UMinho | 2023

Liliana Rodrigues Coelho **As representações de funções na promoção do raciocínio matemático de alunos do 10.° ano de escolaridade**

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Liliana Rodrigues Coelho

As representações de funções na promoção do raciocínio matemático de alunos do 10.° ano de escolaridade

abril de 2023

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Liliana Rodrigues Coelho

As representações de funções na promoção do raciocínio matemático de alunos do 10.° ano de escolaridade

Relatório de estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.°Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho efetuado sob a orientação do
Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

abril de 2023

AGRADECIMENTOS

É inevitável começar estes agradecimentos pelo Professor Doutor Floriano Viseu pela sua imprescindível ajuda para que este relatório se realizasse, pela disponibilidade e apoio que sempre demonstrou. O encaminhamento e os comentários pertinentes e diretos permitiram dissipar dúvidas que foram surgindo e, desta forma, terminar esta etapa da minha vida.

Agradeço também à Professora Maria Isabel Teixeira Leite por todo o apoio dado ao longo do estágio, pela forma como me acolheu e me integrou na sua vida profissional, tendo um papel essencial para que tenha concluído este relatório.

Um agradecimento à Professora Micaela Martins, por toda a sua disponibilidade e ajuda prestada ao longo da realização deste percurso.

Agradeço à escola a oportunidade de estagiar nesta instituição, permitindo-me participar em todas as suas atividades letivas e não letivas. Um agradecimento aos alunos do 10.° ano, em especial à minha turma que sempre me respeitaram e mostraram abertura e empenho em sala de aula contribuindo assim para o estudo que realizei.

Agradeço aos meus colegas de curso que muito me apoiaram nestes dois anos tão intensos.

Agradeço à minha família e amigos que fazem de mim o que sou hoje e que sempre me apoiaram em todos os momentos da minha vida.

Termino estes agradecimentos com as pessoas mais importantes da minha vida, mãe, pai, irmã, e aqueles amigos mais próximos, que estão comigo em todos os dias da minha vida, nos momentos mais difíceis e nos momentos mais felizes e que sem o apoio deles nada seria possível.

A todos, muito obrigada

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducentes à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

AS REPRESENTAÇÕES DE FUNÇÕES NA PROMOÇÃO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO DE ALUNOS DO 10.° ANO DE ESCOLARIDADE.

RESUMO

Recentemente tem-se assistido a reformulações dos programas escolares de Matemática. Independentemente dos pressupostos que estão na origem dessas reformulações, constata-se a perseverança da finalidade do ensino de Matemática em, a par de outras, desenvolver a capacidade de raciocínio dos alunos. Esta capacidade é comumente referida como uma das finalidades formativas da matemática escolar. No desenvolvimento desta capacidade espera-se que os alunos expressem os seus processos de pensamento através de representações matemáticas. A estreita ligação que há entre tal capacidade e as formas de a exprimir aos outros traduz o objetivo deste trabalho em compreender o contributo das representações de funções na promoção do raciocínio matemático de alunos do 10.° ano de escolaridade. De modo a concretizar este objetivo pretende-se responder às seguintes questões de investigação: Que processos de raciocínio são expressos por alunos do 10.° ano na clarificação de representações de funções? Que dificuldades manifestam os alunos na aprendizagem de funções? Qual o papel da articulação entre as representações e os raciocínios na resolução dessas dificuldades? Que perceções têm os alunos sobre a exploração das representações de funções na promoção dos raciocínios matemáticos? Para responder a estas questões, obteve-se informação através dos seguintes métodos de recolha de dados: observação; gravação áudio e vídeo; produções escritas dos alunos; e questionários.

Os resultados evidenciam que os processos mais usados pelos alunos na resolução das tarefas foram a justificação, recorrendo essencialmente à representação algébrica e à linguagem verbal, e a generalização, especialmente através da linguagem numérica quando não foram capazes de usar a representação algébrica.

As maiores dificuldades dos alunos incidiram na interpretação do enunciado das tarefas, na transição do concreto para o abstrato e na conexão entre diferentes representações. Estas dificuldades foram mais evidentes na generalização e na transformação da representação algébrica de uma função noutras representações. Neste contexto, a construção de esboços representativos das situações apresentadas nas tarefas foi uma estratégia que contribuiu para que os alunos fossem capazes de ultrapassar as suas dificuldades, ao desempenhar a dupla função de compreensão do enunciado e de complementaridade das informações dadas.

Em relação à perceção dos alunos, a exploração das diferentes representações constituiu um aspeto essencial na sua aprendizagem, auxiliando a resolução das tarefas e facilitando a comunicação de ideias. Porém, a globalidade dos alunos reconhece que interpretar e transformar as diferentes representações é um obstáculo à resolução das tarefas.

Este estudo mostra que as conexões entre diferentes representações são um ponto de partida para a promoção do raciocínio matemático dos alunos, onde o tipo de funções estudadas e o ambiente de aprendizagem de carácter exploratório facilitaram a compreensão dos conceitos estudados.

Palavras-chave: Processos de raciocínio matemático; Representações; Funções; Dificuldades dos alunos.

THE REPRESENTATIONS OF FUNCTIONS IN THE ENCOURAGEMENT OF 10TH GRADE STUDENTS' MATHEMATICAL REASONING

ABSTRACT

Recently, there have been reformulations of Mathematics school programs. Regardless of the assumptions that are at the origin of these reformulations, the perseverance of the purpose of teaching Mathematics can be seen in, along with others, developing students' reasoning ability. This ability commonly refers to as one of the formative purposes of school Mathematics. In developing this capacity, students may express their thought processes through mathematical representations. The close connection between such skill and the ways of expressing it to others translates the aim of this work to understand the contribution of functions' representations in promoting mathematical reasoning. In order to achieve this objective, it is intended to answer the following research questions: (1) What reasoning processes are expressed by 10th graders in clarifying function representations? What is the contribution of the articulation between representations and reasoning in function learning? (2) What difficulties do students have in function learning? What is the role of the articulation between representations and reasoning in solving these difficulties? (3) What perceptions do students have about exploring function representations for mathematical reasoning promotion? To answer these questions, information was obtained through the following data collection methods: observation; audio and video recording; students 'written productions; and questionnaires. The results display that the processes most used by students in solving tasks are justification, resorting essentially to algebraic representation and verbal language, and generalization, especially through numerical language, when they were not able to use algebraic representation. The students 'greatest difficulties were related to (i) the interpretation of the utterance, (ii) the transition from the concrete to the abstract, and (iii) the connection between different representations. These difficulties were more evident in the generalization and transformation of the function's algebraic representation in other representations. In this context, the structure of representative sketches of the situations presented in the tasks was an important strategy, helping the students overcome their difficulties by performing the dual function of understanding the statement and complementing the information given. Regarding the students' perceptions, different representations' exploration was an essential aspect of their learning, helping the resolution of tasks and facilitating the communication of ideas. However, all students recognized that interpreting and transforming different representations can be an obstacle to solving tasks.This study conveys that connections' promotion between different representations is a startin point for students' mathematical reasoning upgrade, being the type of functions studied and the exploratory learning environment to facilitate the function concept understanding.

Keywords: mathematical reasoning processes; representations; functions; student difficulties.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE QUADROS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Este estudo foi desenvolvido numa turma do 10.° ano do Curso de Ciências e Tecnologias na disciplina de Matemática e tem como objetivo caracterizar os raciocínios matemáticos de alunos do 10.° ano de escolaridade a partir da exploração das representações de funções. Neste capítulo, clarifica-se a problemática em estudo, com uma descrição do seu objetivo e das respetivas questões de investigação que orientaram a prática pedagógica, a pertinência da temática escolhida e uma breve descrição da estrutura deste relatório.

1.1. Tema e objetivo

Este estudo incide sobre duas temáticas fundamentais da Matemática, as representações e o raciocínio matemático inseridos no processo de ensino e de aprendizagem das funções de alunos do 10.° ano de escolaridade. Estas duas temáticas assumem particular importância, pois a capacidade de relacionar diferentes modos de representar uma função é uma capacidade fundamental na Matemática.

No estudo de tópicos de uma dada função podem admitir-se várias representações, desde a linguagem natural, uma expressão algébrica, uma tabela ou um gráfico. Importa que os alunos trabalhem com as diferentes representações com o intuito de promover uma melhor compreensão dos tópicos em estudo (Ponte et al., 2009). Relacionado com a exploração e a conexão entre as diferentes representações, emerge a promoção da capacidade de raciocínio, visto que, muitas vezes, só é possível raciocinar sobre objetos abstratos, ou seja, fazer inferências fundamentadas recorrendo às representações. Para uma melhor compreensão acerca da forma como as diferentes representações promovem o raciocínio, bem como para uma mais clara identificação das dificuldades usualmente manifestadas pelos alunos, é necessário diversificar a tipologia de tarefas que desencadeiam as atividades de aprendizagem na aula de Matemática de modo a que o aluno intervenha não só na formulação de questões ou conjeturas, como também na apresentação de resultados e na argumentação das suas respostas.

Tendo em consideração tais pressupostos, este trabalho tem como objetivo compreender o contributo das representações de funções na promoção do raciocínio matemático de alunos do 10.° ano de escolaridade. Na concretização deste objetivo, pretende-se responder às seguintes questões de investigação:

Q1: Que processos de raciocínio são expressos por alunos do 10.° ano na exploração de representações de funções?

Q2: Que dificuldades manifestam os alunos na aprendizagem de funções? Qual o papel da articulação entre as representações e os raciocínios na clarificação dessas dificuldades?

Q3: Que perceções têm os alunos sobre a exploração das representações de funções na promoção dos raciocínios matemáticos?

1.2. Pertinência do estudo

A escolha do tema "As representações de funções na promoção do raciocínio matemático de alunos do 10.° ano de escolaridade" deveu-se à incontornável dimensão operativa que o raciocínio desempenha na construção e compreensão do conhecimento matemático, assim como a influência que as representações têm quer na promoção do raciocínio, quer na organização das ideias Matemáticas e na forma de as comunicar.

Em Portugal, o raciocínio matemático surge como capacidade transversal nas Metas Curriculares (Ministério da Educação, 2013), considerando-se que "o raciocínio matemático é por excelência hipotético-dedutivo" (Ministério da Educação, 2013, p. 5). No entanto, ao dar-se prioridade a este tipo de raciocínio, tende-se a negligenciar os "processos intuitivos, observações indutivas, explicações, justificações e métodos informais de matematização, é caminhar em sentido contrário ao que fez progredir a Matemática, eliminando bases poderosas para a aprendizagem" (Boavida, 2015, p. 1). O desenvolvimento do raciocínio matemático não é um processo isento de dificuldades, cabendo ao professor proporcionar contextos favoráveis ao seu desenvolvimento. Assim, é legitimo questionarmo-nos como poderemos, enquanto professores, avaliar e simultaneamente promover o desenvolvimento da capacidade de raciocínio dos alunos. Estes dois fatores motivaram e desafiaram o desenvolvimento deste trabalho.

Sendo o tema das funções um dos temas que apresenta mais dificuldades pelos alunos, de acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), constituiu por si só uma motivação. O tema das funções permite estabelecer ligações entre a Matemática e a realidade, tratando de um vasto leque de situações práticas. Revela a utilidade da Matemática e, assim, contribui para o despertar do gosto e de uma atitude mais positiva relativamente à Matemática nos alunos (NCTM, 2007). Afonso (2008) e Ponte (2005) consideram que o estudo de funções contribui para o desenvolvimento da capacidade algébrica dos alunos.

Atualmente, nos meios de comunicação, existe uma grande quantidade de informação sobre diversos fenómenos que geralmente é apresentada por meio de tabelas, gráficos e expressões algébricas (Abrantes et al., 1999), sendo de extrema importância que os alunos adquiram formação que lhes permita fazer uma leitura adequada e uma interpretação crítica de toda essa informação. A comunicação assenta em representações convencionais e a manipulação dessas representações (verbais, numéricas, gráficas e algébricas) constitui um fator determinante para a aprendizagem. Para o NCTM (2000), as representações não devem ser vistas como finalidades em si próprias, mas sim como elementos essenciais na compreensão e na resolução de problemas. De acordo com Tripathi (2008), a importância da utilização de múltiplas representações revela-se por permitir a análise de um conceito através de várias perspetivas, elevando a sua compreensão por parte dos alunos ao interligarem o conceito imagem e o conceito de definição. Ballard (2000) defende que trabalhar com várias representações permite estabelecer relações e desenvolver uma maior compreensão dos conceitos, permitindo aos alunos múltiplas formas de comunicar as ideias matemáticas e o raciocínio na resolução de problemas.

A capacidade de mudar de representação é também um dos fatores determinantes para o sucesso na resolução de tarefas, pois permite escolher a representação mais apropriada de acordo com os objetivos ou contextos (Dick & Edwards, 2008). Por sua vez, relacionar as representações gráficas com as expressões algébricas permite uma melhor compreensão da temática das Funções (Chazan & Yerushalmy, 2003), o que vem reforçar a ideia de Triphathy (2008) quando afirma que limitar a uma representação Matemática é abordar o conceito de olhos vendados. Duval (2004) defende ainda que "não é possível estudar os fenómenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação" (p. 25). Os estudos desenvolvidos por Ainsworth (2006) e Arcavi (2003) revelam que os alunos são capazes de relacionar e aplicar adequadamente os diferentes modos de representar um conceito matemático, escolhendo os mais adequados para cada situação. No entanto, na perspetiva de Kaput (1999) e de Elia et al. (2007), a dificuldade patenteada pelos alunos na aprendizagem das funções reside na complexidade dos procedimentos com símbolos algébricos e na falta de ligação destes com as suas representações, sendo mais notórias entre as representações gráficas e as algébricas (Kaldrimidou & Ikonomou, 1998). Ponte (datada de 1984) considera que estas dificuldades são comuns nos alunos do ensino secundário.

Eisner (1997) realça a influência das representações no pensamento dos alunos e considera que os produtos obtidos se devem não apenas às aquisições mentais individuais, mas também às diversas representações disponíveis na cultura onde os sujeitos estão inseridos, ou seja, as representações internas que se formam na mente do individuo e as externas que existem nos mais variados suportes

(Goldin, 2008). A utilização de representações desempenha um papel essencial para o estabelecimento de relações Matemáticas, para a explicitação de raciocínios e para a identificação de conexões (NCTM, 2007). Temos, pois, de estar cientes de que a compreensão dos conceitos não se reduz apenas ao conhecimento da sua designação. É imperioso compreender plenamente a sua definição e entender o modo como estes domínios se relacionam e de que forma é que promovem os diferentes raciocínios. Para Mata-Pereira e Ponte (2012), "o raciocínio matemático (...) apoia-se nas representações e articula-se com os processos de representação e significação (sense making)" (p. 84). Assim, procurei, neste estudo, perceber de que forma é que as representações promovem os diferentes raciocínios e de que forma é que as representações sustentam esse mesmo raciocínio. Não obstante, este tema é na sua essência um verdadeiro desafio para os professores, na conceção e preparação da aula, nomeadamente na construção das tarefas e respetiva condução da aula, de acordo com a intenção pedagógica de forma a promover o desenvolvimento do raciocínio dos alunos.

1.3. Estrutura do relatório

Este trabalho está organizado em quatro capítulos. O primeiro capítulo, Introdução, apresenta a problemática deste trabalho, assim como o objetivo e as questões de investigação que o orientaram. O segundo capítulo debruça-se sobre o 'Enquadramento Contextual' onde se realizou a componente empírica deste estudo, e sobre o 'Enquadramento Teórico' que sustenta este estudo. Este enquadramento resulta de leituras, de pesquisas de referência e de reflexões sobre as temáticas do raciocínio e da importância das representações. O terceiro capítulo apresenta a descrição e a interpretação dos dados que procuram ilustrar momentos da 'Intervenção Pedagógica' e a avaliação por parte dos alunos do ensino ministrado. O último capítulo, Conclusões, tem por finalidade responder às questões de investigação delineadas, assim como salientar limitações da sua concretização, e apresentar recomendações para futuros estudos.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO

Este capítulo tem como intuito descrever o contexto onde foi realizada a intervenção pedagógica, apresentando a Escola e a Turma. De seguida, apresenta-se o enquadramento teórico que sustenta esta intervenção, clarificando as metodologias de ensino e de aprendizagem adotadas como também os métodos de recolha de dados.

2.1. Enquadramento Contextual

Este subcapítulo debruça-se sobre a caracterização da escola e da turma onde realizei o meu estágio pedagógico.

2.1.1. Caracterização da Escola

No meu estágio pedagógico desenvolvi as minhas atividades letivas numa escola do 3. ° Ciclo e Secundária do distrito de Braga. Trata-se de uma escola pensada numa lógica de espaço que 'ensina e aprende', com a finalidade de promover e difundir conhecimento e competências. Na sua organização escolar, a escola integrava no ano letivo 2020/21 quarenta e oito turmas, que abrangiam vários níveis de ensino, especificamente, 7. °, 8. ° e 9. ° anos do ensino básico, 10. °, 11. ° e 12. ° anos do Ensino Secundário e Cursos Profissionais do Ensino Secundário (Tabela 1).

Tabela 1: Distribuição do número de turma/aluno por níveis de escolaridade 2020/2021.

Ciclo escolar	Ano de escolaridade	Frequência de turmas	Número de alunos
3.° Ciclo	7.° ano	1	8
	8.° ano	2	28
	9.° ano	3	47
Secundário	10.° ano- Cientifico-Humanístico	10	217
	10.° ano – Cursos Profissionais	4	74
	11.° ano- Cientifico-Humanístico	10	249
	11.° ano – Cursos Profissionais	5	105
	12.° ano- Cientifico-Humanístico	9	195
	12.° ano – Cursos Profissionais	4	82

De entre a elevada oferta da escola no que concerne a projetos e a clubes, destacam-se os Clubes de Xadrez, de Programação e Robótica, de jogos matemáticos e do Origami, ligados à Matemática. Os seus objetivos incidem, sobretudo, na promoção e incentivo à autoavaliação; na criação de uma cultura de autoavaliação; no incentivo à reflexão no seio da comunidade educativa; na promoção do conhecimento e compreensão das dinâmicas desenvolvidas na escola; na aferição dos pontos fortes e fracos da escola; na elaboração dos instrumentos necessários à autoavaliação da escola; no apuramento dos instrumentos elaborados e na análise dos dados recolhidos; na comunicação a toda a comunidade educativa dos resultados alcançados; e, finalmente, no incentivo à reflexão e à partilha com o intuito de criar uma cultura de autoavaliação da escola, considerada fundamental para o desenvolvimento da qualidade dos seus serviços.

Preconizando na sua missão as diferentes valências curriculares que emanam das diferentes áreas de conhecimento que estruturam o currículo escolar, a escola tem como lema do projeto educativo "Uma escola faz-se com todos", cujos princípios, de natureza inclusiva, estão alicerçados em dinâmicas de colaboração, participação e de partilha.

2.1.2. Caracterização da Turma

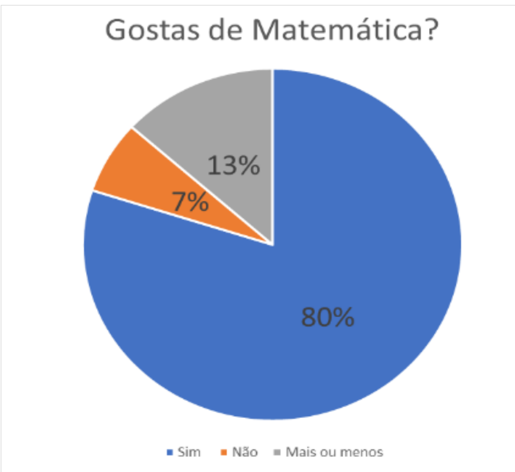
A concretização da minha prática pedagógica incidiu numa turma do 10. º ano de escolaridade do Ensino Secundário, constituída por 17 alunos, sendo 13 do sexo feminino (72%) e 5 do sexo masculino (28%), cujas idades ($\bar{x} = 16$ anos) estão compreendidas entre os 15 e os 18 anos (Tabela 2).

Tabela 2. Distribuição dos alunos por género e idade

Idades	Rapazes	Raparigas	Total
15	3	4	7
16	2	5	7
17	0	1	1
18	0	1	1

Apesar da amplitude das suas idades, todos os alunos se encontravam pela primeira vez no Ensino Secundário. Na transição de ciclos de estudos, os alunos inscreveram-se no curso de Ciências e Tecnologias, que contempla a disciplina de Matemática no seu currículo, da qual a maioria dos alunos da turma expressa gostar (Figura 1).

Figura 1. Percentagem de alunos que gosta de Matemática



A relação que a maior parte dos alunos revela ter com a disciplina de Matemática reflete-se no aproveitamento escolar que tiveram no ano transato: 11 dos alunos obtiveram nível igual ou superior a 4 valores (74%) (Tabela 3).

Tabela 3. Distribuição (%) da classificação dos alunos no ano transato

Nível	Rapazes	Raparigas	Total (%)
3	2 (40%)	2 (20%)	4 (27%)
4	2 (40%)	2 (20%)	4 (27%)
5	1 (20%)	6 (60%)	7 (47%)

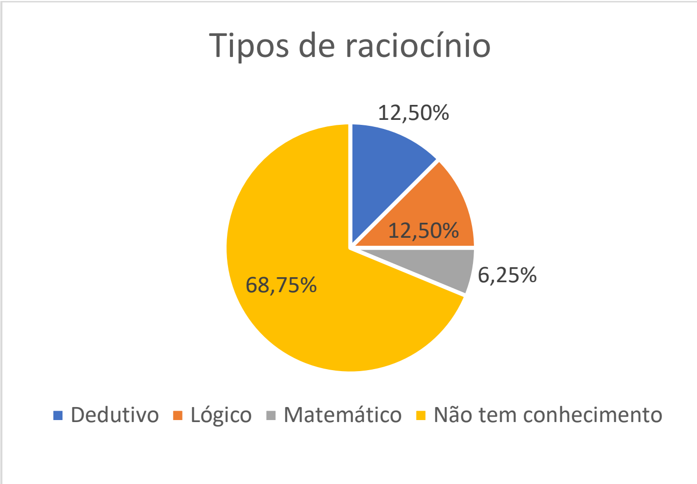
Constata-se que a maior parte dos alunos obteve níveis superiores a 4, o que indicia o gosto e a apetência para o estudo de Matemática. Relativamente aos hábitos de estudo, a um nível geral, 50% dos alunos gostam de estudar sozinhos, ao passo que 75% referem gostar de estudar Matemática. No quadro 1 é apresentado o significado de representação de tópicos matemáticos e a noção de raciocínio matemático assimilado pelos alunos.

Quadro 1. Perspetivas (frequência) sobre representação de tópicos matemáticos e raciocínio matemático.

Representações	**Raciocínio**
Representar aquilo que pensamos (3)	Forma de pensamento, segue-se um raciocínio lógico (1)
Uma demonstração de algo visual (5)	Raciocínio é a rapidez e a eficiência do cérebro humano (1)
Mostrar a maneira como vemos as coisas (3)	Forma de pensar para chegar ao resultado final (9)
Mostrar no papel o que estamos a pensar (1)	É a maneira de chegar à verdade (1)

Segundo as respostas deste universo de alunos, as representações de tópicos matemáticos descrevem visualmente o conceito em estudo, o qual serve para transmitir os seus pensamentos. Já no que se refere ao raciocínio, concebem-no na sua maioria como uma forma de pensamento que permite chegar ao resultado pretendido, "o raciocínio traduz a rapidez e a eficiência do cérebro humano". Embora nas suas afirmações apontem características que contemplam a noção de raciocínio, ~~já~~ em relação aos tipos de raciocínio a maioria dos alunos revela desconhecê-los (68,75%), enquanto alguns alunos fazem referência ao raciocínio dedutivo e lógico (Figura 2).

Figura 2. Identificação de tipos de raciocínio (%)



Para os alunos, as representações e o raciocínio são temáticas que estão interligadas em duas vertentes: uma enquanto auxiliadora do raciocínio e outra enquanto transmissora do pensamento (Quadro 2).

Quadro 2. Perspetivas (frequência) sobre a interligação entre as representação e raciocínio matemático

Auxiliar do raciocínio	**Transmitir o pensamento**
"Acho que sim, quando represento algo, facilita o meu raciocínio" (2)	"Sim, porque é preciso pensar para representar" (1)
"Sim, as representações tornam o raciocínio mais fácil, ou seja, as imagens tornam a interpretação mais fácil, o que facilita o raciocínio" (3)	"Acho que sim. Representações são uma forma de mostrar o nosso raciocínio" (2)
"As representações ajudam a raciocinar para chegar ao resultado final" (2)	"Sim, porque nós podemos mostrar o nosso raciocínio através de uma representação, ou seja, de uma forma visual" (2)

No que se refere à interligação como auxiliar do raciocínio, os alunos entendem-no como facilitador da interpretação do enunciado, "as representações tornam o raciocínio mais fácil (...) as imagens tornam a interpretação mais fácil".

2.2. Enquadramento Teórico

Neste subcapítulo procura-se sustentar teoricamente os temas que emergem do objetivo e das questões de investigação deste estudo, tais como: As funções nos programas escolares da Matemática; dificuldades na aprendizagem das funções; representações; e raciocínio.

2.2.1. As funções nos programas escolares de Matemática

As funções são um domínio que tem expressão significativa no currículo, transversal a todos os níveis de ensino, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento abstrato dos alunos e da capacidade de resolução de problemas do quotidiano. Em termos formais, o conceito de função é introduzido no 3. ° Ciclo, no 7. ° ano de escolaridade. Ponte et al. (2009) defendem que a aprendizagem do conceito de função é preparada ao longo dos 1.° e 2.° Ciclos do ensino básico, através do estudo de algumas noções que estão na base da compreensão do conceito de função, tais como, correspondência, variável, dependência entre variáveis, e do estudo de algumas das formas de representar uma função. Estes autores referem que o domínio de funções é transversal a todos os níveis de ensino começando a ser estudado no 1.° e 2.° ciclos através dos conteúdos 'Regularidades' e 'Sequências e Regularidades', inseridos nos temas 'Números e Operações' e 'Álgebra'. Os alunos exploram situações que envolvem relações funcionais, nomeadamente na resolução de problemas relativos a situações de proporcionalidade direta, no tema da Álgebra.

No 3.° Ciclo, a abordagem ao conceito de função é feita a partir da definição formal e é proposta a sua familiarização através da manipulação formal e algébrica. Na definição de função no 7.° ano de escolaridade, são incluídas as noções de domínio e contradomínio, pares ordenados, gráfico de uma função, variável dependente e independente e de equação de um gráfico cartesiano (Ministério da Educação, 2018). No que concerne ao 8.° ano de escolaridade, o estudo de funções incide sobre gráficos de funções afins, onde se encontram incluídos os seguintes conteúdos: equação da reta não vertical e gráfico de função linear ou afim; declive e ordenada na origem de uma reta não vertical; relação entre declive e paralelismo; determinação do declive de uma reta determinada por dois pontos com abcissas distintas; equação de reta vertical; e problemas envolvendo equações de retas (Ministério da Educação, 2018). No que respeita ao 9.° ano, a grande diferença incide no estudo da interseção do gráfico de uma função quadrática, de vértice na origem, com o gráfico de uma função afim e a determinação, gráfica e algébrica, do conjunto solução de uma equação e o estudo da função de proporcionalidade inversa (Ministério de Educação, 2018).

No que refere ao Ensino Secundário, o estudo das funções inicia-se no 10.° ano de escolaridade com generalidades acerca das 'funções reais de variável real' relativamente aos seguintes conteúdos: monotonia; injetividade; extremos; e sentido da concavidade do gráfico de uma função. Posteriormente, é efetuado o estudo das 'funções quadráticas', da 'função módulo' e da 'função definida por ramos', incidindo no estudo da paridade, simetria e monotonia e com o estudo das transformações gráficas. Tais transformações traduzem a relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções obtidas da seguinte forma: $af(x)$, $f(bx)$, $f(x+c)$ e $f(x)+d$, com a, b, c e d números reais e a, b não nulos. Relativamente ao 11.° ano de escolaridade, são abordados a definição de limite segundo Heine, a determinação de limite de uma função, a continuidade de uma função, a derivada de uma função num ponto do seu domínio (por definição e pelas regras de derivação); limites e indeterminações; identificar graficamente e determinar as assintotas verticais, horizontais e obliquas do gráfico de uma dada função racional. No que respeita ao 12.° ano, estuda-se a continuidade de uma função num ponto e num subconjunto do domínio e aplica-se o teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy). Seguidamente, inicia-se o estudo das 'funções exponenciais e logarítmicas e funções trigonométricas', com a análise do sinal, a determinação, caso existam, dos zeros da função derivada de segunda ordem com o sentido das concavidades e pontos de inflexão. E ainda são estudadas as propriedades das funções reais de variável real do tipo $f(x) = a^x, a > 1,$ e $f(x) = log_a x,$ nomeadamente a monotonia, o sinal, a continuidade, os limites, as derivadas e as propriedades algébricas. Posteriormente é feito o estudo dos limites notáveis no tipo de funções acima referidas (Quadro 3).

Quadro 3. Análise de conteúdos da temática das funções ao longo do Ensino Secundário.

Ano de escolaridade	Aprendizagens essenciais 2018
10.° ano	Generalidade de funções; Generalidades acerca das funções reais de variável real; Monotonia, extremos e concavidade; Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e módulo e de funções definidas por ramos. Resolução de problemas.
11.° ano	Limites segundo Heine de funções reais de variável real; Resolução de problemas envolvendo o estudo dos zeros e do sinal de funções racionais; Continuidade de funções; Assintotas ao gráfico de uma função; Derivadas de funções reais de variável real e aplicações.
12.° ano	Limites e continuidade Derivada de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão; Aplicação do cálculo diferencial à resolução de problemas; Funções trigonométricas; Limites notáveis envolvendo funções trigonométricas; Derivadas de Funções trigonométricas; Funções exponenciais; Funções logarítmicas; Limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas Derivadas das funções exponenciais e logarítmicas; Modelos exponenciais

O documento orientador para a Matemática educacional, ao nível das orientações curriculares internacionais - Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007) reconhece a importância da Álgebra no currículo de Matemática. Este documento defende que "todos os alunos deveriam aprender álgebra" (p. 39), devendo ser introduzida desde os primeiros anos de escolaridade, dada importância da competência algébrica ao longo da vida. Para o estudo da Álgebra, este documento apresenta quatro tópicos fundamentais: Compreender padrões relações e funções; Representar e analisar situações e estruturas Matemáticas usando símbolos algébricos; Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; Analisar a variação em diversos contextos (NCTM, 2007, p. 39).

Como se constata, o tópico em estudo, nomeadamente no estudo da Álgebra, vai ao encontro do que é referido pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM,2007) na publicação Princípios e Normas para a Matemática Escolar, contribuindo para unificar o currículo, uma vez que a Álgebra é considerada um fio condutor curricular desde os primeiros anos de escolaridade (NCTM, 2007).

Com efeito, da análise das 'Normas' do NCTM para os diferentes anos escolares (Quadro 4), verifica-se que é dada significativa ênfase à Álgebra.

Quadro 4. Objetivos para os níveis de escolaridade no âmbito da Álgebra (NCTM, 2007)

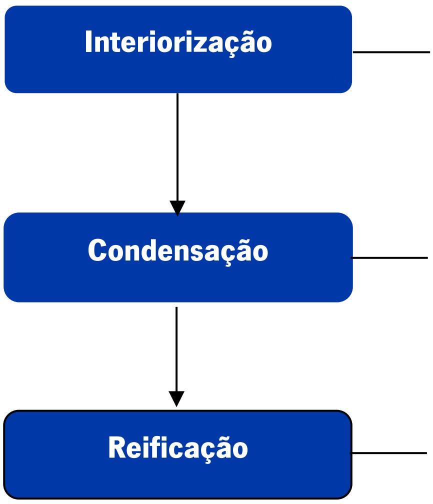
	Compreender padrões, relações e funções	**Representar e analisar situações e estruturas Matemáticas usando símbolos algébricos;**	**Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;**	**Analisar a variação em diversos contextos**
1.° ao 2.°ano	• Classificar e ordenar objetos pelas suas propriedades; • Reconhecer, descrever e estender padrões; • Analisar padrões repetidos	• Ilustrar princípios gerais e propriedades de operações; • Usar representações pictóricas e verbais para desenvolver uma compreensão de notações simbólicas.	• Adicionar e subtrair números inteiros usando objetos, imagens e símbolos.	• Descrever mudanças qualitativa e quantitativas.
3.° ao 5.°ano	• Descrever, estender e fazer generalizações sobre padrões geométricos e numéricos; • Representar e analisar padrões e funções, usando palavras, tabelas e gráficos.	• Identificar propriedades (comutativa, associativa e distributiva) com números inteiros; • Expressar relações Matemáticas usando equações.	• Resolver problemas, usando as diferentes representações (gráfico, tabelas) e tira conclusões.	• Investigar como uma mudança numa variável se relaciona com uma mudança numa segunda variável; • Identificar e descrever situações com taxas de mudança constantes ou variadas e compara-las.
6.°ao 8.°ano	• Representar, analisar e generalizar padrões com tabelas gráficos ou palavras; • Comparar diferentes formas de representação para uma relação; • Identificar funções lineares e não lineares e comparar as suas propriedades a partir de tabelas, gráficos ou equações.	• Desenvolver uma compreensão das diferentes utilizações de variáveis; • Explorar relações entre expressões simbólicas e gráficas; • Resolver problemas que envolvem relações lineares; • Reconhecer e determinar expressões algébricas equivalentes e resolver equações lineares.	• Resolver problemas contextualizados usando várias representações, tais como gráficos, tabelas e equações.	• Utilizar gráficos para analisar as relações lineares.
9.°ao 12.°ano	• Generalização de padrões utilizando funções explicitamente definidas recursivamente; • Compreender as relações e funções utilizando as diferentes representações • Analisar as propriedades das funções; • Compreender a comparar as propriedades das classes de funções; • Interpretar representações de funções de duas variáveis.	• Compreender o significado de equivalência de expressões e equações; • Escrever equações equivalentes, desigualdades e sistemas de equações.	• Identificar relações quantitativas e determinar a classe ou classes de funções que possam modelar as relações; • Utilizar expressões simbólicas, incluindo formas iterativas e recursivas, para representar relações decorrentes de vários contextos; • Tirar conclusões razoáveis sobre uma situação que está a ser modelada.	• Interpretar informação a partir de dados gráficos e numéricos.

A relevância que a Álgebra tem nos programas de Matemática de todos os anos de escolaridade deve-se à perceção de que, segundo Ponte (2005), "quem não tiver uma capacidade razoável de trabalhar com números e operações e de entender a linguagem abstrata da Álgebra, fica seriamente limitado nas suas opções escolares, profissionais e no exercício da cidadania democrática" (p. 3)

2.2.2. Dificuldades na aprendizagem de funções

Para analisar as dificuldades na aprendizagem de funções, é necessário compreender o processo de desenvolvimento deste conceito. Na perspetiva de Sfard (1991), uma função pode ser entendida através de duas conceções: (1) conceção operacional, onde as noções são concebidas como um produto de certos processos, ou são identificadas com os próprios processos (a função é um processo computacional ou um método para obter um valor a partir de outro valor dado); e (2) conceção estrutural, as noções são tratadas como objetos matemáticos (a função é um conjunto de pares ordenados e envolve trabalhar com diferentes representações e a correspondência simbólica de certos parâmetros). Para Sfard (1991), estas duas conceções são complementares e mutuamente dependentes, "embora ostensivamente incompatíveis" (Sfard, 1991, p. 4). A transição da conceção operacional para a conceção estrutural é realizada em três fases, o que faz com que, segundo Mourão (2002), o conceito de função seja estruturado a partir da interiorização, passando pela condensação e terminando com a reificação (Figura 3).

Figura 3- Estruturação do conceito de função segundo Mourão (2002).



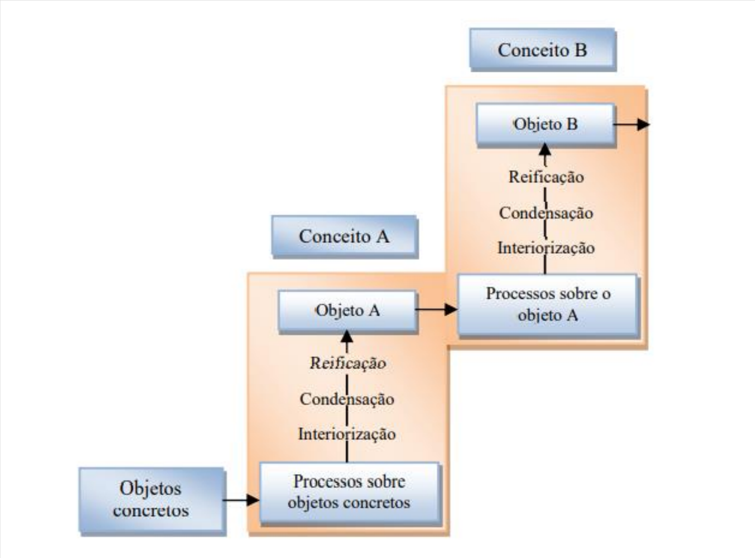
Na interiorização "os processos são realizados sobre objetos matemáticos já familiares" (p. 280). O aluno manipula expressões algébricas. É nesta etapa que é apreendida a noção de variável e a capacidade de usar a expressão analítica para determinar valores da variável dependente.

Na etapa da condensação, o aluno desenvolve a capacidade de pensar sobre um dado processo como um todo e está apto para investigar funções, representá-las graficamente e efetuar diversas operações com funções, uma vez que "os processos anteriores são transformados em unidades compactas" (p. 280).

Nesta etapa, "é adquirida uma capacidade para ver estas novas entidades como objetos permanentes por direito próprio, o aluno consegue conceber o objeto completo e autónomo com significado próprio" (p. 280).

Para Sfard (1991), cada uma destas fases não pode ser alcançada sem que a anterior tenha sido ultrapassada. Assim, o conceito de função fica definido quando o aluno chega à reificação. Esta evolução é individual e nem todos os alunos conseguem chegar à reificação. A apropriação de um objeto matemático permite que se inicie um novo ciclo, começando pela interiorização com vista à formação de um novo objeto mais abrangente, tal como é exemplificado na Figura 4.

Figura 4. Modelo de formação do conceito de função, adaptado de Sfard (1991, p. 22)



Para que a formação do conceito de função fique reificado, o aluno deve revelar consciência das diversas representações e conseguir passar facilmente de uma representação para outra. Deve, igualmente, conseguir resolver relações funcionais e revelar capacidade para se pronunciar acerca das propriedades gerais de diferentes processos realizados, como também ter noção de que os cálculos algébricos não são uma característica necessária dos conjuntos de pares ordenados que definem funções (Consciência, 2014).

Para Sfard (1991), a dificuldade dos alunos na compreensão do conceito de função resulta da natureza dual processo-objeto, dado que uma função pode ser entendida numa perspetiva estrutural (como objeto) ou numa perspetiva operacional (como um processo).

Para Duval (2006), quando a transição entre as diferentes representações é feita dentro do mesmo registo não traz problemas graves, no entanto, quando as transformações se dão entre registos de representação acarretam muitas dificuldades, pois requerem que se distinga o conteúdo da representação e o objeto representado. Como consequência da confusão entre representação e objeto representado, os alunos tendem a considerar duas representações do mesmo objeto como sendo dois objetos matemáticos distintos.

Ponte et al. (2009) destacam como principais dificuldades dos alunos no tema das funções o uso de terminologia própria – domínio, objeto, imagem – principalmente quando aparecem em contexto exclusivamente matemático. Estes autores referem dificuldades na utilização correta da simbologia x, y e $f(x)$; na passagem da informação de uma representação para a outra; na utilização da informação dada para a resolução de problemas e na interpretação das soluções obtidas de acordo com o contexto dado. A manipulação das expressões algébricas e a conversão da linguagem natural para a linguagem matemática são outras dificuldades evidenciadas pelos alunos. À lista das dificuldades juntam-se as formas de representar a relação funcional (tabelar, gráfica e algébrica), que proporcionam dificuldades na atribuição de significado ao símbolo $f(x)$. A dificuldade em adquirir o conceito de função aumenta se se tiver em conta que não há só uma representação, mas sim uma variedade de representações (Duval, 2006). De acordo com Ellia et al. (2007), esta dificuldade advém de a transição entre representações ser um processo que requer uma compreensão global das variáveis. Na sua ótica, existe uma 'compartimentação', isto é, cada representação é trabalhada isoladamente, sem serem estabelecidas conexões com as outras representações.

