$$

Aplicamos o operador e verificamos que a função não é monogénica.

> QopDerivbar_L(G);# G não é monogénica

$$-6 x0^2 + 2 x1^2 + 2 x2^2 + 2 x3^2$$

A construção da função F passa pela aplicação do operador de Laplace à função G . Para este efeito, implementamos o procedimento `Laplace` que apresentamos em anexo.

> F:=Laplace(G);

$$F := -12 x0 - 4 x1 qi - 4 x2 qj - 4 x3 qk$$

> QopDerivbar_L(F);# F é monogénica

$$0$$

Podemos deste modo concluir que a função é monogénica.

Numa segunda fase escrevemos um procedimento para obter de forma automática a função monogénica em \mathbb{H} correspondente a uma dada função holomorfa em \mathbb{C} . Este procedimento tem especial utilidade no capítulo seguinte e é também apresentado em anexo. `Fueter` tem como parâmetro de entrada uma função `funcao` complexa de variável complexa z .

Exemplo 3.6. Consideremos a aplicação do procedimento `Fueter` à função complexa $f(z) = z^3$ (cf. Exemplo 3.1).

> Fueter(z^3);

$$-12 x0 - 4 x1 qi - 4 x2 qj - 4 x3 qk$$

Escrevemos também um procedimento para a variante do método de `Fueter` que também apresentamos em anexo e ilustramos com um exemplo.

Exemplo 3.7. Consideremos a função polinomial complexa $f(z) = z$. Aplicando o procedimento `varianteFueter` e escolhendo $i_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $i_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $i_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $c = 0$ (ver Observação 3.2), obtemos

> i1:=1/sqrt(3):i2:=1/sqrt(3):i3:=1/sqrt(3):

> collect(varianteFueter(z, i1, i2,i3,0), {qi, qj, qk});

$$\left(\frac{1}{3} x1 + \frac{1}{3} x2 + \frac{1}{3} x3\right) qi + \left(\frac{1}{3} x1 + \frac{1}{3} x2 + \frac{1}{3} x3\right) qj + \left(\frac{1}{3} x1 + \frac{1}{3} x2 + \frac{1}{3} x3\right) qk + x0$$

Outra escolha possível para \mathbf{i} é fazer $i_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $i_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $i_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Esta escolha resulta na função:

```
> i1:=1/sqrt(2):i2:=1/sqrt(3):i3:=1/sqrt(6):
```

```
> collect(varianteFueter(z, i1, i2,i3,0), {qi, qj, qk});
```

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6} \sqrt{2} x_2 \sqrt{3} + \frac{1}{6} x_3 \sqrt{3} + \frac{1}{2} x_1\right) qi + \left(\frac{1}{6} \sqrt{3} x_1 \sqrt{2} + \frac{1}{3} x_2 + \frac{1}{6} x_3 \sqrt{2}\right) qj \\ & + \left(\frac{1}{6} x_3 + \frac{1}{6} \sqrt{2} x_2 + \frac{1}{6} \sqrt{3} x_1\right) qk + x_0 \end{aligned}$$

Finalmente, mostramos ainda uma terceira escolha, a qual produz uma função em \mathbb{R}^3 .

```
> i1:=1/sqrt(2):i2:=1/sqrt(2):i3:=0:
```

```
> collect(varianteFueter(z, i1, i2,i3,0), {qi, qj, qk});
```

$$\left(\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2\right) qi + \left(\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2\right) qj + x_0$$

Capítulo 4

Funções elementares em \mathbb{H}

Neste capítulo apresentamos *propostas* de funções elementares em \mathbb{H} . Tendo como motivação as propriedades das funções elementares complexas, construímos, usando diferentes técnicas, funções elementares quaterniônicas. As funções obtidas preservam, num certo sentido, certas propriedades das correspondentes funções complexas.

4.1 Recordando \mathbb{C}

Como motivação para o estudo que vamos fazer neste capítulo, recordamos as definições e principais propriedades da função exponencial e das funções trigonométricas e hiperbólicas em \mathbb{C} .

Começamos por examinar a função exponencial, definida pela sua série de potências, definindo posteriormente as outras funções elementares em termos da função exponencial. Sendo esta uma abordagem clássica seguida por vários livros básicos de análise complexa, optamos por seguir de perto o livro [15].

Definição 4.1. (Função Exponencial)

Para todo $z \in \mathbb{C}$ a função exponencial define-se através da série de potências

$$e^z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (4.1)$$

Esta série tem raio de convergência $R = +\infty$.

Proposição 4.1. (*Propriedades da Função Exponencial*)

1. A função exponencial é holomorfa em \mathbb{C} e $(e^z)' = e^z$.
2. $\forall z, \xi \in \mathbb{C}, e^{z+\xi} = e^z e^\xi$.
3. $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |e^{x+iy}| = e^x \leq e^{|x|}$.
5. $\forall z \in \mathbb{C}, e^{z+2\pi i} = e^z$.
6. $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

Definição 4.2. (*Funções Trigonômicas*)

As funções cosseno e seno são definidas por

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen } z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Proposição 4.2. (*Propriedades das Funções Trigonômicas*)

1. Para $x \in \mathbb{R}$, tem-se $\cos x = \text{Re } e^{ix}$, $\text{sen } x = \text{Im } e^{ix}$ e portanto

$$e^{ix} = \cos x + i \text{sen } x,$$

(*Fórmula de Euler*).

2. As representações em série de potências das funções $\cos z$ e $\text{sen } z$ são, respectivamente,

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{e} \quad \text{sen } z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

A função cosseno é par e a função seno é ímpar, isto é, $\cos(-z) = \cos z$, $\text{sen}(-z) = -\text{sen } z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

3. Para $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, são válidas as fórmulas:

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

4. As funções cosseno e seno são holomorfas em \mathbb{C} , com

$$\cos' z = -\sin z \quad e \quad \sin' z = \cos z.$$

5. Para qualquer $z \in \mathbb{C}$, tem-se

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z \quad e \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z.$$

6. Os zeros de $\cos z$ são os números reais $z_n = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Os zeros de $\sin z$ são os números reais $z_m = m\pi, m \in \mathbb{Z}$.

Definição 4.3. (Funções Hiperbólicas)

As funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico são definidas por

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad e \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Proposição 4.3. (Propriedades das Funções Hiperbólicas)

1. As representações em série de potências das funções hiperbólicas $\cosh z$ e $\sinh z$ são, respectivamente,

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad e \quad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

A função cosseno hiperbólico é par e função seno hiperbólico é ímpar, isto é, $\cosh(-z) = \cosh z$, $\sinh(-z) = -\sinh z, \forall z \in \mathbb{C}$.

2. Para $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, são válidas as fórmulas:

$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2,$$

$$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2,$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

3. As funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico são holomorfas em \mathbb{C} , satisfazendo

$$\cosh' z = \sinh z \quad e \quad \sinh' z = \cosh z.$$

4. O cosseno hiperbólico e o seno hiperbólico são funções periódicas com período $2\pi i$. Além disso, temos as relações

$$\cos z = \cosh iz, \quad \sen z = -i \sinh iz,$$

$$\cosh z = \cos iz, \quad \sinh z = -i \sen iz,$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sen x \sen y,$$

$$\sen z = \sen x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

com $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

5. O $\cosh z$ tem zeros iz_n e o $\sinh z$ anula-se em iz_m .

Terminamos esta secção salientando os aspectos geométricos das funções elementares complexas. A apreensão geométrica dos efeitos de uma função complexa de variável complexa pode ser conseguida de diversos modos. Para visualizar o efeito de funções complexas podem usar-se métodos semelhantes aos adoptados para funções reais de variáveis reais, nomeadamente: imagens de curvas no domínio, gráficos (das partes reais e imaginárias, por exemplo), conjuntos de nível (das partes reais e imaginárias). Usamos aqui e no restante trabalho duas formas populares de visualização de funções complexas. A primeira consiste em considerar f como uma transformação de uma região \mathcal{D} numa região \mathcal{D}^* . Para o efeito considera-se uma grelha (cartesiana ou polar) em \mathcal{D} e representa-se a imagem dessa grelha pela transformação $z \mapsto f(z)$. Outra possibilidade que apresentamos consiste em considerar gráficos $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ atendendo a alguma propriedade real de f , por exemplo, $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$ ou $|f(z)|$.

Nas figuras seguintes apresentamos geometricamente as funções exponencial, cosseno e cosseno hiperbólico.

