O Erro na regulação da aprendizagem de equações no 7º ano Sara Sofia De Lima Pinto

UMinho|2021

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Sara Sofia De Lima Pinto

O Erro na regulação da aprendizagem de equações no 7º ano

dezembro de 2021

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Sara Sofia De Lima Pinto

O Erro na regulação da aprendizagem de equações no 7º ano

Relatório de estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do ensino básico e no ensino secundário

Trabalho efetuado sob a orientação do
Professor Doutor Pedro Manuel Baptista Palhares

dezembro de 2021

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero dedicar este trabalho à minha avó materna! Não existe partida para aqueles que permanecerão eternamente nos nossos corações, por isso mesmo, estás e continuarás a estar eternamente no meu coração! Sei que, onde quer que estejas, estás orgulhosa da tua neta.

Ao finalizar esta etapa da minha vida, agradeço de coração...

Ao meu supervisor, professor Doutor Pedro Palhares, por todas as suas palavras de apoio para comigo, pela sua disponibilidade, pelos comentários, sugestões e críticas pertinentes, que se tornaram fundamentais para o desenvolvimento deste estudo. "A regra número um é: não se preocupe com as coisas pequenas. A regra número dois é: todas as coisas são pequenas." — Robert Eliot, ficará comigo esta frase, obrigada!

Ao professor Doutor Floriano Viseu e à professora Doutora Paula Mendes Martins, por todos os conselhos e ajudas ao longo do meu percurso académico.

À minha orientadora, Professora Isabel Roque, por me ter recebido afetuosamente nas suas turmas, por todos os conselhos, disponibilidade e atenção.

A todos os alunos com quem tive o gosto de trabalhar ao longo do meu ano de estágio, por me terem recebido tão bem e por me terem proporcionado bons momentos e boas memórias.

Ao melhor que esta Academia que me trouxe, a família de Matemática, quero agradecer por terem entrado na minha vida, agradecer por todos os bons momentos que passamos nesta magnífica cidade, momentos esses que guardo e guardarei no meu coração eternamente.

Às minhas parceiras de todas as horas, Cristina e Lúcia, porque sem elas este caminho não teria sido o mesmo.

À Patrícia que para além de pertencer à família de Matemática, deu-me uma ajuda incalculável ao longo deste trabalho.

Agora para o final, uma referência para os de sempre, para os meus amigos dos Arcos, de Arcos de Valdevez, onde Portugal se fez....Obrigada pelo caminho que construímos juntos, obrigada por todo o apoio ao longo destes anos, espero continuar a agradecer-vos e chatear-vos até sermos bem velhinhos.

À Virinha, a minha primeira referência na área da Matemática, à Sheila e a toda a equipa do centro de estudos Nota 20, o meu muito obrigada por toda a confiança, por todo o apoio, ajuda e conselhos ao longo destes anos.

E por último, mas que serão sempre os meus primeiros, aos meus pais, ao meu irmão e a toda minha família, que sempre acreditaram em mim e contribuíram para que esta caminhada fosse possível.

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

O Erro na regulação da aprendizagem de equações no 7.ºano

RESUMO

O presente relatório, desenvolvido no âmbito da Unidade Curricular de Estágio do Plano de Estudos do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, tem como objetivo o aproveitamento dos erros dos alunos numa estratégia de ensino para o 7.º Ano na resolução de Equações. Para a consecução desse objetivo foram formuladas as seguintes questões de investigação: (1) Quais são os erros/dificuldades, bem como as potencialidades, que os alunos revelam durante a aprendizagem do tema equações no 7.º ano? (2) Qual o impacto de um ensino centrado na exploração dos erros na aprendizagem do tema Equações no 7.º ano? (3) Que ilações retiram os alunos dos erros que cometem na aprendizagem do tema Equações no 7.º ano? De modo a dar resposta a estas questões procedeu-se à recolha de informação através dos seguintes meios: observação e gravação de aulas, produções dos alunos e questionários.

Durante a intervenção foi implementada uma estratégia didática que enfatiza o erro no processo de ensino e aprendizagem e que tinha como objetivo que fossem os alunos a detetar e corrigir os seus próprios erros. Todas as produções das tarefas recolhidas durante esta estratégia foram analisadas de forma a detetar os erros e as dificuldades dos alunos e foram construídas, em conformidade com os erros detetados, novas tarefas que os englobassem. Estas novas tarefas continham várias resoluções diferentes e os alunos tinham de detetar os erros existentes. De seguida, cada aluno corrigiu as suas primeiras tarefas, de forma a que fosse o próprio a detetar e corrigir os seus erros.

Os resultados obtidos mostram que os alunos cometeram vários erros e apresentaram algumas dificuldades na resolução de equações de 1.º grau. Alguns destes erros e dificuldades já tinham sido mencionados ao longo da literatura referida ao longo deste trabalho, outros ainda não o tinham sido.

As causas mais referidas pelos alunos que os levam a errar deveram-se a fatores de distração durante a resolução e à falta de atenção durante as aulas. Com a análise dos erros que cometem, a maior parte dos alunos manifesta ter a perceção onde erra, o que os ajuda a clarificar os erros cometidos de modo a evitar que os voltem a cometer.

As metodologias atrás mencionadas, de um modo geral, contribuíram para que alguns dos erros e dificuldades identificadas fossem ultrapassados ou, pelo menos, que não ocorressem com tanta frequência.

Palavras-chave: Aprendizagem, Dificuldades, Erros, Evolução.

The error in the regulation of learning equations in the 7th grade

ABSTRACT

This report developed in the scope of Curricular Internship Unit of the Study Plan of the Master's Degree in Mathematics Teaching in the 3rd cycle of Basic Education and in Secondary Education, aims to take advantage of students' mistakes in a strategy teaching for the 7th year in solving Equations. To achieve this objective, the following research questions were formulated: (1) What are the errors/difficulties, as well as the potential, that students reveal when learning the topic of equations in the 7th grade? (2) What is the impact of teaching centered on the exploration of errors in learning the topic of Equations in the 7th grade? (3) What inference do students remove from the mistakes they make in learning the topic of Equations in the 7th grade? In order to answer these questions, the information was collected through the following methods: observation and recording of classes, students' productions and questionnaires.

During the intervention, there was implemented a didatic strategy that emphasizes errors in the process of teaching and learning which aimed at the students to detect and correct their own errors. All the productions of the tasks collected during this strategy were analyzed in order to detect the students' errors and difficulties and, in accordance with the detected errors, new tasks were built to encompass them. These new tasks contained several different resolutions and students had to detect existing errors. Then, each student corrected their first tasks, so that they could detect and correct their mistakes. The results obtained showed that students make several mistakes and had some difficulties in solving 1st degree equations. Some of these errors and difficulties had already been mentioned throughout the literature referred to throughout this work, others had not yet been mentioned. The most mentioned causes by students that lead them to make mistakes were due to distracting factors during the resolution and lack of attention during classes. With the analysis of the mistakes they make, most students show that they have a perception of where they make mistakes, which helps them to clarify the mistakes made in order to prevent them from making them again.

In general, the methodologies mentioned above contributed to overcoming some of the errors and difficulties identified or, at least, not occurring so often.

Keywords: Difficulties, Evolution, Learning, Mistakes.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE QUADROS

ÍNDICE DE TABELAS

CAPÍTULO 1
INTRODUÇÃO

Ao longo deste primeiro capítulo, que se encontra dividido em três secções, é apresentado o tema em estudo, assim como as finalidades e objetivos do mesmo. De seguida, é realçada a pertinência da escolha deste tema, e por fim, a última secção é dedicada a uma breve descrição da estrutura geral deste relatório.

1.1. Tema, finalidades e objetivos

O tema deste estudo é referente ao papel do erro na regulação da aprendizagem de equações numa turma do 7.º ano de escolaridade do distrito de Braga.

A escolha do tema vai além do gosto pessoal por estes conteúdos, mas particularmente pela perceção, enquanto aluna, da importância que os erros cometidos tiveram e o quanto contribuíram para a aprendizagem pessoal. Ter percebido onde foi cometido o erro, ocasionou prestar mais atenção em situações futuras, contribuindo para o sucesso escolar.

Segundo a DGE (2018), tenciona-se que os alunos ao longo do ensino básico desenvolvam interesse pela Matemática e confiança nos seus conhecimentos, bem como persistência e autonomia.

Na sociedade em que vivemos atualmente, marcada pela multiplicidade e complexidade de processos de ensino e aprendizagem da Matemática, são vários os desafios com os quais as escolas, os professores e os alunos se confrontam. Deve-se, portanto, estabelecer métodos de ensino que respeitem as caraterísticas, necessidades e interesses dos alunos, enquanto se potenciam as oportunidades de aprendizagem bem como a promoção da equidade entre alunos que os levem ao sucesso escolar (Hamido et al., 2012).

Assim, considerando tudo o que foi referido e, como segundo Sousa (2019), os erros fazem parte do processo de qualquer tipo de aprendizagem, neste trabalho tem-se como objetivo o aproveitamento dos erros dos alunos numa estratégia de ensino para o 7.º Ano. De modo a concretizar este objetivo, pretende-se responder às seguintes questões de investigação:

1. Quais são os erros/dificuldades, bem como as potencialidades, que os alunos revelam durante a aprendizagem do tema Equações no 7.º ano?
2. Qual o impacto de um ensino centrado na exploração dos erros na aprendizagem do tema Equações no 7.º ano?
3. Que ilações retiram os alunos dos erros que cometem na aprendizagem de equações no 7.º ano?

1.2. Pertinência do estudo

A Álgebra é fundamental no ensino e na aprendizagem da matemática, pois o seu estudo tem como grande objetivo desenvolver o pensamento algébrico dos alunos (Ponte *et al.*, 2009).

Apesar de a Álgebra constituir um dos temas mais importantes no ensino da Matemática, é também um tema onde grande parte dos alunos revela bastantes erros e dificuldades. Estes erros e dificuldades sentidas pelos alunos dizem em grande parte respeito ao trabalho com expressões e equações (Kieran, 1992).

De acordo com Serrazina *et al.* (1999) "cometer erros ou dizer as coisas de modo imperfeito ou incompleto não é um mal a evitar, é algo inerente ao próprio processo de aprendizagem". Diz-se que, "errar é humano" (p.27), portanto, aceitar os erros também o deve ser e, essa aceitação deve ser centrada no desejo de aprender e de melhorar.

Ramos e Curi (2014) consideram que, a partir da análise das produções escritas dos alunos, é possível criar estratégias didáticas de forma a que os alunos identifiquem e sejam capazes de corrigir o próprio erro.

Deste modo, ajudar os alunos a compreender os seus erros e dificuldades na resolução de equações do 1.º grau e desenvolver estratégias que, de algum modo, os ajude a reverter esta situação é pessoalmente aliciante e profissionalmente pertinente.

1.3. Estrutura do relatório

O presente Relatório de Estágio está organizado em cinco capítulos. No capítulo um, Introdução, além da apresentação da estrutura do relatório, encontra-se ainda a apresentação do tema em estudo, assim como as finalidades, pertinência, objetivo e questões de investigação.

No segundo capítulo, Enquadramento Teórico, são expostas referências, à luz da literatura, consideradas pertinentes para o tema em estudo, com o propósito de documentar e orientar toda a investigação efetuada.

No terceiro capítulo, Enquadramento Contextual e Estratégias de Intervenção, é apresentada a caracterização da escola e da turma onde foi realizada a intervenção pedagógica, bem como a metodologia de ensino e de aprendizagem adotada, a planificação da intervenção pedagógica, os instrumentos de recolha de informação selecionados para a avaliação do ensino ministrado e uma breve descrição de como se desenvolverá a organização da análise de dados do capítulo seguinte.

No quarto capítulo, Apresentação de Resultados, inclui-se a apresentação dos resultados obtidos através da análise dos dados recolhidos ao longo da intervenção.

No quinto capítulo, Conclusões, Limitações e Recomendações, são apresentadas as principais conclusões do estudo tendo como referência o objetivo e as questões de investigação delineadas e são referidas algumas limitações e recomendações a ter em conta em investigações futuras desta natureza.

No final, listam-se as Referências Bibliográficas consultadas e referidas no decorrer do relatório, e apresentam-se os Anexos que expõem elementos que complementam a sua leitura.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Este capítulo destina-se ao enquadramento teórico que serviu de base para este estudo. Organizado em sete secções, nestas são introduzidas referências consideradas pertinentes para o tema em estudo.

2.1. O ensino e a aprendizagem da Álgebra

O ensino da Álgebra tem merecido, desde há muito tempo, atenção por parte dos investigadores em Educação Matemática (Boavida & Guimarães, 2007).

De acordo com Ponte *et al.* (2009), a Álgebra é um dos quatro grandes temas que, em conjunto com as capacidades transversais, são considerados essenciais ao longo dos três ciclos de ensino.

Segundo Ponte (2006), a visão mais comum da Álgebra é que se trata de um conjunto de regras para transformar expressões (monómios, polinómios, frações algébricas, expressões com radicais...) e de processos de resolução de equações. Contudo, a Álgebra é mais do que uma manipulação de símbolos, uma vez que "os alunos necessitam de compreender os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que regem a manipulação simbólica, e o modo como os próprios símbolos podem ser utilizados para registar ideias e tirar ilações face a certas situações" (NCTM, 2007,p.39).

A adaptação de alguns alunos a novos símbolos, regras e sua interpretação nem sempre é simples, existindo "alunos que conseguem um nível de desempenho razoável no trabalho com números e operações numéricas, mas que se deparam depois com grandes dificuldades na Álgebra"(Ponte, 2005a, p.39).

O lugar que a Álgebra ocupa nos programas de matemática nem sempre teve a mesma relevância. Segundo H. Oliveira (2009), no programa de 1991, a Álgebra nem sequer surgia como um tema individualizado, integrando-se, por um lado no tema Números e Cálculo e, por outro, no tema Estatística e Funções.

No programa de Matemática do Ensino Básico de 2007, "a Álgebra é introduzida como tema programático no 2.º e 3.º ciclo, e no 1.º ciclo tem já lugar uma iniciação ao pensamento algébrico" (Ministério da Educação, 2007, p.1). Portanto, neste programa, os alunos do 1.º ciclo, mesmo não tendo tópicos de Álgebra, têm o primeiro contacto com algumas ideias algébricas presentes em outros temas, como por exemplo, nas sequências, nas relações entre números e operações, e ainda no estudo de propriedades geométricas como a simetria. No 2.º ciclo, a Álgebra já aparece como um tema individualizado, aprofundando-se o estudo de relações e regularidades e da proporcionalidade direta como igualdade entre duas razões. Por fim, no 3.º ciclo, institucionaliza-se o uso da linguagem algébrica, trabalha-se expressões, equações, inequações e funções.

De acordo com Ministério da Educação (2007), a alteração mais significativa em relação ao programa anterior é o estabelecimento de um percurso de aprendizagem prévio no 1.º e 2.º ciclo. Esta alteração pode possibilitar maior sucesso na aprendizagem subsequente, com a consideração da Álgebra como forma de pensamento matemático, desde os primeiros anos.

Segundo Veloso *et al.* (2013), a abordagem que é feita ao domínio da Álgebra, no programa de Matemática do Ensino Básico de 2013, "tem implícita uma visão restrita da mesma, ao considerar, no 3.º ciclo, o domínio *Funções, Sequências e Sucessões* como distinto do domínio *Álgebra*, e não integrante deste último" (p.7). Referem ainda, falta de coerência, pelo facto de o item *Sequências e Regularidades* se encontrar incluído no domínio da *Álgebra* no 2.º ciclo e deixar de o ser no 3.º ciclo, ao integrar o domínio *Funções, Sequências e Sucessões*. Um outro aspeto pouco claro para estes autores, é o facto do item *Sequências e Regularidades*, ao longo do 1.º ciclo, só se encontrar contemplado no 2.º ano, voltando depois só a surgir no 6.º ano. Ora, se um dos objetivos da Álgebra, no currículo escolar, é o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos, esta descontinuidade de trabalho, não acarreta grandes vantagens para o seu desenvolvimento (Veloso *et al.*, 2013).

Apesar das diversas iniciativas e medidas desenvolvidas ao longo do tempo, reconhecendo como preocupantes as elevadas taxas de retenção na disciplina de Matemática, o Governo deu início a uma análise profunda sobre esta disciplina, constituindo o Grupo de Trabalho de Matemática (GTM), ao qual foi atribuída a missão de proceder à análise do fenómeno do insucesso, tendo como propósito a elaboração de um conjunto de recomendações. Através dessas recomendações, foi constituído o Grupo de Trabalho da Revisão Curricular das Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico, ao qual foi concedida a missão de fazer a revisão curricular das Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (Despacho n.º 8209/2021,2021).

As Aprendizagens Essenciais, resultantes deste trabalho, entrarão em vigor a partir do ano letivo 2022/2023 e "assumem uma perspetiva de Matemática para todos, valorizando o desenvolvimento da «literacia matemática»" (p.116), ou seja, a capacidade de raciocinar matematicamente e de formular, aplicar e interpretar a matemática para resolver problemas numa variedade de contextos do mundo real (Despacho n.º 8209/2021,2021).

Segundo a DGE (2021a), com a entrada das novas aprendizagens essenciais, assume-se pela primeira vez, no 1.º ciclo, "a Álgebra enquanto tema matemático autónomo, reconhecendo-se a sua transversalidade e facilidade de articulação interna com os outros temas matemáticos, em especial com Números, enfatizando-se uma abordagem à aritmética generalizada"(p.10).

No 2.º Ciclo, continua-se com o desenvolvimento do pensamento algébrico e da comunicação com recurso a representações simbólicas, particularmente a escrita de expressões algébricas, no contexto de situações que favoreçam a atribuição de significado às letras, sejam variáveis ou parâmetros. No 6.º ano, surge ainda a primeira abordagem à proporcionalidade direta, um contexto promotor da ideia de variação e do pensamento funcional (DGE, 2021b).

Outra mudança que advém da entrada em vigor das novas aprendizagens essências está relacionada com a resolução de Equações. Segundo a DGE (2021c, 2021d), a partir de 2023, no sétimo ano de escolaridade os alunos só irão aprender a resolver equações do 1.º grau a uma incógnita (sem parênteses e denominadores). No oitavo ano é que começam a resolver as equações do 1.º grau a uma incógnita com denominadores e parênteses.

2.2. Dificuldades na aprendizagem de álgebra

A aprendizagem da matemática é estruturada em patamares de crescente complexidade, pelo que, na prática letiva deve-se ter atenção à progressão dos alunos de modo que se possam superar, em tempo útil e de modo apropriado, as dificuldades identificadas e em simultâneo reforçar os progressos verificados (Ministério da Educação e Ciência, 2013).

Assim, no que diz respeito à aprendizagem da Álgebra, os alunos deparam-se com vários tipos de dificuldades, sendo que as dificuldades dos alunos na transição da Aritmética para a Álgebra têm sido discutidas por diversos autores.

Matos e Ponte (2008) e Usiskin (1988), são alguns dos autores que refletem sobre o modo como os alunos interpretam a linguagem algébrica, mais especificamente, sobre a possibilidade de a letra ser usada com diferentes finalidades, causando distintas interpretações, que podem gerar algumas dificuldades adicionais a muitos alunos.

Usiskin (1988) ilustra este problema mostrando a diversidade de sentidos que uma letra pode possuir:

$$A = LW \tag{1}$$

$$20 = 5x \tag{2}$$

$$\sin x = \cos x \tan x \tag{3}$$

$$1 = n\frac{1}{n} \tag{4}$$

$$y = kx \tag{5}$$

A expressão (1), representa uma fórmula simples de uma área, onde estão presentes distintas letras que representam variáveis. A expressão (2), representa uma equação, onde a letra x assume o papel de incógnita, ou seja, representa um número desconhecido. A expressão (3) é uma identidade, sendo a letra x vista como o argumento de uma função. A expressão (4) representa a propriedade da existência de inverso e pode surgir da generalização de uma regularidade. Por último, a expressão (5) pode ser interpretada como a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade direta, em que a letra x é novamente um argumento da função (variável independente), y é o valor que a função toma para cada argumento (variável dependente) e k pode ser visto como a constante de proporcionalidade (ou como um parâmetro, se considerarmos a família de funções).

Segundo Nunes (2020), "se o conhecimento do significado das letras não for claro, os alunos terão muitas dificuldades na apropriação de conceitos e procedimentos algébricos"(p.10).

Uma outra dificuldade diz respeito à compreensão das alterações de significado, na Aritmética e na Álgebra, dos símbolos "$+$" e "$=$", bem como das convenções adotadas (Ponte, 2005a).

Segundo Rojano (2002), símbolos operacionais mudam de significado quando mudam de um domínio de conhecimento para outro. Por exemplo, em Aritmética, 324 tem um significado aditivo $(300 + 20 + 4)$, enquanto isso, $3a$, em Álgebra, tem um significado multiplicativo ($3 \times a$). Além disso, em Aritmética, a adição $7 + 4$ indica uma "operação para fazer" (cujo resultado é 11), porém, em Álgebra, a adição $2x + 7$ representa uma unidade irredutível (enquanto não se concretizar a variável x).

Em relação ao símbolo "$=$", Rojano (2002), considera que este pode ter vários significados em Álgebra: pode representar a equivalência entre duas expressões (por exemplo, $2(a + b) = 2a + 2b$); pode também definir uma equação (por exemplo, $7x - 4 = 28x + 15$); ou pode estabelecer uma relação (por exemplo, $y = 3x + 2$); no entanto, na Aritmética, o sinal de igual funciona apenas como um operador, que transforma o membro esquerdo de uma igualdade num valor numérico (por exemplo, $12 + 7 = 19$).

Molina *et al.* (2009), para além dos significados atribuídos ao símbolo "$=$" por Rojano (2002), apresentaram mais interpretações para o símbolo que podem estar na origem das dificuldades que os alunos apresentam na incompreensão do sinal. Segundo estes autores o sinal de igual pode ser encarado como:

- Uma proposta de atividade, por exemplo, é pedido aos alunos para completarem os seguintes espaços, de forma a simplificarem as seguintes expressões: $16 : 3 =$ _____, $x(x + 1) - 3x(x + 5) =$ _____;

- Expressão de uma ação, ou seja, o sinal de igual assume um significado bidirecional que amplia o significado do operador reconhecendo a propriedade simétrica da igualdade (por exemplo, $24 = 12 + 12, 2x = x(x - 2) - x^2 + 4x$);

- Um indicador de uma estimativa, ou seja, o sinal é utilizado para relacionar uma expressão com uma estimativa do seu valor numérico (por exemplo, $\frac{1}{3} = 0.33$);

- Uma definição de um objeto matemático, ou seja, o sinal de igual é utilizado para definir um objeto matemático ou para atribuir-lhe um nome (por exemplo, $a^0 = 1$, se a for um número natural);

- Uma atribuição de um valor numérico, ou seja, o sinal de igual é usado para atribuir um valor numérico a um símbolo (por exemplo, se $x = 4$, qual é o valor de $x^2 - 5$?).

Kieran (1992) também reflete sobre a má compreensão, por parte dos alunos, em relação ao sinal de igualdade na passagem do domínio da Aritmética para a Álgebra. Segundo a autora, a noção inicial dos alunos em Álgebra é que o sinal de igual é um “sinal de fazer algo” em vez de um símbolo de equivalência entre os lados esquerdo e direito de uma equação. De acordo com a autora, esta confusão de ideias é devida à dificuldade de os alunos aceitarem algumas declarações, tais como, $4 + 3 = 6 + 1$ ou $3 = 3$, uma vez que eles pensam que o lado direito deve indicar a resposta, ou seja, $4 + 3 = 7$.

Segundo Ponte (2005a) e Rojano (2002), os alunos também costumam demonstrar dificuldades em traduzir informação da linguagem natural para a linguagem algébrica, bem como, com as regras da escrita algébrica. Rojano (2002), refere que uma das razões para estas dificuldades, pode ser devido ao uso de linguagens quotidianas.

Muitos dos estudos sobre a aprendizagem de Álgebra concentram-se nos erros dos alunos na resolução de equações, como será apresentado mais adiante.

2.3. A importância do erro para o ensino e a aprendizagem

Pode-se assumir que todo o aluno é capaz de aprender, isto é, de se conseguir aproximar progressivamente da aquisição de objetivos predefinidos, sendo que o que diferencia os alunos, é o ritmo com que essa aproximação acontece (Santos, 2008).

Um dos elementos que compõe o processo ensino-aprendizagem dos alunos é o erro, pois toda a aprendizagem comporta necessariamente dificuldades, pois trata-se de um processo de reestruturação de representações prévias (Santos, 2008; Spinillo *et al.*, 2014).

A definição da palavra “erro” que consta no dicionário da língua portuguesa sugere que se trata de uma decisão, ato ou resposta incorreta; um engano; uma apreciação ou julgamento que está em desacordo com a realidade observada; um juízo falso; uma falta. No entanto, segundo Sousa (2019), o erro não deve ser encarado como uma mera falha ou falta de atenção. Este deve ser considerado parte integrante, inevitável e necessária no processo de ensino e aprendizagem, concebido até como instrumento que permite seguir a evolução dos alunos.

Caso não existissem erros, não haveria aprendizagem, pois tudo estaria de antemão compreendido e conhecido. A ideia que os erros devem ser evitados e excluídos da prática escolar não se sustenta, pois não há situações de aprendizagem sem equívocos, sejam eles resultantes de dificuldades de compreensão de natureza epistemológica, psicológica ou didática (Spinillo *et al.*, 2014).

Os erros constituem, portanto, uma fonte rica de informação. Contudo, segundo Santos (2002), para que a aprendizagem, através dos erros cometidos pelos alunos, ocorra e seja duradoura no tempo, é fundamental que estes sejam reconhecidos e compreendidos não só pelo professor, mas principalmente pelos alunos.

Segundo Barros *et al.* (2016), qualquer tipo de ajuda que tenha como intuito auxiliar a superação do erro, que consista em "contrapor o argumento errado do aluno com a verdade institucional, e exigir a sua imediata substituição sem nenhuma outra justificação, é inadequada" (p.121). Da mesma forma, se um professor se limitar a corrigir as tarefas dos alunos indicando só se as respostas estão certas ou erradas, o aluno pode nunca vir a saber onde errou e porque é que errou (Ponte & Serrazina, 2000).

Identificar e corrigir erros não são, portanto, ações suficientes para gerar mudanças nas formas de pensar dos alunos, sendo necessário criar oportunidades em que estes possam refletir e analisar os seus erros. O ponto principal é o significado que é atribuído ao erro por quem ensina: ignorá-lo, corrigi-lo simplesmente ou transformá-lo num instrumento didático (Spinillo *et al.*, 2014).

Ramos e Curi (2014), consideram que é necessário ter em consideração que o erro é uma forma de se conseguir obter informações sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos, por isso, ele deve ser identificado e analisado, caso contrário os alunos permanecerão com dificuldades e vão continuar a cometer erros.

O objetivo é que cada aluno consiga fazer a sua autocorreção, pois, conforme Santos (2002), "quando o próprio aluno consegue identificar o erro e corrigi-lo, acontece aprendizagem" (p.80).

Considerando a vantagem de uma pedagogia do erro (onde o erro é assumido como uma condição que acompanha qualquer processo de melhoria, como um elemento construtivo e inovador), em contraposição com uma pedagogia do êxito (onde os professores se concentram nas notas obtidas e não na progressão dos alunos), De la Torre (2004), apresenta um confronto entre as duas perspetivas.

Segundo De la Torre (2004), o contraste entre as duas formas de avaliar o erro transparece que este está a ser definido a partir de conceções diferentes. A pedagogia do êxito adota uma atitude negativa em relação ao erro, como um aspeto defeituoso e desadaptado que deve ser eliminado. A pedagogia do erro, por outro lado, valoriza o que já foi alcançado e analisa, através do erro, o que ainda precisa de ser melhorado.

O maior erro é acreditar que não se comete erros. Todas as melhorias são alcançadas através da mudança e esta nem sempre é conseguida sem falhas ou erros. Cometer um erro não é apenas uma fatalidade humana, pode muitas vezes ser o que motiva uma mudança (De la Torre, 2004).

Não se pode considerar os alunos incapazes pelo facto de cometerem erros, deve-se sim, ter em consideração esses erros, para orientar e direcionar o processo de ensino e aprendizagem (Correia, 2005).

É, portanto, imprescindível a criação de novas estratégias didáticas para a superação das dificuldades dos alunos e para a correção dos seus erros (Ramos & Curi, 2014).

2.4. O uso do erro na sala de aula

Diversos autores têm refletido sobre o papel do erro na educação matemática (Borasi, 1996; Cury, 2007; De la Torre, 2004; Pochulu, 2004). Estes autores apontam para a necessidade de trabalhar a questão dos erros como uma ferramenta pedagógica que auxilie, quer o professor quer o aluno, no processo de ensino/aprendizagem, enfatizando o papel construtivo do erro.

Cury (2007) defende a ideia que a análise de erros é uma abordagem de pesquisa e também uma metodologia de ensino, se for utilizada em sala de aula com o objetivo de levar os alunos a questionarem as suas próprias resoluções.

Borasi (1985), citado por Vale (2010), acredita que "partindo dos erros detetados, levar os alunos a questionar as suas respostas para fazer uma autorregulação da sua própria aprendizagem pode construir um trampolim para a aprendizagem" (p.3).

De forma similar, Pochulu (2004) considera que "dar lugar ao erro na aula é trabalhá-lo, descobrindo as hipóteses falsas que levaram a produzi-lo, procurando os caminhos possíveis até redescobrir os conceitos válidos e matematicamente aceites, comparando versões corretas com erróneas, etc." (p. 12).

Borasi (1996) sugere ambientes de aprendizagem, nos quais os potenciais dos erros podem ser aproveitados. Mais especificamente, propõe uma taxionomia de uso dos erros em sala de aula, segundo o objetivo do processo de ensino e aprendizagem: correção (do erro), descoberta (a partir do erro), pesquisa (a partir do erro) e tendo em conta os diferentes níveis de discurso matemático que o professor pode considerar: realização de uma tarefa matemática específica, compreensão de algum conteúdo matemático técnico e compreensão sobre a natureza da Matemática.

