

4 - PÓRTICOS PLANOS

4.1 - INTRODUÇÃO

Os pórticos planos são estruturas reticuladas que podem ser discretizadas por elementos de viga com deformação axial. Assim, a simulação do comportamento de pórticos planos depende da teoria adoptada para modelar o comportamento dos elementos de viga. As teorias correntemente utilizadas são, basicamente, a de Euler-Bernoulli e a de Timoshenko.

No elemento de viga de Euler-Bernoulli admite-se que as secções transversais, normais ao eixo da viga antes da deformação, mantêm-se planas e ortogonais ao referido eixo após a deformação. Esta hipótese resulta do facto de nesta teoria se admitir que a rotação de uma secção transversal é igual à inclinação do eixo da viga (ver figura 4.1a). Neste caso a deformação por corte é ignorada, pelo que a aplicação desta teoria deve ser restrita a vigas delgadas.

Na teoria de Timoshenko admite-se que as secções planas e normais ao eixo da viga antes da deformação, permanecem planas mas não necessariamente ortogonais ao eixo da viga (ver figura 4.1b). Desta forma é possível simular o comportamento de vigas em que não é desprezável a deformação por corte.

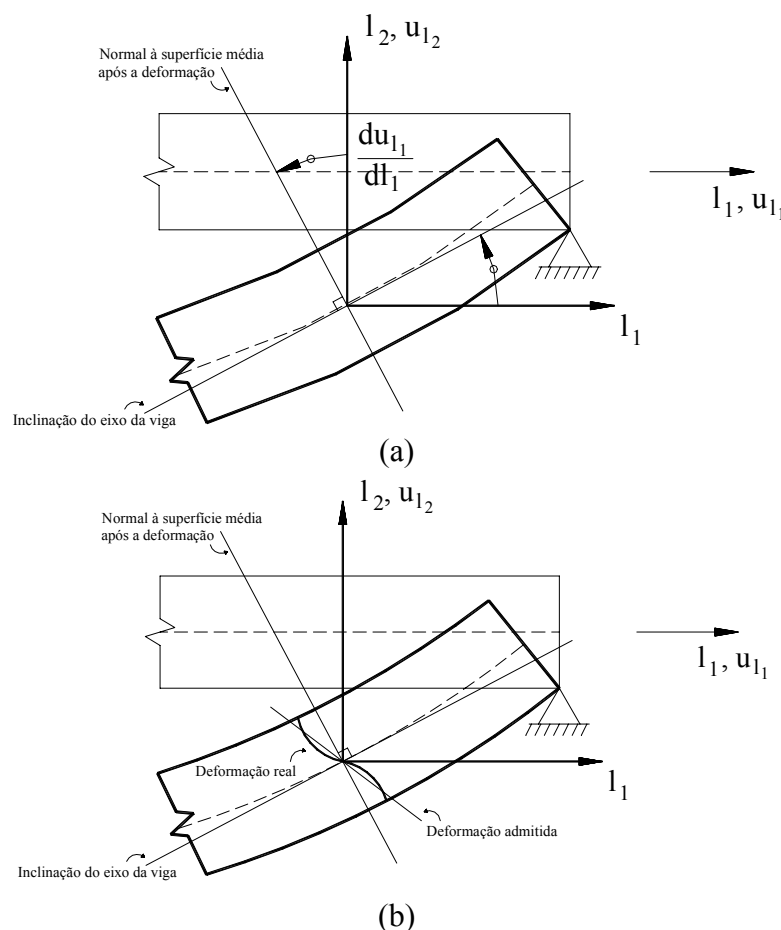


Figura 4.1 - Deformação de um elemento de viga segundo a teoria de Euler-Bernoulli (a) e de Timoshenko (b).

Na figura (4.1) ℓ_i é o referencial local da barra. Note-se que no caso dos pórticos as equações de equilíbrio de cada barra são estabelecidas no referencial local da barra. A matriz de rigidez e o vector das forças nodais equivalentes são obtidas no referencial local da barra, sendo em seguida convertidos para o referencial global x_i da estrutura e assemblados na matriz de rigidez e no vector das forças nodais equivalentes da estrutura, \underline{K}^E e \underline{Q}^E , respectivamente.

4.2 - ELEMENTO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI COM DEFORMAÇÃO AXIAL

A teoria de Euler-Bernoulli admite as seguintes hipóteses:

- i) Os deslocamentos verticais u_{ℓ_2} de todos os pontos de uma secção transversal qualquer são pequenos, quando comparados com a altura da viga, e são iguais ao respectivo deslocamento do eixo da viga;
- ii) O deslocamento lateral, u_{ℓ_3} é nulo (ver Figura 4.2);
- iii) Secções transversais planas e normais ao eixo da viga antes da deformação mantêm-se planas e ortogonais ao referido eixo após a deformação.

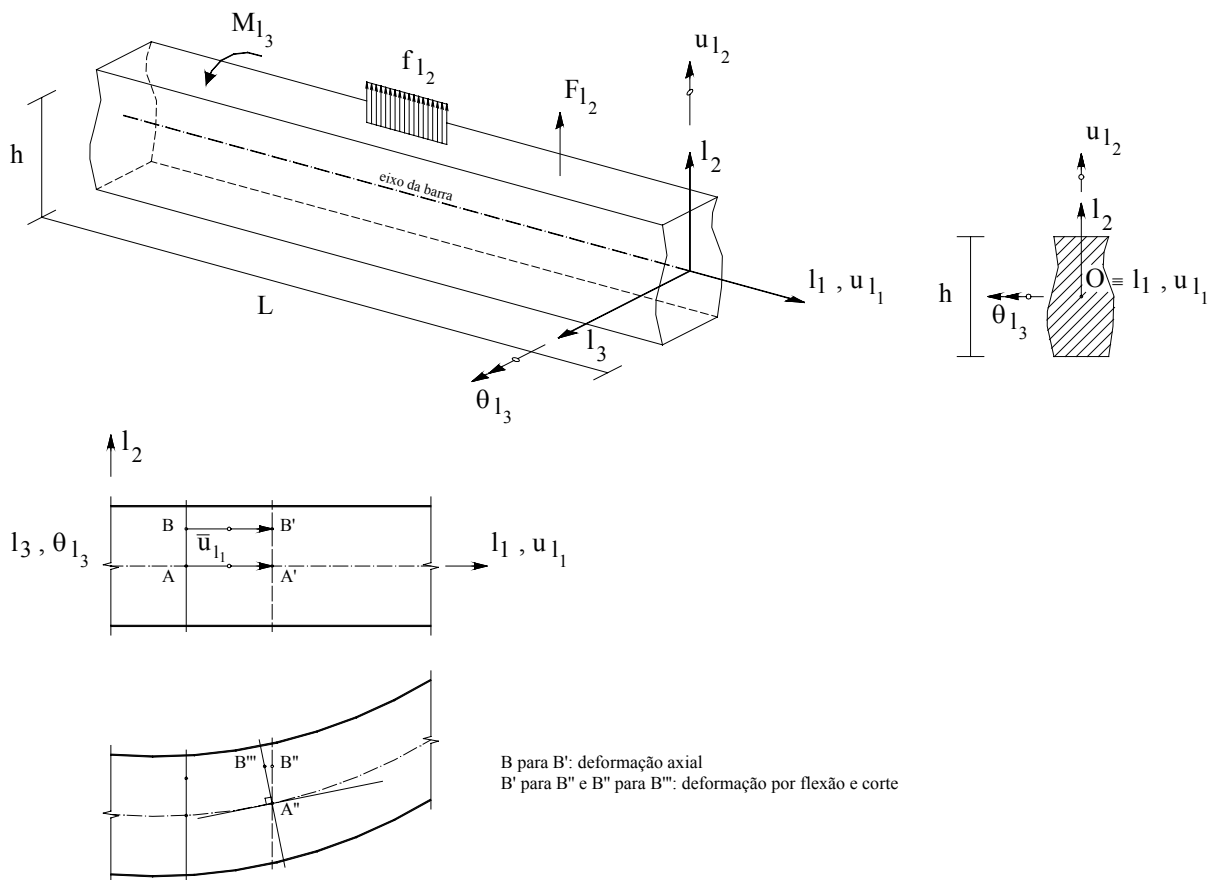


Figura 4.2 - Deformação axial de um elemento de viga segundo a teoria de Euler-Bernoulli.

4.2.1 - Campo de deslocamentos

Tendo em conta as hipóteses admitidas na teoria de Euler-Bernoulli, o campo de deslocamentos de um ponto qualquer da viga define-se por intermédio das seguintes relações (ver também Figura 4.2),

$$\begin{aligned} u_{\ell_1}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) &= \bar{u}_{\ell_1}(\ell_1, \ell_2 = 0, \ell_3 = 0) - \ell_2 \theta_{\ell_3}(\ell_1, \ell_2 = 0, \ell_3 = 0) \\ u_{\ell_2}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) &= \bar{u}_{\ell_2}(\ell_1, \ell_2 = 0, \ell_3 = 0) \\ u_{\ell_3}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) &= 0, \end{aligned} \quad (4.1a)$$

ou, mais simplesmente,

$$\begin{aligned} u_{\ell_1}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) &= \bar{u}_{\ell_1}(\ell_1) - \ell_2 \theta_{\ell_3}(\ell_1) \\ u_{\ell_2}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) &= \bar{u}_{\ell_2}(\ell_1) \\ u_{\ell_3}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) &= 0, \end{aligned} \quad (4.1b)$$

em que \bar{u}_{ℓ_1} e \bar{u}_{ℓ_2} são os deslocamentos de um ponto do eixo da viga segundo as direcções de ℓ_1 e ℓ_2 , respectivamente. Devido à hipótese iii), a rotação θ_{ℓ_3} de (4.1) é igual à inclinação da tangente ao eixo da viga deformada (ver Figura 4.1a), pelo que,

$$\theta_{\ell_3} = \frac{du_{\ell_2}}{d\ell_1} \quad (4.2)$$

$$u_{\ell_1} = \bar{u}_{\ell_1} - \ell_2 \frac{du_{\ell_2}}{d\ell_1}. \quad (4.3)$$

4.2.2 - Extensões

A única componente não nula do tensor das extensões é a devida à variação de comprimento das fibras paralelas ao eixo da viga, pelo que,

$$\varepsilon_{\ell_1} = \frac{d\bar{u}_{\ell_1}}{d\ell_1}. \quad (4.4)$$

Substituindo (4.3) em (4.4) resulta,

$$\varepsilon_{\ell_1} = \frac{d\bar{u}_{\ell_1}}{d\ell_1} - \ell_2 \frac{d^2 u_{\ell_2}}{d\ell_1^2} \quad (4.5)$$

ou

$$\varepsilon_{\ell_1} = \varepsilon_a + \varepsilon_f \quad (4.6a)$$

em que

$$\varepsilon_a = \frac{d\bar{u}_{\ell_1}}{d\ell_1} \quad (4.6b)$$

é a extensão por deformação axial e

$$\varepsilon_f = -\ell_2 \bar{\varepsilon}_f = -\ell_2 \frac{d^2 u_{\ell_2}}{d\ell_1^2} \quad (4.6c)$$

é a extensão por flexão.

4.2.3 - Tensões e esforços

Se a única componente não nula do tensor das extensões é ε_{ℓ_1} , então σ_{ℓ_1} será a única componente não nula do tensor das tensões,

$$\sigma_{\ell_1} = E \varepsilon_{\ell_1} \quad (4.7)$$

em que E é o módulo de elasticidade do material. Substituindo (4.5) em (4.7) resulta

$$\sigma_{\ell_1} = E \frac{d\bar{u}_{\ell_1}}{d\ell_1} - E \ell_2 \frac{d^2 u_{\ell_2}}{d\ell_1^2} \quad (4.8)$$

ou

$$\sigma_{\ell_1} = \sigma_a + \sigma_f \quad (4.9a)$$

em que

$$\sigma_a = E \frac{d\bar{u}_{\ell_1}}{d\ell_1} \quad (4.9b)$$

é a tensão devida à variação de comprimento do eixo da viga e,

$$\sigma_f = -E \ell_2 \frac{d^2 u_{\ell_2}}{d\ell_1^2} \quad (4.9c)$$

é a tensão devida à flexão da viga.

O esforço axial resulta da integração de (4.9b) na área da secção transversal do elemento,

$$N_{\ell_1} = \int_A \sigma_a dA = EA \frac{d\bar{u}_{\ell_1}}{d\ell_1} = EA \varepsilon_a. \quad (4.10a)$$

Por sua vez o momento flector obtém-se integrando, na secção transversal da viga, o momento em relação à superfície média da viga, provocado pela tensão σ_{ℓ_1} ,

$$\begin{aligned} M_{\ell_3} &= \int_A \ell_2 \sigma_{\ell_1} dA \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \ell_2 E \left(\frac{d\bar{u}_{\ell_1}}{d\ell_1} - \ell_2 \frac{d^2 u_{\ell_2}}{d\ell_1^2} \right) b d\ell_2 \\ &= -E \frac{d^2 u_{\ell_2}}{d\ell_1^2} \int_{-h/2}^{h/2} \ell_2^2 b d\ell_2 \\ &= -E \chi I_{\ell_3} \end{aligned} \quad (4.10b)$$

em que

$$I_{\ell_3} = \int_{-h/2}^{h/2} \ell_2^2 b d\ell_2 \quad (4.11)$$

é a inércia da secção transversal da viga, em relação ao eixo ℓ_3 , e b é a largura dessa secção, e

$$\bar{\varepsilon}_f = \chi = \frac{d^2 u_{\ell_2}}{d\ell_1^2} \quad (4.12)$$

é a curvatura do eixo da viga.

Na figura 4.3 representa-se a convenção de sinais positivos para as tensões e esforços.

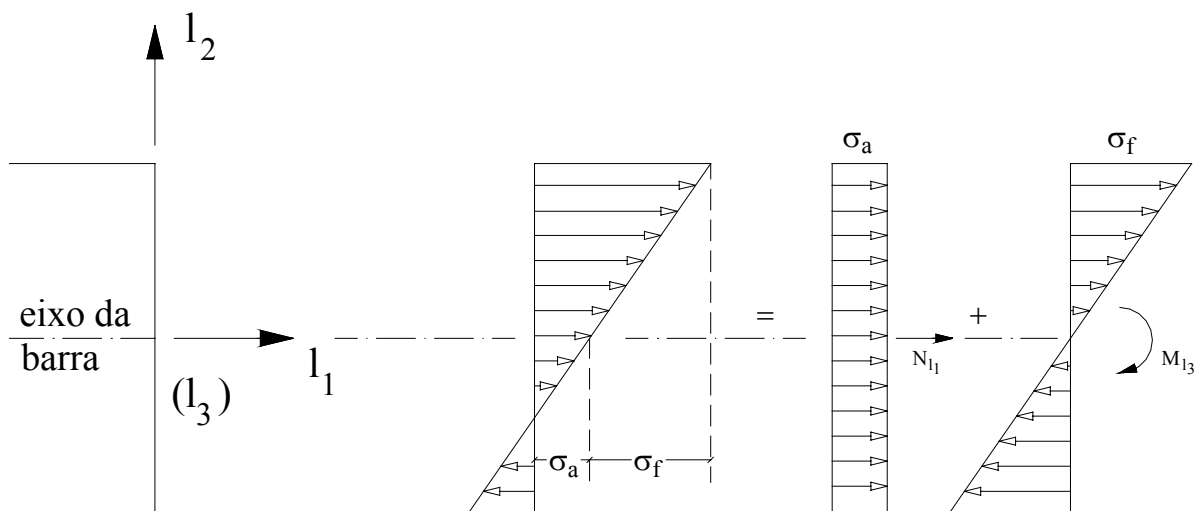


Figura 4.3 – Convenção de sinais positivos para as tensões e esforços.

4.2.4 - Expressão do princípio dos trabalhos virtuais

Considere-se um elemento de viga de volume V solicitado por forças generalizadas proporcionais à sua massa \underline{Q}_V , forças generalizadas distribuídas por unidade de comprimento, \underline{Q}_L , e forças generalizadas aplicadas em pontos do seu domínio \underline{Q}_p . Sob este carregamento o corpo sofre extensões e deslocamentos virtuais, $\delta \underline{\varepsilon}$ e $\delta \underline{U}$, respectivamente, pelo que, pela aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, o trabalho interno é igual ao trabalho externo realizado durante a deformação virtual do elemento, i.e.:

$$\int_{V^{(e)}} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV = \int_{V^{(e)}} \delta \underline{U}^T \underline{Q}_V dV + \int_{L^{(e)}} \delta \underline{U}^T \underline{Q}_L dL + \delta \underline{U}^T \underline{Q}_p \quad (4.13)$$

em que

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}}^{(e)} &= \int_{V^{(e)}} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV \\ &= \int_{V^{(e)}} \delta \varepsilon_{\ell_1} \sigma_{\ell_1} dV \\ &= \int_{L^{(e)}} \int_{A^{(e)}} \left[\frac{d(\delta \bar{u}_{\ell_1})}{d\ell_1} - \ell_2 \frac{d^2(\delta u_{\ell_2})}{d\ell_1^2} \right] E \left[\frac{d\bar{u}_{\ell_1}}{d\ell_1} - \ell_2 \frac{d^2 u_{\ell_2}}{d\ell_1^2} \right] dA d\ell_1 \\ &= \int_{L^{(e)}} \int_{A^{(e)}} (\delta \varepsilon_a E \varepsilon_a - \ell_2 \delta \varepsilon_a E \bar{\varepsilon}_f - \ell_2 \delta \bar{\varepsilon}_f E \varepsilon_a + \ell_2^2 \delta \bar{\varepsilon}_f E \varepsilon_f) dA d\ell_1 \\ &= \int_{L^{(e)}} (\delta \varepsilon_a E A \varepsilon_a + \delta \bar{\varepsilon}_f E I_{\ell_3} \delta \bar{\varepsilon}_f) d\ell_1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

é o trabalho interno de deformação virtual realizado durante as extensões virtuais $\delta \varepsilon_{\ell_1}$. O termo

$$\int_{L^{(e)}} (\delta \varepsilon_a E A \varepsilon_a) d\ell_1 \quad (4.15a)$$

representa a rigidez extensional do elemento e o termo,

$$\int_{L^{(e)}} (\delta \bar{\varepsilon}_f E I_{\ell_3} \delta \bar{\varepsilon}_f) d\ell_1 \quad (4.15b)$$

representa a rigidez à flexão do elemento.

Os termos da direita da igualdade (4.13),

$$\int_{V^{(e)}} \delta \underline{U}^T \underline{Q}_V dV + \int_{L^{(e)}} \delta \underline{U}^T \underline{Q}_L dL + \delta \underline{U}^T \underline{Q}_p \quad (4.16)$$

traduzem o trabalho externo realizado durante os deslocamentos virtuais $\delta \underline{U}$, em que

$$\underline{Q}_V = \begin{Bmatrix} \rho g_{x_1} \\ \rho g_{x_2} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.17)$$

sendo ρ a massa por unidade de volume do material que constitui o elemento e g_{x_1} , g_{x_2} a aceleração da gravidade segundo os eixos x_1 e x_2 do referencial global (ver Figura 4.4).

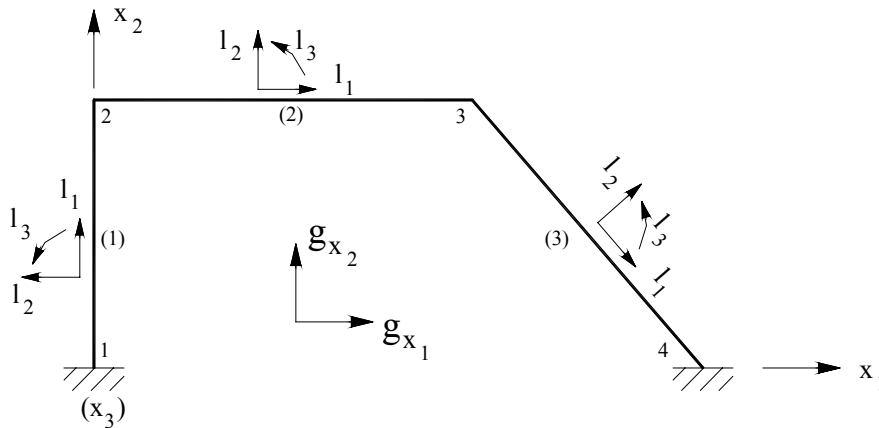


Figura 4.4 – Componentes da aceleração da gravidade em pórticos planos.

Por sua vez

$$\underline{Q}_L = \begin{Bmatrix} f_{l_1} \\ f_{l_2} \\ m_{l_3} \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

é o vector das forças generalizadas distribuídas por unidade de comprimento em barras, sendo f_{l_1} e f_{l_2} as forças distribuídas por unidade de comprimento segundo os eixos l_1 e l_2 , e m_{l_3} o momento distribuído por unidade de comprimento em torno do eixo l_3 (ver Figura 4.5).

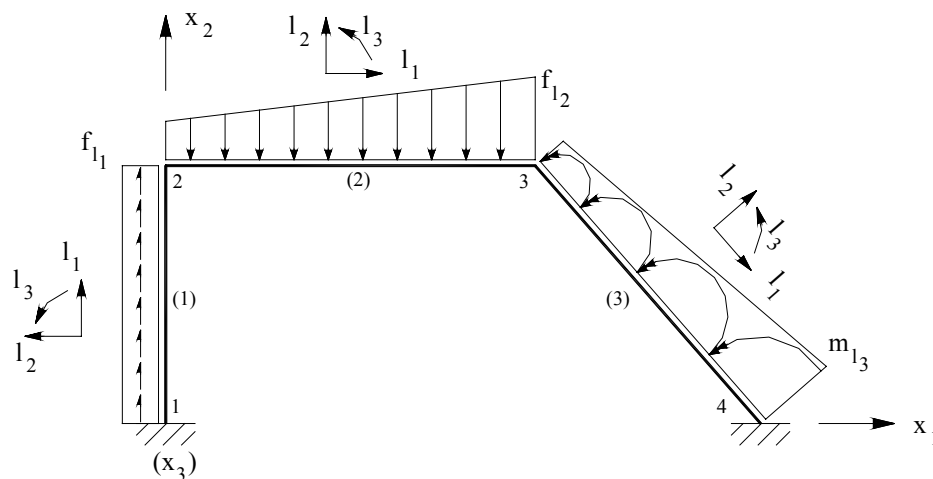


Figura 4.5 – Forças distribuídas por unidade de comprimento.

O vector

$$\underline{Q}_P = \begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \\ M_{x_3} \end{Bmatrix}_P \quad (4.19)$$

representa as forças generalizadas aplicadas num ponto P, sendo F_{x_1} e F_{x_2} as forças segundo os eixos x_1 e x_2 , e M_{x_3} é o momento segundo x_3 (Figura 4.6).

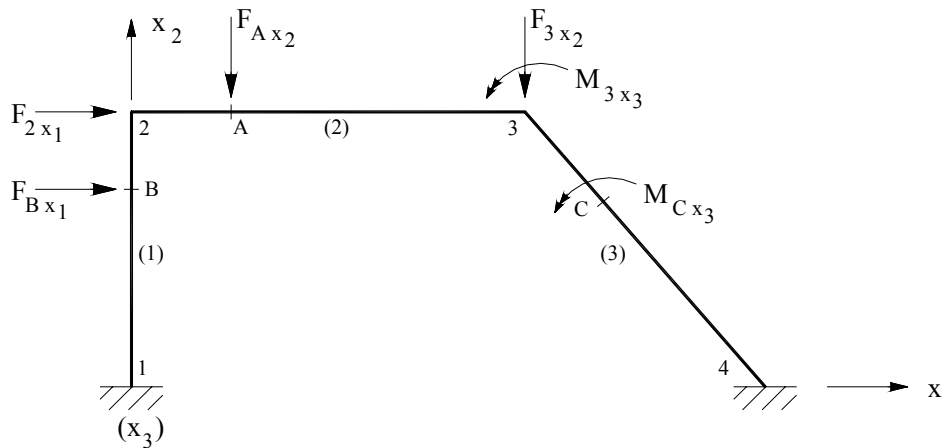


Figura 4.6 – Forças generalizadas aplicadas em pontos da estrutura.

4.2.5 - Discretização em elementos finitos de dois nós

Analisando as parcelas da expressão (4.14) dos trabalhos virtuais verifica-se que o trabalho interno de deformação é a adição do trabalho por deformação axial

$$\int_{L^{(e)}} \frac{d(\delta \bar{u}_{\ell_1})}{d\ell_1} EA \frac{d\bar{u}_{\ell_1}}{d\ell_1} d\ell_1 \quad (4.20)$$

tratado nos capítulos anteriores, com o trabalho por flexão,

$$\int_{L^{(e)}} \frac{d^2(\delta \bar{u}_{\ell_2})}{d\ell_1^2} EI \frac{d^2 \bar{u}_{\ell_2}}{d\ell_1^2} d\ell_1. \quad (4.21)$$

O comportamento por deformação axial é simulado pela formulação descrita nos capítulos anteriores, enquanto o comportamento à flexão será apresentado numa próxima secção.

Na parcela de trabalho interno por deformação de flexão, (4.21), existem segundas derivadas da flecha \bar{u}_{ℓ_2} . Por este facto, deve-se utilizar elementos de continuidade de classe C_1 de forma a garantir-se quer a continuidade dos deslocamentos quer da sua derivada (ver secções 3.2 e 3.6.3).