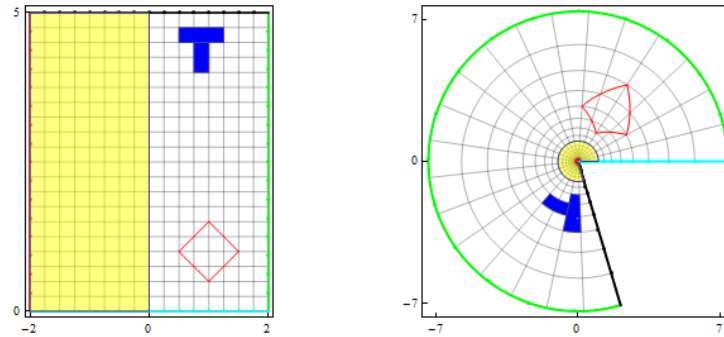


Figura 4.1: Função exponencial complexa - 2D

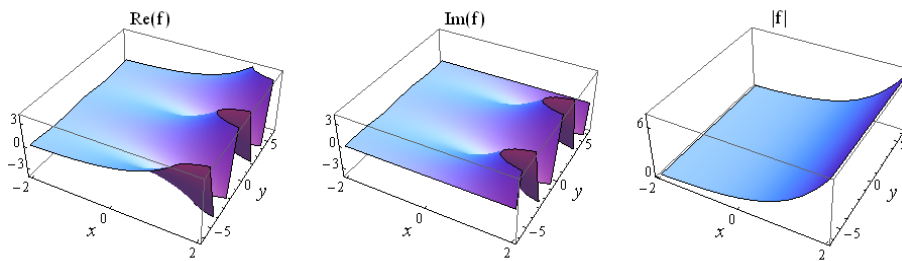


Figura 4.2: Função exponencial complexa - 3D

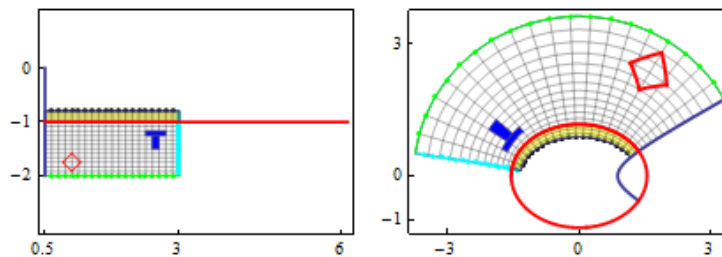


Figura 4.3: Função cosseno complexo - 2D

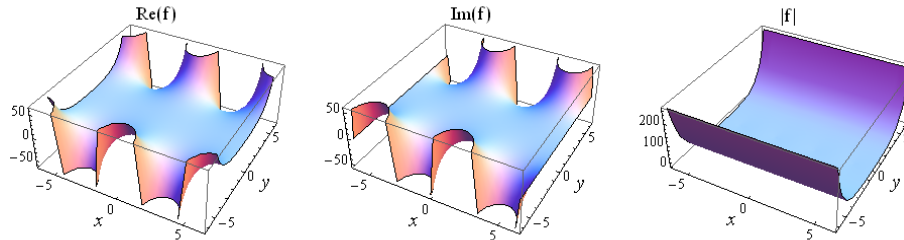


Figura 4.4: Função cosseno complexo - 3D

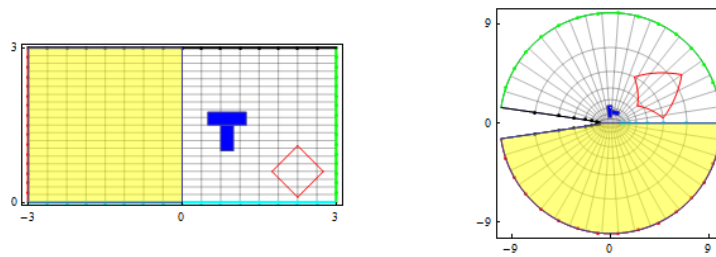


Figura 4.5: Função cosseno hiperbólico complexo - 2D

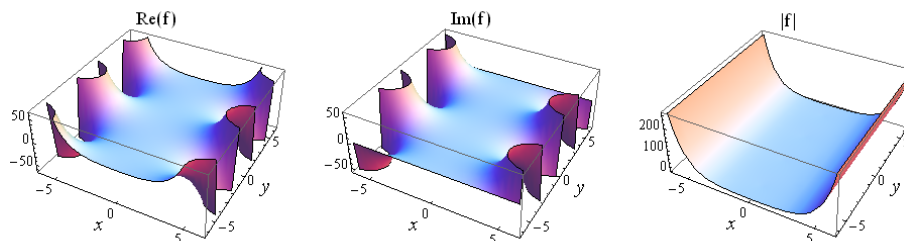


Figura 4.6: Função cosseno hiperbólico complexo - 3D

4.2 Funções elementares não monogénicas

Neste capítulo, tal como já foi referido, apresentamos *propostas* de funções elementares. Usamos a designação de propostas, uma vez que contrariamente ao caso real e complexo, não há uma única definição, por exemplo, de função exponencial em \mathbb{H} . Parece natural e razoável não esperar ser possível generalizar a função exponencial de forma a preservar todas as propriedades da função exponencial complexa. Dependendo da abordagem usada, algumas das propriedades mantêm-se, outras não. Reciprocamente, as propriedades que pretendemos manter conduzem, ou podem conduzir, a métodos de construção destas funções. Usamos notações diferentes para reflectir e distinguir as diferentes definições usadas.

Nesta secção tentamos seguir uma abordagem análoga à que apresentamos para o caso complexo, propondo uma função exponencial quaterniônica baseada na série de potências de um quaternião da forma $x = x_0 + \underline{x} = x_0 + \omega|\underline{x}|$, onde, como habitualmente, $\omega = \omega(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}$.

Definição 4.4. (Função Exponencial)

A função exponencial $\text{Exp } x$ define-se através da série de potências

$$\text{Exp } x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \quad (4.2)$$

Analogamente ao caso complexo, esta série converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{H}$.

Proposição 4.4. *Se x e y são quaterniões tais que $xy = yx$, então*

$$\text{Exp}(x + y) = \text{Exp } x \text{Exp } y.$$

Demonstração. Se x e y comutam, então $(x + y)^k = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x^l y^{k-l}$, pelo que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x + y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x^l y^{k-l}.$$

Utilizando o produto de Cauchy de duas séries, obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \frac{k! x^l y^{k-l}}{l!(k-l)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{x^l y^{k-l}}{l!(k-l)!} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} = \text{Exp } x \text{ Exp } y. \end{aligned}$$

□

Como $x_0 \underline{x} = \underline{x} x_0$, obtém-se imediatamente o seguinte corolário.

Corolário 4.1. *Se $x = x_0 + \underline{x} \in \mathbb{H}$, então,*

$$\text{Exp}(x_0 + \underline{x}) = \text{Exp } x_0 \text{ Exp } \underline{x}.$$

Proposição 4.5. *A função exponencial admite a representação:*

$$\text{Exp } x = e^{x_0} (\cos |\underline{x}| + \omega \text{ sen } |\underline{x}|).$$

Demonstração. Começemos por notar que, pelo resultado anterior, uma vez que $\text{Exp}(x_0 + \underline{x}) = e^{x_0} \text{Exp } \underline{x}$, basta provar que

$$\text{Exp } \underline{x} = \cos |\underline{x}| + \omega \text{ sen } |\underline{x}|.$$

Mas

$$\text{Exp } \underline{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{x}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \omega^k |\underline{x}|^k.$$

Como $\omega^2 = -1$, obtém-se $\omega^{2m} = (-1)^m$ e $\omega^{2m+1} = (-1)^m \omega$, para $m \in \mathbb{Z}$. Separando na expressão anterior, as potências de expoente par das potências de expoente ímpar e recordando a expansão em série de potências das funções cosseno e seno reais, obtém-se então

$$\begin{aligned} \text{Exp } \underline{x} &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{|\underline{x}|^{2l}}{(2l)!} + \omega \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{|\underline{x}|^{2l+1}}{(2l+1)!} \\ &= \cos |\underline{x}| + \omega \text{ sen } |\underline{x}|. \end{aligned}$$

□

Observação 4.1. A comutatividade é uma condição suficiente mas não necessária para validade da Proposição 4.4, como o seguinte exemplo comprova.

Se $x = 3\pi e_1$ e $y = 4\pi e_2$ então $xy = 12\pi^2 e_3$ e $yx = -12\pi^2 e_3$. Como $|x| = 3\pi$, $|y| = 4\pi$ e $|x + y| = 5\pi$, então

$$\text{Exp}(x + y) = \cos 5\pi + \frac{3\pi e_1 + 4\pi e_2}{5\pi} \text{sen } 5\pi = -1.$$

Por outro lado, como $\text{Exp } x = -1$ e $\text{Exp } y = 1$, obtemos também

$$\text{Exp } x \text{Exp } y = -1.$$

Observação 4.2. A exponencial quaterniônica (4.2) pode obter-se da exponencial complexa, substituindo em (4.1) o número complexo z pelo quaterniônio x . Isto corresponde, por outras palavras, a substituir a parte imaginária de z por $|\underline{x}|$ e a unidade imaginária i por ω (cf. Proposição 4.2 e 4.6).

De forma análoga ao caso complexo, podem provar-se facilmente as seguintes propriedades da função exponencial.

Proposição 4.6. (*Propriedades da Função Exponencial (4.2)*)

Para qualquer quaterniônio $x = x_0 + \underline{x}$, tem-se:

1. $\text{Exp } x \neq 0$.
2. $\text{Exp}(-x) \cdot \text{Exp } x = 1$.
3. $\text{Exp}(kx) = (\text{Exp } x)^k$, $k \in \mathbb{Z}$ (*Fórmula de Moivre*).
4. $\text{Exp}(\omega\pi\underline{x}) = -1$.
5. $|\text{Exp } x| = e^{x_0}$.
6. $\text{Exp } x = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{m})^m$.

Naturalmente que a restrição de (4.2) a \mathbb{C} é coincidente com a função exponencial complexa, como é desejável. Infelizmente,

$$\bar{\partial} \text{Exp } x = -2e^{x_0} \frac{\text{sen } |\underline{x}|}{|\underline{x}|},$$

pelo que a função exponencial quaterniônica apresentada nesta secção, não é uma função monogénica.

Com o auxílio da função exponencial, as funções trigonométricas e hiperbólicas podem ser introduzidas, substituindo nas Definições 4.2 e 4.3, tal como aconteceu para o caso da função exponencial, o número complexo z pelo quaternião x e a unidade imaginária i por ω .

Definição 4.5. (Funções Trigonométricas)

As funções cosseno e seno definem-se, para $|\underline{x}| \neq 0$, por

$$\text{Cos } x := \frac{\text{Exp}(\omega x) + \text{Exp}(-\omega x)}{2} \quad e \quad \text{Sen } x := -\frac{\text{Exp}(\omega x) - \text{Exp}(-\omega x)}{2} \omega.$$

Proposição 4.7. *As funções cosseno e seno permitem as seguintes representações:*

$$\text{Cos } x = \text{Cos}(x_0 + \omega|\underline{x}|) = \cosh |\underline{x}| \cos x_0 - \omega \sinh |\underline{x}| \sin x_0,$$

$$\text{Sen } x = \text{Sen}(x_0 + \omega|\underline{x}|) = \cosh |\underline{x}| \sin x_0 + \omega \sinh |\underline{x}| \cos x_0.$$

Demonstração. Como $\omega x = \omega x_0 + \omega \underline{x} = -|\underline{x}| + \omega x_0$,

$$\text{Exp}(\omega x) = e^{-|\underline{x}|} \text{Exp}(\omega x_0) = e^{-|\underline{x}|} (\cos x_0 + \omega \sin x_0).$$

$$\text{Exp}(-\omega x) = e^{|\underline{x}|} \text{Exp}(-\omega x_0) = e^{|\underline{x}|} (\cos x_0 - \omega \sin x_0).$$

Logo,

$$\text{Exp}(\omega x) + \text{Exp}(-\omega x) = (e^{-|\underline{x}|} + e^{|\underline{x}|}) \cos x_0 + \omega(-e^{-|\underline{x}|} + e^{|\underline{x}|}) \sin x_0,$$

$$2 \text{Cos } x = 2 \cosh |\underline{x}| \cos x_0 - 2\omega \sinh |\underline{x}| \sin x_0.$$

Analogamente se prova a outra fórmula. □

De imediato se obtém o seguinte resultado.