Borasi (1996) apresenta um quadro a que chama "taxionomia dos usos dos erros como trampolins para a pesquisa" como apresentado na Quadro1. A autora expõe uma ampla abordagem, com diferentes alternativas, sobre a possibilidade da utilização de análise de erros no processo de ensino e aprendizagem. A combinação de todas as categorias permite, pelo menos, nove usos dos erros como trampolim para uma investigação.

Quadro 1: Taxionomia para o uso do erro na sala de aula (adaptado de Borasi,1996)

Objetivo de aprendizagem	**Níveis de discurso matemático** **Realização de uma tarefa matemática específica**	**Compreensão de algum conteúdo matemático técnico**	**Compreensão sobre a natureza da Matemática**
Correção	Análise de erros detetados, para compreender o que houve de errado e corrigir, de forma a realizar a tarefa com sucesso.	Análise de erros detetados, para esclarecer más interpretações de um conteúdo técnico da Matemática.	Análise de erros detetados, para esclarecer más interpretações sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo específico.
Descoberta	Uso construtivo do erro no processo de resolução de uma tarefa; Observação da resolução de um aluno para que seja possível identificar possíveis erros.	Uso construtivo do erro na aprendizagem de novos conceitos, regras, tópicos, etc.	Uso construtivo do erro na aprendizagem sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo específico.
Pesquisa	Erros e resultados intrigantes proporcionam novas pesquisas em novas direções e servem para desenvolver novas tarefas matemáticas.	Erros e resultados intrigantes proporcionam questões que podem levar a novas perspetivas sobre um conceito, regra ou tópico que pode não estar no plano original.	Erros e resultados intrigantes proporcionam questões que podem levar a introspeções e perspetivas acerca da natureza da Matemática ou de algum conteúdo em específico.

Segundo Cury (2007), estas nove formas de utilizar os erros podem surgir separadamente ou em conjunto pois, consoante os objetivos de aprendizagem, é possível transitar entre as diversas formas de trabalhar com a análise de erros. A autora destaca a ideia de que o erro se constitui como um conhecimento, é um saber que o aluno possuí, construído de alguma maneira, sendo necessário elaborar intervenções didáticas que ajudem os alunos a questionarem as suas respostas.

Para De la Torre (2004), podem-se considerar três fases no tratamento didático dos erros: deteção, identificação e correção. Com base em diversos autores, De la Torre (2004), propõe algumas estratégias que podem ser utilizadas na correção e retificação de erros:

- Ficha de registo de erros: Observação e registo sistemático dos erros que os alunos cometem com mais frequência. Para cada tipo de erro, a ficha de registo deve conter as seguintes informações: 1) erro cometido, 2) descrição do erro, 3) correção ou resolução incorreta da tarefa, 4) estratégia de correção utilizada pelo professor para que o aluno assimile os conteúdos;
- Corrigir ou melhorar tarefas: Introduzir em tarefas os erros que sejam mais frequentes, pedindo aos alunos que individualmente, ou em grupo, os localizem, identifiquem e corrijam;
- Segunda oportunidade: Segundo o autor, uma das estratégias mais eficazes para retificar e melhorar a aprendizagem, consiste em dar aos alunos uma nova oportunidade para apresentar o seu trabalho para uma nova avaliação, depois de o professor fazer algumas observações sobre os mesmos;
- Correção cooperativa: O professor pode propor que as tarefas sejam corrigidas em pares/grupos, nas quais ao encontrar diferenças de resultados entre elas, possa surgir uma discussão, sendo o professor o mediador da mesma;
- Revisão de tarefas mal resolvidos: A revisão das tarefas resolvidas ajuda a reconhecer processos, desde a sua abordagem inicial à sua execução;
- Caça ao erro do professor: Colocar diferentes tipos de erros nas suas explicações que têm de ser descobertos pelos alunos;
- Autorreflexão e metacognição: Introduzir a autorreflexão como estratégia de análise do próprio insucesso.

Portanto, o erro deve ser encarado, segundo Borasi (1985) citado por Vale (2010), como um caminho para a aprendizagem dando especial atenção ao processo de desenvolvimento e não apenas ao produto final.

2.5. Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações

As equações do 1.º grau com uma incógnita constituem um tópico importantíssimo no programa de matemática, sendo que a sua aprendizagem envolve níveis sucessivos de complexidade, onde cada nível envolve as suas dificuldades especificas (Ponte *et al.*, 2009).

Ainda segundo Ponte *et al.* (2009), "muitas das dificuldades dos alunos na resolução de equações surgem dos erros que cometem no trabalho com expressões algébricas, por não compreenderem o significado destas expressões ou as condições da sua equivalência" (p.96).

Carry *et al.* (1980), Hall (2002) e Kieran (1985,1992), são alguns dos autores que se destacam no estudo dos erros e das dificuldades mais comuns revelados pelos alunos na resolução de equações.

Hall (2002), durante a sua investigação, para além de ter detetado alguns tipos de erros já identificados na literatura, identificou novos tipos de erros.

Erros classificados como erros de *transposição*, *redistribuição* e *eliminação*, são os três tipos de erros detetados por Hall (2002) que já tinham sido analisados e estudados por Carry *et al.* (1980) e por Kieran (1992).

Segundo Carry *et al.* (1980) e Kieran (1992), o erro por *transposição* consiste em aplicar erradamente a regra "mudar de membro mudar de sinal". Por exemplo, os alunos julgam que a equação $x + 37 = 150$ tem a mesma solução que a equação $x = 37 + 150$ (Kieran, 1992). No estudo de Carry *et al.* (1980), $9x + 360 = 5x + 200 \Leftrightarrow 9x + 5x = 200 + 360$ e $12x - 24 = x - 12 \Leftrightarrow 12 + x = -24 - 12$ são dois dos erros, deste tipo, identificados pelos autores. Por sua vez, no seu estudo, Hall (2002) designa estes tipos de erros como "Addends Error", ou seja, erro por troca de membros.

O erro por *redistribuição*, segundo Hall (2002) e Kieran (1992), surge quando os alunos não aplicam a mesma operação em ambos os membros da equação. Por exemplo, faz com que os alunos considerem que a equação $5x + 2 = 6$ tem a mesma solução que a equação $5x + 2 - 2 = 6 + 2$ (Hall, 2002). Uma explicação dada por Hall (2002) para este tipo de erros, é a possível falta de compreensão dos alunos em perceber que é necessário realizar as mesmas operações em ambos os membros da equação.

Kieran (1992) menciona este tipo de erro através do exemplo em que a equação $x + 37 = 150$ é equivalente à equação $x + 37 - 10 = 150 + 10$. Segundo a autora, estes erros sugerem "que os alunos iniciantes em álgebra podem estar um pouco inseguros sobre as relações estruturais entre a adição e a subtração ou, pelo menos, inseguros das formas escritas dessas relações quando as formas escritas envolvem um termo literal" (p.402).

Os erros de *eliminação* traduzem outra dificuldade dos alunos na simplificação de expressões algébricas e na resolução de equações. Estes erros ocorrem quando os alunos confundem constantes e variáveis, operando o coeficiente da variável com a constante. Por exemplo, ao simplificarem a expressão $2yz - 2y$, alguns alunos obtêm como resultado z, ou ao simplificarem a expressão $39x - 4$ obtêm como resultado $35x$ (Kieran, 1992). Segundo esta autora, "alguns alunos veem as letras como rótulos de objetos concretos, simplificam as expressões algébricas de acordo com as regras da aritmética e, em seguida, acrescentam as letras" (p. 398).

No estudo realizado por Carry *et al.* (1980), verificou-se que este erro foi o mais comum dos erros cometidos pelos alunos na simplificação de expressões ao longo dos vários passos do processo de resolução de equações.

Hall (2002) categorizou ainda os seguintes erros: *a)* erros de *inversão*, *b)* erros de *exaustão*, *c)* erros por *omissão*, *d)* erros por *incapacidade de isolar a variável*, *e)* erros de *divisão*, *f)* erros de *linha numérica*.

a) Os erros de *inversão* refletem uma confusão gerada pela escolha da operação inversa adequada. Por exemplo, na equação $4x = 1$, os alunos em vez aplicarem a operação da divisão como inverso da operação da multiplicação, escolhem a operação de subtração, obtendo, deste modo, a equação $x = 1 - 4$. Por outro lado, os alunos, na equação $x + 4 = 1$, podem confundir-se e selecionar a operação de divisão como inversa da operação de adição, obtendo a equação $x = \frac{1}{4}$.

b) Os erros de *exaustão* são erros que ocorrem no final de uma tarefa, apesar de esses mesmos erros não terem sido cometidos no início da mesma, embora a oportunidade existisse. Hall (2002) apresenta como exemplo no seu estudo, a resolução $\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x+3}{x+2} = \frac{3}{2}$. Nesta resolução, o aluno poderia ter cometido o erro logo no início da expressão, “cortando o x^2” do numerador com o do denominador, em vez de efetuar o “corte do x” só no final.

c) Os erros por *omissão* acontecem, segundo o autor, quando um termo ao longo da resolução da equação é eliminado sem uma razão aparente.

d) Os erros por *incapacidade de isolar a variável*, acontecem quando os alunos, por exemplo, durante a resolução de uma equação chegam ao passo $3x = 10$ e terminam aqui a resolução. Segundo o autor, estes erros podem surgir da dificuldade de os alunos perceberem o que devem fazer para isolar a incógnita, ou seja, que não só podem adicionar e subtrair as mesmas quantidades a ambos os lados da equação, como também podem dividir. Uma segunda explicação para este tipo de erro, poderá ser a dificuldade que alguns alunos poderão ter em perceber que $3x$ significa ‘3 vezes x’. Esta incapacidade de identificar a operação de multiplicação, pode explicar o porquê de os alunos não efetuarem a operação inversa (divisão) em ambos os lados.

e) Os erros de *divisão* resultam da tentativa de os alunos ao tentarem isolar a incógnita, quando selecionam a operação de divisão como inversa da multiplicação, calcularem o quociente de forma incorreta, por exemplo, na equação $3x = 10$, os alunos em vez de obterem $x = \frac{10}{3}$, obtêm $x = \frac{3}{10}$.

f) Os erros *de linha numérica* são caraterizados por erros do género $-3 + 1 = -4$. Segundo o autor, uma das explicações para este tipo de erro, são as dificuldades que os alunos demonstram em efetuar operações que envolvam números racionais negativos.

Kieran (1985), também aborda o erro de *eliminação* no seu estudo, como o erro de *adição de termos não semelhantes*. Este erro é resultado do facto de os alunos adicionarem termos que não são semelhantes. Por exemplo, os alunos consideram que $2x + 5 = x + 8 \Leftrightarrow 7x = 9$. Além deste erro, Kieran (2006) também refere o erro de *adição incorreta de termos semelhantes*, em que os alunos adicionam incorretamente os coeficientes de termos semelhantes. Por exemplo da equação $-2x + 5x = 8$ resulta a equação $-7x = 8$.

Segundo Ponte *et al.* (2009), com a progressão na aprendizagem da resolução de equações do 1.º grau, a complexidade dos cálculos aritméticos vai aumentando, o que pode proporcionar dificuldades acrescidas, nomeadamente alterações nos coeficientes numéricos, a introdução de parênteses e expressões com denominadores, ou seja, dificuldades de natureza aritmética.

Carry *et al.* (1980), identificaram também erros de *execução* no seu estudo. Segundo os autores, estes erros resultam da execução incompleta de uma operação correta. Alguns dos erros identificados envolvem a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação. Por exemplo, os alunos, ao simplificarem as expressões, que pertencem às equações em estudo, $2(x + 1), 2(x + 2), -2(x + 1)$, obtêm, respetivamente, as expressões $2x + 1$, $2x + 2$, $-2x - 1$.

Num estudo realizado por Carabineiro (2012), sobre os erros e as dificuldades dos alunos na aprendizagem das equações numa turma do 7.º ano, a autora menciona que "os casos mais problemáticos foram sem dúvida aqueles com equações que envolviam expressões com parênteses" (p.59). De acordo com a autora, estas dificuldades dos alunos em relação à simplificação destas expressões transitam da Aritmética e estão relacionadas com a falta de domínio da propriedade distributiva da multiplicação.

Carabineiro (2012) expõe no seu estudo dois exemplos representativos de diversos outros que se inseriam neste tipo de erro. O primeiro exemplo, que representa a aplicação inadequada da propriedade, é referente à equação $2 + (x - 3) = 8$, em que o aluno demonstra intenção de aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação ao número 2. O segundo exemplo, está relacionado com a equação $2(3 - x) = 5 - 3(-x + 2)$, em que o aluno ignora os parênteses e trata cada termo como uma parcela de uma adição, passando os termos dependentes para o membro da esquerda e os independentes para o da direita, trocando-lhes o sinal (embora também se tenha enganado no sinal do termo +3 no 2.º membro), resultando a equação $-x + x = -2 + 5 + 2 + 3$.

Além destes erros, num estudo realizado por Silva (2012), sobre erros e dificuldades dos alunos na resolução de sistemas de duas equações do 1.º grau no 8.º ano, a investigadora detetou erros de *eliminação do sinal menos antes de frações* e *desembaraçar de denominadores,* na resolução das equações.

O erro de *eliminação do sinal menos antes de frações,* segundo Silva (2012), resulta da aplicação errada da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição ou à subtração. Os alunos consideram, por exemplo, que ao simplificarem a fração $-\frac{x+2}{3}$, obtém a expressão $-\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$.

Silva (2012), considera que o erro de *desembaraçar de denominadores* "ocorre quando os alunos pretendem simplificar equações em que precisam de reduzir todos os termos de uma equação ao mesmo denominador" (p.14). Segundo a autora, geralmente os alunos ou se esquecem de reduzir pelo menos um dos termos, como no caso da equação $2+\frac{2x+3}{2}=\frac{4}{3}$, em que os alunos obtêm a equação $2+6x+9=8$ ou simplesmente suprimem denominadores quando não o devem fazer, por exemplo, consideram que a equação $y=\frac{3}{2}-\frac{x}{2}$ é equivalente à equação $y=3-x$.

Kieran (1985) e Ponte *et al.* (2009), referem que alguns alunos não chegam exatamente a cometer erros na resolução de equações, pois a dificuldade é de tal ordem, que os alunos nem sequer percebem muito bem o que é uma equação e muito menos o que está envolvido na sua resolução.

2.6. Cargas emocionais provocadas pelo erro

Segundo Neves e Carvalho (2006), "já quase ninguém duvida que os aspetos afetivos desempenham um papel primordial no sucesso escolar dos alunos e, consequentemente, na aprendizagem de qualquer disciplina, nomeadamente na da Matemática" (p.201).

De acordo com Sousa (2019), os erros fazem parte do processo de qualquer tipo de aprendizagem e a sua correção "deve servir para orientar, aprimorar a aprendizagem, aguçar até a curiosidade pelo querer saber mais e não para perturbar, evidenciar as fraquezas ou destacar o insucesso" (p.8).

Na realização de uma tarefa, os alunos podem oscilar, alternadamente, ente emoções positivas (quando sentem que progrediram) e emoções negativas (quando sentem que bloquearam, ou cometeram um erro) (Neves & Carvalho, 2006). Contudo, os alunos não se devem sentir em perigo porque cometeram um erro ou por o professor ter reparado no mesmo. Pelo contrário, "os erros e as dificuldades dos alunos devem ser encarados por todos como algo natural, que pode servir de ponto de partida para novas aprendizagens"(Ponte & Serrazina, 2000, p.230).

O professor pode e deve fazer uso do erro transformando-o numa estratégia de ensino, podendo identificar as diversas formas de raciocínio que levaram os alunos a cometer o erro e consequentemente tentar corrigi-las (Correia, 2005). Porém, a maneira de corrigir requer um cuidado muito especial, pois corrigir pode significar retrair o aluno. O estado e fatores emocionais do aluno são aspetos importantes a ter em conta, uma correção ou chamada de atenção inapropriada pode causar uma baixa autoestima ao aluno. Portanto, o erro deve ser corrigido não no sentido de condenar, classificar, mas sim de ajudar o aluno a perceber o que falhou no seu raciocínio incentivando-o, motivando-o, facilitando a descoberta do caminho correto até ao erro (Correia, 2005).

Visto que não é possível excluir todos os fracassos/erros, quanto mais preparados os alunos estiverem para a sua ocorrência, menos interferência negativa esses fracassos/erros terão e, quando surgirem, serão de menor intensidade (Neves & Carvalho, 2006). A título de exemplo, Neves e Carvalho (2006), referem que "saber que durante a resolução de problemas podem ocorrer erros, prepara o aluno para encarar com naturalidade essa ocorrência, o que faz com que o aluno não se surpreenda e as consequências não sejam prejudiciais" (p.207).

Neves e Carvalho (2006) referem que a aversão dos alunos para a Matemática pode ser explicada pelo resultado de experiências infelizes pois as situações, pensamentos e ações de um indivíduo que dão origem a estados positivos, tendem a ser procurados e repetidos, por sua vez, aqueles que geram estados negativos tendem a ser evitados.

2.7. A utilização de applets na aprendizagem de equações

O recurso à balança de dois pratos é um modelo utilizado desde há muito tempo para o ensino dos princípios de equivalência e das regras práticas de resolução de equações. A utilização deste modelo "facilita a compreensão da operação eliminar o mesmo termo de ambos os membros e também a operação de multiplicar ambos os membros por um número positivo" (Ponte *et al.*, 2009, p.95).

Segundo Otten et al. (2019), existem vários tipos de modelos da balança: modelo físico, onde se recorre a uma balança de pratos real, modelo virtual, com recurso às tecnologias e modelo desenhado, onde se recorre a papel e material de escrita.

De forma a conseguir utilizar este recurso na intervenção pedagógica e como, segundo a DGE (2018), devem ser criadas condições de aprendizagem para que os alunos tenham oportunidade de utilizar tecnologia digital, nomeadamente aplicações interativas, programas computacionais específicos e calculadora, decidiu-se recorrer ao uso de aplicações interativas, nomeadamente as applets.

Segundo NCTM (2007), a tecnologia é essencial no ensino e aprendizagem da matemática e influencia a matemática que é ensinada. Referem ainda que "os professores deverão usar a tecnologia para melhorar as oportunidades de aprendizagem dos seus alunos, através da seleção ou da criação de tarefas matemáticas que tirem proveito do que a tecnologia permite fazer de forma correta e eficiente" (p. 27).

As applets são parte integrante da tecnologia, são pequenas aplicações digitais, normalmente dirigidas a tópicos específicos do currículo (Gandra *et al.*, 2016). Segundo Andrade (2014), estas aplicações estão disponíveis na Internet, como também podem ser criadas em linguagem Java para serem inseridos em páginas HTML e utilizados através de um browser. No entanto, E. Oliveira (2014) refere que embora se possa aceder às applets Java através da internet, estas requerem instalação prévia do Java no diapositivo.

Através das applets é possível recorrer a modelos de balanças virtuais. Otten *et al.* (2019), referem que a maioria destes recursos exibe uma escala de equilíbrio bastante semelhante aos modelos de equilíbrio físico, sendo que o ambiente digital apresenta mais possibilidades nas representações e funções do modelo. Segundo os autores citados anteriormente, estes modelos são principalmente dinâmicos, no sentido em que a balança se inclina em resposta às manipulações dos alunos e, dessa forma proporciona feedback em tempo real.

Figueiredo e Palha (2005) defendem que o uso das applets conquista mais benefícios pela interatividade possibilitada, o que pode tornar as atividades matemáticas mais estimulantes e diversificadas.

Existem applets direcionadas para o ensino e aprendizagem da Matemática que se podem encontrar em diversos sites, no entanto, deve-se sempre ter o cuidado de proceder a uma escolha criteriosa (E. Oliveira, 2014). Segundo a autora, a escolha das applets implica que se examine se as mesmas são adequadas aos conceitos e tópicos que se quer abordar e devem efetuar-se simulações de forma que se possa detetar possíveis erros nas mesmas.

As applets permitem novas abordagens e metodologias para o ensino de Matemática. Este tipo de recursos, em complementaridade com outras abordagens mais tradicionais, pode criar situações de aprendizagem mais ricas para a maioria dos alunos (Gandra *et al.*, 2016).

CAPÍTULO 3

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E ESTRATÉGIAS DE INTERVENÇÃO

Este capítulo contempla três secções: enquadramento contextual, plano geral de intervenção e estratégias de investigação e avaliação da ação. A primeira secção, enquadramento contextual, divide-se em duas subsecções, caraterização da escola e caraterização da turma onde foi realizada a intervenção pedagógica. A segunda secção contém duas subsecções, metodologia de ensino e aprendizagem adotada e planificação da intervenção pedagógica. Por fim, na última secção, apresentam-se as estratégias de investigação usadas durante este período e ainda um breve esclarecimento de como se desenvolverá a organização da análise de dados do capítulo seguinte.

3.1. ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL

3.1.1. Caraterização da Escola

A escola onde foi desenvolvida a intervenção pedagógica, construída em 1994, localiza-se no distrito, concelho e cidade de Braga e incorpora o 2.º e o 3.º ciclo do Ensino Básico. Esta escola pertence a um agrupamento de escolas que contempla doze estabelecimentos de educação e ensino: três jardins de infância, três escolas de 1.º ciclo, quatro escolas de 1.º ciclo com jardim infância, uma escola básica com 2.º e 3.º ciclos - onde decorreu a intervenção - e uma escola com 3.º ciclo e ensino secundário - escola sede.

O agrupamento abrange uma área territorial de cinco freguesias e/ou uniões de freguesias, num raio de aproximadamente seis quilómetros. Cerca de dois terços dos alunos do agrupamento encontram-se na escola onde decorreu a intervenção e na escola sede.

A escola a caraterizar possui dois pisos, dispostos em três alas separadas e ligadas por uma quarta. Os balneários constituem os anexos junto aos campos de jogos e existe um pavilhão gimnodesportivo inaugurado em 2004. O edifício central é rodeado de espaços abertos e de zonas ajardinadas, que têm sofrido excelentes melhorias, incluindo a criação de espaços de lazer.

Esta escola detém ainda as seguintes valências: vinte e uma salas de aulas normais, duas salas específicas, duas salas de projeto, uma sala de música, dois laboratórios de ciências experimentais, duas salas de desenho, duas salas de EVT, uma sala de estudo, uma sala de TIC, uma biblioteca, uma sala do aluno, um bar dos alunos, uma sala de professores com bar, um gabinete – serviço de psicologia e orientação, um gabinete médico, uma cantina, um estúdio de rádio e um gabinete da direção.

Ao nível de infraestruturas, todas as salas de aula da escola possuem computador e vídeo projetor, algumas delas possuem quadros interativos.

Na última avaliação externa, o agrupamento onde a escola está inserida obteve muito bom nos domínios Autoavaliação, Liderança e gestão e Prestação do serviço educativo e obteve bom no domínio Resultados. Verificou-se ainda que, relativamente à ação social escolar, 55% dos alunos da Escola Básica onde o projeto de intervenção foi implementado não beneficiam de auxílios económicos.

O agrupamento apresenta várias atividades e projetos que estão presentes no quotidiano educativo. Destes destacam-se as Olimpíadas Portuguesas da Matemática, Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, Canguru Matemático sem Fronteiras, Sala da Matemática (Jogos didáticos e exposições), Clube de Xadrez, Desporto Escolar (diversas modalidades), Rádio Escolar, Voluntariado (Banco Alimentar), Eco Escolas, Clube de Música, Clube de Artes Visuais, Oficina de Teatro, Projeto de Robótica, Programa Erasmus+, Projeto Maia, Concurso de Matemática Pangea, entre outras.

3.1.2. Caraterização dos alunos da Turma

O desenvolvimento da prática pedagógica incidiu numa turma de 7.° ano, composta por 20 alunos, dos quais 12 são do sexo feminino e 8 são do sexo masculino. Destes 20 alunos, existe um, do sexo masculino, que não frequenta as aulas de matemática, pois usufrui de medidas especiais de educação por ter espetro de autismo, por essa razão, não foi contabilizado para este estudo, ficando assim o número de alunos reduzido a 19. E ainda, destes, existe um aluno com necessidades educativas especiais e também um aluno a repetir o 7.° ano de escolaridade, sendo que os restantes nunca tiveram uma retenção. Em relação a estes dois alunos referidos anteriormente, por razões externas à escola, a assiduidade dos alunos durante o período de aulas à distância, que coincidiu com a minha intervenção pedagógica, foi muitíssimo reduzida, o que leva a que estes dois alunos também não sejam contabilizados neste estudo.

O número de alunos é então 17, dos quais 11 são do sexo feminino e 6 são do sexo masculino. As idades dos alunos, no início do 2.° período, variavam entre os 12 e os 13 anos, sendo que a média das mesmas ronda os 12 anos.

A nível do horário escolar, os alunos contavam com aulas de Matemática às segundas-feiras (90 min), às terças–feiras (45 min) e às quartas–feiras (90 min), sempre na parte da manhã.

A par do conhecimento de características da turma, foi importante conhecer o desempenho escolar dos alunos na disciplina de Matemática ao longo do ano letivo.

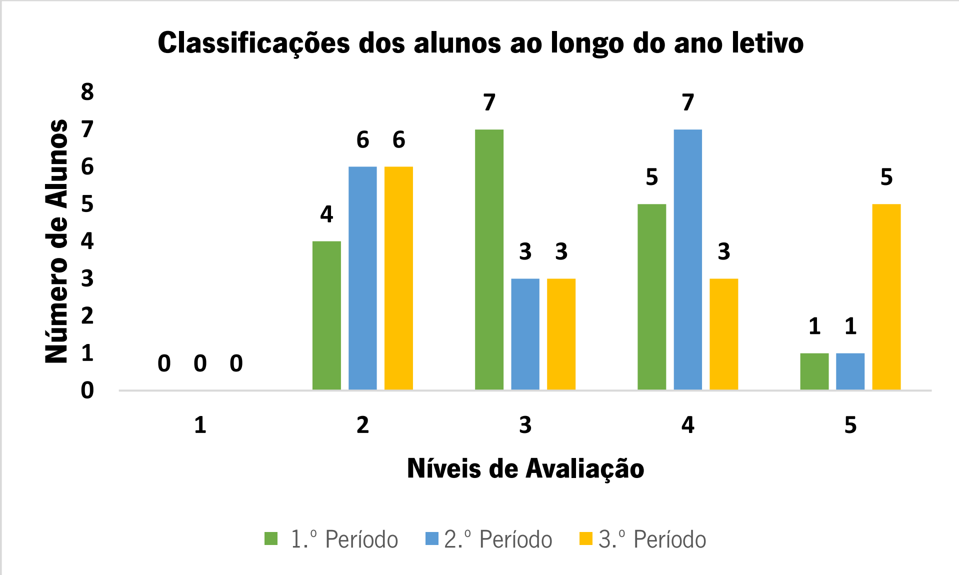


Figura 1: Classificações obtidas pelos alunos ao longo do ano letivo a Matemática

Da análise da Figura 1, consta-se que a turma apresenta características de uma turma heterogénea em relação à disciplina de matemática, visto que existem alunos com diferentes níveis de desempenho, uma vez que se trata de uma turma com aptidões e ritmos de aprendizagem distintos. Dos dados apresentados verifica-se ainda uma subida no 2.º período no nível 2, mantendo-se este nível no 3.º período, o que significa que os alunos com negativa não conseguiram recuperar a sua avaliação ao longo do ano letivo. Por conseguinte, esta subida no nível 2 fez com que houvesse uma descida no que respeita ao número de alunos no nível 3 no 2.º período, contudo, dessa diminuição, adveio também, uma subida no nível 4 no 2.º período. No 3.º período houve uma diminuição no nível 4, contudo esta diminuição é positiva, no sentido em que resultou num aumento do nível 5.

Através de um questionário (Anexo 1) realizado através da plataforma *GoogleForms*, no início do 2.º período, foi possível recolher mais dados sobre a turma. Relativamente ao gosto pela disciplina de Matemática, dez alunos (58,8%) responderam que gostam razoavelmente da disciplina, quatro (23,5%) gostam pouco e os restantes três (17,6%) gostam muito, como evidenciado na Figura 2.

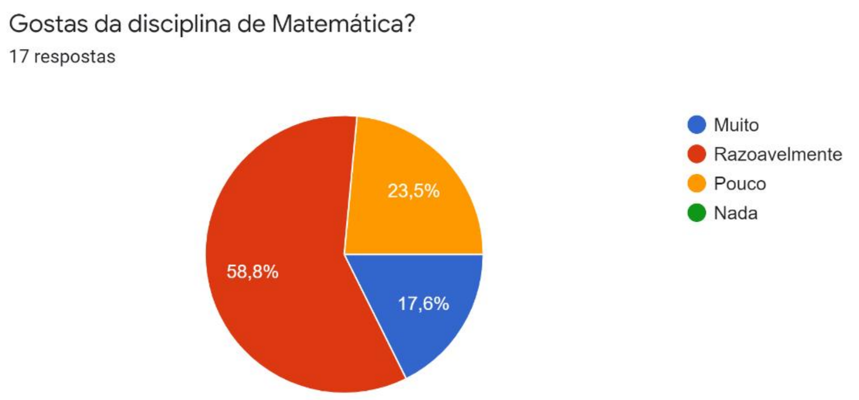


Figura 2: Gosto dos alunos em relação à disciplina de Matemática

Questionados sobre qual a disciplina que sentem mais e menos dificuldades, treze alunos, ou seja 76,5%, referiram a disciplina de Matemática como a disciplina a que mais sentem dificuldades e nenhum aluno referiu a disciplina de Matemática como a disciplina a que menos sente dificuldades.

Relativamente ao acompanhamento e tempo dedicado à disciplina de Matemática fora da sala de aula, dez alunos referiram que não têm apoio ao estudo. Dos sete alunos que referiram que tinham apoio, apenas um aluno detém nível 2 no aproveitamento escolar. Em relação ao tempo dedicado à disciplina durante a semana, este é muito oscilatório (Figura 3).

