

# MODELO DE ANÁLISE NÃO LINEAR MATERIAL DE PÓRTICOS DE BETÃO ARMADO – CALIBRAÇÃO DAS RELAÇÕES CONSTITUTIVAS



**A. V. GOUVEIA**  
Assistente 1º T  
ESTV-IPV  
Viseu



**J. A. O. BARROS**  
Prof. Auxiliar  
UM  
Guimarães



**A. F. M. AZEVEDO**  
Prof. Auxiliar  
FEUP  
Porto

## SUMÁRIO

No presente trabalho é sumariamente descrito um modelo de análise não linear material destinado à simulação do comportamento de pórticos de betão armado. As barras podem ter secção qualquer, variável ao longo do seu eixo, sendo discretizadas por elementos de Timoshenko 3D. As secções transversais são discretizadas em quadriláteros, dando origem a um modelo de fibras. A influência na resposta de alguns parâmetros das leis constitutivas dos materiais foi avaliada com base na comparação com resultados experimentais.

## 1. INTRODUÇÃO

As estruturas porticadas de betão armado são ainda as mais utilizadas na Indústria da Construção Civil. Diversos programas de cálculo automático de análise linear deste tipo de estruturas têm sido desenvolvidos nos últimos anos e utilizados pelos projectistas no seu dimensionamento. Contudo, o comportamento dos materiais intervenientes é manifestamente não linear. A partir de uma determinada percentagem da sua resistência à compressão, o betão passa a apresentar comportamento não linear e, após a tensão máxima, entra em amolecimento. A fendilhação do betão é também um fenómeno marcante no comportamento não linear deste material. A sua simulação deve ter em conta os parâmetros de fractura do betão [1] e as propriedades das armaduras que atravessam as fendas [2]. Por estes motivos, é fundamental que a simulação numérica do comportamento de estruturas porticadas de betão armado atenda aos fenómenos mencionados.

O presente trabalho descreve a fase de avaliação da influência que alguns parâmetros que caracterizam as relações constitutivas dos materiais intervenientes têm sobre os resultados da simulação numérica. Foi dada especial atenção à relação entre a tensão de corte e a distorção, à lei que governa o comportamento à tracção do betão armado fendilhado e à degradação da aderência entre as armaduras e o betão fendilhado envolvente. A calibração dos parâmetros mencionados foi baseada nos resultados obtidos em ensaios experimentais com elementos de viga submetidos a flexão, corte e torção [3].

## 2. MODELO NUMÉRICO

Os elementos destinados à discretização e simulação de estruturas reticuladas podem ser formulados com base nas teorias de Euler-Bernoulli ou de Timoshenko [4], tendo-se neste trabalho optado pela segunda. A formulação de Timoshenko foi adaptada ao caso 3D, possibilitando, assim, a análise de estruturas reticuladas espaciais entrando em consideração com a deformação devida ao esforço transversal, que está presente em vigas pouco esbeltas. A formulação do elemento de viga de Timoshenko no espaço, bem como os procedimentos a adoptar para a sua implementação num código computacional baseado no *MEF* encontram-se descritos em outros trabalhos [3,5].

A utilização de um modelo de fibras para a simulação do comportamento não linear de estruturas reticuladas de betão armado tem algumas vantagens, já que é tida em conta a pormenorização da estrutura ao nível da secção [6-8]. Segundo este modelo, as secções transversais de cada elemento finito de Timoshenko são decompostas em subdomínios de geometria simples (no presente trabalho foram considerados quadriláteros planos). A cada um destes subdomínios está associada uma fibra longitudinal (ver Figura 1). Em vez de se utilizar uma lei constitutiva global para a secção transversal, geralmente uma relação momento-curvatura, no modelo de fibras desenvolvido são calculadas as tensões nos pontos de amostragem dos elementos quadriláteros que discretizam a secção, tendo em conta as relações constitutivas dos materiais. Os esforços generalizados num determinado ponto de Gauss do elemento finito que discretiza o eixo da viga obtêm-se por integração, na secção, das tensões nos pontos de amostragem dos quadriláteros.