Proposição 4.8. *As funções $\text{Cos } x$ e $\text{Sen } x$ admitem a representação,*

$$\text{Cos } x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad e \quad \text{Sen } x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Definição 4.6. (Funções Hiperbólicas)

As funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico definem-se como

$$\text{Cosh } x := \frac{\text{Exp } x + \text{Exp}(-x)}{2} \quad \text{e} \quad \text{Senh } x := \frac{\text{Exp } x - \text{Exp}(-x)}{2}.$$

Proposição 4.9. *As funções hiperbólicas $\text{Cosh } x$ e $\text{Senh } x$ permitem as seguintes representações:*

$$\text{Cosh } x = \cosh x_0 \cos |\underline{x}| + \omega \sinh x_0 \sin |\underline{x}|,$$

$$\text{Senh } x = \sinh x_0 \cos |\underline{x}| + \omega \cosh x_0 \sin |\underline{x}|.$$

As proposições seguintes são também de demonstração imediata.

Proposição 4.10. *As funções $\text{Cosh } x$ e $\text{Senh } x$ admitem a representação,*

$$\text{Cosh } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{e} \quad \text{Senh } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Proposição 4.11. *(Propriedades das Funções Trigonométricas e Hiperbólicas)*

Seja $x \in \mathbb{H}$. Então,

1. $\text{Cosh } x = \text{Cos}(\omega x)$.
2. $\text{Senh } x = \omega \text{Sen}(\omega x)$.
3. $\text{Cosh } \underline{x} = \cos |\underline{x}|$.
4. $\text{Senh } \underline{x} = -\omega \sin |\underline{x}|$.
5. $\text{Sen}(k\pi + \underline{x}) = \omega(-1)^k \text{Senh } \underline{x}$, ($k \in \mathbb{N}$).
6. $\text{Cos}(k\pi + \underline{x}) = (-1)^k \text{Senh } \underline{x}$.
7. $\text{Sen}^2 x + \text{Cos}^2 x = 1$.
8. $\text{Cosh}^2 x - \text{Senh}^2 x = 1$.

Proposição 4.12. *Seja f uma função complexa com uma expansão em série de Taylor da forma*

$$f(z) = f(x_0 + iy) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad (4.3)$$

e seja F a seguinte função quaterniônica

$$F(x) = F(x_0 + \omega|\underline{x}|) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (4.4)$$

Então

$$F(x_0 + \omega|\underline{x}|) = \operatorname{Re}(f(x_0 + i|\underline{x}|)) + \omega \operatorname{Im}(f(x_0 + i|\underline{x}|)). \quad (4.5)$$

Demonstração. O resultado é imediato se compararmos

$$z^n = (x_0 + iy)^n = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2m} (-1)^m x_0^{n-2m} y^{2m} + i \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2m+1} (-1)^m x_0^{n-2m-1} y^{2m+1},$$

(cf. Exemplo 3.2) com

$$x^n = (x_0 + \omega|\underline{x}|)^n = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2m} (-1)^m x_0^{n-2m} |\underline{x}|^{2m} + \omega \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2m+1} (-1)^m x_0^{n-2m-1} |\underline{x}|^{2m+1}.$$

□

Observação 4.3. O resultado anterior indica uma forma imediata de obter funções quaterniônicas à custa de funções complexas. Em particular, podem ser obtidas muito facilmente outras funções elementares. Basta para isso substituir na função complexa, a variável complexa z pela variável quaterniônica x e a unidade imaginária i por ω . Infelizmente as funções obtidas desta forma não são monogénicas. Como quando $x \in \mathbb{C}$ todas as funções elementares obtidas desta coincidem com as funções elementares clássicas, não apresentamos a sua visualização.

4.3 Funções elementares de Fueter

Nesta secção aplicamos o Teorema de Fueter, apresentado na Secção 3.2, a várias funções elementares complexas. Na tentativa de obter funções que preservam o maior

número de propriedades possível das funções complexas que lhe dão origem, muitos autores consideram factores de normalização. Assim, seguindo [15], consideramos a função $-\frac{1}{2}F$ que se obtém da aplicação do Teorema de Fueter e não F . As correspondentes funções elementares em \mathbb{H} , monogénicas por construção, vão ser designadas por funções elementares de Fueter. Para cada caso, estudamos ainda as propriedades que caracterizam estas novas funções.

Função Exponencial

Consideremos a função exponencial complexa

$$f(z) = f(x_0 + iy) = e^{x_0}(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Então, na notação do Teorema de Fueter,

$$u(x_0, y) = e^{x_0} \cos y \quad \text{e} \quad v(x_0, y) = e^{x_0} \operatorname{sen} y.$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, |x|) = -e^{x_0} \operatorname{sen} |x| \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, |x|) = e^{x_0} \cos |x|.$$

Assim, de (3.5) resulta

$$\begin{aligned} \Delta G(x_0 + \underline{x}) &= e^{x_0} \left(-\frac{2}{|\underline{x}|} \operatorname{sen} |\underline{x}| - \omega(\underline{x}) \left(\frac{2}{|\underline{x}|^2} \operatorname{sen} |\underline{x}| - \frac{2}{|\underline{x}|} \cos |\underline{x}| \right) \right) \\ &= 2e^{x_0} \left(-\frac{\operatorname{sen} |\underline{x}|}{|\underline{x}|} + \omega(\underline{x}) \frac{|\underline{x}| \cos |\underline{x}| - \operatorname{sen} |\underline{x}|}{|\underline{x}|^2} \right). \end{aligned}$$

Denotando por Exp_F a função quaterniônica normalizada que resulta da aplicação do Teorema de Fueter à função complexa e^z , isto é, definindo $\operatorname{Exp}_F(x) := -\frac{1}{2}\Delta G(x)$, obtém-se então a seguinte função exponencial em \mathbb{R}^4 .

Definição 4.7. (Função Exponencial de Fueter)

A função exponencial de Fueter define-se, para $|\underline{x}| \neq 0$, como

$$\operatorname{Exp}_F(x_0 + \underline{x}) = e^{x_0} \left(\frac{\operatorname{sen} |\underline{x}|}{|\underline{x}|} - \omega(\underline{x}) \frac{|\underline{x}| \cos |\underline{x}| - \operatorname{sen} |\underline{x}|}{|\underline{x}|^2} \right). \quad (4.6)$$

Definindo $\text{sinc } x := \frac{\text{sen } x}{x}$, (4.6) pode ser escrita de forma abreviada como

$$\text{Exp}_F(x_0 + \underline{x}) = e^{x_0} (\text{sinc } |\underline{x}| - \omega(\underline{x}) \text{sinc}' |\underline{x}|).$$

Saliente-se, desde já que a restrição a \mathbb{C}^+ da função exponencial de Fueter (4.6) não coincide com a função exponencial complexa, já que

$$\text{Exp}_F(x_0 + x_1 e_1) = e^{x_0} \left(\frac{\text{sen } x_1}{x_1} - e_1 \frac{x_1 \cos x_1 - \text{sen } x_1}{x_1^2} \right) \neq e^{x_0} (\cos x_1 + i \text{sen } x_1).$$

Proposição 4.13. (*Propriedades da Função Exponencial de Fueter*)

Seja $x = x_0 + \omega|\underline{x}|$, com $|\underline{x}| \neq 0$. Então,

1. $\bar{\partial} \text{Exp}_F = \text{Exp}_F \bar{\partial} = 0$, isto é, Exp_F é uma função monogénica.
2. $\text{Exp}'_F(\lambda x) = \lambda \text{Exp}_F(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\text{Exp}_F(x) \neq 0$.
4. $\lim_{|\underline{x}| \rightarrow 0} \text{Exp}_F(x) = e^{x_0}$.

Demonstração. A primeira propriedade é imediata, por construção. Uma vez que

$$\text{Exp}'_F(\lambda x) = \partial_0 \text{Exp}_F(\lambda x) = \lambda \text{Exp}_F(\lambda x),$$

fica demonstrada a Propriedade 2. Para concluirmos que esta função exponencial não tem zeros, basta notar que (4.6) só se anula quando $\text{sen } |\underline{x}|$ e $(|\underline{x}| \cos |\underline{x}| - \text{sen } |\underline{x}|)$ são simultaneamente nulos, i.e., quando $\cos |\underline{x}| = \text{sen } |\underline{x}| = 0$, o que é impossível. A última propriedade é imediata, atendendo a que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{sinc } t = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \text{sinc}' t = 0.$$

□

Observação 4.4. Em geral, a propriedade $\text{Exp}_F(x + y) = \text{Exp}_F x \text{Exp}_F y$ não se verifica. Usamos o Maple para ilustrar, através de um exemplo, esta situação. Para o efeito implementamos a função exponencial (4.6) através do procedimento **ExpF** que incluímos em anexo. Se considerarmos $x = \pi e_1$ e $y = -\pi e_2$, obtém-se

```

> x:=Pi*qi:
> y:=-Pi*qj:
> evalf(Qmult(ExpF(x),ExpF(y)));
> evalf(ExpF(x+y));

-0.1013211836 qk
0.007846505458 qi - 0.007846505458 qj - 0.2169542942
    
```

donde se conclui que

$$\text{Exp}_F x \text{Exp}_F y \neq \text{Exp}_F(x + y).$$

Considerando a restrição da função exponencial de Fueter a \mathbb{C}^+ , ilustramos na Figura 4.7, as diferenças entre esta função e a função exponencial complexa usual. A Figura 4.8 permite a correspondente visualização tridimensional. Em ambos os casos, a função exponencial foi estendida, por continuidade, à recta $|\underline{x}| = 0$, atendendo à propriedade 4. da proposição anterior.