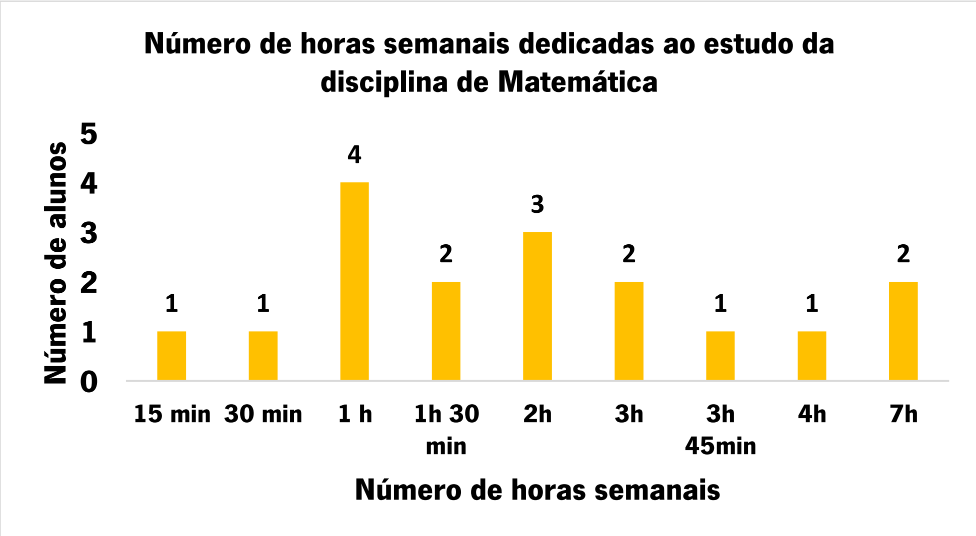


Figura 3: Número de horas semanais dedicadas ao estudo da disciplina de Matemática

Como o objetivo do projeto de intervenção é o aproveitamento dos erros dos alunos numa estratégia de ensino, considerei importante perceber qual a perceção dos alunos da turma sobre os erros por si cometidos na disciplina de matemática, ou seja, perceber como se sentem quando erram, se costumam identificar os erros e qual a forma como preferem lidar com estes.

Figura 4: Como costumam os alunos identificar os seus erros

Da análise da Figura 4, verifica-se que oito alunos (47,1%) referem que identificam os erros durante a resolução de uma tarefa, sete alunos (41,2%) referem que umas vezes se apercebem dos erros outras não, um aluno só se apercebe dos erros que comete quando alguém lho diz e apenas um aluno refere que consegue identificar o erro sozinho no final de uma tarefa.

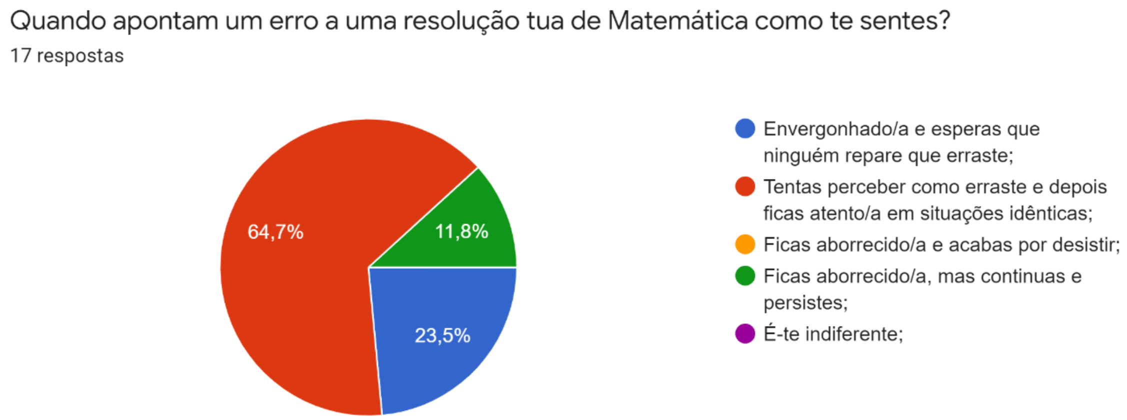


Figura 5: Sentimentos/atitudes dos alunos quando lhes apontam um erro

Em relação à forma como os alunos se sentem quando cometem um erro, verifica-se pela Figura 5 que 11 alunos (64,7%) encaram o erro de forma positiva, ou seja, tentam perceber onde erraram para depois ficarem atentos/as em situações idênticas. Dois alunos (11,8%) ficam aborrecidos por errarem, contudo, não desistem da tarefa, o que se pode considerar também positivo, uma vez que poderá ser um sinal de resiliência. Os restantes quatro alunos (23,5%) referem que se sentem envergonhados e esperam que ninguém repare que erraram.

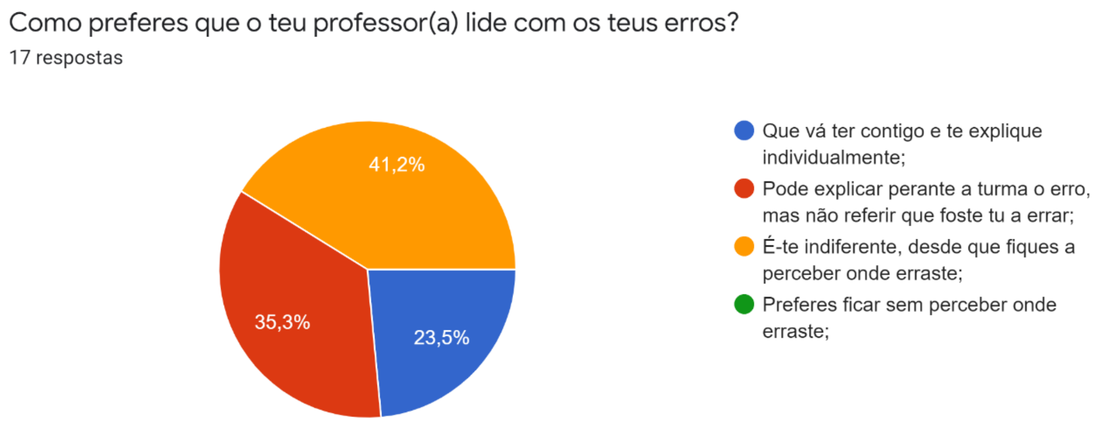


Figura 6: Preferência dos alunos em relação à forma como preferem que o professor lide com os seus erros

No que diz respeito à forma como os alunos preferem que os professores lidem com os erros, dos dezassete alunos em estudo, sete (41,2%) referem que lhes é indiferente, desde que fiquem a perceber onde erraram, seis (35,3%) consideram que o professor pode explicar o erro perante a turma desde que não refira quem o cometeu. Os restantes quatro alunos (23,5%), preferem que o professor vá ter com eles e lhes explique o erro individualmente. De salientar que nenhum aluno prefere ficar sem perceber os seus erros, o que demonstra que os consideram importantes para a aprendizagem.

3.2. PLANO GERAL DE INTERVENÇÃO

3.2.1. Metodologias de ensino e aprendizagem

As metodologias de ensino e de aprendizagem estabelecidas na implementação deste projeto são baseadas em práticas de ensino exploratório e, além disso, vão de encontro à pedagogia do erro mencionado por De la Torre (2004), ou seja, uma pedagogia que valoriza o que já foi alcançado e analisa, através do erro, o que ainda precisa de ser melhorado.

O ensino exploratório consiste em aplicar práticas onde a aprendizagem dos alunos decorre da possibilidade de trabalharem com tarefas ricas e de poderem partilhar as suas ideias com os colegas e com o professor (Canavarro *et al.*, 2012).

Neste seguimento, como introdução à resolução de equações, mais especificamente aos princípios de equivalência, foi realizada uma abordagem exploratória com recurso à balança de dois pratos. Uma das principais decisões que um professor toma durante a sua prática de ensino é a escolha de tarefas, sendo que o grau de desafio aumenta quando se está perante um ensino remoto, que adveio das restrições impostas pela pandemia Covid-19. A escolha de tarefas adequadas, com contextos atraentes e recursos apropriados, torna-se ainda mais pertinente para o envolvimento ativo dos alunos na aprendizagem.

Na impossibilidade de os alunos trabalharem e manusearem um modelo físico de uma balança de dois pratos, todas as abordagens realizadas foram feitas recorrendo a balanças virtuais, através da utilização de applets.

"A caraterística principal do ensino-aprendizagem exploratório, é que o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção de conhecimento para os alunos realizarem" (Ponte, 2005b, p.13). De modo a se conseguir implementar este método no ensino à distância e de rentabilizar o tempo da aula, as tarefas introdutórias para cada aula foram disponibilizadas aos alunos como trabalho de casa da aula anterior. No sentido de prevenir, controlar e orientar a participação dos alunos no decorrer das aulas, mais especificamente na fase de discussão e sintetização dos conteúdos, foi-lhes pedido que fotografassem as suas resoluções dos trabalhos de casa e depois enviassem para a *classroom* da turma.

Em relação à pedagogia do erro, e considerando tudo o que foi fundamentado ao longo do segundo capítulo, em relação a este tema, o erro faz parte de qualquer processo de ensino e aprendizagem e deve ser encarado como algo positivo que pode ser aproveitado para aprimorar a aprendizagem dos alunos.

Um dos objetivos estabelecidos para esta intervenção é que fossem os próprios alunos a detetar e corrigir os seus próprios erros, uma vez que "a ultrapassagem dos erros só pode ser feita por aqueles que os cometem, e não por aqueles que os assinalam, uma vez que as lógicas de funcionamento são diferentes" (Leal, 1992,p.51).

De forma a atingir esses objetivos, foi implementada uma estratégia didática que desse lugar ao erro na sala de aula, mais especificamente, que englobasse os erros cometidos pelos alunos. Essa estratégia foi realizada em três momentos, divididos em duas fases, em que a primeira foi aplicada em três aulas de 90 minutos e a segunda fase em três aulas de 45 minutos.

Na primeira fase, após a introdução dos conteúdos teóricos e da resolução e correção de algumas tarefas, ou seja, nos últimos 10/15 minutos das aulas, com o intuito de detetar os erros/dificuldades e as potencialidades dos alunos, estes resolveram, individualmente, uma tarefa que englobava três equações algébricas de 1.º grau, que depois de resolvidas, deviam ser fotografadas e enviadas para a *classroom* da turma.

Todas as resoluções enviadas pelos alunos foram analisadas, pois segundo Ramos e Curi (2014), um professor deve analisar cuidadosamente a produção escrita dos seus alunos de maneira a conseguir detetar e identificar os erros cometidos. Segundo os autores citados anteriormente, só desta forma é possível dar um tratamento didático ao erro, ou seja, usar o seu lado construtivo e criativo com o objetivo de minimizar as dificuldades.

Após a análise das produções dos alunos, foi construída, em conformidade com os erros detetados, uma nova tarefa que os englobasse. Nessa tarefa, que continha resoluções de equações mal resolvidas, era pedido aos alunos para detetarem e corrigirem os erros existentes. A tarefa foi sempre disponibilizada como trabalho de casa, sendo que na aula seguinte, e portanto, na segunda fase da estratégia didática, inicialmente era feita uma discussão e correção da tarefa e, de seguida, cada aluno corrigia a tarefa que realizou na primeira fase da estratégia e, no final enviava fotografia da sua correção.

Segundo Santos (2008), "dar a hipótese de ser o aluno a identificar os erros, ser ele próprio a corrigi-los e a chegar às respostas corretas são estratégias que favorecem uma aprendizagem que perdure ao longo do tempo"(p.25).

3.2.2. Planificação da intervenção pedagógica

A planificação de aulas é uma fase importante do processo de ensino, pois trata-se do momento em que o professor toma decisões sobre vários aspetos a considerar para que a aula decorra da melhor maneira possível (Superfine, 2008). Assim, este processo permite pensar previamente em todos os aspetos da aula, evitando imprevistos, antecipando possíveis dificuldades e ainda pensar em soluções para as combater.

Serrazina (2012) considera que esta fase preparatória ajuda a definir uma trajetória de aprendizagem, onde o professor começa por procurar respostas a certas questões tais como: Qual o objetivo da aula? Por onde começar? Qual o caminho a seguir? Onde se quer chegar?

"Quanto mais detalhado for o plano de aula, quanto mais pensado e refletido for o trabalho de preparação, maior capacidade terá o professor de ajustar esse plano em função dos acontecimentos e mesmo de improvisar" (Ponte *et al.*, 2015, p.34).

Na Tabela 1, apresenta-se a organização de toda a prática pedagógica, estando na primeira coluna a numeração da aula junto com a respetiva duração, na segunda a data em que a aula foi lecionada, e por fim uma coluna com o sumário da aula.

Tabela 1: Organização da intervenção pedagógica.

Aula	Data	Sumário
1 90 min	08/02/2021	Noção de equação. Membros e termos de uma equação. Incógnita. Termos dependentes e termos independentes.

2 45 min	09/02/2021	Correção do trabalho de casa. Resolução de uma Ficha da app Milage Aprender +.
3 90 min	10/02/2021	Correção do trabalho de casa. Raiz ou solução de uma equação. Equações equivalentes. Adição de termos semelhantes. Resolução de tarefas de consolidação.
4 90 min	15/02/2021	Correção do trabalho de casa. Resolução de uma ficha para consolidação dos conceitos de introdução às equações.
5 90 min (Anexo 2 e 3)	22/02/2021	Correção do trabalho de casa. Princípios de equivalência de equações. Resolução de equações aplicando os princípios de equivalência.
6 45 min (Anexo 4)	23/02/2021	Correção do trabalho de casa. Análise, identificação e correção de possíveis erros nas equações da aula anterior.
7 90 min (Anexo 5)	24/02/2021	Correção do trabalho de casa. Equações com parênteses. Resolução de equações com parênteses.
8 90 min	01/03/2021	Correção do trabalho de casa. Equação Linear. Classificação de equações. Resolução de tarefas de consolidação.
9 45 min (Anexo 6)	02/03/2021	Correção do trabalho de casa. Análise, identificação e correção de possíveis erros nas equações da aula do dia 24 de fevereiro.
10 90 min (Anexo 7)	15/03/2021	Correção do trabalho de casa. Equações com denominadores. Resolução de equações com denominadores.
11 45 min (Anexo 8)	16/03/2021	Correção do trabalho de casa. Análise, identificação e correção de possíveis erros nas equações da aula anterior.

O tema deste relatório de estágio é o erro na regulação da aprendizagem de equações no 7.º ano, especificamente na resolução de equações, deste modo, das onze aulas apresentadas na Tabela 1, só seis, ou seja, as que se encontram realçadas a verde e amarelo, é que fazem parte do objetivo deste estudo. As aulas realçadas a cor amarela são as aulas referentes à primeira fase da estratégia didática, que dá lugar ao erro na sala de aula, e as realçadas a cor verde, são as aulas referentes à segunda fase.

3.3. ESTRATÉGIAS DE INVESTIGAÇÃO E AVALIAÇÃO DA AÇÃO

3.3.1. Instrumentos de recolha de dados

Os métodos de recolha de dados são estratégias que permitem aos investigadores obter dados relevantes e convenientes que os ajudem a responder às questões que estabeleceram na sua investigação. Os dados daí resultantes devem ser analisados e interpretados de modo a poderem ser transformados em resultados e conclusões.

Segundo I. Vale (2004), "a recolha de dados é uma fase crucial em qualquer investigação, e há algumas técnicas e instrumentos que nos podem ajudar nessa recolha" (p.7). De entre a variedade de instrumentos e técnicas disponíveis para recolher e registar os dados, foram utilizados os seguintes: observação participante, questionários, produções dos alunos e meios audiovisuais, particularmente a gravação de áudio e vídeo.

Observação e Gravação de aulas

A maioria das aulas da intervenção pedagógica foram gravadas (áudio e vídeo) com o intuito de registar comentários, diálogos, ideias e, consequentemente, dificuldades e erros dos alunos que não fossem possíveis obter com as outras estratégias/instrumentos de recolha de dados, ou seja, estas gravações permitiram salvaguardar informações para serem utlizadas mais tarde.

Como toda a intervenção pedagógica coincidiu com o período de ensino à distância, foram utilizados dois computadores para lecionar as aulas. Um computador permitia a partilha de documentos com a turma, bem como a interação para com os alunos. Nesse computador foi colocada uma câmara não direcionada ao ecrã, pois embora todos os Encarregados de Educação tivessem autorizado a gravação das aulas (Anexo 9), um dos intervenientes pediu que não fosse filmado o rosto do seu educando.

O outro computador era utilizado na tentativa de se conseguir observar os alunos. Segundo Carmo e Ferreira (2008), é uma observação do tipo participante, pois o investigador desempenha papéis que o fazem, de algum modo, participar na vida da população observada. Embora, não tenha sido possível observar todos os alunos ao mesmo tempo, foi a solução encontrada dentro das circunstâncias disponíveis.

Questionários

Os questionários, segundo I. Vale (2004), são instrumentos estruturados que podem conter questões de resposta aberta e fechada, bastante úteis quando o investigador pretende formular as mesmas questões a um elevado número de pessoas.

Durante o projeto de intervenção pedagógica supervisionada, os questionários que foram implementados continham questões de resposta aberta e fechada, pois, embora os autores Carmo e

Ferreira (2008) refiram que uma forma de objetivar as respostas e de não permitir que estas sejam ambíguas é fechar as perguntas, também é importante que existam questões de resposta aberta para que os alunos possam expressar a sua opinião, sem que a mesma seja condicionada por um conjunto de opções. Deste modo, foram realizados dois questionários, um no início, através da plataforma *Google Forms*, e outro no final da intervenção pedagógica, presencialmente.

Os questionários tiveram diferentes propósitos, sendo o objetivo do primeiro (Anexo 1) caraterizar a turma e averiguar qual é a perceção dos alunos sobre os erros por si cometidos na disciplina de matemática e, o objetivo do segundo (Anexo 10) compreender as perceções dos alunos relativas aos erros por eles cometidos durante a resolução de equações, bem como, perceber o contributo do ensino ministrado.

Produções dos alunos

Segundo Máximo-Esteves (2008), "a análise dos artefactos produzidos pelas crianças é indispensável quando o foco da investigação se centra na aprendizagem dos alunos" (citado em Moreira, 2016, p.19).

Assim, e como um dos objetivos deste estudo passa por detetar erros/dificuldades, bem como as potencialidades, que os alunos revelam durante a aprendizagem do tema equações e perceber que ilações retiram dos erros que cometem na sua aprendizagem, foram "recolhidas" as resoluções dos alunos às várias tarefas propostas ao longo da intervenção. A recolha foi feita, como já foi referido, através de fotografias tiradas pelos próprios alunos, que depois foram enviadas para a plataforma *Google Classroom*.

3.3.2. Análise dos dados

Durante a intervenção pedagógica, foram recolhidos vários dados, nomeadamente a nível da resolução de equações, que é o foco deste estudo. A turma resolveu um total de 9 equações, individualmente, "dentro da sala de aula", que representa a primeira fase da estratégia didática que enfatiza o erro no processo de ensino e aprendizagem. Na segunda fase da estratégia, os alunos voltaram a analisar as suas equações, com o intuito de detetarem e corrigirem os seus próprios erros, ou seja, voltaram a reformular as suas equações resolvidas anteriormente, produzindo, deste modo, mais artefactos para analisar.

Como este trabalho tem uma dimensão limitada, seria impossível apresentar resultados da análise de todos os alunos. É, então, importante selecionar os alunos a considerar, de forma a ter uma análise mais diversificada e completa.

Assim, foi delineada uma estratégia para a análise de dados deste relatório, de forma a ser possível dar resposta às questões de investigação definidas. A apresentação de resultados, no próximo capítulo, será elaborada em três secções. Na primeira secção, serão apresentados todos os erros e dificuldades evidenciadas pelos alunos nas nove equações resolvidas na primeira fase da estratégia didática.

Na segunda secção, serão comparadas as primeiras resoluções dos alunos, resultantes da primeira fase da estratégia didática, com as resoluções da segunda fase. Esta comparação, tem como objetivo perceber qual foi o impacto do ensino centrado na exploração dos erros durante a aprendizagem. Nesta secção, devido à limitação do tamanho deste relatório, não serão comparadas as resoluções de todos os alunos da turma. Para a seleção de alunos, procurou-se que a escolha fosse o mais equilibrada possível dentro das circunstâncias disponíveis. A principal caraterística para essa seleção, foram os registos dos alunos que enviaram ou não, as resoluções das equações que lhes foram solicitadas, bem como a correção das mesmas depois de serem analisadas, como evidenciado na Tabela 2. Para não comprometer a identidade dos alunos, foi atribuído, a cada um, uma numeração do tipo Ax, sendo x um número natural entre um e dezassete.

Tabela 2: Registos de envios das produções dos alunos.

Alunos	**Género**	**Classificação 1º Período**	**1º momento**		**2º momento**		**3º momento**	
			1ª fase	**2ªfase**	**1ª fase**	**2ªfase**	**1ª fase**	**2ªfase**
A1	F	4	✓	✓	✓	✓	✓	✓
A2	F	4	✓	✓	✓	✓	✓	✓
A3	F	3	✓	✓	✓	✗	✓	✓
A4	F	4	✓	✓	✓	✓	✓	✓
A5	M	3	✓	✓	✓	✓	✓	✓
A6	M	2	✗	✗	✗	✗	✗	✗
A7	F	3	✓	✓	✓	✓	✓	✓
A8	F	2	✓	✗	✗	✗	✓	✗
A9	M	4	✓	✓	✓	✓	✓	✓

A10	M	3	✓	✗	✗	✗	✗	✗
A11	F	5	✓	✓	✓	✓	✓	✓
A12	F	4	✓	✓	✓	✓	✓	✓
A13	F	2	✓	✓	✓	✓	✓	✓
A14	F	3	✓	✓	✓	✓	✓	✓
A15	F	3	✓	✓	✓	✓	✓	✓
A16	M	2	✓	✗	✓	✗	✗	✗
A17	M	3	✓	✗	✓	✗	✗	✗

Para além da falta de envios fotográficos por parte dos alunos (como evidenciado na tabela anterior), e após uma análise superficial de todas as produções que foram enviadas, constatou-se que houve alunos que enviaram fotografias desfocadas, casos de alunos que enviaram fotografias de outras tarefas sem ser as solicitadas, alunos que quando enviavam a suposta correção das equações, as fotografias coincidiam exatamente com as enviadas anteriormente e casos de alunos que enviavam por exemplo, fotografia só de duas equações das três que foram pedidas em cada aula.

De entre os alunos que enviaram todas as resoluções solicitadas, e tentando fazer a melhor seleção dessas resoluções, o género dos alunos e o nível de desempenho em Matemática também contribuíram para a escolha. Desta forma, foram selecionados para análise, uma aluna de nível 2 (A13), um aluno de nível 3 (A5), um aluno de nível 4 (A9) e uma aluna de nível 5 (A11).

A última secção está reservada para as opiniões dos alunos, obtidas através do Questionário final (Anexo 10) que cada um preencheu. O intuito desta secção é perceber as perceções dos alunos relativamente ao contributo do ensino ministrado, bem como, perceber que ilações retiram os alunos dos erros que cometeram durante a aprendizagem.

CAPÍTULO 4

APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

Neste quarto capítulo, serão apresentados os resultados obtidos através da análise dos dados recolhidos ao longo da intervenção pedagógica. Assim, este estará dividido em três secções. Na primeira, serão apresentados os resultados da análise feita às resoluções das equações, pertencentes à primeira fase da estratégia didática que enfatiza o erro no processo de ensino e aprendizagem. Na segunda secção, constam os resultados da comparação das resoluções dos alunos, resultantes da primeira fase da estratégia didática, com as resoluções da segunda fase. Por fim, na última secção, averiguam-se as perceções dos alunos face às estratégias de ensino utilizadas e o contributo que as mesmas trouxeram para a aprendizagem.

4.1. Análise das resoluções referentes à primeira fase da estratégia didática

Nesta secção serão expostos e descritos os erros e as dificuldades evidenciadas ao longo da análise das resoluções dos alunos relativas à primeira fase da estratégia didática. Os exemplos selecionados tentam ser representativos de diversos outros que se inserem no mesmo tipo de erro.

A primeira fase da estratégia didática foi realizada em três aulas - aula 5, 7 e 10 - como foi referido anteriormente, na Tabela 1. Deste modo, serão apresentadas as análises às resoluções das aulas, na respetiva ordem.

AULA 5

A análise das respostas desta aula, resultou da seguinte tarefa:

Tarefa 2 Resolve as seguintes equações, em $\mathbb{Q}$.

a) $3x + 1 = 5x - 8$

b) $-8y - 1 = 1 - 7y - 2 - 5y$

c) $-12x - 5 - 7 = x - 4 + 3x$

Figura 7: Enunciado da tarefa 2 da aula 5.

Após a análise das resoluções às três equações referidas na Figura 7, foi possível identificar alguns erros comuns a vários alunos, bem como, detetar algumas dificuldades que possam estar por detrás dos mesmos.

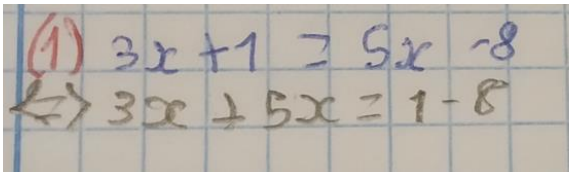


Figura 8: Parte da resolução da Aluna A3.

Pela observação de parte da resolução da aluna A3, é percetível que a aluna aplica incorretamente a regra "mudar de membro mudar de sinal", pois embora tenha isolado no primeiro membro os termos dependentes e no segundo os independentes, não lhes trocou o sinal ao mudarem de membro. Perante a literatura, Carry *et al.* (1980) e Kieran (1992), referem-se a este tipo de erro como erro por *transposição*, já Hall (2002) carateriza-o como erro por *troca de membros*.

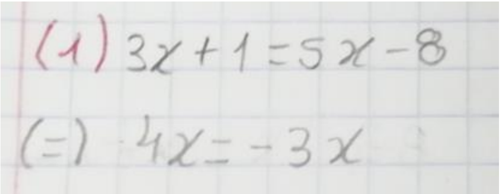


Figura 9: Parte da resolução da Aluna A14.

Um outro erro comum a alguns alunos, é caraterizado por Carry *et al.* (1980) e Kieran (1992) como sendo um erro de *eliminação,* também reconhecido por Kieran (1985) como erro de *adição de termos não semelhantes.* Como ilustrado na Figura 9, a aluna considerou que $3x + 1 = 4x$ e $5x - 8 = -3x$, ou seja, a aluna simplificou as expressões algébricas de cada membro da equação, de acordo com as regras da aritmética e, de seguida, acrescentou a variável.

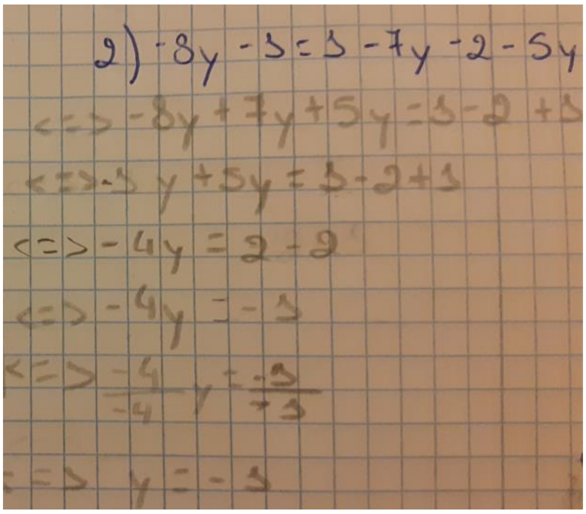


Figura 10: Resolução da Aluna A2.

Através da análise da Figura 10, é possível identificar três erros na resolução da aluna. Esta começa por colocar os termos dependentes no primeiro membro da equação e os independentes no segundo, tendo em atenção a regra prática da adição, em que se pode mudar um termo de um membro para o outro desde que se lhe seja trocado o sinal, contudo, na simplificação dos termos semelhantes de cada um dos membros, comete dois erros. Primeiramente, adiciona incorretamente os termos $-1y$ e $5y$, e também se engana na adição do termo 2 com o termo -2. Estes dois erros podem demonstrar dificuldades em efetuar operações que envolvam números racionais negativos, ou alguma falta de cuidado/atenção, com os sinais posicionais (negativo ou positivo) e os sinais operacionais (adição e subtração).

Estes dois tipos de erros já foram referidos à luz da literatura. O primeiro, foi referido por Kieran (2006), e é denominado por erro de *adição incorreta de termos semelhantes*. O segundo, foi intitulado por Hall (2002) como erro *de linha numérica*.

O terceiro erro detetado na resolução, encontra-se no quinto passo, onde a aluna não aplica corretamente o princípio de equivalência da multiplicação, dividindo o primeiro membro por -4 e o segundo por -1.

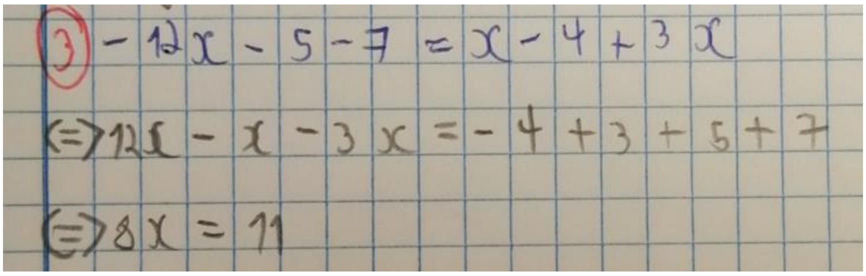


Figura 11: Resolução do Aluno A9.

Na resolução do aluno A9, verifica-se que o aluno no primeiro passo se esquece do sinal negativo do termo $-12x$. Este erro pode ser considerado um erro por *omissão,* já categorizado por Hall (2002) na literatura. Ainda no passo referido anteriormente, no segundo membro, o aluno acrescenta o termo $+3$, sem o mesmo fazer parte desta equação. Este acrescento pode ser explicado pelo facto de o aluno considerar o termo $3x$ como uma parcela da adição $(3 + x)$, ou simplesmente, pode ter adicionado por distração.