Os elementos de barra podem ser de dois ou três nós, sendo considerados seis graus de liberdade por nó. A armadura longitudinal pode ser discretizada com elementos de dois ou três nós, nos quais apenas se considera a rigidez axial. A posição das armaduras fica definida ao nível da secção transversal e o seu comportamento é governado por uma relação tensão-extensão não linear.

Para simular o comportamento do betão e das armaduras foram utilizadas as leis constitutivas esquematicamente representadas na Figura 3. A modelação do comportamento à compressão uniaxial do betão simples foi efectuada segundo a lei proposta pelo código modelo CEB-FIP 1990 [9]. Após fendilhar, o comportamento uniaxial do betão é simulado por uma relação constituída por dois ramos lineares. Esta relação depende da resistência à tracção,  $f_{ctm}$ , da energia de fractura,  $G_f$ , da banda de fendilhação,  $l_b$ , e de dois parâmetros,  $\alpha$  e  $p_I$  [2]. Se o betão fendilhado estiver sob a influência de armaduras [9], a sua capacidade de reter tensões de

tracção é modelada por uma relação constituída por vários ramos lineares (ver Figura 3g). A formulação que define os pontos característicos desta relação está exposta em outro trabalho [2].

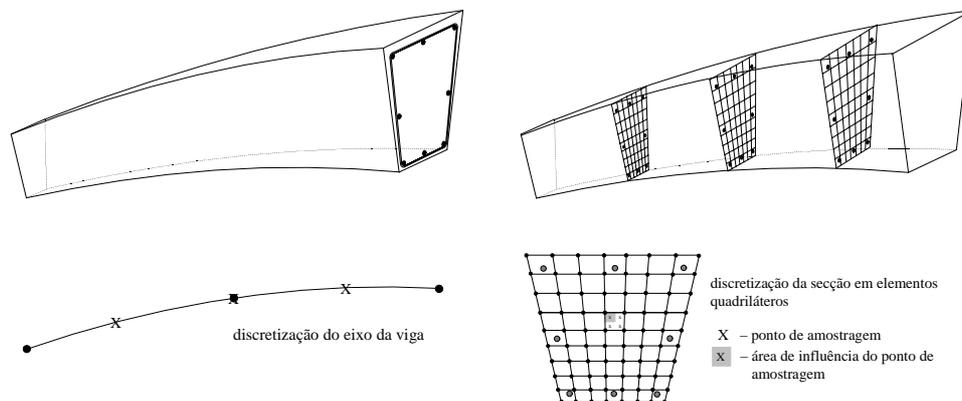


Figura 1 – Discretização de um elemento de betão armado segundo o modelo de fibras desenvolvido.

Para simular o comportamento do betão ao corte é proposta uma lei tensão tangencial-distorção constituída por ramos lineares (semelhante à lei utilizada para a simulação do comportamento da armadura). Os valores que caracterizam o desenvolvimento dos ramos desta lei foram estimados recorrendo à simulação numérica de ensaios experimentais, cuja descrição se apresenta em seguida.

### 3. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

#### 3.1 Introdução

Resultados obtidos em ensaios experimentais [3] foram utilizados para avaliar parâmetros que caracterizam as relações constitutivas dos materiais intervenientes, designadamente: degradação da rigidez de corte; retenção de tensões de tracção do betão armado fendilhado (“*tension-stiffening*”); degradação da aderência entre as armaduras e o betão fendilhado envolvente. As vigas de betão armado ensaiadas foram submetidas a esforços de flexão, corte e torção (ver Figura 2a). O carregamento consistiu na aplicação incremental de uma carga pontual,  $P$ , na extremidade de um perfil em aço de 0.5 m de comprimento, ligado à viga em consola (ver Figura 2a). Desta forma, o carregamento na extremidade livre da viga é constituído pela força vertical  $P$  e pelo momento torsor  $P \times 0.5$  (kN.m).