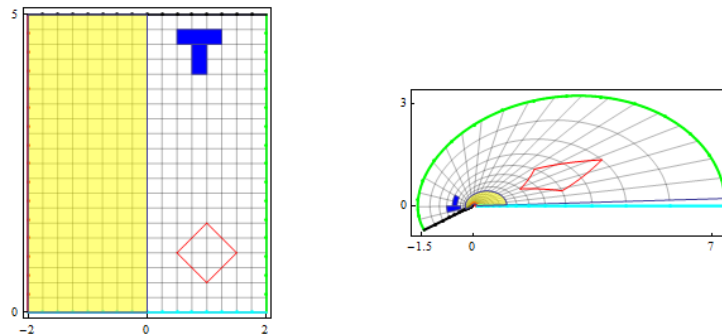


Figura 4.7: Função exponencial de Fueter em \mathbb{C} - 2D

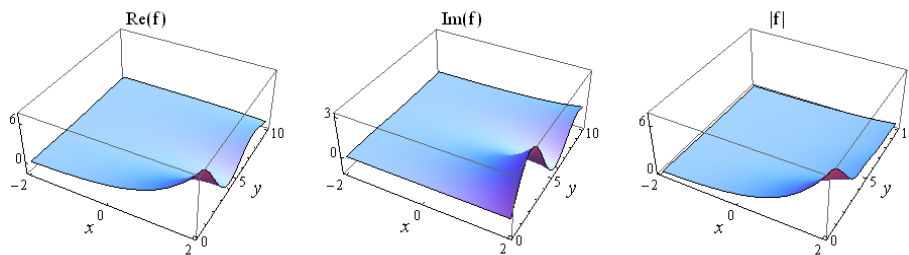


Figura 4.8: Função exponencial de Fueter em \mathbb{C} - 3D

Funções Trigonométricas

Função Cosseno

Consideremos a função cosseno complexo

$$f(z) = f(x_0, y) = \cos(x_0 + iy) = \cos x_0 \cosh y - i \operatorname{sen} x_0 \sinh y$$

Então, na notação do Teorema de Fueter,

$$u(x_0, y) = \cos x_0 \cosh y \quad \text{e} \quad v(x_0, y) = -\operatorname{sen} x_0 \sinh y.$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, |\underline{x}|) = \cos x_0 \sinh |\underline{x}| \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, |\underline{x}|) = -\operatorname{sen} x_0 \cosh |\underline{x}|.$$

Assim,

$$\Delta G(x_0 + \underline{x}) = 2 \left(\frac{\cos x_0 \sinh(|\underline{x}|)}{|\underline{x}|} - \omega(\underline{x}) \operatorname{sen} x_0 \frac{-\sinh |\underline{x}| + |\underline{x}| \cosh |\underline{x}|}{|\underline{x}|^2} \right).$$

A função ΔG é a função monogénica que se obtém, seguindo o método proposto por Fueter, a partir da função cosseno complexo. Por este motivo, denotamos por Cos_F a função quaterniônica obtida após normalização, i.e. $\operatorname{Cos}_F := -\frac{1}{2}\Delta G$. Mais precisamente, tem-se a seguinte definição.

Definição 4.8. (Função Cosseno de Fueter)

A função cosseno de Fueter define-se, para $|\underline{x}| \neq 0$, como

$$\operatorname{Cos}_F(x_0 + \underline{x}) := \frac{-\cos x_0 \sinh |\underline{x}|}{|\underline{x}|} + \omega(\underline{x}) \operatorname{sen} x_0 \frac{-\sinh |\underline{x}| + |\underline{x}| \cosh |\underline{x}|}{|\underline{x}|^2} \quad (4.7)$$

Também a restrição da função (4.7) a \mathbb{C}^+ não coincide com a função cosseno complexa. De facto,

$$\begin{aligned} \operatorname{Cos}_F(x_0 + x_1 e_1) &= \frac{-\cos x_0 \sinh x_1}{x_1} + e_1 \operatorname{sen} x_0 \frac{-\sinh x_1 + x_1 \cosh x_1}{x_1^2} \\ &\neq \cos x_0 \cosh x_1 - i \operatorname{sen} x_0 \sinh x_1 \end{aligned}$$

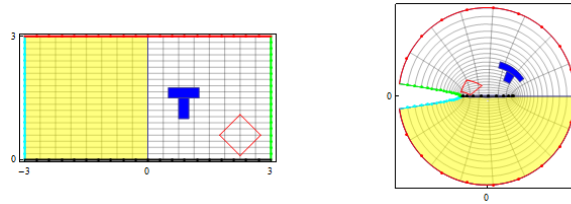


Figura 4.9: Função cosseno de Fueter em \mathbb{C} - 2D

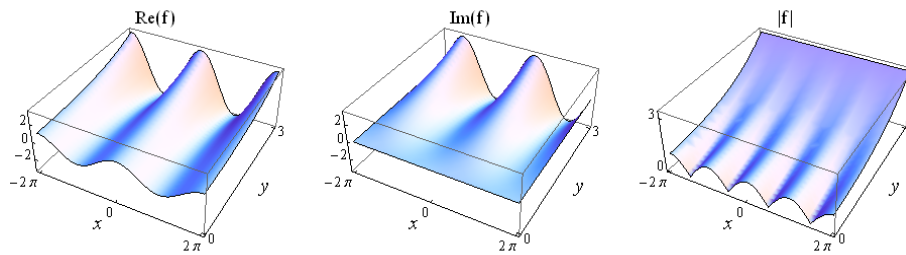


Figura 4.10: Função cosseno de Fueter em \mathbb{C} - 3D

As Figuras 4.9 e 4.10, ilustram graficamente, as propriedades geométricas da função cosseno obtida.

Função Seno

Consideremos a função seno complexo

$$f(z) = f(x_0, y) = \text{sen}(x_0 + iy) = \text{sen } x_0 \cosh y + i \cos x_0 \sinh y$$

Então, na notação do Teorema de Fueter,

$$u(x_0, y) = \text{sen } x_0 \cosh y \quad \text{e} \quad v(x_0, y) = \cos x_0 \sinh y.$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, |\underline{x}|) = \text{sen } x_0 \sinh |\underline{x}| \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, |\underline{x}|) = \cos x_0 \cosh |\underline{x}|.$$

Assim,

$$\Delta G(x_0 + \underline{x}) = 2 \left(\frac{\text{sen } x_0 \sinh(|\underline{x}|)}{|\underline{x}|} - \omega(\underline{x}) \cos x_0 \frac{\sinh |\underline{x}| - |\underline{x}| \cosh |\underline{x}|}{|\underline{x}|^2} \right)$$

A função $-\frac{1}{2}\Delta G$ é a função monogénica normalizada que se obtém, seguindo o método proposto por Fueter, a partir da função seno complexo, sendo por isso denotando por Sen_F e designada por seno de Fueter. Mais precisamente, tem-se a seguinte definição.

Definição 4.9. (Função Seno de Fueter)

A função seno de Fueter define-se, para $|\underline{x}| \neq 0$, como

$$\text{Sen}_F(x_0 + \underline{x}) := -\frac{\text{sen } x_0 \sinh |\underline{x}|}{|\underline{x}|} + \omega(\underline{x}) \cos x_0 \frac{\sinh |\underline{x}| - |\underline{x}| \cosh |\underline{x}|}{|\underline{x}|^2}. \quad (4.8)$$

Também a restrição da função seno de Fueter (4.8) a \mathbb{C}^+ não coincide com a função seno complexa. De facto,

$$\begin{aligned} \text{Sen}_F(x_0 + x_1 e_1) &= -\frac{\text{sen } x_0 \sinh x_1}{x_1} + e_1 \cos x_0 \frac{\sinh x_1 - x_1 \cosh x_1}{x_1^2} \\ &\neq \text{sen } x_0 \cosh x_1 + i \cos x_0 \sinh x_1 \end{aligned}$$

Proposição 4.14. (Propriedades das Funções Trigonométricas)

Seja $x = x_0 + \omega|\underline{x}|$, com $|\underline{x}| \neq 0$. Então,

1. $\bar{\partial} \text{Cos}_F = \text{Cos}_F \bar{\partial} = 0$, isto é, Cos_F é uma função monogénica.
2. $\bar{\partial} \text{Sen}_F = \text{Sen}_F \bar{\partial} = 0$, isto é, Sen_F é uma função monogénica.
3. $\text{Cos}'_F(\lambda x) = -\lambda \text{Sen}_F(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\text{Sen}'_F(\lambda x) = \lambda \text{Cos}_F(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. $\text{Cos}_F(x_0 + \underline{x}) \neq 0$.
6. $\text{Sen}_F(x_0 + \underline{x}) \neq 0$.
7. A função Cos_F é par, isto é, $\text{Cos}_F(-x) = \text{Cos}_F x$.
8. A função Sen_F é ímpar, isto é, $\text{Sen}_F(-x) = -\text{Sen}_F x$.
9. $\lim_{|\underline{x}| \rightarrow 0} \text{Cos}_F(x_0 + \underline{x}) = \cos x_0$.
10. $\lim_{|\underline{x}| \rightarrow 0} \text{Sen}_F(x_0 + \underline{x}) = \text{sen } x_0$.

Demonstração. As Propriedades 1 e 2 são imediatas, por construção. As Propriedades 3 e 4 podem ser verificadas facilmente, bastando para isso usar as regras de derivação das funções seno e cosseno reais. Provemos agora a Propriedade 5 (a demonstração da Propriedade 6 é análoga).

Sendo $|\underline{x}| \neq 0$, então $\sinh |\underline{x}| \neq 0$ e, portanto, $\text{Cos}_F x = 0$ se

$$\cos x_0 = 0 \quad \text{e} \quad \sinh |\underline{x}| - |\underline{x}| \cosh |\underline{x}| = 0,$$

i.e.

$$\cos x_0 = 0 \quad \text{e} \quad \text{tgh} |\underline{x}| = |\underline{x}|.$$

É um facto conhecido que a função real $f(t) = \text{tgh} t - t$ só se anula em zero, pelo que a equação $\text{Cos}_F x = 0$ não tem solução, uma vez que estamos a supor $|\underline{x}| \neq 0$.

