

Mercado de Energia Eléctrica: uma modelação MPCC-NLP

Helena Sofia Rodrigues*, M. Teresa T. Monteiro** e A. Ismael F. Vaz**

*Escola Superior de Ciências Empresariais
Instituto Politécnico de Viana do Castelo
Av. Miguel Dantas – Valença

Telf: +351 251 800 840; fax: +351 251 800 840; e-mail:sofiarodrigues@esce.ipvc.pt

**Departamento de Produção e Sistemas
Universidade do Minho
Campus de Gualtar – Braga

Telf: +351 253 604 740; fax:+351 253 604 741; e-mail: {tm,aivaz}@dps.uminho.pt

Resumo – O problema apresentado está relacionado com o mercado de energia eléctrica, modelado como um jogo de Stackelberg, onde a empresa líder de mercado tem o poder de manipular os preços e a capacidade de produção, de forma a maximizar o seu lucro. Devido às suas características particulares, o problema foi formulado como um Problema de Optimização com Restrições de Complementaridade (MPCC) e, posteriormente reestruturado num Problema de Programação Não Linear (NLP), com o intuito de tirar partido das suas propriedades, utilizando software específico.

1. Introdução

O mercado de energia eléctrica está numa fase de transição. Até agora, o negócio era controlado pelo poder central, tendo as empresas apenas de se preocupar com a minimização dos custos, uma vez que os preços eram tabelados.

Hoje, a produção de electricidade tornou-se uma actividade mais liberal: o planeamento de expansão e a calendarização de operacionalidade já não dependem de procedimentos centrais e administrativos, mas sim de decisões das companhias produtoras, cujo objectivo máximo é aumentar o lucro.

Na Europa, o cenário no sector eléctrico tem vindo a sofrer alterações, nos últimos anos, na medida em que se têm proporcionado fusões e aquisições de empresas, resultando num elevado grau de concentração de mercado por parte de um pequeno número de companhias. Além disso, as directivas da União Europeia para a liberalização do mercado energético, fizeram com que as ligações físicas e institucionais entre mercados de diferentes países se expandissem [1]. Tudo isto levou a que a comunidade científica tentasse encontrar modelos para ensaiar uma previsão da reacção dos mercados a estes novos modelos.

O problema que vai ser apresentado é de média dimensão, está relacionado com o mercado oligopolista de energia eléctrica e é modelado como um jogo de Stackelberg [2]. Nesta teoria de jogo, existe uma situação de não competitividade, onde um jogador distinto – denominado líder – toma como *input* a sua percepção do mercado e antecipa as (re)acções dos restantes jogadores, usando essa informação para seleccionar a sua estratégia óptima. Os outros jogadores – designados por seguidores – não têm a

percepção de como as suas decisões afectam as decisões do líder; entre os seguidores, cada um observa as acções dos restantes e, em seguida, reage optimamente, assumindo que as estratégias dos outros jogadores permanecem inalteradas.

A teoria de jogo de Stackelberg motivou muitos autores para o estudo dos problemas de optimização de dois níveis, pois existem grandes similaridades entre ambos. Contudo estes problemas são de difícil resolução. No entanto se o problema de optimização de dois níveis (também conhecido como optimização binível) for convexo no problema de segundo nível (ou nível inferior) [3], este pode ser substituído pelas respectivas condições de optimalidade. O problema de dois níveis passa então a ser um problema equivalente a um nível, isto é, um Problema de Optimização com Restrições de Complementaridade (MPCC, do inglês, *Mathematical Problem with Complementarity Constraints*).

Na Secção 2 é apresentada a formulação matemática de um problema MPCC assim como as suas características específicas. São apresentadas as razões pelas quais o MPCC é considerado um problema de difícil resolução, bem como as estratégias recentemente propostas para ultrapassar essas dificuldades, nomeadamente a reformulação do problema MPCC num Problema de Optimização Não Linear (NLP, do inglês, *Nonlinear Problem*). Na Secção 3 é descrito o problema do mercado da energia eléctrica, onde são apresentadas as notações utilizadas, a formulação matemática e os dados do problema. Na última secção, são apresentados os *solvers* (softwares para resolver problemas) utilizados para a resolução do problema e analisados os resultados obtidos. São ainda tecidas algumas considerações finais.