As vigas a simular foram agrupadas em duas séries,  $V_{110}$  e  $V_{112}$ , que diferem somente na armadura longitudinal ( $\phi 10$  e  $\phi 12$ ). O efeito da armadura transversal não foi tido em conta no modelo numérico desenvolvido, dado que na análise experimental se verificou que, para este tipo de estruturas, a resposta, para a mesma quantidade de armadura longitudinal, foi praticamente independente da quantidade de armadura transversal utilizada [3].

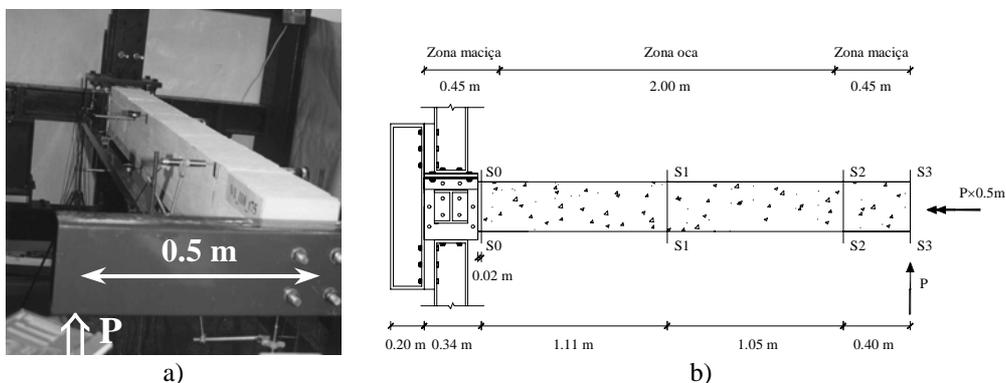


Figura 2 – Esquema de carregamento (a) e secções de monitorização (b) das vigas ensaiadas.

A malha de elementos finitos que discretiza a viga é constituída por elementos de três nós. As zonas em secção maciça e em secção oca foram ambas discretizadas com 3 elementos. O comprimento de cada elemento foi definido de modo a que os respectivos pontos de Gauss coincidissem com as várias secções de leitura *S1*, *S2* e *S3* (ver Figura 2b), de forma que os resultados obtidos com o modelo numérico pudessem ser directamente comparados com os resultados registados experimentalmente.

A malha de elementos finitos que discretiza a secção oca está representada na Figura 3b. A secção maciça foi sujeita a uma discretização semelhante. Os varões longitudinais de aço são definidos pela sua área e pelas coordenadas locais correspondentes à sua localização na secção transversal (ver Figura 3c).

No Quadro 1 e 2 incluem-se os valores dos parâmetros dos materiais utilizados nas simulações numéricas efectuadas.

Quadro 1 – Valores dos parâmetros do betão (ver Figuras 3d e 3f).

Tensão média de rotura à compressão uniaxial $f_{cm}$ [MPa]		Módulo de elasticidade longitudinal tangente $E_{ci}$ [GPa]	Extensão correspondente à tensão máxima de compressão $\epsilon_{c1}$	Tensão de rotura à tracção $f_{ctm}$ [MPa]	Energia de fractura $G_f$ [N/mm]		Parâmetros de fractura	
							$\alpha$	$p_1$
<i>V_110</i>	<i>V_112</i>	<i>V_110 e V_112</i>	<i>V_110 e V_112</i>	<i>V_110 e V_112</i>	<i>V_110</i>	<i>V_112</i>	<i>V_110 e V_112</i>	
20.6	24.2	26.0	0.0022	2.0	0.2221	0.1711	1/3	3.0

Quadro 2 – Valores dos parâmetros das armaduras (ver Figura 3e).