As Propriedades de 7 e 8 resultam da paridade das funções cosseno e seno reais, respectivamente. Finalmente, como

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sinh t}{t} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sinh t - t \cosh t}{t^2} = 0,$$

as Propriedades 9 e 10 ficam também provadas. □

Das propriedades que acabamos de mostrar, destacamos naturalmente o facto de estas funções serem monogénicas. Este ganho é a compensação de se terem perdido outras propriedades importantes das funções trigonométricas, como ilustramos de seguida, recorrendo aos procedimentos **CosF** e **SenF** (ver anexo).

Exemplo 4.1. Suponhamos que $x = \frac{\pi}{4}e_1$ e $y = \frac{\pi}{4}e_2$. Vejamos que:

1. $\text{Cos}_F(x + y) \neq \text{Cos}_F x \text{Cos}_F y - \text{Sen}_F x \text{Sen}_F y$
 - > `x:=Pi/4*qi:`
 - > `y:=Pi/4*qj:`
 - > `evalf(CosF(x+y));`
 -1.218679251
 - > `evalf(Qmult(CosF(x),CosF(y))-Qmult(SenF(x),SenF(y)));`
 $1.223293998 - .07745553944 \text{ qk}$

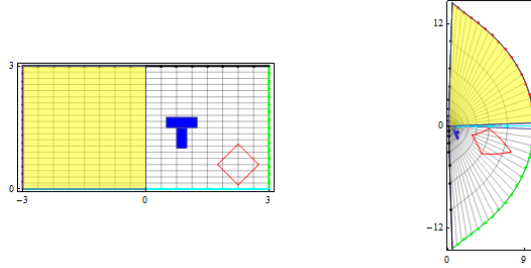


Figura 4.11: Função cosseno hiperbólico de Fueter em \mathbb{C} - 2D

$$2. \text{Sen}_F(x + y) \neq \text{Sen}_F x \text{Cos}_F y + \text{Cos}_F x \text{Sen}_F y$$

$$> \text{evalf}(\text{SenF}(x+y));$$

$$-.2955536473 \text{qi} - .2955536473 \text{qj}$$

$$> \text{evalf}(\text{Qmult}(\text{SenF}(x), \text{CosF}(y)) + \text{Qmult}(\text{CosF}(x), \text{SenF}(y)));$$

$$.3078163357 \text{qi} + .3078163357 \text{qj}$$

$$3. \text{Sen}_F^2 x + \text{Cos}_F^2 x \neq 1$$

$$> \text{evalf}(\text{Qpot}(\text{SenF}(x), 2) + \text{Qpot}(\text{CosF}(x), 2));$$

$$1.145838458$$

Funções Hiperbólicas

As funções hiperbólicas obtêm-se de forma análoga à descrita para as funções circulares. Apresentamos apenas as suas definições e listamos as principais propriedades. Em anexo descrevem-se também os procedimentos `CoshF` e `SinhF`.

Definição 4.10. (Função Cosseno Hiperbólico de Fueter)

A função cosseno hiperbólico de Fueter define-se, para $|\underline{x}| \neq 0$, como

$$\text{Cosh}_F(x_0 + \underline{x}) := \frac{\cosh x_0 \text{sen } |\underline{x}|}{|\underline{x}|} + \omega(\underline{x}) \sinh x_0 \frac{\text{sen } |\underline{x}| - |\underline{x}| \cos |\underline{x}|}{|\underline{x}|^2}. \quad (4.9)$$

Definição 4.11. (Função Seno Hiperbólico de Fueter)

A função seno hiperbólico de Fueter define-se, para $|\underline{x}| \neq 0$, como

$$\text{Sinh}_F(x_0 + \underline{x}) := \frac{\sinh x_0 \text{sen } |\underline{x}|}{|\underline{x}|} + \omega(\underline{x}) \cosh x_0 \frac{\text{sen } |\underline{x}| - |\underline{x}| \cos |\underline{x}|}{|\underline{x}|^2}. \quad (4.10)$$

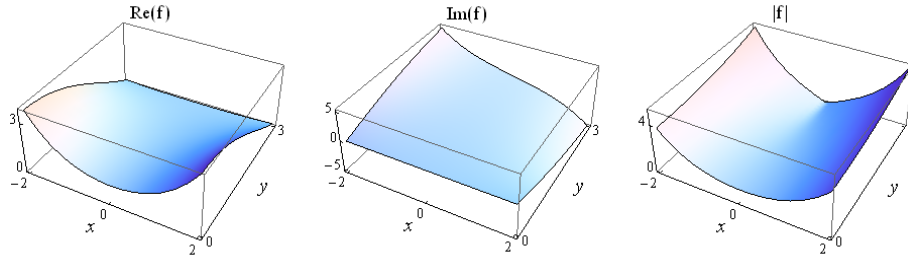


Figura 4.12: Função cosseno hiperbólico de Fueter em \mathbb{C} - 3D

Proposição 4.15. (*Propriedades das Funções Hiperbólicas*)

Seja $x = x_0 + \omega|x|$, com $|x| \neq 0$. Então,

1. $\bar{\partial} \text{Senh}_F = \text{Senh}_F \bar{\partial} = 0$, isto é, Senh_F é uma função monogénica.
2. $\bar{\partial} \text{Cosh}_F = \text{Cosh}_F \bar{\partial} = 0$, isto é, Cosh_F é uma função monogénica.
3. $\text{Senh}'_F(\lambda x) = \lambda \text{Cosh}_F(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\text{Cosh}'_F(\lambda x) = \lambda \text{Senh}_F(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. $\text{Cosh}_F(x_0 + \underline{x}) \neq 0$.
6. $\text{Senh}_F(x_0 + \underline{x}) \neq 0$.
7. A função Cosh_F é par, isto é, $\text{Cosh}_F(-x) = \text{Cosh}_F x$.
8. A função Senh_F é ímpar, isto é, $\text{Senh}_F(-x) = -\text{Senh}_F x$.
9. $\lim_{|x| \rightarrow 0} \text{Cosh}_F(x_0 + \underline{x}) = \cosh x_0$.
10. $\lim_{|x| \rightarrow 0} \text{Senh}_F(x_0 + \underline{x}) = \sinh x_0$.

Também aqui ilustramos o facto de algumas importantes propriedades não serem verificadas pelas funções hiperbólicas generalizadas.

Exemplo 4.2. Suponhamos, novamente, $x = \frac{\pi}{4}e_1$ e $y = \frac{\pi}{4}e_2$.

1. $\text{Cosh}_F(x+y) \neq \text{Cosh}_F x \text{Cosh}_F y + \text{Senh} x \text{Senh} y$.
 - > `evalf(CoshF(x+y));`
 $.8067004672$
 - > `evalf(Qmult(CoshF(x),CoshF(y))+Qmult(SenhF(x),SenhF(y)));`
 $.8105694688 + .06051699393 \text{ } qk$
2. $\text{Senh}_F(x+y) \neq \text{Senh}_F x \text{Cosh}_F y + \text{Cosh}_F x \text{Senh}_F y$.
 - > `evalf(SenhF(x+y));`
 $.2308922044 \text{ } qi + .2308922044 \text{ } qj$
 - > `evalf(Qmult(SenhF(x),CoshF(y))+Qmult(CoshF(x),SenhF(y)));`
 $.2214796326 \text{ } qi + .2214796326 \text{ } qj$
3. $\text{Cosh}_F^2 x - \text{Senh}_F^2 x \neq 1$.
 - > `evalf(Qpot(SenhF(x),2)-Qpot(CoshF(x),2));`
 $-.8710864627$

Outras Funções elementares

Aplicamos o Teorema de Fueter a outras funções elementares, usando, para o efeito, o procedimento **Fueter** (ver anexo).

Função Tangente

$$\text{Tg}_F(x_0 + \underline{x}) := \frac{1}{|\underline{x}|^2(\cos^2 x_0 + \cosh^2 |\underline{x}| - 1)^2}(u(x_0, |\underline{x}|) + \omega(\underline{x})v(x_0, |\underline{x}|)),$$

com

$$\begin{aligned} u(x_0, |\underline{x}|) &= 2 \sin x_0 \cos x_0 |\underline{x}| \sinh |\underline{x}| \cosh |\underline{x}|, \\ v(x_0, |\underline{x}|) &= (\cos^2 x_0 + \cosh^2 |\underline{x}| - 1)(|\underline{x}| + \sinh |\underline{x}| \cosh |\underline{x}|) + \\ &\quad - 2|\underline{x}| \cosh^2 |\underline{x}| \cos^2 x_0 \end{aligned}$$

Função Cotangente

$$\text{Cotg}_F(x_0 + \underline{x}) := \frac{1}{|\underline{x}|^2(-\cos^2 x_0 + \cosh^2 |\underline{x}|)^2} (u(x_0, |\underline{x}|) + \omega(\underline{x})v(x_0, |\underline{x}|)),$$

com

$$\begin{aligned} u(x_0, |\underline{x}|) &= 2 \operatorname{sen} x_0 \cos x_0 |\underline{x}| \cosh |\underline{x}| \operatorname{senh} |\underline{x}|, \\ v(x_0, |\underline{x}|) &= |\underline{x}|(\cos^2 x_0 + \cosh^2 |\underline{x}| - 2 \cos^2 x_0 \cosh^2 |\underline{x}|) + \\ &\quad - \operatorname{senh} |\underline{x}| \cosh |\underline{x}|(-\cos^2 x_0 + \cosh^2 |\underline{x}|) \end{aligned}$$

Função Secante

$$\text{Sec}_F(x_0 + \underline{x}) := \frac{1}{|\underline{x}|^2(\cos^2 x_0 + \cosh^2 |\underline{x}| - 1)^2} (u(x_0, |\underline{x}|) + \omega(\underline{x})v(x_0, |\underline{x}|)),$$

com

$$\begin{aligned} u(x_0, |\underline{x}|) &= \cos x_0 |\underline{x}| \operatorname{senh} |\underline{x}|(-\cos^2 x_0 + \cosh^2 |\underline{x}| + 1), \\ v(x_0, |\underline{x}|) &= \operatorname{sen} x_0 |\underline{x}| \cosh |\underline{x}|(-\cos^2 x_0 + \cosh^2 |\underline{x}| - 1) + \\ &\quad \operatorname{sen} x_0 \operatorname{senh} |\underline{x}|(\cos^2 x_0 + \cosh^2 |\underline{x}| - 1) \end{aligned}$$