O elemento de viga mais simples de classe C_1 é o dois nós representado na figura 4.7

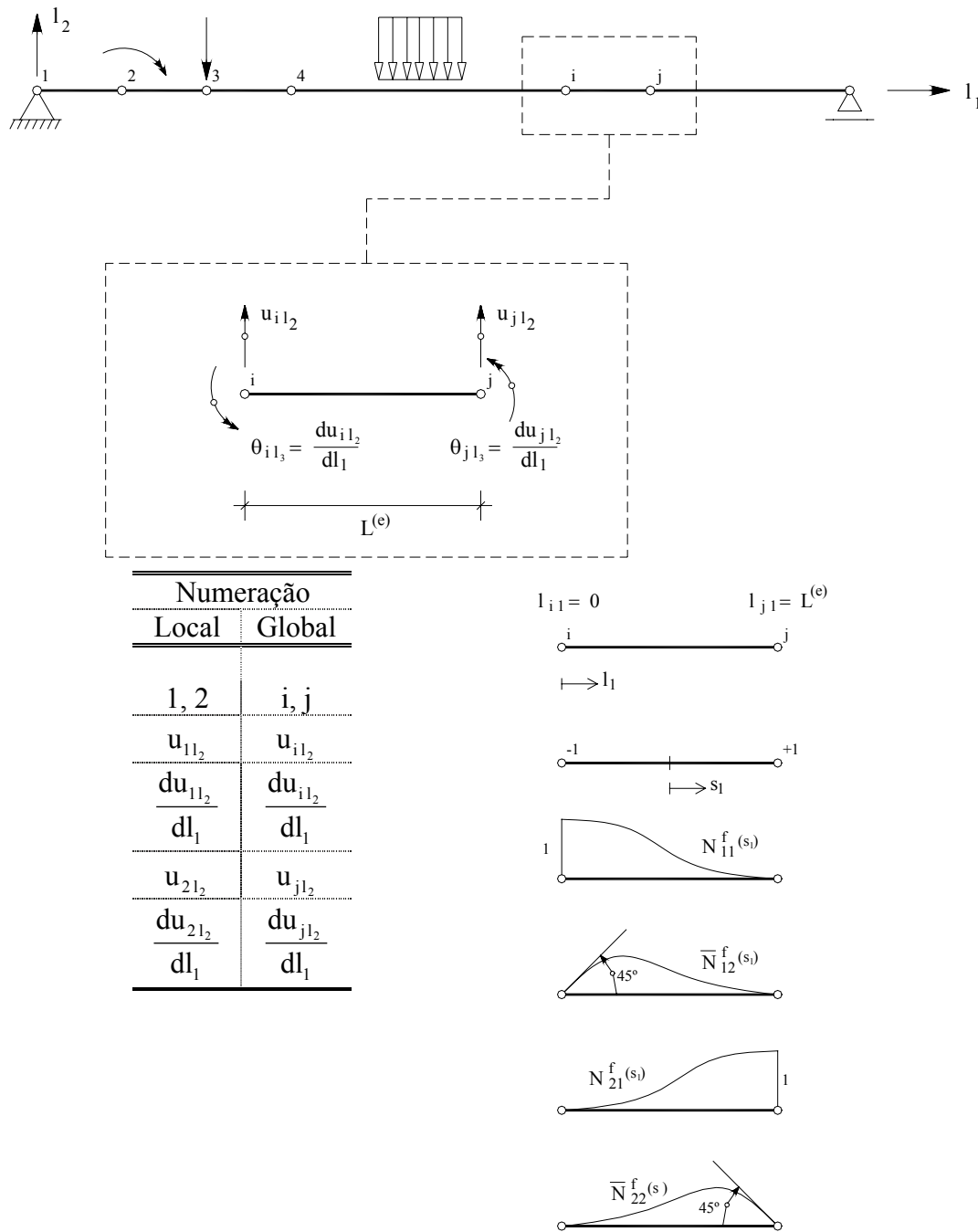


Figura 4.7 - Elemento de viga de Euler-Bernoulli de dois nós. Graus de liberdade e funções de forma hermiticas na simulação do comportamento à flexão.

A continuidade das primeiras derivadas obriga a tomar como grau de liberdade a rotação, du_{l_2}/dl_1 . Assim, cada nó genérico i tem dois graus de liberdade u_{il_2} e du_{il_2}/dl_1 , pelo que, cada elemento tem quatro graus de liberdade. Desta forma, o campo de deslocamentos, u_{l_2} , fica perfeitamente definido pela função cúbica seguinte,

$$u_{\ell_2}(s_1) = \alpha_1 + \alpha_2 s_1 + \alpha_3 s_1^2 + \alpha_4 s_1^3 \quad (4.22a)$$

ou

$$u_{\ell_2}(s_1) = \begin{bmatrix} 1 & s_1 & s_1^2 & s_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (4.22b)$$

ou ainda

$$u_{\ell_2}(s_1) = \underline{S} \underline{\alpha}. \quad (4.22c)$$

Derivando (4.22a) obtém-se,

$$\frac{du_{\ell_2}}{ds_1} = \alpha_2 + 2\alpha_3 s_1 + 3\alpha_4 s_1^2. \quad (4.23)$$

Na secção 3.3 verificou-se que no caso de um elemento de dois nós ou de um elemento de três nós, com nó intermédio ao centro,

$$\begin{aligned} dx_1 &= J ds_1 \\ &= \frac{L}{2} ds_1. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Além disto, verificou-se ainda que

$$\frac{du_1}{ds_1} = \frac{du_1}{dx_1} \frac{dx_1}{ds_1}. \quad (4.25)$$

Substituindo (4.24) em (4.25) e passando u_1 para u_{ℓ_2} e x_1 para ℓ_1 obtém-se,

$$\begin{aligned} \frac{du_{\ell_2}}{ds_1} &= \frac{du_{\ell_2}}{d\ell_1} \frac{d\ell_1}{ds_1} \\ &= \frac{L}{2} \frac{du_{\ell_2}}{d\ell_1}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

As constantes α_i de (4.22) calculam-se substituindo em (4.22) e (4.23) os valores de u_{ℓ_2} e de du_{ℓ_2}/ds_1 nos nós do elemento, resultando:

$$\begin{aligned}
u_{\ell_2}(s_1 = -1) &= u_{1\ell_2} = \alpha_1 + \alpha_2(-1) + \alpha_3(-1)^2 + \alpha_4(-1)^3 \\
\left. \frac{du_{\ell_2}}{ds_1} \right|_{s_1=-1} &= \frac{L}{2} \frac{du_{1\ell_2}}{d\ell_1} = \frac{L}{2} \theta_{1\ell_3} = \alpha_2 + 2\alpha_3(-1) + 3\alpha_4(-1)^2 \\
u_{\ell_2}(s_1 = +1) &= u_{2\ell_2} = \alpha_1 + \alpha_2(+1) + \alpha_3(+1)^2 + \alpha_4(+1)^3 \\
\left. \frac{du_{\ell_2}}{ds_1} \right|_{s_1=+1} &= \frac{L}{2} \frac{du_{2\ell_2}}{d\ell_1} = \frac{L}{2} \theta_{2\ell_3} = \alpha_2 + 2\alpha_3(+1) + 3\alpha_4(+1)^2
\end{aligned} \tag{4.27a}$$

ou

$$\begin{bmatrix} u_{1\ell_2} \\ \frac{L}{2} \theta_{1\ell_3} \\ u_{2\ell_2} \\ \frac{L}{2} \theta_{2\ell_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \tag{4.27b}$$

ou ainda

$$\underline{\hat{U}}_f^{(e)} = \underline{C} \underline{\alpha} \tag{4.27c}$$

em que $\underline{\hat{U}}_f^{(e)}$ é um vector que inclui os graus de liberdade de flexão do elemento. De (4.27c) resulta,

$$\underline{\alpha} = \underline{C}^{-1} \underline{\hat{U}}_f^{(e)} \tag{4.28a}$$

em que,

$$\underline{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -3/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}. \tag{4.28b}$$

Substituindo (4.28a) em (4.22c) obtém-se,

$$\begin{aligned}
u_{\ell_2}(s_1) &= \underline{S} \underline{C}^{-1} \hat{\underline{U}}_f^{(e)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & s_1 & s_1^2 & s_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -3/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1\ell_2} \\ \frac{L}{2} \theta_{1\ell_3} \\ u_{2\ell_2} \\ \frac{L}{2} \theta_{2\ell_3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_1^3 & \frac{L}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_1^2 + \frac{1}{4}s_1^3 \right) & \frac{1}{2} + \frac{3}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_1^3 & \frac{L}{2} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_1^2 + \frac{1}{4}s_1^3 \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1\ell_2} \\ \theta_{1\ell_3} \\ u_{2\ell_2} \\ \theta_{2\ell_3} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.29a}$$

ou

$$u_{\ell_2}(s_1) = \begin{bmatrix} N_{11}^f & \frac{L}{2} \bar{N}_{12}^f & N_{21}^f & \frac{L}{2} \bar{N}_{22}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1\ell_2} \\ \theta_{1\ell_3} \\ u_{2\ell_2} \\ \theta_{2\ell_3} \end{bmatrix} \tag{4.29b}$$

ou ainda

$$u_{\ell_2} = \left[\underline{N}^f \right]^{(e)} \underline{U}_f^{(e)} \tag{4.29c}$$

em que $\left[\underline{N}^f \right]^{(e)}$ é a matriz das funções de forma do elemento de viga de dois nós, representadas na Figura 4.7, e designadas de funções de forma Hermitianas (ou do elemento de viga Hermítico de dois nós).

As componentes de $\left[\underline{N}^f \right]^{(e)}$ definem-se por intermédio das relações seguintes,

$$\begin{aligned}
N_{11}^f &= \frac{1}{4}(2 - 3s_1 + s_1^3) \\
N_{12}^f &= \frac{L}{2} \bar{N}_{12}^f = \frac{L}{2} \left[\frac{1}{4}(1 - s_1 - s_1^2 + s_1^3) \right] \\
N_{21}^f &= \frac{1}{4}(2 + 3s_1 - s_1^3) \\
N_{22}^f &= \frac{L}{2} \bar{N}_{22}^f = \frac{L}{2} \left[\frac{1}{4}(-1 - s_1 + s_1^2 + s_1^3) \right]
\end{aligned} \tag{4.30}$$

sendo N_{ij}^f a função de forma correspondente ao grau de liberdade j do nó i , relativa ao campo de deformação por flexão.

Repare-se que a derivada de N_{i1}^f com $i=1,2$ é nula no nó i , que N_{i1}^f com $i=1,2$ tem valor unitário no nó i e nulo no outro nó, que \bar{N}_{i2}^f com $i=1,2$ tem valor nulo no nó i e que a

derivada de \bar{N}_{i2}^f com $i=1,2$ tem valor unitário em i e nulo no outro nó (acompanhar esta exposição analisando a forma as funções representadas na Figura 4.7).

A inclinação do eixo da viga obtém-se derivando (4.29),

$$\begin{aligned} \frac{du_{\ell_2}}{d\ell_1} &= \frac{du_{\ell_2}}{ds_1} \frac{ds_1}{d\ell_1} = \frac{du_{\ell_2}}{ds_1} \frac{2}{L} \\ &= \frac{2}{L} \left[-\frac{3}{4} + \frac{3}{4}s_1^2 \quad \left| \quad \frac{L}{2} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}s_1 + \frac{3}{4}s_1^2 \right) \quad \right| \quad \frac{3}{4} - \frac{3}{4}s_1^2 \quad \left| \quad \frac{L}{2} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}s_1 + \frac{3}{4}s_1^2 \right) \right| \right] \begin{bmatrix} u_{1\ell_2} \\ du_{1\ell_2}/d\ell_1 \\ u_{2\ell_2} \\ du_{2\ell_2}/d\ell_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Por sua vez, a curvatura da viga obtém-se derivando (4.31) resultando,

$$\begin{aligned} \frac{d^2u_{\ell_2}}{d\ell_1^2} &= \frac{d}{ds_1} \left(\frac{du_{\ell_2}}{d\ell_1} \right) \frac{ds_1}{d\ell_1} \\ &= \frac{d}{ds_1} \left(\frac{du_{\ell_2}}{ds_1} \frac{ds_1}{d\ell_1} \right) \frac{ds_1}{d\ell_1} \\ &= \left[\frac{d}{ds_1} \left(\frac{du_{\ell_2}}{ds_1} \right) \frac{ds_1}{d\ell_1} + 0 \right] \frac{ds_1}{d\ell_1} \\ &= \frac{d^2u_{\ell_2}}{ds_1^2} \left(\frac{ds_1}{d\ell_1} \right)^2 \\ &= \frac{4}{L^2} \frac{d^2u_{\ell_2}}{ds_1^2} \\ &= \frac{4}{L^2} \frac{d^2 \left[\underline{N}^f \right]^{(e)}}{ds_1^2} \underline{U}_f^{(e)} \\ &= \frac{4}{L^2} \left[\frac{3}{2}s_1 \quad \left| \quad \frac{L}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}s_1 \right) \quad \right| \quad -\frac{3}{2}s_1 \quad \left| \quad \frac{L}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}s_1 \right) \right| \right] \begin{bmatrix} u_{1\ell_2} \\ du_{1\ell_2}/d\ell_1 \\ u_{2\ell_2} \\ du_{2\ell_2}/d\ell_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.32)$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_f &= \chi \\
&= \frac{d^2 u_{\ell_2}}{d\ell_1^2} \\
&= \underline{B}_f^{(e)} \underline{U}_f^{(e)} \\
&= \left[\frac{4}{L^2} \frac{d^2 N_{11}^f}{ds_1^2} \quad \frac{4}{L^2} \frac{d^2 N_{12}^f}{ds_1^2} \quad \frac{4}{L^2} \frac{d^2 N_{21}^f}{ds_1^2} \quad \frac{4}{L^2} \frac{d^2 N_{22}^f}{ds_1^2} \right] \underline{U}_f^{(e)} \\
&= \left[\frac{6}{L^2} s_1 \quad -\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \quad -\frac{6}{L^2} s_1 \quad \frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \right] \underline{U}_f^{(e)}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

em que $\underline{B}_f^{(e)}$ é a matriz de deformação por flexão do elemento. Para se incluir o trabalho por deformação axial verifique-se que,

$$\varepsilon_a = \underline{B}_a^{(e)} \underline{U}^{(e)} \tag{4.34}$$

em que

$$\begin{aligned}
\underline{B}_a^{(e)} &= [B_{1a} \quad 0 \quad 0 \quad B_{2a} \quad 0 \quad 0] \\
&= \left[\frac{2}{L} \frac{dN_1^a}{ds_1} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{2}{L} \frac{dN_2^a}{ds_1} \quad 0 \quad 0 \right] \\
&= \left[-\frac{1}{L} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{L} \quad 0 \quad 0 \right]
\end{aligned} \tag{4.35}$$

é a matriz de deformação axial, em que N_1^a e N_2^a são as funções de forma nos nós 1 e 2, representadas em (3.10). Por sua vez a extensão por flexão pode ser obtida por intermédio da seguinte relação

$$\bar{\varepsilon}_f = \underline{B}_f^{(e)} \underline{U}^{(e)} \tag{4.36}$$

$$\underline{B}_f^{(e)} = \left[0 \quad \frac{6}{L^2} s_1 \quad -\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \quad 0 \quad -\frac{6}{L^2} s_1 \quad \frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \right] \tag{4.37}$$

é a matriz de deformação por flexão e

$$\underline{U}^{(e)} = \left[u_{1\ell_1} \quad u_{1\ell_2} \quad \frac{du_{1\ell_2}}{d\ell_1} \quad u_{2\ell_1} \quad u_{2\ell_2} \quad \frac{du_{2\ell_2}}{d\ell_1} \right] \tag{4.38}$$

são os graus de liberdade do elemento de dois nós.

Substituindo (4.34) e (4.36) em (4.14) resulta,

$$\delta W_{\text{int}}^{(e)} = \delta \underline{U}^{(e)T} \int_{-1}^{+1} \left(\left[\underline{B}_a^{(e)} \right]^T EA \underline{B}_a^{(e)} + \left[\underline{B}_f^{(e)} \right]^T EI_{\ell_3} \underline{B}_f^{(e)} \right) \frac{L}{2} ds_1 \underline{U}^{(e)} \tag{4.39}$$

pele que a matriz de rigidez do elemento fica

$$\begin{aligned}
 \underline{k}^{(e)} = & \int_{-1}^{+1} \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{L} \\ \frac{0}{L} \\ \frac{0}{L} \\ \frac{0}{L} \\ \frac{0}{L} \end{array} \right\} EA \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{array} \right] + \\
 & + \left. \begin{array}{c} 0 \\ \frac{6}{L^2} s_1 \\ -\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \\ 0 \\ -\frac{6}{L^2} s_1 \\ \frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \end{array} \right\} EI_{\ell_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{6}{L^2} s_1 & -\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 & 0 & -\frac{6}{L^2} s_1 & \frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \end{array} \right] \frac{L}{2} ds_1 \underline{u}^{(e)} \\
 = & \frac{L}{2} \int_{-1}^{+1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{36}{L^4} s_1^2 & \frac{6}{L^2} s_1 \left(-\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \right) & 0 & -\frac{36}{L^4} s_1^2 & \frac{6}{L^2} s_1 \left(\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \right) \\ 0 & \left(-\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \right) \left(\frac{6}{L^2} s_1 \right) & \left(-\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \right)^2 & 0 & \left(-\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \right) \left(-\frac{6}{L^2} s_1 \right) & \left(\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \right) \left(-\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \right) \\ -\frac{EA}{L^2} & 0 & 0 & \frac{EA}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{36}{L^4} s_1^2 & -\frac{6}{L^2} s_1 \left(-\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \right) & 0 & \frac{36}{L^4} s_1^2 & -\frac{6}{L^2} s_1 \left(\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \right) \\ 0 & \frac{6}{L^2} s_1 \left(\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \right) & \left(\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \right) \left(-\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \right) & 0 & -\frac{6}{L^2} s_1 \left(\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \right) & \left(\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \right) \left(\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \right) \end{array} \right] ds_1 \underline{U}^{(e)} \\
 = & \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{\ell_3}}{L^3} & \frac{6EI_{\ell_3}}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_{\ell_3}}{L^3} & \frac{6EI_{\ell_3}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{\ell_3}}{L^2} & \frac{4EI_{\ell_3}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{\ell_3}}{L^2} & \frac{2EI_{\ell_3}}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{\ell_3}}{L^3} & -\frac{6EI_{\ell_3}}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{\ell_3}}{L^3} & -\frac{6EI_{\ell_3}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{\ell_3}}{L^2} & \frac{2EI_{\ell_3}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{\ell_3}}{L^2} & \frac{4EI_{\ell_3}}{L} \end{array} \right] \underline{U}^{(e)} \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

Por sua vez, as parcelas afectas ao trabalho virtual das forças exteriores fica,

$$\begin{aligned}
 \delta W_{ext}^{(e)} = & \int_{L^{(e)}} \delta \underline{U}^T \underline{Q}_V A dl_1 + \int_{L^{(e)}} \delta \underline{U}^T \underline{Q}_L dl_1 + \delta \underline{U}^{(e)T} \underline{Q}_P \\
 = & \delta \underline{U}^{(e)T} \left[\int_{-1}^{+1} [\underline{N}^{(e)}]^T \underline{Q}_V A \frac{L}{2} ds_1 + \int_{-1}^{+1} [\underline{N}^{(e)}]^T \underline{Q}_L \frac{L}{2} ds_1 + \underline{Q}_P \right] \tag{4.41}
 \end{aligned}$$

em que

$$\left[\underline{N}^{(e)} \right]^T = \begin{bmatrix} N_1^a & 0 & 0 \\ 0 & N_{11}^f & N_{11}^f \\ 0 & N_{12}^f & N_{12}^f \\ \hline N_2^a & 0 & 0 \\ 0 & N_{21}^f & N_{21}^f \\ 0 & N_{22}^f & N_{22}^f \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

é a matriz das funções de forma correspondentes à deformação axial e de flexão. Em (4.42) N^f são as derivadas de N^f , estabelecidas em (4.31)

Constata-se que a matriz de rigidez deduzida no passo anterior é igual à determinada na convencional teoria das estruturas. Isto deve-se ao facto da expressão polinomial da flecha no elemento hermítico de dois nós (equação (4.29)) coincidir com a que se obtém integrando a equação diferencial de equilíbrio de uma viga submetida a forças nos nós. O exemplo seguinte pretende esclarecer este ponto.

4.2.6 – Exemplos de aplicação

Exemplo 1

Obter a equação do campo de deslocamentos de um elemento de viga por integração da equação diferencial de equilíbrio.

Resolução

Na Figura 4.8 representa-se o equilíbrio de um elemento de viga.

As equações de equilíbrio no elemento de viga de comprimento $d\ell_1$ são,

$$\begin{aligned} \sum F_{\ell_2} = 0 & \therefore \frac{dV_{\ell_2}}{d\ell_1} = 0 \\ \sum M_{B\ell_3} = 0 & \therefore \frac{dM_{\ell_3}}{d\ell_1} = -V_{\ell_2} \end{aligned} \quad (4.43)$$

pelo que

$$\frac{d^2 M_{\ell_3}}{d\ell_1^2} = 0. \quad (4.44a)$$

Substituindo (4.10b) em (4.44a) e tendo em atenção (4.12) obtém-se,

$$\frac{d^2 M_{\ell_3}}{d\ell_1^2} = \frac{d^2}{d\ell_1^2} \left(EI_{\ell_3} \frac{d^2 u_{\ell_2}}{d\ell_1^2} \right) = EI_{\ell_3} \frac{d^4 u_{\ell_2}}{d\ell_1^4} = 0. \quad (4.44b)$$

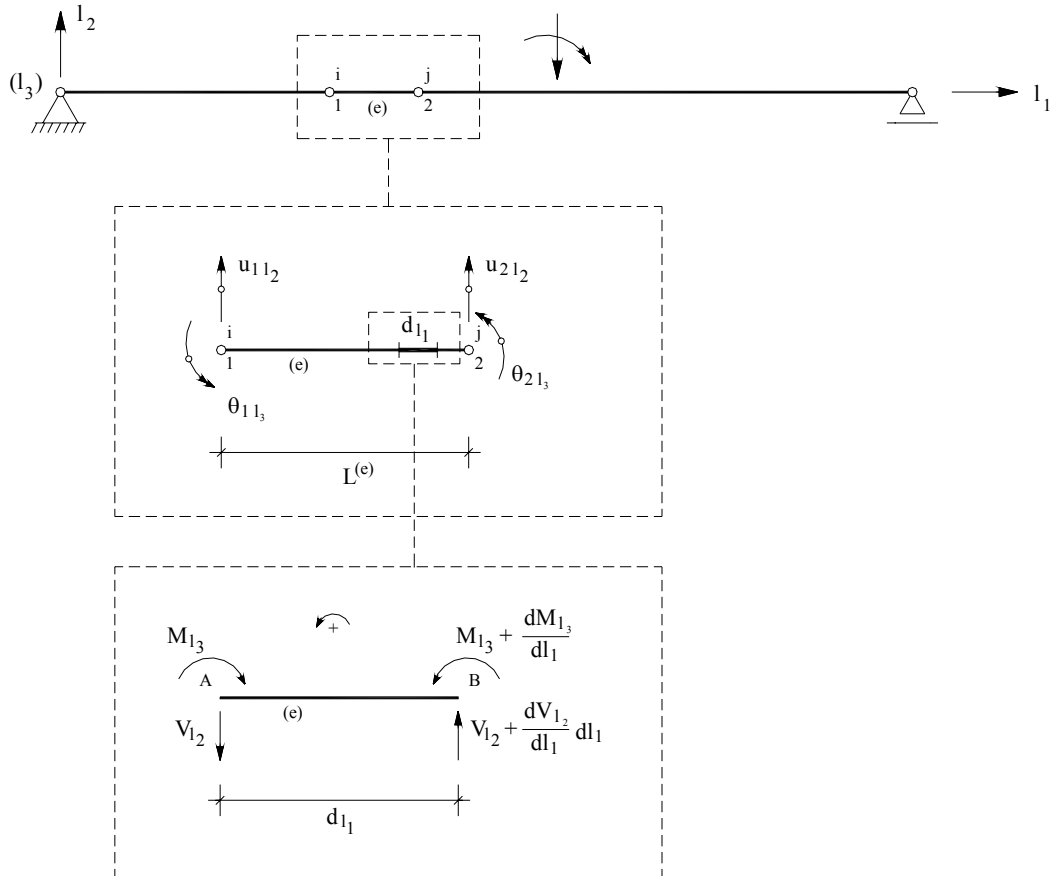


Figura 4.8 – Elemento de viga.

A solução para esta equação é um polinómio cúbico em l_1 .

$$u_{\ell_2}(\ell_1) = a_1 + a_2 \ell_1 + a_3 \ell_1^2 + a_4 \ell_1^3 \quad (4.45)$$

em que as constantes a_i são obtidas por intermédio das condições fronteira:

$$\begin{aligned} u_{\ell_2}(\ell_1^{(e)} = 0) &= u_{1\ell_2} \\ \left. \frac{du_{\ell_2}}{dl_1} \right|_{\ell_1^{(e)}=0} &= \theta_{1\ell_3} \\ u_{\ell_2}(\ell_1^{(e)} = L^{(e)} = L) &= u_{2\ell_2} \\ \left. \frac{du_{\ell_2}}{dl_1} \right|_{\ell_1^{(e)}=L^{(e)}=L} &= \theta_{2\ell_3} \end{aligned} \quad (4.46)$$

resultando o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} u_{1\ell_2} \\ \theta_{1\ell_3} = \frac{du_{1\ell_2}}{d\ell_1} \\ u_{2\ell_2} \\ \theta_{2\ell_3} = \frac{du_{2\ell_2}}{d\ell_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

Resolvendo este sistema de equações obtém-se as constantes a_i , que substituídas em (4.45) resulta,

$$u_{\ell_2}(\ell_1) = f_1(\ell_1)u_{1\ell_2} + f_2(\ell_1)\frac{du_{1\ell_2}}{d\ell_1} + f_3(\ell_1)u_{2\ell_2} + f_4(\ell_1)\frac{du_{2\ell_2}}{d\ell_1} \quad (4.48)$$

em que

$$\begin{aligned} f_1(\ell_1) &= 1 - 3\left(\frac{\ell_1}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{\ell_1}{L}\right)^3 \\ f_2(\ell_1) &= \ell_1 - 2\left(\frac{\ell_1^2}{L}\right) + \frac{\ell_1^3}{L^2} \\ f_3(\ell_1) &= 3\left(\frac{\ell_1}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{\ell_1}{L}\right)^3 \\ f_4(\ell_1) &= -2\left(-\frac{\ell_1^3}{L}\right) + \frac{\ell_1^3}{L^2} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Transformando (4.49) em coordenadas normalizadas verifica-se que estas funções coincidem com as funções de forma do elemento de viga Hermítico de dois nós (equações (4.30)).