A resolução do aluno A9 termina no passo $8x = 11$, ou seja, não descobriu o valor da incógnita e não resolveu totalmente a equação. Hall (2002), carateriza esta dificuldade como sendo um erro por *incapacidade de isolar a variável* e segundo o autor, estes erros podem surgir da dificuldade de os alunos perceberem o que devem fazer para isolar a incógnita.

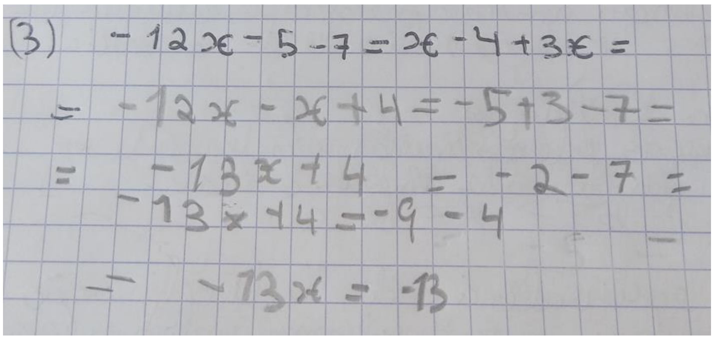


Figura 12: Resolução da aluna A12.

A resolução da aluna A12 (Figura 12) evidencia alguns erros, começando por uma incorreta transposição dos termos -5 e -7 para o segundo membro (erro *por troca de membros*) e, pelo esquecimento da variável x do termo $3x$ (erro por *omissão*). Posteriormente, depois de simplificar corretamente ambos os membros da equação, consoante os erros cometidos anteriormente, percebe-se que a intenção da aluna é transpor o termo $+4$ para o segundo membro, só que, ao mesmo tempo que o transpõe, esquece-se de o retirar do primeiro membro, fazendo-o depois no último passo. Em algumas das resoluções analisadas, tal como aconteceu com a da Figura 12, foi visível a falta da colocação do símbolo ⇔ sempre que os alunos efetuam um novo passo na simplificação da equação. A aluna A12 colocou uma "cadeia" de sinais de igualdade, evidenciando dificuldades em lidar com a linguagem algébrica, como o uso do símbolo de equivalência.

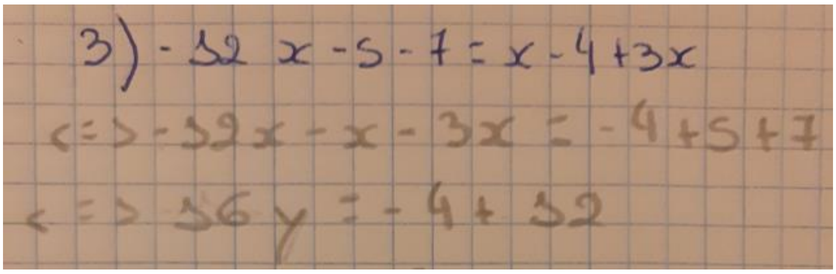


Figura 13: Parte da resolução da Aluna A2.

Um outro aspeto identificado, que embora só tenha ocorrido em duas resoluções, foi a troca da incógnita presente na equação ao longo da resolução. Mediante a Figura 13, é possível observar que a incógnita da equação é x e, no segundo passo da resolução, passa a ser y. Para além deste erro a aluna ao simplificar o primeiro membro ($-12x - x - 3x$) esqueceu-se do sinal negativo antes do $16y$.

AULA 7

A análise das respostas desta aula, resultou da seguinte tarefa:

Tarefa 2 Resolve as seguintes equações, em $\mathbb{Q}$.

a) $-3x + 2(x-1) = -2 - 2(x-4) + 2x$

b) $x - 3(x-2) - (2x-6) = 0$

c) $1 - 2(3-x) + 2x = -(x-1) + 4x$

Figura 14: Enunciado da tarefa 2 da aula 7.

Da análise das resoluções dos alunos provenientes desta aula foi possível identificar erros que já foram descritos anteriormente, durante a análise da aula 5, e, por isso mesmo, da exploração feita às resoluções desta aula, só serão ilustrados os novos tipos de erros observados.

Um aspeto que se verificou frequentemente ao longo destas resoluções está relacionado com dificuldades em desembaraçar expressões de parênteses. Seguidamente mostram-se alguns exemplos presentes em resoluções onde são evidentes as dificuldades nestas expressões, como por exemplo, o esquecimento dos parênteses e aplicação inadequada da propriedade distributiva da multiplicação.

Estes tipos de erros vão de encontro aos erros de *execução* referidos por Carry *et al.* (1980), ou seja, erros que resultam da execução incompleta de uma operação correta, como é o caso da propriedade distributiva da multiplicação.

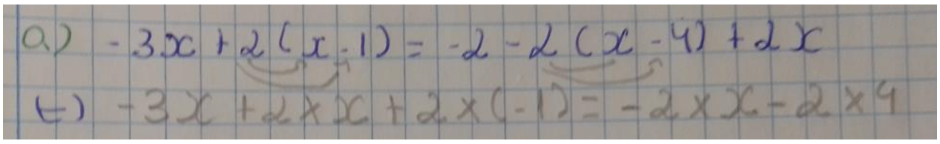


Figura 15: Parte da resolução da Aluna A1.

Através da Figura 15, é possível observar que a aluna cometeu um erro de *execução* ao tentar aplicar a propriedade distributiva da multiplicação para desembaraçar a equação de parênteses, no segundo membro da equação. A aluna em vez de multiplicar -2 por -4, multiplicou por 4 não tendo em atenção o sinal negativo. Além deste erro, a aluna também cometeu dois erros de *omissão*, com o desaparecimento do termo -2 e $+2x$ do segundo membro.

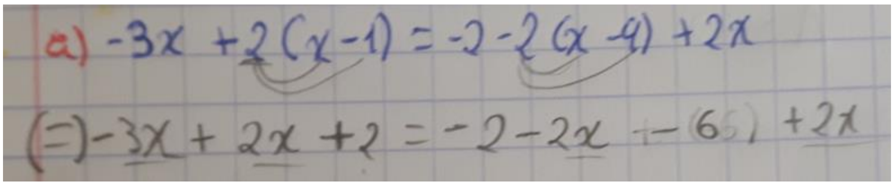


Figura 16: Parte da resolução da Aluna A4.

A aluna A4 também cometeu dois erros de *execução* ao aplicar a propriedade distributiva da multiplicação. No primeiro membro, o erro é idêntico ao da Aluna A1 referido anteriormente, em vez de multiplicar o número 2 por -1, multiplicou por 1. No segundo membro, ao aplicar novamente a propriedade, volta a cometer mais um erro, em vez de multiplicar -2 por -4, adicionou o -2 com o -4, resultando o -6.

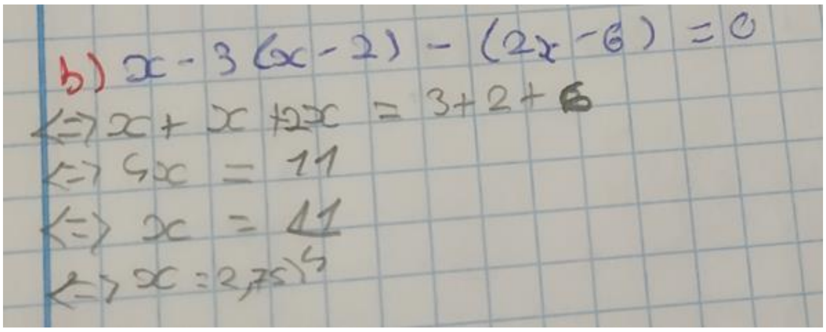


Figura 17: Resolução da Aluna A3.

Na equação proposta da Figura 17, a aluna não reconhece a propriedade distributiva da multiplicação e ignora os parênteses, tratando cada termo como a parcela de uma adição, passando os termos com incógnita para o primeiro membro e os termos independentes para o segundo membro, trocando-lhes o sinal.

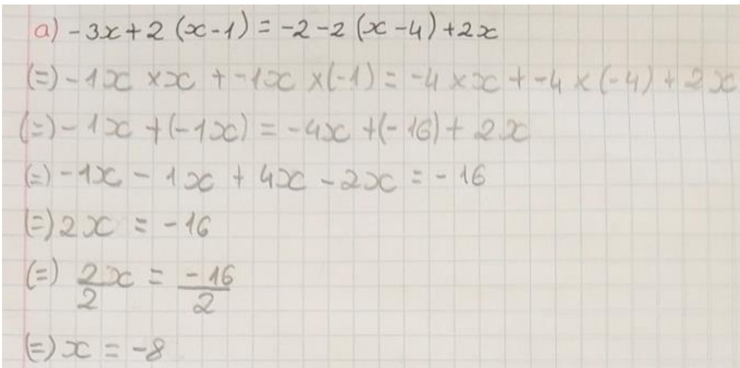


Figura 18: Resolução da Aluna A15.

A aluna A15 não reconhece a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração, como tal não encara o 2 como estando a multiplicar pelo que está entre parêntesis e, perante o sinal "+" adiciona-o a $-3x$, acabando por adicionar termos que não são semelhantes ao considerar que $-3x + 2 = -1x$ e, só depois é que aplica a propriedade distributiva da multiplicação. No segundo membro, a aluna procedeu da mesma forma, adicionando -2 com -2, resultando -4 e depois aplicando novamente a propriedade distributiva da multiplicação.

No segundo passo da resolução, a aluna não simplifica corretamente cada um dos membros da equação. No primeiro membro, devido ao erro cometido no primeiro passo, a aluna considerou que $-1x \times x = -1x$, e que $-1x \times (-1) = -1x$. No segundo membro, cometeu outro erro de cálculo (erro *de linha numérica*), considerando que $-4 \times (-4) = -16$.

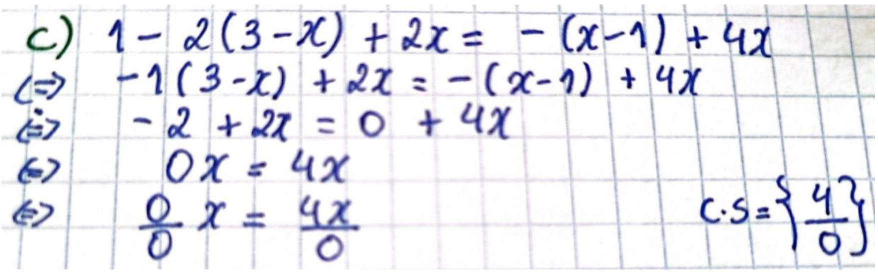


Figura 19: Transcrição da resolução da Aluna A7.

Através da Figura 19, é possível observar um erro idêntico ao referido anteriormente, logo no primeiro passo da resolução. No primeiro membro da equação, a aluna adicionou os termos 1 e -2, pensando, erradamente, que -2 é um termo da equação. De seguida, do primeiro para o segundo passo, não é muito percetível o raciocínio da aluna, sendo que da análise da sua resolução, se entende que esta considerou que $-1(3-x)$ fosse igual a -2, ou seja, talvez terá adicionado os termos não semelhantes 3 e $-x$, obtendo como resultado 2, que depois multiplicou por -1 obtendo -2. No segundo membro, do que se entende da resolução, a aluna considerou que $-(x-1)$ é igual a zero, supõem-se que tenha novamente adicionando termos que não são semelhantes, considerando que $x - 1 = 0$.

Do segundo para o terceiro passo, a aluna volta novamente a adicionar termos não semelhantes, considerando que $-2 + 2x = 0x$ e, por fim aplica o princípio de equivalência da multiplicação de forma incorreta, dividindo ambos os membros por zero.

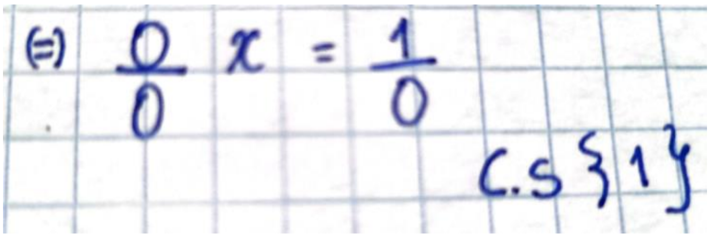


Figura 20: Transcrição de parte da resolução do Aluno A5.

Tal como ocorreu no final da resolução da aluna A7, na Figura 19, o aluno A5 também aplica incorretamente o princípio da equivalência da multiplicação ao dividir ambos os membros da equação por zero. No final, o aluno cometeu um erro que se enquadra nos erros de *divisão*, caraterizados por Hall (2002), ao concluir que $\frac{1}{0} = 1$, possivelmente esquecido de que a divisão por zero é impossível. Por exemplo, neste último caso, não se pode dividir 1 por 0, visto que nenhum número multiplicado por 0 dá 1.

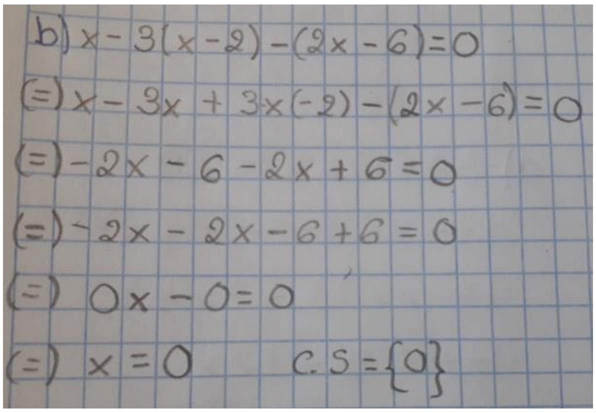


Figura 21: Resolução da Aluna A14.

Perante o exposto na Figura 21, é visível que a aluna comete um erro ao aplicar a propriedade distributiva da multiplicação a $-3(x-2)$. Contudo, esse erro já foi referido anteriormente, sendo que o erro que suscitou interesse na escolha desta resolução se encontra no penúltimo passo, quando a aluna considera erradamente que $-2x - 2x = 0x$ e, no passo seguinte, o que transparece ao analisar a resolução da aluna é que ela considera que $0x = x$, pensando que sendo o zero o elemento nulo, ele simplesmente desaparece.

AULA 10

A análise das respostas desta aula, resultou da seguinte tarefa:

Tarefa 2 Resolve as seguintes equações, em $\mathbb{Q}$.

a) $\frac{2}{5} - 3x = \frac{12}{5}$

b) $\frac{x-1}{2} = \frac{x}{3} - (x-3)$

c) $\frac{2(x-1)}{3} = \frac{3}{2} - \frac{x+1}{6}$

Figura 22: Enunciado da tarefa 2 da aula 10.

Mais uma vez, da análise dos erros provenientes desta aula, só serão expostos erros que ainda não foram enumerados anteriormente.

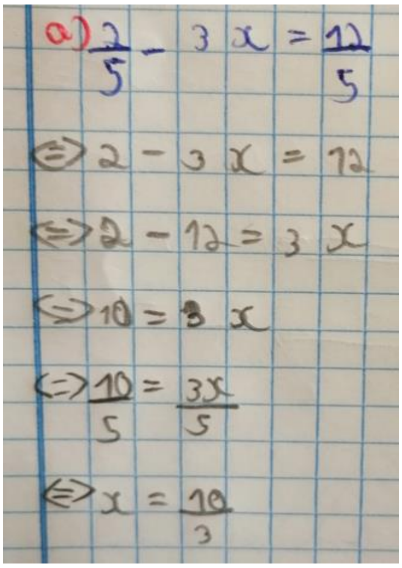


Figura 23: Resolução do Aluno A9.

Na resolução apresentada pelo aluno A9, na Figura 23, observamos que, o aluno elimina incorretamente os denominadores e começa a resolver a equação proposta. Este erro enquadra-se na definição dada por Silva (2012), relativamente ao erro de *desembaraçar de denominadores.*

Perante o erro cometido, o aluno desenvolve corretamente a resolução da equação até ao passo $10 = 3x$, sendo que nos passos seguintes não se percebe muito bem o que o aluno tenta aplicar. O que ocorre ao analisar a resolução, é que o aluno, por distração, tenha pensado em dividir ambos os membros da equação por três, mas tenha escrito cinco, pois no passo seguinte conclui que $x = \frac{10}{3}$.

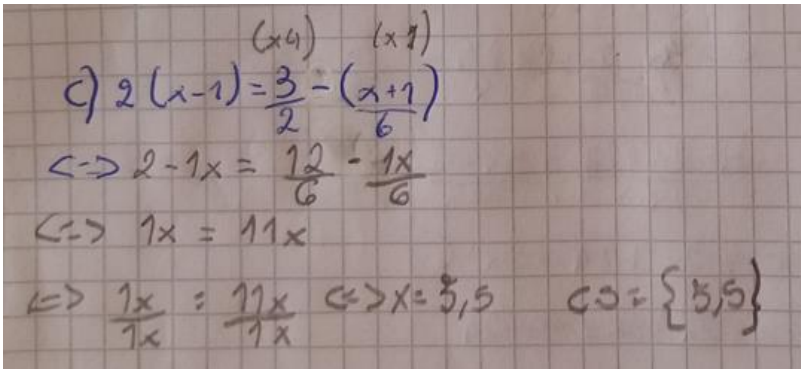


Figura 24: Resolução da Aluna A13.

Através da Figura 24, para além de se poder observar que a aluna se enganou a passar o enunciado desta alínea, podemos identificar mais um erro referido por Silva (2012), como sendo um erro de *desembaraçar de denominadores*, onde a aluna só reduz os termos do segundo membro ao mesmo denominador. Para além do erro referido anteriormente, a análise da resolução dá a entender que no primeiro passo, a aluna não reconhece a propriedade distributiva da multiplicação, pensando que

$2(x-1) = 2 + (x+1)$ e adiciona os termos não semelhantes que se encontram dentro de parênteses, considerando que $x - 1 = -1x$ e no segundo membro $x + 1 = 1x$.

No passo seguinte, para além de a aluna eliminar os denominadores sem o poder fazer, volta novamente a adicionar termos não semelhantes, obtendo $2 - 1x = 1x$ e $12 - 1x = 11x$. Seguidamente, do que transparece da resolução, a aluna depois de chegar ao passo $1x = 11x$, consoante os erros cometidos anteriormente, em vez de colocar os termos dependentes num dos membros da equação, pensa-se que na tentativa de isolar a variável, a aluna em vez de dividir ambos os membros pelo coeficiente do termo dependente do primeiro membro, dividiu pelo termo $1x$. O último passo da aluna, tal como a sua resolução, não faz muito sentido, pois considerou $\frac{1x}{1x} = x$ e $\frac{11x}{1x} = 5{,}5$.

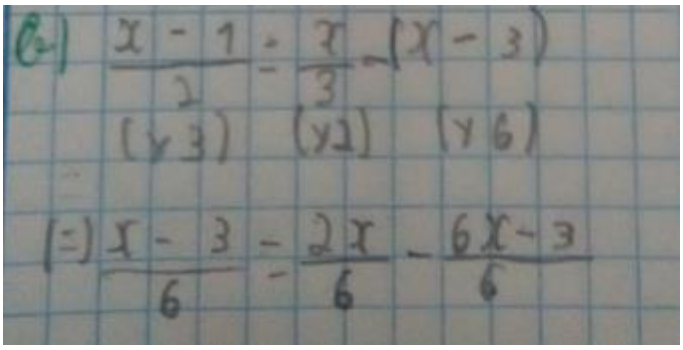


Figura 25: Parte da resolução do Aluno A5.

Por observação da Figura 25, é percetível a intenção do aluno, no primeiro passo, em reduzir todos os termos da equação ao mesmo denominador, mesmo não o tendo feito corretamente, visto que não multiplicou todos os termos do numerador pelo número que indicou.

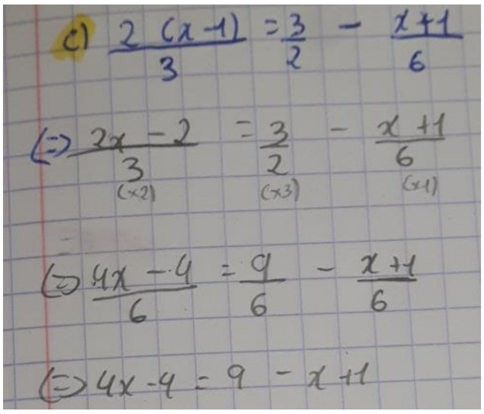


Figura 26: Parte da resolução da Aluna A4.

Um outro erro comum a alguns alunos, é caraterizado por Silva (2012) como sendo um erro de *eliminação do sinal menos antes de frações.* Este erro está retratado na Figura 26, quando a aluna, ao eliminar os denominadores considera que $-\frac{x+1}{6} = -x + 1$ e não tem atenção ao facto de um sinal negativo antes de uma fração afetar todos os termos do numerador.

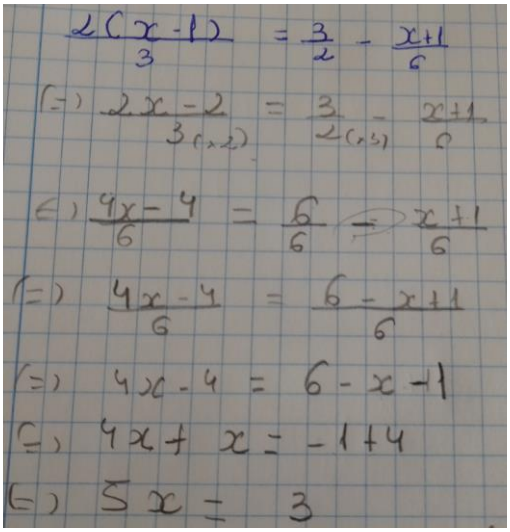


Figura 27: Parte da resolução da Aluna A1.

Pela análise da Figura 27, é notório que a Aluna A1 compreendeu como deve proceder na resolução de uma equação que envolva parênteses e denominadores, primeiro começou por desembaraçar a equação de parênteses e, só de seguida, é que reduziu todos os termos da equação ao mesmo denominador. Foi neste segundo passo referido anteriormente, que a aluna cometeu o seu primeiro erro, ao reduzir o termo $\frac{3}{2}$ para denominador 6, a aluna ao multiplicar o numerador por 3, cometeu um erro de cálculo, ao considerar que $3 \times 3 = 6$. Seguidamente a aluna rodeia o sinal menos antes da fração, o que demonstra, pela análise feita à sua resolução, que sabe que o sinal vai ter influência no passo seguinte, contudo a aluna acaba por cometer o erro de *eliminação do sinal menos antes de frações*, acabando no passo seguinte por identificar o erro.

Na figura 28, encontra-se um caso de uma aluna que comete erros, mas consegue chegar à solução correta da equação. A aluna começa por realizar dois passos de uma só vez, aplica a propriedade distributiva da multiplicação e reduz todos os termos ao mesmo denominador, cometendo deste modo, o seu primeiro erro quando realiza a operação -3×6 e considera como resultado $+18$. De seguida, a aluna comete o seu segundo erro, que lhe permitiu dar a volta ao erro cometido anteriormente, ao realizar um erro de *eliminação do sinal menos antes de frações* quando elimina os denominadores de todos os termos da equação, ou seja, a aluna não teve atenção ao facto de que o sinal negativo antes de uma fração afeta todos os termos do numerador.

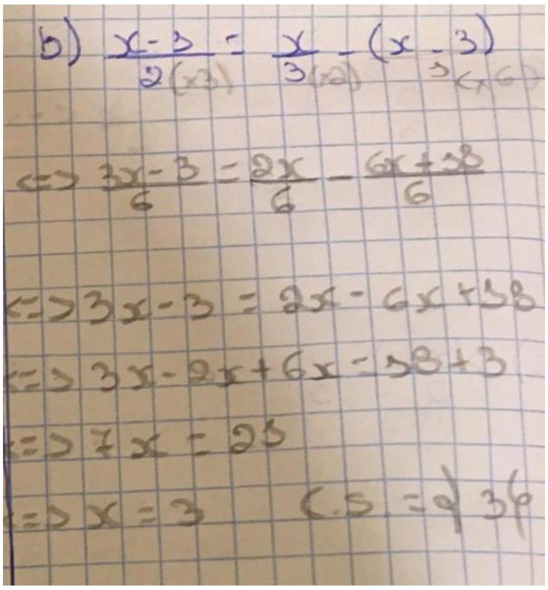


Figura 28: Resolução da Aluna A2.

4.2. Comparação das resoluções dos alunos (1ª fase vs. 2ª fase)

O objetivo deste trabalho é, como já foi referido em outros momentos, o aproveitamento dos erros dos alunos numa estratégia de ensino, estratégia essa que pretende que sejam os alunos a detetar e corrigir os seus próprios erros. Assim, nesta secção constam os resultados da comparação das resoluções dos alunos, resultantes da primeira fase da estratégia didática, que enfatiza o erro no processo de ensino e aprendizagem, com as resoluções da segunda fase.

Como já foi referido na secção 3.3.2., só irão ser apresentados os resultados relativos aos alunos A5, A9, A11 e A13. De forma a organizar a apresentação dos resultados, a análise será feita por aluno, ou seja, primeiro serão comparadas as resoluções da Aluna A13, depois do Aluna A5, e assim sucessivamente, conforme a ordem crescente do nível de desempenho escolar dos alunos na disciplina de Matemática.

Comparação das resoluções da Aluna A13

Resolução da tarefa 2 da aula 5 vs. Reformulação/correção da mesma tarefa na aula 6

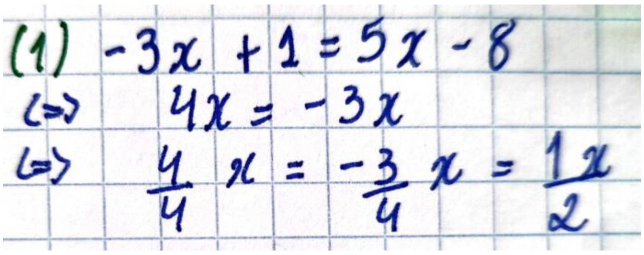


Figura 29: Transcrição da resolução da Aluna A13 à alínea a) da aula 5.

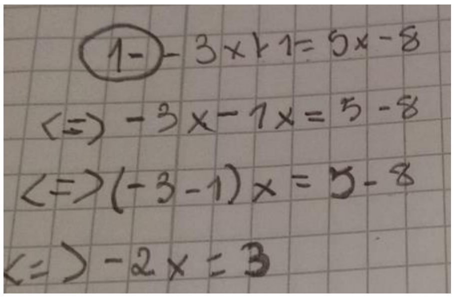


Figura 30: Retificação da Aluna A13 à alínea a) da aula 6.

Perante o exposto na Figura 29, observa-se que a aluna comete o seu primeiro erro ao adicionar, no primeiro e segundo membro, termos que não são semelhantes. Seguidamente, pelo que transparece da resolução, parece que a aluna terá dividido ambos os membros por 4, de forma a isolar a incógnita x no primeiro membro. Por fim, a aluna termina a resolução considerando que $-\frac{3}{4}x = \frac{1x}{2}$, o que, através da análise da figura, não é possível encontrar uma explicação para o valor obtido.

Na retificação da resolução (Figura 30), é possível observar que a aluna continua com bastantes dificuldades em resolver a equação. No seu primeiro passo, é bastante complicado ter perceção de como a aluna terá pensado para obter aqueles valores. Seguidamente, é evidente a intenção da aluna em adicionar os termos $-3x$ e $-1x$, adicionando os coeficientes de ambos os termos e mantendo a variável, contudo comete um erro de *linha numérica,* pois considera que $-3-1=-2$. No segundo membro, comete, novamente, um erro de *linha numérica*, pois obteve 3 como resultado da adição de 5 com -8. A aluna comete um novo erro, ao terminar a resolução no passo $-2x=3$, cometendo desta forma, um erro por *incapacidade de isolar a variável.*

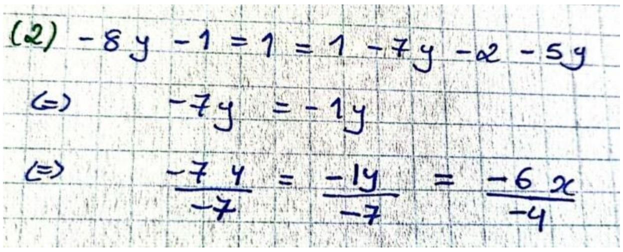


Figura 31: Transcrição da resolução da Aluna A13 à alínea b) da aula 5.

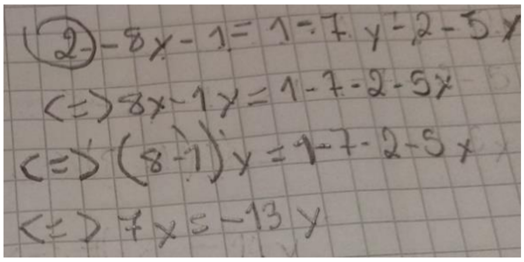


Figura 32: Retificação da Aluna A13 à alínea b) da aula 6.

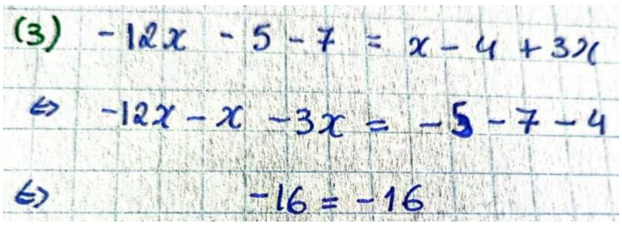


Figura 33: Transcrição da resolução da Aluna A13 à alínea c) da aula 5.

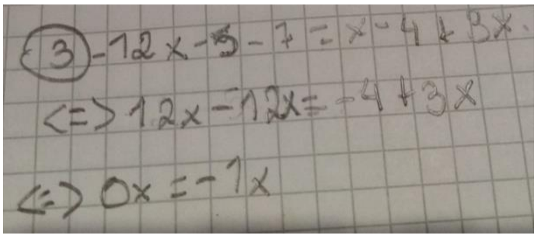


Figura 34: Retificação da Aluna A13 à alínea c) da aula 6.

Através da Figura 31 e 32, pode-se observar a resolução e a retificação da alínea b) da Aluna A13. Após análise das mesmas, é dificultoso perceber os passos executados pela aluna.