Função Cossecante

$$\text{Csc}_F(x_0 + \underline{x}) := \frac{1}{|\underline{x}|^2(-\cosh^2 x_0 + \cos^2 |\underline{x}|)^2} (u(x_0, |\underline{x}|) + \omega(\underline{x})v(x_0, |\underline{x}|)),$$

com

$$\begin{aligned} u(x_0, |\underline{x}|) &= |\underline{x}| \operatorname{sen} x_0 \operatorname{senh} |\underline{x}|(\cosh^2 |\underline{x}| + \cos^2 x_0), \\ v(x_0, |\underline{x}|) &= \cos x_0 \operatorname{senh} |\underline{x}|(\cos^2 x_0 - \cosh^2 |\underline{x}|) - \\ &\quad \cos x_0 |\underline{x}| \cosh |\underline{x}|(\cos^2 x_0 + \cosh^2 |\underline{x}| - 2) \end{aligned}$$

Função Tangente Hiperbólica

$$\text{Tgh}_F(x_0 + \underline{x}) := \frac{1}{|\underline{x}|^2(\cos^2 x_0 + \cosh^2 |\underline{x}| - 1)^2} (u(x_0, |\underline{x}|) + \omega(\underline{x})v(x_0, |\underline{x}|)),$$

com

$$u(x_0, |\underline{x}|) = -2 \operatorname{senh} x_0 \cosh x_0 |\underline{x}| \cos |\underline{x}| \operatorname{sen} |\underline{x}|,$$

$$v(x_0, |\underline{x}|) = -2|\underline{x}| \cos^2 |\underline{x}| \cos^2 x_0 - (1 - \cos^2 x_0 - \cos^2 |\underline{x}|)(|\underline{x}| + \cos |\underline{x}| \operatorname{sen} |\underline{x}|)$$

Função Cotangente Hiperbólica

$$\operatorname{Cotgh}_F(x_0 + \underline{x}) := \frac{1}{|\underline{x}|^2 (\cosh^2 x_0 - \cos^2 |\underline{x}|)^2} (u(x_0, |\underline{x}|) + \omega(\underline{x})v(x_0, |\underline{x}|)),$$

com

$$u(x_0, |\underline{x}|) = 2 \cosh x_0 \operatorname{senh} x_0 |\underline{x}| \cos |\underline{x}| \operatorname{sen} |\underline{x}|,$$

$$v(x_0, |\underline{x}|) = |\underline{x}| (\cos^2 |\underline{x}| - \cosh^2 x_0 + 2 \cos^2(x_0) \cos^2 |\underline{x}|) - \\ \operatorname{sen} |\underline{x}| \cos |\underline{x}| (\cosh^2 x_0 - \cos^2 |\underline{x}|)$$

Função Secante Hiperbólica

$$\operatorname{Sech}_F(x_0 + \underline{x}) := \frac{1}{|\underline{x}|^2 (\cosh^2 x_0 + \cos^2 |\underline{x}| - 1)^2} u(x_0, |\underline{x}|) + \omega(\underline{x})v(x_0, |\underline{x}|),$$

com

$$u(x_0, |\underline{x}|) = \cosh x_0 |\underline{x}| \operatorname{sen} |\underline{x}| (\cosh^2 x_0 - \cos^2 |\underline{x}| - 1),$$

$$v(x_0, |\underline{x}|) = \operatorname{senh} x_0 |\underline{x}| \cos |\underline{x}| (1 + \cosh^2 x_0 - \cos^2 |\underline{x}|) + \\ \operatorname{senh} x_0 \operatorname{sen} |\underline{x}| (1 - \cosh^2 x_0 - \cos^2 |\underline{x}|)$$

Função Cossecante Hiperbólica

$$\operatorname{Csch}_F(x_0 + \underline{x}) := \frac{1}{|\underline{x}|^2 (-\cosh^2 x_0 + \cos^2 |\underline{x}|)^2} (u(x_0, |\underline{x}|) + \omega(\underline{x})v(x_0, |\underline{x}|)),$$

com

$$u(x_0, |\underline{x}|) = \operatorname{senh} x_0 |\underline{x}| \operatorname{sen} |\underline{x}| (\cosh^2 x_0 + \cos^2 |\underline{x}|),$$

$$v(x_0, |\underline{x}|) = \cosh x_0 |\underline{x}| \cos |\underline{x}| (\cosh^2 x_0 + \cos |\underline{x}| - 2) + \\ \cosh x_0 \operatorname{sen} |\underline{x}| (-\cos^2 x_0 + \cos^2 |\underline{x}|)$$

Função Logaritmo

$$\text{Log}_F(x_0 + \underline{x}) := \frac{1}{|\underline{x}|^2(x_0^2 + |\underline{x}|^2)}(u(x_0, |\underline{x}|) + \omega(\underline{x})v(x_0, |\underline{x}|))$$

com

$$u(x_0, |\underline{x}|) = -|\underline{x}|^2,$$

$$v(x_0, |\underline{x}|) = -|\underline{x}|x_0 + \arctan(|\underline{x}|, x_0)(x_0^2 + |\underline{x}|^2)$$

Não apresentamos aqui as expressões obtidas para as funções trigonométricas inversas e hiperbólicas inversas, devido à sua extensão.

4.4 Funções elementares obtidas pela variante do método de Fueter

Nesta secção aplicamos a variante do método de Fueter, introduzida na Secção 3.4, às mesmas funções elementares complexas utilizadas na secção anterior e obtemos assim as correspondentes funções elementares em \mathbb{H} , monogénicas por construção. Fazemos também o estudo das propriedades que caracterizam estas novas funções.

Função Exponencial

A aplicação da variante do método de Fueter à função exponencial complexa

$$f(z) = f(x_0 + iy) = e^{x_0}(\cos y + i \text{sen } y),$$

corresponde a substituir na expressão anterior a variável y por $\mathbf{y} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3}}$ e a unidade imaginária i por $\mathbf{i} = \frac{e_1 + e_2 + e_3}{\sqrt{3}}$, i.e.

$$F(x) = e^{x_0}(\cos \mathbf{y} + \mathbf{i} \text{sen } \mathbf{y}),$$

obtendo desta forma uma nova definição de função exponencial em \mathbb{R}^4 que denotamos por Exp_V .

Definição 4.12. (Função Exponencial)

$$\text{Exp}_V(x_0 + \underline{x}) = e^{x_0} \left(\cos\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}}\right) + \frac{e_1+e_2+e_3}{\sqrt{3}} \text{sen}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}}\right) \right) \quad (4.11)$$

Se notarmos que em (4.11) temos, de facto, apenas uma *unidade imaginária* \mathbf{i} fixa (situação diferente do que se passa em (4.6), onde a *unidade imaginária* ω é variável), é fácil concluir que esta função exponencial goza de propriedades análogas às da função exponencial complexa.

Proposição 4.16. (Propriedades da Função Exponencial (4.11))

Sejam $x, y \in \mathbb{H}$. Então,

1. Exp_V é uma função monogénica.
2. $\text{Exp}'_V(\lambda x) = \lambda \text{Exp}_V(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\text{Exp}_V x_0 = e^{x_0}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
4. $\text{Exp}_V x \neq 0$.
5. $\text{Exp}_V(-x) \text{Exp}_V x = 1$.
6. $\text{Exp}_V x$ é periódica em x_1, x_2, x_3 com período $2\sqrt{3}\pi$.
7. $\text{Exp}_V(x + y) = \text{Exp}_V x \text{Exp}_V y$

Proposição 4.17. Com a notação anteriormente introduzida, tem-se

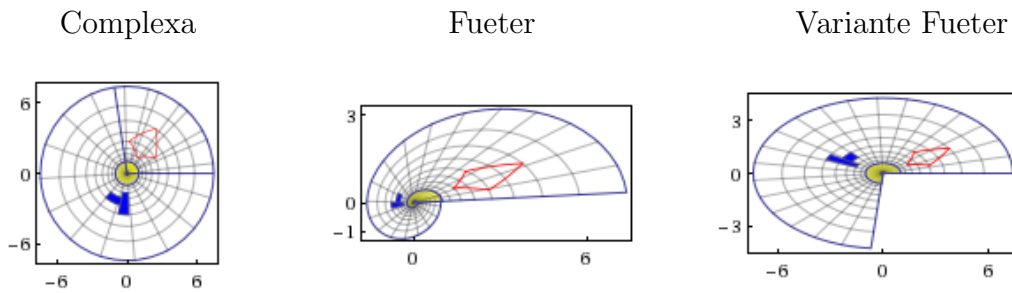
$$\text{Exp}_V(\mathbf{i}x) = \text{Exp}_V(x\mathbf{i}) = e^{-\mathbf{y}}(\cos x_0 + \mathbf{i} \text{sen } x_0)$$

e

$$\text{Exp}_V(-\mathbf{i}x) = \text{Exp}_V(-x\mathbf{i}) = e^{-\mathbf{y}}(\cos x_0 - \mathbf{i} \text{sen } x_0).$$

Demonstração. Notemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{i}x &= \frac{e_1+e_2+e_3}{\sqrt{3}}(x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) \\ &= -\frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}} + \frac{x_0-x_2+x_3}{\sqrt{3}}e_1 + \frac{x_0+x_1-x_3}{\sqrt{3}}e_2 + \frac{x_0-x_1+x_2}{\sqrt{3}}e_3, \end{aligned}$$

Figura 4.13: Exponenciais em \mathbb{C}

ou seja

$$ix = -\mathbf{y} + X_1e_1 + X_2e_2 + X_3e_3,$$

onde

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_0 - x_2 + x_3), \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_0 + x_1 - x_3), \quad X_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_0 - x_1 + x_2).$$

Como $\frac{1}{\sqrt{3}}(X_1 + X_2 + X_3) = x_0$, obtém

$$\text{Exp}_V(ix) = e^{-\mathbf{y}}(\cos x_0 + \mathbf{i} \sin x_0).$$

As restantes propriedades mostram-se de forma análoga.