2. Abordagem MPCC-NLP

Os Problemas de Optimização com Restrições de Complementaridade têm sido alvo de grande interesse, pois na sua formulação está subjacente a noção de equilíbrio – conceito presente em inúmeras situações da realidade. Na engenharia, existe um leque variado de aplicações, nomeadamente problemas de lubrificação elastohidrodinâmica, de mecânica de contacto, de

obstáculo, em problemas na indústria de processos químicos, problemas de tráfego de redes, entre outros [4]-[8].

A forma geral do problema MPCC é

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & c_i(x) = 0, \quad i \in E \\ & c_i(x) \geq 0, \quad i \in I \\ & 0 \leq x_1 \perp x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

onde $x = (x_0, x_1, x_2)$, em que $x_0 \in \mathcal{R}^n$ são as variáveis de controlo e $x_1, x_2 \in \mathcal{R}^p$ são as variáveis de estado; f é a função objectivo e $c_i, i \in E \cup I$ são as funções das restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente. Os conjuntos E e I são conjuntos finitos de índices. As restrições que envolvem a complementaridade são definidas com o operador \perp e exigem que o produto de duas quantidades não negativas seja zero, *i.e.*, $x_{1i}x_{2i} = 0, i \in \{1, \dots, p\}$. Assume-se que tanto f como $c_i, i \in E \cup I$ são funções continuamente diferenciáveis até à segunda ordem.

O problema MPCC é não suave devido às restrições de complementaridade, tornando as suas condições de optimalidade complexas e de difícil verificação. Além disso, o conjunto admissível de um MPCC é mal condicionado, uma vez que as qualificações das restrições mais conhecidas e utilizadas para provar a convergência dos algoritmos – designadamente as qualificações das restrições de Mangasarian Fromovitz e de Independência Linear – não são satisfeitas em nenhum ponto que satisfaça as restrições de complementaridade [9].

A violação destas qualificações das restrições levou a que a comunidade científica tentasse criar algoritmos específicos para este tipo de problemas. De entre os algoritmos propostos, destacam-se três abordagens: penalidade, com o código PIPA [10] onde o objectivo é substituir a restrição de complementaridade pelo produto de Hadamard e traçar o caminho interior do problema agora parametrizado; suavização da condição de complementaridade reformulada por uma condição semi-suave, sendo esta de seguida suavizada por um parâmetro positivo [11]; e por último, a relaxação, onde a restrição de complementaridade é relaxada por desigualdades envolvendo um parâmetro de relaxação [12]. Contudo, neste momento, os *solvers* disponíveis ainda estão longe de resolverem problemas de grande dimensão. Requerem um acréscimo significativo de esforço computacional quando comparados com os *solvers* não lineares disponíveis no mercado.

A abordagem considerada para resolver o problema MPCC considerado é a sugerida por Leyffer [13], que consiste no uso da formulação não linear equivalente. Esta abordagem permite tratar o problema MPCC como um problema NLP, tirando partida da existência de algoritmos eficientes e robustos na obtenção da solução. A formulação como NLP permite também colocar um desafio ao próprio algoritmo NLP usado, permitindo testar a sua eficiência e robustez, e

avaliar a sua capacidade de lidar com as irregularidades inerentes aos problemas MPCC.

Formulação NLP do problema MPCC

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & c_i(x) = 0, \quad i \in E \\ & c_i(x) \geq 0, \quad i \in I \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_1^T x_2 \leq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Todas as entidades usadas em (2) foram definidas em (1). Note-se que a restrição de complementaridade foi substituída por uma desigualdade não linear, relaxando desta forma o problema.

O problema reformulado designado por MPCC-NLP (2) tem as mesmas propriedades que o problema MPCC, o que significa que a violação da qualificação das restrições Mangasarian Fromovitz é ainda verificada. Todavia, estudos recentes mostraram que a estacionaridade forte de um problema NLP é equivalente às condições de optimalidade KKT num problema MPCC-NLP [14]-[15]. Este resultado permite pensar na abordagem MPCC-NLP como um bom caminho a seguir, pois em termos computacionais, é mais fácil encontrar um ponto estacionário num *solver* não linear do que encontrar um ponto estacionário num *solver* específico para resolver MPCC.