Resumindo, as principais dificuldades evidenciadas pelos alunos são o uso incorreto da terminologia própria das funções e a transição entre as várias representações.

2.2.3. Representações

A temática das representações tem vindo, progressivamente, a ganhar importância no âmbito da educação Matemática. De acordo com o NCTM (2007), as representações desempenham um papel fundamental no desenvolvimento da compreensão e do raciocínio matemático dos alunos. Antes de abordar as representações numa perspetiva Matemática, importa conseguir fazê-lo numa ótica quotidiana. O termo representação é comummente aceite como dizendo respeito a um 'desenho ou esquema' que pode representar algo. Bruner (1999) refere que representação está relacionada com "a forma como a criança se liberta dos estímulos presentes e conserva a experiência passada num modelo e as regras que regem o armazenamento e a reobtenção de informação deste modelo" (p. 27). Refletir sobre o que Bruner afirma leva a compreender que uma criança, através da linguagem não verbal, nomeadamente através da manipulação de objetos e de desenhos, consegue transmitir o seu pensamento.

> O que queremos dizer como representação? [...] os seres humanos têm provavelmente três maneiras diferentes de realizar esta proeza. [...] A primeira forma de representação veio a ser designada como ativa e a segunda como icónica (...). Por fim, há a representação por palavras ou linguagem. O seu traço distintivo é ser simbólica por natureza, com certas características dos sistemas simbólicos que só agora começam a ser compreendidos. (Bruner, 1999, pp. 27-28)

Estas três formas diferentes de representação são cruciais, pois subjazem ao processo de desenvolvimento do ser humano, inicialmente de uma maneira informal, quando os conceitos são abordados de forma concreta num contexto familiar, e, posteriormente, num contexto pré-formal, no qual o grau de complexidade vai aumentando para representações mais abstratas e formais e finalmente mais formais das notações Matemáticas. Desta forma, começa-se, então, a perspetivar a importância das representações no processo de ensino e de aprendizagem.

De acordo com Witeck e Ennis (2007), as representações têm duas vertentes: o processo e o produto. Por outras palavras, há aquisição de um conceito ou de uma relação Matemática numa determinada forma e há a forma, em si mesma (NCTM, 2007). Na interpretação de Tripathi (2008), uma representação "é um constructo mental ou físico que descreve aspetos da estrutura inerente a um conceito, a inter-relação entre este e as outras ideias" (p. 438). Para Goldin (2008), representação é uma configuração que poderá, de alguma forma, "atuar no lugar de; ser interpretado como, corresponder a, denotar, descrever, encarnar, codificar, invocar, categorizar, ligar com, mediar, produzir, referir, assemelhar, servir como metáfora para significar, substituir por, sugerir ou simbolizar o que está a ser representado" (p. 181). Tal interpretação é sustentada por Canavarro e Pinto (2012, p. 53), quando afirmam que "todos nós usamos representações constantemente e nos múltiplos contextos com que lidamos no nosso dia-a-dia, sendo através delas que conseguimos raciocinar sobre ideias, como dar visibilidade ao que pensamos". De forma a conhecer melhor as teorias sobre as representações, são apresentadas a seguir três teorias, uma desenvolvida por Bruner e as outras duas por Goldin e Duval.

2.2.3.1. Tipos de representação

Para Bruner (1999), as representações dividem-se em três tipos, designadamente ativas, icónicas e simbólicas (Figura 5).

Figura 5. Representações segundo Bruner (1999)

ATIVAS	ICÓNICAS	SIMBÓLICAS
"Baseiam-se na aprendizagem de respostas e formas de habituação". (Brunner, 1999, p.28)	"Dependem da organização visual ou outra organização sensorial e do recurso de imagem" (Brunner, 1999, p.28)	"São um conjunto de proposições simbólicas ou lógicas extraídas de um sistema simbólico que é regido por regras ou leis para a formação e transformação de proposições." (Brunner, 1999, p.28)

Desenhos | Símbolos | Diagramas

A transição entre as diferentes representações está interligada com o desenvolvimento intelectual. A própria evolução dos conhecimentos matemáticos conduz ao desenvolvimento e à diversidade das

representações (Bruner, 1999), o que também é defendido por Ponte e Serrazina (2000). As três diferentes representações supracitadas devem ser vistas como um complemento umas das outras e não como independentes nem como alternativas, pois o aluno deve usá-las em simultâneo ou com base em diferentes combinações entre si (Boavida et al., 2008).

Goldin e Duval dividem as representações em representações internas e representações externas (Quadro 5).

Quadro 5. Características das representações internas e externas segundo Duval e Goldin.

	Internas	**Externas**
Duval (2012)	Representações internas são representações mentais.	São produções construídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que têm inconvenientes próprios de significação e de funcionamento
Goldin (2008)	Têm lugar no interior de cada aluno. São construídas por eles a partir da observação de comportamentos. (Não são observáveis)	Referem-se à configuração observável e física que têm como objetivo representar uma certa realidade. (São observáveis)

Na perspetiva de Goldin (2008), as representações externas são uma inferência das representações internas. Este autor realça o carácter bidirecional da relação entre representações internas e externas. Não só as representações externas representam as internas, como o contrário também acontece. Por exemplo, quando um aluno, para expressar uma ideia, desenha um gráfico, está a utilizar uma representação externa para substituir uma representação interna. Quando, perante um gráfico, um aluno visualiza a informação descrita pelo gráfico, é a representação interna que está a substituir a externa.

O sistema de representação, na perspetiva de Goldin (2008), é baseado em cinco tipos de sistemas de representação interna:

> *Sistemas verbais/sintático* – descrevem a capacidade do indivíduo para processar a linguagem natural, associações verbais, assim como de gramática e de sintaxe.
> *Sistemas imagísticos* – incluem sistemas de representação visuais/espaciais auditivos/rítmicos e táteis/cinestésicos.
> *Sistemas de notação formal* – são sistemas simbólicos altamente estruturados.
> *Sistemas de planeamento, monotorização e controlo executivo* – conduzem ou dirigem a resolução de problemas.
> *Sistemas afetivos* – estão associados a crenças e atitudes. (Goldin, 1998, p. 152)

Para este autor, o sistema de planeamento mantém uma relação metacognitiva com os restantes sistemas, sendo o mesmo considerado a unidade organizacional com maior utilidade dentro deste sistema (processo heurístico). O método 'tentativa e erro', 'pensar num problema mais simples', 'desenhar um diagrama' são alguns dos exemplos que estão patentes neste processo heurístico.

Na perspetiva de Duval, os registos de representações externas, também designadas por representações semióticas, "são essenciais para analisar a atividade Matemática dos alunos e para identificar a raiz dos problemas relativos à compreensão da Matemática, e não apenas à compreensão de determinados conceitos, que muitos alunos têm" (Duval, 2006, p. 111). Este autor agrupa as representações em diferentes registos (Quadro 6):

Quadro 6. Classificação dos registos que podem ser usados nos processos matemáticos (Duval, 2003. p. 14)

	Representação discursiva	**Representação não discursiva**
Registos multifuncionais: Os tratamentos não são algoritmizáveis	Linguagem natural Associações verbais conceituais Formas de raciocinar Argumentação a partir de observações, de crenças Dedução válida a partir de definição ou de teoremas Registo verbal (oral)	Figuras geométricas planas ou em perspetivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3) Apreensão operatória e não somente percetiva Construção com instrumentos Figura geométrica
Registos monofuncionais: Os tratamentos são principalmente algoritmos	Sistemas de escritas Numéricas (binária, decimal, fracionária, etc.), algébricas e simbólicas (línguas formais) Cálculo Registro verbal escrito numérico (percentual; fracionário; decimal; tabela de proporcionalidade) e aritmético. Equação Função	Gráficos cartesianos Mudanças de sistema de coordenadas Interpolação e extrapolação Gráfico cartesiano

Na ótica deste autor, a característica que sobressai da atividade Matemática é a mobilização simultânea de pelo menos dois registos de representação ou a possibilidade de mudar, em qualquer momento, de um registo para o outro. Assim, defende que existem dois tipos de transformações de representações semióticas: Tratamentos e Conversões. Os tratamentos são transformações que ocorrem dentro de um mesmo registo. As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registo conservando os mesmos objetos denotados. As conversões são mais complexas do ponto de vista cognitivo, uma vez que "qualquer mudança do registo, requer, em primeiro lugar, o reconhecimento do mesmo objeto matemático entre duas representações cujos conteúdos não têm, muitas vezes, nada em comum" (Duval, 2006, p. 112). Neste contexto, a conversão não pode ser separada do tratamento, uma vez que é a escolha do tratamento que determina a relevância do registo. A mudança de um registo para outro muda "não apenas os meios de tratamento, mas também as propriedades que se podem explicitar" (Duval, 2006, p. 114).

O reconhecimento do mesmo objeto em diferentes registos é, deste modo, essencial para a compreensão da Matemática, pelo que é importante que o discente consiga discriminar em cada representação semiótica o que é matematicamente relevante. Para Duval (2006), o desenvolvimento da capacidade de mudar de registo de representação é o principal desafio do ensino da Matemática. Pode-se dizer que as representações semióticas "[...] são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento" (DUVAL, 1993, p.39). O importante é que estas representações semióticas não são, segundo Duval, somente para fins de comunicação, mas essenciais para as atividades cognitivas do pensamento.

2.2.3.2. A importância das representações no processo de aprendizagem

Segundo o NCTM (2007), "as representações constituem ferramentas privilegiadas para organizar, registar e comunicar ideias Matemáticas" (p. 160). Dada a importância das representações de conceitos matemáticos, o NCMT (2007) recomenda que os alunos devam desenvolver ao longo dos ciclos de estudo a habilidade de: "Criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas; selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas; usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos sociais e matemáticos" (p. 75). As representações assumem-se, assim, como "uma parte essencial da atividade Matemática e um veículo para captar conceitos matemáticos" (Stylianou, 2010, p. 327). Segundo o NCTM, considera-se fundamental "encorajar os alunos a representar as suas ideias sob formas que para eles façam sentido, mesmo que as suas primeiras representações não sejam convencionais" (NCTM, 2007, p. 75).

Nos processos de ensino e de aprendizagem é importante criar uma interação entre representações internas e externas, uma vez que a sua conexão pode estabelecer-se através de analogias, imagens, metáforas, entre outras. Estas representações são importantes para os professores e para os alunos. De acordo com Muira (2001), existem as representações usadas pelos professores designadas por *instrucionais* e as representações usadas pelos alunos designadas por *cognitivas*. As representações instrucionais correspondem às usadas pelo professor quando comunica com os alunos e as representações cognitivas ou mentais são aquelas usadas pelos alunos quando procuram dar sentido a um conceito ou durante a resolução de uma determinada tarefa. Se, por um lado, permitem aos docentes construir conceitos e compreender os raciocínios dos alunos (NCMT, 2007), por outro lado, permitem aos alunos exprimirem as suas ideias com recurso às diferentes representações. Durante o processo de aprendizagem de Matemática, os alunos recorrem às representações como auxílio na compreensão/resolução das tarefas que lhe são propostas. A forma como os discentes exteriorizam o raciocínio através das representações enriquece a compreensão Matemática (Cuoco, 2001; Kamii et al., 2001; Whitin & Whitin, 2001).

De facto, aquando da compreensão de um determinado conceito, o professor deve ponderar o uso de diferentes representações desse conceito, de forma a conseguir uma aprendizagem mais significativa

(Kieran, 1992), uma vez que a combinação de representações ajuda a melhor identificar e clarificar os vários aspetos dos conceitos e a transição entre representações diferentes. Esta compreensão Matemática exige reconhecimento por parte do aluno de um mesmo objeto em diferentes sistemas de representação, bem como o reconhecimento em cada sistema de representação. Aquando da transformação de um sistema de representação para outro, observa-se a mudança "não apenas [d]os meios de tratamento, mas também [d]as propriedades que lhe podem ser explicitadas" (Duval, 2006, p. 114). Quando os alunos acedem "às representações Matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumenta significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente" (NCTM, 2007, p. 75).

2.2.3.3. Conexões entre as representações

Segundo a interpretação de Duval (2006), é impossível aprender as noções Matemáticas sem recorrer às representações, pois é a diversidade das representações que dá significado a um objeto matemático, desde que cada representação represente e descreva diferentes aspetos do objeto. Friedland e Tabach (2001), por sua vez, evidenciam vantagens e desvantagens de quatro modos de representação essenciais no ensino da Matemática, especificamente a representação verbal, a representação numérica, a representação gráfica e a representação algébrica (Quadro 7).

Quadro 7. Vantagens e desvantagens dos diferentes tipos de representação segundo Friedland e Tabach (2001)

Representação	Vantagens	Desvantagens
Verbal Está associada à apresentação do problema e à interpretação final dos resultados obtidos.	Dá enfase à conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e o quotidiano.	Pode tornar-se um obstáculo para a comunicação Matemática. A sua utilização pode ser feita de forma ambígua ou conduzir a associações incorretas.
Numérica É uma representação natural, precede qualquer outro tipo de representação.	É importante na compreensão inicial de um problema e na investigação de casos particulares.	Pode não ser generalizável.
Gráfica Proporciona uma imagem gráfica.	É apelativa e intuitiva.	Pode ser influenciada por fatores externos e apresenta frequentemente só uma parte do domínio do problema.
Algébrica É concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos)	Pode, por vezes, ser o único método de justificar ou efetuar generalizações.	O uso exclusivo de símbolos algébricos pode ocultar o significado matemático ou a natureza do objeto e causar dificuldades de interpretação de resultados.

Pela análise do quadro, constata-se que quando a aprendizagem incide apenas sobre uma das representações esta pode restringir a interpretação de outra devido à familiaridade ou a propriedades inerentes das próprias representações. A complementaridade entre as diferentes representações permite uma construção mais profunda, pois permite integrar informação para alcançar o conhecimento, podendo o aluno transferir esse conhecimento para novas situações. Aliado a esse conhecimento, a articulação de representações pode ser vantajosa para os alunos, pois torna possível aos alunos usarem de forma flexível os seus conhecimentos matemáticos (Huinker, 2002), optando por usar a representação que lhes é mais favorável num determinado contexto.

A diversidade de representações externas a que o professor pode recorrer e a oportunidade dada aos alunos de exprimir as suas ideias ajudam o aluno a desenvolver as suas próprias representações, cada vez mais poderosas. Aquando da discussão coletiva, o uso de várias representações numa mesma situação Matemática ajuda os alunos a compreender a estrutura Matemática por trás de cada representação e a perceber como é que as várias representações se interligam (Abrahamson, 2006). Há, no geral, consonância no discurso dos vários autores acerca da utilização de múltiplas representações para a compreensão de um conceito matemático. Por exemplo, Triphathi (2008) defende que, através de diferentes representações do mesmo conceito, se evidenciam diferentes aspetos da sua estrutura, aumentando a sua compreensão e permitindo desenvolver capacidades cognitivas diferentes: "Uma representação Matemática frequentemente salienta apenas um aspeto de um conceito matemático. Limitarmo-nos a uma representação Matemática é abordar o conceito de olhos vendados" (Tripathi, 2008, p. 438).

2.2.3.4. Representações na aprendizagem de funções

As representações têm um papel preponderante na evolução do conceito de função, pois é difícil que este seja compreendido e adquirido sem o uso de várias representações (Gagatsis & Elia, 2005). Para Duval (2004), as várias representações de funções apontam para aspetos distintos do conceito que, em conjunto, contribuem para uma representação global, pelo que a conversão entre as diferentes representações tem um papel fundamental na compreensão e interpretação das funções. Friedlander e Tabach (2001) acrescentam que trabalhar com várias representações possibilita aos discentes terem a perceção das características de cada uma das representações, tornando "o processo de aprendizagem da Álgebra significativo e efetivo" (p. 173). No entanto, uma das dificuldades, apontadas no ensino e aprendizagem de função é a existência de várias formas de representar uma função, e de estabelecer a ligação entre as diferentes representações (Arcavi, 2003; Carvalho et al., 2011; Duval, 2006).

A aprendizagem do conceito de função começa no 1.° e 2.° ciclo envolvendo correspondências entre duas variáveis, que se podem trabalhar em tabelas e gráficos. Ressalve-se que no 2.° ciclo o conceito é utilizado na resolução de problemas envolvendo correspondências que representam situações de proporcionalidade direta. Este conceito é estudado de forma explícita no 3.° ciclo, visando a "compreensão da noção de função enquanto relação entre variáveis e como uma correspondência unívoca entre dois conjuntos" (Ponte et al., 2009, p. 119).

A representação numérica, que é caracterizada pela construção de uma tabela de duas colunas, relaciona diretamente a variável independente x e a variável dependente y através da concretização numérica do par (x, y). Este tipo de representação, usando um número significativo de pares, ajuda os alunos a identificar relações entre as variáveis, a encontrar regularidade e a expressá-las de forma mais abstrata, chegando à generalização.

Por sua vez, a representação gráfica é intuitiva e apelativa, no entanto, pode não permitir a precisão necessária para resolver um problema. Para Ponte (1984), uma das dificuldades patentes nas representações gráficas são: (1) o uso e a construção de escalas; (2) determinação dos valores da função, dado o objeto; (3) a variação; (4) interpretação e discussão das relações funcionais.

A representação simbólica sendo concisa e geral, pode trazer dificuldades pelo uso da simbologia (Pierce et al., 2011).

A representação algébrica sendo a que exige um maior nível de conhecimentos matemáticos, (variável dependente, variável independente, conceito de função), revela-se a representação que apresenta mais dificuldades de entendimento por parte dos alunos.

Os alunos do 3.° Ciclo, no estudo das funções, utilizam uma ou mais representações e é nessa mudança de representação que mostram sentir dificuldades. As dificuldades patenteadas verificam-se na ligação entre fórmulas e gráficos, diagramas e expressões verbais das relações, como interpretação de gráficos, e na manipulação de símbolos (Duval, 2004; Goldin, 2003). Para Duval (2011), esta dificuldade deve-se à falta de correspondência semiótica entre o registo da representação gráfica e o registo da representação algébrica. Para Elia et al. (2007), os alunos tendem a ver nas diferentes representações de uma função objetos matemáticos distintos e autónomos e não diferentes modos de expressar o mesmo objeto. Ainda de acordo com estes autores a transição entre representações não é trabalhada adequadamente, tal como também é sugerido por Rocha (2016), existindo uma 'compartimentação' das representações, o que resulta de cada representação ser trabalhada isoladamente sem serem estabelecidas conexões entre os diversos tipos de representação.

O uso de diferentes representações para apresentar e explorar a tarefa, estimula a flexibilidade na escolha das representações para resolver essa tarefa e proporciona segurança para o seu uso posterior pelos alunos (Friedland & Tabach, 2001).

Num estudo realizado por Canavarro e Gafanhoto (2013) sobre a utilização e conciliação de diversas representações no 9.° ano, conclui-se que:

- A representação numérica e algébrica eram as mais usadas para determinar a imagem, dado o objeto e vice-versa;
- A representação gráfica foi a mais utilizada na comparação de funções, quando se pretendia uma imagem global sobre o comportamento da função;
- A representação em tabela quando se pretende analisar a relação entre as variáveis, que se relacionam direta ou inversamente.

Os resultados obtidos pelo estudo de Viseu et al. (2019), corroboram um dos aspetos mencionados por Canavarro e Gafanhoto ao concluir que o reconhecimento de funções ocorria com maior facilidade a partir da representação tabular do que a partir da representação gráfica ou algébrica.

Para (Ainsworth, 2006), as múltiplas representações têm três funções chave: (a) complementar; (b) restringir; e (c) construir. Estas três funções evidenciam o papel importante das representações na construção do conceito de função e a sua importância no processo de construção do conhecimento matemático.

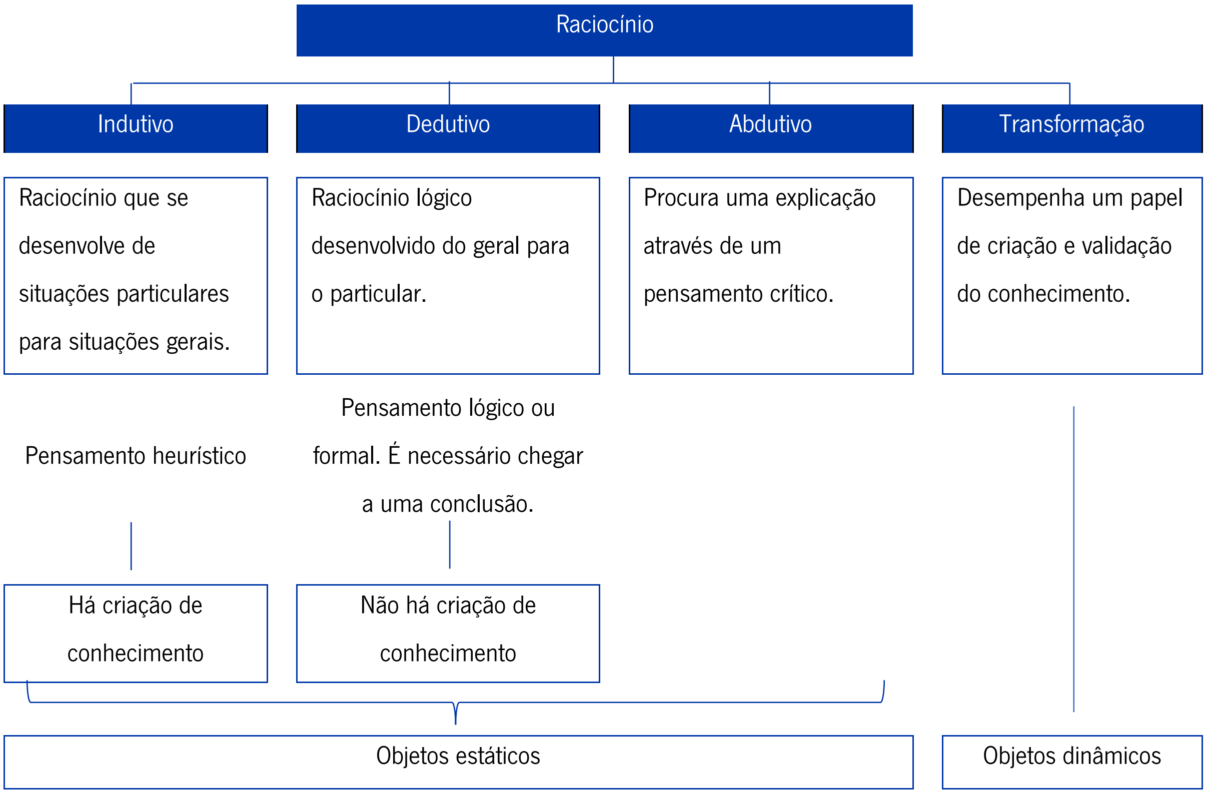
Em suma, "as ideias Matemáticas são potenciadas através de representações múltiplas, que servem não apenas como ilustrações ou estratégias pedagógicas, mas formam uma parte significativa do conteúdo matemático a aprender e servem de apoio ao raciocínio matemático" (NRC, 2001, p. 94).

2.2.4. Raciocínio matemático

A capacidade de raciocinar matematicamente é apontada como um objetivo central do ensino e da aprendizagem da Matemática. É através do raciocínio que se acede à compreensão de situações Matemáticas. Faz, portanto, todo o sentido questionar sobre como podemos contribuir para promover o desenvolvimento desta capacidade. Assim, primeiramente, importa entender o conceito de raciocínio. O termo raciocínio é um conceito multifacetado, como se pode ver pelos vários sentidos propostos pelo dicionário de língua portuguesa: *Raciocinar*: "1. Atividade da razão; 2. encadeamento lógico de pensamentos; 3. Modo de pensar". Mas será o conceito definido de igual forma em Matemática? Para Russel (1999), o raciocínio é "aquilo que utilizamos para pensar sobre as propriedades dos objetos matemáticos e desenvolver generalizações que se apliquem a toda a classe de objetos – números, operações, objetos matemáticos ou conjunto de dados" (p. 1). Já para Kilpatrick e Swafford (2004), o conceito é um pouco mais forte, chegando mesmo a afirmar que "o raciocínio matemático é a cola que mantém a Matemática junta" (p. 14). Ainda segundo estes autores, é "pelo pensamento sobre as relações lógicas entre os conceitos e situações, que os alunos podem caminhar através dos elementos de um problema e ver como eles se encaixam uns nos outros" (p. 14). Uma forma de os alunos melhorarem o seu raciocínio é explicar ou justificar as suas soluções ao professor ou aos seus colegas. Dever-se-á ressalvar que, apesar de raciocinar se encontrar intimamente ligado ao domínio do pensamento, não se pode afirmar que este conceito tem o mesmo significado que pensar (Ponte, 2017). Na verdade, raciocinar possui um significado mais preciso e mais profundo que pensar, ao consistir em realizar inferências de forma fundamentada. Ponte (2017) considera que "todo o raciocinar é pensar, mas existe pensamento que não chega a ser raciocínio" (p. 22). Para Jeannotte e Kieran (2017), o raciocínio pode ser percebido "como um processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos" (p. 7). Mata-Pereira e Ponte (2018) aproximam-se da definição de raciocínio de Jeannotte e Kieran ao referirem que raciocínio matemático consiste em "utilizar informação já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões" (p. 782). Lannin et al. (2011) consideram que o raciocínio é "um processo evolutivo de conjeturar, generalizar, investigar o porquê e desenvolver e avaliar argumentos" (p. 10).

Independentemente da definição de cada autor sobre 'raciocínio', todos eles apresentam algo em comum, designadamente a produção de novos conhecimentos a partir de outros já existentes. Matematicamente é frequente considerar-se que a obtenção de novos conhecimentos se faz a partir do raciocínio dedutivo, isto é: se A então B. A uma sequência de deduções, por sua vez, dá-se a designação de demonstração. Segundo o NCMT (2008), uma demonstração é um argumento que consiste "na dedução rigorosa e lógica de conclusões, a partir de hipótese iniciais" (p. 61). Mas como é que se chega à demonstração? Como é que se chega ao conhecimento que posteriormente é organizado dum modo dedutivo? Responder a esta questão é importante na Matemática, pois não podemos valorizar apenas o produto, mas a forma como se gera esse conhecimento, ou seja, o processo. Percebe-se que, na fase concludente (a demonstração) do processo investigativo, o raciocínio dedutivo tenha um papel importante. Tal como refere Oliveira (2008), a demonstração é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio matemático, pois tem um papel fundamental na construção da própria Matemática, sendo um modo formal de exprimir determinados tipos de raciocínio e justificações. Na fase exploratória, "o raciocínio matemático é iminentemente conjetural, pelo que as conclusões que produz, em geral, têm uma validade plausível e não necessária" (Oliveira, 2008, p. 5). Oliveira (2002) identificou quatro tipos de raciocínio que produzem conclusões com diversos graus de plausibilidade: indução; dedução; abdução; e transformação. De acordo com Oliveira (2002), cada um dos raciocínios tem características específicas (Figura 6).

Figura 6- Tipos de raciocínio segundo Oliveira (2002)



Raciocínio dedutivo: O raciocínio dedutivo é um raciocínio formal, relacionado com a demonstração e a lógica. Deve ser concebido como uma forma de demonstrar o encadeamento de asserções de forma lógica onde há uma justificação para esse encadeamento. É um raciocínio lógico, desenvolvido do geral para o particular, com conclusões necessárias e com um papel fundamental na validação de conhecimento. Dada a sua função de validação, o raciocínio dedutivo é central na atividade Matemática. Para Oliveira (2002), o raciocínio dedutivo constitui "o elemento estruturante por excelência do pensamento matemático" (p. 178).

Raciocínio indutivo: O raciocínio indutivo desenvolve-se partindo de situações particulares para situações gerais, estando presente o pensamento do tipo heurístico. Este tipo de raciocínio possibilita desenvolver conjeturas e generalizações que podem posteriormente ser verificadas por processos de demonstração eminentemente dedutivos como a indução Matemática (Polya, 1990). Na indução, os objetos são estáticos, não sendo necessário encontrar soluções, mas apenas a criação de conhecimento.

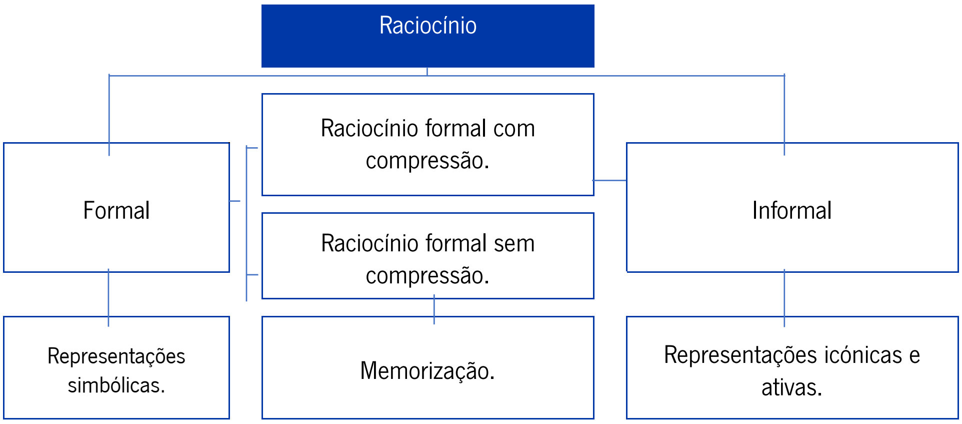
Raciocínio abdutivo: O raciocínio abdutivo funciona a partir de factos para os quais se procura uma explicação ou a criação de conhecimentos, sendo o objetivo chegar a uma conclusão plausível (Oliveira, 2002; Riviera & Becker, 2009).

Transformação: É um raciocínio que tem como objetivo desempenhar o papel de criação e validação de conhecimento, no qual se manipulam os objetos dinâmicos com vista a uma explicação ou validação a partir de imagens.

Assim, raciocinar matematicamente não se limita ao raciocínio lógico ou demonstrativo, incluindo também processos intuitivos, a formulação de novas ideias e a obtenção e validação de conclusões. Nesse sentido, o raciocínio matemático envolve uma variedade de processos de raciocínio que incluem: generalizar; conjeturar; identificar um padrão; comparar; classificar; justificar; provar e provar formalmente.

Na ótica de Ponte e Quaresma (2014), o raciocínio pode assumir uma natureza formal e informal. Para Ponte e Quaresma (2014), o raciocínio formal tem apoio nas representações simbólicas, enquanto o raciocínio informal tem apoio em representações icónicas e ativas (Figura 7).

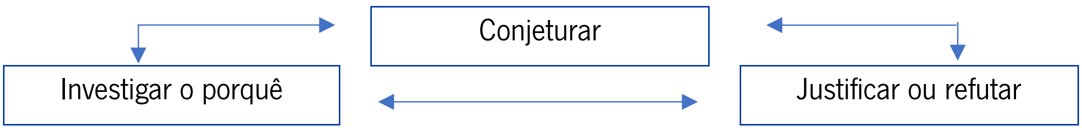
Figura 7. Tipo de raciocínio segundo Ponte e Quaresma (2014).



2.2.4.1. Processos de raciocínio

Lannin et al. (2011) apresentam um modelo sobre o processo do raciocínio, que é um processo cíclico que começa muitas vezes com a formulação de conjeturas, que posteriormente são analisadas de forma a procurar razões que permitam a sua validação (Figura 8).

Figura 8. Modelo de um processo de raciocínio matemático (Lannin et al., 2011, p. 11)

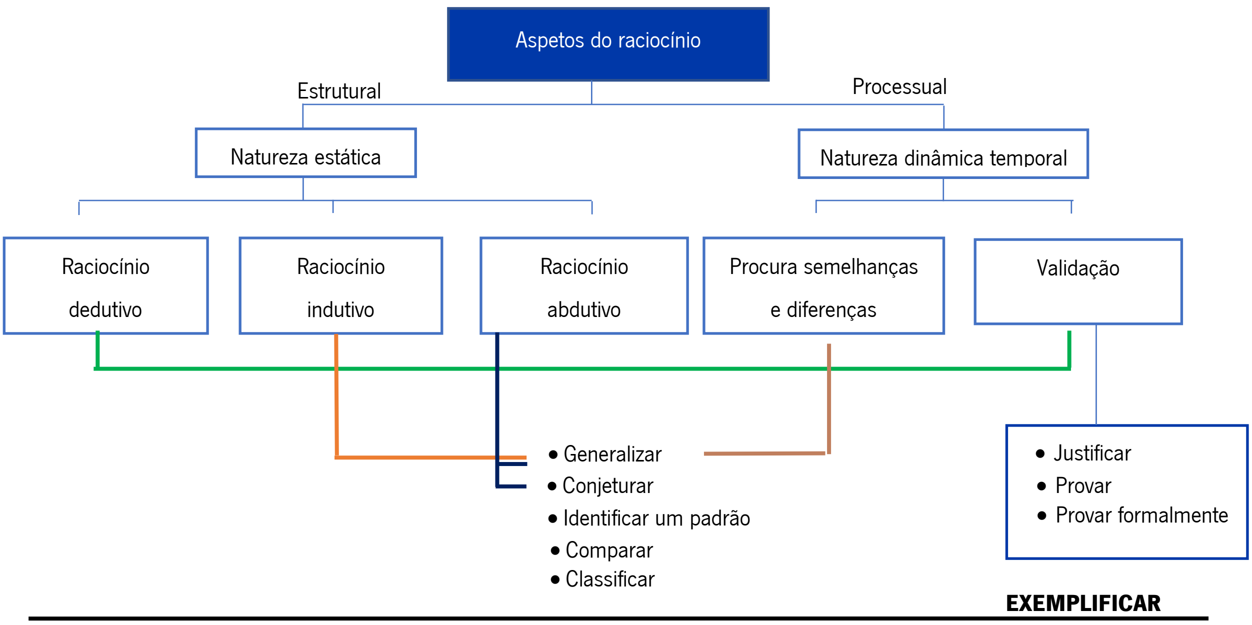


Segundo estas autoras, conjeturar envolve "raciocinar sobre relações Matemáticas para desenvolver enunciados que provisoriamente se pensa serem verdadeiros, embora não se saiba se são"

(Lannin et al., 2011, p. 12), podendo estas ser ou não ser generalizações. O investigar o porquê, é essencial pois permite ao aluno explicar a veracidade da conjetura, apresentando uma justificação onde argumente essa mesma veracidade.

Jeannotte & Kieran (2017) identificaram dois aspetos do raciocínio matemático: o estrutural e o processual. O aspeto estrutural envolve o raciocínio dedutivo, indutivo e abdutivo, enquanto o aspeto processual é caracterizado pela procura de semelhanças e diferenças, validação e exemplificação (Figura 9).

Figura 9. Esquema dos aspetos do raciocínio matemático segundo Jeannotte e Kieran (2007).



Embora se possa considerar dois aspetos do raciocínio matemático, o estrutural e o processual, de acordo com as autoras, ambos deverão ser encarados de um modo dialético, já que um e outro contribuem para a construção mútua: "estruturas são parte do aspeto de processo do raciocínio matemático e os processos contribuem para a construção dessas estruturas" (Jeannotte & kieran, 2017, p. 7).

De seguida focam-se apenas os processos *generalizar*, *justificar*, *exemplificar* e *classificar*, dada a sua importância central na descoberta de ideias Matemáticas e na identificação de relações que fundamentam essas ideias, contribuindo, assim, para uma compreensão aprofundada da Matemática (Mata-Pereira & Ponte, 2018). Estes autores destacam que:

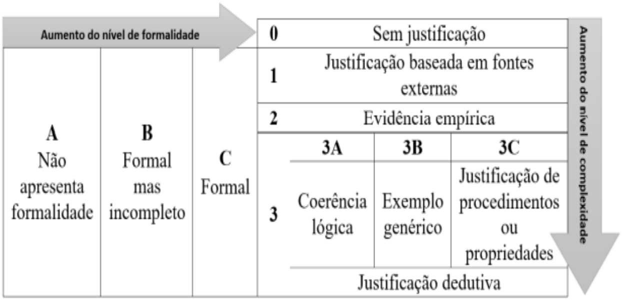
> Por um lado, a Matemática pretende fazer afirmações gerais sobre propriedades, conceitos ou procedimentos que se pretendem válidos para um conjunto alargado de objetos ou condições Matemáticas, sendo a generalização o processo de raciocínio envolvido. Por outro lado, a justificação é central para que seja possível validar matematicamente tais afirmações. (p. 783).

Generalizar. O processo de generalizar, para Lannin et al., (2011), consiste em reconhecer pontos comuns em diferentes casos ou alargar o raciocínio a um domínio mais vasto, podendo envolver a identificação da aplicação de uma generalização, através do reconhecimento do domínio para o qual a generalização é verdadeira. Para Henriques (2010), as generalizações recaem na sua maioria em analogias, na identificação de padrões partindo de exemplos ou na experimentação de casos isolados ou não sistematizados, tornando-se, muitas vezes, um desafio para os alunos (Zazkis et al., 2008). O processo de generalização é um processo fundamental do raciocínio indutivo e abdutivo.

Justificar. O processo de justificação é a construção de uma sequência lógica de afirmações, cada uma suportando-se em conhecimentos já estabelecidos de forma a chegar a uma conclusão (Lannin et al., 2011). Segundo o NCTM (2007), este processo permite aos alunos evidenciarem e esclarecerem o seu conhecimento matemático, estabelecendo conexões entre conceitos matemáticos, representações e procedimentos, resolver problemas e desenvolver novas ideias Matemáticas (Brodie, 2010). Para Jeannotte e Kieran (2017), o processo de justificar não requer necessariamente uma argumentação com uma estrutura dedutiva, podendo mudar o valor epistémico das afirmações Matemáticas apenas para provável ou muito provável. Já no que concerne ao processo de prova e prova formal, estes requerem uma argumentação dedutiva, alterando o valor epistémico para verdade ou falso. A este nível, é muito relevante salientar a importância de proceder à distinção entre os processos *justificar* e *explicar*, os quais, muitas vezes, são interpretados como sinónimos. O processo de *justificar* é um processo de raciocínio, enquanto *explicar* é um processo de comunicação. O objetivo da explicação é clarificar aspetos do pensamento matemático. Relativamente ao processo de justificação, existem vários tipos de justificação que são progressivamente mais formais à medida que os alunos avançam no nível de escolaridade e no seu conhecimento.

Mata-Pereira e Ponte (2018) elaboraram um modelo que caracteriza as justificações dos alunos que mais emergem em sala de aula, tendo em consideração o nível de complexidade e de formalidade com que são apresentadas. A sistematização do modelo é apresentada no Quadro 8.

Quadro 8. Níveis de formalidade e complexidade das justificações (Mata-Pereira & Ponte, 2018, p. 490)



Aumento do nível de formalidade			0	Sem justificação		
A Não apresenta formalidade	B Formal mas incompleto	C Formal	1	Justificação baseada em fontes externas		
			2	Evidência empírica		
			3	3A	3B	3C
				Coerência lógica	Exemplo genérico	Justificação de procedimentos ou propriedades
				Justificação dedutiva		

Aumento do nível de complexidade

A validação da justificação, ou seja, correta, parcialmente correta ou incorreta é independentemente do nível de justificação apresentado.

No Quadro 4 é possível observar que as justificações ao nível da formalidade, situam-se entre três níveis diferentes:

- ✓ Tipo A- Não formal, em que a justificação não é apresentada de forma formal. Esta justificação normalmente ocorre em situações em que o aluno não utiliza conscientemente ou explicitamente um processo de justificação;
- ✓ Tipo B- Formal, mas incompleta, em que as inferências apenas se baseiam em elementos da situação em estudo. É utilizada em situações de formulação;
- ✓ Tipo C- Formal, em que as justificações são suportadas através de uma cadeia de inferências lógicas relacionadas tanto com os dados da situação em estudo como pelo conhecimento considerado como verdadeiro. Este nível de formalidade é recorrente em situações de validação.

Mata-Pereira e Ponte (2018), relativamente aos graus de complexidade de uma justificação, identificam quatro níveis distintos (sem justificação, justificação baseada externamente, evidência empírica e justificação dedutiva), sendo que o último está divido em três subníveis (coerência lógica, exemplo genérico e justificação a partir de um procedimento ou propriedade). No que respeita a cada nível: no nível 0, tal como indica a sua denominação, o raciocínio não tem qualquer justificação incluída; o nível 1 representa as justificações que dependem de outros indivíduos ou de materiais de referência; o nível 2 reflete uma justificação que tem como base um exemplo particular; o nível 3 retrata uma justificação de natureza dedutiva, sendo que no primeiro subnível a justificação baseia-se em princípios lógicos, no segundo a justificação refere-se a um determinado exemplo e no terceiro, e último subnível, a justificação é fundamentada através de argumentos de natureza dedutiva que não estão relacionados com nenhum exemplo específico.