Módulo de Elasticidade do primeiro tramo $E_s$ [GPa]		Tensão de Cedência $f_{sy1}$ [MPa]		Módulo de Elasticidade do segundo tramo $E_{s1}$ [GPa]	Tensão do segundo tramo $f_{sy2}$ [MPa]		Módulo de Elasticidade do terceiro tramo $E_{s2}$ [GPa]	Tensão de Rotura $f_{su}$ [MPa]	
$\phi 10$	$\phi 12$	$\phi 10$	$\phi 12$	$\phi 10$ e $\phi 12$	$\phi 10$	$\phi 12$	$\phi 10$ e $\phi 12$	$\phi 10$	$\phi 12$
200	200	508	493	1	525	510	5	625	599

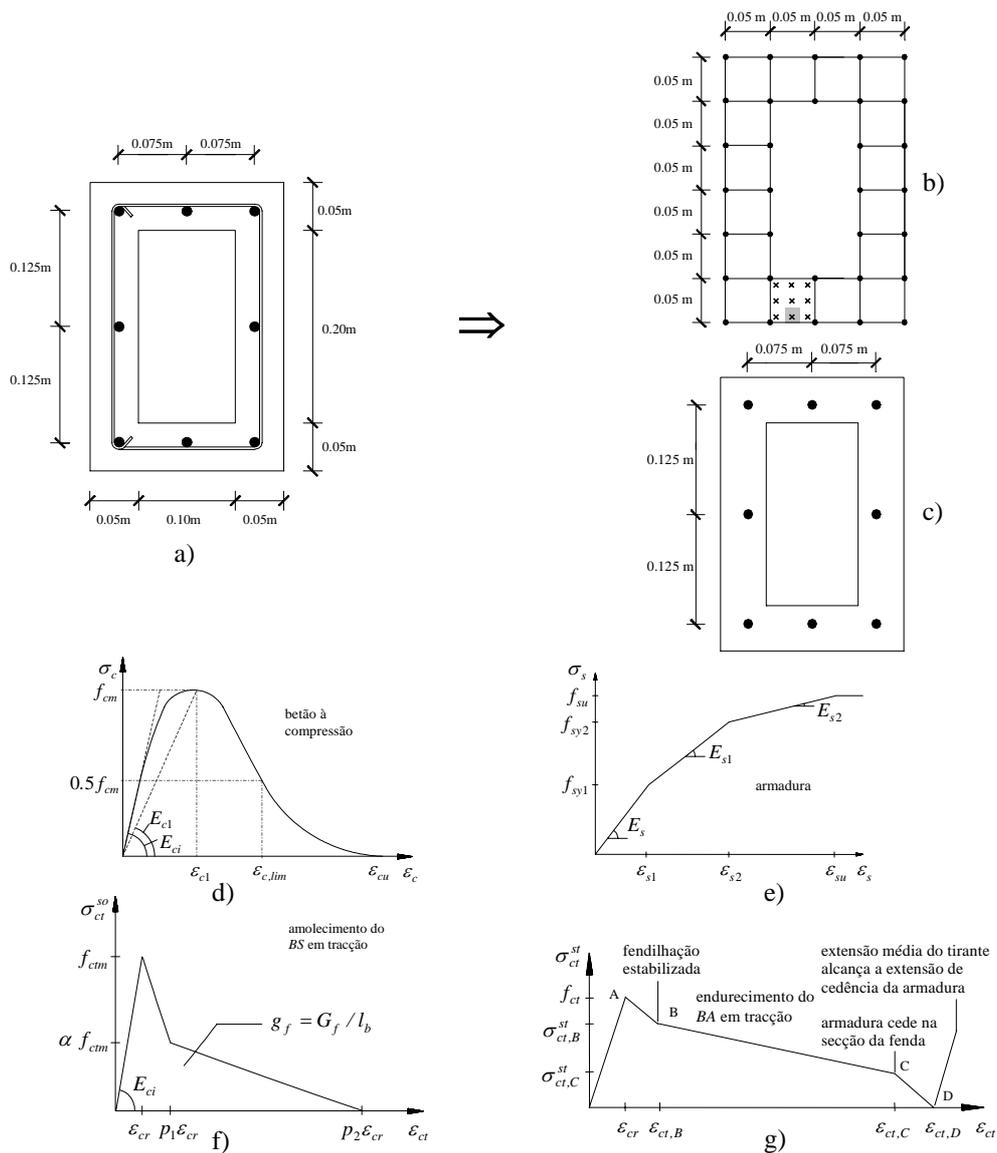


Figura 3 – Leis constitutivas dos materiais e discretização da secção oca.