Exemplo 2

Calcular os deslocamentos e as reacções da viga da figura 4.9 utilizando um elemento de viga hermítico de dois nós.

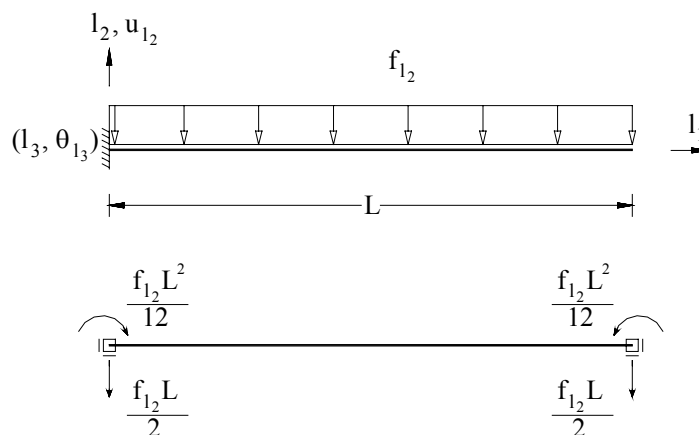


Figura 4.9 – Consola submetida a carga uniformemente distribuída.

Resolução

Na figura 4.9 representa-se as forças nodais equivalentes à carga, f_{ℓ_2} , uniformemente distribuída na viga. O sistema de equações de equilíbrio da viga é o seguinte,

$$\frac{EI_{\ell_3}}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1\ell_1} \\ \frac{du_{1\ell_2}}{d\ell_1} \\ u_{2\ell_2} \\ \frac{du_{2\ell_2}}{d\ell_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{f_{\ell_2}L}{2} + V_{1\ell_2} \\ -\frac{f_{\ell_2}L^2}{12} + M_{1\ell_3} \\ -\frac{f_{\ell_2}L}{2} \\ \frac{f_{\ell_2}L^2}{12} \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

Como

$$u_{1\ell_2} = \frac{du_{1\ell_2}}{d\ell_1} = 0, \quad (4.51)$$

da resolução de (4.50) resulta

$$u_{2\ell_2} = -\frac{f_{\ell_2}L^4}{8EI_{\ell_3}}; \quad \frac{du_{2\ell_2}}{d\ell_1} = -\frac{f_{\ell_2}L^3}{6EI_{\ell_3}}; \quad V_{1\ell_2} = Lf_{\ell_2}; \quad M_{1\ell_3} = \frac{L^2}{2}f_{\ell_2}. \quad (4.52)$$

Substituindo em (4.29b) obtém-se

$$\begin{aligned} u_{\ell_2}(s_1) &= N_{21}^f u_{2\ell_2} + \frac{L}{2} N_{22}^f \frac{du_{2\ell_2}}{d\ell_1} \\ &= \frac{1}{4}(2 + 3s_1 - s_1^3) \left(-\frac{f_{\ell_2}L^4}{8EI_{\ell_3}} \right) + \frac{L}{2} \frac{1}{4} (-1 - s_1 + s_1^2 + s_1^3) \left(-\frac{f_{\ell_2}L^3}{6EI_{\ell_3}} \right). \quad (4.53) \\ &= -\frac{f_{\ell_2}L^4}{96EI_{\ell_3}} (4 + 7s_1 + 2s_1^2 - s_1^3) \end{aligned}$$

Verificar que para $s_1 = -1$, $u_{\ell_2} = 0$, e para $s_1 = 1$, $u_{\ell_2} = -\frac{f_{\ell_2}L^4}{8EI_{\ell_3}}$, pelo que os deslocamentos

nos nós coincidem com os obtidos com a solução exacta. Contudo, no interior do elemento a flecha não é igual à exacta, dado que a flecha exacta traduz-se por um polinómio de quarto grau, enquanto a prevista pelo MEF determina-se por intermédio de um polinómio de terceiro grau.

No que se refere aos momentos flectores tem-se

$$\begin{aligned}
 M_{\ell_3} &= -EI_{\ell_3} \chi = -EI_{\ell_3} \frac{d^2 u_{\ell_2}}{d\ell_1^2} = -EI_{\ell_3} \underline{B}_f \underline{u}_f^{(e)} \\
 &= -EI_{\ell_3} \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{6}{L^2} s_1 & -\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 & -\frac{6}{L^2} s_1 & \frac{1}{L} + \frac{3}{L} s_1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{f_{\ell_2} L^4}{8EI_{\ell_3}} \\ \frac{f_{\ell_2} L^3}{6EI_{\ell_3}} \end{bmatrix} \\
 &= f_{\ell_2} \left(\frac{L^2}{6} - \frac{L^2}{4} s_1 \right)
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Verificar que para $s_1 = -1$, $M_{\ell_3} = \frac{5}{12} f_{\ell_2} L^2$ e para $s_1 = 1$, $M_{\ell_3} = -\frac{1}{12} f_{\ell_2} L^2$. Assim, o diagrama de momentos representa-se por uma recta enquanto a solução exacta traduz-se por uma equação do segundo grau,

$$M_{\ell_3} = \frac{f_{\ell_2}}{2} (L - \ell_1)^2.$$

A solução exacta e a prevista pelo MEF são comparadas na Figura 4.10.

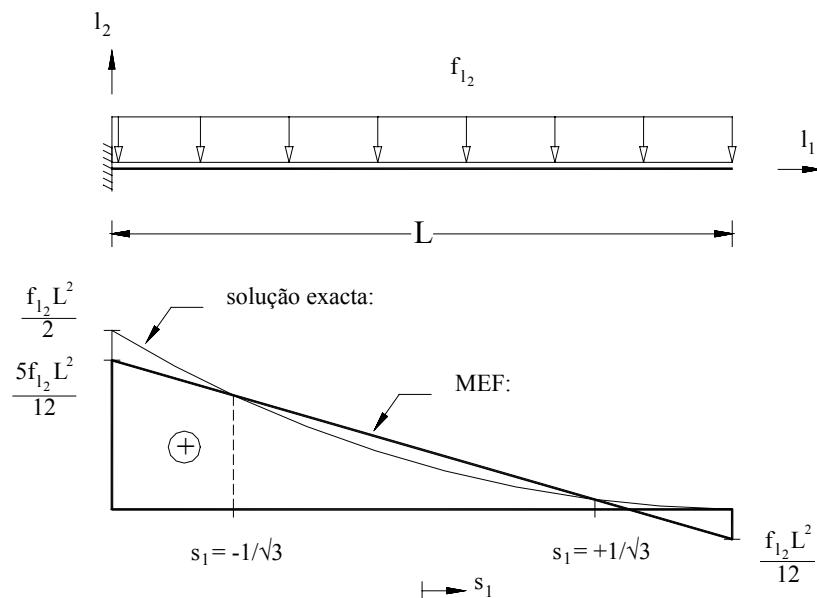


Figura 4.10 – Diagramas do momento flector obtido de forma exacta e segundo o MEF.

Verifica-se que ambas as soluções somente são iguais em $s_1 = -1/\sqrt{3}$ e $s_2 = 1/\sqrt{3}$, que coincidem com os pontos de Gauss correspondentes à quadratura de Gauss-Legendre de um polinómio de segundo ou terceiro grau.

4.2.7 – Exercícios resolvidos

Exercício nº 1

Discretize com dois elementos de dois nós a barra representada na Figura er_4.1. Utilizando a teoria de Euler-Bernoulli calcule:

- A matriz de rigidez da estrutura;
- O vector solicitação da estrutura;
- Os deslocamentos e as reacções;
- Os momentos nos pontos nodais;
- Constatare que os momentos são exactos somente nos pontos de Gauss, $s_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dados: $E_c = 30$ Gpa, secção com 0.3 m de largura e 0.5 m de altura.

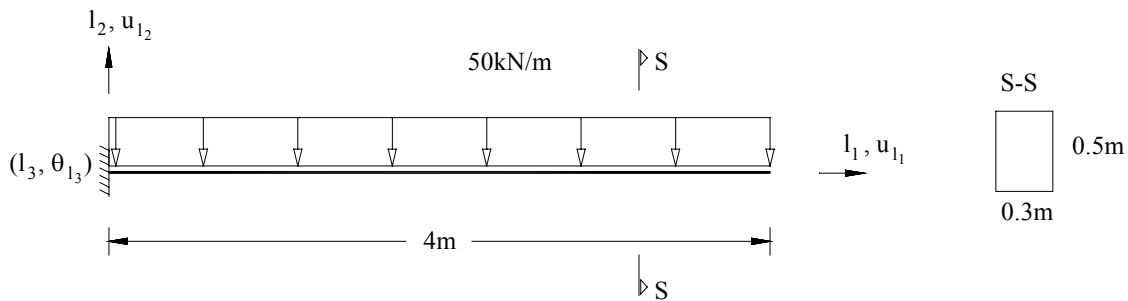


Figura er_4.1 – Viga a ser analisada segundo a teoria de Euler-Bernoulli.

Resolução

A Figura er_4.2 representa a discretização da viga com dois elementos de dois nós.

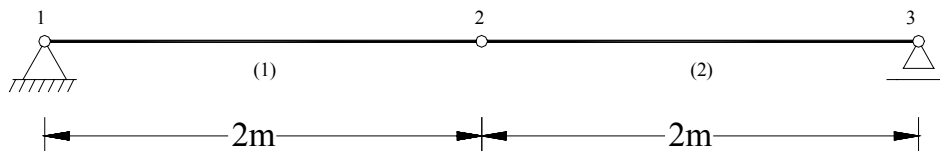


Figura er_4.2 – Viga discretizada com dois elementos de dois nós

- Cálculo da matriz de rigidez da estrutura

- Matriz de rigidez de cada elemento

$$\underline{K}^{(e)} = \left(\frac{EI}{L^3}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (L^{(e)} = 2 \text{ m})$$

Efectuando o espalhamento das matrizes de rigidez dos elementos, na matriz de rigidez da estrutura obtém-se,

$$\underline{K}^{(E)} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -12 & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} = 11719 \begin{bmatrix} 12 & 12 & -12 & 12 & 0 & 0 \\ 12 & 16 & -12 & 8 & 0 & 0 \\ -12 & -12 & 24 & 0 & -12 & 12 \\ 12 & 8 & 0 & 32 & -12 & 8 \\ 0 & 0 & -12 & -12 & 12 & -12 \\ 0 & 0 & 12 & 8 & -12 & 16 \end{bmatrix}$$

Vectores dos deslocamentos dos nós da estrutura:

sendo

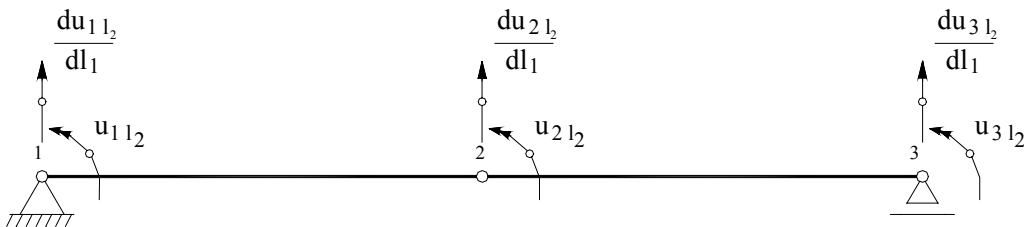


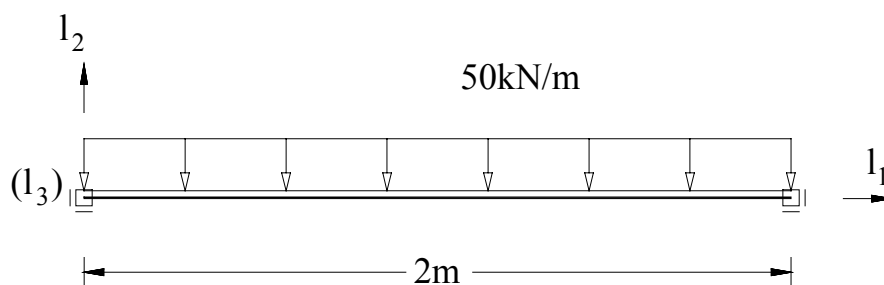
Figura er_4.3 – Graus de liberdade.

$$\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} u_{1l_2} \\ \frac{du_{1l_2}}{dl_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1l_2} \\ \theta_{1l_3} \end{bmatrix} \quad \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} u_{2l_2} \\ \frac{du_{2l_2}}{dl_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{2l_2} \\ \theta_{2l_3} \end{bmatrix} \quad \underline{u}_3 = \begin{bmatrix} u_{3l_2} \\ \frac{du_{3l_2}}{dl_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{3l_2} \\ \theta_{3l_3} \end{bmatrix}$$

os graus de liberdade dos nós 1, 2 e 3, respectivamente.

b) Cálculo do vector solicitação da estrutura

- Vector solicitação de cada elemento



- $M = \frac{pl^2}{12}$ e $R = \frac{pl}{2}$

NOTA: O cálculo resulta da aplicação:

$$\underline{Q}^{(e)} = \underline{Q}_{\ell}^{(1)} = \underline{Q}_{\ell}^{(2)} = \int_{L^{(e)}} \underline{N}^T(\ell_1) \underline{q} d\ell_1 = \int_{-1}^1 \underline{N}^T(s_1) \underline{q}^{(e)} J ds_1$$

em que

$$\underline{q}^{(e)} = \begin{bmatrix} f_{\ell_2} \\ m_{\ell_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é o vector das forças distribuídas no elemento e

$$\underline{N}^T = \begin{bmatrix} N_{11}^f & N_{11}^{f'} \\ N_{12}^f & N_{12}^{f'} \\ N_{21}^f & N_{21}^{f'} \\ N_{22}^f & N_{22}^{f'} \end{bmatrix}$$

é a matriz das funções de forma do elemento de viga de dois nós de Euler-Bernoulli. Assim,

$$\underline{Q}^{(1)} = \begin{bmatrix} -50 \\ -16.67 \\ -50 \\ 16.67 \end{bmatrix} \quad \underline{Q}^{(2)} = \begin{bmatrix} -50 \\ -16.67 \\ -50 \\ 16.67 \end{bmatrix}.$$

Efectuando o espalhamento dos vectores solicitação do elemento no vector solicitação da estrutura obtém-se,

$$\underline{Q}^{(E)} = \begin{bmatrix} -50 \\ -16.67 \\ -100 \\ 0 \\ -50 \\ 16.67 \end{bmatrix}$$

c) Cálculo dos deslocamentos:

$$\underline{K}^{(E)} \underline{U}^{(E)} = \underline{Q}^{(E)} + \underline{R}$$

$$11719 \begin{bmatrix} 12 & 12 & -12 & 12 & 0 & 0 \\ 12 & 16 & -12 & 8 & 0 & 0 \\ -12 & -12 & 24 & 0 & -12 & 12 \\ 12 & 8 & 0 & 32 & -12 & 8 \\ 0 & 0 & -12 & -12 & 12 & -12 \\ 0 & 0 & 12 & 8 & -12 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{1\ell_3} \\ u_{2\ell_2} \\ \theta_{2\ell_3} \\ 0 \\ \theta_{3\ell_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 + R_1 \\ -16.67 \\ -100 \\ 0 \\ -50 + R_2 \\ 16.67 \end{bmatrix}$$

Para simplificar o cálculo,

$$\underline{K}_{\ell\ell}^{(E)} \underline{U}_{\ell}^{(E)} = \underline{Q}_{\ell} - \underline{K}_{\ell f}^{(E)} \underline{U}_{f}^{(E)}$$

$$11719 \begin{bmatrix} 16 & -12 & 8 & 0 \\ -12 & 24 & 0 & 12 \\ 8 & 0 & 32 & 8 \\ 0 & 12 & 8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1\ell_3} \\ u_{2\ell_2} \\ \theta_{2\ell_3} \\ \theta_{3\ell_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16.67 \\ -100 \\ 0 \\ 16.67 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo este sistema de equações de equilíbrio obtém-se,

$$\begin{cases} \theta_{1\ell_3} = -0.0014225 \text{ rad} \\ u_{2\ell_2} = -0.0017775 \text{ m} \\ \theta_{2\ell_3} = 0 \text{ rad} \\ \theta_{3\ell_3} = 0.0014225 \text{ rad} \end{cases}$$

d) Cálculo dos momentos nos pontos nodais

$$M = -EI \frac{du_{\ell_2}^2}{d\ell_1^2}$$

$$u_{\ell_2}^{(1)}(s_1) = N_{11}^f u_{1\ell_2} + N_{12}^f \theta_{1\ell_3} + N_{21}^f u_{2\ell_2} + N_{22}^f \theta_{2\ell_3} \Leftrightarrow$$

$$u_{\ell_2}^{(1)}(s_1) = N_{12}^f \theta_{1\ell_3} + N_{21}^f u_{2\ell_2}$$

- $\frac{du_{\ell_2}^2}{d\ell_1^2} = \frac{d^2 N_{12}^f}{d\ell_1^2} \theta_{1\ell_3} + \frac{d^2 \bar{N}_{21}^f}{d\ell_1^2} u_{2\ell_2}$
- $\frac{d^2 N_{12}^f}{d\ell_1^2} = \frac{4}{L^2} \cdot \frac{L}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} s_1 \right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} s_1 \right)$
- $\frac{d^2 \bar{N}_{21}^f}{d\ell_1^2} = \frac{4}{L^2} \left(-\frac{3}{2} s_1 \right) = -\frac{3}{2} s_1$

$$M(s_1) = EI \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}s_1 \right) (-0.0014225) - \frac{3}{2}s_1 (-0.0017775) \right]$$

Pontos nodais:

$$\begin{cases} s_1 = -1 \Rightarrow M = 16.75 \text{ KN/m} \\ s_1 = 0 \Rightarrow M = 66.68 \text{ KN/m} \\ s_1 = +1 \Rightarrow M = 116.6 \text{ KN/m} \end{cases}$$

e) Constatar que os momentos são exactos somente nos pontos de Gauss, $s_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{cases} s_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow M = 37.86 \text{ KN/m} \\ s_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow M = 95.50 \text{ KN/m} \end{cases}$$

4.2.8 – Exercícios para resolver

1 - Na Figura epr_4.1 representa-se um elemento de viga de Euler-Bernoulli de três nós. Deduza as funções de forma deste elemento, em coordenadas normalizadas, s_1 .

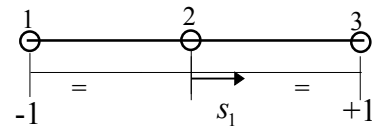


Figura epr_4.1

2 - Deduza o vector das forças nodais equivalentes de um elemento de viga de dois nós de Euler-Bernoulli sujeito a momentos uniformemente distribuídos segundo o eixo ℓ_3 (ver Figura epr_4.2).

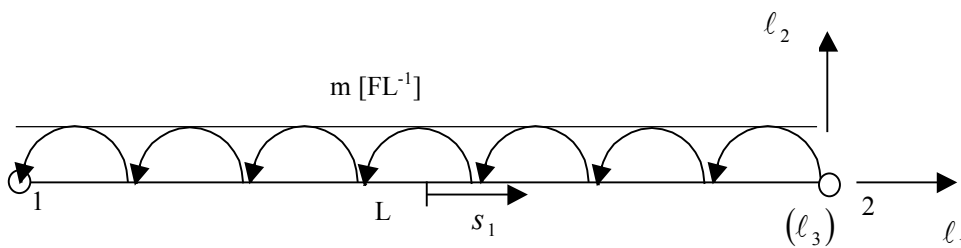


Figura epr_4.2

3 - a) Determine as forças nodais no nó 2, equivalentes à acção que actua no elemento finito de dois nós de Euler-Bernoulli representado na Figura epr_4.3.
b) Como procederia se a viga fosse de secção variável.

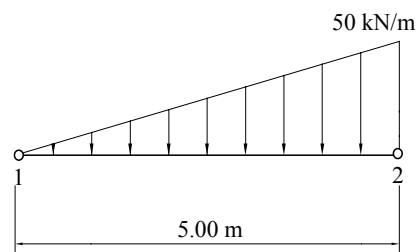


Figura epr_4.3

4.3 - Elemento de viga de Timoshenko

A teoria de Timoshenko considera as duas primeiras hipóteses da teoria de *Euler-Bernoulli* mais a seguinte:

- iii) Secções transversais planas e ortogonais ao eixo da viga indeformada permanecem planas mas não necessariamente ortogonais ao eixo da viga (ver Figura 4.11).

Esta hipótese representa uma maior aproximação à deformação real de vigas de altura considerável. À medida que a relação vão/altura da secção diminui as secções transversais deixam de se conservar planas após a deformação.

4.3.1 - Campo de deslocamentos

Os deslocamentos de um ponto qualquer da viga obtêm-se por intermédio das seguintes expressões (ver Figura 4.11)

$$\begin{aligned} u_{\ell_1}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) &= \bar{u}_{\ell_1}(\ell_1, \ell_2 = 0, \ell_3 = 0) - \ell_2 \theta_{\ell_3}(\ell_1, \ell_2 = 0, \ell_3 = 0) \\ u_{\ell_2}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) &= \bar{u}_{\ell_2}(\ell_1, \ell_2 = 0, \ell_3 = 0) \\ u_{\ell_3}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) &= 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

em que \bar{u}_{ℓ_1} e \bar{u}_{ℓ_2} são os deslocamentos de um ponto do eixo da viga.

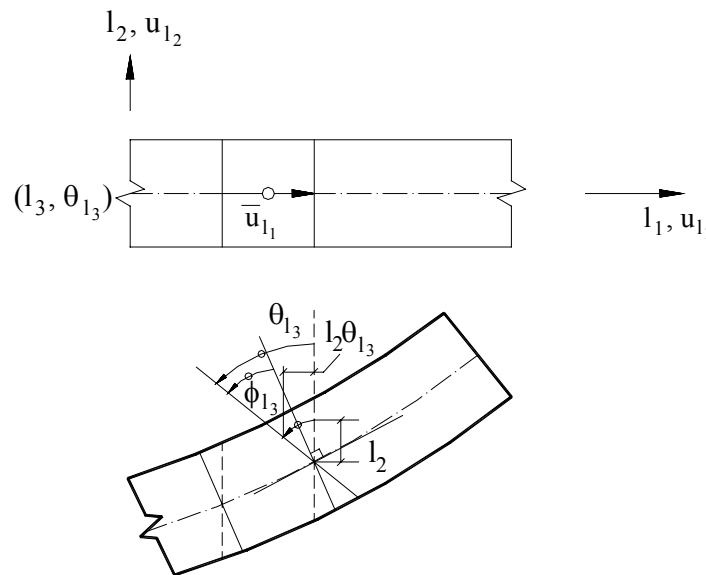


Figura 4.11 – Deslocamentos num elemento de Timoshenko.

4.3.2 - Campo de extensões

Devido à hipótese iii) desenvolvem-se extensões de corte na secção transversal da viga. Assim, o vector das extensões é constituído por duas componentes,

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\ell_1} \\ \gamma_{\ell_1\ell_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{du_{\ell_1}}{dl_1} \\ \frac{du_{\ell_2}}{dl_1} + \frac{du_{\ell_1}}{dl_2} \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Derivando o campo de deslocamentos e substituindo em (4.56) obtém-se

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \frac{d\bar{u}_{\ell_1}}{dl_1} \\ \frac{d\bar{u}_{\ell_2}}{dl_1} - \theta_{\ell_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2 \frac{d\theta_{\ell_3}}{dl_1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon_a \\ \varepsilon_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_f \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.57)$$

em que

$$\varepsilon_a = \frac{d\bar{u}_{\ell_1}}{dl_1} \quad (4.58a)$$

é a extensão por deformação axial,

$$\varepsilon_f = -l_2 \frac{d\theta_{\ell_3}}{dl_1} = -l_2 \bar{\varepsilon}_f = -l_2 \chi \quad (4.58b)$$

é a extensão por deformação de flexão e

$$\varepsilon_c = \frac{d\bar{u}_{\ell_2}}{dl_1} - \theta_{\ell_3} \quad (4.58c)$$

é a extensão por deformação de corte. Na figura 4.12 representa-se a deformação de um elemento de viga de *Timoshenko*. Constata-se que

$$\phi_{\ell_3} = \theta_{\ell_3} - \frac{d\bar{u}_{\ell_2}}{dl_1} \quad (4.59)$$

é o angulo médio devido à deformação por corte.

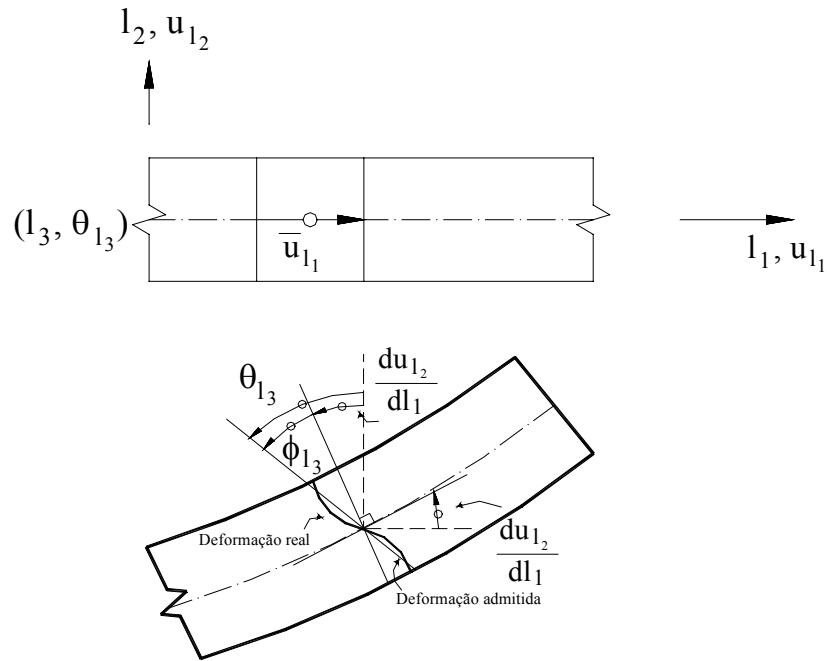


Figura 4.12 – Deformação por corte.