Como já foi mencionado no capítulo 2, Kieran (1985) e Ponte *et al.* (2009), referem que alguns alunos não chegam exatamente a cometer erros na resolução de equações, pois, a dificuldade é de tal ordem, que os alunos nem sequer percebem muito bem o que é uma equação e muito menos o que está envolvido na sua resolução. Desta forma, considera-se que a Aluna A13, está inserida nesse leque de alunos, visto que transparece das suas resoluções a falta de compreensão do que a própria está a executar.

A resolução da alínea c) (Figura 33) é, das resoluções todas apresentadas pela aluna nesta aula, a que melhor se percebe, e a que poderá evidenciar que a aluna possa ter percebido algo sobre estes conteúdos. Percebe-se que a intenção da aluna é colocar os termos dependentes no primeiro membro e os independentes no segundo, contudo, comete erros de *transposição /troca de membros*, pois não troca o sinal aos termos ao transpô-los para outro membro. Seguidamente, parece que a aluna terá simplificado os termos semelhantes em cada membro da equação, esquecendo-se da incógnita x no primeiro membro. Do pouco que se percebeu da resolução da Aluna A13 na Figura 33, esta teve uma evolução negativa na retificação da mesma na Figura 34. A aluna consegue cometer ainda mais erros do que na primeira fase da resolução, evidenciando novamente que não conseguiu superar as suas dificuldades.

Resolução da tarefa 2 da aula 7 vs. Reformulação/correção da mesma tarefa na aula 9

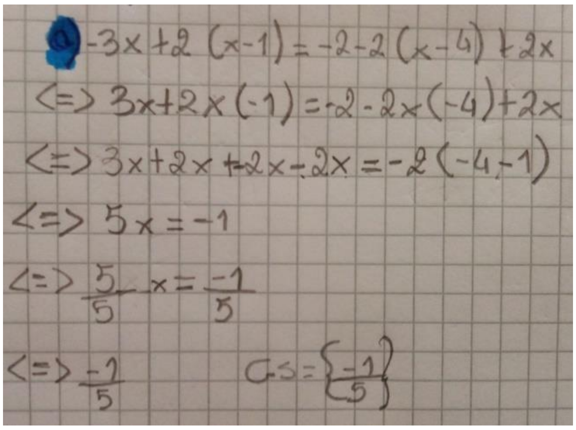


Figura 35: Resolução da Aluna A13 à alínea a) da aula 7.

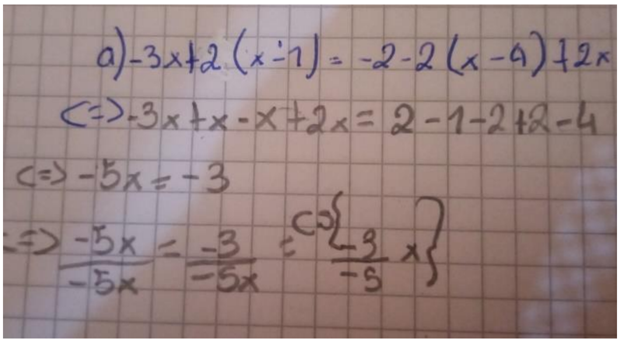


Figura 36: Retificação da Aluna A13 à alínea a) da aula 9.

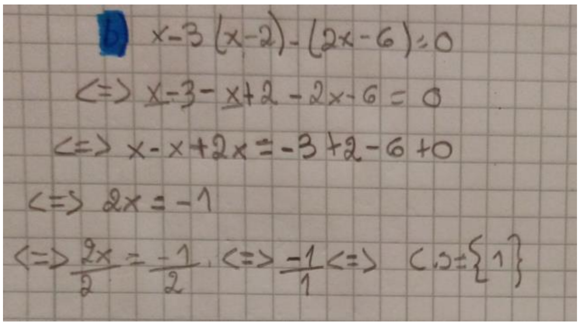


Figura 37: Resolução da Aluna A13 à alínea b) da aula 7.

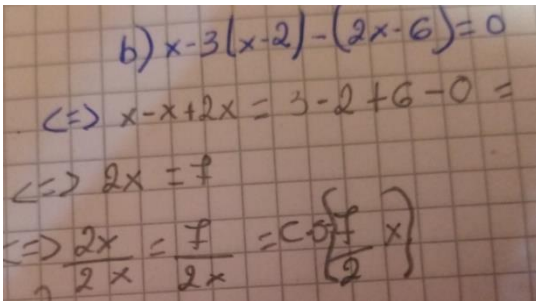


Figura 38: Retificação da Aluna A13 à alínea b) da aula 9.

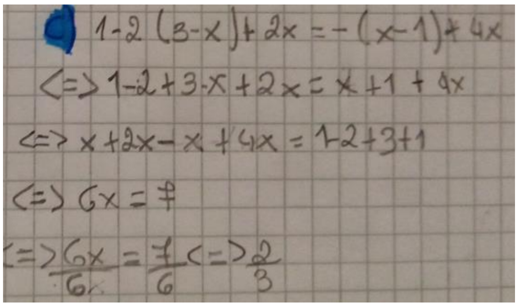


Figura 39: Resolução da Aluna A13 à alínea c) da aula 7.

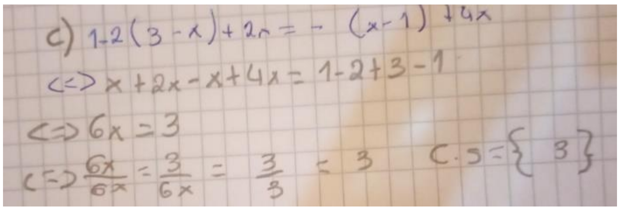


Figura 40: Retificação da Aluna A13 à alínea c) da aula 9.

Recordando Ponte *et al.* (2009), a aprendizagem de equações do 1.º grau envolve níveis sucessivos de complexidade, onde cada nível envolve as suas dificuldades especificas. Ora, como se pode comprovar pela análise das resoluções nas aulas 5 e 6, é notório que a Aluna A13 não compreendeu como se resolvem as equações mais simples (sem parênteses e sem denominadores), o que provocou dificuldades acrescidas na resolução de equações com parênteses.

Destacando primeiramente as Figuras 35, 37 e 39, que representam as resoluções da primeira fase na aula 7, é possível observar que a aluna não reconhece a propriedade distributiva da multiplicação, sendo até bastante complicado perceber alguns dos passos executados pela mesma. Da análise feita, considera-se que as dificuldades da aluna são tão elevadas, que os passos executados pela mesma foram pouco pensados e feitos com apenas o objetivo de entregar as equações concluídas. Referindo agora, as Figuras 36, 38 e 40, que representam as resoluções da segunda fase na aula 9, pode constatar-se que a aluna continuou com as mesmas dificuldades, continuando a ser bastante complicado perceber os passos executados pela mesma.

Resolução da tarefa 2 da aula 10 vs. Reformulação/correção da mesma tarefa na aula 11

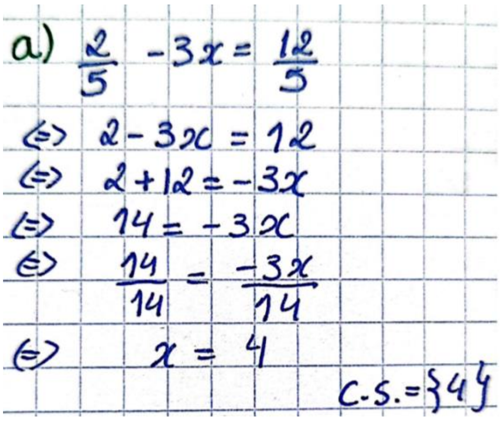


Figura 41: Transcrição da resolução da Aluna A13 à alínea a) da aula 10.

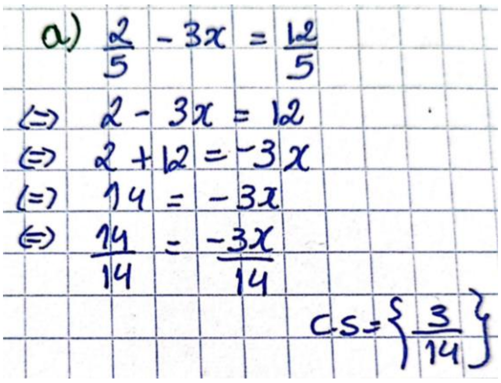


Figura 42: Transcrição da retificação da Aluna A13 à alínea a) da aula 11.

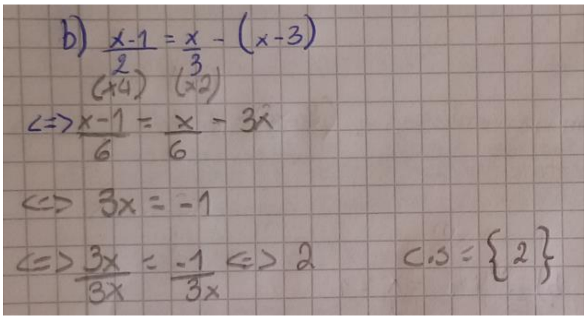


Figura 43: Resolução da Aluna A13 à alínea b) da aula 10.

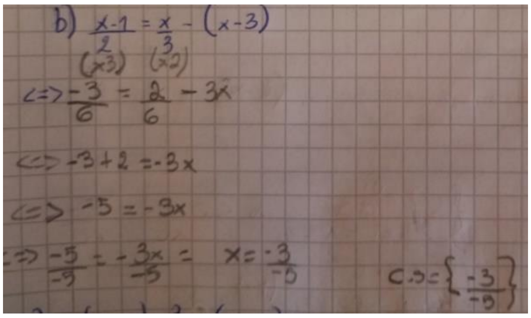


Figura 44: Retificação da Aluna A13 à alínea b) da aula 11.

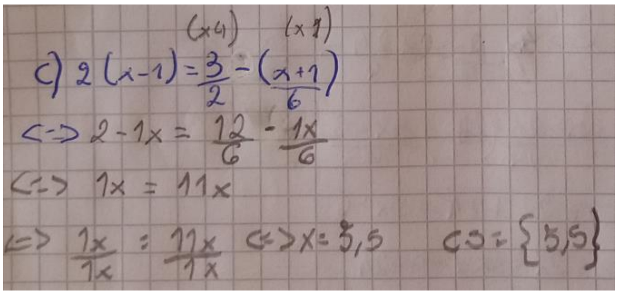


Figura 45: Resolução da Aluna A13 à alínea c) da aula 10.

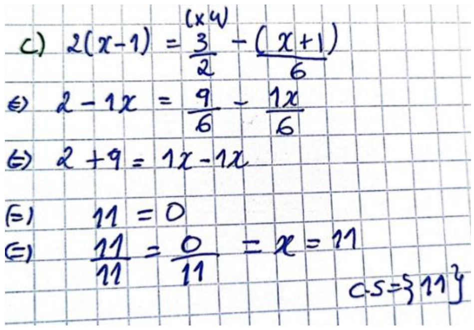


Figura 46: Transcrição da retificação da Aluna A13 à alínea c) da aula 11.

Outro patamar de complexidade é a introdução de expressões com denominadores nas equações. Como seria de esperar, as dificuldades da aluna foram aumentando consoante a complexidade das equações apresentadas, tornando-se um ciclo que a aluna não conseguiu de todo acompanhar.

Da análise da Figura 41, pode-se observar que a aluna começa por cometer um erro de *desembaraçar de denominadores,* pois elimina os denominadores, sem antes reduzir todos os termos ao mesmo denominador. Seguidamente, a aluna coloca os termos independentes no primeiro membro e os dependentes no segundo, cometendo, deste modo, erros por *transposição/troca de membros*, o que retrata bem as dificuldades sentidas pela aluna, ao cometer ainda este tipo de erro. O próximo erro da aluna é executado aquando da tentativa de esta isolar a incógnita, pois em vez de dividir ambos os membros da equação pelo coeficiente do termo dependente divide pelo termo independente. Por fim, sem se perceber como, a aluna ainda considera que a solução da equação é 4.

Comparando as Figuras 41 e 42, observa-se que a evolução é nula, a aluna demonstra as mesmas dificuldades, sendo que a única diferença foi não ter considerado a solução da equação 4.

Nas resoluções e retificações das alíneas b) e c) (Figuras 43, 44, 45, 46), mais uma vez, não se percebe a maioria dos passos executados pela aluna, considerando, desta forma, que foram feitos com o objetivo de entregar as equações concluídas novamente.

Comparação das resoluções do Aluno A5

Resolução da tarefa 2 da aula 5 vs. Reformulação/correção da mesma tarefa na aula 6

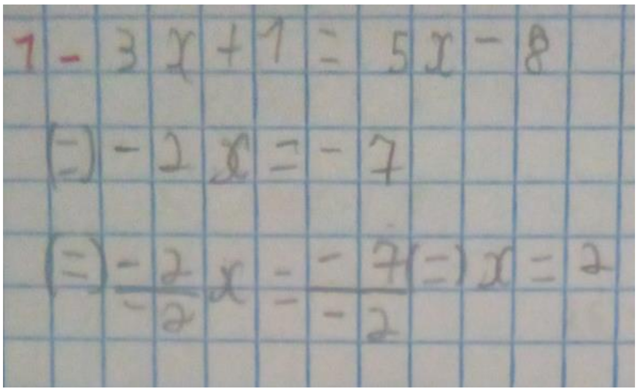


Figura 47: Resolução do Aluno A5 à alínea a) da aula 5.

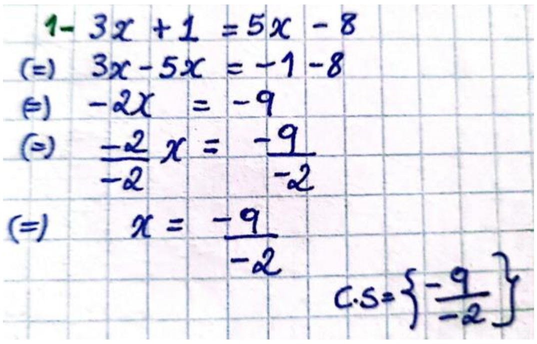


Figura 48: Transcrição da retificação do Aluno A5 à alínea a) da aula 6.

Pela resolução apresentada pelo Aluno A5 (Figura 47) é possível identificar dois erros. O primeiro erro advém da tentativa, por parte do aluno, de executar dois passos em simultâneo. O aluno, mentalmente, passou o termo $5x$ para o primeiro membro e adicionou-o com o termo $-3x$, obtendo de forma correta o resultado $-2x$. Contudo, no segundo membro, ao executar os dois passos de uma só vez, não procedeu à troca do sinal do termo $+1$, calculando assim $-8+1$, resultando desta forma o resultado -7. O segundo erro detetado, está relacionado com a simplificação da fração $\frac{-7}{-2}$, que o aluno considerou ser 2.

Contrapondo as duas fases da resolução do aluno, verifica-se que existiu um grande progresso na resolução. O aluno já prestou mais atenção e decidiu fazer um passo de cada vez, colocou os termos dependentes e independentes no respetivo membro, simplificou corretamente os termos semelhantes e conseguiu isolar a incógnita de forma correta. O único aspeto verificado na resolução da Figura 48 que poderia ser melhorado, seria a simplificação da solução $\frac{-9}{-2}$ para $\frac{9}{2}$.

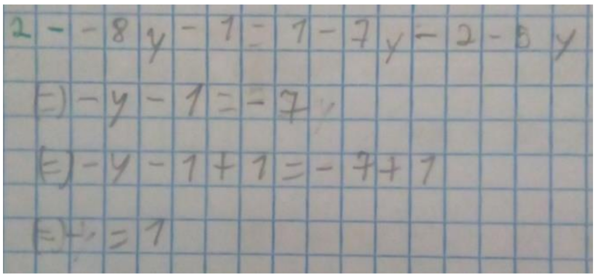


Figura 49: Resolução do Aluno A5 à alínea b) da aula 5.

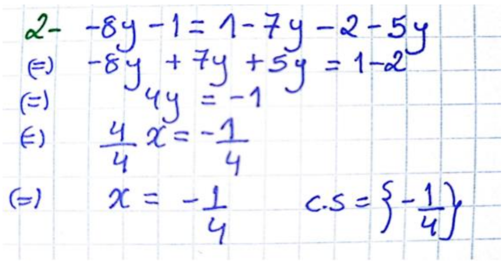


Figura 50: Transcrição da retificação do Aluno A5 à alínea b) da aula 6.

Através da Figura 49, pode-se observar uma resolução com alguns erros e bastante confusa. Da análise da mesma, considera-se que o aluno volta a querer fazer dois passos em simultâneo. Este começa por passar o termo $-7y$ para o primeiro membro e adiciona-o com o termo $-8y$. No segundo membro, o que parece, é que o aluno se esquece do termo 1 e adiciona os termos não semelhantes -2 e $5y$, obtendo como resultado -7. No segundo passo da resolução, parece que o aluno terá aplicado o princípio de equivalência da adição, adicionando 1 a cada um dos membros de forma a isolar o termo dependente. Por fim, o aluno termina a equação no passo $-y = 1$, cometendo desta forma, um erro por *incapacidade de isolar a variável* e considera erradamente que $-7 + 1 = 1$.

Comparando a Figura 49 com a Figura 50, verifica-se que o aluno conseguiu detetar e corrigir quase todos os seus erros. Contudo, na resolução da Figura 50, o aluno comete dois novos erros. Um erro de *omissão*, esquecendo-se do termo -1 do primeiro membro e um erro por troca de incógnita. Conforme os erros referidos anteriormente, o aluno conclui corretamente a resolução da equação.

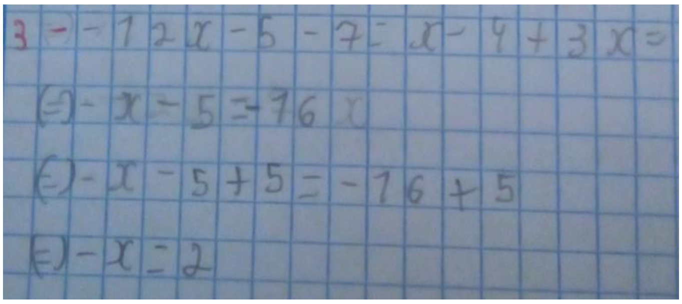


Figura 51: Resolução do Aluno A5 à alínea c) daa aula 5.

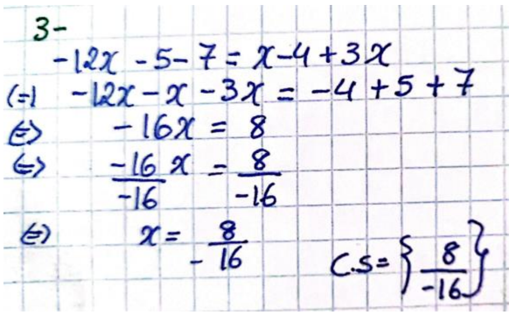


Figura 52: Transcrição da retificação do Aluno A5 à alínea c) da aula 6.

Mais uma vez, como verificado na Figura 51, o aluno A5 tenta fazer mais que um passo em simultâneo, acabando assim por cometer erros. Neste caso, após análise minuciosa, não foi possível decifrar a resolução feita pelo aluno, desde modo, não existe uma explicação lógica para os valores obtidos no seu primeiro passo da resolução. Contudo, do primeiro para o segundo passo, percebe-se que o aluno aplica o princípio de equivalência da adição, sendo que, no seu último passo, volta a não se perceber o seu pensamento quando conclui que $-16 + 5 = 2$. É possível observar que o aluno comete um erro por *incapacidade de isolar a variável*, pois termina a sua resolução no passo $-x = 2$.

Contrapondo as duas fases da resolução do aluno (Figura 51 e Figura 52), é percetível a grande evolução que este conseguiu alcançar. Na figura 52, o aluno já produziu um passo de cada vez, o que poderá ter feito diferença na simplificação dos passos da equação. A resolução apresentada na Figura 52, está correta, sendo que o aluno poderia ainda ter simplificado a solução da equação.

Um aspeto evidenciado ao longo destas três últimas análises, é o facto de o aluno na primeira fase da resolução nunca ter indicado o conjunto solução, e, na segunda fase já o ter feito. Este aspeto é mais um ponto positivo, visto que a indicação do conjunto solução foi um dos aspetos realçados ao longo das aulas.

Resolução da tarefa 2 da aula 7 vs. Reformulação/correção da mesma tarefa na aula 9

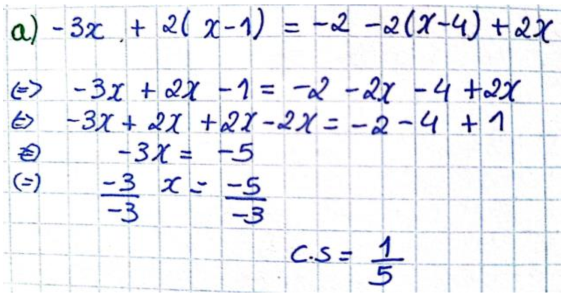


Figura 53: Transcrição da resolução do Aluno A5 à alínea a) da aula 7.

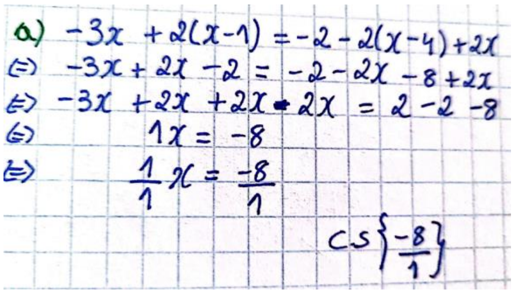


Figura 54: Transcrição da retificação do Aluno A5 à alínea a) da aula 9.

Da análise da Figura 53, resultou a identificação de alguns erros cometidos pelo aluno A5. Primeiramente, o aluno começa por cometer erros de *execução*, ao aplicar erradamente a propriedade distributiva da multiplicação em ambos os membros da equação. De seguida, o aluno coloca os termos dependentes e os independentes no respetivo membro de forma correta, contudo, na simplificação de ambos os membros, comete erros de *adição incorreta de termos semelhantes*. Por fim, quando indica o conjunto solução, não se percebe o que o terá levado a indicar $\frac{1}{5}$, visto que, no passo anterior estava indicado $\frac{-5}{-3}$.

Analisando a produção do aluno na segunda fase da resolução da equação (Figura 54), verifica-se que, apesar de não ter conseguido corrigir todos os seus erros, existiu uma evolução perante a resolução apresentada na Figura 53. Comparando as duas resoluções, o aluno desta vez aplicou corretamente a propriedade distributiva da multiplicação no primeiro membro, contudo, no segundo membro, embora ainda não a tenha aplicado corretamente, existe uma evolução relativamente à demonstrada na primeira fase. Seguidamente, o aluno manifesta ainda erros de *adição incorreta de termos semelhantes* ao considerar que $-3x + 2x + 2x - 2x$ é igual a $1x$. No final, mais uma vez, o aluno não simplifica a solução que obteve.

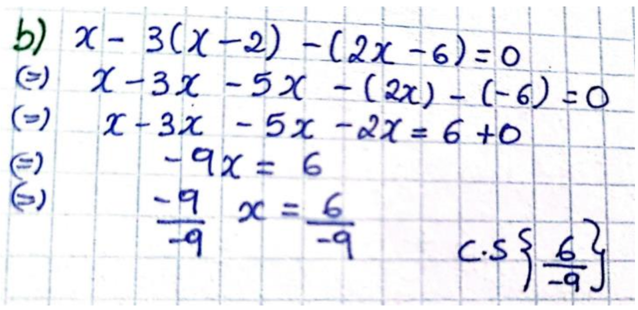


Figura 55: Transcrição da resolução do Aluno A5 à alínea b) da aula 7.

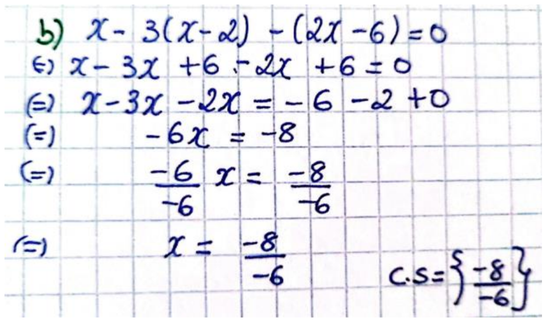


Figura 56: Transcrição da retificação do Aluno A5 à alínea b) da aula 9.

Perante o exposto na Figura 55, pode observar-se que o aluno comete o seu primeiro erro ao aplicar a propriedade distributiva da multiplicação a $-3(x-2)$. O segundo erro realizado pelo aluno, foi um erro de *transposição /troca de membros,* que resultou do facto de o aluno não simplificar o termo – (-6) do primeiro membro e, ao transpô-lo para o segundo membro, considerou esse termo como sendo -6.

Na retificação da resolução (Figura 56), é possível observar que, apesar de o aluno ter ultrapassado e corrigido as dificuldades reveladas na primeira fase, o que já é uma ótima evolução, este apresenta três novos erros. Um erro de *omissão,* que ocorreu devido esquecimento de um dos termos 6 do primeiro membro, o acrescento do termo -2 no segundo membro, que o aluno deve ter confundido com o termo 6 que desapareceu e, no final, o aluno volta a demonstrar dificuldade na adição de termos semelhantes, pois considera que $x-3x-2x$ é igual a $-6x$. Na apresentação do conjunto-solução, mais uma vez, o aluno não simplifica a solução que obteve.

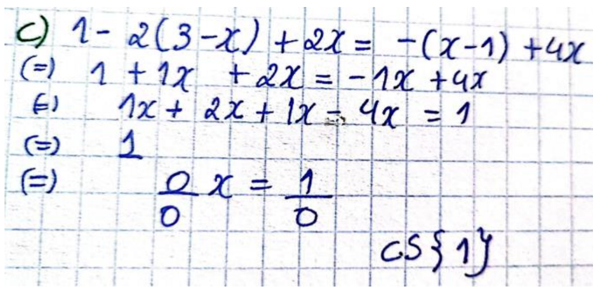


Figura 57: Transcrição da resolução do Aluno A5 à alínea c) da aula 7.

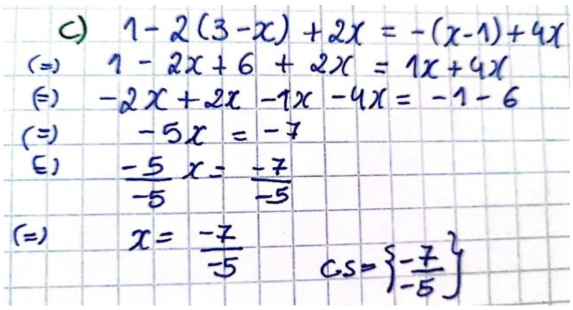


Figura 58: Transcrição da retificação do Aluno A5 à alínea c) da aula 9.

Através da Figura 57, é possível observar mais um caso onde não é possível decifrar o primeiro passo realizado pelo aluno, desde modo, não existe uma explicação lógica para os valores obtidos. Do primeiro para o segundo passo, consoante os erros cometidos anteriormente, o aluno comete um erro de *transposição /troca de membros,* pois esquece-se de trocar o sinal do termo 1 ao mudar de membro. Seguidamente, pela análise feita, parece que o aluno terá adicionado os termos semelhantes do primeiro membro, obtendo desta forma, $0x=1$, acabando de seguida, por cometer um erro por aplicação incorreta do princípio de equivalência da multiplicação, ao dividir ambos os membros por 0. Por fim, o aluno comete um erro de divisão, pois considera que $\frac{1}{0}$ é igual a 1.

Comparando as duas resoluções da Figura 57 e 58, pode-se verificar que embora o aluno ainda tenha cometido alguns erros, existe um ligeiro progresso. O aluno no primeiro passo, já aplica, embora que incorretamente, a propriedade distributiva da multiplicação, contudo, no segundo membro, parece não a reconhecer e considerar que $-(x-1)=1x$. De seguida, o aluno coloca os termos dependentes e os independentes no respetivo membro, simplifica corretamente os termos semelhantes e consegue isolar a incógnita de forma correta. No final, mais uma vez, o aluno poderia ter simplificado a solução que obteve.

Resolução da tarefa 2 da aula 10 vs. Reformulação/correção da mesma tarefa na aula 11

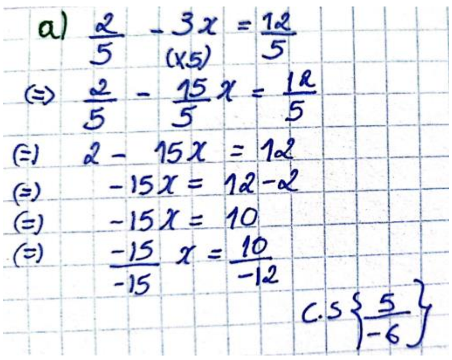


Figura 59: Transcrição da resolução do Aluno A5 à alínea a) da aula 10.

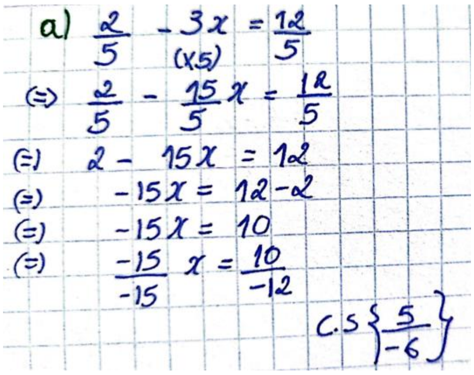


Figura 60: Transcrição da retificação do Aluno A5 à alínea a) da aula 11.

Perante a resolução do aluno exposta na Figura 59, verifica-se que o aluno comete o seu único erro no final da sua resolução, quando aplica erradamente o princípio de equivalência da multiplicação, pois não divide ambos os membros pelo mesmo número. Também é possível verificar, que desta vez, o aluno simplifica a solução que obteve.

Analisando e comparando as duas resoluções, ilustradas pelas Figuras 59 e 60, pode-se observar que são iguais. Deste modo, ou o aluno considera que na sua primeira resolução não existiam erros, ou simplesmente decidiu não a corrigir.