Exemplificar. Jeannotte e Kieran (2017) consideram o processo de exemplificar como um processo de suporte à generalização e à justificação, uma vez que está associado ao raciocínio abdutivo, permitindo inferir dados acerca de um problema.

Classificar. Segundo Jeannotte e Kieran (2017), o processo de classificar consiste em identificar pontos comuns e diferentes em objetos distintos, juntando-os ou separando-os, de acordo com as propriedades Matemáticas.

Todos os processos de raciocínio são igualmente importantes e necessários na aprendizagem dos alunos, razão pela qual se torna fundamental perceber qual a relevância dada a esta capacidade nos programas escolares de Matemática.

2.2.4.2. O raciocínio nos documentos curriculares de Matemática

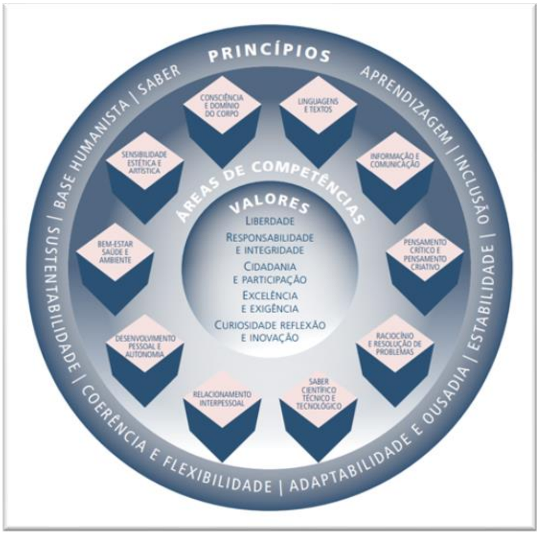
Segundo o Ministério de Educação (2013), a simples aprendizagem de conceitos, algoritmos e procedimentos é insuficiente para os alunos perceberem a Matemática como uma disciplina lógica e coerente sendo necessário e essencial o desenvolvimento do seu raciocínio. Esta capacidade de raciocinar matematicamente é mencionada, desde há muito tempo, como um objetivo central do ensino e aprendizagem da Matemática quer no ensino básico, quer no Ensino Secundário. Segundo o NCTM (2008), ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da Matemática, sendo que os alunos deverão perceber que a Matemática faz sentido através do desenvolvimento de ideias, da exploração de fenómenos, da justificação de resultados e da utilização de conjeturas Matemáticas em todas as áreas de conteúdo.

O Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007) destaca a importância de os alunos raciocinarem matematicamente usando conceitos, representações e procedimentos matemáticos. O documento *Princípios e Normas para a Matemática escolar* (NCTM, 2007) realça a importância de todos os alunos: reconhecerem o raciocínio e a demonstração como aspetos fundamentais em Matemática; formularem e investigarem conjeturas Matemáticas; desenvolverem e avaliarem argumentos e provas matemáticas; e selecionarem e usarem diversos tipos de raciocínios e métodos de demonstração. Neste documento entende-se que o raciocínio matemático seja concebido como um objetivo da aprendizagem central, sendo uma orientação metodológica para o docente estruturar as atividades a desenvolver em sala de aula. É de salientar que o processo de raciocínio envolve a explicação e a justificação de ideias, a formulação e o teste de conjeturas. O desenvolvimento do raciocínio é um processo evolutivo, que deve ser iniciado pela justificação de passos e operações na resolução das tarefas evoluindo gradualmente para argumentações mais complexas, podendo chegar a generalizações.

O programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2013), perspetiva uma visão mais redutora de raciocínio matemático restringindo-o praticamente, ao raciocínio dedutivo - "o raciocínio matemático é, por excelência, o raciocínio hipotético-dedutivo" (Ministério da Educação, 2013, p. 4), não valorizando os raciocínios indutivos e abdutivos. É possível verificar que a tónica deste programa curricular é uma regressão relativamente ao que até ao momento fora perspetivado sobre o entendimento do raciocínio matemático, onde se valoriza a demonstração formal em Matemática, relegando para segundo plano o raciocínio indutivo e o abdutivo e o uso de métodos informais para justificar e generalizar, aspetos subjacentes ao entendimento amplo de raciocínio matemático veiculado no programa de 2007.

Em 2017, foi implementado um documento de natureza curricular geral, transversal a todas as áreas curriculares, que perspetiva tudo aquilo que importa que os alunos dominem à saída da escolaridade obrigatória denominado de Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Ministério da Educação, 2017). Neste documento, o raciocínio é visto como uma competência essencial que os alunos devem adquirir ao longo do seu percurso escolar, uma vez que estes devem ser capazes de colocar questões, identificar o que pretendem descobrir e definir as estratégias que são mais adequadas para chegar ao seu objetivo (Martins et al., 2017). As Aprendizagens Essenciais surgem para explicitar a articulação entre o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Ministério da Educação, 2017) e o Programa de Matemática de 2013. Estas aprendizagens são definidas a partir das áreas de competências (Figura 10) previstas no perfil que os alunos devem aprender, tanto no que respeita às áreas que estão intrinsecamente relacionadas com os temas, processos e métodos matemáticos, como nas restantes áreas em que a Matemática pode contribuir com auxílios essências (Ministério da Educação, 2017).

Figura 10. Esquema Conceptual do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Ministério da Educação ,2017, p. 11)



De acordo com o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, no que concerne ao raciocínio matemático as orientações remetem para “processos lógicos que permitem aceder à informação, interpretar experiências e produzir conhecimento”. Por outro lado, no que respeita às competências na área de Resolução de problemas, as orientações apontam para "processos de encontrar respostas para uma nova situação, mobilizando o raciocínio com vista à tomada de decisão, à construção e uso de estratégias e à eventual formulação de novas questões” (Ministério da Educação, 2017, p. 20). Ainda de acordo com o mesmo documento, mas no que respeita às competências na área de pensamento crítico, requerem que o aluno consiga “observar, identificar, analisar e dar sentido à informação, às experiências e às ideias e argumentar a partir de diferentes premissas e variáveis” (Ministério da Educação, 2017, p. 21). Este documento, ‘Aprendizagens Essenciais’, para Canavarro (2021) possui três aspetos que promovem o desenvolvimento da literacia Matemática. O primeiro está relacionado com a relação entre a Matemática com outras áreas do saber e a realidade, ou seja, o aplicar dos conhecimentos matemáticos em contextos reais podendo aumentar o interesse dos discentes. O segundo ponto frisado pela autora é a valorização do cálculo mental e a utilização de diversos processos e estratégias, tendo em conta o número ou a situação que está a ser solucionada. O terceiro ponto referido é a valorização da estatística e das probabilidades, para que os alunos consigam ler, compreender e interpretar tabelas e gráficos.

Em conclusão, este documento, ‘Aprendizagens Essenciais’, de acordo com Brocardo (2021), tem muitas virtualidades na aprendizagem da Matemática, sendo uma delas colocar a Matemática mais acessível às crianças e jovens.

2.2.4.3. Formas de promover o raciocínio na aula de matemática

Nas Aprendizagens Essenciais de 2021, o raciocínio integra-se no tópico "Como promover a aprendizagem da Matemática?". Nessa perspetiva, o documento pressupõe um conjunto de orientações metodológicas indispensáveis à promoção de práticas que visam a aprendizagem da matemática em todos os anos de escolaridade e temas (Ministério da Educação, 2021, p. 6). Segundo este documento, é estritamente necessária a disponibilização de tempo e espaço para que os alunos pensem, partilhem ideias e discutam as suas produções matemáticas aquando da exploração de uma tarefa, sistematizando coletivamente as aprendizagens que emergem, numa lógica de autorregulação das aprendizagens. Neste sentido, é possível concluir que nas aprendizagens essenciais, atualmente em vigor, são recomendadas práticas que promovam o raciocínio e comunicação matemática a partir de tarefas que, se querem "poderosas e desafiantes" (p. 6).

Nesse sentido, pode dizer-se que há um consenso a este nível, designadamente que o grande enfoque da promoção do raciocínio passa pela natureza das tarefas que se propõem aos discentes e a sua ação na sala de aula. Assim, será analisada a importância das tarefas tal como o tipo de tarefas promotoras do raciocínio. Por último, serão analisadas as ações do professor na promoção deste mesmo raciocínio.

Tarefas. As tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática. Num ensino onde se pretenda que os alunos sejam proactivos na construção do seu conhecimento, as tarefas assumem um papel de bastante relevância (Ponte, 2005). Aquando da realização de uma dada tarefa, esta pode surgir de diversas formas, nomeadamente ser proposta aos alunos pelo professor ou até mesmo ser proposta pelos próprios alunos.

Muitos são os argumentos que se podem utilizar sobre a importância das tarefas, destacando-se três argumentos essenciais que, de certa forma, englobam a totalidade da importância das mesmas:

- ✓ As tarefas nas quais os alunos se dedicam constituem, em grande medida, o domínio de oportunidades para o aluno aprender Matemática (Stein et al., 2009, p. 131);
- ✓ As tarefas podem ser instrumentos de conexão entre objetivos de aprendizagem dos alunos (Stein et al., 2009);
- ✓ As tarefas podem determinar os raciocínios que os alunos desenvolvem ao resolvê-las (Stein & Smith, 1998).

Que tipo de tarefas existem e como escolhê-las para a sala de aula? Para Ponte (2005), as tarefas atendem a duas dimensões consideradas fundamentais, o grau de desafio e o grau de estrutura (Figura 11). A primeira relaciona-se com a perceção do grau de dificuldade de uma questão e varia entre o desafio reduzido e elevado; a segunda é relativa ao grau de estrutura, variando entre tarefa aberta e fechada. Com base nestas características, o autor considera que se denomina por exercício uma tarefa que é fechada e admite um grau de desafio reduzido; por problema uma tarefa fechada e com grau de desafio elevado; por investigação uma tarefa aberta e de elevado desafio; e por tarefa de exploração uma tarefa aberta, mas com grau de desafio reduzido.

Figura 11. Tipos de tarefas segundo Ponte (2005, p. 8)

Relativamente ao nível de dificuldade da tarefa, este está ligado aos tipos de raciocínio matemático que são exigidos aos alunos para a sua realização, bem como o nível e o tipo de aprendizagem que lhes proporciona. O projeto QUASAR (*Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning*) evidencia que as tarefas estão presentes de forma marcante nos processos de ensino e de aprendizagem e determinam o tipo de pensamento. Este projeto classifica as tarefas de acordo com o nível de dificuldade cognitiva, envolvendo a memorização, os procedimentos sem conexão com significado, procedimentos com conexão com significado e fazer Matemática. Relativamente à memorização e aos procedimentos sem conexão com significado, para os investigadores do projeto, estes são considerados de baixa dificuldade cognitiva, uma vez que são tarefas que envolvem a reprodução dos factos aprendidos previamente, regras, fórmulas ou memorização dos factos, ou definições, não tendo qualquer conexão com conceitos ou significados que estão por trás dos procedimentos usados inicialmente. Este tipo de tarefas não exige explicação ou, quando exigem, são explicações que focam unicamente a descrição do procedimento.

Um modo de melhorar uma compreensão conceptual da Matemática deve focar-se em torno de tarefas matematicamente desafiantes, que promovam o pensamento flexível, raciocínio e resolução de problemas (Smith et al., 2009), dando aos alunos oportunidades para partilhar e clarificar ideias, desenvolver argumentos convincentes, desenvolver uma linguagem para exprimir ideias Matemáticas e aprender a partir de outras perspetivas (NCTM, 2000). Brodie (2010) defende que as tarefas a propor devem considerar representações e resultados diversos que possam culminar em desacordos e desafios, ou tarefas que permitam aos alunos investigar, conjeturar e justificar.

De forma a promover o raciocínio matemático, o projeto REASON (Raciocínio matemático e Formação de Professores) desenvolveu princípios para elaboração de tarefas para promover o raciocínio Matemático. Estes princípios "não visam processos de raciocínio específicos, mas, pela sua natureza, podem promover um ou vários processos de raciocínio matemático" (REASON, 2019) (Quadro 9).

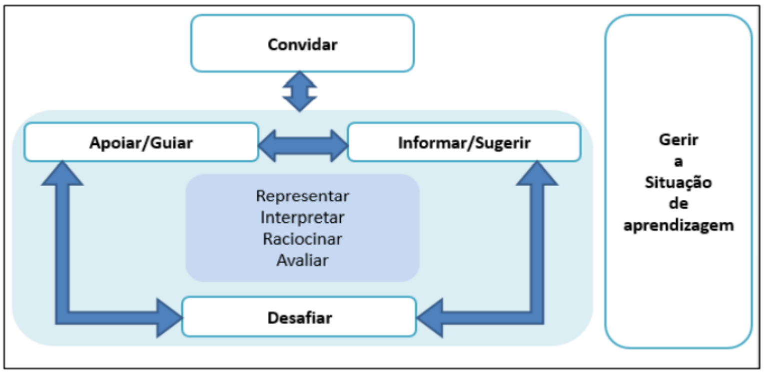
Quadro 9. Princípios para a elaboração de tarefas de acordo com o Projeto REASON.

1. Incluir questões que permitem uma variedade de estratégias de resolução; *2.* Incluir questões que envolvem uma variedade de representações; *3.* Incluir questões que incentivem e favoreçam a reflexão sobre os processos de raciocínio utilizados;	Princípios gerais
4. Incluir questões que incentivem a formulações de generalizações baseadas na observação de semelhanças e diferenças entre objetos; *5.* Incluir questões que incentivem a formulação de generalizações a partir do conhecimento prévio; *6.* Incluir questões que incentivem a formulação de generalizações por transformação das condições da situação;	Princípios específicos para promover a *Generalização*
7. Incluir questões que solicitem ou incentivem a justificação de respostas, ou de estratégias de resolução, ou de afirmações Matemáticas; *8.* Incluir questões que solicitem ou incentivem justificações de natureza diversa, nomeadamente, com base na coerência logica, com recurso a exemplos genéricos ou contraexemplos, por exaustão ou absurdo; *9.* Incluir questões que solicitem a identificação justificada da verdade ou falsidade de afirmações Matemáticas; *10.* Incluir questões que solicitem ou incentivem a análise por parte do aluno de justificações apresentadas por outros;	Princípios específicos para promover a *Justificação*
11. Incluir questões que incentivem o estabelecimento de uma organização de objetos com base na identificação de características desses objetos; *12.* Incluir questões que incentivem o estabelecimento de uma organização hierárquica ou partitiva por classes.	Princípios específicos para promover a *Classificação*

Ação do professor. O professor ocupa um papel fundamental na promoção do raciocínio matemático. Segundo o NCTM (2009), uma das ações fundamentais que precisa ser considerada pelos professores para promover o raciocínio matemático nos seus alunos é o questionamento. Mata-Pereira (2018) considera que "se as perguntas são habitualmente mais provocatórias, os alunos esperam ter que dar respostas mais complexas e que envolvam processos de raciocínio" (p. 758). As ações do professor precisam de garantir oportunidades de interação, uma vez que "as aulas onde os alunos expressam os seus pensamentos, explicando-os e justificando-os, constituem ambientes propícios ao desenvolvimento do seu raciocínio matemático" (Araman et al., 2019, p. 470). Assim, o papel do professor é fundamental, iniciando-se pela seleção das tarefas apropriadas e passando pela definição sobre quando e como estimular o pensamento dos alunos, até culminar no constante incentivo para que estes revelem a responsabilidade intelectual de construir e defender as suas ideias Matemáticas. Segundo Ponte (2005), uma mesma tarefa pode ser usada para diferentes objetivos curriculares, assim como para um mesmo objetivo podem ser usadas diferentes tarefas. O professor desempenha um papel central neste processo competindo-lhe implementar estratégias adequadas e fomentar contextos favoráveis ao desenvolvimento da capacidade dos alunos através de cenários de aprendizagem assentes em diferentes tipos de tarefas. O NCTM (2007) aponta que as "tarefas significativas, por si só, não são suficientes para um ensino eficaz" (p. 20), reforçando a ideia do papel do professor na criação/adaptação das tarefas assim como toda a envolvência implícita à aula.

Como consequência da resolução das tarefas propostas aos alunos emerge a relevância que a discussão sobre as mesmas tem na sistematização de conhecimentos matemáticos. Ponte et al. (2013) desenvolveram um quadro de análise dos momentos de discussão, onde se distinguem as ações do professor diretamente relacionadas com os tópicos e processos matemáticos e as ações que têm a ver com a gestão de aprendizagem (Quadro 10).

Quadro 10. Quadro de análise das ações do professor para a gestão de aprendizagens (Ponte et al., 2013, p. 59)



Para Ponte et al. (2013), o ato de *Convidar* é uma ação que tem como objetivo iniciar uma discussão; o ato de *Apoiar/Guiar* é um conjunto de ações que pretendem orientar os discentes na resolução de uma tarefa através de perguntas ou observações que apontam, de forma explicita ou implícita, o caminho que estes podem seguir; o ato de *Informar/Sugerir* abrange ações em que o professor dá sugestões, apresenta argumentos ou valida as respostas dos alunos; e o ato de *Desafiar* consiste em desafiar os alunos a assumirem uma postura mais proactiva, no sentido de produzirem novas representações, interpretarem um enunciado.

Araman et al. (2019) organizaram quatro categorias de ações que apoiam o raciocínio matemático (Quadro 11).

Quadro 11. Análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático (Araman et al., 2019, p. 476)

Categorias	**Ações**
Convidar	- Solicita resposta para questões pontuais - Solicita relatos de como os alunos fizeram
Guiar/Apoiar	- Fornece pistas aos alunos - Incentiva a explicação - Conduz o pensamento do aluno - Focaliza o pensamento do aluno para factos importantes - Encoraja os alunos a (re)dizerem suas respostas - Encoraja os alunos a (re)elaborarem suas respostas
Informar/Sugerir	- Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos - Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos - (Re)elabora respostas fornecidas pelos alunos - Fornece informações e explicações - Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução
Desafiar	- Solicita que os alunos apresentem razões (Justificativas) - Propõe desafios - Encoraja a avaliação - Encoraja a reflexão - Pressiona para a precisão - Pressiona para a generalização

As ações que o professor possa tomar podem ser ambíguas. Se, por um lado, o professor apresenta muitas sugestões ou até mesmo informações, a dificuldade da tarefa pode eventualmente diminuir, não favorecendo o raciocínio matemático por parte dos discentes. Por outro, se o professor não colmatar as dificuldades dos discentes na resolução de uma dada tarefa, estes podem desanimar e até mesmo desistir da resolução da mesma. Então, o professor deve acompanhar sempre que possível os discentes, recorrendo a questões de focalização, confirmação e inquirição (Ponte & Serrazina (2000). Estes mesmos autores, designam por:

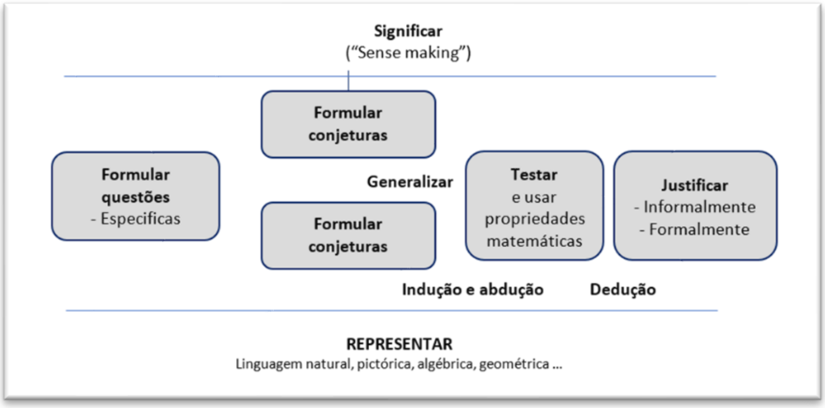
- ✓ Questões de focalização - questões que têm por objetivo levar o aluno a seguir um determinado percurso de raciocínio;
- ✓ Questões de confirmação - questões para os quais o professor sabe antecipadamente a resposta, pretendendo apenas verificar os conhecimentos do aluno;
- ✓ Questões de inquirição - questões que procuram levar o aluno a raciocinar e explicitar o seu raciocínio, incentivando-o a comunicar e a esclarecer o professor.

Aliado ao questionamento, o professor pode incentivar os alunos a ouvir os colegas e a discutir as ideias dos outros, eventualmente colocando também desafios. Brodie (2010) realça que o professor deve encorajar os alunos a comunicar e partilhar as suas ideias e incentivá-los a escrever e partilhar várias versões do seu raciocínio. Nos momentos de discussão e reflexão sobre as tarefas propostas, a justificação dos alunos deve prevalecer de forma que estes exponham as suas próprias ideias e reflitam sobre as demais (Brodie, 2010).

2.2.4.4. A interligação entre o raciocínio matemático e as representações

O raciocínio apoia-se nas representações e articula-se com os processos de significação (*sense making*) que consistem em desenvolver a compreensão de uma situação, contexto ou conceito conectando-o com o conhecimento existente (NCMT, 2009). Nesse sentido, a significação apenas é possível ao estabelecer conexões. No Quadro 12 apresenta-se um quadro conceptual para a análise do raciocínio que relaciona a generalização e a justificação com os raciocínios indutivo e dedutivo, assim como a formulação de questões e conjeturas.

Quadro 12. Quadro conceptual para análise do raciocínio (Mata-Pereira & Ponte, 2011)



Como se constata, o raciocínio matemático apoia-se nas representações articulando-se com os processos de representação e significação. De acordo com Mata-Pereira e Ponte (2011), os raciocínios indutivo e abdutivo ocorrem sobretudo durante a formulação de conjeturas, enquanto o raciocínio dedutivo tem lugar em especial durante o teste e a justificação. O raciocínio dedutivo, enquanto aspeto da significação, ajuda a compreender o significado do que está a ser demonstrado, a ver o que é verdade, mas também porque é que é verdade (Hanna, 2000). Deste modo, relacionar o raciocínio com as representações e a significação é essencial, não só para o desenvolvimento do raciocínio, mas também para a compreensão da Matemática.

As representações, na maioria das vezes, servem de suporte do pensamento humano, estando estritamente ligadas ao raciocínio matemático (NCMT, 2007; Ponte et al., 2012). Assim sendo, as representações devem ser "tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos e das relações Matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos" (NCTM, 2007, p. 75). Stylianou (2010) advoga que as representações ajudam a interpretar, a sistematizar e a compreender a informação dada no enunciado, a explorar e a perceber qual a melhor forma de chegar a uma resposta correta, bem como a monitorizar e a avaliar o processo de resolução de um dado problema. Na sua perspetiva, as representações constituem igualmente uma forma de comunicar sobre os conceitos em causa.

Aquando da resolução de um problema, o aluno depara-se com a escolha apropriada da representação a usar, que em certa medida depende da sua interpretação (*sence making*) (NCTM, 2009). De acordo com Stylianou (2010), não raras vezes, os alunos revelam muitas dificuldades em selecionar as representações mais apropriadas para servir de base aos seus raciocínios. Na sua perspetiva, as dificuldades que muitas vezes os discentes revelam ao nível das representações podem dever-se às conceções dos seus professores, uma vez que estes baseiam o seu ensino nas suas próprias representações, formadas enquanto alunos (Stylianou, 2010). Na verdade, "quando os alunos conseguem aceder às representações Matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente" (NCTM, 2007, p. 75). Tal como mencionado pelo NCTM (2007), pode-se concluir que as representações Matemáticas estão interligadas ao raciocínio matemático. De facto, dada a natureza abstrata dos objetos matemáticos, só é possível raciocinar sobre esses objetos usando representações. A representação é um processo matemático que leva os alunos a apresentarem as suas ideias. Nesta perspetiva, ao usarem as representações, os discentes compreendem o que estão a fazer, pois as representações apoiam o seu pensamento. Assim, para conhecer o seu raciocínio, é necessário que estes comuniquem, sendo isso possível através de diferentes representações. Kalathil e Sherin (2000) referem que as representações dos alunos dão informações sobre o que pensam, sobre o seu conhecimento e como este é construído e partilhado. Segundo o NCTM (2007), as representações não só ajudam os discentes a desenvolverem a compreensão dos tópicos matemáticos, mas também servem de suporte do raciocínio, permitindo obter resultados e tirar conclusões. Uma vez que não é possível aceder diretamente ao raciocínio matemático, somente através das representações produzidas pelos alunos é que os professores poderão compreender os seus modos de raciocínio e ~~de~~ criar "métodos de ensino capazes de desenvolver poder matemático" (Goldin, 2002, p. 198). Uma vez que existem diferentes formas de representar e que estas estão interligadas, importa perceber quais as vantagens e desvantagens do uso das diferentes representações no ensino e na aprendizagem.

2.2.4.5. O raciocínio matemático na aprendizagem de funções

O principal objetivo do ensino da Matemática é promover o desenvolvimento do raciocínio dos alunos "o que justifica o importante papel da Matemática em todos os sistemas educativos" (Ponte, et al., 2012, p. 2).

> Ao raciocínio matemático estão associadas diversas formas de pensamento importantes para todos aqueles que fazem Matemática, tais como: prever resultados, essenciais para a formulação de conjeturas; questionar soluções, mesmo as corretas; procurar padrões; recorrer a representações alternativas; analisar e sintetizar. (Domingos, et al., 2013, p. 8)

Na perspetiva de Abrantes et al. (1999), o raciocínio matemático é uma certa “atividade intelectual” (p. 34). Segundo estes autores, para que os alunos desenvolvam esta ‘atividade intelectual’ é necessária a existência de diferentes conteúdos, a cada um dos quais se associa uma variedade de raciocínios, respetivamente: Aritmética, Álgebra, Geometria, entre outros. Assim, o ensino da Matemática tem por base uma diversidade de tipos de raciocínio.

O raciocínio algébrico está associado ao domínio de Álgebra, que inclui a capacidade de manipular símbolos. O pensamento algébrico, que proporciona a compreensão da generalização, associada à Matemática e não apenas à exploração de situações de aprendizagem computacional, inclui a capacidade de manipular símbolos, de lidar com cálculo algébrico e com funções, assim como a aptidão para trabalhar com outras estruturas Matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos (Kilpatrick & Izsák, 2008). Para o NCTM (2007), o pensamento algébrico diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação. Blanton e Kaput (2005) definem pensamento algébrico como “um processo no qual os alunos generalizam ideias Matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecendo essas generalizações através do discurso da argumentação, expressando-as gradualmente de modos formais e apropriados à idade” (p. 413).

Face ao supracitado, o raciocínio algébrico é influenciado pelo pensamento algébrico pois usa o cálculo algébrico, bem como as funções e estruturas matemáticas na interpretação e resolução de problemas. Para Kaput (2008), o pensamento algébrico está associado a dois aspetos essenciais: formular e expressar generalizações gradualmente das formais para as convencionais; e raciocinar com representações simbólicas através da sua manipulação. Estes aspetos essenciais integram as três abordagens escolares da Álgebra: (1) a Álgebra como estudo das estruturas e sistemas generalizados dos cálculos e das relações numéricas (aritmética generalizada); (2) a Álgebra como estudo das funções, relações e variações (relações funcionais); e (3) a sua aplicação em situações de modelação para exprimir e formalizar generalizações. Kaput (2008) referencia o raciocínio funcional como um dos principais eixos do pensamento algébrico. Importa então perceber o que é o raciocínio funcional.

O raciocínio funcional é descrito por Blanton (2008) como um processo de raciocínio que é utilizado na construção da generalização de padrões e relações. Neste processo faz-se uso de vários recursos, nomeadamente, ferramentas linguísticas e representacionais permitindo a exploração das relações generalizadas ou recorre-se às funções que o constituem. Ainda segundo esta autora, o centro do raciocínio funcional é a relação entre duas grandezas particulares, usando uma regra (lei de formação) de correspondência. Smith (2008) salienta que aquando da utilização do raciocínio funcional, os alunos necessitam de recorrer ao pensamento representacional, centrando-se particularmente na relação entre duas ou mais quantidades de variáveis. Este tipo de pensamento permite a transição de relações particulares para a generalização entre os casos.

Os alunos ao explorarem relações que envolvem correspondências e variações desenvolvem o raciocínio funcional. Smith (2003) considera três formas distintas de analisar estas relações: (1) O pensamento recursivo, na descoberta da variação de valores; (2) O pensamento covariacional, analisando a forma como duas quantidades variam simultaneamente e considerando a variação como uma parte explícita e dinâmica da descrição de uma função; (3) A relação de correspondência, que consiste na identificação da correlação entre cada valor da variável independente e o da variável dependente.

Trigueros e Ursini (2003) consideram que “o desenvolvimento da linguagem algébrica e a sua utilização requer o desenvolvimento do conceito de variável como um único conceito multifacetado que inclui diferentes aspetos” (p. 1). Estas autoras propuseram uma categorização para o conceito de variável, apresentando as seguintes categorias (Quadro 13): variável como incógnita; variável como número generalizado; e variável em relações funcionais.

Quadro 13 Categorização para o conceito de variável (Trigueros & Ursini, 2003)

Variável	Conceptualização e representação	Interpretação dos símbolos	Manipulação
Como incógnita	De uma incógnita numa situação particular e/ou numa equação.	Como incógnita específica numa equação.	Fator, simplificação, expansão, transpor ou equilibrar numa equação.
Como número generalizado	De um número generalizado envolvido em métodos gerais ou regras deduzidas de padrões numéricos e/ou geométricos e/ou famílias de problemas similares.	Como generalização em expressões algébricas ou em expressões de métodos gerais.	Fator, simplificação e expansão para rearranjar expressões.
Em relações funcionais	De Relações funcionais (correspondências e variação) através de tabelas, gráficos ou representações analíticas.	Representando correspondência e variação conjunta em representações analíticas, tabelas e gráficos.	Fator, simplificação, expansão para rearranjar uma expressão, substituir valores para determinar intervalos de variação, valores máximo/mínimo e comportamentos globais das relações

Kieran (1992) distingue três modos de representar relações funcionais: (1) Geometricamente, usando esquemas, diagramas, gráficos, entre outros; (2) Aritmeticamente, com recursos a números, tabelas ou pares ordenados; e (3) Algebricamente, através do uso de símbolos literais, fórmulas e correspondências. Percebe-se porque é que esta autora afirma o quanto é importante para a aprendizagem dos alunos terem tarefas que lhes permitam recorrer a vários tipos de representação, pois ajuda-os a interpretar e analisar as relações existentes entre as variáveis e permite-lhes desenvolverem gradualmente os seus raciocínios para processos como a generalização e a abstração. A envolvência da construção, interpretação e manipulação de representações de uma relação funcional entre duas variáveis independentemente da sua representação, proporcionam o contacto com vários aspetos de natureza algébrica. Resumidamente, a melhor forma de evidenciar a importância deste raciocínio é a afirmação de que o raciocínio funcional é um caminho para o pensamento algébrico.

2.3. Estratégias de Intervenção

Este subcapítulo especifica as metodologias de ensino e de aprendizagem implementadas na minha intervenção pedagógica e a recolha e tratamento de dados.

2.3.1. Metodologias de ensino e de aprendizagem

As recomendações atuais para o ensino de Matemática apontam para a valorização da aquisição do conhecimento matemático com compreensão, incluindo formas de comunicar aos outros o raciocínio e as estratégias de resolução de problemas matemáticos (Ruthven et al., 2011). Partindo desta perspetiva, Canavarro et al. (2012) consideram que o ensino direto, que tem subjacente a ideia de transmissão de conhecimentos do professor seguidamente da realização de tarefas por parte dos discentes, não é o mais ajustado para lidar com as atuais exigências curriculares. Os alunos precisam de oportunidades para realizar tarefas que lhes permitam raciocinar matematicamente, atribuindo sentido ao seu conhecimento. Este conhecimento surge da discussão coletiva sobre a resolução das tarefas que lhes são propostas (NCTM, 2000; Ponte, 2005). Neste contexto, o ensino exploratório revela-se apropriado para que o aluno adquira conhecimento matemático, pois está centrado no trabalho do aluno, sendo que a sua aprendizagem ocorre "não de ouvir diretamente o professor ou de fazer esta ou aquela atividade prática, mas sim da reflexão realizada pelo aluno, a propósito da atividade que realizou" (Ponte, 2005, p. 15). No ensino exploratório, o conhecimento emerge em consequência do trabalho com tarefas matematicamente mais valiosas, realistas e complexas que desencadeiam a necessidade ou apresentam a vantagem da partilha de estratégias e ideias matemáticas. Esta partilha é discutida e sistematizada com toda a turma num processo em que o professor desempenha um papel relevante de organizador (Canavarro, 2011).

De acordo com Stein et al. (2008) e Canavarro (2011), uma aula de ensino exploratório encontra-se organizada em três fases: a fase de 'lançamento' da tarefa, a fase da 'exploração' pelos alunos e a fase de 'discussão e sintetização'. Na primeira fase é apresentada a tarefa à turma e o professor deve assegurar, em poucos minutos, que estes entendam o que se espera que façam, assim como o tempo destinado à mesma (Anghileri, 2006). Na segunda fase, o professor apoia os discentes no trabalho autónomo quer realizado individualmente, quer em pares, procurando garantir que haja uma participação ativa de todos os alunos (Stein et al., 2008). Na terceira fase, o professor promove a discussão, não apenas gerindo as intervenções e interações dos diferentes alunos, mas também promovendo a qualidade Matemática das suas explicações e argumentações (Ruthven el al., 2011).

Considerando tais pressupostos, pautei as minhas estratégias de ensino recorrendo às fases que organizam o ensino exploratório. Na primeira fase, traduzi a minha ação através da apresentação de tarefas à turma, o que exigiu uma interpretação das mesmas, esperando que os alunos entendessem o que era necessário fazer e que se sentissem desafiados a resolvê-las (Anghileri, 2006; Canavarro, 2011; Stein et al., 2008). Seguindo as indicações de Anghileri (2006), planeei o desenvolvimento do trabalho estabelecendo o tempo necessário à realização das diferentes fases da tarefa e defini os recursos e os modos de trabalho dos discentes. Aquando da planificação das tarefas, tive em atenção os princípios do projeto REASON (Quadro 9) de forma a promover o raciocínio matemático dos alunos.

Na segunda fase, exploração da tarefa, os alunos trabalharam autonomamente em pares. Na realização das tarefas, aquando das eventuais dúvidas dos alunos, tive em atenção dois fatores: tentar não diminuir o grau de exigência cognitiva da tarefa (Stein & Smith, 1998); e não uniformizar as estratégias de resolução, de forma a promover 'discussão' na fase seguinte. O acompanhamento prestado por mim tornou-se, a este nível, tão importante como a escolha das tarefas. Procurei, assim, através das ações que promovem o raciocínio, *guiar*, *apoiar*, *sugerir* e *desafiar* (Ponte et al., 2013; 2017) os alunos na resolução das tarefas, disponibilizando-lhes tempo suficiente para que conseguissem superar as dificuldades surgidas. Paralelamente, procurei sempre encorajar os alunos a salientarem as suas ideias e estratégias de forma que apresentassem uma justificação válida com uma correta comunicação matemática. Ao *desafiar* os alunos procurei incentivar a sua autonomia na resolução da tarefa, procurando que delineassem todos os procedimentos e fases para essa resolução, "seja em termos de representação, da interpretação de enunciados, do estabelecimento de conexões, ou de raciocinar, argumentar ou avaliar" (Ponte et al., 2013, p. 59). A realização de atividades desta natureza permitiu aos discentes que procurassem novas formas de representação, estabelecessem novas conexões, refletissem e avaliassem a situação, generalizassem os resultados obtidos e justificassem os seus raciocínios (Araman et al., 2019).

A fase da 'discussão e sistematização' é a ocasião mais apropriada para que sejam expostas conexões e significados matemáticos, traduzindo-se num momento de reflexão que pode permitir aos alunos ligar ideias sobre vários temas e reforçar aspetos fundamentais dos processos matemáticos transversais, como a comunicação, a resolução de problemas e o raciocínio matemático. De forma a atingir em plenitude os objetivos propostos, tentei reger-me pelas conclusões de Stein et al. (2008), que vão além do 'mostrar e dizer'. Neste contexto, antecipei possíveis dificuldades dos alunos; monitorizei o trabalho dos alunos, recolhendo a informação necessária; selecionei os aspetos a salientar durante a discussão; sequenciei as intervenções dos alunos; e estabeleci conexões entre as diversas resoluções dos alunos.

No final da discussão, geri o discurso na procura de institucionalizar as aprendizagens que os alunos deviam reconhecer e partilhar, surgindo novos conceitos ou procedimentos emergentes da discussão da resolução das tarefas ou aperfeiçoando conceitos e procedimentos já conhecidos e aplicados. Nesta fase, procurei estabelecer conexões com situações anteriores e/ou reforçar aspetos fundamentais dos processos matemáticos transversais, como a representação, a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática (Canavarro, 2011, Stein et al., 2008).

A intenção subjacente ao desenvolvimento do ensino exploratório consistiu em fazer com que os alunos construíssem o seu conhecimento matemático (factos e procedimentos matemáticos) com significado, levando-os, consequentemente, a desenvolver uma compreensão mais profunda da Matemática (Canavarro, 2011). Com efeito, comecei por escolher criteriosamente as tarefas tendo sempre como referência os princípios promotores do raciocínio matemático e planificar a respetiva exploração.

Tarefas. Durante o processo de seleção das tarefas que integraram as minhas estratégias de ensino e de avaliação pedagógica, além dos fatores supramencionados, considerei o conteúdo matemático intrínseco à tarefa, as características dos alunos e os modos de aprendizagem Matemática que os possibilitam (NCTM, 2007). A qualidade, a natureza e a adequação das tarefas podem influenciar e estruturar a forma como os discentes raciocinam matematicamente, servindo para limitar ou ampliar a compreensão dos conceitos envolvidos. Assim, propus tarefas simultaneamente desafiantes e estimulantes (Menezes, 2000). Propor uma tarefa com o objetivo de 'verificar o que foi assimilado' pode não ser muito eficiente, pois a maioria das tarefas que têm como foco a verificação é de memorização, e este tipo de tarefa possui baixo grau de dificuldade cognitivo. De acordo com o projeto REASON diversifiquei o tipo de tarefas propostas em sala de aula, uma vez que todos os tipos são fundamentais para uma aprendizagem significativa. Complementarmente, e de acordo com Brodie (2010) e os preceitos do projeto REASON, as tarefas que propus apresentavam representações e resoluções diversas, de forma a culminar em desacordos e desafios, ou tarefas que permitiam aos alunos investigar, conjeturar e justificar. Assim, nas tarefas que propus, tentei incluir questões que: (i) permitissem uma variedade de estratégias de resolução [P.Geral_1]; (ii) envolvessem uma variedade de representações [P.Geral_2]; (iii) incentivassem e favorecessem a reflexão sobre os processos de raciocínio utilizados[P.Geral_3]; (iv) solicitassem ou incentivassem a justificação de respostas, ou de estratégias de resolução, ou de afirmações matemáticas [P.Justificação_7]; (v) formulassem generalizações quer através de semelhanças entre objetos [P.Generalização 4], quer a partir de conhecimentos prévios [P.Generalização_5]. De forma a promover uma maior interação, e tal como como é proposto pelo modelo de ensino exploratório, os alunos trabalharam em pares.

Trabalho em pares. A diferença entre a metodologia tradicional que rege os processos de ensino e de aprendizagem e a metodologia cooperativa é que enquanto a primeira incide numa aprendizagem individual segundo a qual as atividades a realizar dependem em exclusivo do rendimento individual, a segunda tem como base uma aprendizagem partilhada (Alarcão & Canha, 2014). Assim, é de extrema importância aprender a viver e a interagir em pares/grupos, respeitando as ideias dos colegas, discutindo as melhores estratégias de resolução de tarefas/problemas. O trabalho de pares permitiu que os alunos interagissem estimulando a discussão quer na interpretação, quer na resolução das tarefas. Porém, em sala de aula, trabalhar em pares tornou-se um desafio para mim, pois, se por um lado, não estava habituada a este tipo de ensino, por outro, sentia dificuldade em acompanhar todos os pares em simultâneo. Assim, aquando da realização do trabalho tentei orientar, moderar e facultar os recursos necessários à realização das tarefas, colocando questões individuais e à turma de forma a suscitar comentários e sugestões, criando oportunidades para uma participação alargada e equitativa dos alunos (Gutstein, 2013; Rubin & Hayes, 2010). Tal como referenciado por Freitas e Freitas (2003), o trabalho em pares contribuiu para uma redução da ansiedade, da insegurança e do sentimento de incapacidade dos alunos com mais dificuldades face a uma tarefa ou a um objetivo, pois estes sentiam-se mais seguros com a interajuda do seu colega. Na verdade, isso foi bem notório ao longo das aulas, sentindo-se progressivamente os alunos mais à vontade para colocar questões e interagir com os intervenientes na sala de aula.