4.3.3 - Tensões

O vector das tensões é composto por duas componentes,

$$\underline{\sigma} = [\sigma_{af} \quad \sigma_c]^T \quad (4.60)$$

em que

$$\sigma_{af} = \sigma_{\ell_1} \quad (4.61a)$$

é a tensão devida à deformação axial mais a deformação por flexão e

$$\sigma_c = \tau_{\ell_1 \ell_2} \quad (4.61b)$$

é a tensão de corte que actua na secção transversal da viga (plano $\ell_2 \ell_3$).

4.3.4 - Lei constitutiva

O vector das tensões (4.60) relaciona-se com o vector das extensões (4.57) por intermédio da seguinte lei constitutiva,

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{af} \\ \sigma_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{af} \\ \varepsilon_c \end{bmatrix} \quad (4.62a)$$

ou

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{\ell_1} \\ \tau_{\ell_1\ell_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\ell_1} \\ \gamma_{\ell_1\ell_2} \end{bmatrix}. \quad (4.62b)$$

Se em (4.62b) a tensão σ_{ℓ_1} e a extensão ε_{ℓ_1} forem decompostas nas componentes devidas a deformação axial e deformação por flexão obtém-se,

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}' &= \begin{bmatrix} \sigma_a \\ \sigma_f \\ \sigma_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_a \\ \varepsilon_f \\ \varepsilon_c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E\varepsilon_a \\ E\varepsilon_f \\ G\varepsilon_c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.63)$$

pelo que

$$\begin{aligned} \sigma_a &= E \frac{d\bar{u}_{\ell_1}}{d\ell_1} \\ \sigma_f &= -\ell_2 E \bar{\varepsilon}_f = -\ell_2 E \chi. \\ \sigma_c &= G \left(\frac{d\bar{u}_{\ell_2}}{d\ell_1} - \theta_{\ell_3} \right) \end{aligned} \quad (4.64)$$

4.3.5 - Esforços

Os esforços obtêm-se por integração das tensões na secção transversal da viga,

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}' &= \begin{bmatrix} N_{\ell_1} \\ M_{\ell_3} \\ V_{\ell_2} \end{bmatrix} = \int_b \left(\int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{\ell_1} \\ -\ell_2 \sigma_{\ell_1} \\ \tau_{\ell_1\ell_2} \end{bmatrix} d\ell_2 \right) db \\ &= \int_b \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_a \\ -\ell_2 \sigma_f \\ \tau_c \end{bmatrix} d\ell_2 db \end{aligned} \quad (4.65)$$

Substituindo (4.63) em (4.65) e tendo em conta (4.58b) obtém-se,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \int_b \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} E \varepsilon_a \\ -\ell_2 E \varepsilon_f \\ G \varepsilon_c \end{bmatrix} d\ell_2 db \\ &= \begin{bmatrix} \int_b \int_{-h/2}^{h/2} d\ell_2 db E \varepsilon_a \\ \int_b \int_{-h/2}^{h/2} \ell_2^2 d\ell_2 db E \bar{\varepsilon}_f \\ \int_b \int_{-h/2}^{h/2} d\ell_2 db G \varepsilon_c \end{bmatrix} \quad (4.66) \\ &= \begin{bmatrix} bh E \varepsilon_a \\ \frac{bh^3}{12} E \varepsilon_f \\ (bh)^* G \varepsilon_c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim,

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} N_{\ell_1} \\ M_{\ell_3} \\ V_{\ell_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE \varepsilon_a \\ I_{\ell_3} E \bar{\varepsilon}_f \\ G A_{\ell_2}^* \varepsilon_c \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

em que

$$A_{\ell_2}^* = (hb)^* = \alpha A. \quad (4.68)$$

é a área reduzida de corte e α é um factor correctivo introduzido de forma a que o trabalho por deformação de corte, admitindo tensões e distorções constantes na secção transversal, seja igual ao trabalho real. Note-se que a distribuição real de tensões e extensões de corte numa secção rectangular não é constante, sendo parabólica para materiais isotrópicos. No anexo A1 deduz-se a expressão que determina o factor correctivo de corte. Na Figura 4.13 apresenta-se valores de α para algumas secções.

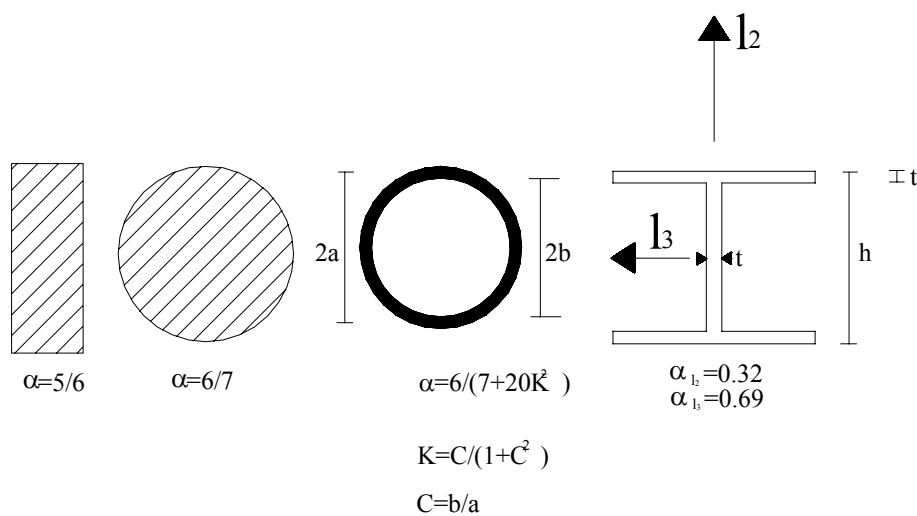


Figura 4.13 - Factor correctivo de corte para várias secções transversais.

Na figura (4.14a) e (4.14b) representam-se as tensões e os esforços que se podem desenvolver num elemento de viga de Timoshenko.

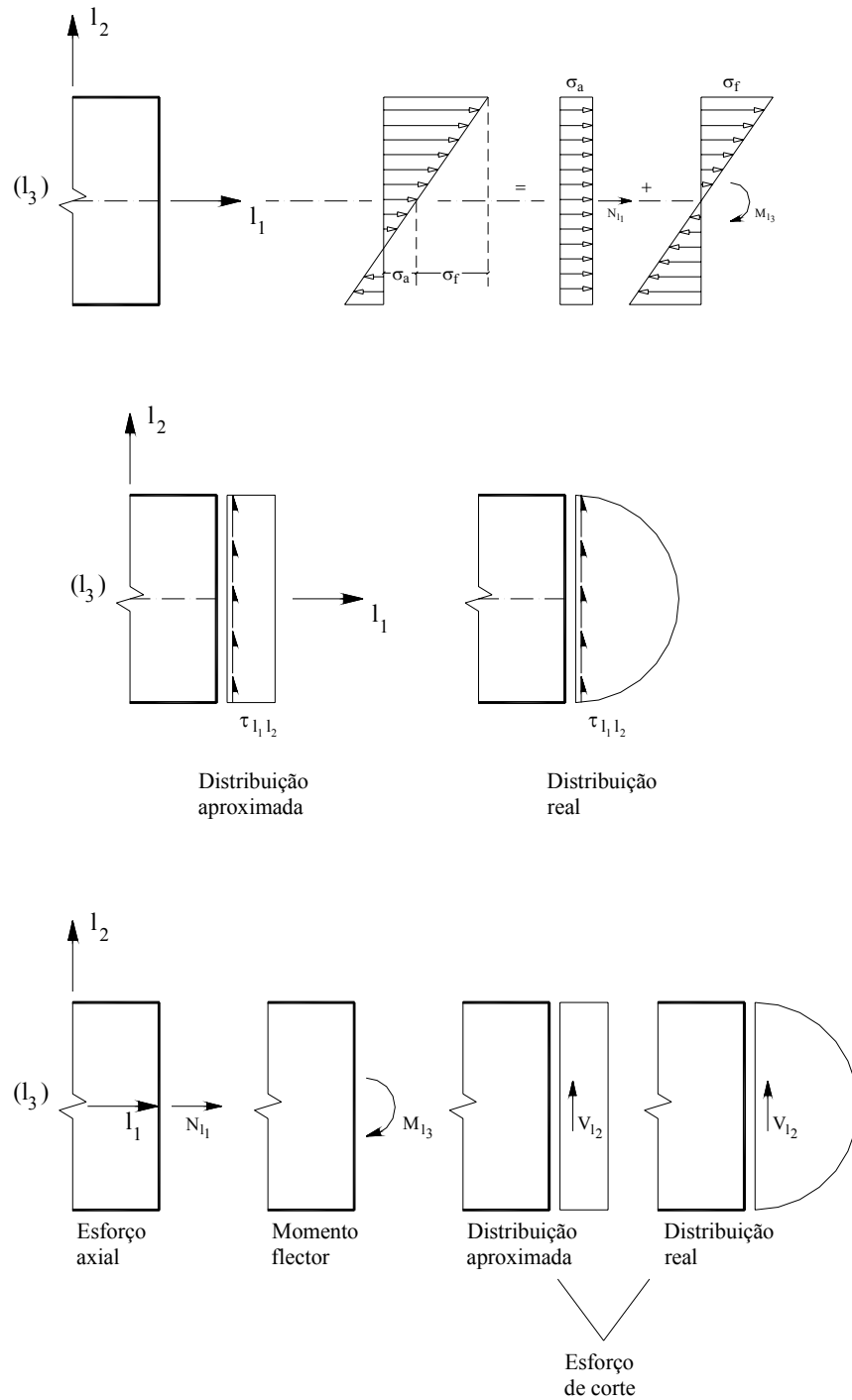


Figura 4.14 -Tensões (a) e esforços (b) num elemento de viga de Timoshenko

4.3.6 - Expressão do princípio dos trabalhos virtuais

A expressão do trabalho virtual é igual à estabelecida em (4.13). Substituindo as expressões (4.57) e (4.62) na parcela do trabalho interno de deformação virtual obtém-se,

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{int}}^{(e)} &= \int_{V^{(e)}} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV \\
&= \int_{V^{(e)}} \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_a + \delta \varepsilon_f \\ \delta \varepsilon_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_a + \varepsilon_f \\ \varepsilon_c \end{bmatrix} dV \\
&= \int_{V^{(e)}} \left[\delta \varepsilon_a^T + \delta \varepsilon_f^T \quad \delta \varepsilon_c^T \right] \begin{bmatrix} E \varepsilon_a + E \varepsilon_f \\ G \varepsilon_c \end{bmatrix} dV \\
&= \int_{V^{(e)}} \left(\delta \varepsilon_a^T E \varepsilon_a + \delta \varepsilon_a^T E \varepsilon_f + \delta \varepsilon_f^T E \varepsilon_a + \delta \varepsilon_f^T E \varepsilon_f + \delta \varepsilon_c^T G \varepsilon_c \right) dV
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Convertendo o integral de volume em integral de linha, tendo em atenção a relação (4.58b) e resolvendo o integral de área resulta,

$$\delta W_{\text{int}}^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \left(\delta \varepsilon_a^T E A \varepsilon_a + \delta \varepsilon_f^T E I_{\ell_3} \bar{\varepsilon}_f + \delta \varepsilon_c^T G A_{\ell_2}^* \varepsilon_c \right) dl_1. \tag{4.70a}$$

Substituindo (4.58) na anterior expressão,

$$\delta W_{\text{int}}^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \left[\frac{d\delta \bar{u}_{\ell_1}}{dl_1} EA \frac{d\bar{u}_{\ell_1}}{dl_1} + \frac{d\delta \theta_{\ell_3}}{dl_1} EI_{\ell_3} \frac{d\theta_{\ell_3}}{dl_1} + \left[\frac{d\delta \bar{u}_{\ell_2}}{dl_1} - \delta \theta_{\ell_3} \right] G A_{\ell_2}^* \left(\frac{d\bar{u}_{\ell_2}}{dl_1} - \theta_{\ell_3} \right) \right] dl_1. \tag{4.70b}$$

Note-se que em (4.69) são nulas as parcelas seguintes,

$$\begin{aligned}
\int_{V^{(e)}} \delta \varepsilon_a^T E \varepsilon_f dV &= \int_{L^{(e)}} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \left(-\ell_2 \frac{d\delta \bar{u}_{\ell_1}}{dl_1} E \frac{d\theta_{\ell_3}}{dl_1} \right) b dl_2 \right] dl_1 = 0 \\
\int_{V^{(e)}} \delta \varepsilon_f^T E \varepsilon_a dV &= \int_{L^{(e)}} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \left(-\ell_2 \frac{d\delta \theta_{\ell_3}}{dl_1} E \frac{d\bar{u}_{\ell_1}}{dl_1} \right) b dl_2 \right] dl_1 = 0
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Em (4.70) a parcela

$$\int_{L^{(e)}} \frac{d\delta \bar{u}_{\ell_1}}{dl_1} EA \frac{d\bar{u}_{\ell_1}}{dl_1} dl_1 = \int_{L^{(e)}} \delta \varepsilon_a^T E A \varepsilon_a dl_1. \tag{4.72a}$$

representa o trabalho por deformação axial, a parcela

$$\int_{L^{(e)}} \left[\frac{d\delta \theta_{\ell_3}}{dl_1} EI_{\ell_3} \frac{d\theta_{\ell_3}}{dl_1} \right] dl_1 = \int_{L^{(e)}} \delta \varepsilon_f^T E I_{\ell_3} \bar{\varepsilon}_f dl_1. \tag{4.72b}$$

traduz o trabalho por deformação de flexão e a parcela

$$\int_{L^{(e)}} \left[\left(\frac{d\delta \bar{u}_{\ell_2}}{dl_1} - \delta \theta_{\ell_3} \right) G A_{\ell_2}^* \left(\frac{d\bar{u}_{\ell_2}}{dl_1} - \theta_{\ell_3} \right) \right] dl_1 = \int_{L^{(e)}} \delta \varepsilon_c^T G A_{\ell_2}^* \varepsilon_c dl_1. \tag{4.72c}$$

representa o trabalho por deformação de corte.

4.3.7 - Elemento finito de dois nós.

4.3.7.1 - Deslocamentos

Contrariamente ao elemento finito de dois nós utilizado na teoria de Euler-Bernoulli, no elemento finito de dois nós da teoria de *Timoshenko* os campos de deslocamentos associados aos três graus de liberdade u_{ℓ_1} , u_{ℓ_2} e θ_{ℓ_3} são independentes e de continuidade C_0 . Assim, cada grau de liberdade pode ser interpolado com as mesmas funções de forma, pelo que

$$\begin{aligned} u_{\ell_1}(s_1) &= N_1(s_1)u_{1\ell_1} + N_2(s_1)u_{2\ell_1} \\ u_{\ell_2}(s_1) &= N_1(s_1)u_{1\ell_2} + N_2(s_1)u_{2\ell_2} \\ \theta_{\ell_3}(s_1) &= N_1(s_1)\theta_{1\ell_3} + N_2(s_1)\theta_{2\ell_3} \end{aligned} \tag{4.73}$$

em que $N_1(s_1)$ e $N_2(s_1)$ são as funções de forma do elemento de dois nós (ver Figura 4.15) definidas em (3.10) e $u_{i\ell_j}$ é o deslocamento do nó i segundo o eixo ℓ_j e $\theta_{i\ell_3}$ é a rotação do nó i segundo o eixo ℓ_3 .

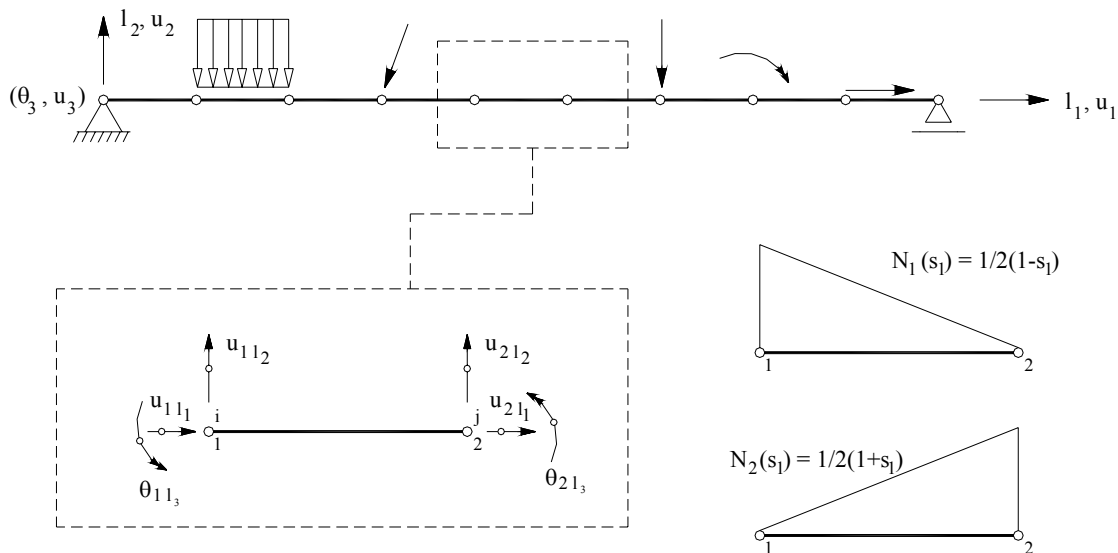


Figura 4.15 - Elemento de viga de Timoshenko.

Em forma matricial (4.73) fica,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_{\ell_1} \\ u_{\ell_2} \\ \theta_{\ell_3} \end{bmatrix} (s_1) &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1\ell_1} \\ u_{1\ell_2} \\ \theta_{1\ell_3} \\ u_{2\ell_1} \\ u_{2\ell_2} \\ \theta_{2\ell_3} \end{bmatrix} \\ &= \underline{N}^{(e)} \underline{U}^{(e)} \end{aligned} \tag{4.74}$$

em que $\underline{N}^{(e)}$ é a matriz das funções de forma do elemento.

4.3.7.2 - Matrizes de deformação

A extensão axial definida em (4.58a) pode ser reescrita da forma seguinte (ver (3.30))

$$\begin{aligned}\varepsilon_a &= \frac{d\bar{u}_{\ell_1}}{d\ell_1} = \frac{ds_1}{d\ell_1} \frac{d\bar{u}_{\ell_1}}{ds_1} \\ &= \frac{2}{L} \frac{d\bar{u}_{\ell_1}}{ds_1}\end{aligned}\quad (4.75)$$

Tendo em conta (4.74), a extensão axial passa a determinar-se pela seguinte relação,

$$\begin{aligned}\varepsilon_a(s_1) &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{2}{L} \frac{dN_1}{ds_1} & 0 & 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_2}{ds_1} & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_{1\ell_1} \\ u_{1\ell_2} \\ \theta_{1\ell_3} \\ u_{2\ell_1} \\ u_{2\ell_2} \\ \theta_{2\ell_3} \end{bmatrix} \\ &= \underline{B}_a^{(e)} \underline{U}^{(e)}\end{aligned}\quad (4.76)$$

em que (ver (3.21))

$$\begin{aligned}\underline{B}_a^{(e)} &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{2}{L} \frac{dN_1}{ds_1} & 0 & 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_2}{ds_1} & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{array} \right]\end{aligned}\quad (4.77)$$

é a matriz de deformação axial.

Por sua vez, a curvatura do eixo da viga,

$$\begin{aligned}\chi = \bar{\varepsilon}_f &= \frac{d\theta_{\ell_3}}{d\ell_1} = \frac{ds_1}{d\ell_1} \frac{d\theta_{\ell_3}}{ds_1} \\ &= \frac{2}{L} \frac{d\theta_{\ell_3}}{ds_1}\end{aligned}\quad (4.78)$$

Tendo em conta (4.74) resulta

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_f(s_1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_1}{ds_1} & \vdots & 0 & 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_2}{ds_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1\ell_1} \\ u_{1\ell_2} \\ \theta_{1\ell_3} \\ u_{2\ell_1} \\ u_{2\ell_2} \\ \theta_{2\ell_3} \end{bmatrix} \\ &= \underline{B}_f^{(e)} \underline{U}^{(e)} \end{aligned} \quad (4.79)$$

em que

$$\begin{aligned} \underline{B}_f^{(e)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_1}{ds_1} & \vdots & 0 & 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_2}{ds_1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L} & \vdots & 0 & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.80)$$

é a matriz de deformação por flexão.

Finalmente, a deformação por corte fica,

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= \frac{d\bar{u}_{\ell_2}}{d\ell_1} - \theta_{\ell_3} \\ &= \frac{ds_1}{d\ell_1} \frac{d\bar{u}_{\ell_2}}{ds_1} - \theta_{\ell_3} \\ &= \frac{2}{L} \frac{d\bar{u}_{\ell_2}}{d\ell_1} - \theta_{\ell_3} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Tendo em conta (4.74) resulta

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_c(s_1) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_1}{ds_1} & -N_1 & \vdots & 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_2}{ds_1} & -N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1\ell_1} \\ u_{1\ell_2} \\ \theta_{1\ell_3} \\ u_{2\ell_1} \\ u_{2\ell_2} \\ \theta_{2\ell_3} \end{bmatrix} \\ &= \underline{B}_c^{(e)} \underline{U}^{(e)} \end{aligned} \quad (4.82)$$

em que

$$\begin{aligned} \underline{B}_c^{(e)} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_1}{ds_1} & -N_1 & 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_2}{ds_1} & -N_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{2}(1-s_1) & 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{2}(1+s_1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.83)$$

é a matriz de deformação por corte.

4.3.7.3 - Matriz de rigidez

Substituindo (4.76), (4.79) e (4.82) em (4.70a) resulta,

$$\delta W_{\text{int}}^{(e)} = [\delta \underline{U}^{(e)}]^T \int_{L^{(e)}} \left([\underline{B}_a^{(e)}]^T E A \underline{B}_a^{(e)} + [\underline{B}_f^{(e)}]^T E I_{\ell_3} \underline{B}_f^{(e)} + [\underline{B}_c^{(e)}]^T G A_{\ell_2}^* \underline{B}_c^{(e)} \right) \underline{U}^{(e)} d\ell_1 \quad (4.84)$$

em que

$$\underline{k}_a^{(e)} = \int_{L^{(e)}} [\underline{B}_a^{(e)}]^T E A \underline{B}_a^{(e)} d\ell_1, \quad (4.85a)$$

$$\underline{K}_f^{(e)} = \int_{L^{(e)}} [\underline{B}_f^{(e)}]^T E I_{\ell_3} \underline{B}_f^{(e)} d\ell_1, \quad (4.85b)$$

e

$$\underline{k}_c^{(e)} = \int_{L^{(e)}} [\underline{B}_c^{(e)}]^T G A_{\ell_2}^* \underline{B}_c^{(e)} d\ell_1 \quad (4.85c)$$

são as matrizes de rigidez relativas à deformação axial, flexão e corte, respectivamente, pelo que,

$$\underline{k}^{(e)} = \underline{k}_a^{(e)} + \underline{k}_f^{(e)} + \underline{k}_c^{(e)}. \quad (4.86)$$

Efectuando os produtos matriciais nas expressões (4.85) e resolvendo os integrais obtém-se,

$$\underline{k}_a^{(e)} = \left(\frac{EA}{L} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.87a)$$

$$\underline{k}_f^{(e)} = \left(\frac{EI_{\ell_3}}{L} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.87b)$$

e

$$\underline{k}_c^{(e)} = \left(\frac{GA_{\ell_2}^*}{L} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{L}{2} & 0 & -1 & \frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} & 0 & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{L}{2} & 0 & 1 & -\frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} & 0 & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix}. \quad (4.87c)$$

Somando (4.87a) com (4.87b) e com (4.87c) resulta,

$$\underline{k}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{GA_{\ell_2}^*}{L} & \frac{GA_{\ell_2}^*}{2} & 0 & -\frac{GA_{\ell_2}^*}{L} & \frac{GA_{\ell_2}^*}{2} \\ 0 & \frac{GA_{\ell_2}^*}{2} & \frac{EI_{\ell_3}}{L} + \frac{GA_{\ell_2}^* L}{3} & 0 & -\frac{GA_{\ell_2}^*}{2} & -\frac{EI_{\ell_3}}{L} + \frac{LGA_{\ell_2}^*}{6} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{GA_{\ell_2}^*}{L} & -\frac{GA_{\ell_2}^*}{2} & 0 & \frac{GA_{\ell_2}^*}{L} & -\frac{GA_{\ell_2}^*}{2} \\ 0 & \frac{GA_{\ell_2}^*}{2} & -\frac{EI_{\ell_3}}{L} + \frac{LGA_{\ell_2}^*}{6} & 0 & -\frac{GA_{\ell_2}^*}{2} & \frac{EI_{\ell_3}}{L} + \frac{LGA_{\ell_2}^*}{3} \end{bmatrix}. \quad (4.88)$$

Se a matriz $\underline{B}^{(e)}$ agregar as submatrizes $\underline{B}_a^{(e)}$, $\underline{B}_f^{(e)}$ e $\underline{B}_c^{(e)}$,

$$\underline{B}^{(e)} = [\underline{B}_a^{(e)} \quad \underline{B}_f^{(e)} \quad \underline{B}_c^{(e)}]^T \quad (4.89)$$

e a matriz constitutiva incluir as submatrizes associadas à deformação axial ($D_a = EA$), à deformação de flexão ($D_f = EI_{\ell_3}$) e à deformação de corte ($D_c = GA_{\ell_2}^*$),

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} D_a & 0 & 0 \\ 0 & D_f & 0 \\ 0 & 0 & D_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI_{\ell_3} & 0 \\ 0 & 0 & GA_{\ell_2}^* \end{bmatrix}, \quad (4.90)$$

então a matriz de rigidez de um elemento pode ser obtida por intermédio da seguinte relação,

$$\begin{aligned} \underline{k}^{(e)} &= \int_{L^{(e)}} [\underline{B}^{(e)}]^T \underline{\underline{D}} \underline{B}^{(e)} d\ell_1 \\ &= \int_{-1}^{+1} [\underline{B}^{(e)}]^T \underline{\underline{D}} \underline{B}^{(e)} \frac{L}{2} ds_1 \end{aligned} \quad (4.91)$$

4.3.8 - Efeito de "Locking"

Os integrandos de todos os termos da matriz de rigidez associada à deformação axial, \underline{K}_a , são polinómios de grau nulo. Por exemplo, a força necessária para aplicar um deslocamento unitário segundo o primeiro grau de liberdade da barra, quando os restantes são nulos, obtém-se de,

$$\begin{aligned} k_{a_{11}} &= \int_{-1}^{+1} B_{a_1} E A B_{a_1} \frac{L}{2} ds_1 \\ &= \frac{EA}{2L} \int_{-1}^{+1} ds_1 \end{aligned} \quad (4.92)$$

em que o valor de B_{a_1} foi retirado de (4.77). O mesmo acontece com a matriz de rigidez associada a deformação de flexão, dado que, por exemplo,

$$\begin{aligned} k_{f_{33}} &= \int_{-1}^{+1} B_{f_3} E I_{\ell_3} B_{f_3} \frac{L}{2} ds_1 \\ &= \frac{EI_{\ell_3}}{2L} \int_{-1}^{+1} ds_1 \end{aligned} \quad (4.93)$$

Contudo, no cálculo da matriz de rigidez associada a deformação de corte, \underline{k}_c , surgem coeficientes cujos integrandos são polinómios de segundo grau. É exemplo disto o coeficiente $\underline{k}_{c_{33}}$,

$$\begin{aligned} k_{c_{33}} &= \int_{-1}^{+1} B_{c_3} G A_{\ell_2}^* B_{c_3} \frac{L}{2} ds_1 \\ &= \frac{L G A_{\ell_2}^*}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} (1-s_1)^2 ds_1 \end{aligned} \quad (4.94)$$

Assim, a aplicação da integração Numérica de Gauss-Legendre no cálculo de $\underline{k}^{(e)}$ requer 1 ponto de Gauss (PG) para determinar $\underline{k}_a^{(e)}$ e $\underline{k}_f^{(e)}$ e 2 PG para calcular $\underline{k}_c^{(e)}$ (ver Quadro 3.1).