### 3.2 Simulação base

Na simulação numérica da série *V\_110* foi considerado um diagrama linear para a lei constitutiva relativa ao corte e não se teve em conta o efeito do “*tension-stiffening*” e a degradação da aderência entre as armaduras e o betão fendilhado envolvente. Os resultados da simulação numérica e os obtidos experimentalmente, na secção *S1*, correspondentes às relações força-deslocamento vertical ( $F-\delta$ ), momento flector-rotação por flexão ( $M_f-\theta_f$ ) e momento torsor-rotação por torção ( $M_t-\theta_t$ ) são comparados nas Figuras 4 a 6.

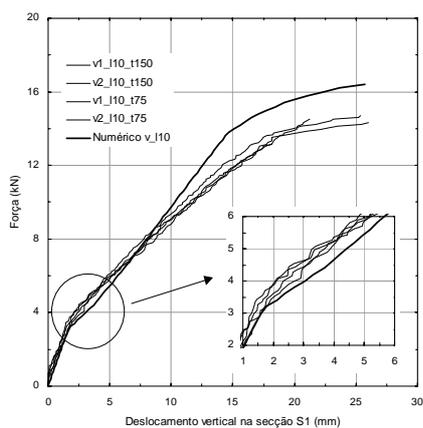


Figura 4 – Diagrama  $F-\delta$  na secção *S1*.

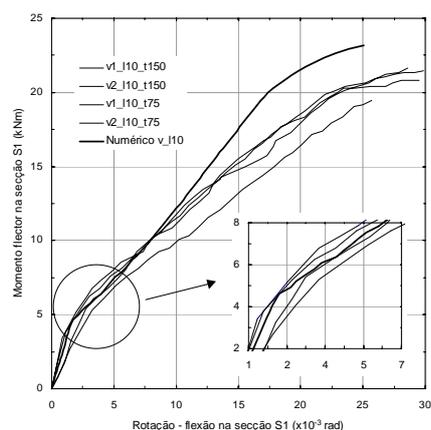


Figura 5 – Diagrama  $M_f-\theta_f$  na secção *S1*.

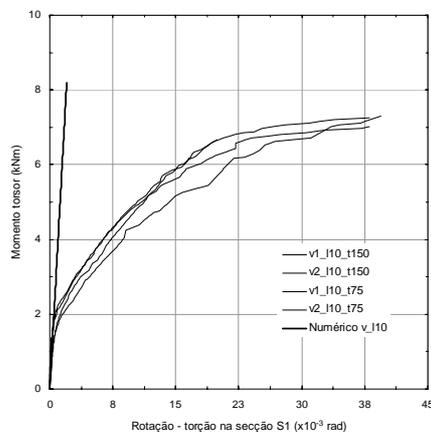


Figura 6 – Diagrama  $M_t-\theta_t$  na secção *S1*.

Da análise das curvas  $F-\delta$  e  $M_f-\theta_f$  pode-se concluir que, depois do início da fendilhação, a curva numérica apresenta uma diminuição acentuada de rigidez que depois é recuperada. Nesta fase a concordância entre a curva numérica e as curvas experimentais já não é tão boa. Na parte final, a curva numérica afasta-se do comportamento registado pelas curvas experimentais, apresentando uma rigidez e uma capacidade de carga mais elevada.

Analisando as curvas  $M_f-\theta_f$  verifica-se que há um afastamento significativo entre as curvas obtidas numericamente e experimentalmente, motivado pelo facto de se ter considerado uma relação linear para simular o comportamento ao corte.