2.3.2. Recolha de dados

De forma a avaliar as estratégias da minha intervenção pedagógica utilizei diferentes métodos de recolha de dados: (1) Observação; (2) Gravação de áudio e vídeo; (3) Produções escritas dos alunos; e (4) Questionários.

(1) *Observação*. A observação do que acontece na sala de aula é intrínseca à ação do professor em prol das atividades que pretende que os alunos realizem. Entre a observação participante e a observação não participante, considero que a observação direta dos discentes em sala de aula se tornou um fator fundamental da minha prática pedagógica sobretudo nos momentos de trabalho autónomo de díade ou tríades. Este tipo de observação permitiu-me compreender a interação gerada entre os alunos, os processos de raciocínio que surgem aquando da interação e discussão sobre a resolução de uma dada tarefa, percebendo que tipo de dificuldades emergem ao nível dos conhecimentos matemáticos. Com efeito, a observação em ambientes naturais apresenta muitas vantagens, designadamente: a espontaneidade dos comportamentos dos participantes (Kenrick et al, 1999); a possibilidade de observar os eventos do mundo real à medida que ocorrem; a perceção da realidade do ambiente em estudo, viabilizando a obtenção de um retrato mais fiel da situação e uma menor probabilidade de produzir variabilidade residual ou mesmo de manipular as situações. A observação de aulas também tem, no entanto, as suas limitações. Assim, aquando da observação, não é produtivo parar a meio da mesma ou de um diálogo com os interlocutores para tomar notas, ou gravar tudo o que vai ocorrendo, sendo necessário alguma seletividade naquilo que se pretende registar. Devemos notar igualmente que, em algumas situações, os critérios de seleção dos eventos a observar não são tão óbvios quanto se deseja, podendo haver a necessidade de proceder à sua adequação, tarefa nem sempre fácil de fazer.

(2) *Gravação de áudio e vídeo*. Todas as sessões de trabalho realizadas na intervenção pedagógica foram gravadas em áudio e vídeo, com a respetiva autorização da Direção da Escola, bem como dos encarregados de educação dos alunos intervenientes neste estudo (Anexo 1). Para o NCTM (2007), as gravações fazem parte das técnicas de avaliação utilizadas pelos professores, visto que a interação entre os vários intervenientes na sala de aula pode orientar possíveis mudanças e, por outro lado, permite ao professor refletir sobre decisões que toma na aula. As gravações das aulas permitiram descrever momentos de discussão sobre a resolução das tarefas propostas. Nas gravações áudio, foi possível captar alguns dos diálogos das intervenções, assim como gravar os diálogos durante a realização da discussão entre os pares sobre as atividades realizadas. Todas as gravações foram analisadas, sendo que, em algumas situações, a análise ajudou-me a refletir sobre as atividades das sessões de trabalho,

em particular sobre as perguntas e as respostas apresentadas pelos estudantes durante a sessão. Tal como a observação direta, a gravação áudio/vídeo das aulas também possui desvantagens. No momento da transcrição do registo oral para o escrito, senti necessidade de visualizar repetidamente as gravações, até sentir ter conseguido ser o mais fiel possível nas transcrições. O processo de transcrição foi um processo demorado, bastante complicado, ~~o~~ que despendeu bastante tempo na sua execução. Em contrapartida, as vantagens superam as desvantagens, uma vez que proporcionam uma análise mais detalhada e permitem ainda ilustrar situações de um modo mais fiável do que com o uso exclusivo de registos escritos.

(3) *Produções escritas dos alunos*. A recolha documental tem como objetivo "selecionar, tratar e interpretar informação bruta existente em suportes estáveis [...] com vista a dela extrair algum sentido" sobre o estudo a que corresponde a investigação (Carmo & Ferreira, 2008, p. 73). Sendo a comunicação escrita considerada uma dimensão relevante em todas as áreas curriculares e particularmente valorizada nas orientações oficiais na área da matemática (Ministério da Educação, 2007, 2021), as produções dos alunos assumem neste trabalho "uma forma de comunicação que tem um papel complementar fundamental [na] aprendizagem" (Ministério da Educação, 2007, p. 45). Na promoção de representações que potenciem os processos comunicativos (Boavida et al., 2008) procurei "incentivar os alunos a clarificar os conceitos matemáticos através de processos de comunicação, promovendo (...) o registo escrito das suas estratégias de resolução de problemas" (Ministério da Educação, 2007, p. 45), dado que os registos escritos "ajudam a vincar as ideias, servem de apoio à reflexão e ao aprofundamento por parte dos alunos e privilegiam momentos de retorno ao conhecimento construído" (p. 45). Foi neste pressuposto que foram analisadas as resoluções escritas das tarefas propostas aos alunos. Como por fim se verá, elas ajudam a compreender melhor o raciocínio dos alunos no decorrer das discussões coletivas.

(4) *Questionários*. No início do ano letivo, os alunos responderam a um questionário inicial (Anexo 2) que me facultou um conhecimento mais abrangente sobre a turma, e especificamente sobre os conhecimentos dos discentes acerca das temáticas raciocínio e representações. No final da minha intervenção pedagógica, foi realizado um outro questionário (Anexo 3), que teve como finalidade conhecer as opiniões dos alunos sobre as estratégias/metodologias de ensino utilizadas na aprendizagem das funções. Este questionário é constituído por duas partes, sendo a primeira composta por vinte e nove questões de resposta fechada em que as perguntas obedecem a uma escala do tipo Likert. A segunda parte é constituída por perguntas de resposta aberta, que pretendem aferir as suas opiniões sobre vantagens e desvantagens das temáticas em estudo. De forma a ter uma melhor perceção sobre as

diferentes temáticas, a primeira parte do questionário foi subdividida em cinco dimensões subjacentes à perceção dos alunos relativamente: (1) às tarefas propostas; (2) ao trabalho em pares; (3) às representações; (4) ao raciocínio; (5) às ações promovidas pela professora na promoção do raciocínio. As respostas aos itens formulados em cada umas destas dimensões estão classificadas em cinco categorias: Discordo Totalmente (DT); Discordo (D); Nem concordo nem Discordo (NCND); Concordo (C); e Concordo Totalmente (CT). Todos os questionários foram respondidos individualmente, através do Google Forms.

2.3.3. Análise dos dados

As produções escritas dos alunos em paralelo com as gravações áudio/vídeo foram a base para a interpretação dos seus processos de raciocínio. Neste relatório de estágio, a análise dos dados foi realizada através da análise de conteúdo, que, segundo Bardin (2011), é uma técnica cuja finalidade é tratar e interpretar os dados recolhidos, permitindo "a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/receção (variáveis inferidas)" (Bardin, 2011, p. 47). A análise efetuada teve como ponto de partida a organização proposta por Bardin, ou seja, a organização em três polos cronológicos: 1. Pré-análise; 2. A exploração do material; 3. O tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. A primeira fase citada respeita a organização e sistematização de ideias, sendo selecionados os documentos que serão submetidos à análise, formuladas hipóteses e objetivos e elaborados indicadores (Bardin, 2009). Na segunda fase, Bardin (2009) aponta as operações de codificação, que correspondem às transformações dos dados recolhidos em recortes agregados que permitam representar o conteúdo em unidades. Nesta etapa, foram utilizadas as seguintes regras: exaustividade, que tem em conta todo o conteúdo sem deixar de fora excerto ou quaisquer elementos; exclusividade, que separa os mesmos elementos dentro de uma única categoria; objetividade, que permite que codificadores diferentes classifiquem os elementos propostos nas mesmas categorias; e pertinência, que garante que as categorias estejam relacionadas com os objetivos propostos.

Atendendo à natureza do objetivo delineado, adotei uma abordagem qualitativa e interpretativa, através da observação participante. Fui observadora participante na medida em que observei cuidadosamente as aulas e participei na atividade de recolha de dados, com o intuito de compreender a atividade Matemática dos alunos na resolução das tarefas propostas em contexto de sala de aula (Bogdan & Biklen, 1994). Com esta finalidade, os dados foram recolhidos através das resoluções das tarefas propostas pelos alunos no estudo de tópicos de funções antes da sua discussão no grupo turma. A análise de dados assentou na análise do conteúdo dessas resoluções, sendo traduzida pelas frequências dos tipos de resposta consideradas corretas (C), parcialmente corretas (PC), incorretas (I) e não respondidas (NR). Considerei que tais tipos de resposta traduzem a capacidade do aluno em se apropriar, na representação gráfica, dos tópicos em estudo através da compreensão das propriedades que os definem.

Atendendo ao objetivo do estudo, a análise de conteúdo foi realizada de acordo com as seguintes categorias: (i) processos de raciocínio, incluindo o seu nível de complexidade; (ii) representações; e (iii) significação. Nos processos de raciocínio dei atenção à formulação de conjeturas, ao seu teste de verificação, bem como à justificação apresentada. Nas representações, pretendi essencialmente identificar os tipos de transformações usados, procurando analisar os tratamentos e as conversões. Finalmente, a significação pretende analisar a incidência deste aspeto durante a realização de cada tarefa por parte dos alunos.

Sendo vários os aspetos a evidenciar ao longo da minha prática pedagógica, importa salientar a colocação no texto da informação que resulta da análise dos dados recolhidos. Assim, a informação proveniente da observação de vídeo e áudio é contemplada no texto sob o código (OGAVn_#), em que n representa o número da aula analisada e # representa o número do momento da aula em análise. No que respeita às produções dos discentes, em termos individuais, estas encontram-se codificadas sob o código An, enquanto as produções de pares são codificadas com Gn, em que n representa um número identificador do aluno e do par, respetivamente.

Seguidamente, apresenta-se no Quadro 14 a codificação referente aos níveis de complexidade do raciocínio que resultam da análise das resoluções dos alunos.

Quadro 14. Codificação referente às características dos níveis de complexidade do raciocínio.

Características do nível de complexidade do raciocínio	**Codificação**
O raciocínio não tem qualquer justificação incluída.	[N_0]
Justificações que dependem de outros indivíduos ou de materiais de referência.	[N_1]
Justificação que tem como base um exemplo particular.	[N_2]
Justificação de natureza dedutiva, sendo que a justificação se baseia em princípios lógicos.	[N_3A]
Justificação de natureza dedutiva, sendo que a justificação se refere a um determinado exemplo.	[N_3B]
Justificação de natureza dedutiva, em que, a justificação é fundamentada através de argumentos de natureza dedutiva que não estão relacionados com nenhum exemplo específico.	[N_3C]

Na medida em que a "(...) análise de conteúdo se faz pela prática" (Bardin, 2009, p. 51), o próximo capítulo apresentará a exploração do material, tratamento dos dados, a inferência e a interpretação.

CAPÍTULO 3

INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Este capítulo tem como finalidade descrever, analisar e interpretar a informação recolhida nas aulas que lecionei sobre o tema que orientou a minha ação educativa (Tabela 4).

Tabela 4. Síntese da intervenção pedagógica

Aula	Tópico	Objetivos
1	Circunferência e círculo	Deduzir a equação reduzida da circunferência e do círculo.
2	Paridade de funções	Estudar a paridade de funções.
3	Transformações de funções quadráticas	Efetuar transformações geométricas de gráficos de funções quadráticas.
4	Resolução de problemas envolvendo a função quadrática	Resolver problemas envolvendo a função quadrática.
5	Função definida por ramos	Estudar funções definidas por ramos.
6	Função raiz quadrada e raiz cúbica	Estudar a função raiz quadrada e função raiz cúbica.

Com o intuito de explicitar a minha intervenção pedagógica, descrevo e interpreto momentos da mesma em torno dos seguintes tópicos lecionados: (i) Resolução de problemas envolvendo a função quadrática (aula 4); (ii) Função definida por ramos (aula 5); e (iii) Função raiz quadrada e a função raiz cúbica (aula 6).

3.1. Resolução de problemas envolvendo a função quadrática

Posteriormente ao estudo da função quadrática, seguiu-se a aplicação de conhecimentos adquiridos através da resolução de duas tarefas (Plano de Aula 1, Anexo 3). Estas tarefas, a par do tópico em estudo, tinham como finalidade: (1) criar oportunidades para os alunos operacionalizarem os processos de justificação e de generalização; (2) possibilitar o desenvolvimento do raciocínio matemático. De acordo com o projeto REASON, ambas as tarefas permitem uma variedade de estratégias de resolução [P.Geral 1], envolvendo uma variedade de representações [P.Geral 2]. Aliado a estes dois princípios, estas tarefas incitam essencialmente à justificação [P.Justificação 7] e à generalização [P.Generalização 5].

A primeira tarefa explorada denominou-se 'O salto do gafanhoto' (Figura 12).

Figura 12. Enunciado da tarefa - O salto do gafanhoto

Tarefa 1. O salto do gafanhoto

O Tomás encontrou um gafanhoto em cima de um muro. A dado momento, o gafanhoto saltou para o chão. Na tabela seguinte, estão registadas algumas das alturas atingidas pelo gafanhoto, t segundos depois de iniciar o salto:

t (segundos)	1	2	3
a (centímetros)	120	90	0

Considera que a altura atingida pelo gafanhoto t segundos após iniciar o salto pode ser definida por uma função quadrática, $a(t)$, e que $t = 1$ é o maximizante da função.

a) Determina a altura do muro.

b) No contexto da situação descrita, para que valores de t a expressão $a(t)$ tem significado? Justifica.

c) Qual foi a altura máxima atingida pelo gafanhoto? Explica como procedeste para chegar à resposta.

Desde que iniciou o salto, quanto tempo esteve o gafanhoto acima de meio metro de altura? Apresenta o resultado arredondado às décimas de segundo.

Fonte: Ípsilon, 10.º ano, Raiz Editora (Adaptado)

A análise das respostas dos alunos à primeira tarefa proposta (Figura 12) permitiu identificar o tipo de resposta que deram a cada um dos itens da tarefa (Tabela 5).

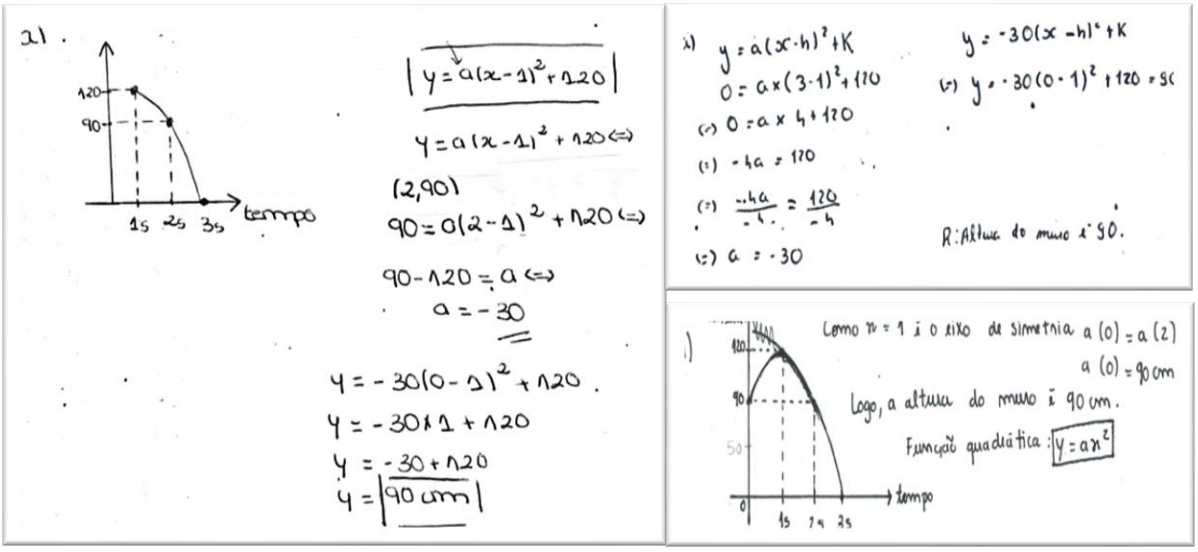
Tabela 5. Percentagem (%) dos tipos de resposta aos itens da tarefa – O salto do gafanhoto ($n = 9$)

Itens	**Tipo de resposta**			
	Correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não responde**
a)	7 (77,8)	1 (11,1)	0 (0)	1 (11,1)
b)	4 (44,4)	2 (22,2)	0 (0)	3 (33,3)
c)	8 (88,9)	0 (0)	0 (0)	1 (11,1)
d)	0 (0)	2 (22,2)	2 (22,2)	5 (55,6)

No primeiro item da tarefa, os alunos poderiam recorrer a diferentes estratégias de resolução [P.Geral 1] que implicavam o uso de várias representações [P.Geral 2]: recorrer ao maximizante da função, dado no enunciado, e a um par de valores que traduz uma das alturas do salto do gafanhoto contemplado na tabela inserida no enunciado da tarefa para definir a expressão que representa esse salto, $a(t) = -30(t-1)^2 + 120$, e de seguida determinar $a(0) = 90\ cm$, que é a altura do muro; ou identificar o eixo de simetria do gráfico da função quadrática que traduz o salto do gafanhoto ($t = 1$) para obter $a(0) = a(2) = 90$; ou recorrer a um sistema com três equações a três incógnitas, que se obtêm a partir dos valores dados na tabela, para definir a função do tipo $a(t) = at^2 + bt + c$.

Na resolução do item em análise, a maioria dos pares (77,8%) determinou corretamente a altura do muro, usando diferentes métodos de resolução, como ilustram as respostas dos grupos G2, G1 e G5 (Figura 13).

Figura 13. Resposta correta dos grupos G2, G1 e G5 ao item a) da tarefa – O salto do gafanhoto

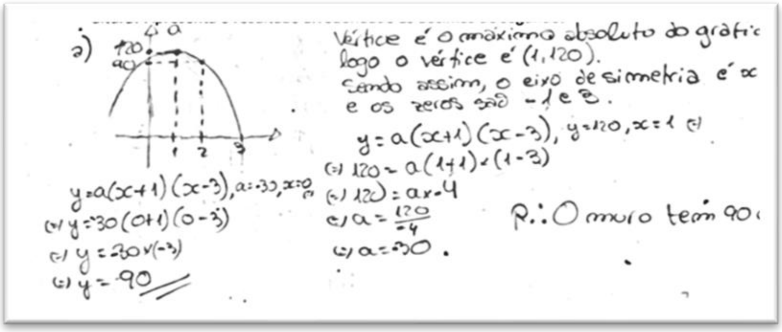


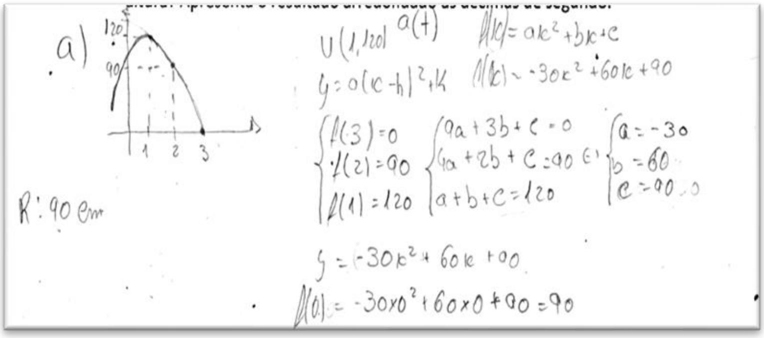
Os alunos dos grupos G2 e G1 começaram por definir a função quadrática que representava o salto do gafanhoto a partir do maximizante da função e de um dos pares de valores representado na tabela. De seguida, determinaram a imagem quando x era zero. Já os alunos do grupo G5 recorreram a uma das propriedades do gráfico de uma função quadrática, o maximizante da função quadrática que define o eixo de simetria da parábola, para obter a imagem de zero a partir da imagem de dois, que são abcissas de pontos da parábola equidistantes ao eixo de simetria do gráfico da função. De acordo com as respostas, observa-se que estes grupos apresentam justificações formais completas, fundamentadas em procedimentos e factos matemáticos supramencionados [N_3C].

Neste item, os alunos demonstraram facilidade na conversão entre a linguagem natural escrita e a linguagem algébrica. No entanto, alguns alunos, nomeadamente os alunos dos grupos G2 e G5, tiveram necessidade de recorrer ao esboço gráfico que traduz a situação. Pressupõe-se que este 'esboço' efetuado pelos grupos G2 e G5 assume duas finalidades distintas: uma de compreensão, uma vez que os alunos do grupo G2 apenas representam os pontos contemplados na tabela, indiciando a necessidade de compreender o comportamento da função; e outra de complemento, pois o 'esboço' apresentado pelos alunos do grupo G5 indicia ser um complemento da justificação algébrica apresentada [P.Geral_2].

Os alunos dos grupos G9 e G4 também efetuaram o esboço gráfico de forma a proporcionar a imagem global do comportamento da função. No entanto, estes esboços carecem de exatidão contextual, pois estes alunos não atenderam ao domínio da contextualização do problema. De acordo com o NCTM (2007), subentendeu-se este esboço como um elemento essencial no apoio à compreensão, por parte dos alunos, o que traduziu, assim, uma resposta considerada como correta (Figura 14).

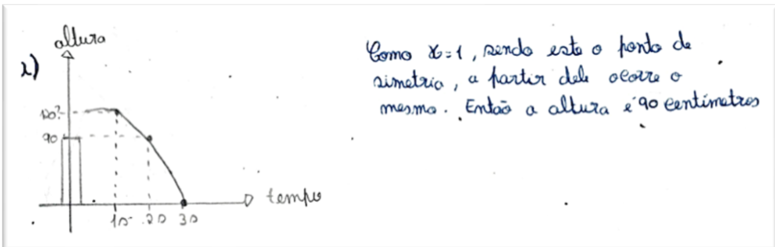
Figura 14. Resolução do grupo G9 e G4 ao item a) da tarefa - O salto do gafanhoto





Os alunos do grupo G3, apesar de recorrerem inicialmente a factos e procedimentos matemáticos, não explicitam detalhadamente como é determinada a altura do muro [N_0], ou seja, não apresentam as imagens das abcissas equidistantes do eixo de simetria que permitem calcular a altura do muro. No 'esboço' apresentado, os alunos marcam as imagens das abcissas equidistantes do eixo de simetria, pressupondo-se que a construção do esboço gráfico seja um complemento da resposta, como se pode observar na Figura 15.

Figura 15. Resposta parcialmente correta do grupo G3 da tarefa - O salto do gafanhoto

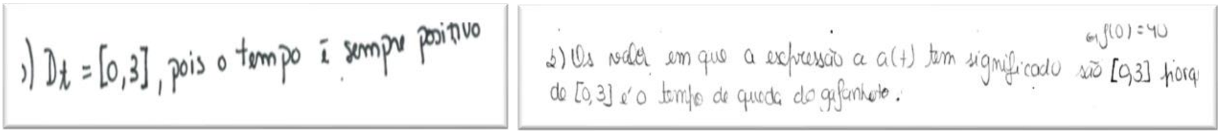


Quando questionados 'sobre que valores de t a expressão $a(t)$ tem significado', os alunos poderiam recorrer a diferentes estratégias de resolução [P.Geral_1]: (1) através da expressão que determina o salto e de seguida resolver a equação $a(t) = 0$, para obter os zeros da função ($t = -1 \vee t = 3$), e verificar que, de acordo com o contexto do problema, o domínio será $[0,3]$; (2) recorrer à tabela e verificar que, quando $t = 3$, o valor de $a(3) = 0$, logo $[0,3]$; ou recorrer ao esboço gráfico efetuado e verificar que a parábola interseta o eixo dos x ao fim de três segundos. [P.Geral_2].

O instante $t = 0$ foi considerado como pertencente ao domínio, uma vez que se considera como o momento do início do salto do gafanhoto.

Os grupos que responderam corretamente a este item apresentaram uma resposta similar às dos grupos G5 e G9 (Figura 16), que indicia resultar da interpretação do esboço gráfico que efetuaram [N_3A]. Neste item, os alunos revelaram facilidade na conversão entre a representação gráfica (esboço) e/ou a linguagem algébrica com a linguagem natural escrita [P.Justificação.7], [P.Geral_2].

Figura 16. Respostas corretas dos grupos G5 e G9 ao item b) da tarefa - O salto do gafanhoto

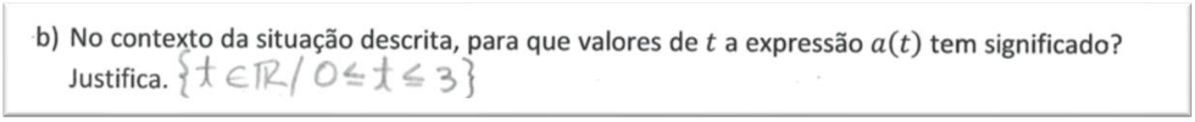

b) $D_t = [0,3]$, pois o tempo é sempre positivo

b) Os valores em que a expressão a $a(t)$ tem significado são $[0,3]$ porq de $[0,3]$ é o tempo de queda do gafanhoto.
$f(0) = 40$

A justificação apresentada pelo grupo G9 baseia-se na perceção do 'esboço' elaborado que, apesar de graficamente não terem atendido ao domínio da função, conseguiram contextualizar corretamente o problema.

A resposta algébrica apresentada pelos alunos do grupo G3 também indicia resultar da interpretação do esboço gráfico, no entanto não apresenta qualquer justificação [N_0] (Figura 17).

Figura 17. Resolução do grupo G3 ao item b) da tarefa - O salto do gafanhoto


b) No contexto da situação descrita, para que valores de t a expressão $a(t)$ tem significado? Justifica. $\{t \in \mathbb{R} / 0 \leq t \leq 3\}$

A resposta do grupo G2 (Figura 18) está parcialmente correta, uma vez que o grupo percebeu que o salto começa em $t = 0$ e termina ao fim de três segundos. No entanto, o grupo deveria considerar a variável quantitativa tempo como uma variável contínua e não como uma variável discreta. Este grupo não revelou espírito crítico na resolução do item, pois mesmo com o esboço do gráfico não identificou a variável tempo como sendo uma variável contínua.

Figura 18. Resposta parcialmente correta do grupo G2 ao item a) da tarefa - O salto do gafanhoto

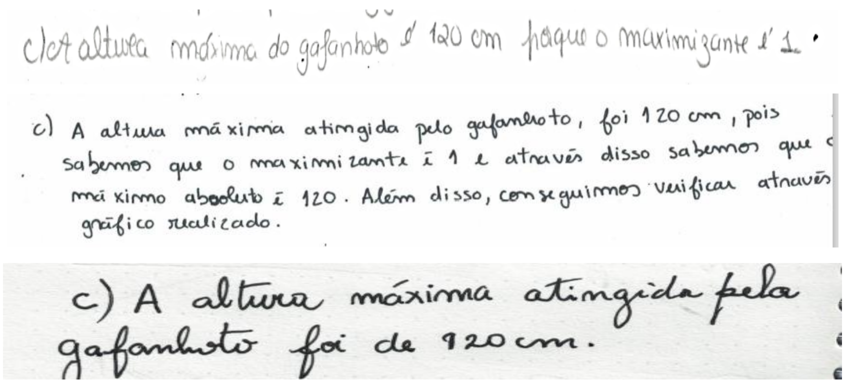

b) $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ e o $t = 0$

As justificações apresentadas remetem para uma compreensão da situação, em que os alunos conseguem estabelecer as conexões necessárias para justificar de um modo matematicamente válido, podendo assumir que estas representações matemáticas não são apenas meios de comunicação, mas igualmente de construção de conhecimento [P.Geral_2],[P.Justificação.8].

Quando questionados sobre 'qual a altura máxima atingida pelo gafanhoto' (item c), os alunos poderiam recorrer a diferentes formas de resolução [P.Geral_1]: (1) através do maximizante da função $(t = 1)$, facultado no enunciado, obtendo de imediato o valor máximo $a(1) = 120$; (2) recorrer à expressão algébrica $a(t) = -30(t-1)^2 + 120$, uma vez que está definida na forma $a(t) = a(t-h)^2 + k$, para obter as coordenadas do vértice $(1{,}120)$; (3) recorrer à expressão $a(t) = -30t^2 + 60t + 90$ e determinar as coordenadas do vértice, com $h = -\frac{b}{2a}$ e $k = c - \frac{b^2}{4a}$; (4) graficamente, usando a calculadora gráfica, obtendo o máximo da função usando as propriedades da mesma [P.Geral_2].

Neste item, os alunos dos grupos G7 e G5 (Figura 19) justificaram as suas respostas [P.Justificação_7] através da linguagem natural, de acordo com uma propriedade conhecida, o maximizante da função [N_3C]. Contrariamente, o grupo G2 não apresenta qualquer justificação [N_0], mas como apresenta o 'esboço gráfico' pressupõe-se que a sua justificação incida na visualização desse esboço. Saliente-se o facto de o grupo G5 fazer referência ao esboço gráfico efetuado, como complemento da sua justificação.

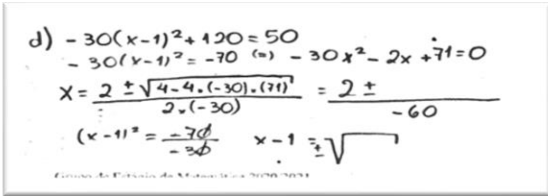
Figura 19. Resposta correta do grupo G7, G5 e G2 ao item c) da tarefa - O salto do gafanhoto



Quanto à questão 'desde que iniciou o salto quanto tempo esteve o gafanhoto acima de meio altura?', os alunos poderiam adotar dois métodos de resolução diferentes, algebricamente ou graficamente [P.Geral_1],[P.Geral_2]: Caso optem por resolver algebricamente devem determinar a solução da inequação $a(t) > 50$. Para responder corretamente, o aluno deve ter em atenção o domínio da função, o que faz com que a resposta seja correta e também o único valor possível é $\frac{3+\sqrt{21}}{3}$ correspondendo a aproximadamente 2,52 segundos. Caso o aluno opte por responder graficamente, deve introduzir na calculadora gráfica as expressões que definem as duas funções, $a(t) = -30(t-1)^2 + 120$ e $f(t) = 50$, recorrendo à opção que lhe permite calcular os pontos de interseção dos gráficos destas funções. Como a função a tem domínio $[0, 3]$, o único ponto de interseção possível é o ponto de abcissa aproximadamente igual a$\approx$ $2{,}52$.

Neste item, os alunos enfrentaram bastantes dificuldades, pois nenhum par respondeu corretamente. Porém, os alunos do grupo G1 determinaram partes da resolução do item, o que se traduziu numa resposta parcialmente correta. O grupo não termina os cálculos necessários para responder ao item da tarefa, como revela a Figura 20, demonstrando dificuldades do tratamento dentro do mesmo registo.

Figura 20. Resposta parcialmente correta do grupo G1 ao item d) da tarefa - O salto do gafanhoto



Dada a dificuldade evidenciada pelos alunos, optei por *convidar* um aluno do grupo a expor a sua resolução no quadro para a análise conjunta com a turma.

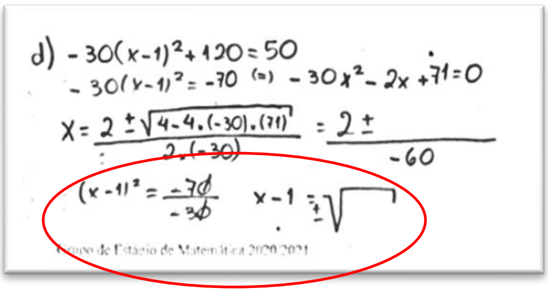
A3: Um metro são 100 cm, então a metade é 50, nós igualamos a função a 50 para saber quando é que atinge o meio metro de altura

A4: Falta-te desenvolver o quadrado do binómio.

A3: Pois é, eu esqueci. Eu e a A7 multiplicamos o 2 ao x e esquecemo-nos do trinta e depois somamos. Pois é, agora entendi onde erramos. (OGAV2_1)

Pela resolução apresentada, pode-se observar que o grupo G1 desenvolveu corretamente o quadrado do binómio, no entanto não aplicou corretamente a propriedade distributiva, pois multiplica apenas o coeficiente existente pelo termo de grau dois. Constata-se que pela dificuldade sentida em aplicar a fórmula resolvente, o grupo optou por resolver a equação, sem desenvolver o caso notável (Figura 21), obtendo um número fracionário. Os alunos revelaram dificuldades em calcular a raiz quadrada desse número fracionário.

Figura 21. Resolução do G2 ao item d) da tarefa - O salto do gafanhoto



Nos momentos de interação com os grupos, apercebi-me de que um grupo recorreu à calculadora gráfica para determinar a solução da inequação. Assim, após a correção e de forma a confrontar a representação algébrica com a representação gráfica, decidi *convidar* o aluno A1 a explicar a sua estratégia de resolução (OGAV2_2):

Professora:	O vosso colega A1 fez na calculadora.
A2:	Eu também me lembrei.
Professora:	Podes explicar o que fizeste?
A1:	Fui à calculadora inseri $a(x) = -30(x-1)^2 + 120$ e depois inseri a função definida por $y = 50$ para ver quando é que era maior que 50. (OGAV2_2)

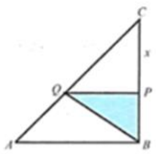
O aluno estabelece uma conexão entre a propriedade geométrica (interseção dos gráficos de duas funções) e a situação particular presente na questão. No entanto, a justificação apresentada remete para uma compreensão parcial da situação visto que não estabelece todas as conexões necessárias para a justificação apropriada. Ou seja, não teve em atenção o domínio da função para determinar a abcissa do ponto pretendido. Na explicação deste aluno está subentendida a interseção dos gráficos das duas funções, mas, tal como supracitado, o aluno não contextualiza o problema, uma vez que há dois pontos de interseção e apenas se pretende o ponto de abcissa positivo. O item pede o 'tempo que o gafanhoto está acima (...)', logo o aluno poderia excluir o ponto de abcissa negativo automaticamente, argumentando que o valor da variável *tempo* não pode ser negativo, revelando assim pouco espírito crítico na resolução da tarefa.

Posteriormente à resolução e discussão da primeira tarefa 'O salto do gafanhoto' foi proposta a resolução da tarefa 'O triângulo dentro do triângulo'. O tempo para exploração desta tarefa foi diminuto face às dificuldades que os discentes tiveram na execução da tarefa anterior. Dada a baixa percentagem (22.2%, Tabela 6) na realização escrita da tarefa, as gravações assumiram ser uma mais-valia para a análise dos processos de justificação.

Figura 22. Enunciado da tarefa - O triângulo dentro do triângulo

Tarefa 2. O triângulo dentro do triângulo

Na figura, está representado um triângulo retângulo isósceles $[ABC]$. Tem-se $\overline{AB} = 8\ cm$. Um ponto P desloca-se sobre o segmento de reta $[CB]$, nunca coincidindo com o ponto C, nem com o ponto B. Um ponto Q desloca-se sobre o segmento de reta $[AC]$, acompanhando o movimento do P, de forma que $[PQ]$ seja sempre paralelo a $[AB]$. Seja x a distância entre os pontos P e C.



a) Que valores pode tomar x?
b) Determina a expressão algébrica da função que relaciona a área do triângulo $[PBQ]$ em função de x.
c) Quais são as dimensões do triângulo $[PBQ]$ quando a sua área é máxima? Como classificas, quanto aos lados, esse triângulo?
d) Descreve o que acontece à área do triângulo $[PBQ]$ à medida que P se desloca.

Fonte: Séries de problemas de Matemática A, N.° 5 Gave março 2010

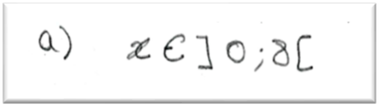
Os grupos sentiram dificuldade de interpretação do enunciado, não percebendo a formação do triângulo interno. A análise das respostas dos pares de alunos permitiu identificar o tipo de resposta que deram a cada um dos itens da tarefa (Tabela 6).

Tabela 6. Percentagem (%) dos tipos de resposta aos tipos de resposta da tarefa – O triângulo dentro do triângulo $(n = 9)$

Itens	**Tipo de resposta**			
	Correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não responde**
a)	1 (11,1)	1 (11,1)	0 (0)	7 (77,8)
b)	1 (11,1)	1 (11,1)	0 (0)	7 (77,8)
c)	0 (0)	1 (11,1)	0 (0)	8 (88,9)
d)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	9 (100)

Da análise da tabela verifica-se que nesta tarefa apenas dois grupos de alunos conseguiram responder aos itens a) e b). No que respeita ao primeiro item, pretendia-se que os alunos respondessem que $x \in]0,8[$, correspondendo aos valores de P à medida que se desloca de B para C, nunca atingindo as extremidades, mencionado no enunciado. Os alunos dos grupos G3 e G2 conseguiram responder corretamente, como ilustra a resposta apresentada pelos alunos do grupo G3 (Figura 23). Estes alunos assimilaram a construção do triângulo interno, convertendo a passagem de uma descrição para notação algébrica [P.Geral_2]. Esta mudança de registo de representação nem sempre é simples, mas muitas vezes é necessária para uma compreensão adequada do objeto em questão.

Figura 23. Resolução do G3 ao item a) da tarefa – O triângulo dentro do triângulo


a) $x \in]0;8[$

Quando questionados a determinar a expressão algébrica da função que relaciona a área do triângulo obtido em função de x, os alunos precisaram de recorrer à semelhança de triângulos para mostrar que $\overline{CP} = \overline{QP}$, logo $\overline{QP} = x$, e a altura será $8 - x$, determinando posteriormente a expressão da área do triângulo $A(x) = \frac{x\,(8-x)}{2}$.

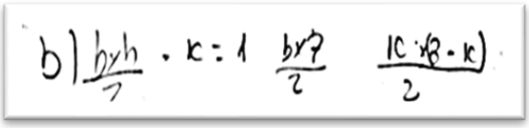
Para formularem a generalização [P.Generalização_4], os alunos do grupo G2 seguiram uma abordagem empírica face aos alunos do grupo G3 que seguiram uma abordagem dedutiva baseada em propriedades matemáticas. Os alunos do grupo G2 apresentaram no início dificuldades em interpretar o enunciado não compreendendo o que era pretendido, pelo que solicitaram a minha ajuda. Situando-me junto do grupo, procurei estabelecer o que se pretendia de forma a *guiar* os alunos para a generalização.

A2: Professora não estamos a entender como podemos calcular a área.
Professora: Primeiro, que dados podemos retirar do problema?
A2: A distância de C a B é 8 e a distância de A a B.
Professora: Que mais sabemos?
A4: Que o ponto P desloca-se, ou seja, anda de cima para baixo.
Professora: Entre que valores se desloca esse ponto P?
A2: Entre 0 e 8.
Professora: E o valor de x?
A4: Também.
Professora Agora, como poderemos calcular a área do triângulo em função da altura? (OGAV2_3)
(Após trabalho autónomo do grupo)
Professora: Explica-me o que fizeste?
A2: Se $x = 1$, a distância de P a Q vai ser 7.
Professora: Se o $x = 1$. E se o x for outro valor qualquer?
A2: Vai ser $x - 8$.
Professora: Estás a ver como consegues fazer. Agora escreve o que acabaste de dizer.
A2: A área do triângulo vai ser igual à base vezes $(x - 8)$ e dividir por 2. (OGAV2_4)

No primeiro momento de interação com o grupo (OGAV2_3), comecei por *apoiar,* solicitando os dados que os discentes poderiam retirar do enunciado, para seguidamente *informar* acerca das suas respostas. De forma a *guiar* o aluno à resposta, optei por *convidar* os alunos a responderem a questões pontuais. Após este momento inicial, voltei a *desafiar* os alunos a obterem a generalização.

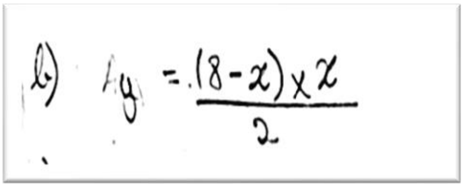
Depois do trabalho autónomo por parte do grupo, regressei novamente ao grupo (OGAV2_4) para os *convidar* a apresentarem uma explicação do efetuado (Figura 24). Face ao exposto, percebi que na formulação generalizada, os alunos tentaram seguir uma abordagem empírica, generalizando as relações observadas num caso particular, voltando a *desafiar* o grupo no sentido de obter a generalização. Esta interação grupo-professora revelou-se profícua, pois o grupo conseguiu obter a generalização. O grupo utilizou procedimentos matemáticos para justificar a sua resposta, no entanto a generalização advém de evidências empíricas, isto é, recorrerem a casos particulares para chegar à expressão [N_2]. A resposta apresentada (Figura 25) é considerada parcialmente correta pela falta de rigor na escrita Matemática.