Para se avaliar o efeito da integração numérica no comportamento em termos de rigidez apresentada por um elemento de viga de Timoshenko vai-se estudar a consola representada na Figura 4.16. Esta consola é discretizada com um único elemento de dois nós. Neste estudo vai-se desprezar os termos associados a deformação axial, dado não existir deformação axial para o carregamento actuante.

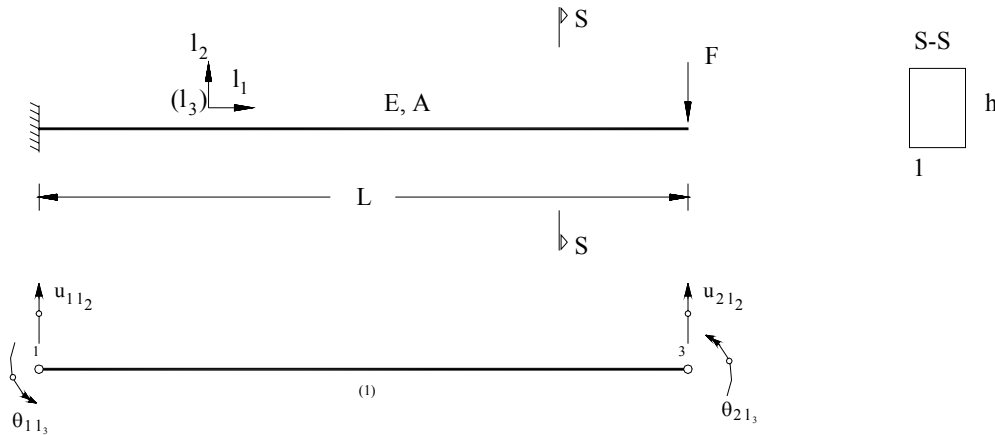


Figura 4.16 - Consola discretizada com um elemento de viga de Timoshenko.

Desprezando-se a matriz de rigidez afecta à deformação axial, as equações de equilíbrio do elemento são

$$\left[\underline{k}_f^{(1)} \quad \underline{k}_c^{(1)} \right] \underline{U}^{(1)} = \underline{Q}^{(1)}. \quad (4.95)$$

Utilizando 1 PG e 2 PG para calcular $\underline{k}_f^{(1)}$ e $\underline{k}_c^{(1)}$, respectivamente, (4.95) fica,

$$\begin{bmatrix} \frac{GA_{\ell_2}^*}{L} & \frac{GA_{\ell_2}^*}{2} & -\frac{GA_{\ell_2}^*}{L} & \frac{GA_{\ell_2}^*}{2} \\ \frac{GA_{\ell_2}^*}{2} & \frac{EI_{\ell_3}}{L} + \frac{LGA_{\ell_2}^*}{3} & -\frac{GA_{\ell_2}^*}{L} & -\frac{EI_{\ell_3}}{L} + \frac{LGA_{\ell_2}^*}{6} \\ -\frac{GA_{\ell_2}^*}{L} & -\frac{GA_{\ell_2}^*}{2} & \frac{GA_{\ell_2}^*}{L} & -\frac{GA_{\ell_2}^*}{2} \\ \frac{GA_{\ell_2}^*}{2} & -\frac{EI_{\ell_3}}{L} + \frac{LGA_{\ell_2}^*}{6} & -\frac{GA_{\ell_2}^*}{L} & \frac{EI_{\ell_3}}{L} + \frac{LGA_{\ell_2}^*}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1\ell_2} \\ \theta_{1\ell_3} \\ u_{2\ell_2} \\ \theta_{2\ell_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ -F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

em que R_1 e R_2 são a força de reacção segundo ℓ_2 e o momento de reacção segundo ℓ_3 , no nó 1. Como $u_{1\ell_2} = \theta_{1\ell_3} = 0$, resulta

$$\begin{bmatrix} \frac{GA_{\ell_2}^*}{L} & -\frac{GA_{\ell_2}^*}{2} \\ -\frac{GA_{\ell_2}^*}{2} & \frac{EI_{\ell_3}}{L} + \frac{LGA_{\ell_2}^*}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2\ell_2} \\ \theta_{2\ell_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

pelo que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_{2\ell_2} \\ \theta_{2\ell_3} \end{bmatrix} &= \frac{\gamma}{\gamma+1} \begin{bmatrix} \frac{L}{GA_{\ell_2}^*} + \frac{L^3}{3EI_{\ell_3}} & \frac{L^2}{EI_{\ell_3}} \\ \frac{L^2}{EI_{\ell_3}} & \frac{L}{EI_{\ell_3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \underline{F} \underline{Q} \end{aligned} \quad (4.98)$$

em que \underline{F} é a matriz de flexibilidade. Da resolução de (4.98) obtém-se

$$u_{2\ell_2} = \frac{\gamma}{\gamma+1} \left(\frac{L}{GA_{\ell_2}^*} + \frac{L^3}{3EI_{\ell_3}} \right) (-F) \quad (4.99)$$

em que

$$\gamma = 3 \left(\frac{h}{L} \right)^2 = \frac{3}{\lambda^2} \quad (4.100)$$

sendo

$$\lambda = \frac{L}{h} \quad (4.101)$$

o parâmetro denominado de esbelteza da viga. No caso de viga de secção rectangular $I_{\ell_3} = (1 \times h^3)/12$ e $A_{\ell_2}^* = 5/6(1 \times h)$.

Se a consola fosse discretizada com um elemento de viga de Euler-Bernoulli a matriz de flexibilidade da estrutura seria,

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI_{\ell_3}} & \frac{L^2}{2EI_{\ell_3}} \\ \frac{L^2}{2EI_{\ell_3}} & \frac{L}{EI_{\ell_3}} \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

em que não se considera a efeito do esforço transversal.

Utilizando a convencional teoria das estruturas, baseada na teoria de Euler-Bernoulli, e considerando a deformação por corte, a matriz de flexibilidade da estrutura apresenta a configuração seguinte,

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \frac{L}{GA_{\ell_2}^*} + \frac{L^3}{3EI_{\ell_3}} & \frac{L^2}{2EI_{\ell_3}} \\ \frac{L^2}{2EI_{\ell_3}} & \frac{L}{EI_{\ell_3}} \end{bmatrix}. \quad (4.103)$$

Assim, o deslocamento $u_{2\ell_2}$ obtido em (4.102) e em (4.103) é

$$(u_{2\ell_2})_{exacto}^{EBsc} = -\frac{L^3}{3EI_{\ell_3}} F \quad (4.104)$$

no caso de se utilizar a formulação de Euler-Bernoulli sem inclusão da influência do corte, e

$$(u_{2\ell_2})_{exacto}^{EBcc} = -\left(\frac{L}{GA_{\ell_2}^*} + \frac{L^3}{3EI_{\ell_3}} \right) F \quad (4.105)$$

no caso em que a deformação por corte foi tida em conta.

Efectuando o cociente entre (4.99) e (4.104) obtém-se,

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{u_{2\ell_2}}{(u_{2\ell_2}^E)_{exacto}} = \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{\frac{L}{GA_{\ell_2}^*} + \frac{L^3}{3EI_{\ell_3}}}{\frac{L^3}{3EI_{\ell_3}}} \\ &= \frac{3(4\lambda^2 + 3)}{4\lambda^2(\lambda^2 + 3)} \end{aligned} \quad (4.106)$$

O valor de φ deveria tender para a unidade com o aumento de λ (esbelteza da viga), dado que com o aumento de λ a influência de deformação de corte diminui, pelo que $u_{2\ell_2}$ dever-se-ia aproximar de $(u_{2\ell_2})_{exacto}^{EBsc}$. Contudo, tal não acontece, como se pode constatar na Figura 4.18.

Verifica-se que para vigas muito esbeltas, isto é, quando λ tende para infinito, φ tende para zero, dado que a solução obtida com o MEF, utilizando a integração exacta no cálculo da matriz de rigidez tende para o valor nulo. Isto significa que o elemento de viga de Timoshenko de dois nós é incapaz de reproduzir, no limite (vigas muito esbeltas), a solução que se obtém com a convencional teoria das estruturas (teoria de Euler-Bernoulli sem deformação por corte). À medida que a esbelteza aumenta ocorre um fenómeno de sobrerigidez numérica que vai aumentando com λ , até tornar a estrutura infinitamente rígida.

Assim, verifica-se que o elemento de viga de Timoshenko, com integração completa (ou exacta) permite obter resultados aceitáveis apenas para valores reduzidas de λ .

Um dos procedimentos para resolver este problema consiste em diminuir a influência da rigidez de corte, por intermédio de uma subintegração dos termos de $\underline{K}_c^{(e)}$, utilizando um

número de pontos de integração inferior ao necessário para o seu cálculo exacto. Ao subintegrar-se determinada matriz de rigidez está-se a aumentar a flexibilidade do elemento.

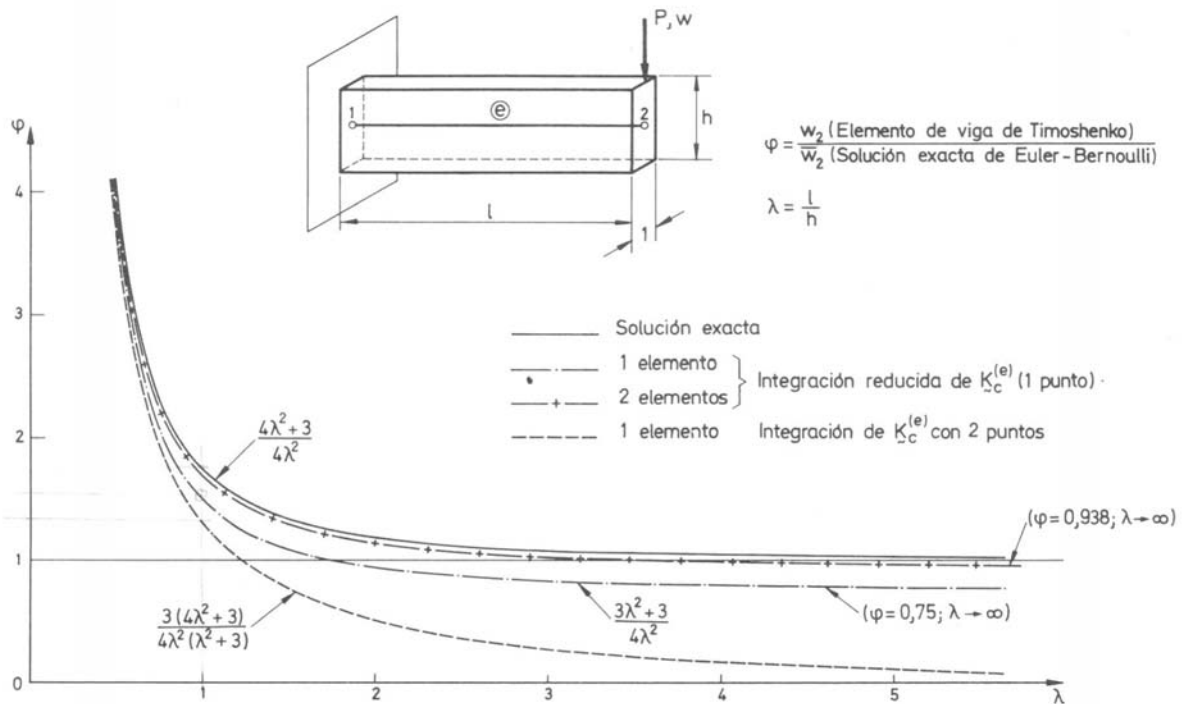


Figura 4.18 – Influência do nº de PG utilizados na integração da matriz de rigidez de uma viga discretizada com um elemento de Timoshenko.

Assim, ao subintegrarem-se os termos de $k_c^{(e)}$ está-se a compensar a excessiva rigidez introduzida em $k_c^{(e)}$ pelos termos de corte.

Integrando $k_c^{(e)}$ com um ponto de Gauss obtém-se,

$$\underline{k}_c^{(e)} = \left(\frac{GA_{c_2}^*}{L} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{2} & -1 & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \\ -1 & -\frac{L}{2} & 1 & -\frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \end{bmatrix}^{(e)} \quad (4.107)$$

Utilizando (4.107) em vez de (4.87c) no anterior exemplo, as relações (4.97) e (4.98) passam a apresentar a seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} \frac{GA_{\ell_2}^*}{L} & -\frac{GA_{\ell_2}^*}{2} \\ \frac{GA_{\ell_2}^*}{2} & \left(\frac{EI_{\ell_3}}{L} + \frac{LGA_{\ell_2}^*}{4} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2\ell_2} \\ \theta_{2\ell_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.108a)$$

ou

$$\underline{k}^{(e)} \underline{U}^{(e)} = \underline{Q}^{(e)} \quad (4.108b)$$

e

$$\begin{bmatrix} u_{2\ell_2} \\ \theta_{2\ell_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{L}{GA_{\ell_2}^*} + \frac{L^3}{4EI_{\ell_3}} \right) & \frac{L^2}{2EI_{\ell_3}} \\ \frac{L^2}{2EI_{\ell_3}} & \frac{L}{EI_{\ell_3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.109a)$$

ou

$$\underline{U}^{(e)} = \underline{F}^{(e)} \underline{Q}^{(e)}. \quad (4.109b)$$

Verifique-se que \underline{F} coincide agora com a expressão (4.103), excepto no coeficiente F_{11} . Calculando $u_{2\ell_2}$ por intermédio de (4.109) obtém-se,

$$(u_{2\ell_2}) = -F_{11} F = - \left(\frac{L}{GA_{\ell_2}^*} + \frac{L^3}{4EI_{\ell_3}} \right) F. \quad (4.110)$$

A relação entre este valor e o exacto, obtido com um elemento de Euler-Bernoulli (sem deformação por corte) fica,

$$\varphi = \frac{u_{2\ell_2}}{(u_{2\ell_2})_{\text{exacto}}^{EBsc}} = \frac{3\lambda^2 + 3}{4\lambda^2}. \quad (4.111)$$

que se representa na Figura 4.18. Verifica-se que φ tende para 0.75 quando λ tende para infinito, pelo que a sobrerigidez devida ao corte desapareceu com a subintegração de $\underline{k}_c^{(e)}$.

A excessiva rigidez introduzida pela integração exacta dos termos da rigidez de corte denomina-se na nomenclatura Inglesa de "Locking".

Por sua vez, ao integrar-se exactamente os termos de $\underline{k}_a^{(e)}$ e $\underline{k}_f^{(e)}$ e subintegrar-se os termos de $\underline{k}_c^{(e)}$, está-se a aplicar a denominada integração selectiva, dado que é completa nos termos de $\underline{k}_a^{(e)}$ e $\underline{k}_f^{(e)}$ e reduzida nos termos de $\underline{k}_c^{(e)}$.

Da análise da Figura 4.18 e da expressão (4.111) verifica-se que, com um elemento a discretizar a consola, o resultado obtido não é exacto. Contudo, se a consola for discretizada com mais elementos a solução converge rapidamente para a exacta, conforme se pode constatar no Quadro 4.1.

Quadro 4.1 - Evolução do erro com a discretização da consola

Número de elementos	Valores de $\lambda = \ell/h \rightarrow \infty$				
	1	2	4	8	16
$\varphi = \frac{u_{2\ell_2}}{(u_{2\ell_2})_{exacto}^{EBsc}}$	0.750	0.938	0.984	0.996	0.996

4.3.9 – Exercícios resolvidos

Exercício nº 1

Discretizando a consola representada na Figura er_4.3 em um elemento finito de três nós de Timoshenko:

- Calcule a matriz de rigidez desse elemento utilizando a integração selectiva;
- Considerando os resultados obtidos com a integração selectiva, determine os deslocamentos e os esforços para a acção aplicada na consola.
- Traçar um gráfico que relacione a flecha na consola com o parâmetro φ em que,

$$\varphi = \frac{u_{3\ell_2}}{(u_{3\ell_2})_{exacto}^{EBsc}}$$

sendo

$$(u_{3\ell_2})_{exacto}^{EBsc} = -\frac{FL^3}{3EI_{\ell_3}}$$

Dados: $L=10$ m; $E=30$ GPa; $F=100$ kN; $A=1 \times 1$ m²

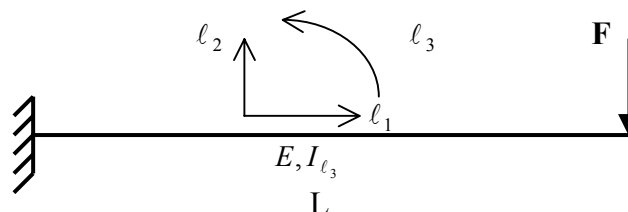
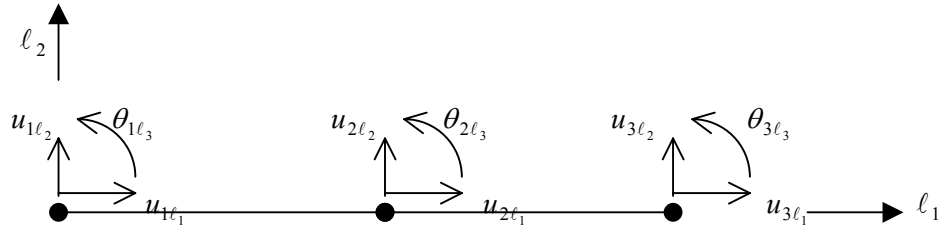


Figura er_4.3 – Consola sujeita a uma força concentrada F na sua extremidade livre.

Resolução:

a) Cálculo da matriz de rigidez de um elemento de três nós utilizando a integração selectiva

- Graus de liberdade do elemento de Timoshenko de três nós:



Campo de deslocamentos:

$$u_{l_1}(s_1) = N_1(s_1)u_{1l_1} + N_2(s_1)u_{2l_1} + N_3(s_1)u_{3l_1}$$

$$u_{l_2}(s_1) = N_1(s_1)u_{1l_2} + N_2(s_1)u_{2l_2} + N_3(s_1)u_{3l_2}$$

$$\theta_{l_3}(s_1) = N_1(s_1)\theta_{1l_3} + N_2(s_1)\theta_{2l_3} + N_3(s_1)\theta_{3l_3}$$

Sob a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_{l_1} \\ u_{l_2} \\ \theta_{l_3} \end{bmatrix} (s_1) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \vdots & N_2 & 0 & 0 & \vdots & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \vdots & 0 & N_2 & 0 & \vdots & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \vdots & 0 & 0 & N_2 & \vdots & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1l_1} \\ u_{1l_2} \\ \theta_{1l_3} \\ \vdots \\ u_{2l_1} \\ u_{2l_2} \\ \theta_{2l_3} \\ \vdots \\ u_{3l_1} \\ u_{3l_2} \\ \theta_{3l_3} \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez correspondente a deformação axial:

$$\underline{B}_a = \begin{bmatrix} \frac{2}{L} \frac{dN_1}{ds_1} & 0 & 0 & \vdots & \frac{2}{L} \frac{dN_2}{ds_1} & 0 & 0 & \vdots & \frac{2}{L} \frac{dN_3}{ds_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_a = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \frac{2}{L}(s_1 - \frac{1}{2}) & 0 & 0 & \frac{2}{L}(-2s_1) & 0 & 0 & \frac{2}{L}(s_1 + \frac{1}{2}) & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\underline{K}_a^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \underline{B}_a^T E A \underline{B}_a d\ell_1 = \int_{-1}^1 \underline{B}_a^T E A \underline{B}_a \frac{L}{2} ds_1$$

Calculando os termos não nulos:

$$\underline{K}_{a_{1,1}} = \int_{-1}^1 \underline{B}_{a_1}^T E A \underline{B}_{a_1} \frac{L}{2} ds_1 = \frac{EAL}{2} \int_{-1}^1 \frac{4}{L^2} (s_1 - \frac{1}{2})^2 ds_1 = \frac{7}{3} \frac{EA}{L}$$

$$\underline{K}_{a_{1,4}} = \int_{-1}^1 \underline{B}_{a_1}^T E A \underline{B}_{a_4} \frac{L}{2} ds_1 = \frac{EAL}{2} \int_{-1}^1 \frac{2}{L} (s_1 - \frac{1}{2}) \frac{2}{L} (-2s_1) ds_1 = -\frac{8}{3} \frac{EA}{L}$$

$$\underline{K}_{a_{1,7}} = \int_{-1}^1 \underline{B}_{a_1}^T E A \underline{B}_{a_7} \frac{L}{2} ds_1 = \frac{EAL}{2} \int_{-1}^1 \frac{2}{L} (s_1 - \frac{1}{2}) \frac{2}{L} (s_1 + \frac{1}{2}) ds_1 = \frac{1}{3} \frac{EA}{L}$$

$$\underline{K}_{a_{4,4}} = \int_{-1}^1 \underline{B}_{a_4}^T E A \underline{B}_{a_4} \frac{L}{2} ds_1 = \frac{EAL}{2} \int_{-1}^1 \frac{4}{L^2} 4s_1^2 ds_1 = \frac{16}{3} \frac{EA}{L}$$

$$\underline{K}_{a_{4,7}} = \int_{-1}^1 \underline{B}_{a_4}^T E A \underline{B}_{a_7} \frac{L}{2} ds_1 = \frac{EAL}{2} \int_{-1}^1 \frac{2}{L} (-2s_1) \frac{2}{L} (s_1 + \frac{1}{2}) ds_1 = -\frac{8}{3} \frac{EA}{L}$$

$$\underline{K}_{a_{7,7}} = \int_{-1}^1 \underline{B}_{a_7}^T E A \underline{B}_{a_7} \frac{L}{2} ds_1 = \frac{2EA}{L} \int_{-1}^1 (s_1 + \frac{1}{2})(s_1 + \frac{1}{2}) ds_1 = \frac{7}{3} \frac{EA}{L}$$

Então:

$$\underline{K}_a = \frac{EA}{3L} \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -8 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Matriz de rigidez correspondente a deformação flexão:

$$\underline{B}_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_1}{ds_1} & \vdots & 0 & 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_2}{ds_1} & \vdots & 0 & 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_3}{ds_1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{L}(s_1 - \frac{1}{2}) & \vdots & 0 & 0 & \frac{2}{L}(-2s_1) & \vdots & 0 & 0 & \frac{2}{L}(s_1 + \frac{1}{2}) \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_f^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \underline{B}_f^T EI_{\ell_3} \underline{B}_f d\ell_1 = \int_{-1}^1 \underline{B}_f^T EI_{\ell_3} \underline{B}_f \frac{L}{2} ds_1$$

Efectuando procedimento similar ao anterior obtém-se a matriz de rigidez relativa à flexão:

$$\underline{K}_f^{(e)} = \frac{EI_{\ell_3}}{3L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & \vdots & 0 & 0 & -8 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & \vdots & 0 & 0 & 16 & \vdots & 0 & 0 & -8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & -8 & \vdots & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez correspondente a deformação corte:

$$\underline{B}_c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_1}{ds_1} & -N_1 & \vdots & 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_2}{ds_1} & -N_2 & \vdots & 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_3}{ds_1} & -N_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{L}(s_1 - \frac{1}{2}) & -\frac{1}{2}s_1(s_1 - 1) & \vdots & 0 & \frac{2}{L}(-2s_1) & -(1 - s_1^2) & \vdots & 0 & \frac{2}{L}(s_1 + \frac{1}{2}) & -\frac{1}{2}s_1(s_1 + 1) \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_c^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \underline{B}_c^T GA_{\ell_2}^* \underline{B}_c d\ell_1 = \int_{-1}^1 \underline{B}_c^T GA_{\ell_2}^* \underline{B}_c \frac{L}{2} ds_1$$