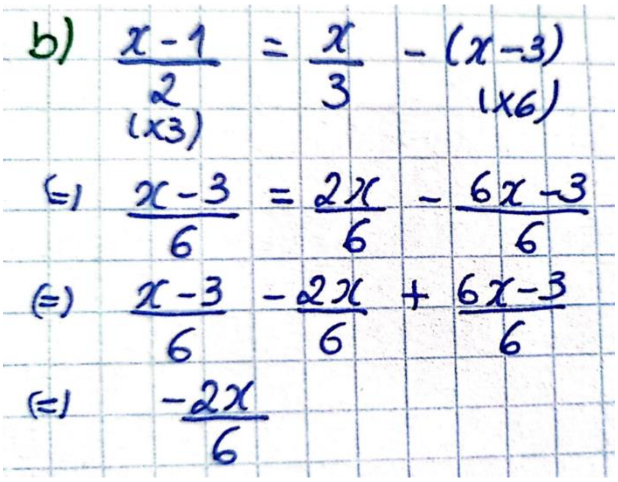


Figura 61: Transcrição do Aluno A5 à alínea b) da aula 10.

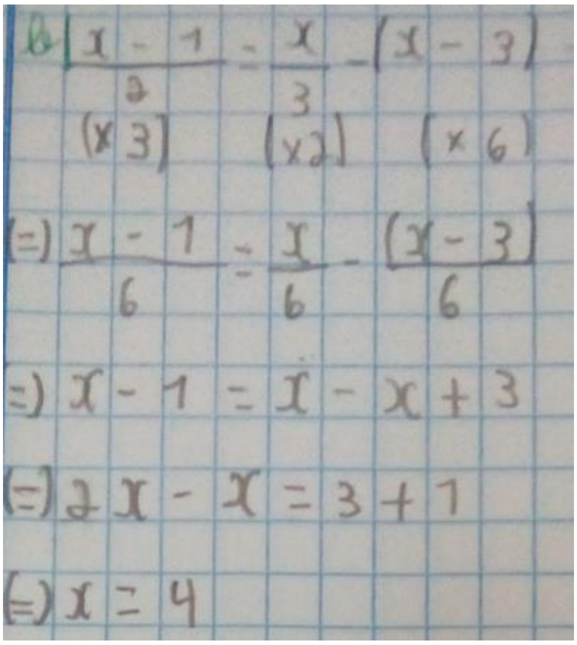


Figura 62: Retificação do Aluno A5 à alínea b) da aula 11.

Por observação da Figura 61, verifica-se que o aluno, no primeiro passo, tenta executar mais que um passo em simultâneo. O aluno decide reduzir todos os termos ao mesmo denominador, contudo, comete o erro de *desembaraçar de denominadores*, pois não multiplica todos os termos do numerador pelo número que indicou. Ainda perante a análise da Figura 61, é possível observar que o aluno, do primeiro para o segundo passo, decide colocar todos os termos da equação no primeiro membro, no entanto, esquece-se de colocar $= 0$, de forma a manter a igualdade da equação. A partir do passo referido anteriormente, o aluno não desenvolve mais a resolução da equação, não podendo da análise identificar o motivo pelo qual não o terá feito.

Observando a retificação da resolução (Figura 62), contata-se que o aluno ainda demonstra dificuldades em reduzir todos os termos ao mesmo denominador, conseguindo na retificação da resolução cometer ainda mais erros nesse passo do que na resolução da Figura 61. Contudo, nem tudo foi menos bom, nesta segunda fase, o aluno já aplica corretamente a propriedade distributiva e termina a resolução da equação de forma correta, consoante os erros cometidos anteriormente.

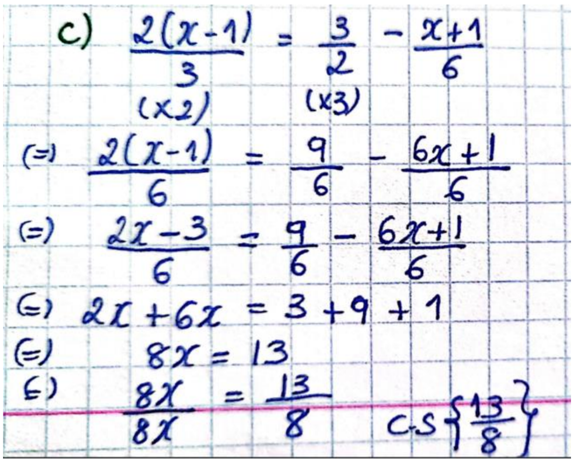


Figura 63: Transcrição da resolução do Aluno A5 à alínea c) da aula 10.

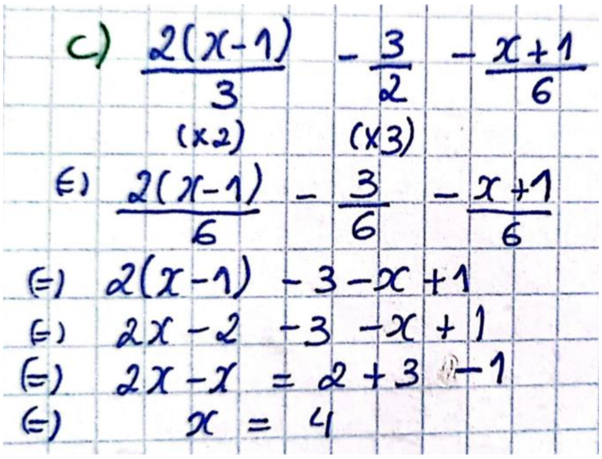


Figura 64: Transcrição da retificação do Aluno A5 à alínea c) da aula 11.

Mais uma vez, como verificado na Figura 63, o aluno A5 comete um erro de *desembaraçar de denominadores*, pois, ao reduzir todos os termos ao mesmo denominador, não multiplica cada termo do numerador pelo número que indicou. Seguidamente, acrescenta o coeficiente 6 à parcela x do numerador da fração $\frac{x+1}{6}$ do segundo membro, comete um erro de *execução,* ao aplicar a propriedade distributiva, e ainda, um erro de *eliminação do sinal menos antes da fração.* Depois de eliminar os denominadores, e em concordância com os erros cometidos anteriormente, o aluno desenvolve corretamente a resolução da equação. Contudo, no último passo, pela análise da equação, talvez o aluno se terá distraído e o intuito seria dividir ambos os membros da equação por 8.

Comparando as duas resoluções, verifica-se que o aluno, apesar de não ter conseguido corrigir todos os seus erros, já conseguiu detetar pelo menos dois deles. O aluno já aplicou corretamente a propriedade distributiva e conseguiu perceber que acrescentou o coeficiente 6 à parcela x do numerador da fração $\frac{x+1}{6}$. Contudo, ainda são notórias as dificuldades sentidas em relação à redução de todos os termos da equação ao mesmo denominador e à eliminação do sinal menos antes da fração, visto que o aluno voltou a cometer erros nesses passos. Através da Figura 64 é também possível observar que o aluno se esquece do sinal de igualdade em alguns dos passos da equação, que poderá ter ocorrido por falta de concentração, pois nos dois últimos passos já os coloca.

Comparação das resoluções do Aluno A9

Resolução da tarefa 2 da aula 5 vs. Reformulação/correção da mesma tarefa na aula 6

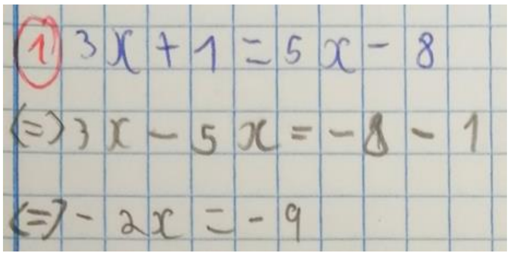


Figura 65: Resolução do Aluno A9 à alínea a) da aula 5.

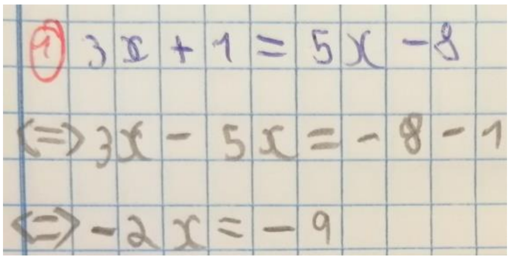


Figura 66: Retificação do Aluno A9 à alínea a) da aula 6.

Na resolução apresentada pelo aluno A9, na Figura 65, observamos que o único erro que o aluno cometeu foi um erro por *incapacidade de isolar a variável,* pois não conclui a resolução da equação. Através da comparação entre as duas figuras, é percetível que o Aluno A9 ou pensou que não tinha cometido nenhum erro, ou então não conseguiu identificar nem corrigir o seu erro, pois as resoluções apresentadas são iguais.

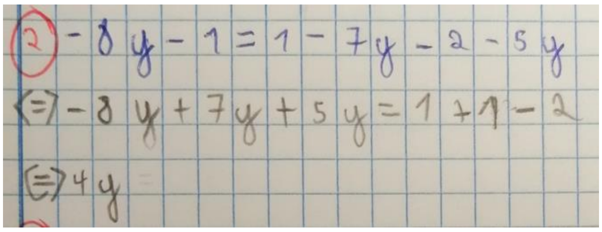


Figura 67: Resolução do Aluno A9 à alínea b) da aula 5.

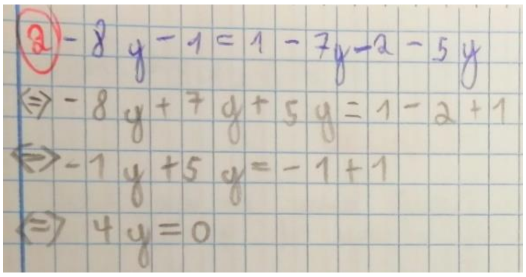


Figura 68: Retificação do Aluno A9 à alínea b) da aula 6.

Na resolução da Figura 67, o aluno começa por colocar corretamente os termos dependentes no primeiro membro e os independentes no segundo, contudo, no passo seguinte, não desenvolve mais a sua resolução.

Na segunda fase (Figura 68), embora o aluno não tenha concluído a resolução da equação, pois termina no passo $4y = 0$, cometendo deste modo, um erro por *incapacidade de isolar a variável*, o aluno já fez mais um passo do que na resolução da primeira fase, pois simplificou os dois termos da equação corretamente.

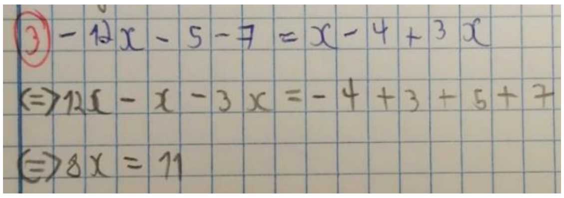


Figura 69: Resolução do Aluno A9 à alínea c) da aula 5.

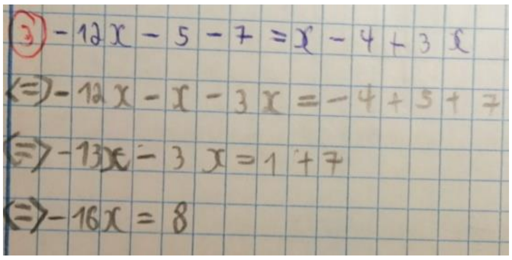


Figura 70: Retificação do Aluno A9 à alínea c) da aula 6.

Pela resolução apresentada na Figura 69, é possível identificar três erros, um erro de *omissão* do sinal negativo do termo $-12x$, o acrescento do termo 3 no segundo membro, e novamente, um erro por *incapacidade de isolar a variável.*

Comparando as duas fases da resolução do aluno, este conseguiu identificar e corrigir o seu primeiro e segundo erro, demonstrando desta forma um pequeno progresso, contudo ainda continua a evidenciar dificuldades em isolar a incógnita e, deste modo, descobrir a solução da equação.

Resolução da tarefa 2 da aula 7 vs. Reformulação/correção da mesma tarefa na aula 9

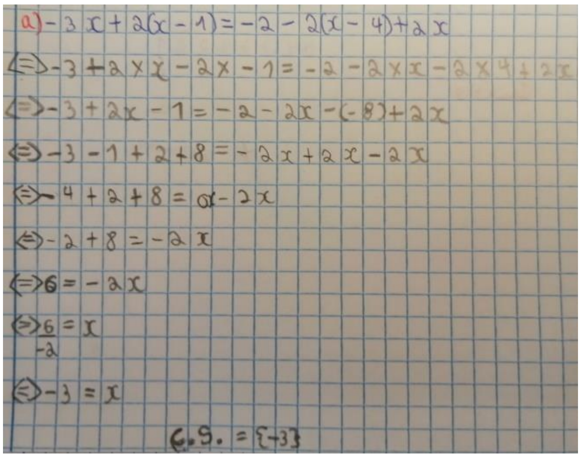


Figura 71: Resolução do Aluno A9 à alínea a) da aula 7.

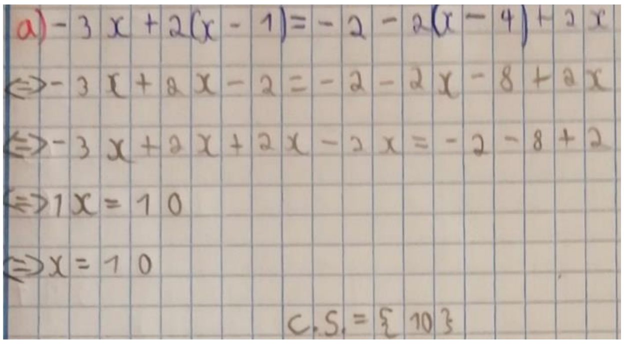


Figura 72: Retificação do Aluno A9 à alínea a) da aula 9.

Através da Figura 71, é possível observar que o aluno, no início da resolução, cometeu um erro de *omissão* de variável, com o esquecimento da variável x do termo $-3x$. De seguida, o aluno com a intenção de desembaraçar a equação de parênteses, comete dois erros de *execução* ao aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em cada um dos membros da equação. Considerando os erros cometidos pela incorreta aplicação da propriedade distributiva da multiplicação, o aluno ainda cometeu um erro de *linha numérica* ao considerar que $-2 \times -1 = -1$.

Analisando a produção do aluno na segunda fase (Figura 72), verifica-se que o aluno identificou e corrigiu a maior parte dos erros cometidos. Contudo, o aluno continua a evidenciar dificuldade a aplicar a propriedade distributiva, porque embora a tenha aplicado corretamente no primeiro membro da equação, no segundo aplicou-a erradamente.

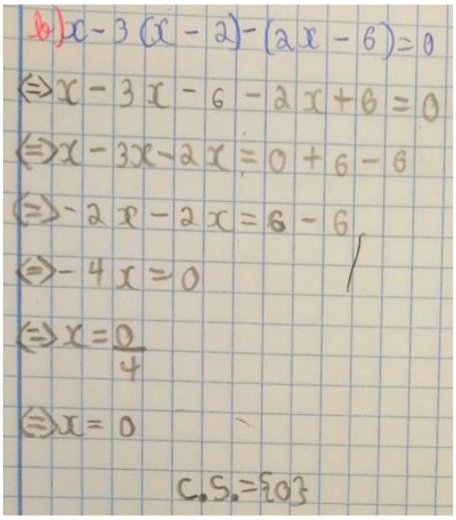


Figura 73: Resolução do Aluno A9 à alínea b) da aula 7.

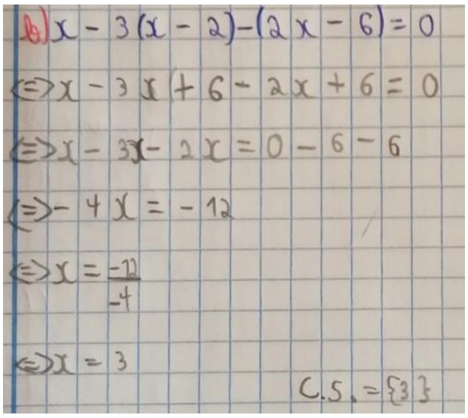


Figura 74: Retificação do Aluno A9 à alínea b) da aula 9.

Na resposta do aluno A9 (Figura 73), é possível identificar dois tipos de erros. O aluno comete um erro de *execução*, ao aplicar a propriedade distributiva da multiplicação a $-3(x-2)$ e, comete o segundo erro ao isolar a incógnita, esquecendo-se do sinal negativo do coeficiente -4.

Contrastando as duas resoluções do aluno, é possível verificar que o aluno conseguiu detetar e corrigir os próprios erros.

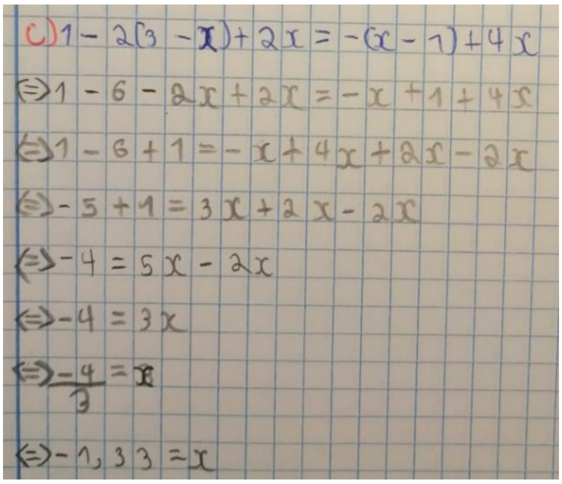


Figura 75: Resolução do Aluno A9 à alínea c) da aula 7.

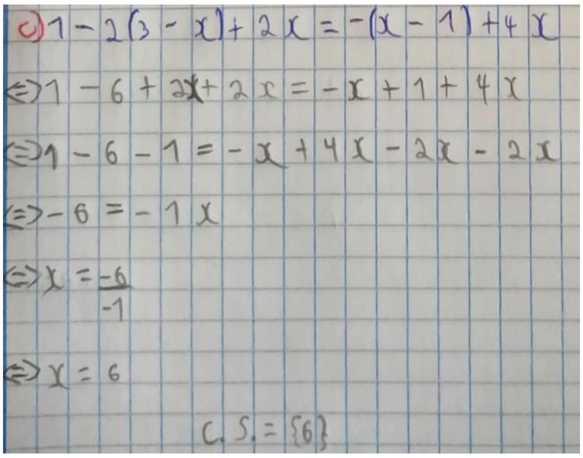


Figura 76: Retificação do Aluno A9 à alínea c) da aula 9.

Mais uma vez, o aluno A9, voltou a aplicar a propriedade distributiva da multiplicação de forma incorreta, neste caso no primeiro membro, sendo evidente a sua dificuldade em aplicar esta propriedade ao longo das resoluções da primeira fase. Através da Figura 75, ainda é possível identificar um erro por *transposição/troca de membros* do primeiro para o segundo passo da resolução.

Ao analisar a Figura 76, e comparando-a com a Figura 75, é possível, mais uma vez, verificar que o aluno superou as suas dificuldades, detetando e corrigindo os seus erros.

Ao longo da comparação destas três últimas resoluções de equações é possível constatar que o aluno parece ter ultrapassado a dificuldade que demonstrou anteriormente em isolar a incógnita da equação.

Resolução da tarefa 2 da aula 10 vs. Reformulação/correção da mesma tarefa na aula 11

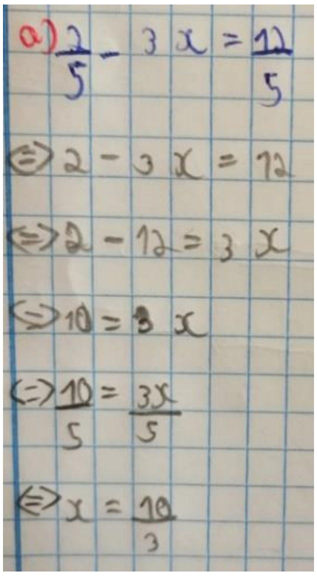


Figura 77: Resolução do Aluno A9 à alínea a) da aula 10.

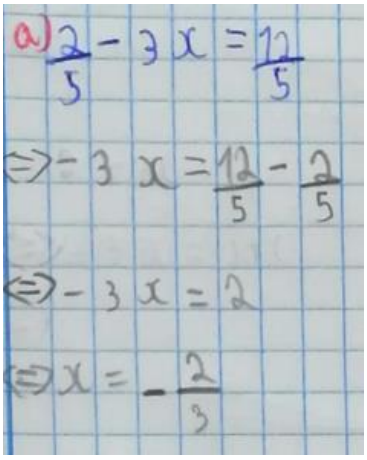


Figura 78: Retificação do Aluno A9 à alínea a) da aula 11.

A resolução evidenciada na Figura 77 já foi analisada no subcapítulo anterior. Dessa análise resultou que o aluno cometeu um erro de *desembaraçar de denominadores* e, talvez por distração, no quarto passo da resolução, tenha pensado em dividir ambos os membros da equação por três, mas tenha escrito cinco, pois no passo seguinte conclui que $x = \frac{10}{3}$.

Analisando agora a reformulação da resolução desta equação (Figura 78), é possível verificar que o aluno percebeu onde é que errou e conseguiu corrigir os seus erros.

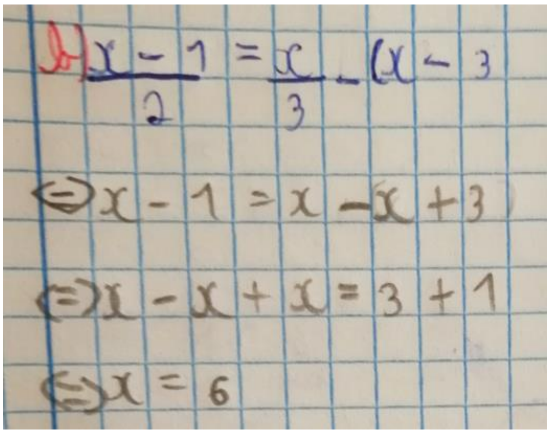


Figura 79: Resolução do Aluno A9 à alínea b) da aula 10.

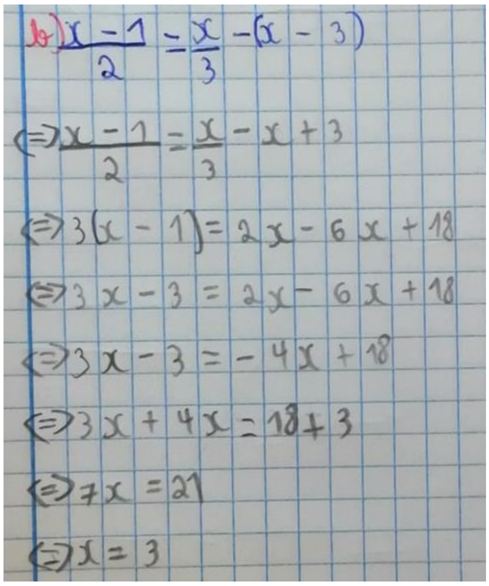


Figura 80: Retificação do Aluno A9 à alínea b) da aula 11.

Pela Figura 79, mais uma vez, percebe-se que o aluno não compreendeu como se resolvem equações com denominadores. O aluno elimina os denominadores da equação sem antes reduzir todos os membros ao mesmo denominador, cometendo assim o seu único erro nesta resolução.

Observando a Figura 80, percebe-se que o aluno conseguiu detetar e corrigir os seus erros quando reformulou a sua resolução. O aluno optou por multiplicar todos os termos da equação pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores, sendo o único aluno da turma a utilizar esta estratégia nas resoluções analisadas ao longo deste trabalho.

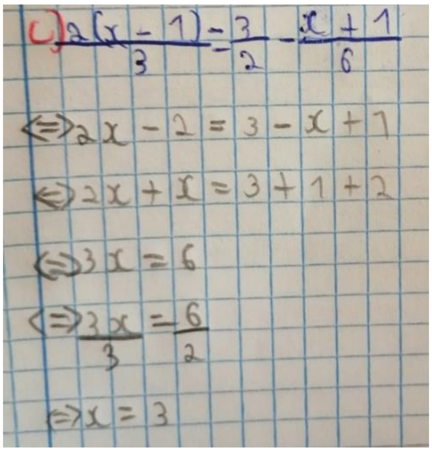


Figura 81: Resolução do Aluno A9 à alínea c) da aula 10.

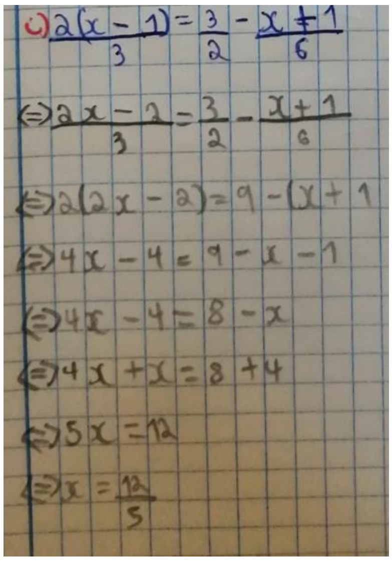


Figura 82: Retificação do Aluno A9 à alínea c) da aula 11.

Na terceira equação proposta da aula 10 (Figura 81), o aluno voltou a eliminar os denominadores sem o poder ainda fazer, cometendo deste modo, o erro de *desembaraçar de denominadores,* seguindo-se o erro de *eliminação do sinal menos antes de frações.* No final da resolução, o aluno ainda cometeu um erro por aplicação incorreta do princípio de equivalência da multiplicação, visto que não dividiu ambos os membros pelo mesmo valor.

Comparando as duas resoluções do aluno, mais uma vez, este conseguiu superar as suas dificuldades e conseguiu detetar e corrigir todos os erros que cometeu.

Conclui-se, considerando as equações efetuadas e agora analisadas, que o aluno já não demonstra dificuldade na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação, evidenciado desta forma que aprendeu com os erros cometidos anteriormente.

Comparação das resoluções da Aluna A14

Resolução da tarefa 2 da aula 5 vs. Reformulação/correção da mesma tarefa na aula 6

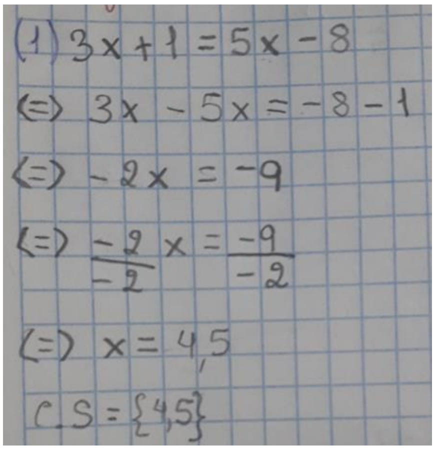


Figura 83: Resolução da Aluna A11 à alínea a) da aula 5.

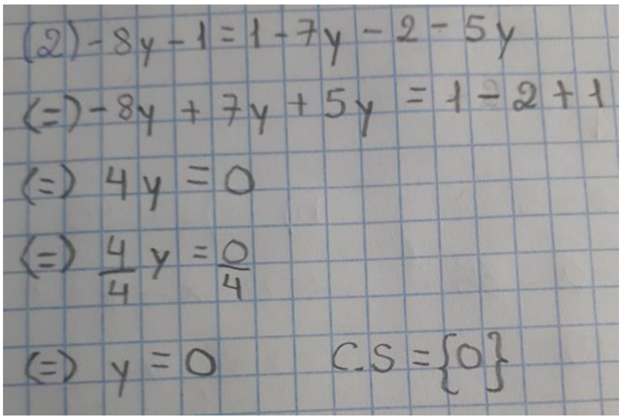


Figura 84: Resolução da Aluna A11 à alínea b) da aula 5.

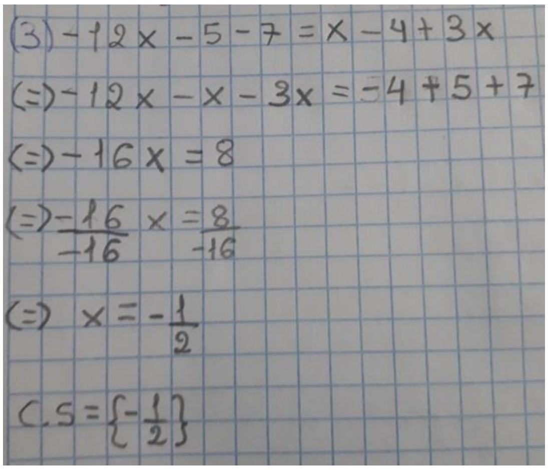


Figura 85: Resolução da Aluna A11 à alínea c) da aula A5.

Através das Figuras 83, 84 e 85, pode-se observar as resoluções da aluna A11 às alíneas a), b) e c) da tarefa 2 da aula 5. Como é possível comprovar pela análise das Figuras, a aluna realizou com sucesso as três equações, sendo que, no momento em que foi pedido à turma que cada aluno corrigisse as suas equações, a aluna em questão, após a análise das suas resoluções, confiou no seu trabalho e questionou se estas não estariam bem resolvidas, ao qual lhe foi respondido que sim, não precisando dessa forma de enviar novas fotografias.

Resolução da tarefa 2 da aula 7 vs. Reformulação/correção da mesma tarefa na aula 9

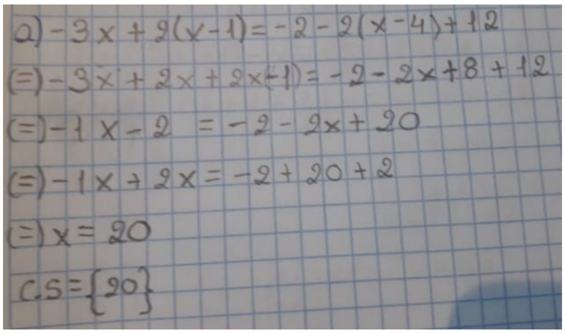


Figura 86: Resolução da Aluna A11 à alínea a) da aula 7.

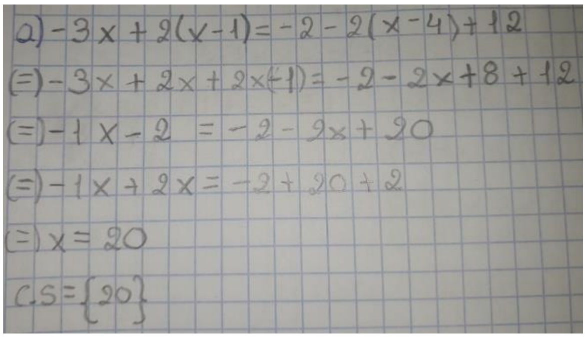


Figura 87: Resolução da Aluna A11 à alínea a) da aula 9.