Figura 24. Resolução do G2 ao item b) da tarefa – O triângulo dentro do triângulo



A generalização apresentada pelos alunos do grupo G3 segue uma abordagem dedutiva baseada em propriedades matemáticas [N_3C], como se constata pelo seu discurso (OGAV2_5). A reposta apresenta rigor matemático sendo considerada correta.

Figura 25. Resolução do grupo G3 ao item b) da tarefa – O triângulo dentro do triângulo



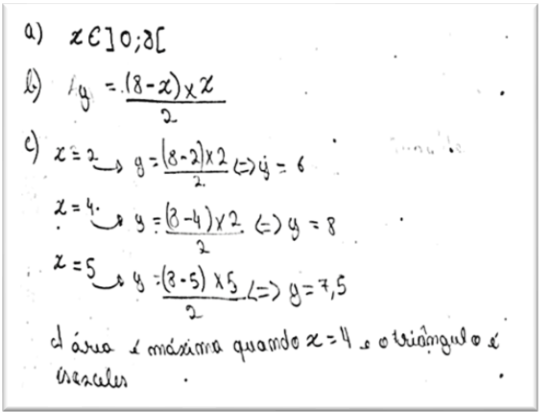
Professora: $8 - x$, o que é que fez?
A9: A base é PB e como CB é igual a 8 a base vai ser $8 - x$.
Professora: Onde foi buscar o x?
A9: Como PQ e AB são paralelos então vão ser iguais. Os triângulos vão ser semelhantes. Logo a área vai ser $\frac{(8-x)\times x}{2}$. (OGAV2_5)

Neste momento de interação com o grupo (OGAV2_5), comecei por *convidar* o grupo a apresentar as suas justificações. De forma a *guiar* o aluno à resposta, optei por *convidar* os alunos a responderem a questões pontuais. Pelos argumentos do aluno A9 infere-se que os alunos do grupo não sentiram dificuldades em estabelecer as conexões entre os conceitos e as propriedades necessárias à consecução da tarefa.

Quando questionados sobre 'quais são as dimensões do triângulo $[PBQ]$ quando a sua área é máxima e como classificas, quanto aos lados, esse triângulo?', pretendia que os alunos determinassem a expressão da área do triângulo , obtendo uma expressão de uma função quadrática $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$, o que lhes permitiria resolver [P.Geral_1]: (1) graficamente, recorrendo ao máximo da função; (2) algebricamente, através da determinação das coordenadas do vértice da parábola; (3) ou por métodos empíricos [P.Geral_2].

Uma vez que apenas dois grupos conseguiram obter a expressão da área, torna-se percetível a baixa percentagem de respostas corretas. Relativamente a respostas consideradas parcialmente corretas, neste item, apenas existe a do grupo G3, que seguiu uma abordagem empírica, como se pode observar pela Figura 26.

Figura 26. Resolução do G3 ao item c) da tarefa – O triângulo dentro do triângulo



a) $x \in]0;8[$

b) $y = \frac{(8-x)\times x}{2}$

c) $x = 2 \rightarrow y = \frac{(8-2)\times 2}{2} \Leftrightarrow y = 6$

$x = 4 \rightarrow y = \frac{(8-4)\times 2}{2} \Leftrightarrow y = 8$

$x = 5 \rightarrow y = \frac{(8-5)\times 5}{2} \Leftrightarrow y = 7,5$

A área é máxima quando $x=4$ e o triângulo é isósceles

A sua justificação [P.Justificação_7] é baseada em casos particulares, envolvendo a estratégia tentativa e erro de forma a descobrir para que valores de x a área era máxima [N_3B]. Subentende-se que a escolha dos valores a serem testados não é aleatória sendo guiada pela compreensão do domínio da conjetura que está a ser testada [P.Justificação_8]. No entanto, o grupo apenas testa para valores inteiros, o que permite aferir uma compreensão parcial da situação, em que os alunos, apesar de terem uma ideia correta, não estabelecem as conexões necessárias para justificar de um modo matematicamente válido. Para confirmação do seu raciocínio, o grupo recorre a procedimentos matemáticos usando a linguagem numérica.

Relativamente ao último item, pretendia que os alunos descrevessem o comportamento da função, ou seja, que a área do triângulo à medida que P se desloca de B para C aumenta até ao ponto médio de BC, atingindo aqui a área máxima, diminuindo depois à medida que o ponto P se aproxima de C, nunca atingindo o valor zero.

Apesar de nenhum grupo apresentar a sua resposta, um aluno do grupo G3, no momento de discussão, descreve o que acontece à área do triangulo. Esta justificação verbal advém dos resultados obtidos no item anterior, ou da perceção da situação.

Professora: Quando a área é máxima qual é o valor de x?
A9: Quando x é 4.
Professora: Porquê?
A9: Porque até 4 a área aumenta e depois diminui.
Professora: Quando $x = 4$ que triângulo obtemos?
A9: Isósceles. (OGAV2_6)

Como podemos observar pelo momento de interação com o grupo (OGAV2_6), comecei por *conduzir* o grupo a apresentar razões justificativas para a sua resposta. De forma a *guiar* os alunos para a justificação adequada, a estratégia consistiu em *desafiá-los* a responderem a questões pontuais e graduais.

Síntese

Pelas respostas analisadas, percebeu-se que quando a situação a explorar não lhes é familiar, os alunos constroem 'esboços' que desempenham a dupla função de compreensão e complementaridade, facilitando a construção das suas repostas. Os alunos recorreram predominantemente à justificação na tarefa - O salto do gafanhoto, baseado em definições e propriedades matemáticas que, deste modo, adquirem validade [N_3C], como podemos constatar pela Tabela 7 com a percentagem de média do nível de complexidade 3C de 50%.

Tabela 7. Percentagem (%) de justificações de acordo com o seu nível de complexidade patente nos itens da tarefa – O salto do gafanhoto

	Níveis de complexidade						**Frequência de respostas**
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
a)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	8(100)	8
b)	3(50)	0(0)	0 (0)	3(50)	0(0)	0(0)	6
c)	4(50)	0(0)	0 (0)	0(0)	0(0)	4(50)	8
d)	0(0)	0 (0)	0(0)	0(0)	1(50)	1(50)	2
Percentagem média	25	0	0	12,5	12,5	50	

No que respeita às representações, os alunos não apresentaram dificuldades significativas nas transformações entre representações, sejam elas tratamentos ou conversões. No entanto, a utilização de diferentes representações não parece limitar o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Os alunos sentiram necessidade de construir 'esboços' quando a situação a explorar não lhes era familiar. No entanto, a elevada percentagem de alunos que recorreram ao gráfico (62,5%), permitiu evidenciar a dificuldade que apresentaram inicialmente na interpretação do enunciado. O domínio da linguagem algébrica e da linguagem natural, e a capacidade de as articular com a linguagem natural, pareceu ser essencial para uma exploração completa da tarefa, facilitando o processo de justificação (Tabela 8).

Tabela 8. Tipos de representação que surgiram nas produções dos alunos

Salto do gafanhoto	Tipo de representação				Frequência de respostas
	Algébrica	Verbal	Numérica	Gráfica	
a)	7 (87,5)	1(12,5)	0(0)	5(62,5)	8
b)	2(33,3)	5(83,3)	0 (0)	0(0)	6
c)	0(0)	8 (100)	0 (0)	0(0)	8
d)	1(50)	0 (0)	0(0)	1(50)	2
Percentagem média	42,7	48,9	0	28,1	

Nas situações em que os alunos usaram o raciocínio dedutivo baseado em definições e propriedades matemáticas recorreram às representações algébrica e verbal para justificarem as suas conjeturas.

No que concerne à tarefa - O triângulo dentro do triângulo, na formulação das suas conjeturas os alunos recorreram a uma abordagem empírica baseada na identificação de padrões através da observação dos dados [N_2], como se pode constatar pela Tabela 9, com uma percentagem média do nível de complexidade dois de 37,5%. O segundo nível que mais se evidencia, em ambas as tarefas, e que apresenta uma percentagem de incidência considerável, é o zero (25%), pelo que se pressupõe alguma resistência à justificação. Tal como advogam Lannin et al. (2011), os alunos nem sempre sentem necessidade de justificar as suas respostas ainda que, nalguns casos, quando lhes é solicitado, consigam identificar as propriedades e conceitos necessários para a justificação. O nível de complexidade que menos surge em ambas as tarefas é o 1.

Tabela 9. Percentagem (%) de justificações de acordo com o seu nível de complexidade patente nos itens da tarefa - O triângulo dentro do triângulo

	Níveis de complexidade						Frequência de respostas
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
a)	2(100)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	2
b)	0(0)	0(0)	1(50)	0(0)	0(0)	1(100)	2
c)	0(0)	0(0)	1(50)	0(0)	1(100)	0(0)	1
d)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0
Percentagem média	25	0	37,5	0(0)	25	12,5	

Relativamente à tarefa, as dificuldades encontradas prendem-se com a conversão da representação gráfica em algébrica, não merecendo dificuldades de maior a conversão da representação gráfica para a representação numérica ou verbal. Apesar da representação algébrica ser a que mais se evidencia (50%) (Tabela 10), esta advém dos itens a) e b) serem de resposta com justificação sobre os factos fornecidos no enunciado, não necessitando de procedimentos matemáticos para justificar. No que respeita ao item c), a representação numérica é a que mais se destaca pelo facto de os alunos recorrerem apenas a evidências empíricas para justificar as suas respostas. Os alunos demonstraram dificuldades na transformação dentro do mesmo registo, isto é, não conseguiram representar a expressão $A(x) = \frac{(8-x)x}{2}$ na forma $A(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$, o que lhes permitia determinar o valor em que a área do triângulo é máxima.

Tabela 10. Tipos de representação que surgiram nas produções dos alunos

O triângulo dentro do triângulo	**Tipo de representação**				**Frequência de respostas**
	Algébrica	**Verbal**	**Numérica**	**Gráfica**	
a)	2 (100)	0(0)	0 (0)	0 (0)	2
b)	2 (100)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	2
c)	0 (0)	1(100)	1(100)	0 (0)	1
d)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0
Percentagem média	50	25	25	0	

Enquanto ferramentas de apresentação e cálculo, estas representações acompanham todos os processos de raciocínio. Por seu turno os alunos, revelaram facilidade na tradução e conversão dessas representações.

Em suma, os alunos revelaram facilidade na construção de várias representações, que usam como ferramenta de compreensão, exploração e complementaridade na formulação de conjeturas especificas.

3.2. Função definida por ramos

Na aprendizagem do tema 'Função definida por ramos' (Plano de Aula 3, Anexo 3), foi solicitada aos alunos a resolução das tarefas - O mergulhador e Água no Cubo, que, a par do tópico em estudo, tiveram como finalidade criar oportunidades para justificar [P.Justificação_8] e generalizar [P.Generalização_4], [P.Generalização_5]. Tal como as tarefas anteriores, estas tarefas permitem uma variedade de estratégias de resolução [P.Geral_1] em articulação com as várias representações [P.Geral_2]. Ambas as tarefas podem envolver os alunos a refletirem sobre os seus próprios processos de raciocínio. [P.Geral_3].

A primeira tarefa a ser explorada foi a tarefa - O mergulhador (Figura 27).

Figura 27. Enunciado da tarefa - O mergulhador

Tarefa 1. O mergulhador

Um mergulhador pretende apanhar uma moeda que se encontra no fundo de uma piscina com profundidade de 2 m. Sabe-se que o mergulhador dá um passo em frente e cai na vertical de uma prancha com 1 m de altura relativamente ao nível da água da piscina, com uma velocidade constante de $1m/s$ (despreza a resistência do ar).

1. Apresenta um possível gráfico que represente a distância do mergulhador ao nível da água, quando este mergulha para apanhar a moeda no fundo da piscina.

2. Define analiticamente a função que relaciona o tempo do mergulho, em segundos, com a distância do mergulhador ao nível da água da piscina, em metros.

Fonte: Teste de Matemática A, Porto Editora (Adaptado)

A Tabela 11 apresenta os tipos de reposta aos itens da tarefa apresentados pelos alunos.

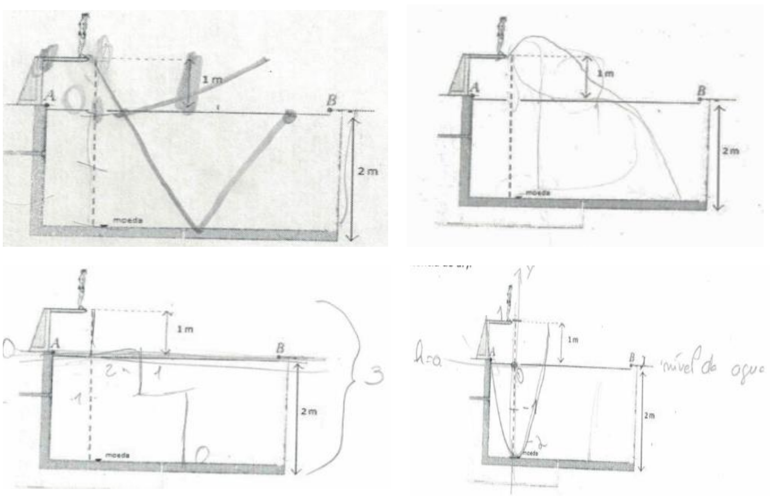
Tabela 11. Percentagem (%) dos tipos de resposta aos itens da tarefa - O mergulhador ($n = 9$).

Item	Tipo de resposta			
	Correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não responde**
1)	1(11,1)	5(55,6)	1(11,1)	2(22,2)
2)	1(11,1)	1(11,1)	1(11,1)	6(66,7)

No primeiro item pretendia-se que os alunos representassem graficamente o salto do mergulhador [P.Geral_2]. Para a construção do gráfico, os alunos tinham de perceber que a distância é medida relativamente ao nível da água da piscina e que o salto é representado por uma função definida por dois ramos: $f(x) = \begin{cases} -x+1 & se\ 0 \leq x < 1 \\ x-1 & se\ 1 \leq x < 3 \end{cases}$

A representação verbal associada à apresentação do problema pode tornar-se um obstáculo para a comunicação matemática, uma vez que não é universal e a sua utilização pode ser feita de forma ambígua ou conduzir a associações incorretas. Como se observa nos esboços realizados pelos grupos G4, G3, G6 e G7 (Figura 28), para além de os alunos possuírem diferentes ideias do respetivo salto, as suas interpretações não foram corretas.

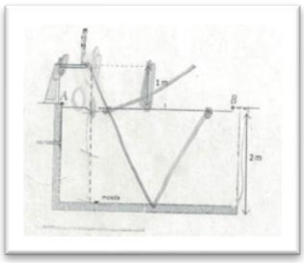
Figura 28. Respostas incorretas dos grupos G4, G3, G6 e G7 ao item a) da tarefa - O mergulhador



Atendendo à dificuldade que demonstraram em representar o salto, solicitei os alunos a apresentarem uma explicação do efetuado. Sempre que necessário, questionava-os com questões pontuais com o intuito de os desafiar a refletir sobre as suas respostas e a chegar à resposta [P.Geral_3].

Professora: Podes explicar como pensaste para desenhar o gráfico?
A2: Como vai cair na vertical, com uma velocidade constante de $1m/s$, ao fim de $1s$ ele vai estar em zero. Depois, de $2s$ ele vai a uma velocidade negativa ao nível do solo.
Professora: A velocidade é negativa?
A2: Não. A velocidade é constante.
(Momento de pausa)
A2: A altura é que vai ser negativa em relação ao solo. E como a distância é igual à altura então vai ser negativa.
Professora: Estás a dizer-me que esta distância é igual à altura do muro? É isso?
(O aluno reflete sobre o que disse)
A2: Não pode ser.
Professora: Já agora, o valor da distância pode ser negativo?
A2: Não.
Professora: Será assim o gráfico?
A2: Não. (OGAV3_1)

Figura 29. Primeira resolução do grupo G4 ao item 1) da tarefa - O mergulhador



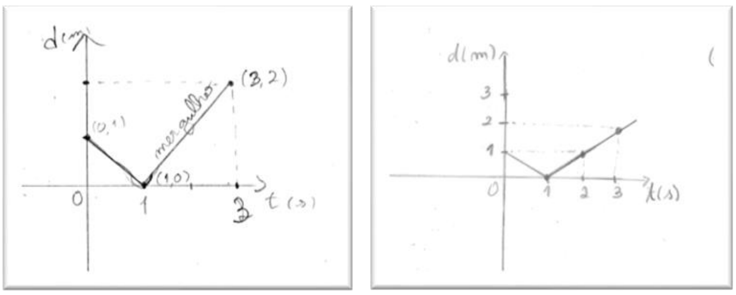
No primeiro momento de interação com o grupo (OGAV3_1), comecei por *convidar* o grupo a explicar a sua interpretação do enunciado e a responderem a questões pontuais, de forma a *desafiar* à reflexão das suas respostas. Este momento de intervenção revelou-se profícuo, pois consegui que o discente refletisse sobre as suas respostas. Face às sucessivas respostas erradas neste diálogo, questionei para que esse aluno refletisse sobre a resposta apresentada e para *guiar* o aluno a identificar o erro. Com este apoio, o aluno percebe que o que fez não está correto nem faz sentido, e consequentemente, percebe que o respetivo esboço gráfico não estava correto.

Dada a dificuldade observada pela turma na compreensão do enunciado, para garantir que todos os alunos compreendessem a tarefa, promovi um momento de discussão ao solicitar a um aluno que explanasse o seu raciocínio, mas sem representar o respetivo gráfico. O aluno escolhido (G1) foi o que demonstrou mais facilidade na compreensão da tarefa.

Professora:	Consegues explicar o que fizeste?
A3:	O nível da água é zero. Ele começa no trampolim e está a um metro do referencial, está cá em cima. Eu marquei o tempo zero (no início do tempo). No segundo zero ele está a $1m$ do referencial. Passado 1 segundo, como ele avança $1m/s$, ele atinge o referencial.
Professora:	Dúvidas até aqui?
A4:	Ele voltou a estar a um metro de distância.
Professora:	Mas então porque é que o gráfico não pode ir para baixo.
Alunos:	Porque a distância fica negativa.
Professora:	Já perceberam porque é que a distância não pode ser negativa?
Alunos:	Sim.
Professora:	Quanto tempo demora a chegar?
Alunos:	3 segundos. (OGAV3_2)

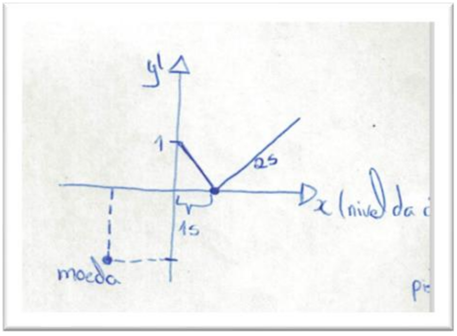
Ao longo da explanação (OGAV3_2), decidi *desafiar* a turma de forma a perceber se a compreensão da explanação do discente estava a ser assimilada por todos. Após esta intervenção do aluno, voltei a *desafiar* os restantes que refletissem nas suas representações desafiando-os a reformular as mesmas. Como se pode observar pela Figura 30, o par de alunos do grupo G1 conseguiu representar corretamente, contrariamente à maioria dos grupos (55,6%), que apesar de terem percebido como seria o salto não atenderam ao domínio, como ilustrado pela resposta do grupo G9 (Figura 30).

Figura 30- Resposta correta do grupo G1 e parcialmente correta do grupo G9 ao item 1) da tarefa - O mergulhador



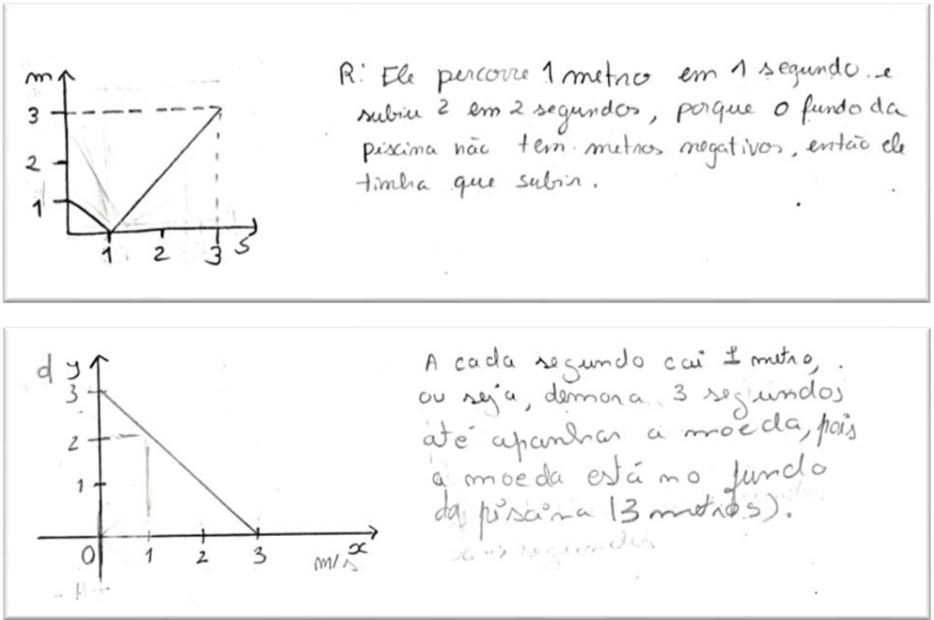
O grupo G7 apresenta uma resposta que demonstra uma compreensão parcial da tarefa, pois apesar de não terem atendido à contextualização do problema, a posição da moeda no gráfico indicia que estes alunos não compreenderam o salto (Figura 31).

Figura 31. Resposta parcialmente correta do grupo G7 ao item a) da tarefa - O mergulhador



Os alunos dos grupos G5 e G8, para além de representarem o gráfico, recorreram à linguagem natural para explicar os seus raciocínios, como evidenciado pela Figura 32 [P.Justificação_7].

Figura 32. Resolução dos grupos G5 e G8 ao item a) da tarefa - O mergulhador



Saliente-se a resposta apresentada pelo grupo G5, que na sua explicação tem necessidade de reforçar que o fundo da piscina não tem metros negativos, e por esse motivo tinha de subir, demonstrando uma compreensão parcial do contexto. Já a resposta apresentada pelo grupo G8, revela uma total incompreensão do contexto, sendo considerada como incorreta. As justificações apresentadas indiciam ser baseadas na perceção que os alunos têm da realidade [N_2].

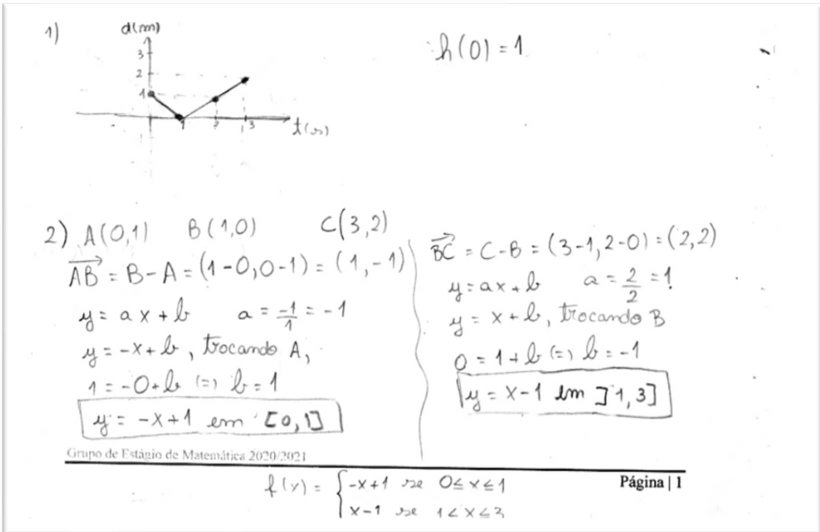
Após a representação gráfica, pretendia que os alunos determinassem a expressão algébrica da função, definida por duas funções afins restritas a cada um dos domínios correspondentes, ou seja,

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & se\ 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & se\ 1 \leq x < 3 \end{cases}$$

A função solicitada teve em conta os conhecimentos prévios dos alunos relativos ao estudo da função afim [P.Generalização_5]. Os alunos revelaram bastantes dificuldades na resolução deste item da tarefa, pois 66,7% dos alunos não responderam. Podem assumir-se dois fatores plausíveis desta dificuldade: (I) o conceito de função afim não ter ficado bem assimilado; (II) conversão da linguagem gráfica para a linguagem algébrica.

Os alunos dos grupos G3 e G7 perceberam que se tratava de duas funções afins conseguindo determinar as respetivas equações. A resposta do grupo G3 (Figura 33) foi considerada correta pois os alunos tiveram em atenção os valores do domínio, quer graficamente quer algebricamente.

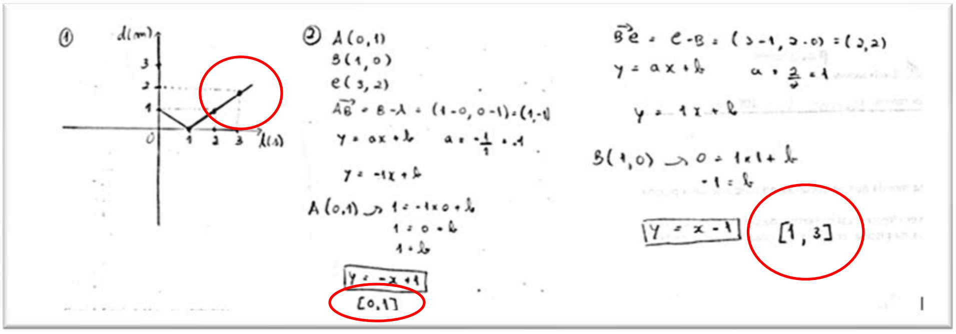
Figura 33. Resposta correta do grupo G3 ao item b) da tarefa - O mergulhador



Pela resolução apresentada pelo grupo G3, pode-se assumir que o conceito de função afim ficou definido, ou seja, os alunos conseguiram chegar à reificação, uma vez que 'apropriaram-se' de um objeto matemático, função afim, permitindo que se inicie um novo ciclo, começando pela interiorização com vista à formação de um novo objeto mais abrangente, neste caso a função definida por ramos.

A resposta do grupo G7 (Figura 34) foi considerada parcialmente correta, por dois fatores: primeiro, pelo facto de graficamente a função não estar definida no intervalo [1,3] e algebricamente sim, não se percebendo se a compreensão do contexto foi assimilada ou não; segundo, os alunos do grupo consideraram o ponto de abcissa 1 como pertencente aos dois intervalos, no entanto só pode pertencer a um deles, apesar de os alunos poderem optar por qualquer dos intervalos.

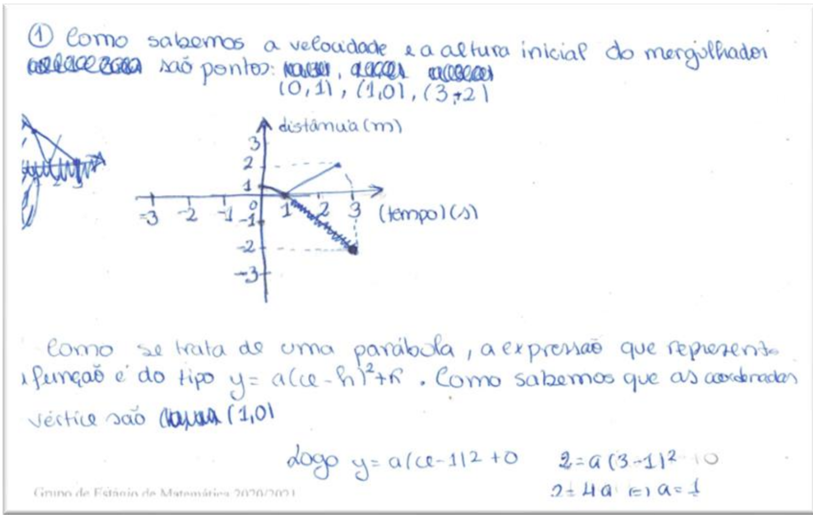
Figura 34. Resposta parcialmente correta do grupo G7 ao item b) da tarefa - O mergulhador



Pelas resoluções apresentadas, verifica-se que ambos os grupos se socorrem de factos e procedimentos matemáticos para determinar a expressão pretendida [N_3C]. Nas suas resoluções verifica-se que os grupos recorrem aos vetores para determinar o declive das respetivas funções, demonstrando articulação de conteúdos [P.Geral_7].

Observe-se agora a resolução incorreta dos alunos do grupo G1 (Figura 35), que, apesar da função graficamente estar bem definida, os alunos não conseguiram perceber que se tratava de duas funções afins e não de uma função quadrática. Os elementos constituintes deste par demonstram lacunas no seu processo de aprendizagem, pois o estudo de ambas as funções, tinha sido lecionado anteriormente.

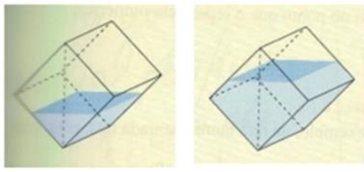
Figura 35. Resposta incorreta do grupo G1 ao item 2) da tarefa - O mergulhador



Posteriormente à resolução e discussão da primeira tarefa foi proposta a resolução da tarefa 'O cubo' (Figura 36).

Figura 36. Enunciado da tarefa - Água no cubo

Tarefa 2. Água no cubo



Considera um depósito com a forma de um cubo de aresta 6, assente sobre uma das suas arestas e com uma das diagonais faciais na vertical. Admite que o depósito está vazio e que se vai encher de água. Define algebricamente as funções f e g que permitem obter o perímetro e a área, respetivamente, da superfície de água em função da sua altura, x, no depósito.

Fonte: Dimensões 10.° ano, Editora Santillana

A análise das respostas dos pares de alunos permitiu identificar o tipo de resposta que deram a cada um dos itens da tarefa (Tabela 12).

Tabela 12. Percentagem (%) dos tipos de resposta aos itens da tarefa - Água no cubo ($n = 9$).

Item	**Tipo de resposta**			
	Correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não responde**
1)	1 (11,1)	1(11,1)	6 (66,7)	1 (11,1)

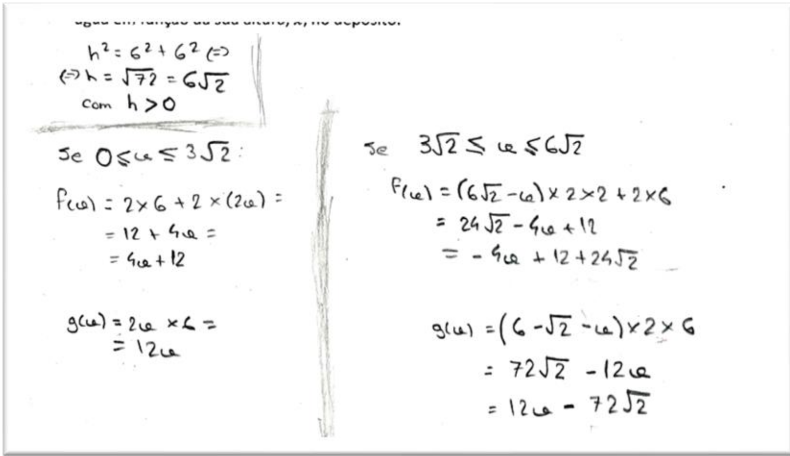
Os grupos revelaram bastantes dificuldades na resolução desta tarefa, como reflete a percentagem de respostas incorretas (66,7%).

Nesta tarefa, pretendia que os alunos determinassem o perímetro e a área da "secção obtida pelo plano definido pela superfície da água" em função da altura. Para responder a estas perguntas, os alunos teriam de considerar que a 'secção obtida pelo plano definido pela superfície da água' é paralela ao plano onde assenta a aresta do cubo. Assim, a 'secção obtida pelo plano definido pela superfície da água' no cubo é um retângulo [ABCD] em que dois dos lados têm o mesmo comprimento da aresta do cubo. Para determinar quer a área quer o perímetro, os alunos necessitavam de perceber que quando a altura da água é inferior ou igual à metade da diagonal facial $\left(0 \leq x \leq 3\sqrt{2}\right)$, os triângulos $[ABC]$ e $[ADC]$ são semelhantes, pois são ambos isósceles. Logo para determinar a altura da água poderiam recorrer à semelhança de triângulos, para posteriormente calcular o perímetro e a área até à metade da diagonal do facial cubo. Por simetria, se $x > 3\sqrt{2}, \overline{BC} = 2\left(6\sqrt{2} - x\right) = -2x + 12\sqrt{2},$ e portanto, $f(x) = -4x + 24\sqrt{2} + 12$ e $g(x) = -12x + 72\sqrt{2}$. Assim o perímetro e a área da 'superfície de água' são dados em função de x, respetivamente por:

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 12\,, & se\ 0 \le x \le 3\sqrt{2} \\ -4x + 24\sqrt{2} + 12, & se\ 3\sqrt{2} < x \le 6\sqrt{2} \end{cases} \text{ e } g(x) = \begin{cases} 12x\,, & se\ 0 \le x \le 3\sqrt{2} \\ -12x + 72\sqrt{2}, & se\ 3\sqrt{2} < x \le 6\sqrt{2} \end{cases}$$

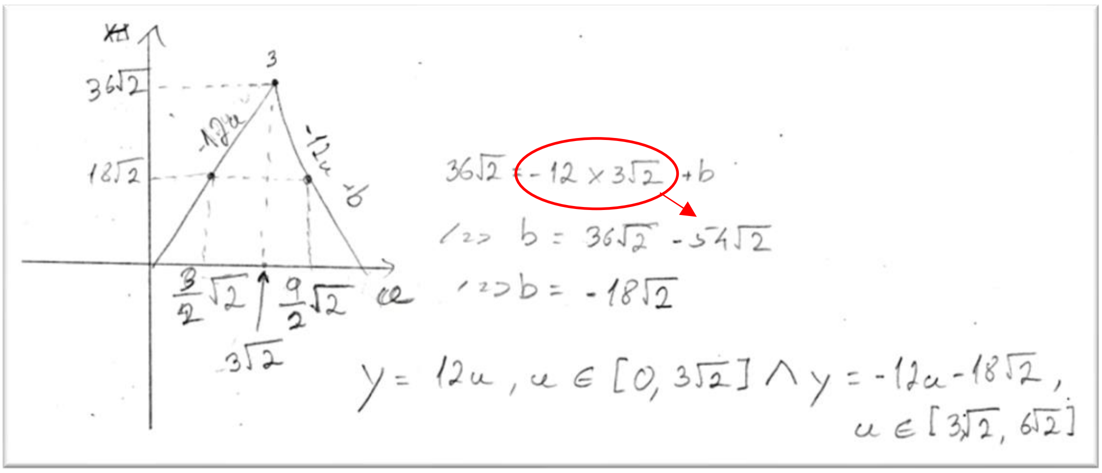
Os alunos do grupo G3, apesar de recorrerem a factos e procedimentos matemáticos, não explicitam a proveniência dos valores para a formulação da generalização das expressões que definem a área e o perímetro [N_0]. Pela resolução (Figura 37), percebe-se que os alunos não sentiram dificuldades em estabelecer as conexões entre os conceitos e as propriedades necessárias à consecução da tarefa, demonstrando ainda facilidade na conversão entre a linguagem natural e a linguagem algébrica [P.Generalização_5], [P.Geral_2].

Figura 37. Resposta correta do grupo G3 à tarefa - Água no cubo



Os alunos do grupo G2 perceberam que a área é diretamente proporcional à medida da altura do cubo e que esta atinge o valor máximo quando a altura é $3\sqrt{2}$, começando depois a diminuir (Figura 38).

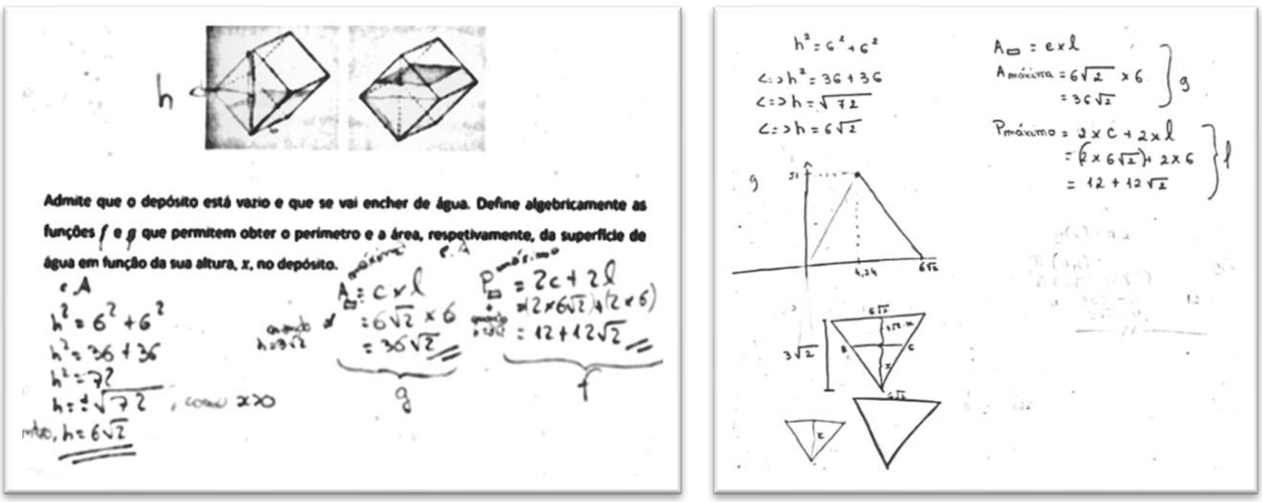
Figura 38. Resposta parcialmente correta do grupo G2 à tarefa - Água no cubo



Determinada a área quando a altura máxima ($36\sqrt{2}$), pressupõe-se que os alunos perceberam que se tratava de uma função linear o que lhes permitiu determinar o declive da reta ($m = 12$) através do quociente das coordenadas do ponto máximo ($3\sqrt{2},\ 36\sqrt{2}$), obtendo assim no intervalo $[0, 3\sqrt{2}\,]$ a expressão algébrica da função $y = 12x$. No intervalo $]\,3\sqrt{2}\,, 6\sqrt{2}\,]$ os discentes assimilaram que o comportamento da área seria similar, assumindo o valor erróneo do declive. Perceberam contudo que se tratava de um declive negativo e que não se tratava de uma função linear, mas sim afim, o que os levaram a calcular o valor de b para determinar a expressão algébrica da função no intervalo $]\,3\sqrt{2}\,, 6\sqrt{2}\,]$. Substituíram o ponto ($36\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}$) na expressão da função afim para o respetivo cálculo do valor de b, no entanto cometeram erros nos cálculos. Subentende-se o seu raciocínio para o cálculo da área, no entanto não conseguiram determinar as expressões algébricas para o perímetro o que se traduziu numa resposta parcialmente correta. Os alunos revelaram facilidade em converter a representação natural na representação gráfica e usam esta última de um modo flexível na exploração da tarefa, adicionando informação ou detalhes através de conexões com conhecimentos prévios sobre funções e dando significado à solução.

Os alunos do grupo G4 e G5 apenas calcularam a área e o perímetro quando a água atinge o valor máximo, ou seja, na sua diagonal facial (Figura 39). Os alunos do grupo G5 justificaram os seus raciocínio através da representação algébrica [P.Justificação_7]. No entanto, tiveram necessidade de recorrer ao 'esboço' gráfico para interpretação da tarefa.

Figura 39. Respostas incorretas dos grupos G4 e G5 da tarefa - Água no cubo



No diálogo entre os elementos do grupo G5 está percetível a justificação da sua resolução, assim como o recurso ao 'esboço' gráfico.

A4: Duas vezes o comprimento que é 6 mais 2 vezes a largura que é $6\sqrt{2}$, vamos obter o perímetro.
(...)
A4: Ora isto dá 12+12$\sqrt{2}$. Nós sabemos aqui que 12+12$\sqrt{2}$, vai ser a função f. A área vai ser $6\sqrt{2} \times 6$. Que vai ser 36
A10: Algébrica não é um gráfico, pois não?
A4: Não. Já temos a área e o perímetro. Sabemos a altura, e quando a altura for metade isto está no máximo, ou seja, a altura vai ser máxima. Vou fazer um gráfico para ver se dá. (OGAV3_3)

Percebe-se que o grupo começa por determinar a diagonal facial. Posteriormente verificaram que o valor máximo da área e do perímetro ocorre quando a secção observada no cubo é um retângulo de dimensões $6\sqrt{2}$ (comprimento da diagonal facial) e 6 (comprimento da aresta do cubo). Posteriormente, o grupo utiliza a representação gráfica de forma a comprovar os seus cálculos. Através da representação gráfica, pode-se observar que o grupo percebeu que o valor da área (g) aumenta até ao valor de $3\sqrt{2}$, começando depois a diminuir o seu valor. O 'esboço' gráfico apresentado teve como função de complementaridade, pois a sua representação foi usada para avaliar o progresso na resolução da tarefa e para verificar cálculos efetuados. Estas respostas foram consideradas incorretas pois os alunos apenas determinaram o valor da área e do perímetro quando a água atinge a altura de $3\sqrt{2}$.