Elementos não nulos resultantes do produto $\underline{B}_c^T \underline{B}_c$:

$$\begin{bmatrix} 2,2 & 2,3 & 2,5 & 2,6 & 2,8 & 2,9 \\ & 3,3 & 3,5 & 3,6 & 3,8 & 3,9 \\ & & 5,5 & 5,6 & 5,8 & 5,9 \\ & & & 6,6 & 6,8 & 6,9 \\ & & & & 8,8 & 8,9 \\ & & & & & 9,9 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{c_{2,2}} = \int_{-1}^1 \underline{B}_{c_2}^T GA_{\ell_2}^* \underline{B}_{c_2} \frac{L}{2} ds_1 = \frac{LGA_{\ell_2}^*}{2} \int_{-1}^1 \frac{2}{L} (s_1 - \frac{1}{2}) \frac{2}{L} (s_1 - \frac{1}{2}) ds_1 = \frac{7}{3} \frac{GA_{\ell_2}^*}{L}$$

Seguindo o mesmo raciocínio obtém-se:

$$\underline{K}_{c_{2,3}} = \frac{GA_{\ell_2}^*}{2} ; \underline{K}_{c_{2,5}} = -\frac{8}{3} \frac{GA_{\ell_2}^*}{L} ; \underline{K}_{c_{2,6}} = \frac{2}{3} GA_{\ell_2}^* ; \underline{K}_{c_{2,8}} = \frac{GA_{\ell_2}^*}{3L} ; \underline{K}_{c_{2,9}} = -\frac{GA_{\ell_2}^*}{6}$$

$$\underline{K}_{c_{3,3}} = \frac{2}{15} LGA_{\ell_2}^* ; \underline{K}_{c_{3,5}} = -\frac{2}{3} GA_{\ell_2}^* ; \underline{K}_{c_{3,6}} = \frac{1}{15} LGA_{\ell_2}^* ; \underline{K}_{c_{3,8}} = \frac{GA_{\ell_2}^*}{6} ; \underline{K}_{c_{3,9}} = -\frac{1}{30} GA_{\ell_2}^*$$

$$\underline{K}_{c_{5,5}} = \frac{16}{3} \frac{GA_{\ell_2}^*}{L} ; \underline{K}_{c_{5,6}} = 0 ; \underline{K}_{c_{5,8}} = -\frac{8}{3} \frac{GA_{\ell_2}^*}{L} ; \underline{K}_{c_{5,9}} = \frac{2}{3} GA_{\ell_2}^*$$

$$\underline{K}_{c_{6,6}} = \frac{8}{15} LGA_{\ell_2}^* ; \underline{K}_{c_{6,8}} = -\frac{2}{3} GA_{\ell_2}^* ; \underline{K}_{c_{6,9}} = \frac{L}{15} GA_{\ell_2}^*$$

$$\underline{K}_{c_{8,8}} = \frac{7}{3} \frac{GA_{\ell_2}^*}{L} ; \underline{K}_{c_{8,9}} = -\frac{GA_{\ell_2}^*}{2}$$

$$\underline{K}_{c_{9,9}} = \frac{2}{15} GA_{\ell_2}^*$$

Somando as submatrizes de rigidez associadas a deformação axial, de flexão e corte, obtém-se a matriz de rigidez de um elemento de três nós de Timoshenko:

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{7 EA}{3 L} & & & \\ & \frac{7 GA_{\ell_2}^*}{3 L} & \frac{1 GA_{\ell_2}^*}{2 L} & \\ & & \frac{7 EI_{\ell_3}}{3 L} + \frac{2}{15} LGA_{\ell_2}^* & \\ & & & \frac{16 EA}{3 L} \\ & & & & \frac{16 GA_{\ell_2}^*}{3 L} & 0 & & \\ & & & & & \frac{16 EI_{\ell_3}}{3 L} + \frac{8}{15} LGA_{\ell_2}^* & & \\ & & & & & & \frac{7 EA}{3 L} & \\ & & & & & & & \frac{7 GA_{\ell_2}^*}{3 L} & & \\ & & & & & & & & -\frac{1}{2} GA_{\ell_2}^* & \\ & & & & & & & & & \frac{7 EI_{\ell_3}}{3 L} + \frac{2}{15} LGA_{\ell_2}^* \end{array} \right]$$

b) Cálculo dos deslocamentos:

$$\underline{K}^{(E)} = \underline{K}_a^{(e)} + \underline{K}_f^{(e)} + \underline{K}_c^{(e)}$$

$$\underline{K}^{(E)} \underline{U}^{(E)} = \underline{Q}^{(E)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{16 GA_{\ell_2}^*}{3 L} & 0 & -\frac{8 GA_{\ell_2}^*}{3 L} & \frac{2}{3} GA_{\ell_2}^* \\ 0 & \frac{16 EI_{\ell_3}}{3 L} + \frac{8L}{15} GA_{\ell_2}^* & -\frac{2}{3} GA_{\ell_2}^* & -\frac{8 EI_{\ell_3}}{3 L} + \frac{L}{15} GA_{\ell_2}^* \\ -\frac{8 GA_{\ell_2}^*}{3 L} & -\frac{2}{3} GA_{\ell_2}^* & \frac{7 GA_{\ell_2}^*}{3 L} & -\frac{1}{2} GA_{\ell_2}^* \\ \frac{2}{3} GA_{\ell_2}^* & -\frac{8 EI_{\ell_3}}{3 L} + \frac{L}{15} GA_{\ell_2}^* & -\frac{1}{2} GA_{\ell_2}^* & \frac{7 EI_{\ell_3}}{3L} + \frac{2}{15} GA_{\ell_2}^* \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_{2\ell_2} \\ \theta_{2\ell_3} \\ u_{3\ell_2} \\ \theta_{3\ell_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo das características mecânicas da estrutura:

$$A = 1 \times 1 = 1 \text{ m}^2$$

$$A^* = \frac{5}{6} A = 0.8333 \text{ m}^2$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 15 \text{ GPa}$$

$$I_{\ell_3} = 0.08333 \text{ m}^4$$

Resolvendo o sistema de equações de equilíbrio obtém-se:

$$\begin{cases} u_{2\ell_2} = -0.0027 \text{ m} \\ \theta_{2\ell_3} = -0.0011 \text{ m} \\ u_{3\ell_2} = -0.0104 \text{ m} \\ \theta_{3\ell_3} = -0.0020 \text{ m} \end{cases}$$

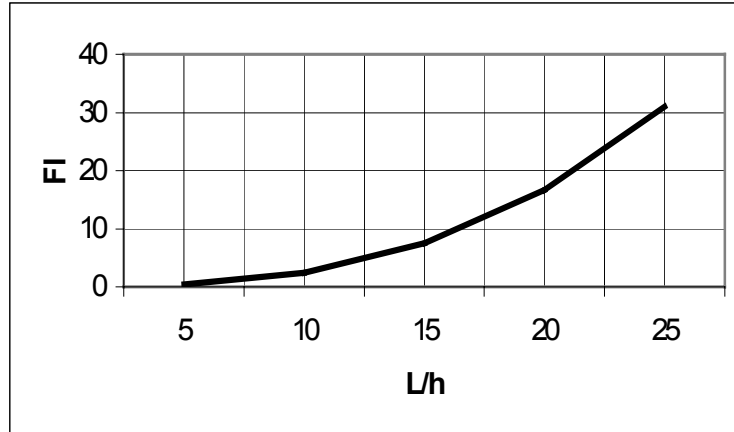
b) Traçar um gráfico que relacione a flecha com o parâmetro φ :

$$(u_{2\ell_2}^{(E)})_{\text{exacto}} = -\frac{FL^3}{3EI_{\ell_3}} = -0.00111 \text{ m}$$

Calculo do parâmetro φ :

$$\varphi = \frac{u_{2\ell_2}}{(u_{2\ell_2}^{(E)})_{\text{exacto}}} = \frac{-0.0027}{-0.0011} = 2.4545 \quad (\text{com } L=10 \text{ m})$$

$$\varphi = \frac{u_{2\ell_2}}{(u_{2\ell_2}^{(E)})_{\text{exacto}}} = \frac{-0.0004}{-0.0011} = 0.364 \quad (\text{com } L=5 \text{ m})$$



Exercício nº 2

Discretize o pórtico plano representado na Figura 4.24 por dois elementos de Timoshenko de dois nós. Utilizando a integração selectiva no cálculo da matriz de rigidez dos elementos da estrutura e a integração exacta no cálculo dos esforços, determine:

- A matriz de rigidez da estrutura;
- O vector solicitação da estrutura;
- Os deslocamentos e reacções;
- Os esforços.

Dados:

- $E_C = 30 \text{ GPa}$
- $\nu = 0.0$
- $K_m = 500000 \text{ KN/m}$

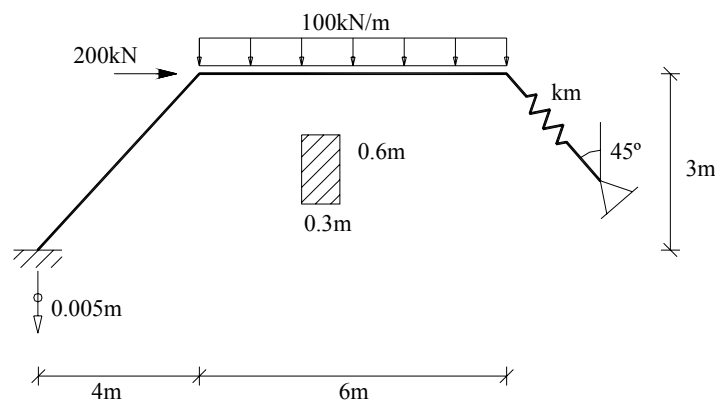


Figura 4.24 – Pórtico plano (teoria de Timoshenko).

Resolução:

a) Cálculo da matriz de rigidez da estrutura

- Cálculo das características mecânicas da estrutura:

$$A = 0.3 \times 0.6 = 0.18 \text{ m}^2$$

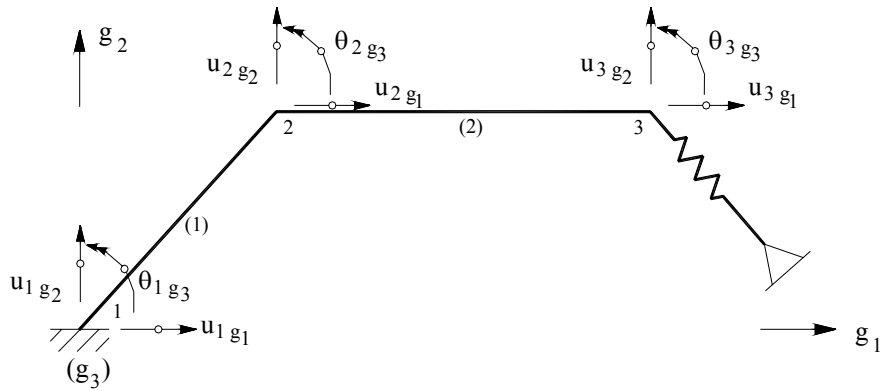
$$I = \frac{0.3 \times 0.6^3}{12} = 0.0054 \text{ m}^4$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 15 \times 10^6 \text{ KPa}$$

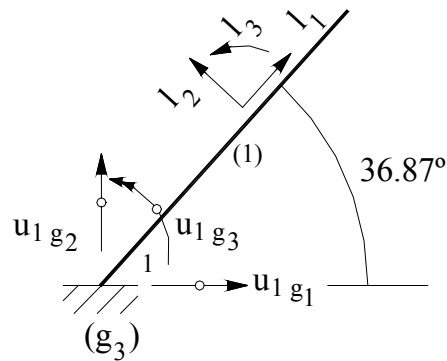
$$A^* = \frac{5}{6} A = 0.15 \text{ m}^2 \quad (\text{área reduzida de corte})$$

Deslocamentos na estrutura em cada nó:

Matriz de rigidez para cada elemento incluindo a rigidez por deformação axial, flexão e corte:



Cálculo da matriz de transformação, T_{lg} :



Então:

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & 0 \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

$$T_{lg} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rigidez da mola no referencial global:

$$\underline{K}_m^g = \underline{T}_{\ell g}^m \underline{K}_m \left[\underline{T}_{\ell g}^m \right]^T$$

em que

$$\underline{T}_{\ell g}^m = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_m^g = K_m \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \cos \beta \sin \beta \\ \cos \beta \sin \beta & \sin^2 \beta \end{bmatrix} = K_m \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (\beta = -45^\circ)$$

Cálculo da matriz de rigidez do elemento 1, 2 e da mola:

$$\underline{K}_g^{(1)} = \underline{T}_{\ell g} \times \underline{K}_\ell^{(1)} \times \left[\underline{T}_{\ell g} \right]^T$$

$$\underline{K}_g^{(2)} = \underline{K}_\ell^{(2)} \quad (\alpha=0^\circ)$$

$$\underline{K}_g^{(1)} = \begin{bmatrix} 853200 & 302400 & -675000 & -853200 & -302400 & -675000 \\ 302400 & 676800 & 900000 & -302400 & -676800 & 900000 \\ -675000 & 900000 & 2844900 & 675000 & -900000 & 2780100 \\ \hline -853200 & -302400 & 675000 & 853200 & 302400 & 675000 \\ -302400 & -676800 & -900000 & 302400 & 676800 & -900000 \\ -675000 & 900000 & 2780100 & 675000 & -900000 & 2844900 \end{bmatrix}$$

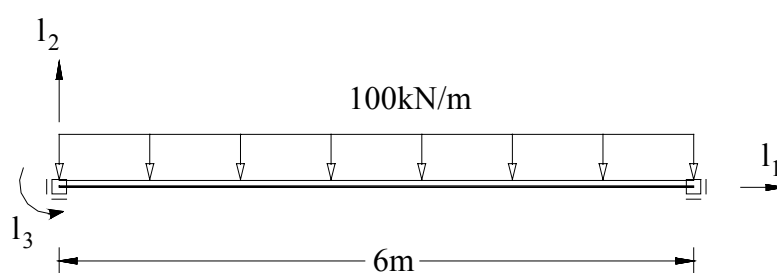
$$\underline{K}_g^{(2)} = \begin{bmatrix} 900000 & 0 & 0 & -900000 & 0 & 0 \\ 0 & 375000 & 1125000 & 0 & -375000 & 1125000 \\ 0 & 1125000 & 3402000 & 0 & -1125000 & 3348000 \\ -900000 & 0 & 0 & 900000 & 0 & 0 \\ 0 & -375000 & -1125000 & 0 & 375000 & -1125000 \\ 0 & 1125000 & 3348000 & 0 & -1125000 & 3402000 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_m = \begin{bmatrix} 250000 & -250000 \\ -250000 & 250000 \end{bmatrix}$$

Efectuando o espalhamento das matrizes de rigidez dos elementos na matriz de rigidez da estrutura obtém-se:

$$\underline{K}_g^{(g)} = \begin{bmatrix} 853200 & 302400 & -675000 & -853200 & -302400 & -675000 & 0 & 0 & 0 \\ 302400 & 676800 & 900000 & -302400 & -676800 & 900000 & 0 & 0 & 0 \\ -675000 & 900000 & 2844900 & 675000 & -900000 & 2780100 & 0 & 0 & 0 \\ -853200 & -302400 & 675000 & 1753200 & 302400 & 675000 & -900000 & 0 & 0 \\ -302400 & -676800 & -900000 & 302400 & 1051800 & 225000 & 0 & -375000 & 1125000 \\ -675000 & 900000 & 2780100 & 675000 & 225000 & 6246900 & 0 & -1125000 & 3348000 \\ 0 & 0 & 0 & -900000 & 0 & 0 & 1150000 & -250000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -375000 & -1125000 & -250000 & 625000 & -1125000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1125000 & 3348000 & 0 & -1125000 & 3402000 \end{bmatrix}$$

b) Cálculo do vector solicitação:



- $M = \frac{pl^2}{12}$ e $R = \frac{pl}{2}$

$$\underline{Q}_g^{(E)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \\ -300 \\ -300 \\ 0 \\ -300 \\ 300 \end{bmatrix} \quad (\text{mal calculado ?????})$$

c) Cálculo dos deslocamentos e reacções:

$$\underline{K}^{(E)} \times \underline{u}^{(E)} = \underline{Q}^{(E)} + R$$

853200	302400	-675000	-853200	-302400	-675000	0	0	0	0	R ₁
302400	676800	900000	-302400	-676800	900000	0	0	0	-0.005	R ₂
-675000	900000	2844900	675000	-900000	2780100	0	0	0	0	R ₃
-853200	-302400	675000	1753200	302400	675000	-900000	0	0	u _{2ℓ₁}	200
-302400	-676800	-900000	302400	1051800	225000	0	-375000	1125000	u _{2ℓ₂}	-300
-675000	900000	2780100	675000	225000	6246900	0	-1125000	3348000	u _{2ℓ₃}	-300
0	0	0	-900000	0	0	1150000	-250000	0	u _{3ℓ₁}	0
0	0	0	0	-375000	-1125000	-250000	625000	-1125000	u _{3ℓ₂}	-300
0	0	0	0	1125000	3348000	0	-1125000	3402000	u _{3ℓ₃}	300

Para simplificar o calculo:

$$\underline{K}_{\ell\ell}^{(E)} \times \underline{u}_{\ell}^{(E)} = \underline{Q}_{\ell} - \underline{K}_{\ell f}^{(E)} \times \underline{u}_f^{(E)}$$

Resolvendo este sistema de equações de equilíbrio obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = 132.55 \text{ KN} \\ R_2 = 266.7 \text{ KN} \\ R_3 = 473.3 \text{ KN.m} \\ u_{2\ell_1} = 0.0064038 \text{ m} \\ u_{2\ell_2} = -0.013949 \text{ m} \\ u_{2\ell_3} = -0.00428163 \text{ rad} \\ u_{3\ell_1} = 0.006034101 \text{ m} \\ u_{3\ell_2} = 0.00470304 \text{ m} \\ u_{3\ell_3} = 0.01047012 \text{ rad} \end{array} \right.$$

d) Cálculo dos esforços

Para um elemento de dois nós só existe 1 ponto de Gauss ($s_1 = 0$):

- Momento flector:

$$M^{(1)} = EI\varepsilon_f = EI\left(\frac{2}{L}\right)\frac{dN_1}{ds_1}\Big|_{s_1=0} u_f \Leftrightarrow$$

$$M^{(1)} = EI\left(\frac{2}{L}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)u_e + EI\left(\frac{2}{L}\right)\left(\frac{1}{2}\right)u_d = -32400 \times 0 + 32400 \times (-0.00428163) = -138.7 \text{ KN.m}$$

$$M^{(2)} = EI\varepsilon_f = EI\left(\frac{2}{L}\right)\frac{dN_1}{ds_1}\Big|_{s_1=0} u_f \Leftrightarrow$$

$$M^{(2)} = EI\left(\frac{2}{L}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)u_e + EI\left(\frac{2}{L}\right)\left(\frac{1}{2}\right)u_d = -27000 \times (-0.00428163) + 27000 \times 0.01047012 = 398.3 \text{ KN.m}$$

- Esforço axial:

$$N^{(1)} = EA\varepsilon_a = EA\left(\frac{2}{L}\right)\frac{dN_1}{ds_1}\Big|_{s_1=0} u_f \Leftrightarrow$$

$$N^{(1)} = EA\left(\frac{2}{L}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)u_e + EA\left(\frac{2}{L}\right)\left(\frac{1}{2}\right)u_d = -1080000 \times (-0.003) + 1080000 \times (-0.00324376) = -263.2 \text{ KN}$$

$$N^{(2)} = EA\varepsilon_a = EA\left(\frac{2}{L}\right)\frac{dN_1}{ds_1}\Big|_{s_1=0} u_f \Leftrightarrow$$

$$N^{(2)} = EA\left(\frac{2}{L}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)u_e + EA\left(\frac{2}{L}\right)\left(\frac{1}{2}\right)u_d = -900000 \times 0.0064038 + 900000 \times 0.006034101 = -332.7 \text{ KN}$$

4.3.10 – Exercícios para resolver

1- A altura da viga biencastrada representada na Figura 1 varia de forma parabólica de 2 metros em $x_1=0$ até 1 metro em $x_1=10$ metros. Na viga actua uma carga distribuída parabolicamente, cujos valores se representam na figura 2. Discretizando a estrutura em dois elementos de 3 nós e utilizando a teoria de Timoshenko determine:

- a) a matriz de rigidez de um elemento aplicando a integração reduzida de Gauss-Legendre;
- b) o vector das forças nodais equivalentes à acção que actua no elemento;

Dados: largura da viga=0.5 m; módulo de elasticidade do material=30 GPa.

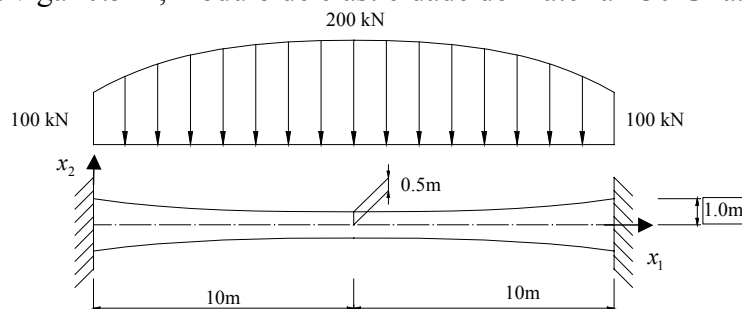


Figura 1

2 – Admita que as barras 2 e 3 do pórtico plano representado na Figura 2 são discretizadas por um elemento finito de 3 nós e a barra 1 é discretizada por um elemento finito de 3 nós de barra biarticulada. Utilizando a formulação de Timoshenko e adoptando a integração reduzida:

- a) calcule a submatriz de rigidez relativa ao nó C;
- b) calcule as forças nodais no nó C, no referencial global, equivalentes às acções que actuam na estrutura;
- c) calcule os esforços de flexão nos pontos de Gauss do elemento que discretiza a barra 2, admitindo que os deslocamentos do nó B, C e E, no referencial global, são os seguintes:

$$\text{Nó B: } u_{x_1} = 0.0 \text{ m}; u_{x_2} = -2.6919e-04 \text{ m}; \theta_{x_3} = -2.1632e-04 \text{ rad.}$$

$$\text{Nó E } u_{x_1} = 1.9258e-04 \text{ m}; u_{x_2} = -6.23e-06 \text{ m}; \theta_{x_3} = 2.4807e-04 \text{ rad.}$$

$$\text{Nó C } u_{x_1} = 5.7424e-05 \text{ m}; u_{x_2} = -1.8049e-04 \text{ m}; \theta_{x_3} = -6.7355e-04 \text{ rad.}$$

d) com base nos momentos flectores obtidos nos pontos de Gauss, determinados na alínea anterior, calcule os momentos no nó B. Comente os resultados obtidos.

Dados: barras 2 e 3: $b=1.0\text{ m}$, $h=0.3\text{ m}$; $E=30\text{ GPa}$, $\nu = 0.0$

Barra 1: $\text{área}=0.1\text{ m}^2$, $E=200\text{ GPa}$, $\nu = 0.0$

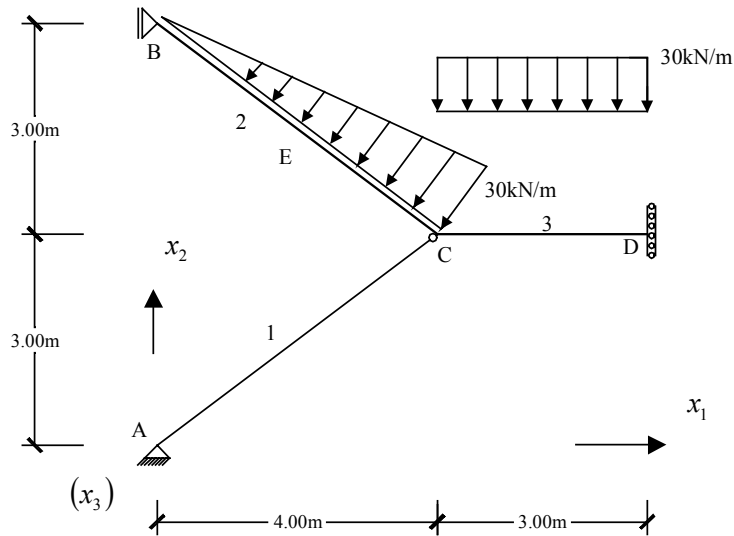


Figura 2

3 – O eixo da estrutura representada na Figura 1 é descrito pela equação

$$x_2 = -\frac{5}{100}(x_1)^2 + x_1$$

e a espessura da estrutura determina-se segundo a equação

$$h = \frac{1.25}{100}(x_1)^2 - \frac{25}{100}x_1 + 1.5$$

Discretizando a estrutura com um elemento de 3 nós e utilizando a formulação de Timoshenko, calcule o deslocamento vertical do nó 3 devido à actuação do peso próprio da estrutura. Despreze a deformabilidade axial da estrutura e utilize a integração reduzida no cálculo da matriz de rigidez do elemento.

Dados:

Peso específico do material constituinte da estrutura = 25 kN/m^3 ;

Largura da estrutura = 1.0 m ;

Módulo de elasticidade longitudinal do material constituinte da estrutura = 30 GPa ;

Coefficiente de Poisson = 0.0 .