Na resolução apresentada pela aluna A11, na Figura 86, observa-se que a única falha que esta comete foi ter escrito incorretamente o enunciado da equação, visto que a sua resolução está totalmente correta, de acordo com a falha cometida.

Analisando a correção da resolução (Figura 87), é possível verificar que a aluna não se apercebeu que terá escrito mal o enunciado da equação uma vez que a resolução se manteve igual à inicial.

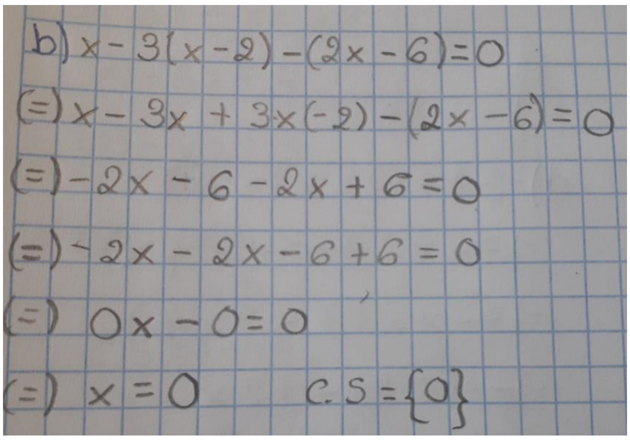


Figura 88: Resolução da Aluna A11 à alínea b) da aula 7.

A resolução evidenciada na Figura 88 já foi analisada no subcapítulo anterior. Dessa análise resultou que a aluna comete três erros ao longo da resolução desta equação. O primeiro, um erro de *execução,* ao aplicar a propriedade distributiva a $-3(x-2)$, o segundo, que se encontra no penúltimo passo, é um erro de *adição incorreta de termos semelhantes*, quando a aluna considera que $-2x - 2x$ é igual a $0x$ e, o terceiro erro, que se encontra no passo seguinte, resulta de a aluna considerar que $0x$ é igual a x.

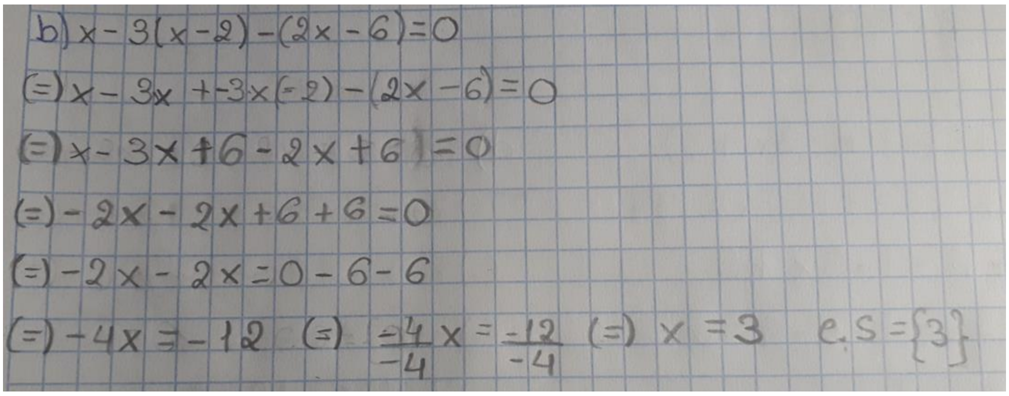


Figura 89: Retificação da Aluna A11 à alínea b) da aula 9.

Analisando a produção da aluna na segunda fase da resolução da equação (Figura 89), verifica-se que existe uma ótima evolução em relação à resolução apresentada na Figura 88, visto que a aluna conseguiu identificar e corrigir todos os seus erros.

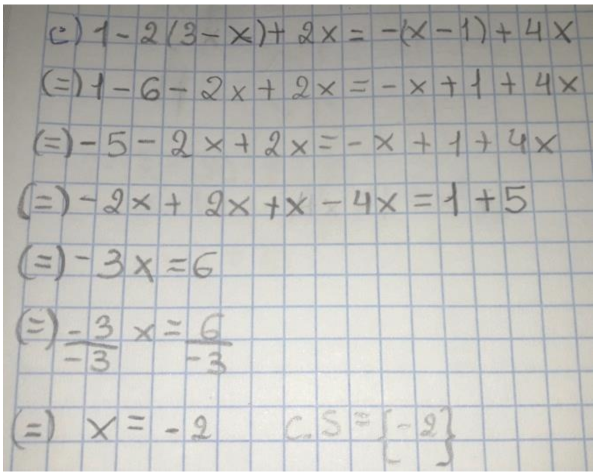


Figura 90: Resolução da Aluna A11 à alínea c) da aula 7.

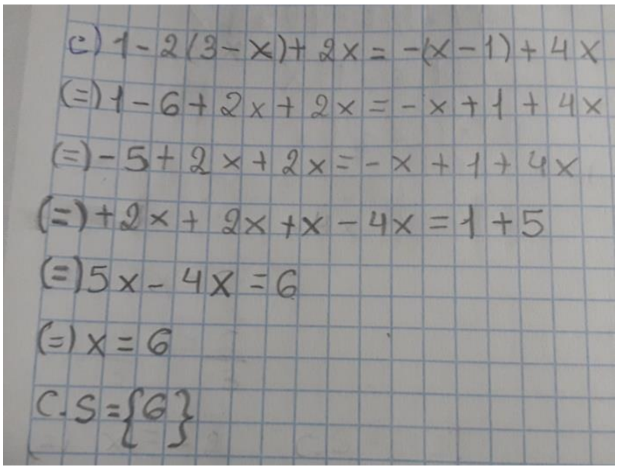


Figura 91: Retificação da Aluna A11 à alínea c) da aula 9.

Perante o exposto na Figura 90, pode observar-se que o único erro cometido pela aluna, foi um erro de *execução* ao aplicar a propriedade distributiva da multiplicação no primeiro membro. De notar que, embora a aluna se tenha equivocado a aplicar a propriedade distributiva no primeiro membro, ao aplicá-la no segundo membro já não cometeu nenhum erro.

Comparando as duas resoluções da aluna, verifica-se novamente que esta consegue superar as suas dificuldades e consegue detetar e corrigir, neste caso, o seu único erro.

Resolução da tarefa 2 da aula 10 vs. Reformulação/correção da mesma tarefa na aula 11

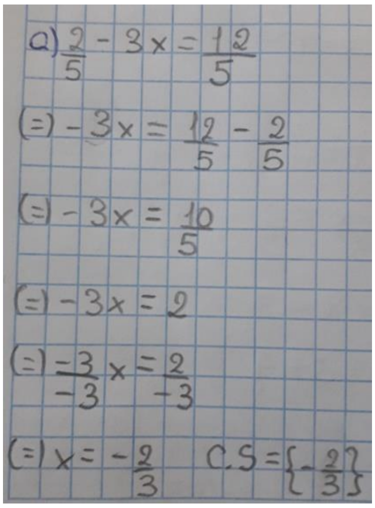


Figura 92: Resolução da Aluna A11 à alínea a) da aula 10.

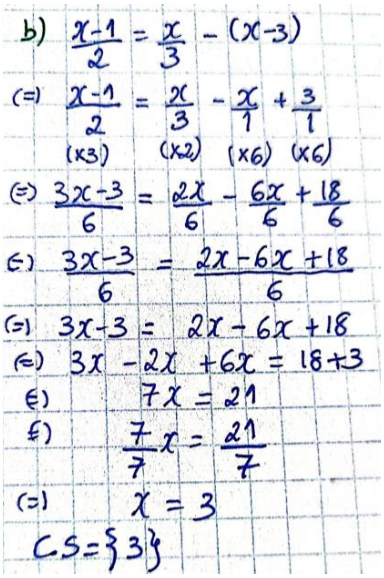


Figura 93: Resolução da Aluna A11 à alínea b) da aula 10.

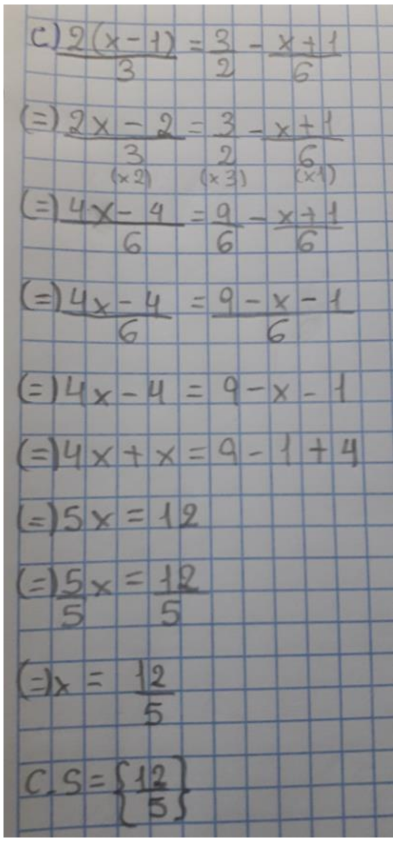


Figura 94: Resolução da Aluna A11 à alínea c) da aula 10.

Através das Figuras 92, 93 e 94, pode-se observar as resoluções da aluna A11 às alíneas a), b) e c) da tarefa 2 da aula 10. Mais uma vez, como é possível comprovar pela análise das Figuras, a aluna realizou com sucesso as três equações. Na aula 11, no momento em que foi pedido à turma que cada aluno corrigisse as suas equações, a aluna em questão, após a análise das suas resoluções, tal como aconteceu na aula 6, confiou no seu trabalho e questionou se estas não estariam bem resolvidas, ao qual lhe foi respondido que sim, não precisando dessa forma de enviar novas fotografias

4.3. Perceções dos alunos sobre a intervenção pedagógica

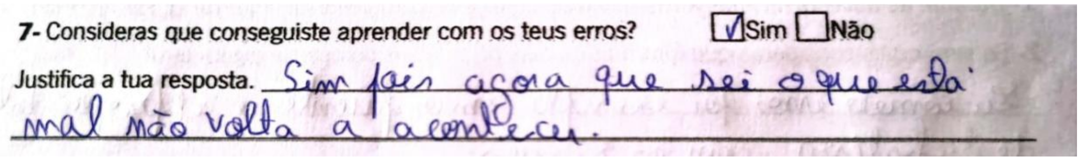
No final da intervenção pedagógica, os alunos responderam a um questionário (Anexo 10), na primeira semana de aulas presenciais do 3.º período. A partir desse questionário, foi possível identificar algumas perceções que a turma tem, relativamente aos erros por eles cometidos durante a resolução de equações, e ainda sobre o contributo do ensino ministrado. Tal como já foi referido no capítulo anterior, este questionário contém questões de resposta aberta e fechada, sendo que numa das questões, os alunos tinham de selecionar uma opção segundo o seu grau de concordância (adaptação da escala de Likert) para cada uma das afirmações apresentadas. Dos 17 alunos que constituem o estudo, apenas 15 responderam ao questionário.

Perceções dos alunos relativamente aos erros por eles cometidos durante a resolução de equações

Dos 15 alunos que responderam ao questionário proposto, todos eles responderam que tinham cometido erros durante a resolução de equações. Questionados, seguidamente, sobre as razões que os levaram a ter cometido os tais erros, as respostas foram quase todas do mesmo género:

- Distração durante a resolução;
- Falta de atenção durante as aulas;
- Não entender a matéria;
- Confusão e indecisão durante a resolução das tarefas.

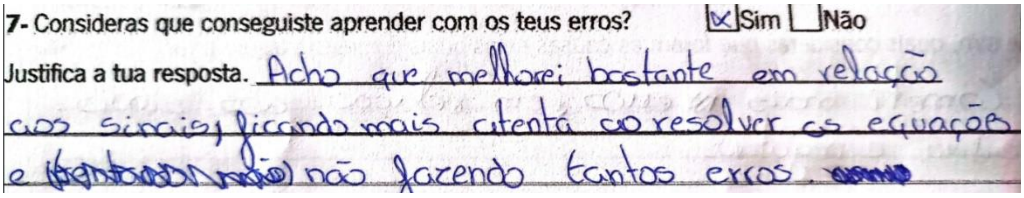
Em relação à pergunta "Consideras que conseguiste aprender com os teus erros?", todos os alunos responderam que sim, sendo, de seguida, exibidas algumas justificações das respostas apresentadas.



7- Consideras que conseguiste aprender com os teus erros? ☑ Sim ☐ Não

Justifica a tua resposta. Sim pois agora que sei o que está mal não volta a acontecer.

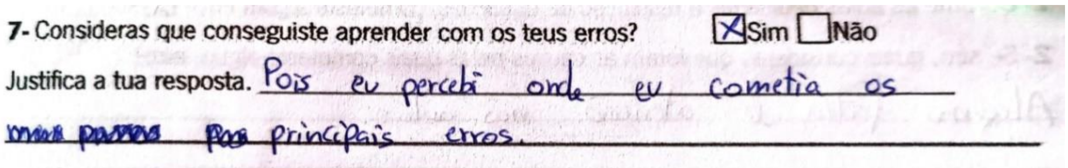
Figura 95: Resposta dada por um aluno à questão 7 do questionário.



7- Consideras que conseguiste aprender com os teus erros? ☒ Sim ☐ Não

Justifica a tua resposta. Acho que melhorei bastante em relação aos sinais, ficando mais atenta ao resolver as equações e não fazendo tantos erros.

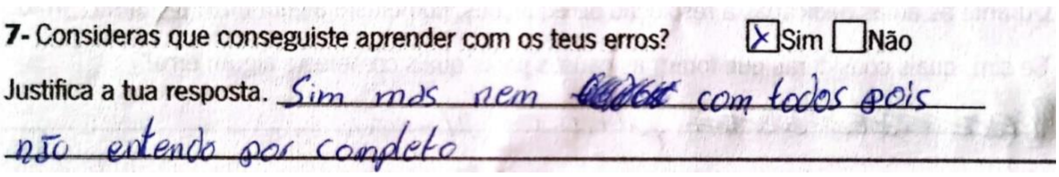
Figura 96: Resposta dada por um aluno à questão 7 do questionário.



7- Consideras que conseguiste aprender com os teus erros? ☒ Sim ☐ Não

Justifica a tua resposta. Pois eu percebi onde eu cometia os principais erros.

Figura 97: Resposta dada por um aluno à questão 7 do questionário.



7- Consideras que conseguiste aprender com os teus erros? ☒ Sim ☐ Não

Justifica a tua resposta. Sim mas nem com todos pois não entendo por completo

Figura 98: Resposta dada por um aluno à questão 7 do questionário.

Questionados sobre quais são os aspetos (cuidados) que mais têm em atenção quando resolvem equações, depois de terem detetado e compreendido os erros por eles cometidos, os alunos referiram:

Tabela 3: Aspetos (cuidados) que os alunos passaram a ter atenção quando resolvem uma equação

Aspetos que os alunos passaram a ter atenção quando resolvem uma equação	
Rever as equações com mais atenção e substituir a solução na incógnita para conferir se a igualdade é verdadeira.	Ter mais atenção, principalmente nos passos onde cometem mais erros e no fim confirmar que a equação está bem resolvida.
Mais cuidado e atenção em desembaraçar de parênteses.	Mais concentração durante a resolução das equações.
Ter atenção aos sinais dos termos e ver se os termos são dependentes ou independentes.	Ter atenção à troca de sinais e à adição ou subtração de números negativos.

A fim de compreender as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de equações e as causas subjacentes a essas dificuldades, na perspetiva dos próprios, foram apresentadas algumas opções, das quais os alunos, consoante o nível de concordância de cada um, selecionaram uma opção.

Tabela 4: Frequência absoluta sobre o grau de concordância das dificuldades dos alunos.

Quando resolvo uma equação sinto dificuldades:	**D**	**I**	**C**
Na adição de termos semelhantes.	8	6	1
Em desembaraçar (eliminar) de parênteses, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação.	4	5	6
Em reduzir todos os termos ao mesmo denominador.	5	4	6
Aplicar os princípios de equivalência.	2	10	3
Desembaraçar (eliminar) os denominadores.	6	8	1

Pela análise da Tabela 4, constata-se que as afirmações que reuniram mais votos de concordância, foram as afirmações dois e três, ou seja, os alunos sentem que as suas dificuldades estão relacionadas com a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação e com a redução de todos os termos da equação ao mesmo denominador.

Tabela 5: Frequência absoluta sobre o grau de concordância das causas das dificuldades dos alunos.

As minhas dificuldades devem-se a:	**D**	**I**	**C**
Falta de algumas bases matemáticas;	9	2	4
Falta de concentração enquanto resolvo as equações;	3	7	5
Falta de interesse pela disciplina de Matemática;	8	3	4
Falta de confiança nas minhas capacidades;	3	5	7
Falta de atenção durante as aulas;	6	3	6
Falta de estudo;	7	2	6

Em relação aos motivos pelos quais os alunos consideram ser as causas das dificuldades sentidas, os níveis de concordância foram bastantes semelhantes em todas as afirmações, sendo a falta de confiança nas suas capacidades, a que alcançou mais votos, seguindo-se a falta de estudo e a falta de atenção nas aulas.

Perceções dos alunos relativamente ao contributo do ensino ministrado

Analisando agora as questões referentes à opinião dos alunos em relação à estratégia didática implementada, estratégia essa que valoriza o erro no processo de ensino e aprendizagem, dos 15 alunos que responderam ao questionário, nenhum destes referiu ter feito algo parecido com o proposto durante a intervenção.

Em relação à pergunta 5 do questionário, que pedia a opinião dos alunos em relação à análise/discussão das tarefas realizadas a partir dos erros detetados nas resoluções das equações da turma, 6 alunos referiram que foi importante, pois aperceberam-se imediatamente de alguns erros que cometiam, 8 alunos referiram que foi importante, pois, embora não se tenham conseguido aperceber de imediato dos erros que possam ter cometido, os fez estar atentos em situações futuras, e , apenas 1 aluno referiu que foi irrelevante para a sua aprendizagem.

Em relação à pergunta 6 do questionário, que tinha como objetivo perceber se os alunos tinham conseguido detetar e corrigir os seus erros, 3 alunos referiram que conseguiram descobrir todos os seus erros e perceberam o porquê de terem errado, 6 alunos mencionaram que conseguiram descobrir a maioria dos erros, conseguindo perceber o porquê de terem errado nesses passos, 5 alunos referiram que apesar de terem detetado poucos erros, já foi bom pois conseguiram percebê-los e, só 1 aluno referiu não ter conseguido corrigir as equações.

De forma a ter uma maior perceção das opiniões dos alunos, relativamente à estratégia implementada, foram colocadas duas questões, onde os alunos podiam referir aspetos positivos e negativos da mesma. Da análise das respostas, resultou a Tabela 6.

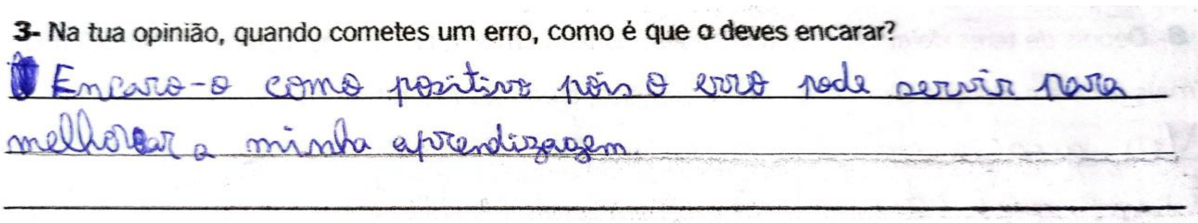
Tabela 6: Aspetos positivos e negativos da estratégia implementada.

Aspetos positivos	**Aspetos negativos**
Facilidade em entender toda a matéria dada.	Demorar mais tempo a ensinar a matéria.
Trabalham autonomamente.	Mais trabalhos de casa.
Tentar perceber os próprios erros e corrigi-los.	Quando não se consegue identificar o erro, pode ser difícil de compreender a matéria para alguns alunos.
Permite o reconhecimento dos erros, o que ajuda a evitar cometer novamente o mesmo.	
Ao identificar os erros, fica mais simples de estudar. Estudavam a parte mais necessária.	Não estar habituado a sair da zona de conforto e fazer coisas diferentes.

Perceções dos alunos relativamente ao significado de erro

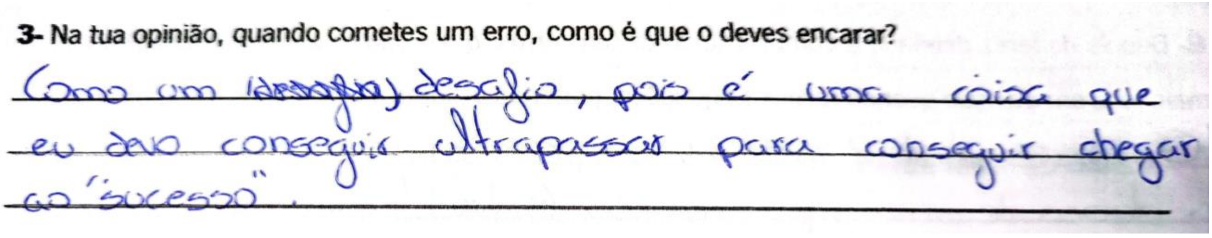
Desde o início da intervenção pedagógica, foi sempre transmitida uma perspetiva positiva da palavra erro aos alunos, tentando, desta forma, ir de encontro ao que foi referido por Correia (2005), em que o erro deve ser corrigido não no sentido de condenar, nem classificar, mas sim de ajudar o aluno a perceber o que falhou no seu raciocínio incentivando-o, motivando-o, facilitando a descoberta do caminho correto até ao erro. Assim sendo, considerei importante perceber qual a perceção dos alunos sobre este tema no final da intervenção.

Questionados sobre quais as suas opiniões de como devem encarar um erro quando o cometem, as respostas foram variadas, mas todas positivas, demonstrando, desta forma, que os alunos encararam os erros como algo natural no processo de ensino e aprendizagem. A título de exemplo são apresentadas, nas Figuras 99 e 100, duas das respostas dos alunos à pergunta em questão.


3- Na tua opinião, quando cometes um erro, como é que o deves encarar?

Encaro-o como positivo pois o erro pode servir para melhorar a minha aprendizagem.

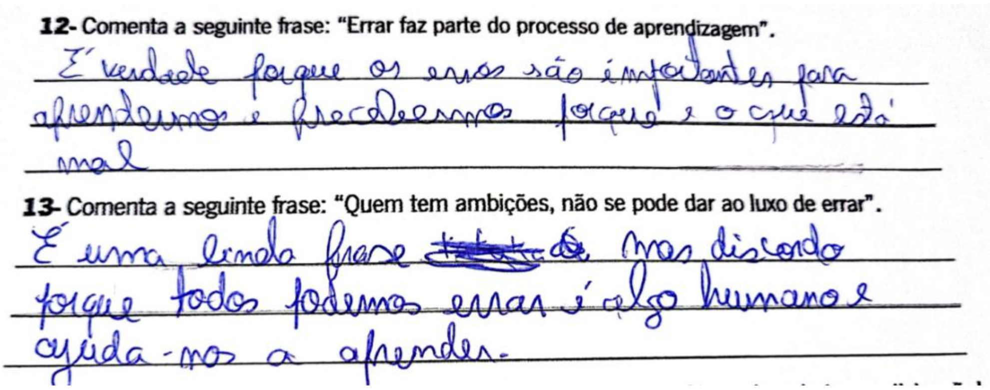
Figura 99: Resposta dada por um aluno à pergunta 3 do questionário.


3- Na tua opinião, quando cometes um erro, como é que o deves encarar?

Como um ~~[illegible]~~ desafio, pois é uma coisa que eu devo conseguir ultrapassar para conseguir chegar ao "sucesso".

Figura 100: Resposta dada por um aluno à pergunta 3 do questionário.

Nas duas últimas questões do questionário, onde lhes era pedido que comentassem as seguintes afirmações: "Errar faz parte do processo de aprendizagem" e "Quem tem ambições, não se pode dar ao luxo de errar", as respostas foram variadas. De uma forma geral, todos os alunos concordaram com a primeira afirmação e discordaram da segunda. De seguida, são expostas algumas dessas respostas.

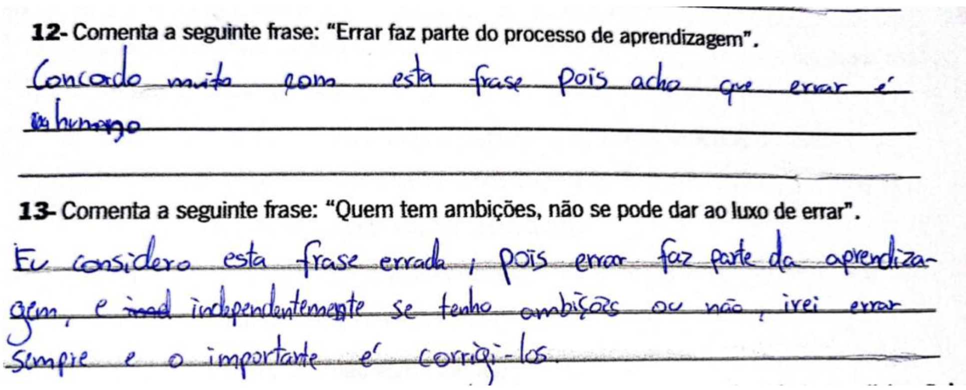

12- Comenta a seguinte frase: "Errar faz parte do processo de aprendizagem".

É verdade porque os erros são importantes para aprendermos e percebermos porque é o que está mal

13- Comenta a seguinte frase: "Quem tem ambições, não se pode dar ao luxo de errar".

É uma linda frase ~~[illegible]~~ da, mas discordo porque todos podemos errar é algo humano e ajuda-nos a aprender.

Figura 101: Respostas dadas por um aluno às questões 12 e 13 do questionário.

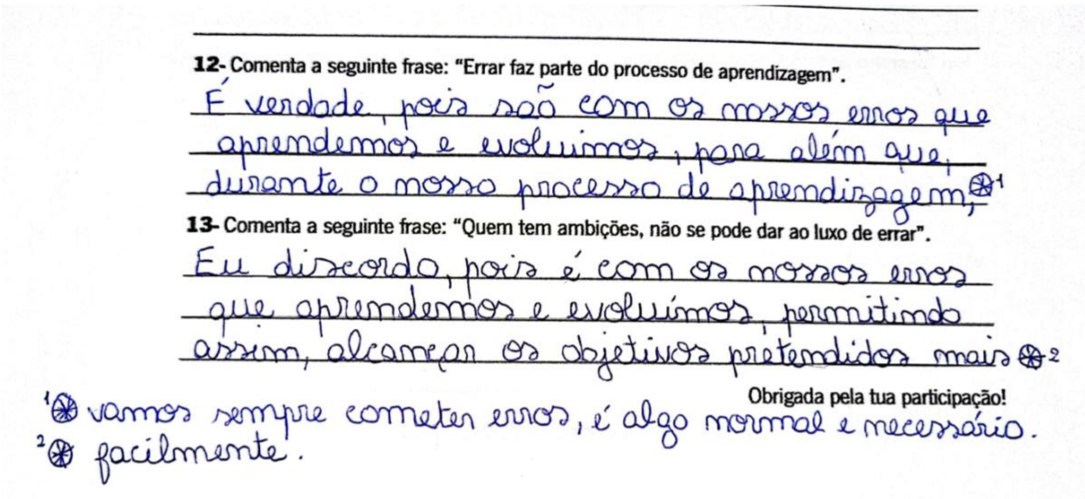

12- Comenta a seguinte frase: "Errar faz parte do processo de aprendizagem".

Concordo muito com esta frase pois acho que errar é humano

13- Comenta a seguinte frase: "Quem tem ambições, não se pode dar ao luxo de errar".

Eu considero esta frase errada, pois errar faz parte da aprendizagem, e ~~[illegible]~~ independentemente se tenho ambições ou não, irei errar sempre e o importante é corrigi-los.

Figura 102: Respostas dadas por um aluno às questões 12 e 13 do questionário.



12- Comenta a seguinte frase: "Errar faz parte do processo de aprendizagem".

É verdade, pois são com os nossos erros que aprendemos e evoluímos, para além que, durante o nosso processo de aprendizagem, ⊛1

13- Comenta a seguinte frase: "Quem tem ambições, não se pode dar ao luxo de errar".

Eu discordo, pois é com os nossos erros que aprendemos e evoluímos, permitindo assim, alcançar os objetivos pretendidos mais ⊛2

Obrigada pela tua participação!

1⊛ vamos sempre cometer erros, é algo normal e necessário.

2⊛ facilmente.

Figura 103: Respostas dadas por um aluno às questões 12 e 13 do questionário.

Pela análise das respostas, é notória a consciencialização por parte dos alunos de que o erro é parte integrante da aprendizagem, e estes devem ser aceites como tal, como uma nova oportunidade de aprendizagem.

CAPÍTULO 5
CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões que emergiram da intervenção pedagógica atendendo ao objetivo e às questões de investigação delineadas. Por fim, são referidas algumas limitações e recomendações a ter em conta em futuras investigações.

5.1. CONCLUSÕES DO ESTUDO

Este subcapítulo encontra-se dividido em três secções, uma por cada questão de investigação proposta para a realização deste estudo.

5.1.1. Quais são os erros/dificuldades, bem como as potencialidades, que os alunos revelam durante a aprendizagem do tema Equações no 7º ano?