Síntese

Neste estudo analisam-se os processos de raciocínio que os alunos usaram na realização de atividades de exploração e o papel que as representações desempenharam na sua promoção. Na tarefa 'O mergulhador', os alunos revelaram dificuldades na interpretação do enunciado, pois tal como supracitado, a linguagem natural associada à apresentação do problema pode tornar-se um obstáculo para a comunicação matemática, uma vez que não é universal e a sua utilização pode ser feita de forma ambígua ou conduzir a associações incorretas. Apesar de os discentes perceberem que a interpretação pode levar a conceções diferentes do salto não sentiram, contudo, necessidade de justificar as suas respostas, como se pode contatar pela percentagem no nível zero (66,7%). As justificações emergiram essencialmente nos momentos de interação com a docente ou na discussão coletiva, não surgindo espontaneamente durante a realização das tarefas, tal como se tem verificado em estudos de outros autores (Ponte, 2007). O nível de justificação [N_3C] apresenta na globalidade uma percentagem de 50% correspondendo à justificação usada pelos dois grupos no segundo item, que justificaram com recurso a procedimentos e factos matemáticos (100%) (Tabela 13).

Tabela 13. Percentagem (%) de justificações de acordo com o seu nível de complexidade nos itens da tarefa - O mergulhador

Item	**Níveis de complexidade**						**Frequência de respostas**
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
1)	4(66,7)	0(0)	2(33,3)	0(0)	0(0)	0(0)	6
2)	0(0)	0(0)	0 (0)	0(0)	0(0)	2(100)	2
Percentagem média	33,3	0	16,7	0	0	50	

Como se constatou anteriormente, os alunos revelaram dificuldades na conversão da linguagem natural para a linguagem gráfica, como também na conversão da linguagem gráfica para a linguagem algébrica. Esta dificuldade patenteada indica que os alunos não construíram o significado global do conceito de função.

No que respeita às representações, a representação algébrica e gráfica foram as mais utilizadas na resolução da tarefa (Tabela 14). No entanto, é de referenciar a percentagem de alunos que usaram a representação verbal (16,7%) para justificar as suas respostas.

Tabela 14. Percentagem (%) dos tipos de representação que surgiram nas produções dos alunos.

Item	**Tipo de representação**				**Frequência de respostas**
	Algébrica	**Verbal**	**Numérica**	**Gráfica**	
1)	0(0)	2(33,3)	0(0)	6(100)	6
2)	2(100)	0(0)	0 (0)	0(0)	2
Percentagem média	50	16,7	0	50	

Na tarefa – Água no cubo, os alunos revelaram bastantes dificuldades para obter a expressão algébrica. Alguns grupos sentiram necessidade de representar em forma de esquema a problemática em estudo. Das resoluções apresentadas, os grupos recorreram a procedimentos e factos matemáticos para justificar as suas resoluções [N_3C], sendo percetível o valor da percentagem de 100% (Tabela 15).

Tabela 15. Percentagem (%) de justificações de acordo com o seu nível de complexidade na tarefa – Água no cubo

Item	**Níveis de complexidade**						**Frequência de respostas**
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
1)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	2(100)	2
Percentagem média	0	0	0	0	0	100	

De acordo com a Tabela 16, a representação gráfica e algébrica são as que apresentam maior percentagem, uma vez que a primeira é apelativa e intuitiva ajudando na interpretação do enunciado e a segunda pelo facto de ser pedida a expressão algébrica.

Tabela 16. Percentagem (%) dos tipos de representação que surgiram nas produções dos alunos.

Item	**Tipo de representação**				**Frequência de respostas**
	Algébrica	**Verbal**	**Numérica**	**Gráfica**	
1)	2(100)	0(0)	0(0)	1(50)	2
Percentagem média	100	0	0	50	

Os alunos recorrem à representação gráfica como ferramenta de compreensão e exploração dos seus raciocínios.

3.3. Função raiz quadrada e raiz cúbica

Tratou-se de uma aula com ritmo de trabalho atípico uma vez que mais de 70% dos alunos se encontravam a realizar uma prova de Olimpíadas de outra disciplina, sendo que iam regressando à medida que terminavam a sua prestação, razão pela qual o número de resoluções difere ao longo da aula.

Na aprendizagem do tópico 'função raiz quadrada e raiz cúbica' (Plano de Aula 4, Anexo 3), foi solicitada aos alunos a resolução das tarefas - A distância e O quadrado. As tarefas apresentadas são promotoras de raciocínio matemático, dado que são tarefas que permitem uma variedade de estratégias de resolução [P.Geral_1]. Paralelamente, a resolução das tarefas envolve uma variedade de representações [P.Geral_2].

A primeira tarefa a ser explorada foi a tarefa - A distância que foi resolvida em pares de alunos (Figura 40):

Figura 40. Enunciado da tarefa - A distância

Tarefa 1. A distância

Considera a função definida por $f(x) = \frac{4}{x}$, $x\epsilon]0,+\infty[$. Seja P o ponto do gráfico da função f num referencial ortonormado. Mostra que a expressão da função d que traduz a distância de cada posição do ponto P à origem do referencial é dada por $d(x) = \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}$.

Fonte: Máximo, 10. ° ano, Porto Editora (Adaptado)

Da análise efetuada às respostas dos alunos verifica-se que existe a mesma percentagem de respostas corretas e respostas parcialmente corretas (40%), enquanto a ressaltante percentagem (20%) traduz as respostas consideradas incorretas (Tabela 17).

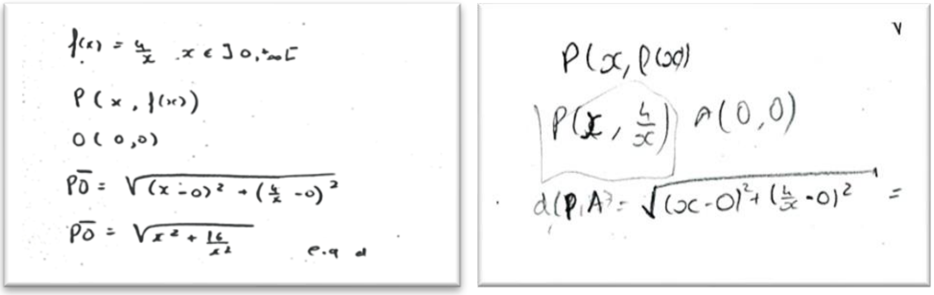
Tabela 17. Frequência (%) dos tipos de resposta da tarefa - A distância ($n = 5$)

Item	**Tipo de resposta**			
	Correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não responde**
1	2 (40)	2(40)	1(20)	0(0)

Os alunos nesta tarefa poderiam recorrer a diferentes estratégias de resolução [P.Geral_1]: recorrer à fórmula da distância entre dois pontos no plano, $P_1(0,0)$ e $P_2\left(x, \frac{4}{x}\right)$, e determinar a distância entre esses dois pontos $d = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\frac{4}{x} - 0\right)^2}$; ou recorrer ao Teorema de Pitágoras para calcular o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo formado por esses mesmos pontos.

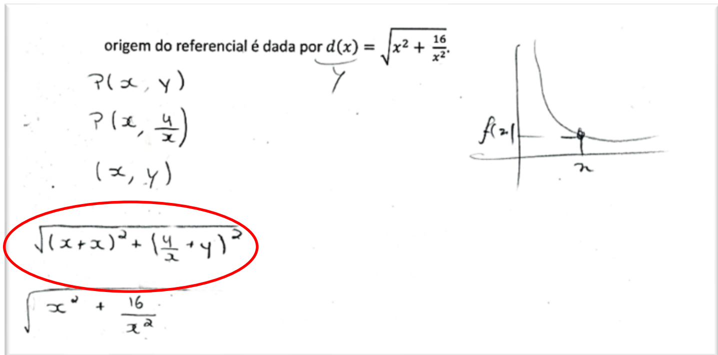
Os alunos dos grupos G1 e G7 recorreram ao raciocínio dedutivo, através da linguagem algébrica para justificar a sua resposta, baseando-se em propriedades e factos matemáticos, apresentando uma resposta formal e completa [N_3C] (Figura 41). O grupo G1 traduz o seu raciocínio através da definição dos respetivos pontos e posteriormente aplica a fórmula que permite determinar a distância entre dois pontos, obtendo assim a resposta à tarefa. O grupo G7 segue um raciocínio semelhante, mas não simplifica as expressões obtidas através do quadrado de um binómio, sendo considerada resposta parcialmente correta.

Figura 41. Resposta correta do grupo G1 e parcialmente correta do grupo G7 à tarefa - A distância



Os alunos do grupo G4, apesar de recorrerem à linguagem algébrica para tentar justificar a sua resposta, tiveram necessidade de recorrer ao 'esboço' gráfico para marcar as coordenadas do ponto P (Figura 42).

Figura 42. Resposta incorreta do grupo G4 à tarefa - A distância



Pressupõe-se que o 'esboço' efetuado pelo grupo teve como único objetivo a compreensão da tarefa. Deduz-se que os alunos, na sua resolução, começaram por definir as coordenadas de um ponto genérico $P(x, y)$. Posteriormente, pela observação do 'esboço' gráfico, percebem que as coordenadas do ponto P são respetivamente $P(\,x, f(x))$, ou seja, $P(\,x, \frac{4}{x})$. Para determinar a distância entre dois pontos os alunos aplicam incorretamente a fórmula da distância e substituem incorretamente os pontos pretendidos, ou seja, os alunos determinam a distância entre o ponto P e um ponto genérico e não a distância entre o ponto P com a origem do referencial. Podem-se assumir dois fatores para a incorreta utilização da fórmula da distância: (I) os alunos não mobilizaram os conhecimentos sobre a fórmula da distância entre dois pontos; (II) 'sentiram necessidade de alterar a fórmula' para obter x^2, uma vez que o objetivo da tarefa era mostar que $d = \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}$. No segundo quadrado do binómio, como consequência do erro de substituição das coordenadas dos pontos, os alunos obtêm na fórmula duas incógnitas, não conseguindo desenvolver o item. Pelos fatores supramencionados a resposta foi considerada incorreta.

Posteriormente à resolução e discussão da tarefa - A distância foi proposta a resolução da tarefa - O Quadrado (Figura 43).

Figura 43. Enunciado da tarefa – O quadrado

Tarefa 2. O quadrado

Num referencial ortonormado $\boldsymbol{O_{xy}}$ está representado o gráfico da função definida por $\boldsymbol{g(x)} = \sqrt[3]{\boldsymbol{9x}}$ e um ponto A que se desloca ao longo deste gráfico. Pretende-se construir retângulos cujos vértices sejam definidos por este ponto, pela origem do referencial e por pontos sobre os eixos coordenados.

a) Determina as coordenadas do ponto $\boldsymbol{A}$ de forma que o retângulo seja um quadrado.

b) Indica, justificando, as coordenadas dos vértices do quadrado referido na alínea a) se em vez de $\boldsymbol{g}$ considerares as funções definidas por:

b1) $\boldsymbol{2g}(\frac{x}{2})$

b2) $\boldsymbol{3g}(\frac{x-2}{3})$

Fonte: Máximo, 11. º ano, Porto Editora (Adaptado)

Da análise efetuada das respostas dos alunos a cada um dos itens desta tarefa, verifica-se que alguns deles apresentam respostas corretas enquanto que outros apresentam repostas parcialmente corretas, incorretas ou não respondem aos itens (Tabela 18).

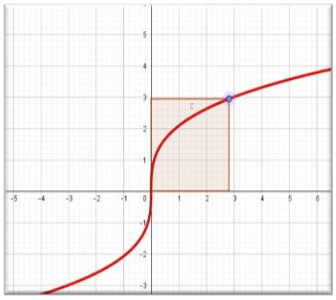
Tabela 18. Percentagem (%) dos tipos de resposta aos itens da tarefa - O quadrado ($n = 9$)

Item		**Tipo de resposta**			
		Correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não responde**
a)		2(22,2)	5(55,6)	2(22,2)	0 (0)
b)	**b1)**	2(22,2)	3(33,3)	2(22,2)	2(22,2)
	b2)	1(11,1)	0(0)	6(66,7)	2(22,2)

No primeiro item da tarefa, os alunos poderiam recorrer a diferentes estratégias de resolução [P.Geral_1]: (1) algebricamente, calculando o ponto de interseção do gráfico da função g com gráfico da função $y = x$, ou seja, $\sqrt[3]{9x} = x$, obtendo as abcissas dos pontos de interseção, $x = 0 \vee x = -3 \vee x = 3$. Com os pontos de interseção podemos obter as coordenadas que formam quadrados, que são: $A_1(3{,}3)$, $A_2(3{,}0)$, $A_3(0{,}3)$, $A_4(0{,}0)$ e $B_1(-3,-3)$, $B_2(-3{,}0)$, $B_3(0,-3)$, $B_4(0{,}0)$; ou (2) graficamente, usando as propriedades da calculadora para determinar os pontos de interseção dos gráficos das duas funções definidas e posteriormente referenciar os respetivos vértices dos quadrados [P.Geral_2].

Dada a comparência de alguns alunos na aula apenas no momento da resolução desta tarefa, optei por explicar o que se pretendia com a sua exploração.

Figura 44. Imagem do GeoGebra



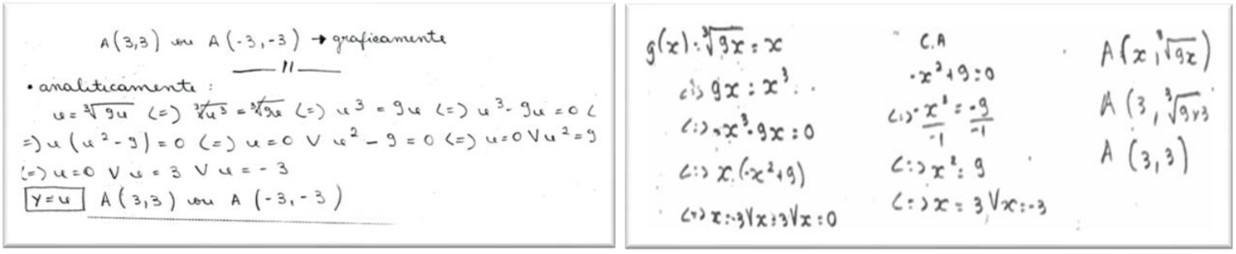
Professora: Esta é a função g.
Um ponto movimenta-se no gráfico da função, e reparem que este ponto se movimenta formando retângulos com os eixos coordenados.
(movimentei o ponto de forma a que os discentes conseguissem observar os retângulos formados).
Quando é que este ponto forma um quadrado?
Alunos: Quando os lados são iguais.
Professora: Como é que nós vemos isso, A6?
A6: Vai andando com o ponto e vê quando o valor da abcissa é igual ao valor da ordenada.
A4: Isso porque tens o gráfico.
Professora: E se não tivesse o gráfico? Ou se não tivesses calculadora?
A2: Fazia $y = x$
A11: É $g(x) = x$
Professora: Então, o que temos que fazer?
A11: Ver quando é que $\sqrt[3]{9x} = x$. (OGAV4_2)

Neste momento de interação com a turma (OGAV4_2), comecei por *guiar* os alunos com a explicação inicial, fornecendo pistas, de forma a *apoiar* na interpretação do enunciado. No diálogo optei por *convidar* os alunos a responderem a questões pontuais, de forma a *desafiar* à reflexão das suas respostas e conduzi-los à resolução correta.

Da análise do diálogo com a turma, pode-se verificar que os alunos que interagem perceberam o que se pretendia, verificar quais os pontos cuja ordenada é igual à abcissa. O aluno A6, ao responder "vai andando com o ponto e vê quando é que o valor da abcissa é igual ao valor da ordenada", remete para uma justificação através do método tentativa e erro [N_2]. O aluno A4 contra-argumenta de imediato, ao afirmar "isso porque tens o gráfico", demonstrando que a solução apresentada pelo colega só lhe foi possível 'ver' por observação do gráfico representado. Subentende-se que, para este aluno, há outras formas de resolução sem ser o método tentativa e erro. Questionei então a turma como poderiam resolver se não tivessem nem calculadora nem o gráfico, tentando guiar os alunos para a resolução algébrica. A resposta dada pelo aluno A2 é ambígua, pois não explicita de que forma pretende resolver, se graficamente, e nesse caso recorreria à interseção dos gráficos da função g com o da função $y = x$, ou se, algebricamente. Dada a ambiguidade, o aluno A11 pressupõe que o aluno A2 queria resolver analiticamente 'corrigindo-o' ao afirmar $g(x) = x$, ou seja, $\sqrt[3]{9x} = x.$ Após esta interação foi solicitado aos alunos que resolvessem a tarefa.

No primeiro item da tarefa, os alunos dos grupos G3 e G7 mobilizam competências na área do raciocínio dedutivo baseado em propriedades matemáticas para apresentarem uma justificação formal completa [N_3C]. Recorrem à linguagem algébrica para determinar as abcissas dos pontos, revelando facilidade em converter a representação gráfica (fornecida por mim aquando da explicação) na representação algébrica, manipulando conceitos e propriedades das funções [P.Geral_2]. O grupo G3 dá significado à solução, uma vez que indica as coordenadas dos pontos que formam os quadrados, $A(3,3)$ e $A(-3,-3)$, demonstrando que o grupo percebeu a igualdade efetuada, contrariamente ao grupo G7 que não responde totalmente ao item (Figura 45).

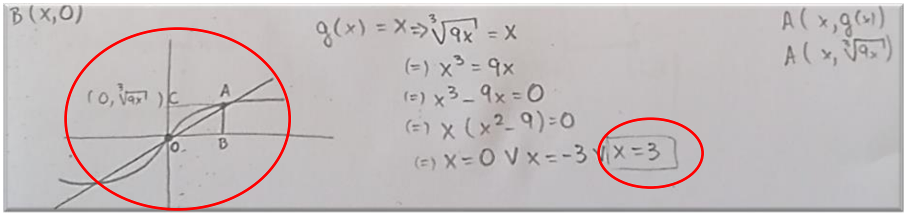
Figura 45. Resposta correta do grupo G3 e parcialmente correta do grupo G7 ao item a) da tarefa - O quadrado



A verificação efetuada pelo grupo G7 pressupõe duas possibilidades: (I) não assimilaram a igualdade e substituíram as coordenadas de forma a verificar se o valor da abcissa é igual ao da ordenada; (II) verificar que efetivamente o valor da ordenada é igual ao da abcissa formando assim um quadrado. Dado que o grupo apenas referiu um dos pontos, a sua resposta está parcialmente correta, pois não evidencia as coordenadas de todos os pontos que formam os vértices dos quadrados.

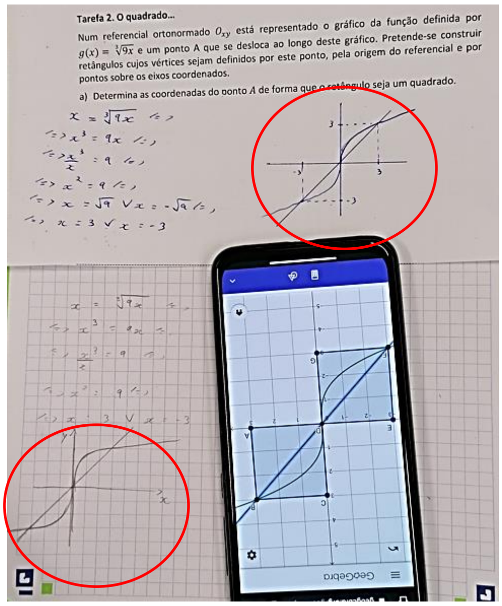
Os alunos dos grupos G5 e G2, na fase inicial utilizam a representação gráfica para compreensão da tarefa. Posteriormente, os grupos recorrem à representação algébrica para determinar/verificar as abcissas dos pontos de interseção do gráfico da função g com o de $y = x$ [P.Geral_2]. Ambos os grupos realizam com facilidade os tratamentos dentro do sistema algébrico, conseguindo determinar corretamente as abcissas dos pontos de interseção. Apesar de evidenciarem, nas suas representações, os três pontos de interseção, o grupo G5 salienta apenas o ponto de abcissa $x = 3$ (Figura 46). Pressupõe-se que, para este grupo, esta seja a única solução, demonstrando uma compreensão parcial da tarefa.

Figura 46. Resposta parcialmente correta do grupo G5 ao item a) da tarefa - O quadrado



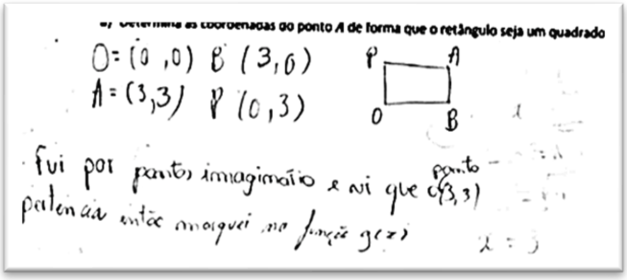
Já o grupo G2 determina as coordenadas algebricamente e posteriormente confirma-as através do esboço gráfico obtido no GeoGebra. Na folha que entrega para além de representar o esboço gráfico correto, indica os respetivos pontos de interseção obtidos algebricamente, demonstrando uma compreensão total da tarefa (Figura 47). Os alunos deste grupo revelaram facilidade na conversão entre a linguagem algébrica e gráfica.

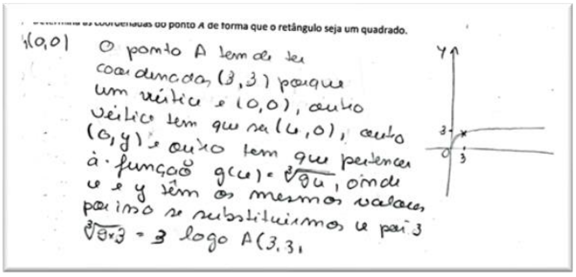
Figura 47. Resposta correta do grupo G2 ao item a) da tarefa - O quadrado



Os alunos dos grupos G1 e G8 recorreram à linguagem natural para apresentar e justificar informalmente os seus raciocínios na obtenção da solução. Subentende-se pelas suas justificações que os alunos recorreram ao método de tentativa e erro. Na sua justificação, o grupo G1 afirma que foi testando pontos até ao valor da abcissa ser igual ao valor da ordenada. No entanto, nesta justificação não ficou evidenciada a forma como os alunos testaram esses mesmos valores, se recorreram às potencialidades da calculadora gráfica, ou se o fizeram algebricamente testando os valores algebricamente [N_0]. Contrariamente, o grupo G8 justifica como obteve as coordenadas do ponto. Os alunos testaram as suas conjeturas formuladas através da experimentação de valores nas coordenadas dos pontos até à sua validação [N_2]. No esboço elaborado pelo grupo, verifica-se que reproduziram da calculadora a parte positiva do gráfico, possivelmente pelo facto de utilizarem números naturais (Figura 48).

Figura 48. Respostas parcialmente corretas dos grupos G1 e G8 ao item a) da tarefa - O quadrado

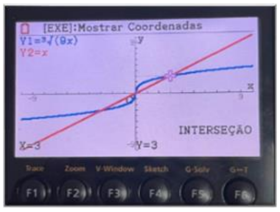




Os alunos do grupo G6 recorreram à representação gráfica para justificar a sua resposta. Utilizaram a calculadora gráfica para verificar quais as coordenadas que perfazem os quadrados. Verifica-se que o aluno A11 faz literalmente o que afirma no diálogo inicial: "Ver quando é que $\sqrt[3]{9x} = x$". Uma vez que foi o único grupo que recorreu apenas à capacidade gráfica da calculadora, solicitei a um aluno do grupo que explicasse a sua estratégia de resolução, de forma a confrontar a resolução analítica com a resolução gráfica.

Professora: A11, como é que fizeste?
A11: Como o x vai ter de ser igual ao y, inseri as duas funções na calculadora, e fui ver quando eram iguais.
Professora: Que expressões inseriste?
A11: A função g e $y = x$.
Professora: Já agora, como é que obtiveste o valor 3?
A11: Pela interseção. Usei o intercept. Eu acho mais fácil, fazer na máquina. (OGAV4_3)

Figura 49. Resposta parcialmente correta do grupo G6 ao item a) da tarefa - O quadrado



Como se pode observar, optei inicialmente por *desafiar* o aluno à explanação do seu raciocínio perante a turma. De forma a *apoiar* os restantes colegas, questionei o aluno com questões pontuais, de forma a poder *guiar* toda a turma quer para a explicação do aluno quer para a resolução gráfica.

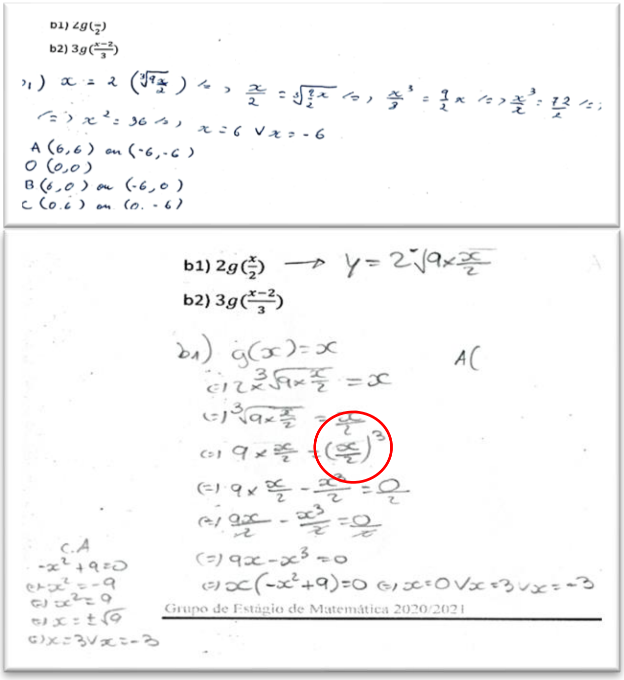
Através da justificação verbal, percebe-se que o aluno estabelece uma conexão entre uma propriedade conhecida (interseção dos gráficos de duas funções) e a situação particular presente na questão [N_3C]. No entanto, a justificação apresentada remete para uma compreensão parcial da situação visto que não estabelece todas as conexões necessárias para a justificação apropriada. Ou seja, não evidência as coordenadas dos vértices dos quadrados. Esta resposta foi considerada parcialmente correta por vários fatores: (I) pelo aspeto acima mencionado; (II) pelo facto do gráfico dever ser um mero construtor de conhecimento e/ou meio de comunicação e não como justificação por si só; (III) pelo facto da sua justificação advir apenas da minha solicitação.

Após a correção e a discussão das diferentes estratégias de resolução do item a), propus aos discentes a resolução dos itens b1) e b2). O objetivo primordial destes itens consistiu em incentivar os alunos a pensar primeiro numa estrutura visual e depois numa analítica. Os alunos deviam assimilar primeiramente as transformações ocorridas no gráfico da função g para obter os gráficos das funções f e h, para seguidamente conseguir aplicar as devidas transformações à reta $y = x$, de forma a obter as respetivas abcissas dos pontos de interseção. Independentemente da forma como o aluno resolveu os itens, estes teriam de aplicar operações de tratamento na função g para obter as respetivas funções$f$ e h, respetivamente, $f(x) = 2 \times \sqrt[3]{\frac{9x}{2}}$ e $h(x) = 3 \times \sqrt[3]{3(x-2)}$. Assim, para o item b1) os alunos podiam assimilar que o gráfico da função f é obtido a partir do gráfico da função g por meio de uma dilatação vertical e de uma dilatação horizontal, ambas de coeficiente 2, não havendo qualquer tipo de deslocação, quer horizontal ou vertical. Assim, os alunos podem obter as coordenadas dos vértices do quadrado através da igualdade da expressão que define a função f com a função $y = x$, obtendo as abcissas dos pontos de interseção, $x = 0 \vee x = -6 \vee x = 6.$ As coordenadas dos vértices que formam quadrados com a origem do referencial são $A_1(6,6), A_2(6,0)$, $A_3(0,6)$, $A_4(0,0)$ e $B_1(-6,-6)$, $B_2(-6,0), B_3(0,-6), B_4(0,0)$.

Os alunos poderiam recorrer às capacidades gráficas para obter os pontos de interseção do gráfico da função f com o gráfico da função $y = x$, de forma a obter as abcissas dos pontos de interseção e respetivamente os vértices dos quadrados [P.Geral_1].

Os alunos do grupo G5 e G2 privilegiaram a representação algébrica como ferramenta de exploração, realizando os tratamentos de modo a obter a solução. As respostas apresentadas pelos grupos evidenciam uma justificação formal, baseada em procedimentos e factos matemáticos [N_3C], mas não apresentam justificação para a igualdade entre a função f e a função $y = x$. Pressupõe-se que esta igualdade possa advir da igualdade efetuada no item anterior, e, assim sendo, os alunos demonstram uma compreensão parcial do item. Os alunos do grupo G5 conseguem obter corretamente os pontos de interseção, contrariamente ao grupo G2 (Figura 50), que apresenta um erro de resolução, pois não desenvolveu o quociente da potência corretamente, originando assim uma resposta parcialmente correta.

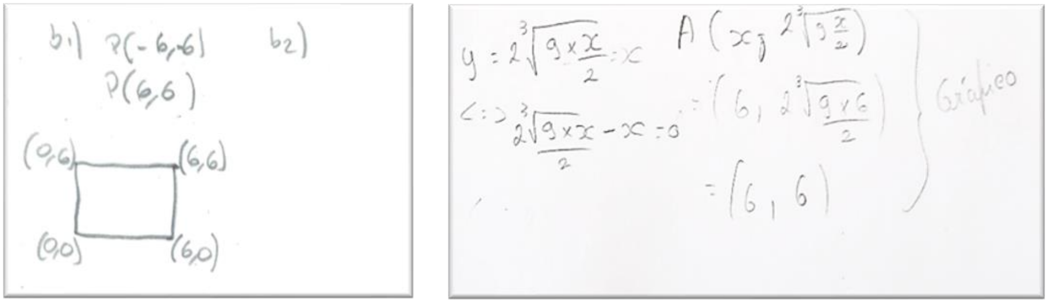
Figura 50. Resposta correta do grupo G5 e parcialmente correta do grupo G2 ao item b1) da tarefa - O quadrado



Os alunos do grupo G1 apresentam apenas os vértices do quadrado sem qualquer justificação [N_0], não ficando evidente como foram determinados. Pressupõe-se que este grupo tenha recorrido às capacidades da calculadora, ato efetuado no momento de discussão, para determinar as respetivas abcissas, ficando subentendido para este grupo que seria mais 'rápida a descoberta' das abcissas através da visualização gráfica da interseção da função f com a reta $y = x$, uma vez que no item anterior o grupo resolveu analiticamente.

Os alunos do grupo G9, numa fase inicial, focam-se na representação algébrica, realizando tratamentos dentro do sistema algébrico, de forma a determinar o valor da incógnita, mas sem sucesso, uma vez que não terminam os seus cálculos. Face à sua resposta, pressupõe-se que: (I) recorreram às capacidades da calculadora gráfica para determinar os pontos de interseção do gráfico da função f com o gráfico da função $y = x$ e posteriormente validaram esses mesmos pontos substituindo o valor da abcissa no ponto de coordenadas $(x, f(x))$ verificando que se trata efetivamente de um dos vértices do quadrado; ou (II) recorreram ao método tentativa e erro para verificar quando é que as coordenadas são iguais e posteriormente recorrer ao gráfico como forma de validação/comprovação. No entanto, os alunos do grupo G9 revelaram facilidade em converter a representação algébrica da função f na sua representação gráfica e usam esta última de um modo flexível na exploração da tarefa manipulando conceitos, dando significado à solução. Percebe-se que este grupo estabelece uma conexão entre uma propriedade conhecida (interseção dos gráficos de duas funções) e a situação particular presente na questão [N_3C]. Porém, a justificação apresentada remete para uma compreensão parcial da situação, uma vez que não apresenta as coordenadas dos vértices dos quadrados, nem o porquê de igualar a função f à função $y = x$ (Figura 51).

Figura 51. Resposta parcialmente correta do grupo G1 e G9 ao item b1) da tarefa - O quadrado



Pode-se referenciar um aspeto importante inerente à resolução do grupo G9, dada a sua resolução, que é a janela de visualização do gráfico. O facto de o grupo ter mencionado o recurso à calculadora e pressupondo que esta se encontra no modo standard, o grupo deveria observar dois pontos de interseção e não um, como evidenciado na sua solução. Na possibilidade de a janela não se encontrar no modo standard, os alunos revelaram pouco sentido crítico, em dois sentidos: (I) na medida em que, sendo a função f obtida através da dilatação e contração da função g, o gráfico de f seria 'semelhante' ao gráfico de g (estudada no item anterior), logo deveriam obter dois pontos de interseção; e (II) pelo facto de os alunos verificarem apenas a parte positiva, não questionando a possibilidade de haver quadrados no terceiro quadrante.

No que respeita ao item b2), os alunos podiam assimilar que o gráfico da função h é obtido a partir do gráfico da função g por meio de uma de uma dilatação vertical e de uma dilatação horizontal, ambas de coeficiente 3, e pela translação associada ao vetor $\vec{v}(2,0)$. O facto de o gráfico se deslocar duas unidades para a direita, os alunos deveriam assimilar que a reta de equação $y = x$ também deveria deslocar-se duas unidades para a direita. Assim, os alunos poderiam obter uma das coordenadas dos vértices do quadrado através da igualdade da função h com a função $y = x - 2$, obtendo as abcissas dos pontos de interseção $x = 2 \vee x = 11$. Para determinar a ordenada dos pontos que representam os vértices do quadrado, os alunos deveriam substituir os valores das abcissas dos pontos de interseção na respetiva função, obtendo $A_1(11,6)$, $A_2(2,0)$, $A_3(11,0)$, $A_2(2,9)$. O comprimento do lado do quadrado obtido será de 9 unidades de medida. Os alunos neste item demonstraram dificuldades, comprovando-se pela percentagem de respostas incorretas (66,7%).

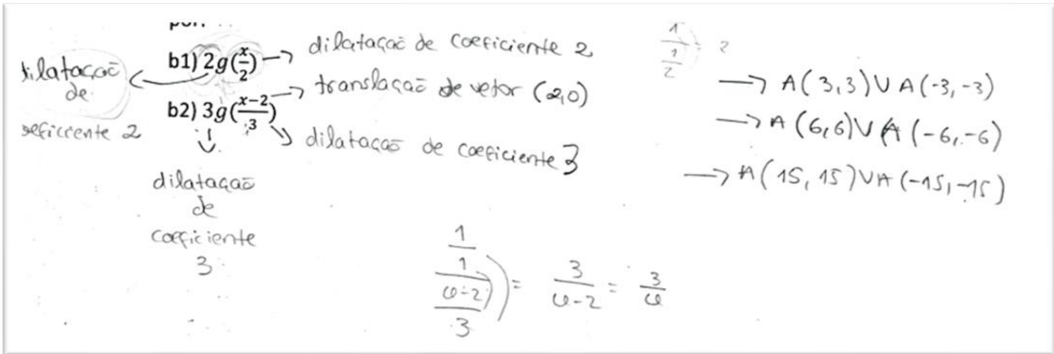
A maioria dos grupos recorre à função $y = x$ para determinar os pontos de interseção, o que demonstra que estes não perceberam as transformações associadas ao gráfico da função inicial. No diálogo (OGAV4_4) pode-se observar que os alunos não assimilaram todas as transformações gráficas associadas ao gráfico da função h, efetuando a igualdade da função h com a reta $y = x$.

A 6: É assim?
A2: Dá igual à primeira.
A4: Não. Tens de fazer as transformações. Olha os parênteses.
Professora: Que transformações têm aqui?
A6: Uma dilatação e uma contração.
Professora: Só? Vejam melhor.
(...)
Professora: (Para o grupo da A4). Já conseguiram?
A6: Sim, o problema é que se traçarmos a reta $y = x$, para ver quando se intersetam não dá...
A4: Temos qualquer coisa mal. (OGAV4_4)

Neste momento de interação com o grupo (OGAV4_4), comecei por *convidar* o grupo a explicar a sua interpretação do enunciado. Ao longo do diálogo optei por *desafiar* os alunos à reflexão das suas respostas e simultaneamente *sugerir* a (re)elaboração as suas respostas.

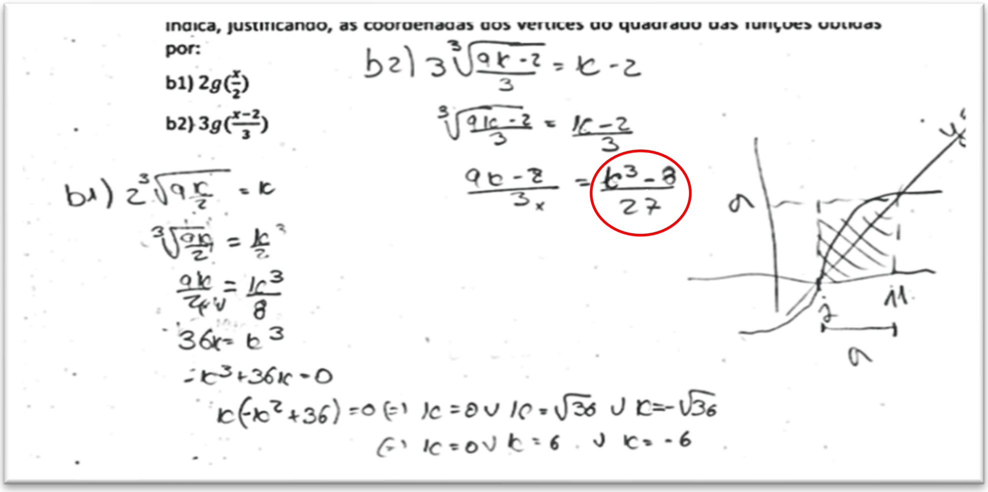
Os alunos do grupo G2 (Figura 52) mencionam as transformações associadas aos gráficos de cada uma das funções, apresentando posteriormente, sem qualquer justificação [N_0], seis pontos.

Figura 52. Resposta incorreta do grupo G2 ao item b2) da tarefa - O quadrado



Na resolução, o grupo G3 consegue assimilar as respetivas transformações gráficas associadas quer ao gráfico da função h quer à reta $y = x$. Numa fase inicial, o grupo foca-se na representação algébrica, realizando tratamentos dentro do sistema algébrico, de forma a determinar o valor da incógnita, mas sem sucesso, uma vez que não termina os seus cálculos. No entanto, os alunos revelaram facilidade em converter a representação algébrica da função h e da reta $y = x - 2$ na sua representação gráfica e usaram esta última de um modo flexível na exploração da tarefa manipulando conceitos, dando significado à solução (Figura 53) [P.Geral_2].

Figura 53. Resposta correta do grupo G3 ao item b2) da tarefa - O quadrado



Percebe-se que o grupo estabelece uma conexão entre uma propriedade conhecida (interseção dos gráficos de duas funções) e a situação particular presente na questão [N_3C]. A justificação apresentada remete para uma compreensão da situação, visto que estabelece todas as conexões necessárias para a justificação apropriada. Ou seja, evidencia as coordenadas dos vértices dos quadrados demonstrando no esboço gráfico as respetivas transformações, nomeadamente a translação associada, quer ao gráfico da função quer à reta. Constata-se que os alunos deste grupo, em ambas as alíneas, na fase inicial focam-se na representação algébrica, realizando tratamentos dentro do sistema algébrico, de forma a determinar o valor da incógnita. No primeiro item determinam corretamente os pontos de interseção, no entanto não mencionam as coordenadas dos vértices do quadrado, nem recorrem à representação gráfica para sustentar as suas respostas. Contrariamente, no item b2), não terminam os seus cálculos, mas sentiram necessidade de recorrer ao gráfico para demonstrar os seus raciocínios e validar as suas respostas. Subentende-se que estes alunos apenas procuraram recorrer essencialmente à representação algébrica como ferramenta de exploração, mas, dado o pouco tempo para o término da aula, aceita-se que o recurso à representação gráfica prevaleça pelo facto de se obter a resposta pretendida mais rapidamente.