□

Naturalmente que geometricamente o efeito desta exponencial (considerada a sua restrição a \mathbb{C}) é muito parecido com o da exponencial complexa. Na figura acima comparamos a função exponencial com as duas funções exponencial propostas neste capítulo.

Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas correspondentes à variante de Fueter obtêm-se facilmente, a partir das correspondentes funções complexas. As suas propriedades podem ser facilmente provadas atendendo às propriedades da função exponencial (4.11), bem como às conhecidas propriedades das funções cosseno e seno reais.

Definição 4.13. (Função Cosseno)

$$\text{Cos}_V(x_0 + \underline{x}) = \cos x_0 \cosh\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}{\sqrt{3}} \text{sen } x_0 \sinh\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}}\right) \quad (4.12)$$

Definição 4.14. (Função Seno)

$$\text{Sen}_V(x_0 + \underline{x}) = \text{sen } x_0 \cosh\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}{\sqrt{3}} \cos x_0 \sinh\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}}\right) \quad (4.13)$$

Proposição 4.18. (Propriedades das Funções Trigonômétricas)

Sejam $x, y \in \mathbb{H}$. Então,

1. $\text{Sen}_V x$ e Cos_V são funções monogénicas.
2. $\text{Sen}'_V(\lambda x) = \lambda \text{Cos}_V(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\text{Cos}'_V(\lambda x) = -\lambda \text{Sen}_V(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. A função Cos_V é par, isto é, $\text{Cos}_V(-x) = \text{Cos}_V x$.
5. A função Sen_V é ímpar, isto é, $\text{Sen}_V(-x) = -\text{Sen}_V x$.
6. $\text{Sen}_V(x + y) = \text{Sen}_V x \text{Cos}_V y + \text{Cos}_V x \text{Sen}_V y$.
7. $\text{Cos}_V(x + y) = \text{Cos}_V x \text{Cos}_V y - \text{Sen}_V x \text{Sen}_V y$.
8. $\text{Sen}_V^2 x + \text{Cos}_V^2 x = 1$.

Funções Hiperbólicas**Definição 4.15. (Função Cosseno Hiperbólico)**

$$\text{Cosh}_V(x_0 + \underline{x}) = \cosh x_0 \cos\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}{\sqrt{3}} \sinh x_0 \text{sen}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}}\right) \quad (4.14)$$

Definição 4.16. (Função Seno Hiperbólico)

$$\text{Senh}_V(x_0 + \underline{x}) = \sinh x_0 \cos\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}}\right) + \frac{e_1+e_2+e_3}{\sqrt{3}} \cosh x_0 \text{sen}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}}\right) \quad (4.15)$$

De demonstração imediata são também as propriedades das funções hiperbólicas, obtidas pela variante de Fueter.

Proposição 4.19. (Propriedades das Funções Hiperbólicas)

Sejam $x, y \in \mathbb{H}$ e $\mathbf{i} = \frac{e_1+e_2+e_3}{\sqrt{3}}$. Então,

1. $\bar{\partial} \text{Senh}_V x = \text{Senh}_V x \bar{\partial} = 0$, isto é, $\text{Senh}_V x$ é monogénica.
2. $\bar{\partial} \text{Cosh}_V x = \text{Cosh}_V x \bar{\partial} = 0$, isto é, $\text{Cosh}_V x$ é monogénica.
3. $\text{Senh}'_V x = \text{Cosh}_V x$.
4. $\text{Cosh}'_V x = \text{Senh}_V x$.
5. $\text{Senh}_V(x + y) = \text{Senh}_V x \text{Cosh}_V y + \text{Cosh}_V x \text{Senh}_V y$.
6. $\text{Cosh}_V(x + y) = \text{Cosh}_V x \text{Cosh}_V y + \text{Senh}_V x \text{Senh}_V y$.
7. $\text{Cosh}_V^2 x - \text{Senh}_V^2 x = 1$.
8. $\text{Cos}_V(\mathbf{i}x) = \text{Cosh}_V(x)$.
9. $\text{Sen}_V(\mathbf{i}x) = \mathbf{i} \text{Senh}_V(x)$.

4.5 Considerações finais

Em muitas aplicações práticas a noção de função exponencial complexa é fundamental. Quando se pretendem generalizar problemas para dimensões superiores¹ surge naturalmente a necessidade de encontrar uma forma *conveniente* de definir função exponencial (e conseqüentemente outras funções elementares).

¹Muitas das ideias apresentadas ao longo deste trabalho podem ser estendidas para dimensões superiores a 4, trabalhando com paravectores em \mathbb{R}^{n+1} e usando resultados no âmbito da chamada Análise de Clifford (ver p.e. [15]).

Neste capítulo foram apresentadas três definições diferentes de função exponencial. Os métodos usados para construir estas funções baseiam-se, de alguma forma, na analogia com a exponencial complexa clássica. Naturalmente que seguindo ainda nesta direcção seria possível procurar outro tipo de caracterização, sempre no pressuposto que pretendemos construir funções monogénicas. Esta ideia afasta desde já a hipótese de se tentar procurar uma função genérica f que satisfaça a equação funcional $f(z + w) = f(z)f(w)$, uma vez que o conjunto de funções monogénicas não é fechado para a multiplicação (ver Exemplo 2.3).

Uma outra abordagem possível consiste em procurar uma função f que seja solução da equação diferencial $f' = f$, com $f(0) = 1$. Em [15] foi construída uma função exponencial, tendo como motivação esta ideia. A função encontrada é a seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Exp}(x_0 + \underline{x}) &= e^{x_0} \left[\cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} - \text{sen} \frac{x_1}{\sqrt{3}} \text{sen} \frac{x_2}{\sqrt{3}} \text{sen} \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right. \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\text{sen} \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \text{sen} \frac{x_2}{\sqrt{3}} \text{sen} \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) e_1 \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \text{sen} \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} \text{sen} \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \text{sen} \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) e_2 \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\text{sen} \frac{x_1}{\sqrt{3}} \text{sen} \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \text{sen} \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) e_3 \right]. \end{aligned}$$

Para terminar, apresentamos, por curiosidade, outras definições de função exponencial em \mathbb{R}^4 que encontrámos na literatura ([2], [31] e [30], respectivamente):

$$\begin{aligned} f_1(x_0 + \underline{x}) &= e^{x_1+x_2+x_3} (\cos \sqrt{3}x_0 - \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3) \text{sen} \sqrt{3}x_0), \\ f_2(x_0 + \underline{x}) &= e^{x_0} (\cos x_1 + e_1 \text{sen} x_1)(\cos x_2 + e_2 \text{sen} x_2)(\cos x_3 + e_3 \text{sen} x_3), \\ f_3(x_0 + \underline{x}) &= e^{x_0} [\cos x_1 \cos x_2 \cosh x_3 + \text{sen} x_1 \text{sen} x_2 \sinh x_3 \\ &\quad + (\text{sen} x_1 \cos x_2 \cosh x_3 - \cos x_1 \text{sen} x_2 \sinh x_3) e_1 \\ &\quad + (\cos x_1 \text{sen} x_2 \cosh x_3 - \text{sen} x_1 \cos x_2 \sinh x_3) e_2 \\ &\quad + (\text{sen} x_1 \text{sen} x_2 \cosh x_3 + \cos x_1 \cos x_2 \text{sen} x_3) e_3]. \end{aligned}$$

Anexo - Procedimentos em Maple

Procedimentos do Capítulo 2

1. Operador de Cauchy Riemann à esquerda

```
QopDerivbar_L := proc(pol::{anything})
  local dfx0 , dfx1 , dfx2 , dfx3;

  dfx0:=diff(pol,x0):
  dfx1:=diff(pol,x1):
  dfx2:=diff(pol,x2):
  dfx3:=diff(pol,x3):
  RETURN(collect(simplify(dfx0+Qmult(qi,dfx1)+Qmult(qj,dfx2)
+Qmult(qk,dfx3)),{qi,qj,qk}));
end proc;
```

2. Operador conjugado de Cauchy Riemann à esquerda

```
QopDeriv_L := proc(pol::anything)
  local dfx0 , dfx1 , dfx2 , dfx3;

  dfx0:=diff(pol,x0):
  dfx1:=diff(pol,x1):
  dfx2:=diff(pol,x2):
  dfx3:=diff(pol,x3):
  RETURN(collect(simplify(dfx0-Qmult(qi,dfx1)-Qmult(qj,dfx2)
-Qmult(qk,dfx3)),{qi,qj,qk}));
end proc;
```


3. Operador de Cauchy Riemann à direita

```
QopDerivbar_R := proc(pol::{anything})
  RETURN(collect(simplify(Qconj(QopDeriv_L(Qconj(pol))))),
    {qi,qj,qk}));
end proc:
```

4. Operador conjugado de Cauchy Riemann à direita

```
QopDeriv_R := proc(pol::anything)
  RETURN(collect(simplify(Qconj(QopDerivbar_L(Qconj(pol))))),
    {qi,qj,qk}));
end proc:
```

Procedimentos do Capítulo 3

1. Operador de Laplace

```
Laplace:=proc(pol::{anything})
  local dfx0,dfx1,dfx2,dfx3:

  dfx0:=diff(pol,x0$2):
  dfx1:=diff(pol,x1$2):
  dfx2:=diff(pol,x2$2):
  dfx3:=diff(pol,x3$2):
  RETURN(collect(simplify(dfx0+dfx1+dfx2+dfx3),{qi,qj,qk}));
end proc:
```

2. Método de Fueter

```
Fueter:=proc(funcao)
  local f,G,F,x,a,b,w:

  x:=x0+x1*qi+x2*qj+x3*qk:
  a:=Qvec(x):
  b:=Qnorm(a):
  w:=a/b:
  f:=evalc(subs(z=x0+I*y,funcao)):
  G:=simplify(subs({I=w,y=b},f)):
  F:=Laplace(G):
  RETURN(simplify(F));
end proc:
```