3. Problema do mercado de energia eléctrica

A. Formulação do problema

Na essência, o problema da empresa líder é um problema de optimização de dois níveis. No primeiro nível - o nível do líder - o parâmetro da curva de proposta corresponde à variável de primeiro nível. No segundo nível - o nível dos seguidores - há a simulação das conjecturas de mercado promovidas por um Operador de Sistema Independente, onde as quantidades de energia gerada e consumida e a transmissão entre nós são as variáveis de segundo nível. O modelo tenta determinar as propostas óptimas de cada empresa.

De seguida é apresentada a notação para a formulação do problema.

Índices:

- i nó da rede
- ij arco de i para j
- m ciclo independente da rede

Conjuntos:

- N conjunto dos nós
- A conjunto dos arcos
- S_f conjunto dos nós produtores sob o controlo da firma dominante f
- P conjunto dos nós produtores
- D conjunto dos nós de procura
- L conjunto dos ciclos independentes orientados

Na prática, os conjuntos P e D não são necessariamente disjuntos e a sua união pode ser um subconjunto próprio de N . Nos modelos linearizados DC [16]-[17], as leis de Kirchhoff das tensões e das correntes asseguram a unicidade do fluxo na rede em cada arco na solução do problema. Além disso, o número de ciclos independentes necessários é $\#A - \#N + 1$.

Parâmetros:

- a_i, b_i ordenada na origem e declive da curva de oferta (custo marginal) para o produtor no nó $i \in P$
- c_i, d_i ordenada na origem e declive da função procura para o consumidor no nó $i \in D$
- $\bar{\alpha}_i$ limite superior para a proposta do nó produtor $i \in S_f$
- \bar{Q}_{S_i} limite superior da capacidade de produção para o nó produtor $i \in P$
- \bar{T}_{ij} capacidade máxima de transmissão no arco $ij \in A$
- r_{ij} reactância no arco $ij \in A$
- s_{ijm} ± 1 correspondendo à orientação do arco $ij \in A$ no ciclo $m \in L$
(+1 se ij tem a mesma orientação que o ciclo m)

Variável de primeiro nível:

- α_i proposta de preço do nó produtor $i \in P$

Neste modelo, é assumido que as empresas produtoras apenas podem manipular α , e não b , devido a restrições de mercado e condicionalismos de optimização.

Considera-se ainda α_i fixo para os nós das empresas seguidoras (*i.e.*, α_i , $i \in P \setminus S_f$) e variável para os nós da empresa líder (*i.e.*, α_i , $i \in S_f$).

Variáveis primais de segundo nível:

- Q_{S_i} quantidade de energia gerada no nó i
($Q_{S_i} = a_i + b_i Q_{S_i}$, se $i \in P$ e $Q_{S_i} = 0$ se $i \notin P$)
- Q_{D_i} quantidade de energia consumida no nó i
($Q_{D_i} = c_i + d_i Q_{D_i}$, se $i \in D$ e $Q_{D_i} = 0$ se $i \notin D$)
- T_{ij} MW transmitidos de i para j

Variáveis duais de segundo nível:

- λ_i custo marginal no nó i
- μ_i valor marginal da capacidade de produção da fábrica no nó i
- θ_{ij} valor marginal da capacidade de transmissão no arco ij
- γ_m preço sombra devido à lei de voltagem de Kirchhoff para o ciclo m

Consideremos ainda Δ a matriz de incidência (nó, arco) da rede eléctrica:

$$\Delta = \begin{cases} 1, & \text{se } l = ij \in A \text{ para algum } j \in N \\ -1, & \text{se } l = ji \in A \text{ para algum } j \in N \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases} \quad (3)$$

Seja R a matriz relativa aos coeficientes das reactâncias, precedidos do sinal de orientação do arco em relação ao ciclo (arco, ciclo):

$$R = \begin{cases} s_{ijm}, & \text{se } ij \in L_m \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4)$$

A notação $\text{diag}(w)$ representa a matriz diagonal cujas entradas na diagonal principal são as componentes do vector w .

A sua formulação original como problema de optimização de dois níveis pode ser encontrada em [18].