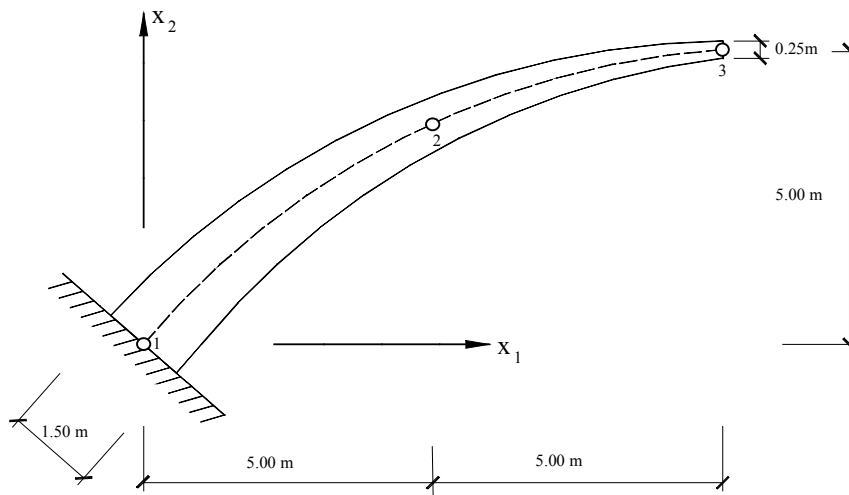


Figura 3

1 – O pórtico plano representado na Figura 1 foi discretizado em 3 elementos de 3 nós. Utilizando a formulação de Timoshenko e a integração reduzida obtiveram-se os deslocamentos nos nós da estrutura apresentados no Quadro 1.

- Calcule o esforço axial num ponto de Gauss do elemento que discretiza a barra 1;
- Calcule o momento flector num ponto de Gauss do elemento que discretiza a barra 2;
- Calcule o esforço de corte num ponto de Gauss do elemento que discretiza a barra 3;
- Com base nos esforços indicados no Quadro 2, extrapole os momentos flectores para o nó 2 e os esforços de corte para o nó 7.

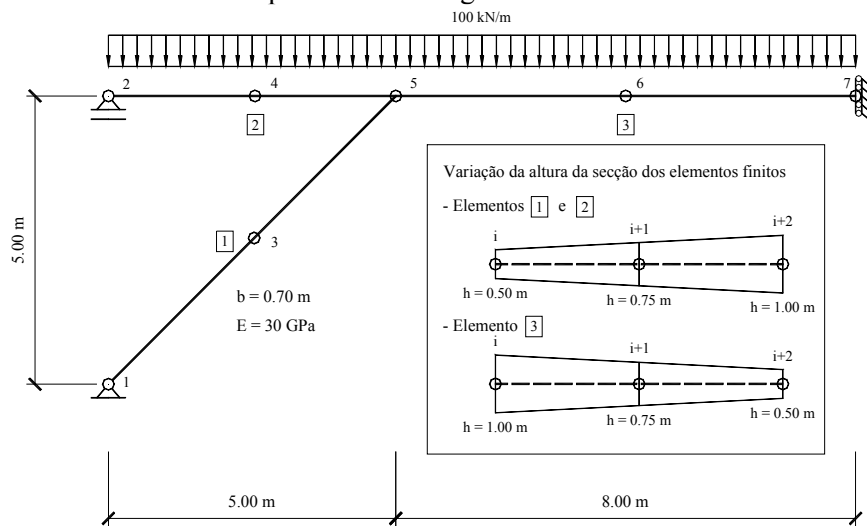
Dados:

Módulo de elasticidade longitudinal do material constituinte da estrutura = 30 GPa;

Coefficiente de Poisson=0.0;

Largura das barras = 0.7 m;

A variação da altura das barras é a representada na Figura 2.

**Quadro 1**

*** Nodal displacements:
(global coordinate system)

Point number (ipoin)
X1 displacement (delta-x1)
X2 displacement (delta-x2)
Theta-x3 rotation (delta-tx3)

ipoin	delta-x1	delta-x2	delta-tx3
1	0.00000000	0.00000000	0.00149995
2	0.00081408	0.00000000	0.00059338
3	-0.00200657	0.00121595	-0.00028815
4	0.00081408	0.00066868	-0.00030253
5	0.00081408	-0.00216944	-0.00225808
6	0.00047488	-0.02106080	-0.00555692
7	0.00000000	-0.03526722	0.00000000

(unidades: deslocamentos em metros e rotações em radianos)

Quadro 2

```

*** Resultant stresses in the Gauss points:
    (local coordinate system)
    (same sign convention for any Gauss point)

Element number (ielem)
Gauss point number for axial forces (igsta)
Gauss point number for bending moments (igstb)
Gauss point number for shear forces (igsts)
Gauss point global coordinates for axial forces (gpcot_a)
Gauss point global coordinates for bending moments (gpcot_b)
Gauss point global coordinates for shear forces (gpcot_s)
L1 axial force (N11)
L2 shear force (N12)
L3 bending moment (M13)

  ielem  igsta      N11              gpcot_a
         igsts      N12              gpcot_s
         igstb      M13              gpcot_b

    1     1     -2055.62134239    1.05662433    1.05662433
    1     2     -2055.62134239    3.94337567    3.94337567
    1     1      127.02127549     1.05662433    1.05662433
    1     2      127.02127549     3.94337567    3.94337567
    1     1      189.80693341     1.05662433    1.05662433
    1     2      708.36911911     3.94337567    3.94337567

    2     1           0.00000000    1.05662433    5.00000000
    2     2           0.00000000    3.94337567    5.00000000
    2     1      169.38861820     1.05662433    5.00000000
    2     2      458.06375280     3.94337567    5.00000000
    2     1      123.15738629     1.05662433    5.00000000
    2     2      1028.80687455     3.94337567    5.00000000

    3     1     -1543.36139601     6.69059892    5.00000000
    3     2     -1543.36139601    11.30940108    5.00000000
    3     1      -630.94010768     6.69059892    5.00000000
    3     2     -169.05989232    11.30940108    5.00000000
    3     1      1257.23407740     6.69059892    5.00000000
    3     2     -590.28678401    11.30940108    5.00000000

(unidades: kN, kN.m, m)

```

- 1 – A estrutura representada na Figura 1 está discretizada em 4 elementos de 3 nós de Timoshenko.
- Desprezando a deformabilidade axial das barras e utilizando a integração reduzida, calcule os coeficientes de rigidez relativos ao nó B.
 - Calcule as forças nodais equivalentes no nó B.

- c) Considerando dois pontos de Gauss por elemento, calcule os esforços de flexão e de corte no elemento nº 1, sabendo que os deslocamentos dos nós deste elemento, no referencial global, são os seguintes :

Nó	deslocamento segundo x_1	deslocamento segundo x_2	rotação segundo x_3
1	0.00000000	0.00000000	-0.00084618
2	-0.00000000	-0.00091344	-0.00056319
3	-0.00000000	-0.00127759	0.00003270

- d) Com base nos esforços do elemento nº 1, determine o momento no nó A. Se os resultados não lhe parecem aceitáveis, explique como procederia para melhorar os resultados obtidos.

Dados: $b=0.3$ m, $h=0.7$ m; $E=30$ GPa, $\nu = 0.0$

Mola: $k_m = 500000$ kN/m

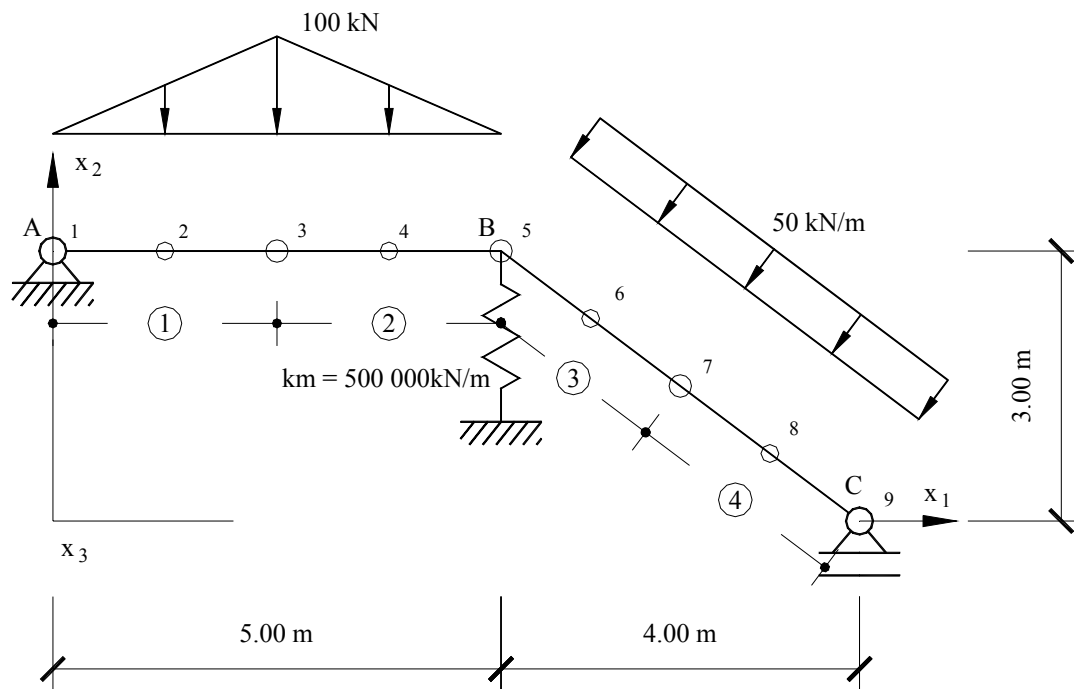


Figura 1

1 – Discretizando a consola representada na Figura 1 em dois elementos de 3 nós de Tismoshenko, de igual comprimento, calcule:

- A matriz de rigidez da estrutura;
- O vector das forças nodais equivalentes, admitindo que a barra está submetida ao seu peso próprio, a forças distribuídas por unidade de comprimento de valor igual a 50 kN/m e a uma força concentrada de 100 kN aplicada na extremidade livre da consola;
- O deslocamento vertical da extremidade livre da consola;
- As reacções;
- O momento flector e o esforço transversal no ponto de Gauss mais próximo da secção de encastramento. Admita que os deslocamentos dos nós 2 e 3, no referencial global, são os seguintes:

Nó	Deslocamento segundo x_2 (m)	Rotação segundo x_3 (rad.)
2	-0.00820588	-0.00735665
3	-0.04257247	-0.02090955

- f) Determine os momentos flectores nos pontos nodais do elemento nº 2, sabendo que os esforços nos pontos de Gauss deste elemento são os apresentados no Quadro seguinte. Comente os resultados obtidos.

```

Element number (ielem)
Gauss point number for axial stresses (igstm)
Gauss point number for bending stresses (igstb)
Gauss point number for shear stresses (igsts)
Gauss point global coordinates (gpcot_m)
Gauss point global coordinates (gpcot_b)
Gauss point global coordinates (gpcot_s)
X axial force (Nx)
XY shear force (Nxy)
Y bending moment (My)

```

ielem	igstm	Nx	gpcot_m	
	igsts	Nxy	gpcot_s	
	igstb	My	gpcot_b	
2	1	0.00000000	6.05662433	0.00000000
2	2	0.00000000	8.94337567	0.00000000
2	1	-328.74848110	6.05662433	0.00000000
2	2	-159.58485223	8.94337567	0.00000000
2	1	840.75756015	6.05662433	0.00000000
2	2	135.90910652	8.94337567	0.00000000

NOTA: No cálculo da matriz de rigidez, do vector das forças nodais equivalentes e dos esforços utilize a integração reduzida.

Dados:

Peso específico do material constituinte da estrutura = 25 kN/m³;

Largura da estrutura = 0.4 m;

Módulo de elasticidade longitudinal do material constituinte da estrutura = 30 GPa;

Coefficiente de Poisson = 0.0.

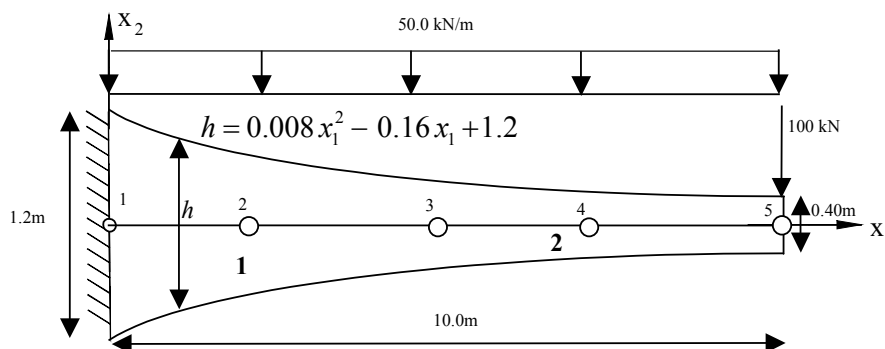
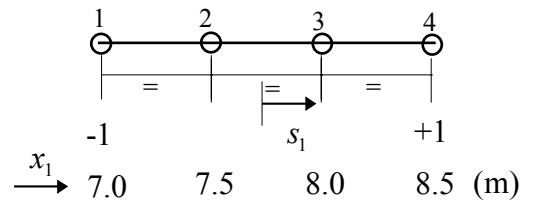


Figura 1

1 - O elemento de quatro nós representado na Figura 1 pertence a um pórtico plano. Utilizando a teoria de Timoshenko e a formulação isoparamétrica dos elementos finitos:



- a) determine a matriz de deformação, \underline{B} , deste elemento, em coordenadas normalizadas, s_1 .
- b) calcule os valores da matriz de deformação relativa ao corte, \underline{B}_c , em $s_1 = 0$.

Figura 1 - Elemento finito de quatro nós.

2 - Na folha em anexo apresenta-se um ficheiro de dados do programa de cálculo automático *femixnd*.

- a) Desenhe a estrutura e as condições de ligação da estrutura ao exterior.
- b) Represente as acções que actuam na estrutura.
- c) Calcule o coeficiente de rigidez $K_{8,8}^{(E)}$ da matriz de rigidez da estrutura.
- d) Admitindo que os deslocamentos dos nós da estrutura em análise, no referencial global, são os seguintes (obtidos por intermédio do *femixnd*):

*** Nodal displacements:
(global coordinate system)

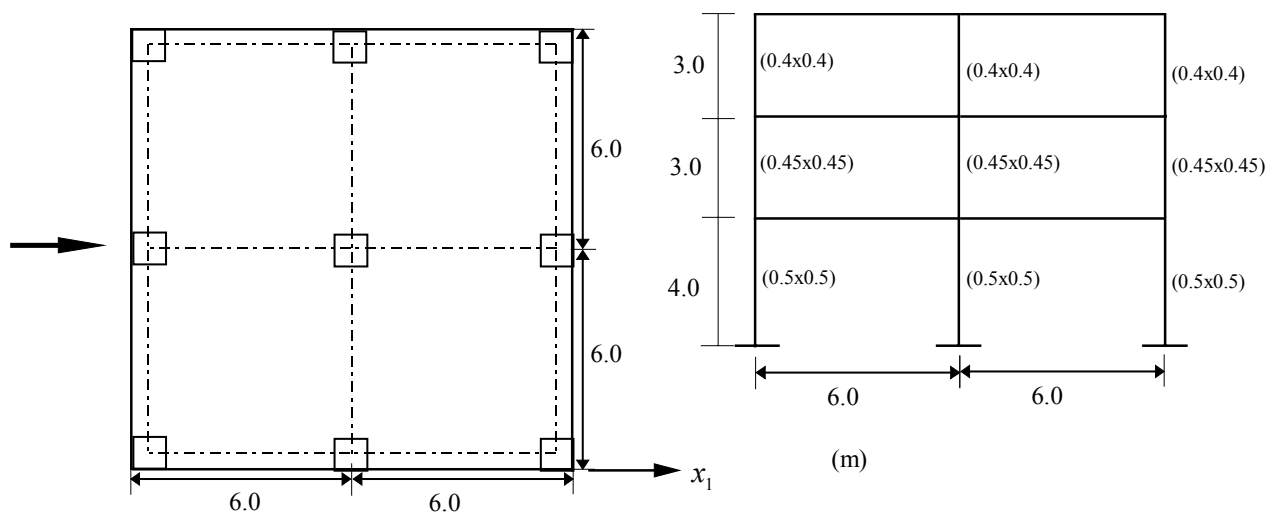
Point number (ipoin)
X displacement (delta-x)
Y displacement (delta-y)
Theta-Y rotation (delta-ty)

ipoin	delta-x	delta-y	delta-ty
1	0.00000000	0.00000000	0.00064587
2	0.00112211	0.00115465	0.00017538
3	-0.00038725	-0.00119933	-0.00290275
4	-0.00019362	-0.01095866	-0.00395138
5	0.00000000	-0.01698954	0.00000000

determine os momentos flectores nos pontos de Gauss do elemento nº 2.

3 - Na Figura 2 representa-se um edifício habitacional de três andares situado em Guimarães e num terreno tipo II.

Utilizando o método de Rayleigh, determine as forças máximas ao nível de cada andar devidas às acções sísmicas regulamentares segundo a direcção x_1 (no cálculo dos deslocamentos considere as vigas de rigidez infinita).



Dados:

- módulo de elasticidade longitudinal do betão = 30 GPa; coeficiente de amortecimento=5%
- vigas de secção $0.3 \times 0.7 \text{ m}^2$;
- peso próprio das lajes, com 0.3 m de espessura = 3 kN/m^2 ;
- peso de revestimentos e paredes de alvenaria = 2.5 kN/m^2 ;

```

### Main title of the problem
### Elementos de tres nos
### (kN,m)
Teste Comp. Est. - Fevereiro 1998 ;

### Main parameters
2 ; # nelem (n. of elements in the mesh)
5 ; # npoin (n. of points in the mesh)
2 ; # nvfix (n. of points with fixed degrees of freedom)
1 ; # ncase (n. of load cases)
1 ; # nmats (n. of sets of material properties) (only in linear regime)
1 ; # nspen (n. of sets of element nodal properties) (only in linear regime)
10 ; # ntype (problem type)
1 ; # ntyan (type of analysis)
3 ; # nnode (n. of nodes per element)
2 ; # ngaum (n. of Gauss points for axial rigidity)
2 ; # ngaub (n. of Gauss points for bending rigidity)
2 ; # ngaus (n. of Gauss points for shear rigidity)
2 ; # ngstm (n. of Gauss points for axial forces)
2 ; # ngstb (n. of Gauss points for bending moments)
2 ; # ngsts (n. of Gauss points for shear forces)
2 ; # ndime (n. of geometric dimensions)
3 ; # ndofn (n. of degrees of freedom per node)
4 ; # nprop (n. of material properties used in the formulation)
2 ; # npren (n. of element nodal properties used in the formulation)
0 ; # npscs (n. of points with specified coordinate system)
0 ; # nsscs (n. of sets of specified coordinate system)
0 ; # npspr (n. of springs)
0 ; # nsspv (n. of sets of spring vectors)

### Material properties index, element nodal properties index and
### list of the nodes of each element
# ielem   matno   ielnp   lnods ...
      1       1       1       1   2   3   ;
      2       1       1       3   4   5   ;

### Coordinates of the points
# ipoin   coord-g1   coord-g2
1         0.00000000   3.00000000   ;
2         2.00000000   1.50000000   ;
3         4.00000000   0.00000000   ;
4         6.50000000   0.00000000   ;
5         9.00000000   0.00000000   ;

### Points with fixed degrees of freedom and fixity codes (1-fixed;0-free)
# ivfix   nofix   ifpre
      1       1       1 1 0 ;
      2       5       1 0 1 ;

### Points with specified coordinate system (index, point number and type
### of coordinate system)
# ipses   npspe   itycs

### Specified coordinate system
# isscs

### Transformation matrix from specified to global coordinate system (coscs)
### (Each row of coscs includes the components of a specified
### coordinate system vector in the global coordinate system)
# ivect coscs...

# isscs

### Transformation matrix from specified to global coordinate system (coscs)
### (Each row of coscs includes the components of a specified
### coordinate system vector in the global coordinate system)
# ivect coscs...

### Spring index, point number, type of spring vector, rigidity value,
### and flag to choice between displacement rigidity (d) or
### rotational rigidity (r) (only when npspr > 0)
# ipspr   nsprp   ityvs   sprva   drrif

### Index set of spring vector. Components in the global coordinate system
### of the sets of spring vectors (only when nsspv > 0)
# isspv

```



```

# cgspv...

### Sets of material properties
### (Young modulus, Poisson ratio, mass per unit volume and thermic coeff.)
# imats  young  poiss  dense  alpha
      1      30e+06  0.00    1.0    1e-5 ;

### Sets of element nodal properties
### (Cross section area, torsional and flexural inertia and
### local coordinate system definition angle in degrees)
# ispen
      1 ;
# inode  barea  bin2l
      1      0.15  0.003125 ;
      2      0.15  0.003125 ;
      3      0.15  0.003125 ;

# =====

### Title of the first load case
Accoes ;

### Load parameters
0 ; # nplod (n. of point loads in nodal points)
0 ; # ngrav (gravity load flag: 1=yes;0=no)
2 ; # nedg (n. of edge loads)
0 ; # ntemp (n. of elements with temperature variation)
0 ; # nepoi (n. of element point loads)
0 ; # nprva (n. of prescribed and non zero degrees of freedom)

### Point loads in nodal points (loaded point and load value)
### (global coordinate system)
# iplod  lopop      pload-g1 pload-g2 pload-g3

### Gravity load (gravity acceleration)
### (global coordinate system)
# gravi-g1 gravi-g2

### Edge load (loaded element, loaded points and load value)
### (local coordinate system)
# iedge  loele
      1      1 ;
# lopoe  q_l1  q_l2  q_l3
      1      0.0  0.0  0.0 ;
      2      0.0 -15.0  0.0 ;
      3      0.0 -30.0  0.0 ;
# iedge  loele
      2      2 ;
# lopoe  q_l1  q_l2  q_l3
      3      0.0 -30.0  0.0 ;
      4      0.0 -30.0  0.0 ;
      5      0.0 -30.0  0.0 ;

### Thermal load (loaded set temperature variation, n. of elements,
### loaded bar, uniform temperature, 12 variation, 13 sectional thick.)
# itemp loelt
# ilopo  teuni  tevab_l2  secth_l3

### Element point load (loaded element, distance to the left
### end and load value) (global coordinate system)
# illle loelp llllep  epoil_g1  epoil_g2  epoil_g3

### Prescribed variables (point, degree of freedom and prescribed value)
### (global coordinate system)
# iprva  nnodp  ndofp  prval

END_OF_FILE ;

```

2 - Na folha em anexo apresenta-se um ficheiro de dados do programa de cálculo automático *femixnd*.

- Desenhe a estrutura, as condições de ligação da estrutura ao exterior e as características geométricas das secções das barras.
- Represente as acções que actuam na estrutura.
- Calcule a submatriz de rigidez associada aos graus de liberdade do nó 3.
- Determine os esforços de corte no(s) ponto(s) de Gauss do elemento nº 3, admitindo que os deslocamentos dos nós da estrutura em análise, no referencial global, são os seguintes (obtidos por intermédio do *femixnd*):

Point number (ipoin)
 X displacement (delta-x)
 Y displacement (delta-y)
 Theta-Y rotation (delta-ty)

ipoin	delta-x	delta-y	delta-ty
1	0.00000000	0.00000000	0.00000000
2	0.00236404	-0.00012215	-0.00306316
3	0.00515614	-0.00024431	-0.00057076
4	0.00515614	-0.00111798	-0.00006192
5	0.00515614	0.00000000	0.00091145
6	0.00542503	0.00007585	0.00017789
7	0.00536218	0.00000000	-0.00008697

e) Obtenha os momentos flectores nos pontos nodais dos elementos nº 3 e 4, admitindo que os esforços no(s) ponto(s) de Gauss dos elementos são os seguintes (obtidos por intermédio do *femixnd*):

Element number (ielem)
 Gauss point number for axial force (igstm)
 Gauss point number for shear force (igsts)
 Gauss point number for bending moment (igstb)
 Gauss point global coordinates (gpcot_m)
 Gauss point global coordinates (gpcot_b)
 Gauss point global coordinates (gpcot_s)
 X axial force (Nx)
 XY shear force (Nxy)
 Y bending moment (My)

ielem	igstm	Nx	gpcot_m	
	igsts	Nxy	gpcot_s	
	igstb	My	gpcot_b	
1	1	-219.87798778	4.00000000	0.75000000
1	1	-50.00000000	4.00000000	0.75000000
1	1	41.35264524	4.00000000	0.75000000
2	1	-219.87798778	4.00000000	2.25000000
2	1	-50.00000000	4.00000000	2.25000000
2	1	-33.64735476	4.00000000	2.25000000
3	1	0.00000000	5.25000000	3.00000000
3	1	-74.54051071	5.25000000	3.00000000
3	1	-32.97308485	5.25000000	3.00000000
4	1	0.00000000	7.75000000	3.00000000
4	1	50.45948929	7.75000000	3.00000000
4	1	-63.07436162	7.75000000	3.00000000
5	1	-49.70248624	3.00000000	3.75000000
5	1	66.26998166	3.00000000	3.75000000
5	1	-48.51243122	3.00000000	3.75000000
6	1	10.29751376	1.00000000	5.25000000
6	1	-13.73001834	1.00000000	5.25000000
6	1	17.16252293	1.00000000	5.25000000

Comente os resultados obtidos.