### 3.3 Simulação da degradação da rigidez de corte e do efeito de “*tension stiffening*”

A influência quer da degradação da rigidez de corte com o evoluir da fendilhação do betão, quer da capacidade de retenção de tensões de tracção do betão armado fendilhado, na resposta das vigas da série  $V_{110}$  e  $V_{112}$ , é analisada na simulação numérica a que se dedica a presente secção. Os valores dos parâmetros afectos ao modelo estão incluídos no Quadro 3.

Quadro 3 – Parâmetros relativos à degradação de rigidez de corte e ao “*tension-stiffening*”

Variáveis utilizadas no modelo de “ <i>tension-stiffening</i> ” [2,3]										
$n = \frac{E_s}{E_{ci}}$	$\beta_1$		$\beta_2$		$\rho_{eff,1}$ [%]		$\rho_{eff,2}$ [%]		$\rho_{eff,3}$ [%]	
$V_{110}$ e $V_{112}$	$V_{110}$ e $V_{112}$		$V_{110}$ e $V_{112}$		$V_{110}$	$V_{112}$	$V_{110}$	$V_{112}$	$V_{110}$	$V_{112}$
7.69	1.0		1.0		3.14	4.52	1.57	2.26	0.79	1.13
Módulo de distorção do primeiro tramo $G_L$ [GPa]	Tensão de Corte correspondente ao início de fendilhação $\tau_{cr}$ [MPa]		Módulo de distorção do segundo tramo $G_2$ [GPa]		Tensão de corte do segundo tramo $\tau_2$ [MPa]		Módulo de distorção do terceiro tramo $G_3$ [GPa]		Tensão de rotura por corte $\tau_u$ [MPa]	
$V_{110}$ e $V_{112}$	$V_{110}$	$V_{112}$	$V_{110}$	$V_{112}$	$V_{110}$	$V_{112}$	$V_{110}$	$V_{112}$	$V_{110}$	$V_{112}$
10.83	0.4	0.6	0.8	1.1	1.4	1.6	0.1	0.55	2.0	2.2

As Figuras 7 a 9 apresentam os resultados para a secção de leitura  $S1$  e para as duas séries  $V_{110}$  e  $V_{112}$ .

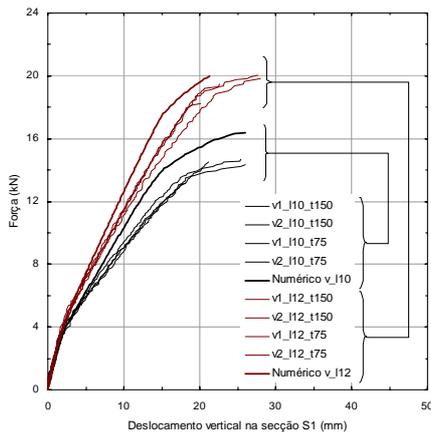


Figura 7 – Diagrama  $F-\delta$  na secção  $S1$  com corte não linear e “*tension-stiffening*”.

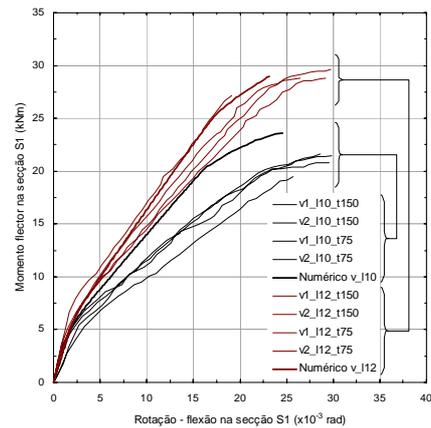


Figura 8 – Diagrama  $M_f-\theta_f$  na secção  $S1$  com corte não linear e “*tension-stiffening*”.

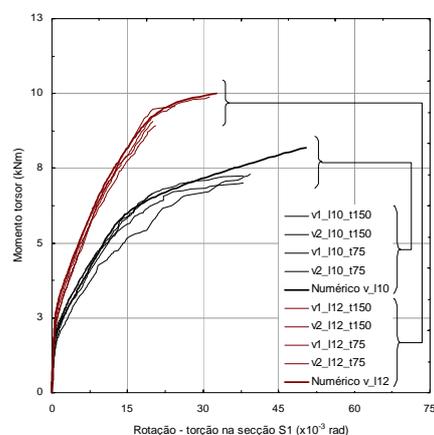


Figura 9 – Diagrama  $M_t - \theta_t$  na secção  $S1$  com corte não linear e “*tension-stiffening*”.