Tal como foi já referido anteriormente, o problema de nível inferior é convexo. Assim, prova-se que, para cada vector α , existe uma única solução óptima global $(Q_D(\alpha), Q_S(\alpha), T(\alpha))$ para o problema de nível inferior [19]. A substituição do problema de nível inferior pelas suas condições de optimalidade KKT permite reformular o problema de dois níveis no seguinte problema a um nível com restrições de complementaridade (MPCC).

$$\begin{aligned} \max \quad & \pi_f(\lambda, Q_S) \equiv \sum_{i \in D} (c_i Q_{D_i} - d_i Q_{D_i}^2) - \sum_{i \in S_f} \left(a_i Q_{S_i} - \frac{b_i}{2} Q_{S_i}^2 \right) \\ & - \sum_{ij \in A} (\theta_{ij} \bar{T}_{ij}) - \sum_{i \in P \setminus S_f} (\mu_i \bar{Q}_{S_i} + a_i Q_{S_i} - b_i Q_{S_i}^2) \\ \text{s.a} \quad & 0 \leq \alpha_i \leq \bar{\alpha}_i, \quad \forall i \in S_f \\ & 0 \leq \bar{Q}_S - Q_S \quad \perp \quad \mu \geq 0 \\ & 0 \leq Q_S \quad \perp \quad -\lambda + \mu + \alpha + \text{diag}(b)Q_S \geq 0 \\ & 0 \leq Q_D \quad \perp \quad \lambda - c + \alpha + \text{diag}(d)Q_D \geq 0 \\ & 0 \leq \theta \quad \perp \quad \bar{T} - T \geq 0 \\ & 0 \leq T \quad \perp \quad \Delta^T \lambda + \theta + R\gamma \geq 0 \\ & \lambda \text{ livre} \quad Q_D - Q_S + \Delta T = 0 \\ & \gamma \text{ livre} \quad R^T T = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

onde π_f representa a função lucro da empresa líder.

B. Dados do problema

Os dados do problema, relativos à produção, procura e transmissão de energia foram baseados em [20]. A rede eléctrica considerada inclui um circuito de 30 nós, 41 arcos, 12 ciclos, 6 nós de produção e 21 nós de procura. Dos nós de produção propostos assume-se que a empresa A – firma dominante – possui três geradores e, os restantes três pertencem à empresa B. Na Figura 1 está representada toda esta informação.

Também são fornecidas, nesse artigo, as funções de custo de produção, reactâncias, limites superiores das quantidades de procura e da capacidade de transmissão dos arcos. Note-se que os limites de transmissão considerados para este modelo são 60% dos valores propostos em [20], como sugerido pelos próprios autores, devido a questões de segurança do próprio sistema de electricidade.

Para resolver o problema da firma dominante A, assume-se que as propostas da outra empresa são iguais aos custos marginais para todos os seus geradores, isto é, $\alpha = a$. A curva da procura em cada um dos nós consumidores é determinada por $P_i = 40 - d_i Q_{D_i}$, onde d_i é escolhido de

tal forma que $P_i = \$30/MWh$ quando Q_{D_i} iguala o valor assumido em [20].

O código do problema em AMPL [21] está disponível para a comunidade científica, numa biblioteca da especialidade, MacMPEC [22], com o título *monteiro.mod*.

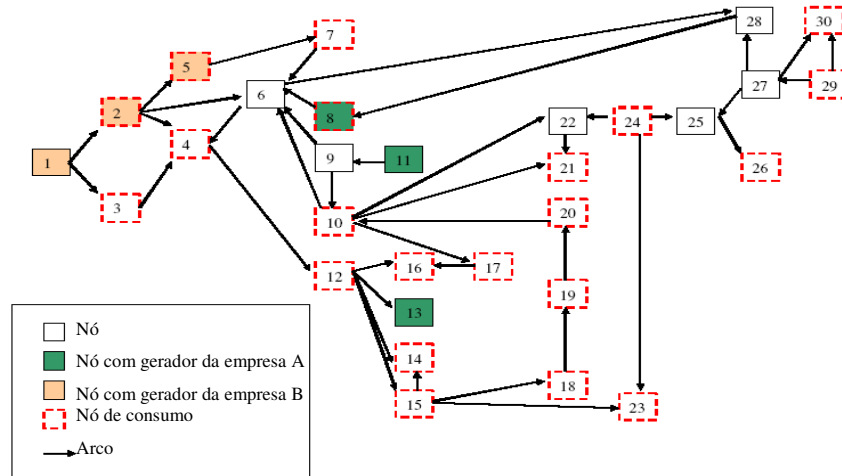


Fig. 1. Esquema da rede de energia eléctrica

4. Resultados e conclusões

Para a resolução do problema do mercado de energia eléctrica, recorreu-se à plataforma NEOS [23] (*Network-Enabled Optimization System*) disponível na Internet. A plataforma NEOS fornece um serviço de optimização que utiliza a Internet como seu distribuidor, possuindo um vasto conjunto de *solvers* de optimização, considerados como o estado da arte na optimização.