ANEXO

```

### Main title of the problem
### (kN,m)
Exame de Complementos de Estruturas - Fevereiro 1998 ;

### Main parameters
6 ; # nelem (n. of elements in the mesh)
7 ; # npoin (n. of points in the mesh)
3 ; # nvfix (n. of points with fixed degrees of freedom)
1 ; # ncase (n. of load cases)
1 ; # nmats (n. of sets of material properties) (only in linear regime)
2 ; # nspen (n. of sets of element nodal properties) (only in linear regime)
10 ; # ntype (problem type)
1 ; # ntyan (type of analysis)

```

```

2 ; # nnode (n. of nodes per element)
1 ; # ngaum (n. of Gauss points for axial rigidity)
1 ; # ngaub (n. of Gauss points for bending rigidity)
1 ; # ngaus (n. of Gauss points for shear rigidity)
1 ; # ngstm (n. of Gauss points for axial forces)
1 ; # ngstb (n. of Gauss points for bending moments)
1 ; # ngsts (n. of Gauss points for shear forces)
2 ; # ndime (n. of geometric dimensions)
3 ; # ndofn (n. of degrees of freedom per node)
4 ; # nprop (n. of material properties used in the formulation)
2 ; # npren (n. of element nodal properties used in the formulation)
0 ; # npscs (n. of points with specified coordinate system)
0 ; # nsscs (n. of sets of specified coordinate system)
0 ; # npspr (n. of springs)
0 ; # nsspv (n. of sets of spring vectors)

### Material properties index, element nodal properties index and
### list of the nodes of each element
# ielem      matno      ielnp      lnods ...
   11         1         1         2      ;
   21         1         2         3      ;
   31         2         3         4      ;
   41         2         4         5      ;
   51         2         3         6      ;
   61         2         6         7      ;

### Coordinates of the points
# ipoin      coord-g1      coord-g2
   1         4.00000000      0.00000000 ;
   2         4.00000000      1.50000000 ;
   3         4.00000000      3.00000000 ;
   4         6.50000000      3.00000000 ;
   5         9.00000000      3.00000000 ;
   6         2.00000000      4.50000000 ;
   7         0.00000000      6.00000000 ;

### Points with fixed degrees of freedom and fixity codes (1-fixed;0-free)
# ivfix      nofix      ifpre
   1         1         1 1 1 ;
   2         5         0 1 0 ;
   3         7         0 1 0 ;

### Sets of material properties
### (Young modulus, Poisson ratio, mass per unit volume and thermic coeff.)
# imats      young      poiss      dense      alpha
   1         30e+06      0.00      1.0      1e-5 ;

### Sets of element nodal properties
### (Cross section area, torsional and flexural inertia and
### local coordinate system definition angle in degrees)
# ispen
   1 ;
# inode      barea      bin2l
   1         0.09      0.000675 ;
   2         0.09      0.000675 ;
# ispen
   2 ;
# inode      barea      bin2l
   1         0.18      0.0054 ;
   2         0.18      0.0054 ;
# =====
### Title of the first load case
Accoes ;

### Load parameters
2 ; # nplod (n. of point loads in nodal points)
0 ; # ngrav (gravity load flag: 1=yes;0=no)
2 ; # nedge (n. of edge loads)
0 ; # ntemp (n. of elements with temperature variation)
0 ; # nepoi (n. of element point loads)
0 ; # nprva (n. of prescribed and non zero degrees of freedom)

### Point loads in nodal points (loaded point and load value)
### (global coordinate system)
# iplod      lopop      pload-g1      pload-g2      pload-g3
   1         3         50.0         0.0         0.0 ;
   2         6         0.0        -100.0         0.0 ;

### Edge load (loaded element, loaded points and load value)
### (local coordinate system)
# iedge      loele
   1         3 ;
# lopoe      q_l1      q_l2      q_l3
   3         0.0        -50.0         0.0 ;
   4         0.0        -50.0         0.0 ;
# iedge      loele
   2         4 ;
# lopoe      q_l1      q_l2      q_l3

```

```

4      0.0  -50.0  0.0 ;
5      0.0  -50.0  0.0 ;

```

```

END_OF_FILE ;

```

4 – A viga representada na Figura 1 está discretizada por um elemento de 3 nós de Timoshenko. Deduza o vector das forças nodais equivalentes à acção actuante.

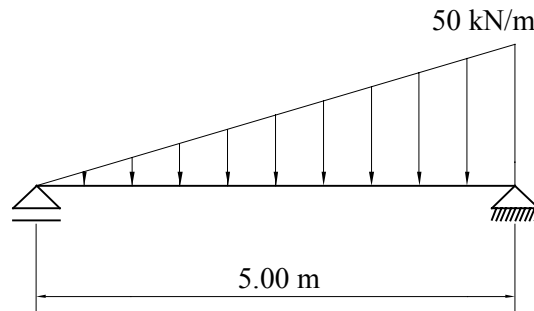


Figura 1

1 – No Quadro 1 apresenta-se um ficheiro de dados do programa de cálculo automático *femixnd*.

a) Calcule a submatriz de rigidez associada aos graus de liberdade do nó 6.

b) Determine os esforços de flexão no(s) ponto(s) de Gauss do elemento nº 1, admitindo que os deslocamentos dos nós deste elemento, no referencial global, são os seguintes (obtidos por intermédio do *femixnd*):

```

Point number (ipoin)
X displacement (delta-x)
Y displacement (delta-y)
Theta-Y rotation (delta-ty)

```

ipoin	delta-x	delta-y	delta-ty
1	0.00000000	0.00000000	-0.00000000
2	-0.00004607	-0.00010529	0.00005157
6	-0.00003950	-0.00017111	-0.00005264

2 - Na Figura 1 representa-se um edifício habitacional de três andares situado em Lisboa e num terreno do tipo II.

a) Calcule as forças de massa que actuam ao nível de cada piso.

b) Distribua essas forças pelos pórticos que discretizam a estrutura.

c) Utilizando o método de Rayleigh, determine as forças máximas ao nível de cada andar, no pórtico $P_{x_2}^1$, devidas às acções sísmicas regulamentares (no cálculo dos deslocamentos considere as vigas de rigidez infinita).

Dados:

- módulo de elasticidade longitudinal do betão = 35 GPa;
- coeficiente de amortecimento=5%
- vigas de secção $0.3 \times 0.6 \text{ m}^2$;
- peso próprio das lajes, com 0.25 m de espessura = 3.0 kN/m^2 ;
- peso de revestimentos e paredes de alvenaria = 2.0 kN/m^2 ;

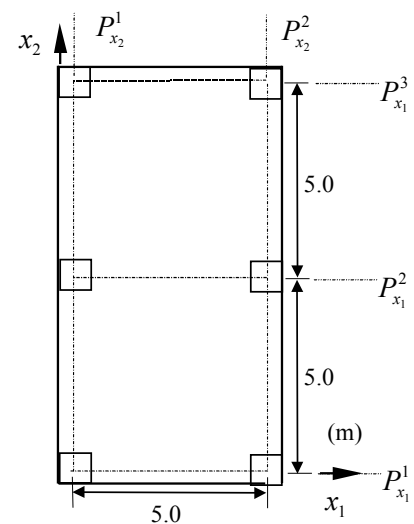


Figura 1a

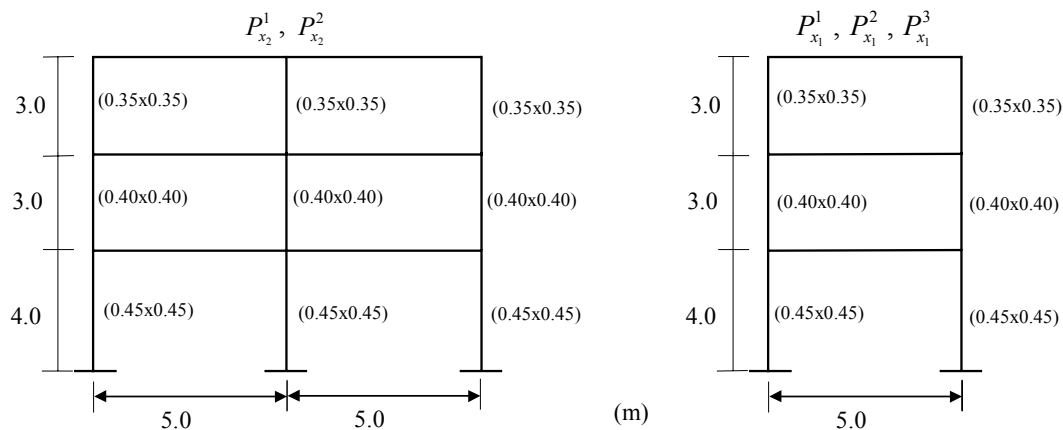


Figura 1b

Quadro 1 – Ficheiro de dados do programa *femixnd* (continua)

```

### Main title of the problem (kN,m)
Exame de Complementos de Estruturas - Setembro de 1998 ;

### Main parameters
5 ; # nelem (n. of elements in the mesh)
10 ; # npoin (n. of points in the mesh)
3 ; # nvfix (n. of points with fixed degrees of freedom)
1 ; # ncase (n. of load cases)
1 ; # nmats (n. of sets of material properties) (only in linear regime)
2 ; # nspen (n. of sets of element nodal properties) (only in linear regime)
10 ; # ntype (problem type)
1 ; # ntyan (type of analysis)
3 ; # nnode (n. of nodes per element)
2 ; # ngaum (n. of Gauss points for axial rigidity)
2 ; # ngaub (n. of Gauss points for bending rigidity)
2 ; # ngaus (n. of Gauss points for shear rigidity)
2 ; # ngstm (n. of Gauss points for axial forces)
2 ; # ngstb (n. of Gauss points for bending moments)
2 ; # ngsts (n. of Gauss points for shear forces)
2 ; # ndime (n. of geometric dimensions)
3 ; # ndofn (n. of degrees of freedom per node)
4 ; # nprop (n. of material properties used in the formulation)
2 ; # npren (n. of element nodal properties used in the formulation)
0 ; # npscs (n. of points with specified coordinate system)
0 ; # nsscs (n. of sets of specified coordinate system)
0 ; # npspr (n. of springs)
0 ; # nsspv (n. of sets of spring vectors)

### Material properties index, element nodal properties index and
### list of the nodes of each element
# ielem      matno      ielnp      lnods ...
1           1           1           1 2 6 ;
2           1           1           1 3 8 ;
3           1           2           4 5 6 ;
4           1           2           6 7 8 ;
5           1           2           8 9 10 ;

### Coordinates of the points
# ipoin      coord-g1      coord-g2
1           7.0           0.0 ;
2           5.5           2.0 ;
3           8.5           2.0 ;
4           0.0           4.0 ;
5           2.0           4.0 ;
6           4.0           4.0 ;
7           7.0           4.0 ;
8           10.0          4.0 ;
9           12.0          4.0 ;
10          14.0          4.0 ;

### Points with fixed degrees of freedom and fixity codes (1-fixed;0-free)
# ivfix      nofix      ifpre
1           1           1 1 0 ;
2           4           0 1 0 ;
3           10          0 1 0 ;

### Sets of material properties
### (Young modulus, Poisson ratio, mass per unit volume and thermic coeff.)
# imats      young      poiss      dense      alpha
1           30e+06      0.00      1.0       1e-5 ;

### Sets of element nodal properties
### (Cross section area, torsional and flexural inertia and
### local coordinate system definition angle in degrees)
# ispen
1 ;
# inode      barea      bin21
1           0.5      0.01042 ;
2           0.5      0.01042 ;
3           0.5      0.01042 ;
# ispen

```

```

2 ;
# inode   barea   bin21
1   0.5   0.04167 ;
2   0.5   0.04167 ;
3   0.5   0.04167 ;

# =====

### Title of the first load case
Accoes ;

### Load parameters
0 ; # nplod (n. of point loads in nodal points)
0 ; # ngrav (gravity load flag: 1=yes;0=no)
3 ; # nedge (n. of edge loads)
0 ; # ntemp (n. of elements with temperature variation)
0 ; # nepoi (n. of element point loads)
0 ; # nprva (n. of prescribed and non zero degrees of freedom)

### Edge load (loaded element, loaded points and load value)
### (local coordinate system)
# iedge   loele
1   3 ;
# lopoe   q_l1   q_l2   q_l3
4   0.0   -50.0   0.0 ;
5   0.0   -50.0   0.0 ;
6   0.0   -50.0   0.0 ;
# iedge   loele
2   4 ;
# lopoe   q_l1   q_l2   q_l3
6   0.0   -50.0   0.0 ;
7   0.0   -50.0   0.0 ;
8   0.0   -50.0   0.0 ;
# iedge   loele
3   5 ;
# lopoe   q_l1   q_l2   q_l3
8   0.0   -50.0   0.0 ;
9   0.0   -50.0   0.0 ;
10  0.0   -50.0   0.0 ;

END OF FILE ;

```

1 – Na Figura 1 representa-se um elemento de viga de Timoshenko de 3 nós. Determine as forças nodais equivalentes à força de 100 kN aplicada ortogonalmente ao eixo da viga, a 0.5 m da sua extremidade esquerda.

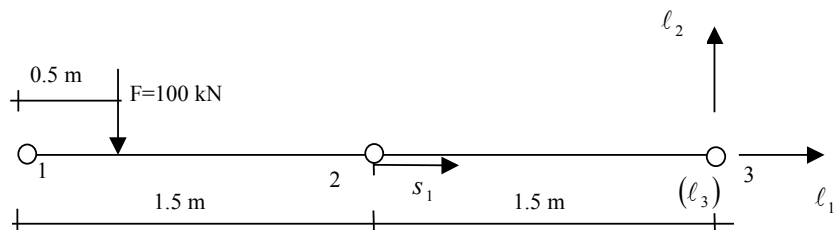


Figura 1

2 – A estrutura representada na Figura 2 está descretizada em 4 elementos de 3 nós de Timoshenko.

- Desprezando a deformabilidade axial das barras e utilizando a integração reduzida, calcule os coeficientes de rigidez relativos ao nó B.
- Calcule as forças nodais equivalentes no nó B.
- Considerando dois pontos de Gauss por elemento, calcule os esforços de flexão e de corte no elemento nº 1, sabendo que os deslocamentos dos nós deste elemento, no referencial global, são os seguintes :

Nó	deslocamento segundo x1	deslocamento segundo x2	rotação segundo x3
1	0.00000000	0.00000000	-0.00084618
2	-0.00000000	-0.00091344	-0.00056319
3	-0.00000000	-0.00127759	0.00003270

- Com base nos esforços do elemento nº 1, determine o momento no nó A. Se os resultados não lhe parecem aceitáveis, explique como procederia para melhorar os resultados obtidos.

Dados: $b=0.3$ m, $h=0.7$ m; $E=30$ GPa, $\nu = 0.0$

Mola: $k_m = 500000$ kN/m

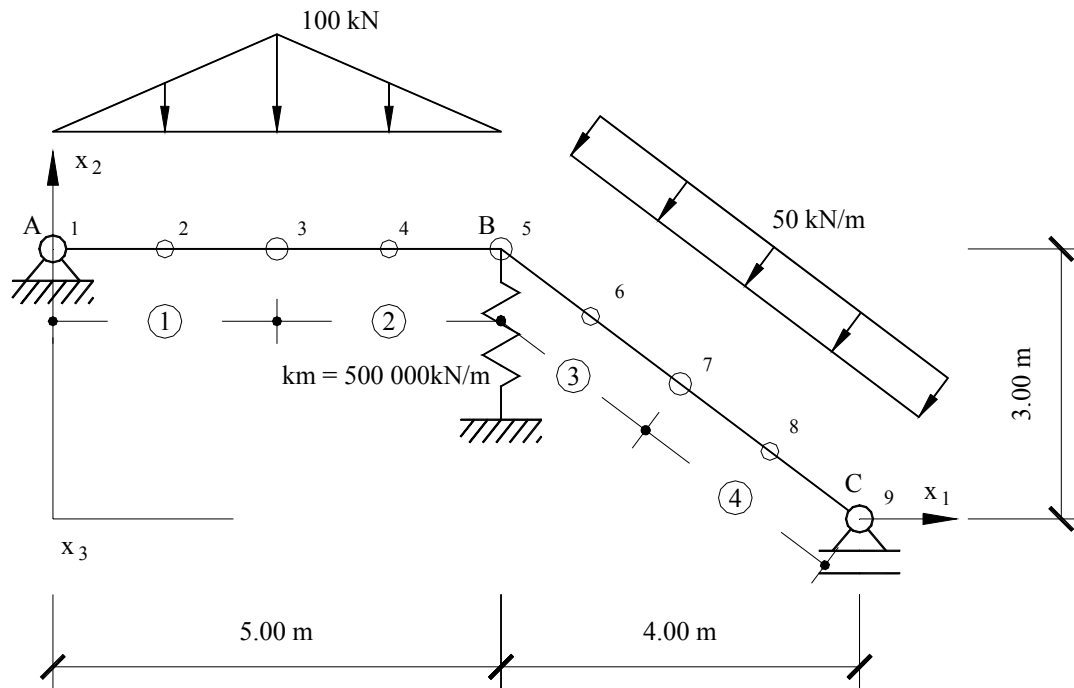


Figura 2

1 – No Quadro 1 apresenta-se um ficheiro de dados do programa de cálculo automático *femixnd*.

- Desenhe a estrutura, as condições de ligação da estrutura ao exterior e as características geométricas das secções das barras.
- Represente as acções que actuam na estrutura.
- Calcule a submatriz de rigidez associada aos graus de liberdade do nó 5.
- Calcule as forças nodais equivalentes correspondentes aos graus de liberdade do nó 5.
- Determine o momento flector e o esforço de corte no ponto de Gauss nº 1 do elemento nº 2, admitindo que os deslocamentos dos nós da estrutura em análise, no referencial global, são os seguintes (obtidos por intermédio do *femixnd*):

Point number (ipoin)
 X displacement (delta-x)
 Y displacement (delta-y)
 Theta-Y rotation (delta-ty)

ipoin	delta-x	delta-y	delta-ty
1	0.00000000	0.00000000	-0.00016467
2	0.00000000	-0.00030491	-0.00084488
3	0.00017332	-0.00028604	-0.00007005
4	-0.00037563	-0.00079193	0.00019140
5	0.00006277	-0.00019359	0.00021382
6	0.00003138	-0.00015256	-0.00003199
7	0.00000000	0.00000000	0.00033052

Quadro 1 – Ficheiro de dados

```

### Main title of the problem
## Linear analysis
Complementos de Estruturas: 1a. chamada de Novembro de 1999 ;

### Main parameters
3 ; # nelem (n. of elements in the mesh)
7 ; # npoin (n. of points in the mesh)
3 ; # nvfix (n. of points with fixed degrees of freedom)
1 ; # ncase (n. of load cases)
2 ; # nmats (n. of sets of material properties) (only in linear regime)
2 ; # nspen (n. of sets of element nodal properties) (only in linear regime)
10 ; # ntype (problem type: 10-2D Timoshenko beam; 11-3D Timoshenko beam)
1 ; # ntyan (type of analysis:1-lin.;2-mat. nlin.;3-dyn. lin.;4-dyn. mat. nlin.)
3 ; # nnode (n. of nodes per element)
2 ; # ngaum (n. of Gauss points for the axial stiffness matrix)
2 ; # ngaub (n. of Gauss points for the bending stiffness matrix)
2 ; # ngaus (n. of Gauss points for shear stiffness matrix)
2 ; # ngstm (n. of Gauss points for the axial forces)
2 ; # ngstb (n. of Gauss points for the bending moments)
2 ; # ngsts (n. of Gauss points for the shear forces)
2 ; # ndime (n. of geometric dimensions)
3 ; # ndofn (n. of degrees of freedom per node)
4 ; # nprop (n. of material properties used in the formulation)
2 ; # npren (n. of element nodal properties used in the formulation)
0 ; # npscs (n. of points with specified coordinate system)
0 ; # nsscs (n. of sets of specified coordinate system)
0 ; # npspr (n. of springs)
0 ; # nsspv (n. of sets of spring vectors)

### Material properties index, element nodal properties index and
### list of the nodes of each element
# ielem matno ielnp lnods ...
1 2 2 1 3 5 ;
2 1 1 2 4 5 ;
3 1 1 5 6 7 ;

### Coordinates of the points
# ipoin coord-g1 coord-g2
1 0.0 0.0 ;
2 0.0 6.0 ;
3 2.0 1.5 ;
4 2.0 4.5 ;
5 4.0 3.0 ;
6 5.5 3.0 ;
7 7.0 3.0 ;

### Points with fixed degrees of freedom and fixity codes (1-fixed;0-free)
# ivfix nofix ifpre
1 1 1 1 0 ;
2 2 1 0 0 ;
3 7 1 1 0 ;

### Sets of material properties
### (Young modulus, Poisson ratio, mass per unit volume and thermic coeff.)
# imats young poiss dense alpha
1 30e+06 0.0 0.0 0.0 ;
2 200e+06 0.0 0.0 0.0 ;

### Sets of element nodal properties
### (Cross section area, torsional and flexural inertias,
### local coordinate system definition angle in degrees and
### position of the shear center at the section)
# ispen
1 ;
# inode barea bin21
1 0.3 2.25e-03 ;
2 0.3 2.25e-03 ;
3 0.3 2.25e-03 ;
# ispen
2 ;
# inode barea bin21
1 0.1 1e-09 ;
2 0.1 1e-09 ;
3 0.1 1e-09 ;

```



```

# =====
### Title of the first load case
Load case title (1) ;

### Load parameters
0 ; # nplod (n. of point loads in nodal points)
0 ; # ngrav (gravity load flag: 1=yes;0=no)
2 ; # nedge (n. of edge loads)
0 ; # ntemp (n. of elements with temperature variation)
0 ; # nepoi (n. of element point loads)
0 ; # nprva (n. of prescribed and non zero degrees of freedom)

### Edge load (loaded element, loaded points and load value)
### (local coordinate system)
# iedge loele
1 2 ;
# lopoe f_l1 f_l2 m_l3
2 0.0 0.0 0.0 ;
4 0.0 -20.0 0.0 ;
5 0.0 -40.0 0.0 ;

# iedge loele
2 3 ;
# lopoe f_l1 f_l2 m_l3
5 0.0 -40.0 0.0 ;
6 0.0 -40.0 0.0 ;
7 0.0 -40.0 0.0 ;
END OF FILE ;

```

2 – A secção da viga DE da estrutura representada na Figura 2 varia parabolicamente ao longo do seu desenvolvimento longitudinal. Para analisar esta estrutura, as barras biarticuladas foram discretizadas por um elemento finito de 3 nós e a viga DE foi discretizada por 10 elementos de 3 nós de Timoshenko de igual comprimento (2 metros cada).

a) Adoptando a integração selectiva no cálculo da matriz de rigidez dos elementos finitos da viga DE, calcule os coeficientes da matriz de rigidez global da estrutura, correspondentes aos graus de liberdade do nó D.

b) Considerando a ordem de integração que julgue adequada (justifique), calcule as forças no nó D, equivalentes à acção do peso próprio da viga.

c) Sabendo que os deslocamentos, no referencial global, dos nós do 1º elemento da viga (ver Figura 2) são os seguintes (unidade de deslocamento em metros e de rotação em radianos):

*** Nodal displacements:
(global coordinate system)

Point number (ipoin)
X displacement (delta-x)
Y displacement (delta-y)
Theta-Y rotation (delta-ty)

ipoin	delta-x	delta-y	delta-ty
7 (1º nó do elemento 1)	0.00036459	-0.00036458	-0.00234074
8 (2º nó do elemento 1)	0.00036459	-0.00268326	-0.00221977
9 (3º nó do elemento 1)	0.00036459	-0.00482145	-0.00199181

calcule os esforços de corte e de flexão, no ponto de Gauss mais próximo da secção D da viga. Comente os resultados obtidos.

d) Se a viga DE estivesse submetida a uma de variação diferencial de temperatura Δt_d , descreva os procedimentos necessários para calcular as forças nodais equivalente a esta acção, num elemento finito de Timoshenko de 3 nós.

Dados:

Barras biarticuladas: $A_s = 100.0 \text{ cm}^2$; $E_s = 200.0 \text{ GPa}$

Viga DE: largura = 0.5 m; $E_c = 30.0 \text{ GPa}$, $\nu_c = 0.0$; $\alpha = 1.0 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$; $\gamma_c = 25.0 \text{ kN/m}^3$

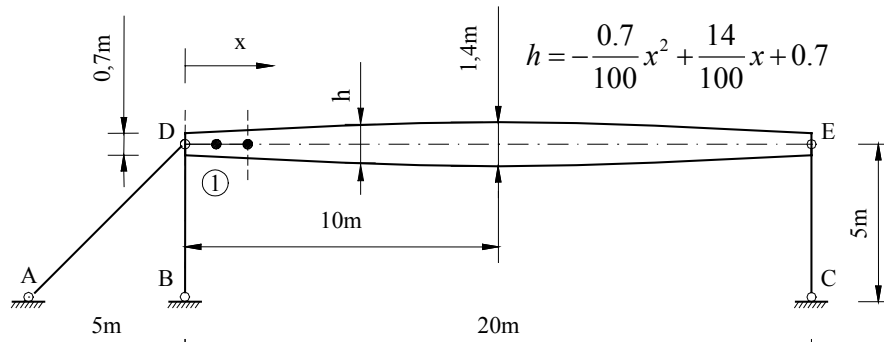


Figura 2

1 - a) Admita que a viga simplesmente apoiada, representada na Figura 1 é discretizada por um único elemento finito de quatro nós de Timosenko.

- Deduza a matriz de rigidez exacta deste elemento, apenas considerando a deformação por flexão e corte;
- Quantos pontos de integração de Gauss-Legendre serão necessários para calcular exactamente as forças nodais equivalentes à acção actuante no elemento. Justifique.
- Admitindo para p o valor de 100 kN/m, determine as forças nodais equivalentes à acção actuante;
- Calcule os deslocamentos dos nós do elemento;
- Utilizando três pontos de Gauss por elemento, determine os esforços de flexão e de corte nesses pontos de Gauss;
- Extrapole os esforços obtidos na alínea anterior para os nós do elemento finito. Comente os resultados obtidos.

Dados:

Secção rectangular com largura de 0.5 m e altura de 0.7 m.

$E_c = 30.0$ GPa, $\nu_c = 0.0$.

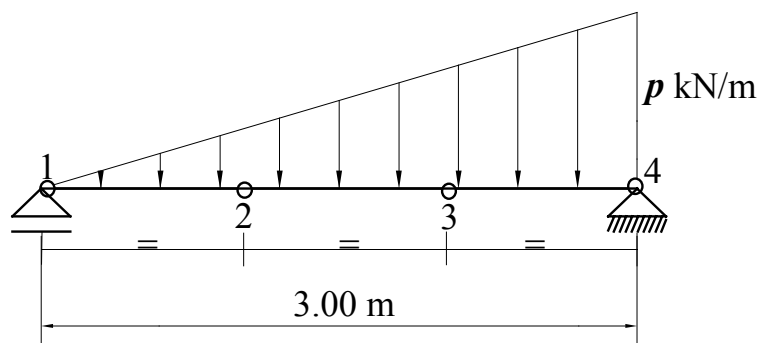


Figura 1