O decréscimo significativo de rigidez após o início da fendilhação já não é visível na simulação que inclui o efeito de “*tension-stiffening*”, como se pode verificar nos gráficos força-deslocamento e momento flector-rotação por flexão (ver Figuras 7 e 8). A resposta numérica continua a ser mais rígida do que as observadas experimentalmente, principalmente na série  $V_{110}$ . Este fenómeno pode ser devido a deslizamentos que tenham ocorrido entre o betão e a armadura, e que causariam um acréscimo de deformação. Da análise das curvas  $M_t - \theta_t$  verifica-se que, com a adopção de uma lei constitutiva não linear para o corte, o comportamento real da viga é simulado com bastante rigor, pelo que se propõe uma relação constituída por dois ramos lineares. O primeiro ramo até ao início da fendilhação, caracterizado pelo módulo de distorção do betão intacto e o segundo até à tensão de rotura por corte, caracterizado por uma rigidez ao corte do betão de 1/10 da rigidez do betão intacto.

### 3.4 Simulação do efeito do escorregamento entre a armadura e o betão envolvente

Se ocorrer deslizamento entre armaduras e o betão envolvente, haverá um acréscimo de deformação no elemento estrutural. O modelo desenvolvido não simula directamente este fenómeno. Na tentativa de o simular alguns autores [7] diminuem o módulo de elasticidade da armadura longitudinal. Como a influência da armadura é significativa no comportamento pós-fendilhação do tipo de elementos de  $BA$  em análise, ao reduzir-se o módulo de elasticidade diminui-se a rigidez da resposta global desses elementos, resultando numa maior deformação. Assim, indirectamente, simula-se o deslizamento entre o betão e as armaduras. Neste trabalho seguiu-se um procedimento similar ao adoptado por Guedes [7], tendo-se diminuído em cerca de 35% o valor do módulo de elasticidade do aço. Os resultados para a secção  $S1$  das duas séries,  $V_{110}$  e  $V_{112}$ , estão apresentados nas Figuras 10 a 12.

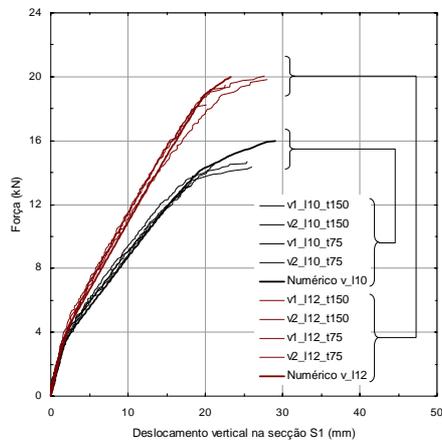


Figura 10 – Diagrama  $F-\delta$  na secção  $S1$  com redução do módulo de elasticidade do aço.

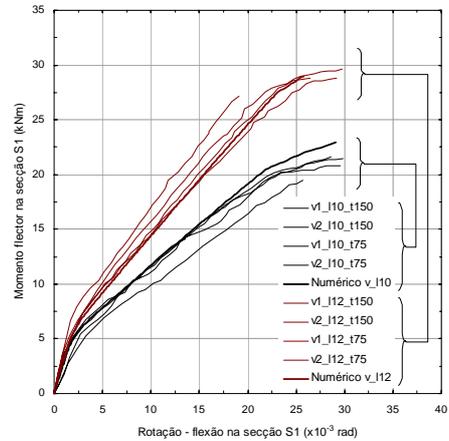


Figura 11 – Diagrama  $M_f-\theta_f$  na secção  $S1$  com redução do módulo de elasticidade do aço.