Foram seleccionados três *solvers* relativos à optimização não linear com restrições. Na Tabela 1 apresentam-se as características principais de cada um.

TABELA 1
PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DOS SOLVERS

Solver	Características principais
Lancelot [24]	Método de região de confiança adaptado; Técnica da Lagrangeana aumentada; Especialmente eficaz em problemas de grande dimensão.
Loqo [25]	Método primal-dual de pontos interiores; Procura unidimensional para promover convergência global; Hessiana Exacta.
Snopt [26]	Método SQP de procura unidimensional; Função mérito Lagrangeana aumentada; Hessiana quasi-exacta.

Apresentam-se, de seguida, os resultados relativamente ao problema do mercado de energia eléctrica. A Tabela 2 mostra os valores obtidos para a função objectivo e a variável proposta de preço.

TABELA 2

RESULTADOS DA FUNÇÃO OBJECTIVO E DA PROPOSTA DE PREÇO		
Solver	Função lucro (π_f)	Proposta de preço (α_f)
Lancelot	37.53	(35.83, 40, 29.80)
Loqo	37.53	(35.83, 36.09, 20)
Snopt	37.53	(35.83, 39.99, 0)

Curiosamente, apesar de ter sido alcançado um valor idêntico para todos os *solvers* em relação à função lucro, o mesmo não aconteceu relativamente à proposta de preço, induzindo a existência de vários pontos maximizantes locais.

Os valores obtidos para os nós de procura e de oferta também são bastante similares para os diversos *solvers*, tal como é exposto nas Tabelas 3 e 4.

Existem determinados nós consumidores que praticamente não recebem energia eléctrica. Isto poderá explicar-se pelo facto de não ser viável economicamente o transporte de energia para esses locais e também pela existência de grandes nós consumidores próximos dos geradores que absorvem toda a energia produzida.

No seguimento deste problema, e como trabalho futuro, seria interessante investigar, como funcionaria este mesmo mercado, caso este problema tivesse sido codificado como um jogo de Nash, ou seja, tentar encontrar um equilíbrio, onde as duas empresas competissem ao mesmo nível.

A prossecução da pesquisa de novas propriedades e renovados *solvers* para a resolução de problemas MPCC é de grande interesse, pois esta área da optimização tem-se apresentado como uma importante resposta para problemas reais, não só da engenharia como também na economia e na ecologia.

TABELA 3
RESULTADOS DOS NÓS DE PROCURA (Q_D)

Nó	2	3	4	5	7	8	10	12	14	15	16
Lancelot	44.98	2.55	6.87	41.04	0	10.01	0	0	0	0	0
Loqo	44.98	2.55	6.87	41.04	-1.4e-14	10.01	-1.3e-14	-1.4e-14	1.4e-14	-5.7e-15	-4.3e-15
Snopt	44.98	2.55	6.87	41.04	0	10.01	8.1e-28	1.09	-2.9e-13	5.1e-13	0

Nó	17	18	19	20	21	23	24	26	29	30
Lancelot	1.32e-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Loqo	-1.4e-14	-4.5e-15	-4.6e-15	-4.7e-15	0	-6.42	0	0	0	0
Snopt	0	-2.3e-26	2.9e-13	-5.9e-26	0	2.9e-13	0	0	0	0

TABELA 4
RESULTADOS DOS NÓS DE OFERTA (Q_S)

Nó	1	2	5	8	11	13
Lancelot	44.30	10.09	41.04	10.01	1.29e-5	0
Loqo	44.31	10.09	41.04	10.01	1.60e-14	0
Snopt	44.31	10.09	41.04	10.01	-2.16e-13	0