Síntese

Neste ponto pretende-se obter um panorama geral da turma sobre os processos de raciocínio e o papel que as representações desempenharam na sua promoção. Na tarefa - A distância, os alunos revelaram facilidade na interpretação do enunciado, assim como no tratamento e conversões entre diferentes representações (algébrica, gráfica e linguagem natural). Os alunos conseguiram generalizar o pretendido, recorrendo apenas ao raciocínio dedutivo como justificação. De acordo com a Tabela 19, verifica-se que o nível de complexidade da justificação que surge é o nível 3C (100%), uma vez que os alunos fundamentaram as suas respostas, baseando-se em propriedades e factos matemáticos.

Tabela 19. Frequência (%) de justificações de acordo como o seu nível de complexidade na tarefa - A distância

	Níveis de complexidade						Frequência de respostas
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
a)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	4(100)	4
Percentagem média	0	0	0	0	0	100	

Como mencionado anteriormente, os alunos não revelaram dificuldades na conversão entre as diferentes representações, nomeadamente entre a linguagem natural para a representação algébrica, uma vez que todos eles utilizaram apenas essa representação. Aliado a este facto está a ausência do recurso à representação gráfica, quer como auxílio quer como validação, como se pode constatar pela Tabela 20.

Tabela 20. Frequência (%) dos tipos de representação que surgiram nas produções dos alunos.

	Tipo de representação				Frequência de respostas
	Algébrica	**Verbal**	**Numérica**	**Gráfica**	
a)	4(100)	0(0)	0(0)	0(0)	4
Percentagem média	100	0	0	0	

No que respeita à segunda tarefa, os alunos apresentaram algumas dificuldades na sua resolução. Como expectável, neste nível de ensino e como se pode constatar pela Tabela 21, a maioria dos alunos justifica as suas respostas, usando o raciocínio dedutivo, baseado em procedimentos e factos matemáticos (83,8%). Os grupos que não apresentaram justificações para as sua respostas correspondem a uma percentagem de 11,4%. Quando os alunos sentem dificuldades em justificar por processos dedutivos, recorrem à experimentação para testar as suas conjeturas, correspondendo nesta tarefa a uma percentagem de 4,76%.

Tabela 21. Frequência (%) de justificações de acordo como o seu nível de complexidade na tarefa - O quadrado

	Níveis de complexidade						Frequência de respostas
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
a)	1(14,3)	0(0)	1(14,3)	0(0)	0(0)	5(71,4)	7
b1)	1(20)	0(0)	0 (0)	0(0)	0(0)	4(80)	5
b2)	0(0)	0(0)	0 (0)	0(0)	0(0)	1(100)	1
Percentagem média	11,4	0	4,76	0	0	83,8	

Nesta tarefa os discentes revelaram facilidade no tratamento e conversão entre as diferentes formas de representação (algébrica, gráfica e linguagem natural). No entanto, a seleção das representações a usar na sua exploração começou a ser feita com base nas experiências anteriores dos alunos, limitando o seu raciocínio. Os alunos privilegiaram a representação algébrica (79,1%) como ferramenta de exploração realizando tratamentos de modo a obter informações e determinar as respetivas soluções. Segundo Arcavi (2003), os alunos mostram-se reticentes quanto ao uso de representações gráficas, mesmo estando em posse de calculadoras gráficas. Os alunos procuram quase sempre a solução algébrica das questões. Recorrem à representação gráfica (65,7%) também como ferramenta de exploração, nos casos em que a representação algébrica não lhes permite obter o que pretendiam, ou como forma de interpretação ou validação dos seus raciocínios (Tabela 22).

Tabela 22. Frequência (%) dos tipos de representação nas produções dos alunos em tarefas de exploração

	Tipo de representação				**Frequência de respostas**
	Algébrica	**Verbal**	**Numérica**	**Gráfica**	
a)	4(57,1)	2(28,6)	2(28,6)	4(57,1)	7
b1)	4(80)	0(0)	0(0)	2(40)	5
b2)	1(100)	0(0)	0 (0)	1 (100)	1
Percentagem média	79,1	9,5	9,5	65,7	

Os alunos recorrem essencialmente ao raciocínio dedutivo baseado em definições e propriedades matemáticas, em que a representação algébrica predomina como ferramenta de exploração e de apresentação de conjeturas e justificações formais.

3.4 Raciocínios e representações que emergem da atividade dos alunos

A natureza das tarefas propostas aos discentes incentiva-os a usar estratégias distintas e trabalhar diferentes representações, tal como é sugerido quer pelo projeto REASON, quer pelo NCTM (2007). Este tipo de tarefas não tem um método de resolução imediata, desafiando-os a construir as suas próprias estratégias usando conhecimentos prévios. Deste modo, os alunos tiveram que interpretar as questões e representar a informação apresentada.

Nas tarefas apresentadas na segunda aula, nomeadamente 'O salto do gafanhoto' e 'O triângulo dentro do triângulo', os alunos revelaram sentir dificuldade em encontrar estratégias de resolução por apresentarem contextos diferentes daqueles que estão habituados. Relativamente à tarefa - O salto do gafanhoto, apesar de o enunciado mencionar que se tratava de uma função quadrática, alguns alunos revelaram dificuldades em aplicar os conhecimentos adquiridos acerca desta família de funções, o que indicia não estarem habituados a uma interligação da Matemática com contextos da realidade. Percebe-se que há uma compartimentação de conhecimentos. Saliente-se que esta tarefa não apresentava nenhum contexto gráfico, o que pode explicar a razão que levou a metade dos alunos a ter que efetuar um 'esboço' de uma possível representação do salto. A alta percentagem do uso da linguagem verbal

(77,1%) é percetível, pois é este tipo de linguagem que os alunos mais usam em questões de resposta imediata.

A tarefa - O triângulo dentro do triângulo, ao apresentar um esboço dos triângulos dispensou os alunos de terem que esquematizar a situação. Tal como a primeira tarefa, os alunos revelaram dificuldades quer na interpretação do enunciado quer na formulação da generalização. Apenas um par conseguiu obter a generalização usando apenas a linguagem algébrica, revelando que a turma ainda expressa dificuldades na conversão entre as diferentes representações, não se encontrando todos na fase da reificação. Outro aspeto que revela dificuldades na generalização prende-se com o uso da representação numérica, pois passa a ter um 'papel' importante na construção da generalização. Os alunos vão testando valores procurando descrever o contexto do enunciado, tornando-se um obstáculo à generalização, o que se traduz na percentagem superior a 50% do uso da representação numérica. Infere-se que os alunos têm uma conceção de que a apresentação de vários casos particulares se traduz num processo de generalizar um padrão sem o traduzir algebricamente. Os alunos não conseguiram mobilizar conteúdos aprendidos, nomeadamente a área do triângulo, quando os mesmos se tornam premissas importantes para a construção de novo conhecimento. Os alunos nem sempre fazem conexões necessárias entre os diferentes conteúdos.

Após uma série de aulas sobre a função quadrática, iniciou-se o estudo da função por ramos, com a tarefa - O salto do mergulhador. Pelas intervenções e esboços iniciais dos discentes, constata-se que recorreram a conceitos aprendidos no estudo da função quadrática, tendo-os reproduzidos no estudo da função por ramos. Nesta tarefa era pedido aos alunos a passagem da linguagem verbal para a linguagem gráfica e posteriormente para a linguagem algébrica. Os alunos revelaram dificuldades na conversão da representação verbal para a representação gráfica e consequentemente na conversão gráfica para a algébrica. A segunda conversão revelou que os alunos tendem a ter dificuldades em mobilizar conteúdos matemáticos, pois com o gráfico no quadro poderiam ter pensado que o mesmo poderia ser trabalhado como duas funções afins.

A tarefa - Água no cubo, apresentava um grau de dificuldade maior, uma vez que era pedido ao aluno uma elevada capacidade de abstração. Foi notória a dificuldade, pois não houve nenhum grupo que obtivesse a resposta correta. Nesta tarefa foi percetível, uma vez mais, a dificuldade que os alunos têm na mobilização de conteúdos. Só após a intervenção da docente é que perceberam que poderiam usar a semelhança de triângulos para a resolução. A linguagem algébrica foi a mais utilizada. O importante de realçar nesta tarefa é o uso da linguagem gráfica para sustentar os seus raciocínios apesar de no enunciado estar patente o esquema, o que revela que, em problemas de modelação, os discentes sentem necessidade de descrever o contexto.

Sendo fundamental proporcionar aos alunos uma variedade de situações que incluam o recurso a diversas estratégias, como o uso da calculadora gráfica, de forma a desenvolver conexões entre representações, a tarefa – O quadrado foi pensada nesse sentido. A passagem de uma representação para a outra é essencial para que os discentes tenham conhecimento da existência de várias representações que podem ser utilizadas na realização da tarefa proposta. Assim, a tarefa do quadrado permitiu ao aluno a escolha da representação mais eficaz na resolução da tarefa e, caso fosse necessário, permitia estabelecer conexões entre representações. A maioria dos alunos optou por resolver algebricamente, no entanto, numa das resoluções, um aluno resolveu o primeiro item algebricamente, optando na resposta ao segundo item pela representação gráfica, demonstrando ter flexibilidade em estabelecer conexões entre representações. Esta conversão/tratamento entre representações permitiu aos alunos estabelecer conexões entre as diferentes representações o que constitui uma das condições para o acesso à compreensão do conceito de função.

Seguidamente são apresentadas as características quer no que respeita ao nível de complexidade do raciocínio, quer o tipo de representação utilizada em cada uma das tarefas apresentadas aos discentes (Tabela 23).

Tabela 23. Evolução dos níveis de raciocínio e tipo de representação utlizados pelos discentes nas diferentes tarefas.

		Função quadrática		**Função por ramos**		**Função raiz quadrada e cúbica**	
		Salto do gafanhoto	**O triângulo dentro do triângulo**	**O mergulhador**	**Água no cubo**	**A distância**	**O quadrado**
		Justificação	Generalização	Generalização	Generalização	Justificação	Justificação
	Representação	Verb–Alg	Ver+Gráf–Alg	Verb–Gráf+Alg	Verb+Gráf—Alg	Alg—Alg	Alg—Alg
Níveis de complexidade de raciocínio (%)	0	25	25	33,3	0	0	11,4
	1	0	0	0	0	0	0
	2	0	37,5	16,7	0	0	4,76
	3A	12,5	0	0	0	0	0
	3B	12,5	25	0	0	0	0
	3C	50	12,5	50	100	100	83,8
Tipos de representação (%)	Alg	42,7	50	50	100	100	79,1
	Ver	48,9	25	16,7	0	0	9,5
	Num	0	25	0	0	0	9,5
	Gráf	28,1	0	50	50	0	65,7

Ver- Verbal; Num-Numérica; Gráf- Gráfica; Alg- Algébrica

Na realização das tarefas, os alunos foram incentivados à justificação dos seus raciocínios, por solicitação expressa quer no enunciado das tarefas quer oralmente por mim nos momentos de interação. Nesse sentido, os alunos perceberam a importância de justificar os seus raciocínios, ficando evidente através das produções dos mesmos, que houve uma evolução no número de justificações apresentadas, ou seja, os alunos passaram a justificar os passos utilizados na resolução das tarefas.

Pela tabela 28, observa-se que houve uma evolução nos níveis de complexidade de raciocínio demonstrando que os discentes apresentaram cada vez mais justificações fundamentadas, quer recorrendo a processos dedutivos, quer recorrendo a argumentos matemáticos.

No que respeita às representações, a representação algébrica e gráfica foram as mais utilizadas e a representação numérica a menos utilizada, independentemente da tipologia da tarefa. A representação gráfica, a construção de 'esboços', foi importante no processo de aprendizagem, pois desempenhou a dupla função de compreensão e de complementaridade facilitando a construção das suas respostas. A linguagem verbal assumiu também um papel importante no processo de justificação, no sentido em que os discentes recorreram a esta linguagem para justificar, quando aparentemente não o conseguiam fazer por outros processos.

De um modo geral, verifica-se que o raciocínio dedutivo foi o mais recorrente na resolução das tarefas, com recurso à representação algébrica. A promoção das conexões entre representações, o tipo de funções estudadas, o ambiente de aprendizagem de carácter exploratório e o recurso à calculadora gráfica revelaram-se facilitadores do desenvolvimento do conceito de função.

3.5. Avaliação do ensino ministrado

De modo a conhecer as perceções dos alunos sobre as estratégias implementadas na minha intervenção pedagógica, solicitei que respondessem a um questionário (Anexo 3). A maioria dos alunos concorda que as tarefas propostas os desafiavam a raciocinar (100%), incitando-os a justificar a suas respostas (83,3%), e que estimulavam à conexão entre conceitos matemáticos (77,7%), favorecendo a aprendizagem dos tópicos em estudo (94,4%) (Tabela 24). No entanto, quanto à sua resolução, apenas 16,6% concordam que as respetivas tarefas eram de fácil resolução.

Tabela 24. Perceções (%) dos alunos relativamente às características das tarefas $(n = 18)$

Características das tarefas	**DT/D**	**NCND**	**C/CT**	$\overline{x}$	s
As tarefas que resolvi nas aulas desafiaram-me a raciocinar.	0%	0%	100%	4,3	0,49
As tarefas propostas nas aulas eram fáceis de resolver.	16,7%	66,7%	16,6%	2,9	0,8
Na discussão das resoluções das tarefas propostas nas aulas surgiram várias estratégias de resolução.	0%	16,7%	83,3%	4	1
As tarefas propostas nas aulas favoreceram a aprendizagem dos tópicos em estudo.	0%	15,6%	94,4%	4	0
A resolução das tarefas propostas nas aulas estimulava à conexão entre conceitos matemáticos distintos.	0%	22,3%	77,7%	4,1	0,7
A resolução das tarefas propostas nas aulas solicitava a justificação de raciocínios.	0%	16,7%	83,3%	4	1

No que respeita a trabalhar em grupo (Tabela 25), a opinião dos alunos é unânime em concordar que trabalhar em grupo foi benéfico para a sua aprendizagem, pois permitiu uma melhor interpretação das tarefas, promovendo a interação em todas as fases do processo, sobretudo aquando da discussão sobre as suas resoluções.

Tabela 25. Perceções (%) dos alunos relativamente ao trabalho de grupo ($n = 18$)

Trabalho de grupo	**DT/D**	**NCND**	**C/CT**	$\bar{x}$	s
O trabalho em grupo permitiu-me confrontar as minhas ideias com as ideias dos meus colegas.	0%	0%	100%	4,9	0,3
A discussão de estratégias de resolução das tarefas no grupo desenvolveu o meu raciocínio.	0%	5,6%	94,4%	5	1
A interação com os meus colegas do grupo foi benéfica para o desenvolvimento do raciocínio.	0%	5,6%	94,4%	5	1
Trabalhar em grupo ajuda a fazer uma melhor interpretação das tarefas.	0%	0%	100%	5	0
Nas atividades realizadas no grupo fui um elemento interventivo.	0%	22,3%	77,7%	4	1
Nas atividades realizadas no grupo esperei que alguém resolvesse as tarefas.	61,1%	16,7%	22,2	2	2
Nas atividades realizadas no grupo deve-se esperar que o melhor aluno resolva as tarefas.	94,4%	0%	5,6%	1	1

Os alunos sentiram-se elementos interventivos no grupo (77,7%), conseguindo expor e confrontar as suas ideias dentro do grupo (100%). De acordo com as suas opiniões, o facto de trabalharem em grupo não significa que deve ser o melhor aluno a resolver a tarefa, mas sim todo o grupo (94,4%). Para os discentes (100%), a discussão de estratégias de resolução das tarefas no grupo permitiu o desenvolvimento dos seus raciocínios.

Relativamente à temática das representações, como se pode observar pela Tabela 26, as representações constituem um elemento primordial na aprendizagem, quer como auxiliador na resolução das tarefas quer como meio de comunicação na discussão de ideias (94,4%). Para os discentes, a conexão entre as diferentes representações potencia a aprendizagem dos tópicos em estudo (88,2%), ao mesmo tempo que facilita a comunicação dos seus raciocínios perante a turma (61,1%). Na opinião dos alunos (94,4%) as diferentes representações ajudam no processo de raciocínio aquando da resolução das atividades.

Tabela 26. Perceções (%) dos alunos relativamente às representações ($n = 18$)

Representações	**DT/D**	**NCND**	**C/CT**	$\bar{x}$	s
As representações dos conceitos em estudo (gráfico, tabela, expressão algébrica) ajudaram-me a raciocinar na resolução das atividades que realizei nas aulas.	0%	5,6%	94,4%	4,33	0,59
As representações dos conceitos em estudo (gráfico, tabela, expressão algébrica) ajudaram-me a apresentar à turma as resoluções que efetuei das tarefas propostas nas aulas.	5,6%	33,3%	61,1%	3,7	1
A conexão entre as diferentes representações potência a aprendizagem dos tópicos em estudo.	0%	11,8%	88,2%	4	1
As representações serviram de meio de comunicação para discussão de ideias.	0%	5,6%	94,4%	4	1

Desenvolver a capacidade de raciocínio é essencial para ajudar os alunos a irem além da mera memorização de factos e de regras. O foco no raciocínio dota os alunos de competências de pensamento crítico e de capacidade de resolução de problemas, justificando, generalizando e avaliando a resolução de tarefas. Observa-se pela Tabela 27 que a maioria dos alunos concorda que, tanto o processo de justificar (94,4%), como o processo de generalizar (72,2%), promovem o desenvolvimento do raciocínio. É de salientar que 94,4% dos discentes têm a perceção que justificar exige ter conhecimentos matemáticos. O uso de diferentes representações também é um aspeto de concordância para os discentes (94,4%) no que respeita ao desenvolvimento do raciocínio. Quanto à relevância da discussão da resolução da tarefa, a totalidade dos discentes concorda que a 'discussão' promove o raciocínio.

Tabela 27. Perceções (%) dos alunos relativamente ao raciocínio $(n = 18)$

Raciocínio	**DT/D**	**NCND**	**C/CT**	$\bar{x}$	s
Justificar o que se faz e o que se diz nas aulas de Matemática promove a aprendizagem dos tópicos em estudo.	0%	5,6%	94,4%	4,3	0,6
A interpretação da resolução de tarefas promove o raciocínio	0%	5,56%	94,4%	4,4	0,6
A discussão da resolução de tarefas promove o raciocínio.	0%	0%	100%	4,5	0,51
Usar diferentes representações Matemáticas desenvolve a capacidade de raciocínio.	0%	5,6%	94,4%	4,22	0,55
Generalizar resultados matemáticos promove o raciocínio.	5,6%	22,2%	72,2%	3,9	0,9
Justificar exige ter conhecimentos matemáticos.	0%	5,6%	94,4%	4,4	0,6

A fim de compreender se os alunos consideraram o ensino ministrado explícito e fomentador, questionei-os sobre aspetos da minha prática na promoção do raciocínio. Os alunos, na sua maioria, consideram que o trabalho efetuado foi promotor do desenvolvimento do raciocínio matemático (Tabela 28).

Tabela 28. Perceções (%) dos alunos relativamente às ações da professora na promoção do raciocínio $(n = 18)$

Ações da professora na promoção do raciocínio	**DT/D**	**NCND**	**C/CT**	$\bar{x}$	s
O apoio prestado pela professora aos alunos foi adequado na resolução das tarefas	0%	27,8%	72,2%	4,22	0,88
A professora solicitava aos alunos justificações das suas respostas	0%	5,6%	94,4%	4,56	0,62
A professora encorajou à explicitação de raciocínios.	0%	0%	100%	5,56	0,51
A professora encorajava a partilha de ideias nos momentos de discussão.	0%	0%	100%	4,61	0,50
A professora solicitava a explicação do "porquê" das suas respostas.	0%	0%	100%	4,67	0,49
A professora desafiava os alunos a pensar.	0%	0%	100%	4,78	0,43

O trabalho desenvolvido revelou-se profícuo para os discentes, pois sentiram-se desafiados a pensar, encorajados à explicitação dos seus raciocínios, à fundamentação das suas respostas, assim como à partilha de ideias nos momentos de discussão.

De uma forma global, constata-se que os alunos expressaram opiniões favoráveis relativamente ao teor das questões de natureza fechada.

Para a análise das cinco questões abertas, foram criadas categorias baseadas nas respostas dos alunos de modo a permitir a determinação de frequências. As primeiras duas questões de natureza aberta pediam aos alunos para indicar vantagens e desvantagens da resolução de tarefas que exigem raciocínio para a aprendizagens de tópicos estudados e para a sua formação. No que toca às vantagens de tarefas que exigem raciocínio, observa-se pela Tabela 29 que os alunos reconheceram que estas tarefas contribuíram para uma melhor aprendizagem, pois para além de os "obrigar a pensar" permitiram relacionar diferentes conteúdos. Os alunos destacaram também que estas tarefas incentivaram à justificação. Em síntese: estas tarefas permitem, segundo os alunos, uma melhor e mais significativa aprendizagem das matérias lecionadas.

Tabela 29. Vantagens na resolução de tarefas que exigem raciocínio ($n = 18$)

Vantagens	Frequência
Aprende-se melhor a matéria	6
Obriga-nos a pensar	7
Incentiva à justificação	3
Permite relacionar diferentes conteúdos	2

Relativamente às desvantagens de tarefas que exigem raciocínio, os alunos revelaram que para um aluno com mais dificuldades pode tornar-se um obstáculo na sua aprendizagem (Tabela 30), tal como refere um aluno: 'sem uma boa base em Matemática Básica, as resoluções tornam-se mais difíceis que o habitual, levando a uma frustração no aluno'. Alguns alunos salientam que a resolução destas tarefas pode, por vezes, ser mais confuso e que a sua realização implica despender de muito tempo para a sua resolução. No entanto, outros alunos destacam que não existem desvantagens na resolução de tarefas que exigem raciocínio.

Tabela 30. Desvantagens na resolução de tarefas que exigem raciocínio ($n = 18$)

Desvantagens	Frequência
Por vezes é mais confuso	3
Não há desvantagens	7
Não pensamos	3
São mais difíceis	2
Mais tempo de resolução	3

As duas questões seguintes pediam aos alunos para indicarem vantagens e desvantagens da utilização de diferentes tipos de representação (gráfico, tabela, expressões algébricas) na aprendizagem dos tópicos em estudo. No que respeita às vantagens da utilização das diferentes representações, constata-se pela Tabela 31 que o uso das diferentes representações, para a maioria dos alunos, ajuda na interpretação e compreensão da tarefa. Outra vantagem mencionada pelos discentes é o facto de permitir o desenvolvimento do pensamento.

Tabela 31. Vantagens da utilização de diferentes tipos de representações ($n = 18$)

Vantagens	Frequência
Ajuda na interpretação/compreensão da tarefa	15
Desenvolve o pensamento	3

No que respeita às desvantagens da utilização de diferentes representações, os alunos referem que podem-se tornar mais confusas. Alguns alunos salientam também que algumas representações não se adequam a determinadas tarefas. A principal desvantagem para os discentes prende-se com o facto de estes apresentarem dificuldades em saber interpretar as diferentes representações. No entanto, outros alunos destacam não haver desvantagens na utilização de diferentes representações (Tabela 32).

Tabela 32. Desvantagens da utilização de diferentes tipos de representações ($n = 18$)

Desvantagens	Frequência
Saber interpretar	7
Não se adequam a determinadas tarefas	3
Mais confuso	3
Não há desvantagens	5

Na última questão pretendia perceber a opinião dos alunos sobre qual o método de trabalho que melhor beneficia o desenvolvimento do raciocínio, se trabalhar em grupo ou individualmente e porquê (Tabela 33).

Tabela 33. Perceções dos alunos sobre o trabalho de grupo/ autónomo.

Trabalho de grupo/ autónomo	Frequência
Grupo- ajuda a perceber melhor o enunciado da tarefa	5
Grupo- permite troca de ideias	5
Grupo- diferentes raciocínios	6
Grupo- mais vontade de trabalhar e participar	2

Nesta questão, a turma entende que trabalhar em grupo é mais vantajoso, pois ajuda na interpretação do enunciado, assim como permite uma maior troca de ideias. Alguns alunos referenciam que trabalhar em grupo é vantajoso pois implica ter diferentes raciocínios na resolução da tarefa. Saliento uma afirmação produzida por um aluno – "Em grupo, podemos ir trocando ideias com os nossos colegas, o que é benéfico para a nossa aprendizagem" – a qual me parece sintetizar na perfeição a eficácia pedagógica desta estratégia.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo, são apresentadas as principais conclusões que sobressaíram da intervenção pedagógica descrita circunstanciadamente ao longo deste trabalho, atendendo ao objetivo e às questões de investigação delineadas, assim como uma reflexão final sobre as aprendizagens construídas durante essa intervenção. Por fim, são referidas algumas limitações e recomendações a ter em conta em investigações futuras desta índole.

4.1. Conclusões

As conclusões deste estudo retomam e enquadram o essencial das respostas às seguintes questões de investigação: (1) Que processos de raciocínio são expressos por alunos do 10.° ano na exploração de representações de funções? (2) Que dificuldades manifestam os alunos na aprendizagem de funções? Qual o papel da articulação entre as representações e os raciocínios na resolução dessas dificuldades? (3) Que perceções têm os alunos sobre a exploração das representações de funções na promoção dos raciocínios matemáticos?

4.1.1. Que processos de raciocínio são expressos por alunos do 10º ano na exploração de representações de funções?

Na promoção do raciocínio matemático, um dos aspetos fundamentais assenta no conhecimento prévio dos processos de raciocínio dos discentes, a fim de serem definidos os contornos pedagógicos e as características das tarefas a selecionar e a propor aos alunos. A adequação e a pertinência são, por conseguinte, aspetos incontornáveis. Daí a diagnose inicial.

Tendo em vista estas preocupações, devidamente enquadradas e balizadas nos estudos da literatura da especialidade e articuladas com o currículo da turma visada neste estudo (entenda-se por currículo as Aprendizagens Essenciais (AE) da disciplina de Matemática, o Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO) e ainda a Estratégia de Cidadania, que a atual legislação preconiza), as tarefas propostas foram sempre formuladas com o intuito de promover o recurso a várias representações e processos de raciocínio, nomeadamente generalização e justificação enquanto processos centrais no raciocínio matemático. Curiosamente, foram estes os processos de raciocínio mais frequentemente dados a observar nas resoluções dos alunos, validando as opções pedagógicas realizadas pela professora e a compreensão que do contexto em que se moveu. Não foi indiferente a preocupação com as questões da inclusão e da própria mentoria (procurando a interajuda e a regulação entre pares), ao optar por promover trabalho em pares/grupo.

Como sublinhado atrás, o raciocínio matemático surge enquanto capacidade transversal no atual programa de Matemática do ensino básico (Ministério da Educação, 2007), envolvendo uma variedade de processos, nomeadamente a formulação de questões, a formulação e teste de conjeturas e a realização de justificações. De facto, perante uma dada situação a que se pretende dar resposta, os alunos têm de colocar questões, formular conjeturas, testar essas conjeturas e validar resultados. Este processo de prova e validação é também uma prática social, pois os alunos têm de argumentar e comunicar aos restastes colegas os seus resultados, eventualmente contra-argumentar para que os resultados possam ser validados por todos.

Ao estabelecerem conjeturas, os alunos identificam pontos comuns entre vários casos, expressando ideias que os levaram a usar e clarificar o significado de conceitos, símbolos e representações, autorregulando o seu processo de aprendizagem.

Formular uma generalização matemática envolve fazer uma afirmação sobre uma propriedade, conceito ou procedimento que se pretende válido para um conjunto alargado de objetos ou condições matemáticas. Saliente-se que embora a generalização seja apenas considerada válida quando demonstrada, esta também pode ser considerada válida de acordo com as capacidades e conhecimentos dos alunos em cada momento da sua aprendizagem (Carraher et al., 2008).

As generalizações apresentadas pelos alunos seguiram essencialmente uma abordagem dedutiva, no entanto também apresentaram generalizações de natureza empírica. Quando a generalização adveio de raciocínios de natureza dedutiva, os alunos basearam-se em conceitos e ideias matemáticas, em que conseguiram reconhecer a relevância desses mesmos conceitos ou ideias matemáticas para conseguirem aplicar apropriadamente à situação em questão, como patenteado nas tarefas 'Água no cubo', e 'O quadrado'.

Na tarefa - Água no cubo, é percetível que os alunos conseguiram perceber que para determinar a altura da água, poderiam recorrer à semelhança de triângulos, no entanto, um grupo assimilou a total compreensão da tarefa dedutivamente, enquanto que outro grupo recorreu ao 'esboço' para ter uma percepção do comportamento da secção obtida pelo plano definido pela superfície da água. Este grupo valida o seu 'esboço' com a atribuição de valores. Da reposta errónea pode-se observar que o grupo também recorreu ao 'esboço' para ter a perceção da contextualização da tarefa, no entanto não valida esse mesmo 'esboço'. A sua conjetura do comportamento da secção obtida pelo plano definido pela superfície da água fica subentendida pela 'simetria' aquando da explicação da tarefa no Geogebra. Não basta verificar a conjetura, mas torna-se necessário testá-la para muitos casos de forma a não restarem dúvidas da sua veracidade (Boavida, 2005).

Na tarefa - O quadrado, os alunos também recorreram a propriedades matemáticas para obter as coordenadas dos pontos que formam quadrados, no entanto a maioria dos grupos não valida esses mesmos pontos. Verifica-se que os alunos para validarem as suas conjeturas recorreram ou ao Geogebra ou à calculadora gráfica. Dada a validação da conjetura no primeiro item (interseção do gráfico da função dada com o gráfico de $y = x$) os alunos assumiram esta conjetura para a resolução no item seguinte, percebendo apenas que esta não seria válida na própria validação.

Quando a generalização adveio de raciocínios de natureza indutiva, significa que os alunos revelaram dificuldades na formulação de conjeturas, através do raciocínio dedutivo. Estes recorreram ao raciocínio indutivo por métodos empíricos testando alguns valores, para identificar elementos comuns e estender o raciocínio além do âmbito no qual originalmente se identificaram os elementos comuns. Assim, o processo de conjeturar sobre a escolha dos valores de forma sistemática conduziu-os à formulação das primeiras conjeturas sobre 'o que está a acontecer', como se observa nas resoluções das tarefas 'O triângulo dentro do triângulo' e 'O quadrado'. Na tarefa do triângulo dentro do triângulo os alunos testaram valores contextualizados de forma a terem a percepção do comportamento da função, validando as suas conjeturas, permitindo responder em simultâneo ao item seguinte.

Na tarefa - O quadrado, os alunos, tal como afirmaram, foram testando valores até que o valor da ordenada fosse igual ao valor da abcissa. Nesta justificação não está patenteada a escolha dos valores.

De uma forma geral, quando a justificação, para a validação das suas conjeturas se baseia em casos particulares, podendo ser particularmente úteis se os alunos não têm ferramentas necessárias para justificar com uma abordagem não dedutiva (Lannin et al., 2011), possa ser considerada válida, não substitui a demonstração matemática (Stylianides & Stylianides, 2009). Além disso, este tipo de justificação pode ser considerado uma forma de resistência à generalização. Segundo o NCTM (2009), o raciocínio indutivo tem lugar sobretudo na formulação de conjeturas gerais a partir de casos específicos.

Relativamente às justificações apresentadas, estas foram, em muitos casos, baseadas em procedimentos, propriedades (axiomas e teoremas) e definições matemáticas embora houvessem exceções, como, por exemplo, na resolução da tarefa 'O triângulo dentro do triângulo'.

Os alunos recorreram ao raciocínio dedutivo baseado em definições e propriedades matemáticas ou efetuando tratamentos dentro do sistema de representação algébrica, o que lhes permitiu obter facilmente uma solução válida. De acordo com o supracitado, subentende-se que a representação algébrica é a mais usada como ferramenta de exploração e de apresentação de conjeturas e justificações formais.

As diferentes representações revelaram ser importantes ferramentas de apoio aos raciocínios dos alunos, facilitando a interpretação, a comunicação e a discussão de ideias matemáticas, como salienta Tripathi (2008). Assim, as justificações surgem maioritariamente sob a forma de linguagem algébrica e natural e por vezes numérica, tal como é evidenciado no estudo realizado por Henriques e Ponte (2014). O mesmo se conclui no que respeita à linguagem natural, que vai ao encontro do que Boero et al. (2008) afirmam: ficou evidente que, de facto, os alunos preferem argumentos apresentados em palavras, uma vez que para justificar e explicar procedimentos de resolução de problemas os argumentos algébricos são mais difíceis. A representação gráfica revelou-se essencial, quando os discentes evidenciaram dificuldades na interpretação do enunciado, sentindo a necessidade de recorrer a representações gráficas, 'esboços', de forma a que estas os auxiliassem quer na interpretação, quer na organização das suas ideias, bem ainda como na forma de comunicar. Estes ´esboços', na maioria das vezes, serviram de suporte ao pensamento dos alunos, estando estritamente ligadas ao raciocínio matemático (NCTM, 2007; Ponte et al., 2012). Assim, e de acordo com Ainsworth (2006), verifica-se e confirma-se que as representações efetuadas serviram de apoio à interpretação e compreensão da informação fornecida no enunciado.

A ênfase dada às representações na resolução dos diferentes tipos de tarefas (contextualizadas e puramente Matemáticas) difere. Nas tarefas contextualizados – 'O salto do gafanhoto', 'O Mergulhador' e ' O Cubo' – os alunos recorrem à análise gráfica global, utilizando a informação do contexto, o que vai ao encontro da perspetiva de Goldin (2003), que refere que as representações internas de contextos conhecidos podem servir de suporte à construção de outras representações. Por outro lado, nas tarefas puramente matemáticas – 'Triângulo dentro do triângulo' e 'O Quadrado' – os alunos utilizam uma análise gráfica pontual.

Da análise efetuada constata-se que uma das principais diferenças nas resoluções dos alunos se revela ao nível do maior ou menor detalhe com que exploram ou explanam uma situação. Essa diferença pode dever-se ao conhecimento existente ou à experiência anterior, os quais influenciam a construção do conceito matemático de função e interferem no sentido que o aluno dá à situação.

Estes resultados mostram também que os alunos são capazes de usar tanto o raciocínio indutivo como o dedutivo, mas que é necessário reforçar alguns processos de raciocínio nas competências em que apresentam maiores fragilidades, como, por exemplo, a generalização e a justificação. Destaca-se, como aspeto significativo, a variedade de representações que os alunos utilizam, associadas às diferentes funções que desempenham na exploração das tarefas de investigação propostas. Conclui-se que a utilização de múltiplas representações é benéfica para a compreensão, para desenvolver o raciocínio e para a construção de conhecimento (Ainsworth, 2006).

4.1.2. Que dificuldades manifestam os alunos na aprendizagem de funções? Qual o papel da articulação entre as representações e os raciocínios na resolução dessas dificuldades?

Neste estudo os alunos revelaram algumas dificuldades quer em justificar quer em generalizar, uma vez que "os alunos tendem a considerar que justificar se reduz a apresentar os cálculos realizados na resolução da tarefa" (Ponte, 2014, p. 102).

Embora desde o início da intervenção pedagógica tenha sido possível observar uma ligeira melhoria na utilização do processo de justificação, muitos alunos continuaram a desvalorizar a necessidade de justificar as suas respostas, ou fizeram-no de forma incompleta. Verificou-se que as justificações, quando apresentadas, se encontram incompletas e escassas na utilização de termos matemáticos. Pressupõe-se que este procedimento esteja interligado à dificuldade de os alunos se expressarem e exporem as suas ideias de forma clara e detalhada, quer oralmente, quer por escrito, sobretudo à medida que o nível da complexidade das tarefas vai aumentando.

Na tarefa - O triângulo dentro do triângulo, para além da dificuldade patenteada na interpretação do enunciado, ou seja, na conversão da linguagem natural para a linguagem gráfica e algébrica, os alunos demonstraram dificuldades na transformação dentro do mesmo registo, que lhes permitia determinar dedutivamente o valor em que a área do triângulo é máxima, recorreram a métodos numéricos para a resolução da tarefa. Como patenteado anteriormente, os alunos, perante a dificuldade de resolver algebricamente, optam por uma abordagem empírica para a sua resolução. Para Barbosa (2011), esta abordagem essencialmente numérica, que não atribui significado às variáveis, pode ser um obstáculo à generalização. Outra dificuldade foi a tendência de os alunos focarem as suas respostas em exemplos particulares ao invés de estabelecerem uma regra geral que lhes permitiria a resolução de vários itens. No entanto, a escolha destes não aparentou ser aleatória, demonstrando uma compreensão do domínio da conjetura a ser testada, como se constata nesta tarefa.

Da análise da tarefa - O mergulhador, os alunos revelaram dificuldades na interpretação do enunciado, pois, tal como supracitado, a linguagem natural associada à apresentação do problema pode tornar-se um obstáculo para a comunicação matemática, uma vez que não é universal e a sua utilização pode ser feita de forma ambígua ou conduzir a associações incorretas (Friedlander & Tabach, 2001). Paralelamente, os alunos sentiram dificuldades na conversão entre as diferentes representações, pois segundo Ellia et al. (2007), o processo de transição entre representações não é trabalhado adequadamente no estudo das funções, dando origem ao fenómeno da 'compartimentação'. Apenas um grupo, de acordo com Mourão (2002), conseguiu chegar à reificação, uma vez que 'apropriaram-se' de um objeto matemático, função afim, permitindo que se inicie um novo ciclo, começando pela interiorização com vista à formação de um novo objeto mais abrangente, neste caso a função definida por ramos.

Na tarefa - Água no cubo, os alunos revelaram bastantes dificuldades na interpretação do enunciado, recorrendo a 'esboços' para a sua interpretação e compreensão.

Na tarefa - O quadrado, os alunos mostraram-se reticentes quanto ao uso de representações gráficas mesmo estando em posse de calculadoras gráficas. Os alunos procuraram quase sempre a solução algébrica das questões (Arcavi, 2003).

Relativamente à transição entre as representações verbal e algébrica, a interpretação de cada uma das partes de uma expressão constitui uma dificuldade comum aos alunos. As dificuldades na passagem entre estas representações estão de acordo com o desempenho dos alunos do estudo de Ellia et al. (2007), em que alguns dos piores resultados foram obtidos nos problemas que requeriam a passagem da representação verbal para a algébrica.

Outro aspeto notório de dificuldade está relacionado com a interpretação do enunciado de tarefas, em que os alunos revelaram dificuldades quer na interpretação quer na sua resolução. Em termos da resolução de problemas envolvendo funções, a calculadora gráfica desempenhou um papel relevante, quer numa perspetiva de exploração, quer em termos da obtenção da solução por meio das suas capacidades representacionais. Apesar de os alunos terem demonstrado dificuldades em transformar a calculadora gráfica num instrumento eficaz perante problemas que saíam do âmbito dos que foram trabalhados anteriormente, foi possível identificar situações que conduziram a resoluções com sucesso. O estudo mostrou evidências de que a calculadora gráfica pode ser convertida num instrumento eficiente na resolução de problemas envolvendo funções, podendo esta ser comprovada pela resolução da tarefa do 'O Quadrado' onde os alunos posteriormente tentaram resolver da mesma forma as restantes questões.

4.1.3. Que perceções têm os alunos sobre a exploração das representações de funções na promoção dos raciocínios matemáticos?

Um aspeto fundamental para a promoção do raciocínio matemático reside nas tarefas propostas aos alunos. As tarefas propostas, tal como sugerem Lannin et al. (2011), possuem um cunho exploratório. Sendo os alunos uma parte fundamental neste estudo, foram questionados sobre este tipo de tarefas, quer na metodologia de ensino, quer relacionadas com a temática em estudo. Da análise efetuada às respostas ao questionário proposto, segundo a maioria dos alunos, este tipo de tarefas traz vantagens na aprendizagem dos tópicos em estudo, pois incita à sua justificação. Paralelamente, estimula a conexão entre conceitos matemáticos distintos.

Uma desvantagem apontada pelos alunos reside na complexidade das tarefas o que torna a sua compreensão e interpretação menos facilitada. Para estes alunos, este tipo de tarefa pode levar a uma maior frustração face à sua incapacidade de resolver.