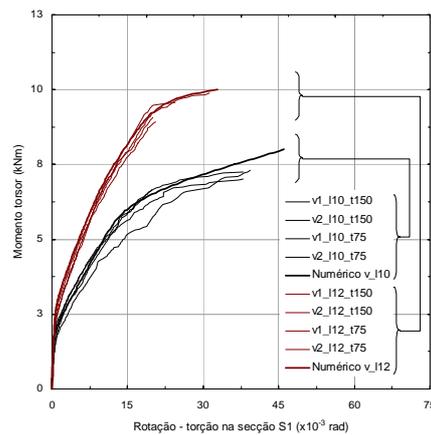


Figura 12 – Diagrama  $M_t-\theta_t$  na secção  $S1$  com redução do módulo de elasticidade do aço.

Analisando as curvas  $F-\delta$ ,  $M_f-\theta_f$  e  $M_t-\theta_t$  verifica-se que a aproximação entre as respostas numéricas e as respostas experimentais é bastante boa.

#### 4. CONCLUSÕES

A influência da simulação da retenção de tensões de tracção do betão armado fendilhado, (“*tension-stiffening*”), da lei de simulação do comportamento ao corte transversal e da simulação indirecta do deslizamento das armaduras em relação ao betão armado fendilhado envolvente é analisada no presente trabalho, com base na comparação entre os resultados

obtidos com um modelo de fibras desenvolvido e os registados em ensaios experimentais com elementos de viga submetidos a corte, flexão e torsão.

O estudo efectuado indica ser importante simular o “*tension-stiffening*” de forma a evitar uma perda excessiva de rigidez após a fendilhação do betão.

Para simular-se adequadamente o comportamento em torsão, constatou-se ser necessário diminuir o módulo de elasticidade transversal do betão intacto em aproximadamente 90% após o início da fendilhação do betão.

Em modelos de fibras em que a ocorrência de deslizamento entre armaduras e betão fendilhado não é simulada directamente, como é o caso do modelo desenvolvido no presente trabalho, a capacidade de carga última e a resposta deformacional podem ser simuladas, com rigor suficiente, por intermédio da diminuição do módulo de elasticidade das armaduras longitudinais. No presente trabalho essa diminuição foi de 35%.

## 5. REFERÊNCIAS

- [1] Bazant, Z.P.; Oh, B.H., “Crack band theory for fracture of concrete”, *Materials and Structures, RILEM*, Vol. 16, Nº 93, 1983, pp. 155-177.
- [2] Barros, J.A.O., “Comportamento do betão reforçado com fibras – análise experimental e simulação numérica”, Tese de doutoramento, FEUP, 1995.
- [3] Ventura Gouveia, A., “Análise Experimental e Simulação Numérica de Elementos de Barra de Pórtico Tridimensional de Betão Armado”, Tese de Mestrado, UM, 2000.
- [4] Oñate, E., “Cálculo de estructuras por el metodo de elementos finitos. Análisis estático lineal”, *Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*, 2ª edición., Setembro, 1995.
- [5] Barros, J.A.O., “Apontamentos da disciplina de Complementos de Estruturas”, Departamento de Eng<sup>a</sup> Civil, Escola de Eng<sup>a</sup> da UM, 1999.
- [6] Guedes, J.P.S.C.M.; Pegon, P.; Pinto, A. V., “A Fibre/Timoshenko beam element in CASTEM 2000”, *Joint Research Centre, special publication n. 1.94.31*, July, 1994.
- [7] Guedes, J.P.S.C.M., “Seismic behavior of reinforced concrete bridges – Modelling, numerical analysis and experimental assessment”, Tese de doutoramento, FEUP, 1997.
- [8] Taucer, F.; Spacone, E.; Filippou, F. C., “A fiber beam-column element for seismic response analysis of reinforced concrete structures”, *Report n. UCB/EERC-91/17*, College of Engineering, University of California at Berkeley, December, 1991.
- [9] CEB-FIP Model Code 1990, “Design Code”, *Comité Euro-International du Beton*, Thomas Telford, 1990.