Referências

- [1] EC-2002, "Second benchmarking report on the implementation of the internal electricity and gas markets", Technical Report 2, Commission Staff Working paper SEC, Outubro 2002.
- [2] Z.-Q. Luo, J.-S. Pang, e D. Ralph, *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [3] L.N. Vicente e P.H. Calamai, "Bilevel and multilevel programming: a bibliography review", *Journal of Global Optimization*, Vol. 5, pp.291-306, 1994.
- [4] M.C. Ferris e F. Tin-Loi, "On the solution of a minimum weight elastoplastic problem involving displacement and complementarity constraints", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 74, pp.107-120, 1999.
- [5] M.C. Ferris e F. Tin-Loi, "Limit analysis of frictional block assemblies as a mathematical program with complementarity constraints", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 43, pp.209-224, 2001.
- [6] B. F. Hobbs e F. A. M. Rijkers, "Strategic generation with conjectured transmission price responses in a mixed transmission pricing system", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 19, No.2, pp. 707-879, Maio 2004.
- [7] A. U. Raghunathan e L. T. Biegler, "Mathematical programs with equilibrium constraints (MPECs) in process engineering", Technical report, CMU Chemical Engineering, Novembro 2002.
- [8] J. F. Rodrigues, *Obstacle Problems in Mathematics Physics*. Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1987.
- [9] R. Fletcher e S. Leyffer, "Solving mathematical programs with complementarity constraints as nonlinear programs", *Optimization Methods and Software*, Vol. 19, No. 1, pp.15- 40, February 2004.
- [10] Z.-Q. Luo, J.-S- Pang e D. Ralph, *Mathematical Programs with equilibrium constraints*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [11] F. Facchinei, H. Jiang e L. Qi, "A smoothing method for mathematical programs with equilibrium constraints", Technical Report AMR 96/15, Applied Mathematics Report, university of New South Wales, 1996.
- [12] X. Liu e J. Sun, "Generalized stationarity points and an interior-point method for mathematical programs with equilibrium constraints", *Mathematical Programming*, Vol. 101, pp. 231-261, 2004.
- [13] S. Leyffer, "Complementarity constraints as nonlinear equations: Theory and numerical experience", Technical Report Preprint ANL / MCS-P1054-0603, Mathematics and Computer Science Division, Argonne National Laboratory, June 2003.
- [14] H. Scheel e S. Scholtes, "Mathematical programs with complementarity constraints: Stationarity, optimality and sensitivity", *Mathematics of Operations Research*, Vol. 25, pp.1-22, 2000.
- [15] S. Scholtes, "Convergence properties of a regularization scheme for mathematical programs with complementarity constraints", *SIAM Journal Optimization*, Vol. 11, No.4, pp. 918-936, 2001.
- [16] F.C. Schweppe, M.C. Caramanis, R. E. Tabors, e R. E. Bohn, *Spot Pricing of Electricity*. Kluwer, Norwell, 1998.

- [17] C.D. Wood e B.F. Wollenberg, *Power Generation, Operational and Control*, J. Wiley, New York, 2nd edition, 1995.
- [18] H.S. Rodrigues, *Problema de Optimização com Restrições de Complementaridade: uma aplicação ao mercado de energia eléctrica*, Tese de Mestrado. Universidade do Minho, 2005.
- [119] V. Krishna e V.C. Ramesh, "Intelligent agents in negotiations in market games, part 2: Application", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 13, No. 3, pp. 1109-1114, Agosto 1998.
- [20] O. Alsac and B. Scott, *Optimal load flow with steady-state security*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 3, No.3, pp. 745-751, 1973.
- [21] R. Fourer, D. M. Gay e B. W. Kernighan, *AMPL: A Modelling Language for Mathematical Programming*, Duxburg Press, Massachusetts, 1993.
- [22] S. Leyffer. MacMPEC, webpage: www.mcs.nl.gov/leyffer/MacMPEC, 2000.
- [23] NEOS, webpage: www-neos.mcs.ang.gov/neos, 2005.
- [24] R.H. Byrd, J. Nocedal e R.A. Waltz, "Knitro: an integrated package for nonlinear optimization" in *Large-Scale Nonlinear Optimization*, G. di Pillo e M. Roma, editors, 35-59, 2006.
- [25] R. J. Vanderbei, *LOQO user's manual, version 4.05*. Technical Report ORFE-99, October Operations Research and Financial Engineering, Princeton University.
- [26] P. E. Gill, W. Murray e M. A. Saunders, *SNOPT: an SQP algorithm for large-scale constrained optimization*, Report SOL 97-3, Systems Optimization Laboratory, Stanford University, 1997.