No que respeita à análise das representações, constata-se que estas constituem um elemento primordial, quer como auxiliar na resolução das tarefas, quer como meio de comunicação na discussão de ideias. Relativamente à conexão entre as diferentes representações a maioria dos alunos entende que esta conexão potencia a aprendizagem dos tópicos em estudo, assim como usar diferentes representações ajuda na interpretação/compreensão da tarefa, desenvolvendo assim a capacidade de raciocínio. No entanto, uma minoria considera que usar simultaneamente diferentes representações pode levar a uma maior confusão na consolidação da temática em estudo, pois não conseguem interpretar estas mesmas representações. As desvantagens mencionadas pelos alunos em usar diferentes representações incidem na dificuldade em adequar as diferentes representações à tarefa. Um aspeto importante mencionado pelos alunos constitui um alerta e reside na ideia de que o uso constante da mesma representação pode levar à desmotivação do aluno.

Todos os alunos concordaram que trabalhar em grupo é mais benéfico, pois fomenta uma maior interação entre os elementos de grupo, permitindo assim "uma melhor visão dos diferentes métodos para a solução das tarefas" (aluno A4).

4.2. Limitações e Recomendações

Os resultados obtidos autorizam-me a concluir que é absolutamente indispensável considerar, curricularmente, a abordagem ao estudo das funções, ao longo dos vários ciclos de ensino, de forma a envolver gradualmente a utilização das representações verbais, numéricas, algébricas e gráficas. Assim, futuramente, deverá dar-se primazia à relação entre elas, de forma a evitar a 'compartimentação' que parece existir, especialmente entre a representação algébrica e as representações gráfica e verbal.

A tendência para a utilização exclusiva da linguagem algébrica mostrada por alguns alunos sugere a necessidade de valorizar as outras representações, adequando-as aos tipos de questões propostas.

Assim, a representação verbal deve ter um papel importante reconhecendo-a como forma de representação válida, ainda que com limitações, tal como qualquer outra representação.

As dificuldades dos alunos na interpretação e utilização das representações algébricas sugerem a necessidade de se alterar o trabalho desenvolvido com estas representações, possivelmente diversificando a natureza das tarefas e estabelecendo conexões com as outras representações.

Nas diferentes tarefas evidenciou-se a importância da utilização de problemas com contextos reais para o desenvolvimento de conceitos associados às funções. É igualmente evidente a necessidade de se melhorar o desempenho dos alunos em problemas puramente matemáticos, por exemplo, apresentando os problemas através de diferentes representações e estabelecendo, durante a sua resolução, conexões entre as várias representações, de forma a aumentar a compreensão dos conceitos.

Os atuais documentos curriculares de Matemática apontam o desenvolvimento do raciocínio matemático como um objetivo central e alertam para a necessidade de desenvolver essa capacidade nos discentes de forma consistente e em contextos diversificados. Assim, de forma a melhorar o processo de raciocínio, os alunos deveriam começar no início da escolaridade, a justificar os passos na resolução das tarefas, permitindo uma evolução gradual para argumentações mais complexas.

O erro, enquanto fenómeno inerente à aprendizagem, pode ser um fator importante, pois cabe ao professor orientar adequadamente para que este seja capaz de identificar e corrigir este mesmo erro. Pode também, em momentos de discussão, estimular os discentes a pensar, a envolver-se em processos de raciocínio significativo.

O desenvolvimento de raciocínio matemático não é um processo isento de dificuldades, cabendo ao professor proporcionar contextos favoráveis ao seu desenvolvimento, através da realização de tarefas numa dinâmica de ensino exploratório, através das quais favorece o surgimento de diferentes resoluções e abordagens, tirando partido da diversidade de experiências e conhecimentos dos discentes. O professor, de acordo com a turma, deve ter em atenção o grau de complexidade da tarefa, pois pode levar a uma menor envolvência dos alunos, levando à frustração dos mesmos. Paralelamente, a partilha e discussão das resoluções/resultados pode promover o confronto de diferentes representações, valorizando a sua compreensão, podendo favorecer a progressão para níveis mais formais.

Por fim, saliento a complexidade do processo de análise de dados, nomeadamente a definição das dimensões a analisar e a inclusão dos resultados nessas dimensões, uma vez que todas as dimensões estão interligadas, tornando-se difícil limitar-me à 'perspetiva' pretendida em cada momento.

Reconheço, por conseguinte, a mais valia desta experiência pedagógico-científica, que ainda que se tenha cingido ao âmbito da disciplina de Matemática, declaradamente contribuiu para a minha capacitação para os contextos reais da educação na atualidade, com todos os seus pressupostos legais, conceptuais e organizacionais. Com o estudo realizado, não obstante as limitações que acabei de apontar, sinto que o grau de consciencialização para os problemas/questões que me propus analisar aumentou, ficando com uma noção mais clara e mais perspicaz da correlação das operações mentais no processo de construção do conhecimento por parte dos alunos. Isso terá, inevitavelmente, efeitos muito positivos nas minhas práticas pedagógicas continuadas.

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Ministério da Educação/Departamento da Educação Básica.

Abrahamson, D. (2006). Mathematical representations as conceptual composites: Implications for design. In *Proceedings of the Twenty Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, México.

Afonso, P. (2008). *O mundo mágico das conexões matemáticas*. Edições IPCB.

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representation. *Learning and Instruction, 16*(3), 183-198.

Alarcão, I., & Canha, B. (2014). *Supervisão e colaboração: Uma relação para o desenvolvimento*. Porto Editora.

Anghleri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(1), 33-52.

Araman, E. M. O., Serrazina, M. L., & Ponte, J. P. (2019). "Eu perguntei se cinco não tem metade": ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. *Educação matemática Pesquisa, 21*(2), 466-490.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Education Studies in Mathematics. 52*(3), 215-241.

Ballard, J. (2000). Students use of multiple representations in mathematical problem solving. Tese de Doutoramento, Montana State University, USA.

Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo*. Edições 70.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.

Boavida, A. M. (2005). A argumentação na aula de Matemática: olhares sobre o trabalho do professor. In J. Brocardo, F. Mendes & A.M Boavida (Orgs.), *XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática-Atas* (pp.13-43) Setúbal: Associação de Professores de Matemática.

Boavida, A.M., (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar. *Educação e Matemática, 100*, 1.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no Ensino Básico – Programa de Formação Contínua em matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico* (1.ª edição). Ministério da Educação – Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Boero, P., Douek, N., & Ferrari, J. L. (2008). Developing mastery of natural language: Approaches to some theoretical aspects of mathematics. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 262–297). New York, NY: Routledge.

Bogdan, R., & Briklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.

Brocardo, J. (2021). As aprendizagens essenciais em Matemática que hoje se exigem. *Público, 11*(433).

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. Springer.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Relógio D'Água.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Canavarro, A. P., & Pinto, M. E. (2012). O raciocínio matemático aos seis anos: Características funções das representações dos alunos. *Quadrante. 21*(2)*,* 51-79.

Canavarro, A. P. (2021). Novas orientações curriculares para a Matemática do ensino básico. *Público, 11*(383).

Carraher, D., Martinez, M., & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM, 40*, 3-22.

Carvalho, L., Ferreira, R., & Ponte, J. P. (2011). Representações no estudo das funções racionais. In A. Henriques, C. Nunes, A. Silvestre, H. Jacinto, H. Pinto, A. Caseiro, & J. P. Ponte (Eds.), *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 179-192). Associação de Professores de Matemática.

Carmo, H., & Ferreira, M. (2008). *Metodologia da investigação: Guia para Autoaprendizagem* (2.ª Ed.). Universidade Aberta

Consciência, M. (2014). *A Calculadora Gráfica na Aprendizagem das Funções no Ensino Secundário*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Cuoco, A., & Curcio, F. (2001). *The roles of representation in school mathematics. 63rd Yearbook*. NCTM.

Chazan, D., & Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: research on algebra learning and directions of curricular change. In J. kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 123-135). NCTM.

Dick, T. P., & Edwards, B. S. (2008). Multiple representations and local linearity. In M. K. Heid, & G. W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Cases and Perspectives* (Vol. 2, pp. 255-275). NCTM.

Domingos, A., Saraiva, M. J., & Ferreira, R. A. (2013). Apresentação. In A. Domingos, I. Vale, M. J. Saraiva, M. Rodrigues, M. C. Costa, & R. A. Ferreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática – Raciocínio Matemático* (pp. 8-13). Sociedade portuguesa de investigação em educação Matemática.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamento humano*. Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Duval, R. (2012). Ver e ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. *Práxis Educativa, 7*(2), 603-607.

Eisner, E. W. (1997). Cognition and representation: A way to pursue the American dream? *Phi Delta Kappan*, *78*(5), 348-353.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5, 533-556.

Freitas, M., & Freitas, C. (2003). *Aprendizagem Cooperativa*. Edições Asa.

Friendland, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representation in algebra. In A. Cuoco, & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics – 2001 yearbook* (pp.173-185). NCTM.

Gafanhoto, A. P., & Canavarro, A. P. (2014). A adaptação das tarefas Matemáticas: Como promover o uso de múltiplas representações. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 113-132). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Gagatsis, A., & Elia, I. (2005). *A review of some recent studies on the role of representations in mathematics education in Cyprus and Greece.* [Working Group 1]. European Research in Mathematics Education IV (CERME 4), Sant Feliu de Guixols, Spain. http://erme.site/wp-content/uploads/2021/06/CERME4_WG1.pdf

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematics Behavior, 17*(2), 137-165.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco, & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representations in school mathematics - 2001 Yearbook* (pp. 1-23). NCTM.

Goldin, G., (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275-285). NCTM.

Goldin, G., (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education (second edition)* (pp.176-201). Rutledge.

Gutstein, E. (2013). Critical action research with urban youth: Studying social reality through mathematics. *Fórum Oswiatowe, 25*(3), 117-126.

Hanna, G. (2000). Proof and its classroom role: a survey. In M. J. Saraiva, M. I Coelho, & J. M. Matos (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Geometria* (pp. 75-104). Secção de Educação Matemática.

Henriques, A. (2010). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de atividades de investigação*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa. http://hdl.handle.net/10451/2465

Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fractions operation sense. In B. Litwiller (Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: Yearbook* (pp. 72-78). NCTM.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A Conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 1-16.

Kalathil, R. R., & Sherin, M. G. (2000, June 14-17). *Role of Students' Representations in the Mathematics Classroom*. [Paper presentation]. The Fourth International Conference of the Learning Sciences, University of Michigan. http://www.umich.edu/~icls/proceedings/pdf/Kalathil.pdf

Kaldrimidou, M., & Ikonomou, A. (1998). Epistemological and metacognitive factors involved in the learning of mathematics: The case of graphic representations of 63 functions. In H. Stenbring, M. B. Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 217-278). NCTM.

Kamii, C., Kirkland, L., & Lewis, B. A. (2001). Representation and abstraction in young children´s numerical reasoning. In A. A. Cuoco, & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representations in school mathematics*. Yearbook (pp.24-34). NCTM.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 145-168). Routledge.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics.

Kenrick, D. T., Neuberg, S. L., & Cialdini, R. B. (1999). *Social Psychology: Unravelling the mystery* (1st Edition). Prentice Hall.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390–419). Macmillan Publishing Co, Inc.

Kilpatrick, J., & Izsák, A (2008). A history of algebra in the school curriculum. In C. Greene, & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth yearbook* (pp. 3-18). NCTM

Kilpatrick, J.,Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. NRC.

Lannin, J., Ellis A., Elliot, R., & Zbiek, R. M. (2011). *Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching Mathematics in prekindergarten-grade 8*. NCTM.

Lebrun, M. (2008). *Teorias e Métodos Pedagógicos para Ensinar e Aprender*. Instituto Piaget.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs and graphings: tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Mason, J. (2008). Making Use of Children's Powers to Produce Algebraic Thinking. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 57-94). Routledge.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2011). Raciocínio matemático em contexto algébrico: Uma análise com alunos do 9.° ano. In Encontro de Investigação em Educação Matemática: Ensino e aprendizagem da álgebra (pp. 347-364). EIEM.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos. *Quadrante, 21*(2), 81-110.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 169-186.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2018). Promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma investigação baseada em design. *Bolema, 32*(62), 781-801.

Menezes, L. (2000). *Comunicação na Aula de Matemática e Desenvolvimento Profissional de Professores*. Instituto Politécnico de Viseu.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. Ministério da Educação

Ministério da Educação (2017). *Perfil Dos Alunos À Saída da Escolaridade Obrigatória*. Direção-Geral da Educação. Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais: Articulação com o Perfil dos Alunos. 10.º ano. Ensino Secundário. Matemática A.* Ministério da Educação.

Miura, I. T. (2001). The influence of language on mathematical representations. In A. A. Cuoco, & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representations in school mathematics: Yearbook* (pp. 53-62). NCTM.

Mourão, A. P. (2002). A teoria da reificação de Anna Sfard: O caso das funções. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 275-289). Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação Secção de Educação e Matemática.

NCTM (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2ª edição)*. Associação de Professores de Matemática.

NCTM (s.d). *Principles and standards: Algebra*. NCTM.

Nobre, S., Amado, N., & Ponte, J. P. (2011). Representações na aprendizagem de sistemas de equações. In *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática: Ensino e aprendizagem da álgebra*, Póvoa de Varzim.

Oliveira, P. A. (2002). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: Uma discussão epistemológica*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa.

Oliveira. P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática, 100*, 3-9.

O'Connel, S., Witeck, K., & Ennis, B. (2007). *Introductions to Representation, Grades PreK-2*. Heinemann.

Pato, H. (2001). *Trabalho de Grupo no Ensino Básico: Guia Prático para Professores* (3ª edição). Texto Editores.

Pierce, R., Stacey, K., Wander, R., & Ball, L. (2011). The design of lessons using mathematics analysis software to support multiple representations in secondary school mathematics. *Technology, Pedagogy and Education, 20*(1), 95–112.

Polya, G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton University Press.

Ponte, J. P. (1984). *Functional reasoning and the interpretation of cartesian graphs*. Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didática da Matemática do 1.º Ciclo*. Universidade Aberta.

Ponte, J.P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM. http://hdl.handle.net/10451/3008

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM, 39*, 419-430.

Ponte, J. P. (2009). O novo programa de matemática como oportunidade de mudança para os professores do Ensino Básico. *Revista Interacções, 5*(12), 96-114.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico.* DGIDC.

Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). As representações matemáticas nas concepções dos professores do 1.º ciclo do Ensino Básico: Um estudo exploratório. In M. H. Martinho, R. A. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte (Eds.), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática: Ensino e aprendizagem da álgebra* (pp. 177-194). EIEM.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. *Práxis Educativa, 7*(2), 355-377.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, 22*(2), 55-81.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2014). Representações e Processos de Raciocínio na Comparação e Ordenação de Números Racionais numa Abordagem Exploratória. *Bolema, 28*(50), 1464-1484.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2017). The challenge of mathematical discussions in teachers' professional practice. *Didacticae, 1*, 45-59.

Ponte, J. P. (s.d) *REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores*. Instituto da Educação da Universidade de Lisboa. http://www.ie.ulisboa.pt/projetos/reason

Projeto REASON (2019). *Princípios para elaboração de tarefas para promover o raciocínio matemático nos alunos (versão draft).* http://reason.ie.ulisboa.pt/ wp-content/uploads/2020/12/Princípios-para-design-de-tarefas_ vDraft_15-dez-2020.pdf

Ramos, C., & Raposo, L. (2008). A Calculadora Gráfica e as representações Matemáticas: uma Experiência. In A. P. Canavarro, D. Moreira, & I. Rocha (Eds.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 187-200). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ribeiro, A. C. (1990). *Desenvolvimento Curricular.* Texto Editores.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM, 40*, 65-82.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(4), 212-221.

Rocha, H. (2016). Teacher's representational fluency in a context of technology use. *Teaching Mathematics and its Applications, 35*(2), 53–64.

Romano, E., & Ponte, J. P. (2008). A Calculadora Gráfica e o Ensino da Matemática. In A. P. Canavarro, D. Moreira, & M. I. Rocha (Eds.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 163-173). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Rubin, B. C., & Hayes, B. F. (2010). "No Backpacks" versus "Drugs and Murder": The promise and complexity of youth civic action. *Harvard Educational Review, 80*(3), 352-378.

Russel, S. J. (1999). Mathematical Reasoning in the Elementary Grades. In L. Stiff, & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grade K-12 Yearbook* (pp 1-12). NCTM.

Ruthven, K., Hofmann, R., & Mercer, N. (2011). *A dialogic approach to plenary problem synthesis.* In Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4), Ankara, Turkey.

Santos, F. (2012) Análise de conteúdo: A visão de Laurence Bardin. *Revista Eletrónica de Educação, 6*(1), 383-387.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Smith, E. (2003). Stasis and change integrating patterns functions and algebra throughout the k-12 curriculum. In J. Kilpatrick, W. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 136-150). NCTM.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. Kaput, D. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. (pp.133-160). Routledge.

Smith, M. S., Hughes, E. K., Engle, R. A., & Stein, M. K. (2009). Orchestrating discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(9), 549-556.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Stein, M. K., & Kim, G. (2009). The role of mathematics curriculum materials in large-scale urban reform: An analysis of demands and opportunities for teachers learning. In J. Remillard, B. Herbel-Eisenmann, & G. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp.37-55). Routledge.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Stylianou, D.A. (2010). Teachers´ conceptions of representation in middle School mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(4), 325-343.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 314-352.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning, 11*(4), 258-288.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). Cassell.

Trevisan, A. L., & Araman, E. M. (2021). Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de cálculo em tarefas envolvendo representações gráficas. *Bolema, 35*(69), 158-178.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438-445. http://www.jstor.org/stable/41182592

Trigueros, M., & Ursini, S. (2003). First-year undergraduates' difficulties in working with different uses of variable. In *Proceedings of Conference Board of the Mathematical Sciences: Issues in Mathematics Education* (Vol. 12), México.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2001). *A model for the uses of variable in elementary algebra.* In *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4), Utrech University, The Netherlands.

Viseu, F., Mendes, P., & Rocha, H. (2019). The notion of function by basic education pre-service teachers. In L. Leite, E. Oldham, L, A. Carvalho, A. S. Afonso, F. Viseu, L. Dourado, & M. H. Martinho (Eds.), *Proceedings of ATEE Winter Conference 'Science and mathematics education in the 21st century'* (pp. 26-37). Association for Teacher Education in Europe (ATEE), Universidade do Minho, Centro de Investigação em Educação (CIEd).

Waits, B., & Demana, F. (2000). Calculators in mathematics teaching and learning: Past, present and future. In M. J. Burke (Ed.), *Learning Mathematics for New Century – Part 2* (pp. 1-16). NCTM.

Whitin, P., & Whitin. D. (2001). Using literature to invite mathematical representations. In A. A. Cuoco, & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representations in school mathematics, 2001 Yearbook* (pp 228-235). NCTM.

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Chernoff, E. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM, 40*(1), 131-141.

ANEXOS

Anexo 1 – Autorização dos Encarregados de Educação para a gravação de aulas

Universidade do Minho
Instituto de Educação

[redacted]

Exmo(a). Sr(a). Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade de Minho, enquanto professora estagiária, na [redacted] pretendo desenvolver uma experiência de ensino que potencie a aprendizagem dos alunos do tema "As representações de funções na promoção de raciocínios matemáticos de alunos do 10.º ano de escolaridade". O desenvolvimento dessa experiência implica a recolha de dados, que serão obtidos através da resolução de tarefas e da observação de várias aulas. Para uma melhor compreensão das atividades que se desenvolvem na aula de Matemática necessito de proceder à recolha de dados através de gravações (áudio e vídeo). Para esse fim, venho por este meio solicitar a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio e vídeo dos dados necessários à concretização da experiência de ensino e de aprendizagem na sala de aula do seu educando.

Comprometo-me a usar os dados apenas para fins académicos e a não divulgar o nome da escola e dos alunos, nem expor qualquer indicador que envolva o seu educando. Só me interessa a informação que me ajude a repensar e a melhorar as minhas estratégias de ensino em prol da aprendizagem dos alunos.

Agradeço desde já a sua colaboração. Para qualquer esclarecimento adicional pode contactar-me através do correio eletrónico [redacted]

[redacted] 24 de novembro de 2020

A estagiária de Matemática,

Liliana Coelho

(Liliana Coelho)

Autorização

Eu, ______________________________, Encarregado de Educação do(a) aluno(a) ______________________________, autorizo que se faça o registo em áudio e vídeo das atividades de ensino e de aprendizagem na aula de Matemática que envolvem o meu educando desde que seja salvaguardado o anonimato do seu nome e de qualquer indicador que o indicie.

Encarregado(a) de Educação,

____

Anexo 2 – Questionário Inicial

Este questionário tem por finalidade conhecer as tuas opiniões sobre as estratégias de ensino dinamizadas no ensino e na aprendizagem de tópicos de funções. Importa que respondas de forma consciente e sincera a todas as questões que te são apresentadas. Não existem respostas certas ou erradas. A informação recolhida será usada exclusivamente para fins académicos, comprometendo-me a assegurar o seu anonimato.

Aluno:

Sexo: ☐

Idade: ☐

Qual a nota de Matemática obtida no ano anterior? ☐

É a primeira vez que frequentas o 10.º ano?

Sim ☐ Não ☐

Encarregado de Educação:

Grau de parentesco do Encarregado de Educação:

Pai ☐ Mãe ☐ Outro ☐

Habilitações literárias do pai?

1.º Ciclo ☐ 2.º Ciclo ☐ 3.º Ciclo ☐

Licenciatura ☐ Mestrado ☐ Doutoramento ☐

Habilitações literárias da mãe?

1.º Ciclo ☐ 2.º Ciclo ☐ 3.º Ciclo ☐

Licenciatura ☐ Mestrado ☐ Doutoramento ☐

Informações académicas:

Em média quantas horas passas por semana a estudar? ☐

Quando estudas, gostas de estudar sozinho ou em grupo?

Sozinho ☐ Grupo ☐

Gostas de estudar Matemática?

Sim ☐ Não ☐

Qual a matéria de Matemática que mais gostaste até agora? (Exemplo: Funções, Álgebra, Geometria...)

E a que menos gostaste?

Qual a matéria que sentiste mais dificuldades?

Conhecimento sobre raciocínio e representações:

o que entendes por raciocínio?

Conheces algum tipo de raciocínio? Se sim, qual?

O que entendes por representação?

Achas que as representações e os raciocínios estão interligados? Justifica a tua opinião.

Anexo 3 - Questionário final

Este questionário tem por finalidade conhecer as tuas opiniões sobre as estratégias de ensino dinamizadas no ensino e na aprendizagem de tópicos de funções. Importa que respondas de forma consciente e sincera a todas as questões que te são apresentadas. Não existem respostas certas ou erradas. A informação recolhida será usada exclusivamente para fins académicos, comprometendo-me a assegurar o seu anonimato.

Das afirmações que se seguem, assinala com uma cruz (X) a opção que mais se adequa o teu grau de concordância atendendo à seguinte escala: DT- Discordo totalmente; D- Discordo; NCND- Não concordo nem discordo; C- Concordo; CT- Concordo Totalmente.

1- Características das tarefas					
	DT	D	NCND	C	CT
As tarefas que resolvi nas aulas desafiaram-me a raciocinar.					
As tarefas propostas nas aulas eram fáceis de resolver.					
Na discussão das resoluções das tarefas propostas nas aulas surgiram várias estratégias de resolução.					
As tarefas propostas nas aulas favoreceram a aprendizagem dos tópicos em estudo.					
A resolução das tarefas propostas nas aulas estimulava à conexão entre conceitos matemáticos distintos.					
A resolução das tarefas propostas nas aulas solicitava a justificação de raciocínios.					
Trabalho de grupo					
	DT	D	NCND	C	CT
O trabalho em grupo permitiu-me confrontar as minhas ideias com as ideias dos meus colegas.					
A discussão de estratégias de resolução das tarefas no grupo desenvolveu o meu raciocínio.					
A interação com os meus colegas do grupo foi benéfica para o desenvolvimento do raciocínio.					
Trabalhar em grupo ajuda a fazer uma melhor interpretação das tarefas.					
Nas atividades realizadas no grupo fui um elemento interventivo.					
Nas atividades realizadas no grupo esperei que alguém resolvesse as tarefas.					
Nas atividades realizadas no grupo deve-se esperar que o melhor aluno resolva as tarefas.					

Representações					
	DT	D	NCND	C	CT
As representações dos conceitos em estudo (gráfico, tabela, expressão algébrica) ajudaram-me a raciocinar na resolução das atividades que realizei nas aulas.					
As representações dos conceitos em estudo (gráfico, tabela, expressão algébrica) ajudaram-me a apresentar à turma as resoluções que efetuei das tarefas propostas nas aulas.					
A conexão entre as diferentes representações potencia a aprendizagem dos tópicos em estudo.					
As representações serviram de meio de comunicação para discussão de ideias.					

Raciocínio					
	DT	D	NCND	C	CT
Justificar o que se faz e o que se diz nas aulas de Matemática promove a aprendizagem dos tópicos em estudo.					
A interpretação da resolução de tarefas promove o raciocínio					
A discussão da resolução de tarefas promove o raciocínio.					
Usar diferentes representações Matemáticas desenvolve a capacidade de raciocínio.					
Generalizar resultados matemáticos promove o raciocínio.					
Justificar exige ter conhecimentos matemáticos.					
Ações da professora na promoção do raciocínio					
	DT	D	NCND	C	CT
O apoio prestado pela professora aos alunos foi adequado na resolução das tarefas					
A professora solicitava aos alunos justificações das suas respostas					
A professora encorajou à explicitação de raciocínios.					
A professora encorajava a partilha de ideias nos momentos de discussão.					
A professora solicitava a explicação do "porquê" das suas respostas.					
A professora desafiava os alunos a pensar.					

1. Indica **vantagens** da resolução de tarefas que exigem raciocínio para a tua aprendizagem de tópicos estudados e para a tua formação.

____

____

2. Indica **desvantagens** da resolução de tarefas que exigem raciocínio para a tua aprendizagem de tópicos estudados e para a tua formação.

____

____

3. Indica **vantagens** da utilização de diferentes representações (gráfico, tabela, expressão algébrica) na aprendizagem dos tópicos em estudo.

____

____

4. Indica des**vantagens** da utilização de diferentes representações (gráfico, tabela, expressão algébrica) na aprendizagem dos tópicos em estudo.

____

____

5. Na organização dos alunos na sala de aula, em qual das situações, trabalhar em grupo ou individualmente, é mais benéfico para o desenvolvimento do raciocínio? Porquê?

Anexo 3- Planificações

Plano de aula 2

Tópico: Resolução de problemas envolvendo a função quadrática.

Objetivo: Resolver problemas envolvendo a função quadrática

Conhecimentos Prévios: Noções, algébricas e gráficas, sobre o estudo da função quadrática (extremos, zeros, eixo de simetria, expressão algébrica); a classificação de triângulos, semelhança de triângulos e cálculo da área de um triângulo; decomposição de polinómios.

Formato de Ensino: Ensino exploratório.

Tarefa 1. O salto do gafanhoto

O Tomás encontrou um gafanhoto em cima de um muro. A dado momento, o gafanhoto saltou para o chão. Na tabela seguinte estão registadas algumas das alturas atingidas pelo gafanhoto, t segundos depois de iniciar o salto:

t (segundos)	1	2	3
a (centímetros)	120	90	0

Considera que a altura atingida pelo gafanhoto t segundos após iniciar o salto pode ser definida por uma função quadrática, $a(t)$, e que $t = 1$ é o maximizante da função.

a) Determina a altura do muro.
b) No contexto da situação descrita, para que valores de t a expressão $a(t)$ tem significado? Justifica.
c) Qual foi a altura máxima atingida pelo gafanhoto? Explica como procedeste para chegar à resposta.
d) Desde que iniciou o salto, quanto tempo esteve o gafanhoto acima de meio metro de altura? Apresenta o resultado arredondado às décimas de segundo.

Exploração

1) Propor aos alunos que leiam e interpretem o enunciado da tarefa.
2) Questionar a turma sobre o que dado e pedido na tarefa?
3) Desafiar os alunos a resolver a tarefa.
4) Promover a discussão coletiva sobre a resolução da tarefa.

Tarefa 2. O triângulo dentro do triângulo

Comentários

Turma do 10.° ano de escolaridade do curso de Ciências e Tecnologias

90 m.

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) Introdução da tarefa; (ii) Exploração da tarefa; (iii) Discussão/Sistematização de conhecimentos.

Tempo estimado: 45 minutos

Trabalho de pares

-Perceber qual a estratégia usada pelos alunos;

- Perceber que informações retiram do enunciado.

Fonte: Ípsilon, 10.° ano, Raiz Editora

5 minutos

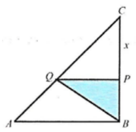
Caso os alunos revelem dúvidas em resolver as questões da tarefa, questionar que estratégias podem usar? Caso seja necessário, sugerir que desenhem um possível esquema que ilustre a situação descrita.

20 minutos

20 minutos

Pretende-se valorizar as diferentes resoluções dos alunos, com especial ênfase para o confronto de representações.

Tempo estimado: 45 minutos



Na figura, está representado um triângulo retângulo isósceles $[ABC]$. Tem-se $\overline{AB} = 8\ cm$. Um ponto P desloca-se sobre o segmento de reta $[CB]$, nunca coincidindo com o ponto C, nem com o ponto B. Um ponto Q desloca-se sobre o segmento de reta $[AC]$, acompanhando o movimento do P, de forma que $[PQ]$ seja sempre paralelo a $[AB]$. Seja x a distância entre os pontos P e C.

a) Que valores pode tomar x?
b) Determina a expressão algébrica da função que relaciona a área do triângulo $[PBQ]$ em função de x.
c) Quais são as dimensões do triângulo $[PBQ]$ quando a sua área é máxima? Como classificas, quanto aos lados, esse triângulo?
d) Descreve o que acontece à área do triângulo $[PBQ]$ à medida que P se desloca.

Esta tarefa, apela à observação dos alunos, quanto à relação entre o deslocamento de um ponto, variável independente, e a área do triângulo, variável dependente.

Trabalho de pares

-Perceber qual a estratégia usada pelos alunos;

- Perceber que informações retiram do enunciado.

Fonte da tarefa: Séries de problemas de Matemática A, N.º 5 Gave março 2010

Exploração

1) Propor aos alunos que leiam e interpretem o enunciado da tarefa.
2) Questionar a turma sobre o que dado e pedido na tarefa?
3) Desafiar os alunos a resolver a tarefa.
4) Promover a discussão coletiva sobre a resolução da tarefa.

5 minutos

Caso os alunos revelem dúvidas em resolver as questões da tarefa, questionar que estratégias podem usar? Caso seja necessário, sugerir que desenhem um possível esquema que ilustre a situação descrita, para diferentes medidas.

20 minutos

20 minutos

Pretende-se valorizar as diferentes resoluções dos alunos, com especial ênfase para o confronto de representações.

Tarefa adicional

Tarefa 3. O repuxo no jardim

Uma câmara municipal instalou um repuxo num jardim público. A água descreve uma trajetória com a forma aproximada de uma parábola. Ao observar o repuxo, a Mariana ficou curiosa em determinar uma expressão que modele a trajetória da água. Obteve, por parte dos responsáveis técnicos do município, a informação de que a altura máxima atingida pela água é de $4\ m$ e que a distância alcançada pela água é aproximadamente, de $2m$.

Fonte da tarefa: Matemática B 10.º ANO Texto Editora

a) Ajuda a Mariana a determinar a expressão que traduz a trajetória da água em função da distância.
b) Define uma função que traduz a situação: A água alcança a mesma distância na horizontal, mas atinge o dobro da altura.

Exploração

1) Propor aos alunos que leiam e interpretem o enunciado da tarefa.

5 minutos

Caso os alunos revelem dúvidas em resolver as questões da tarefa, questionar que estratégias podem usar? Caso seja necessário, sugerir que desenhem um possível esquema que ilustre a situação descrita.

20 minutos

2) Questionar a turma sobre o que dado e pedido na tarefa? 3) Desafiar os alunos a resolver a tarefa. 4) Promover a discussão coletiva sobre a resolução da tarefa. Materiais: Caderno, manual escolar e calculadora gráfica.	20 minutos Pretende-se valorizar as diferentes resoluções dos alunos, com especial ênfase para o confronto de representações.

Plano de aula 3

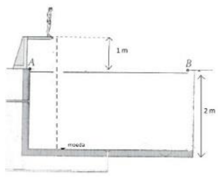
Tópico: Função definida por ramos.

Objetivo: Estudar funções definidas por ramos.

Conhecimentos Prévios: noções, algébricas e gráficas, sobre expressões algébricas, radicais, áreas e perímetros.

Formato de Ensino: Ensino exploratório

Tarefa 1. O mergulhador



Um mergulhador pretende apanhar uma moeda que se encontra no fundo de uma piscina com profundidade de 2 m. Sabe-se que o mergulhador dá um passo em frente e cai na vertical de uma prancha com 1 m de altura relativamente ao nível da água da piscina, com uma velocidade constante de $1m/s$ (despreza a resistência do ar).

1. Apresenta um possível gráfico que represente a distância do mergulhador ao nível da água, quando este mergulha para apanhar a moeda no fundo da piscina.
2. Define analiticamente a função que relaciona o tempo do mergulho, em segundos, com a distância do mergulhador ao nível da água da piscina, em metros.

Exploração

1) Propor aos alunos que leiam e interpretem o enunciado da tarefa.
2) Questionar a turma sobre o que dado e pedido na tarefa.

Desafiar os alunos a resolver a tarefa. Atender e procurar clarificar as dificuldades que os alunos apresentam na resolução da tarefa.

- No eixo das abcissas está representado o quê? E nas ordenadas?

3) Discutir a seguinte afirmação:
“Porque é que o gráfico da função é positiva”. “O que significa no contexto da tarefa, o ponto de interseção com o eixo das abcissas”
Analisar com a turma a resolução da tarefa.

Tarefa 2. Água no cubo

Comentários

Turma do 10.° ano de escolaridade do curso de Ciências e Tecnologias

90 m.

O formato de ensino adquire **características** do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: i) Introdução da tarefa; ii) Exploração da tarefa; iii) Discussão/ Sistematização de conhecimentos.

Trabalho pares

Tempo estimado: 40 minutos

Nesta tarefa pretende-se que o aluno recorra à representação gráfica para ilustrar a tarefa.

À posteriori terão que definir a expressão analítica representada pelo gráfico.

(Fonte: Teste de Matemática A, Porto Editora. Adaptado).

5 minutos

Caso os alunos revelem dúvidas em resolver as questões da tarefa, questionar que estratégias

15 minutos

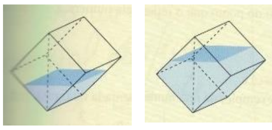
20 minutos

Trabalho pares

Tempo estimado: 50 minutos

Nesta tarefa pretende-se o raciocínio usado pelos alunos na resolução da tarefa.

Considera um depósito com a forma de um cubo de aresta 6, assente sobre uma das suas arestas e com uma das diagonais faciais na vertical. Admite que o depósito está vazio e que se vai encher de água. Define algebricamente as funções f e g que permitem obter o perímetro e a área, respetivamente, da superfície de água em função da sua altura, x, no depósito.



(Fonte: Dimensões 10° ano, Editora Santillana)

Exploração

1) Ler com os alunos a tarefa, garantindo que todos percebem a tarefa e o esquema apresentado na mesma.

5 minutos

2) Questionar a turma sobre o que dado e pedido na tarefa. Atender e procurar clarificar as dificuldades que os alunos apresentam na resolução da tarefa.
   - Sugerir aos alunos que esquematizem o enunciado, e que informações podemos retirar.
   - O que é que acontece com o aumento da água? É sempre igual.

Caso os alunos revelem dúvidas em resolver as questões da tarefa, questionar que estratégias podem usar.

20 minutos

3) Desafiar os alunos a resolver a tarefa.

25 minutos

Promover a discussão coletiva sobre as resoluções das tarefas, questionando-os sobre: "Para determinar, quer o perímetro quer a área da superfície da água preciso de obter duas expressões analíticas, para cada uma delas, porquê".

"Haveria alguma possibilidade de determinar o perímetro e a área, separadamente, recorrendo apenas a uma expressão algébrica".

Pretende-se valorizar os diferentes raciocínios,

Tarefa adicional: O custo do aluguer de uma moto

O custo de aluguer de uma determinada moto é de 25 euros por dia durante os dois dias primeiros dias; a partir destes, o cliente terá de pagar 15 euros por dia. Representa algebricamente o custo, em euros, do aluguer da referida moto por x dias.

Exploração

5) Propor aos alunos que leiam e interpretem o enunciado da tarefa. Questionar a turma sobre o que dado e pedido na tarefa?
6) Proporcionar o trabalho autónomo dos alunos. Atender e procurar clarificar as dificuldades que os alunos apresentam na resolução da tarefa.
7) Discutir a seguinte afirmação: "Para determinar o custo de aluguer da moto durante um determinado período de tempo somente preciso de obter uma expressão analítica".

Analisar com a turma a resolução da tarefa.

Materiais: Caderno, manual escolar e calculadora gráfica.

Plano de aula 4

<table>
<tr><td>

Tópico: Função raiz quadrada e função raiz cúbica

Objetivos: Estudar a função raiz quadrada e a raiz cúbica

Conhecimentos Prévios: perímetros, teorema de Pitágoras, equações, distância entre dois pontos e funções.

Formato de Ensino: Ensino exploratório.

Tarefa1. A distância

Considera a função definida por $f(x) = \frac{4}{x}$, $x\epsilon]0\,,+\infty[$. Seja P o ponto do gráfico da função f num referencial ortonormado. Mostra que a expressão da função d que traduz a distância de cada posição do ponto P à origem do referencial é dada por $d(x) = \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}$.

</td><td>

Comentários

Turma do 10.° ano de escolaridade do curso de Ciências e Tecnologias

90 m.

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) Introdução da tarefa; (ii) Exploração da tarefa; (iii) Discussão/Sistematização de conhecimentos.

Tempo estimado: 30 Minutos

Trabalho de pares

-Perceber qual a estratégia usada pelos alunos;

Esta tarefa, apela à interpretação dos alunos, quer do enunciado quer da análise do gráfico.

Fonte: Máximo, 10.° ano, Porto Editora (adaptado)

</td></tr>
<tr><td>

Exploração

1. Apresentar a tarefa 1 à turma, garantindo que todos os alunos interpretam corretamente os dados do enunciado da tarefa.
2. Questionar a turma sobre o que é pedido na tarefa.
3. Propor aos alunos a resolução da tarefa.
4. Promover a discussão coletiva sobre a resolução da tarefa:
   - Qual é o domínio da função d?
   - Porque a abcissa do ponto P não pode ser zero?
5. Definir a função $g(x) = \sqrt{x}$.

</td><td>

5 minutos

Caso os alunos revelem dúvidas em resolver as questões da tarefa, questionar que estratégias podem usar?

10 minutos

15 minutos

Pretende-se valorizar as diferentes resoluções dos alunos, com especial ênfase para o confronto de raciocínios.

</td></tr>
<tr><td>

Tarefa 2. O quadrado...

Num referencial ortonormado O_{xy} está representado o gráfico da função definida por $g(x) = \sqrt[3]{9x}$ e um ponto A que se desloca ao longo deste gráfico. Pretende-se construir retângulos cujos vértices sejam definidos por este ponto, pela origem do referencial e por pontos sobre os eixos coordenados.

a) Determina as coordenadas do ponto A de forma que o retângulo seja um quadrado.
b) Indica, justificando, as coordenadas dos vértices do quadrado das funções obtidas por:

b1) $2g(\frac{x}{2})$

b2) $3g(\frac{x-2}{3})$

</td><td>

Tempo estimado: 55 minutos

Trabalho de pares

-Perceber qual a estratégia usada pelos alunos;

- Perceber que informações retiram do enunciado.

Fonte: Máximo, 11.° ano, Porto Editora (adaptado)

</td></tr>
<tr><td>

Exploração

1) Apresentar a tarefa 2 à turma, garantindo que todos os alunos interpretam corretamente os dados do enunciado da tarefa.
2) Questionar a turma sobre o que é pedido na tarefa.
3) Desafiar os alunos a resolver a tarefa.

</td><td>

5 minutos

Caso os alunos revelem dúvidas em resolver as questões da tarefa, questionar que estratégias podem usar? Caso seja necessário, sugerir que desenhem um possível esquema que ilustre a situação descrita, para diferentes medidas.

</td></tr>
</table>

4) Promover a discussão coletiva sobre a resolução da tarefa, solicitando o raciocínio apresentado. • Quais são as coordenadas dos vértices dos quadrados. • Qual o domínio da função g • Definir a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$. **Síntese:** Pedir a um aluno para fazer a síntese da aula **Materiais:** Caderno, manual escolar e calculadora gráfica.	20 minutos 30 minutos Pretende-se valorizar as diferentes resoluções dos alunos, com especial ênfase para o confronto de diferentes raciocínios. 5 minutos