3. Variante do método de Fueter

```

varianteFueter:=proc(funcao,i1,i2,i3,c)
  local ii,yy:

  ii:=i1*qi+i2*qj+i3*qk:
  yy:=x1*i1+x2*i2+x3*i3+c:
  f:=evalc(subs(z=x0+I*y,funcao)):
  F:=simplify(subs({I=ii,y=yy},f)):
  RETURN(simplify(F));
end proc:

```

Procedimentos do Capítulo 4

1. Função exponencial de Fueter (4.6)

```

ExpF:=proc (x)
  local x0, vetor, r, w, F:

  x0:=Qsc(x):
  vetor:=Qvec(x):
  r:=Qnorm(vetor):
  w:=vetor/r:
  F:=e^x0*(sin(r)/r-w*(r*cos(r)-sin(r))/r^2):
  RETURN(collect(simplify(F),{qi,qj,qk})):
end proc:

```

2. Função cosseno de Fueter (4.7)

```

CosF:=proc (x)
  local x0, vetor, r, w, F:

  x0:=Qsc(x):
  vetor:=Qvec(x):
  r:=Qnorm(vetor):
  w:=vetor/r:
  F:=-cos(x0)*sinh(r)/r+w*sin(x0)*(r*cosh(r)-sinh(r))/r^2:
  RETURN(collect(simplify(F),{qi,qj,qk})):
end proc:

```

3. Função seno de Fueter (4.8)

```

SenF:=proc (x)
  local x0, vetor, r, w, F:

  x0:=Qsc(x):
  vetor:=Qvec(x):
  r:=Qnorm(vetor):
  w:=vetor/r:
  F:=-sin(x0)*sinh(r)/r+w*cos(x0)*(-r*cosh(r)+sinh(r))/r^2:
  RETURN(collect(simplify(F),{qi,qj,qk})):
end proc:

```

4. Função cosseno hiperbólico de Fueter (4.9)

```

CoshF:=proc (x)
  local x0, vetor, r, w, F:

  x0:=Qsc(x):
  vetor:=Qvec(x):
  r:=Qnorm(vetor):
  w:=vetor/r:
  F:=cosh(x0)*sin(r)/r+w*sinh(x0)*(-r*cos(r)+sin(r))/r^2:
  RETURN(collect(simplify(F),{qi,qj,qk})):
end proc:

```

5. Função seno hiperbólico de Fueter (4.10)

```

SenhF:=proc (x)
  local x0, vetor, r, w, F:

  x0:=Qsc(x):
  vetor:=Qvec(x):
  r:=Qnorm(vetor):
  w:=vetor/r:
  F:=sinh(x0)*sin(r)/r+w*cosh(x0)*(-r*cos(r)+sin(r))/r^2:
  RETURN(collect(simplify(F),{qi,qj,qk})):
end proc:

```

6. Função Exponencial - variante de Fueter (4.11)

```

ExpVF:=proc (x)
  local x0, y, w, F:

  x0:=Qsc(x):
  y:=coeff(x,qi)+coeff(x,qj)+coeff(x,qk):
  w:=(qi+qj+qk)/sqrt(3):
  F:=e^x0*(cos(y)+w*(sin(y))):
  RETURN(collect(simplify(F),{qi,qj,qk})):
end proc:

```

7. Função Cosseno - variante de Fueter (4.12)

```

CosVF:=proc (x)
  local x0, y, w, F:

  x0:=Qsc(x):
  y:=coeff(x,qi)+coeff(x,qj)+coeff(x,qk):
  w:=(qi+qj+qk)/sqrt(3):
  F:=cos(x0)*cosh(y)-w*sin(x0)*sinh(y):
  RETURN(collect(simplify(F),{qi,qj,qk})):
end proc:

```

8. Função Seno - variante de Fueter (4.13)

```

SenVF:=proc (x)
  local x0, y, w, F:

  x0:=Qsc(x):
  y:=coeff(x,qi)+coeff(x,qj)+coeff(x,qk):
  w:=(qi+qj+qk)/sqrt(3):
  F:=sin(x0)*cosh(y)+w*cos(x0)*sinh(y):
  RETURN(collect(simplify(F),{qi,qj,qk})):
end proc:

```

9. Função Cosseno Hiperbólico - variante de Fueter (4.14)

```
CoshVF:=proc (x)
  local x0, y, w, F:

  x0:=Qsc(x):
  y:=coeff(x,qi)+coeff(x,qj)+coeff(x,qk):
  w:=(qi+qj+qk)/sqrt(3):
  F:=cosh(x0)*cos(y)+w*sinh(x0)*sin(y):
  RETURN(collect(simplify(F),{qi,qj,qk})):
end proc:
```

10. Função Seno Hiperbólico - variante de Fueter (4.15)

```
SenhVF:=proc (x)
  local x0, y, w, F:

  x0:=Qsc(x):
  y:=coeff(x,qi)+coeff(x,qj)+coeff(x,qk):
  w:=(qi+qj+qk)/sqrt(3):
  F:=sinh(x0)*cos(y)+w*cosh(x0)*sin(y):
  RETURN(collect(simplify(F),{qi,qj,qk})):
end proc:
```

Bibliografia

- [1] Ahlfors, L. *Complex Analysis*. 3^a ed., McGraw-Hill, 1979
- [2] Bracks, F. *The exponential function of a quaternion variable*. *Appl. Anal.*, (8), 265-276, 1979
- [3] Brown, J. e Churchill, R. *Complex Variables and Applications*. 7^a ed., McGraw-Hill, 2003
- [4] Buchmann, Amy. *A Brief History of Quaternions and the Theory of Holomorphic Functions of Quaternionic Variables*. Department of Mathematics and Computer Sciences Schmid College of Science Chapman University Orange, CA 92866 USA.
- [5] Buff, J. J. *Characterization of analytic functions of a quaternion variable*. *Pi Mu Epsilon J.*, 387-392, 1973
- [6] Cerejeiras, P. *Esses Desconhecidos Quaterniões*. *Gazeta de Matemática* (139), SPM, 2000
- [7] Costa, Teresa e Malonek, H. R. *Uma iniciativa notável de Costa Lobo*. <http://www.mat.uc.pt/helios/Mestre/Janeir01/H71clobo.htm>, 2001
- [8] Deavours, C. A. *The quaternionic calculus*. *Am. Math. Monthly* (80), 995-1008, 1973
- [9] Delanghe, R., Kraußhar, R. S. e Malonek, H. R. *Differentiability of functions with values in some real associative algebras: approaches to an old problem*. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 70, 2001

- [10] Falcão, M. I., Cruz, J. e Malonek, H. R. *Remarks on the generation of monogenic functions*, 17th Inter. Conf. on the Appl. of Computer Science and Mathematics on Architecture and Civil Engineering, K. Gürlebeck and C. Könke (eds.), Weimar, 2006
- [11] Fueter, R. *Analytische Funktionen einer Quaternionenvariablen*. Comment. Math. Helv. (4), 9-20, 1932
- [12] Fueter, R. *Die Funktionentheorie der Diferetialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen*. Comment. Math. Helv. (7), 307-330, 1935
- [13] Fueter, R. *Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen*. Comment. Math. Helv. (8), 371-378, 1935-36
- [14] Fueter, R. *Functions of a Hyper Complex Variable*. Lecture Notes written and supplemented by E. Bareiss, Fall Semester, Univ. Zürich, 1948-49
- [15] Gürlebeck, K., Habetha, K. e Sprößig, W. *Holomorphic Funcions in the Plane and n -dimensional Space*. Birkhäuser Verlag AG, 2008
- [16] Gürlebeck, K. e Malonek, H. *A Hypercomplex Derivate of Monogenic Functions in \mathbb{R}^{m+1} and its aplications*. Complex Variables (39), 199-228,1999
- [17] Gürlebeck, K. e Sprößig, W. *Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems*. Math. Research, (56), Berlin: Akademie-Verlag,1989
- [18] Gürlebeck, K. e Sprößig, W. *A generalized Leibniz rule and foundation of a discrete quaternionic analysis*. Proceedings of the Winter School on Geometry and Physics, (16), 43-64, 1987
- [19] Hamilton, W. R. *Elements of Quaternions* Chelsea (reedição) 1866, 1969
- [20] Krylov, N. N. *Dokl. AN SSSR* 55, #9, 799-800,1947
- [21] Malonek, H. *A new hypercomplex structure of the Euclidean space \mathbb{R}^{m+1} and the concept of hypercomplex differentiability*. Complex Variables (14), 25-33,1990

- [22] Malonek, H. *The concept of hypercomplex differentiability and related differential forms*. Studies in complex analysis and its applications to partial differential equations 1 ed. by R. Kühnau and W. Tutschke, Pitman (256), 193-202, 1991
- [23] Malonek, H. *Rudolf Fueter and his Motivation for Hypercomplex Function Theory*. Universidad Nacional Autónoma de México. Printed in México. Int. Conf. on Clifford Analysis, Its Appl. and Related Topics. Beijing, August 1-6, 2000
- [24] Malonek, H. *Selected topics in hypercomplex function theory*. Eriksson, Sirkka-Liisa (ed.), Clifford algebras and potential theory, 2002
- [25] Melijhzon, A. S. *Because of monogenicity of quaternions (em russo)*. Doklady Acad. Sc. URSS (59), 431-434, 1948
- [26] Needham, T. *Visual Complex Analysis*. Oxford University Press, 1997
- [27] Piaggio, H. T. H. *The significance and development of Hamilton's quaternions*. Nature 152, 553-555, 1943
- [28] Pinheiro, Maria Lúcia Gonçalves. *Quaterniões: Cálculo numérico e simbólico*. Tese de Mestrado, Universidade do Minho, Escola de Ciências, 2006
- [29] Providência, Natália Bebiano da. *Análise Complexa*. Gradiva Publicações, S. A., 1ª edição: Fevereiro, 2009
- [30] Rönn, S. *Bicomplex algebra and the function theory*. <http://arxiv.org/abs/math/0101200v1>
- [31] Sommen, F. *A product and an exponential function in hypercomplex function theory*. Appl. Anal., (12), 13-26, 1981
- [32] Stewart, I. e Tall, D. *Complex Analysis*. Cambridge University Press, 1983
- [33] Sudbery, A. *Quaternionic analysis*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., (85), 199-225, 1979
- [34] *The MacTutor History of Mathematics Archive*. Biographies Index, <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>, 2011