Durante a intervenção de ensino identificaram-se vários erros e dificuldades dos alunos nos processos de resolução das equações propostas. Dos vários erros estudados por Carabineiro (2012), Carry et al. (1980), Hall (2002), Kieran (1985, 1992, 2006) e Silva (2012), ao longo da intervenção foram identificados os erros de *transposição/troca de membros, eliminação/adição de termos não semelhantes, adição incorreta de termos semelhantes, linha numérica, omissão, incapacidade de isolar a variável, execução*, *desembaraçar de denominadores, eliminação do sinal menos antes de frações* e *divisão.* Para além destes, foram também identificados outros erros, denominados de *aplicação incorreta do princípio de equivalência da multiplicação, não reconhecimento da propriedade distributiva da multiplicação, adição de termos à equação* e *troca de incógnita.*

Para uma melhor descrição dos erros/dificuldades evidenciadas ao longo das resoluções dos alunos, foi elaborada a Tabela 7, com o intuito de os descrever. Esta tabela contém na primeira coluna o erro/dificuldade detetado, alguns exemplos ilustrativos na segunda coluna, e, por fim, uma coluna com os nomes dos autores que já os tenham referido na literatura.

Nos erros de *omissão* e de *desembaraçar de denominadores*, optou-se por distingui-los por categorias para uma melhor descrição dos erros cometidos pelos alunos.

Tabela 7: Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações.

Erro/dificuldade	**Exemplo**	**Autor**
Transposição /troca de membros.	$3x + 1 = 5x - 8 \Leftrightarrow 3x + 5x = 1 - 8$	Carry *et al.* (1980) e Kieran (1992) / Hall (2002)
Eliminação / adição de termos não semelhantes	$3x + 1 = 5x - 8 \Leftrightarrow 4x = -3x$	Carry *et al.* (1980) e Kieran (1992) / Kieran (1985)
Adição incorreta de termos semelhantes	$-1y + 5y = -4y$ $-2x - 2x = 0$	Kieran (2006)
Linha numérica	$2 - 2 = -1$ $(-4) \times (-4) = -16$	Hall (2002)
Aplicação incorreta do princípio de equivalência da multiplicação	$-4y = -1 \Leftrightarrow \frac{-4}{-4}y = \frac{-1}{-1}$ $0x = 4x \Leftrightarrow \frac{0x}{0} = \frac{4x}{0}$ $1x = 11x \Leftrightarrow \frac{1x}{1x} = \frac{11x}{1x}$	Não encontrado na literatura
Omissão	**Omissão de sinais** $-12x - 5 - 7 = x - 4 + 3x$ $\Leftrightarrow 12x - x - 3x = -4 + 5 + 7$ **Omissão de variáveis** $-12x - 5 - 7 = x - 4 + 3x$ $\Leftrightarrow -12x - x + 4 = -5 + 3 + 7$ **Omissão de termos** $-12x - 5 - 7 = x - 4 + 3x$ $\Leftrightarrow -12x - x = 5 - 4$	Hall (2002)
Adição de termos à equação	$-12x - 5 - 7 = x - 4 + 3x$ $\Leftrightarrow -12x - x - 3x = -4 + 3 + 5 + 7$	Não encontrado na literatura
Incapacidade de isolar a variável	$8x = 11$ $\Leftrightarrow ????$	Hall (2002)
Troca de incógnita	$-12x - x - 3x = -4 + 5 + 7$ $\Leftrightarrow -16y = -4 + 12$	Não encontrado na literatura

Execução	$-2(x-4) = -2 \times x - 2 \times 4$ $-2(x-4) = -2x - 6$ $2(x-1) = 2x + 2$ $-3(x-2) = -3x + 3 \times (-2)$	Carabineiro (2012); Carry et al. (1980)
Não reconhecimento da propriedade distributiva da multiplicação	$x - 3(x-2) - (2x-6) = 0$ $\Leftrightarrow x + x + 2x = 3 + 2 + 6$	Carabineiro (2012)
	$-3x + 2(x-1) = -2 - 2(x-4) + 2x$ $\Leftrightarrow -x(x-1) = -4(x-4) + 2x$	Não encontrado na literatura
Desembaraçar de denominadores	**Supressão de denominadores** $\frac{2}{5} - 3x = \frac{12}{5} \Leftrightarrow 2 - 3x = 12$	Silva (2012)
	Não redução de todos os membros ao mesmo denominador $2 + \frac{2x+3}{2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 2 + 6x + 9 = 8$	
	Não multiplicação de todos os termos do numerador pelo número indicado $\frac{x-1}{2} = \frac{x}{3} - (x-3)$ $\Leftrightarrow \frac{x-3}{6} = \frac{2x}{6} - \frac{6x-3}{6}$	Não encontrado na literatura
Eliminação do sinal menos antes de frações	$-\frac{x+1}{6} = -\frac{x}{6} + \frac{1}{6}$	Silva (2012)
Divisão	$\frac{1}{0} = 1$	Hall (2002)

Através da Tabela 7, é possível observar uma lista com a sistematização dos erros e dificuldades evidenciados pelos alunos através da análise das suas resoluções. Muitas das dificuldades demonstradas estão relacionadas com erros herdados da simplificação de expressões algébricas (e aqui incluem-se os erros transportados da Aritmética) e lapsos na aplicação das regras práticas de resolução de equações.

Os erros relacionados com a simplificação incorreta de expressões algébricas, correspondem, muitos deles, a operações mal efetuadas, sendo evidente as dificuldades em efetuar operações que envolvam números racionais negativos e operações que envolvam termos não semelhantes.

Quando os alunos efetuam uma adição de termos não semelhantes, a grande dificuldade está relacionada com o facto de, na Aritmética, todos "os termos serem semelhantes", ou seja, os alunos lidam apenas com números e todos eles são "adicionáveis". Na passagem para a Álgebra passam a lidar com números e letras e a operar com ambos, de forma isolada ou conjunta.

Uma outra dificuldade evidenciada pelos alunos que também transita da Aritmética, está relacionada com as equações que envolvam parênteses, pois os alunos demonstraram uma grande falta de domínio da propriedade distributiva da multiplicação.

As dificuldades na simplificação de equações com denominadores também foram notórias, sendo que estas também advêm da Aritmética, pois os alunos, em anos anteriores, já trabalharam com expressões numéricas que envolvem números racionais sob forma de fração.

O erro relacionado com eliminação do sinal menos antes de uma fração, foi também observado bastantes vezes nas resoluções dos alunos. Este erro pode ter ocorrido mais vezes pelo facto de os alunos não terem em atenção que, nesta situação, devem aplicar a propriedade distributiva da multiplicação, ou seja, este erro pode ter surgido da dificuldade que os alunos revelaram ao eliminar parênteses.

A escrita/linguagem algébrica dos alunos foi uma dificuldade referida por Rojano (2002) que também foi evidente nas resoluções dos alunos, principalmente na confusão que existe entre o sinal de igualdade e de equivalência.

De forma a concluir a resposta à pergunta proposta nesta secção, falta referir as potencialidades evidenciadas pelos alunos ao longo da intervenção pedagógica. Infelizmente, ao longo da intervenção, poucas foram as potencialidades demonstradas pelos alunos. Esta escassez de potencialidades, possivelmente deve-se ao facto de toda a intervenção ter ocorrido durante o período de aulas de ensino à distância, o que impossibilitou a observação da postura dos alunos, da sua autonomia e autoconfiança na resolução de tarefas e do espírito de entreajuda, por exemplo. Posto isto, a única potencialidade que se obtém, está relacionada com a Aluna A11, pelo facto de, ao analisar as suas resoluções na segunda fase da estratégia didática, ter tido a perspicácia, e neste caso, autoconfiança nas suas capacidades, para afirmar que não encontrou nenhum erro nas suas resoluções.

5.1.2. Qual o impacto de um ensino centrado na exploração dos erros na aprendizagem do tema Equações no 7º ano?

As tarefas em duas fases constituíram uma estratégia de ensino, com enfoque na resolução de Equações do 1° grau. Através dos resultados apresentados no subcapítulo 4.2. e 4.3., é possível efetuar um balanço global da estratégia implementada.

Dos quatro alunos selecionados para análise, verificou-se que o método não surtiu efeito relativamente à aluna A13. A aluna em questão não demonstrou melhorias ao longo da intervenção, bem pelo contrário, foi acumulando cada vez mais dificuldades. Como já tinha sido mencionado por Ponte *et al.* (2009), a aprendizagem do tema equações é efetuada em patamares de crescente complexidade, e foi visível que a aluna apresentou bastantes dificuldades no patamar mais simples (equações sem parênteses e sem denominadores), o que a conduziu a um ciclo de dificuldades do qual não conseguiu sair.

Santos (2008) é da opinião que todo o aluno é capaz de aprender, sendo que, o que os diferencia é o ritmo com que a aprendizagem acontece. O ritmo da aluna em questão foi prejudicado pelo facto de toda esta estratégia ter ocorrido durante ensino à distância, o que impossibilitou a oportunidade de verificar, em tempo real, o que os alunos estavam a sentir, entender e assimilar durante a realização das atividades. Em suma, constata-se que a aluna pertence ao grupo de alunos, já referido ao longo deste relatório por Kieran (1985) e Ponte *et al.* (2009), em que as dificuldades, neste tema, são de tal ordem, que estes nem sequer percebem muito bem o que é uma equação e muito menos o que está envolvido na sua resolução.

Em relação aos restantes três alunos, A5, A9 e A11, igualmente selecionados para análise, foi possível observar que o método surtiu efeito. Pela análise realizada, verificou-se que os alunos em questão ultrapassaram ou pelos menos diminuíram parte das dificuldades e erros identificados durante a primeira fase das suas resoluções. Conforme Santos (2008), "quando o próprio aluno consegue identificar o erro e corrigi-lo, acontece aprendizagem" (p.80), ou seja, pode-se dizer que aconteceu aprendizagem com estes três alunos (A5, A9 e A11).

Através da análise dos dados, resultantes de algumas das questões do questionário final, no subcapítulo 4.3., relacionadas com as perceções dos alunos relativamente ao contributo do ensino ministrado, é possível obter mais algumas informações acerca do contributo da estratégia implementada.

Em relação ao método utilizado, a análise e discussão das tarefas realizadas a partir dos erros detetados nas resoluções dos alunos, 93,3 % mencionaram que foi importante, pois ou se aperceberam imediatamente de alguns erros que cometiam através destas tarefas, ou, embora não se tenham conseguido aperceber de imediato dos erros que possam ter cometido, estiveram atentos em situações futuras. Portanto, estes 93,3 % dos alunos, afirmam ter conseguido aprender com este método de ensino, e apenas 6,7% dos alunos, 1 aluno, referiu que o método foi irrelevante para a sua aprendizagem.

Em relação ao objetivo, que tinha como intuito que fossem os alunos a detetar e corrigir os seus erros, 20% dos alunos referiram que conseguiram descobrir todos os seus erros e perceberam o porquê de terem errado, 40% dos alunos mencionaram que conseguiram descobrir a maioria dos erros, conseguindo perceber o porquê de terem errado nesses passos, 33,3% dos alunos referiram que apesar de terem detetado poucos erros, já foi bom pois conseguiram percebê-los e, só 6,7% dos alunos, referiu não ter conseguido corrigir as equações. Posto isto, pode concluir-se que mais de metade dos alunos conseguiu detetar e corrigir os seus erros, ou pelos menos diminuíram parte dos seus erros.

Os alunos consideram que a estratégia de ensino, que valoriza o erro na sua aprendizagem, tem diversos aspetos positivos, tais como: (i) permite compreender o porquê de errarem e corrigem os próprios erros; (ii) permite trabalhar autonomamente; (iii) torna mais fácil entender a matéria dada; e (iv) permite identificar os erros, logo fica mais simples de estudar, pois estudam a parte mais necessária. Para além destas vantagens, os alunos também identificam diversos aspetos negativos, tais como: (i) demorar mais tempo a ensinar a matéria; (ii) quando não se identifica o erro, pode ser difícil compreender a matéria para alguns alunos; e (iii) mais trabalhos de casa.

Em termos gerais, esta estratégia, que enfatiza o erro no processo de ensino e aprendizagem, causou efeitos positivos para a aprendizagem dos alunos, visto que permitiu que os alunos tomassem consciência das suas dificuldades e se apercebessem da incorreção de alguns procedimentos que costumavam usar. Estes ganhos vêm confirmar as indicações de Borasi (1996), Cury (2007), De la Torre (2004) e Pochulu (2004), sobre a importância da utilização de estratégias didáticas que conduzam os alunos a participar ativamente na superação dos seus erros.

5.1.3. Que ilações retiram os alunos dos erros que cometem na aprendizagem de equações no 7º ano?

Com a análise das respostas dos alunos a algumas das questões do questionário final, os alunos mostraram ter consciência, não só dos erros que cometem, das suas possíveis causas, das dificuldades sentidas, como também do que devem fazer para evitar cometer de novo os mesmos erros.

Relativamente às ilações que os alunos retiram dos erros que cometeram, as respostas foram pouco variadas, os alunos consideram que as causas pelas quais cometeram os erros foram: (i) distração durante a resolução; (ii) falta de atenção nas aulas; (iii) não entender a matéria e (iv) indecisão e confusão durante o processo de resolução. Aliados às causas pelas quais cometeram os erros, vêm os motivos pelos quais os alunos acham que tiveram dificuldades no processo de resolução das equações, sendo que estes reconheceram que se deveu à falta de confiança nas suas capacidades, à distração durante as aulas e à falta de estudo.

Para evitar cometer novamente os mesmos erros durante a resolução de equações, os alunos têm a consciencialização de que devem: (i) ter mais cuidado e atenção na aplicação da propriedade distributiva; (ii) estarem mais concentrados durante a resolução das equações.; (iii) ter atenção à troca de sinais e à adição ou subtração de números negativos; (iv) rever as equações depois de estarem resolvidas e substituir a solução na incógnita para conferir se a igualdade é verdadeira ; (v) ter mais atenção, principalmente nos passos onde cometeram mais erros; e (vi) ter mais atenção aos sinais dos termos e se os termos são dependentes ou independentes.

Todos os alunos consideraram que conseguiram aprender com os seus erros, demonstrando também que sabem da importância que estes têm no processo ensino - aprendizagem. Uns retiram ilações sobre onde erram e o que devem fazer para não voltar a cometer os mesmos erros. Outros referem que se conhecerem as causas que os levam a errar, conseguem estudar o que ficou mal compreendido e, assim, conseguem superar as dificuldades sentidas.

5.2. LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

No desenvolvimento e implementação deste projeto, nem tudo correu como era previsto, o que também não achava que aconteceria, devido à minha inexperiência neste campo. Contudo, creio que a maioria das dificuldades surgiram de algumas limitações que existiram. A limitação principal foi a sala de aula estar reduzida a um ecrã de computador. Esta realidade, a que fomos sujeitos durante toda a intervenção, dificultou bastante a interação com a turma, pois foi evidente a diferença em termos participativos da turma em relação às aulas presenciais. Por outro lado, os alunos não estavam habituados a trabalhar de acordo com a estratégia delineada, o que nem sempre tornou fácil envolver toda a turma, principalmente os alunos desmotivados ou com dificuldades de aprendizagem. Deste modo, o ensino não chegou a todos os alunos da mesma forma.

Uma outra dificuldade (limitação) foi o fator tempo. As aulas da turma de implementação do projeto coincidiam com três dias seguidos da semana (segundas, terças e quartas), e as aulas dedicadas à análise dos erros foram sempre às terças-feiras, por ser uma aula de 45 minutos. Ora, como geralmente os alunos resolviam as equações na segunda-feira, o tempo para analisar as resoluções enviadas para construir uma nova tarefa que englobasse os erros detetados era curto, uma vez que a tarefa tinha de ser disponibilizada aos alunos ainda nesse dia. Este fator fez com que as tarefas não fossem tão pensadas e possam não estar tão ricas, pois uma boa análise requer tempo.

Considero que estas limitações/dificuldades devem ser vistas como uma forma de aprendizagem para o futuro. Deste modo, como recomendações, sugere-se que esta estratégia de ensino seja aplicada preferencialmente em ensino presencial, devido ao acompanhamento e monotorização do trabalho dos alunos, principalmente dos que têm mais dificuldades.

Uma outra recomendação a fazer, seria aumentar o número de aulas em que são analisados os erros detetados nas resoluções dos alunos e diminuir o número de equações pedidas em cada aula, isto porque, durante a intervenção, teria sido mais benéfico tanto para a docente, por causa do pouco tempo que tinha para analisar todas as resoluções e detetar os erros dos alunos, bem como para a aprendizagem dos alunos, pois haveria mais tempo para dedicar a cada análise de equação.

Referências bibliográficas

Andrade, A. P. S. (2014). *Applets na aprendizagem Matemática em situação de aulas de apoio ao estudo* [Relatório Final, Universidade de Aveiro]. Repositório Institucional da Universidade de Aveiro.

Barros, P. M., Fernandes, J. A., & Araújo, C. M. (2016). Perspetivas dos alunos sobre o erro como estratégia de aprendizagem. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, & H. Guimarães (Eds.), *Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 119–131). Associação de Professores de Matemática.

Boavida, A. M., & Guimarães, F. A. (2007). Editorial. *Quadrante*, *16*(1), 1–4.

Borasi, R. (1996). Capitalizing on Errors in Mathematics Instruction: A First Analysis. In *Reconceiving Mathematics Instruction: A Focus on Errors* (pp. 119–148). Ablex Publishing Corporation.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Eds.), *Atas do EIEM2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 255–266). SPIEM.

Carabineiro, A. C. D. (2012). *A aprendizagem das equações no 7.º ano de escolaridade: um estudo sobre os erros e dificuldades dos alunos* [Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa.

Carmo, H., & Ferreira, M. M. (2008). *Metodologia da investigação: Guia para Auto- Aprendizagem* (2nd ed.). Universidade Aberta.

Carry, L. R., Lewis, C., & Bernard, J. E. (1980). *Psychology of equation solving: An information processing study* [Relatório Técnico Final,University of Texas at Austin]. University of Texas at Austin.

Correia, C. E. F. (2005). Aprender com os erros. *Educ@ção*, *1*(3), 13–19.

Cury, H. N. (2007). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos* (3rd ed.). Autêntica.

De la Torre, S. (2004). Tratamiento de los errores en la enseñanza. In *Aprender de los errores – El tratamento didáctico de los errores como estratégia de innovación*. Editorial Magisterio del Río de La Plata. http://www.terras.edu.ar/biblioteca/31/31DE-LA-TORRE-saturnino-Cap3-Parte1-exito-error.pdf

Despacho n.º 8209/2021. (2021). Diário da República: II série, n.º 161. https://dre.pt/application/conteudo/169831748

DGE. (2018). *Aprendizagens Essenciais 7.º ano- Ensino Básico*. ME - DGIDC.

DGE. (2021a). *Aprendizagens Essenciais 1.º ano - Ensino Básico*. ME - DGIDC.

DGE. (2021b). *Aprendizagens Essenciais 6.º ano - Ensino Básico*. ME - DGIDC.

DGE. (2021c). *Aprendizagens Essenciais 7.º ano - Ensino Básico*. ME - DGIDC.

DGE. (2021d). *Aprendizagens Essenciais 8.º ano - Ensino Básico*. ME - DGIDC.

Figueiredo, N., & Palha, S. (2005). Aplicações na Internet para a Matemática: um recurso por explorar na sala de aula. *Educação e Matemática*, *81*, 4–8.

Gandra, A. P., Aires, A. P., & Catarino, P. (2016). A Integração de Applets no Ensino da Álgebra. In L.

Miranda, P. Alves, & C. Morais (Eds.), *VII Congresso Mundial de Estilos de Aprendizagem: Livro de Atas* (pp. 1723–1735).

Hall, R. D. G. (2002). An analysis of errors made in the solution of simple linear equations. *Philosophy of Mathematics Education*. http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/pmej/pome15/hall_errors.pdf

Hamido, G., Branco, N., & Machado, R. (2012). Editorial -Desafios no ensino e na aprendizagem da Matemática. *Interações*, *8*(20), 1–8.

Kieran, C. (1985). The equation-solving erros of novice and intermediate algebra students. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the ninth international conference for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 141–146).

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In Douglas A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390–419). MacMillan.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and future* (pp. 11–49). Sense Publishers.

Leal, L. (1992). *Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular* [Tese de mestrado, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa.

Matos, A., & Ponte, J. P. da. (2008). O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8.º ano. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *11*(2), 195–231.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação.

Ministério da Educação e Ciência. (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Ministério da Educação e Ciência.

Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (2009). Elementary Students' Understanding of the Equal Sign in Number Sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7*, 341–368. http://ojs.ual.es/ojs/index.php/EJREP/article/view/1345

Moreira, S. M. (2016). *Jogos Educativos no Ensino da Matemática: uma experiência em sala de aula com alunos do 1.º e 6.º ano de escolaridade* [Relatório de Estágio, Universidade do Minho]. Repositório Institucional da Universidade do Minho.

NCTM. (2007). *Princípios e Normas Para a Matemática Escolar*. APM.

Neves, M. D. C., & Carvalho, C. (2006). A importância da afectividade na aprendizagem da matemática em contexto escolar: Um estudo de caso com alunos do 8.º ano. *Análise Psicológica*, *24*(2), 201–215.

Nunes, S. F. E. da S. (2020). *As justificações matemáticas dos alunos no tópico Equações do 1.º grau no 7.º ano de escolaridade* [Relatório de Prática de Ensino Supervisionada, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa.

Oliveira, E. (2014). *A utilização das Aplicações Interativas no ensino e aprendizagem das Equações do 1.º grau* [Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa]. Repositório da Universidade Nova de Lisboa.

Oliveira, H. (2009). A Álgebra no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática*, *105*, 83–86.

Otten, M., Heuvel-Panhuizen, M. Van den, & Veldhuis, M. (2019). The balance model for teaching linear equations: a systematic literature review. *International Journal of STEM Education*, *6*(30).

Pochulu, M. D. (2004). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*. https://rieoei.org/historico/deloslectores/849Pochulu.pdf

Ponte, J. P. da. (2005a). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática*, *85*, 36–42.

Ponte, J. P. da. (2005b). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Associação dos Professores de Matemática.

Ponte, J. P. da. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 5–27). SEM - SPCE.

Ponte, J. P. da, Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. ME-DGIDC.

Ponte, J. P. da, Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2015). É Mesmo Necessário Fazer Planos De Aula? In *Educação e Matemática* (Issue 133, pp. 26–35).

Ponte, J. P. da, & Serrazina, M. de L. (2000). *Didática da Matemática do 1º ciclo*. Universidade Aberta.

Ramos, M. L. P. D., & Curi, E. (2014). O Uso do Erro como Estratégia Didática : uma nova perspectiva na reconstrução do conhecimento. *Perspectivas Da Educação Matemática*, *7*(13), 84–102.

Rojano, T. (2002). Elementary Students' Understanding of the Equal Sign in Number Sentences. In L. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 143–147). Lawrence Erlbaum.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes & F. Araújo (Orgs.), *Reorganização curricular do ensino básico: avaliação das aprendizagens: das concepções às novas práticas* (pp. 75–84). Ministério da Educação.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes, & C. Rodrigues (Orgs.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11–35). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Serrazina, M. de L. (2012). Conhecimento matemático para ensinar: papel da planificação e da reflexão na formação de professores. *Revista Eletrônica de Educação*, *6*(1), 266–283. http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/355/162

Serrazina, M. de L., Abrantes, P., & Oliveira, I. (1999). Matemática para todos. In *A Matemática na Educação Básica* (pp. 17–31). Ministério da Educação.

Silva, S. A. O. da. (2012). *Erros e dificuldades no processo de ensinar e aprender a resolver sistemas de duas equações do 1º grau no 8º ano* [Relatório de Estágio, Universidade do Minho]. Repositório Institucional da Universidade do Minho.

Sousa, S. M. V. (2019). *O Erro como Meio de Ensino- Aprendizagem* [Projeto de Mestrado, Universidade do Minho]. Repositório institucional da Universidade do Minho.

Spinillo, A. G., Pacheco, A. B., Gomes, J. F., & Cavalcanti, L. (2014). O erro no processo de ensino-aprendizagem da matemática: Errar é preciso? *Boletim GEPEM*, *64*.

Superfine, A. C. (2008). Planning for Mathematics Instruction: A Model of Experienced Teachers' Planning Processes in the Context of a Reform Mathematics Curriculum. *Mathematics Educator*, *18*(2), 11–22.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. Coxford & A. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 8–19). Reston, VA: NCTM.

Vale, I. (2004). Algumas Notas sobre a Investigação Qualitativa em Educação Matemática - O Estudo de Caso. *Revista Da Escola Superior de Educação*, *5*, 171–202. https://www.academia.edu/10198052/Algumas_Notas_sobre_Investigação_Qualitativa_em_Educação_Matemática_-_o_Estudo_de_Caso

Vale, M. L. de S. (2010). *O erro como ponte para a aprendizagem em Matemática: um estudo com alunos do 7.º ano do ensino básico* [Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa.

Veloso, G., Brunheira, L., & Rodrigues, M. (2013). A proposta de Programa de Matemática para o Ensino Básico: um recuo de décadas. *Educação e Matemática*, *123*, 3–8.

ANEXOS

Anexo 1: Questionário inicial

QUESTIONÁRIO INICIAL

No âmbito da realização de um estudo de investigação sobre *O erro na regulação da aprendizagem de equações, que* constitui objeto de estudo do meu relatório de estágio profissional do Mestrado em Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, venho pedir a tua colaboração para responder às questões que a seguir são apresentadas.

As respostas às questões serão mantidas confidenciais e serão usadas para um estudo sempre sob a forma de anonimato.

I – Dados pessoais

1.1. Idade: ________

1.2. Sexo: ☐Masculino ☐Feminino

II – Questões gerais

2.1. Gostas da disciplina de matemática? (escolhe uma opção)

a) Muito **b)** Razoavelmente **c)** Pouco **d)** Nada

2.2. Qual a disciplina em que sentes mais dificuldades? ____________________

2.2.2. E qual é a disciplina em que sentes menos dificuldades? ________________

2.3. Alguma vez repetiste algum ano escolar? ☐Sim ☐Não

2.3.1. Se sim, qual ou quais? ________

2.4. No primeiro período qual foi a tua classificação na disciplina de matemática? _____

2.5. Quantas horas semanais dedicas o teu estudo à disciplina de matemática? _________

2.6. Tens apoio ao estudo de matemática fora da escola? ☐Sim ☐Não

2.7. Consideras a disciplina de matemática importante? ☐Sim ☐Não

2.9. O que costumas fazer quando cometes um erro numa tarefa? (escolhe uma opção)

- **a)** Costumas identificá-lo sozinho no fim da tarefa;
- **b)** Costumas identificá-lo durante a resolução da tarefa;
- **c)** Só costumas dar conta dos erros quando alguém te diz onde erraste;
- **d)** Umas vezes apercebes-te dos erros outras não;
- **e)** Outra. _______________

2.10. Quando apontam um erro a uma resolução tua de matemática como te sentes? (escolhe uma opção)

- **a)** Envergonhado/a e esperas que ninguém repare que erraste;
- **b)** Tentas perceber como erraste e depois ficas atento/a em situações idênticas;
- **c)** Ficas aborrecido/a e acabas por desistir;
- **d)** Ficas aborrecido/a, mas continuas e persistes;
- **e)** É-te indiferente;
- **f)** Outra. ___________________________

2.11. Como preferes que o teu professor(a) lide com os teus erros? (escolhe uma opção)

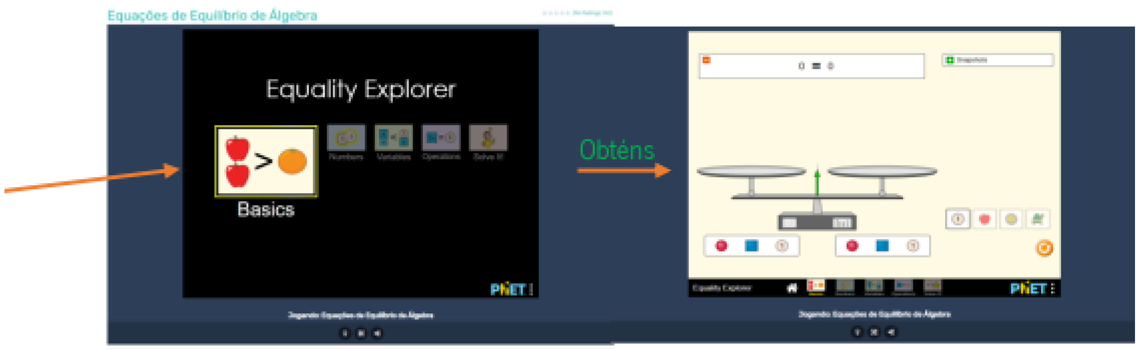
- **a)** Que vá ter contigo e te explique individualmente;
- **b)** Pode explicar perante a turma o erro, mas não referir que foste tu a errar;
- **c)** É-te indiferente, desde que fiques a perceber onde erraste;
- **d)** Preferes ficar sem perceber onde erraste;
- **e)** Outra. _____________________

Anexo 2: Guião da 5.ª aula da intervenção pedagógica

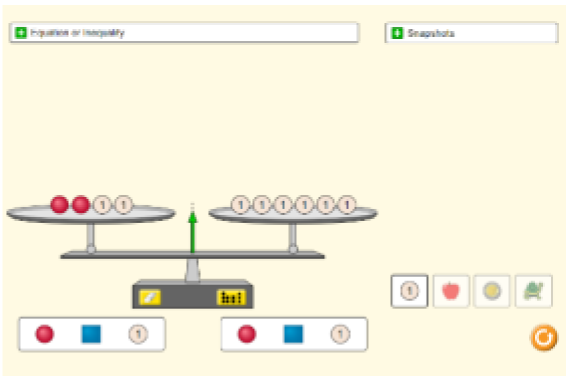
Guião – Princípios de equivalência de equações	
7.º Ano	/ /2021
Disciplina: Matemática	

Importante: Todas as questões colocadas neste guião devem ser respondidas no teu caderno.

1º passo: Acede a https://www.cokitos.pt/equacoes-de-equilibrio-de-algebra/play/ e de seguida clica na opção Basics.



2ºpasso: Arrasta para o prato esquerdo da balança duas bolas vermelhas e duas bolas com o número um. Para o prato do lado direito da balança, arrasta seis bolas com o número um, de forma a obter a seguinte representação de uma balança em equilíbrio (a seta verde indica que está em equilíbrio):



3º passo: Retira três bolas com o número um do prato do lado direito da balança.

Questão nº1: O que aconteceu à balança depois de retirares três bolas com o número um do prato do lado direito? Porque é que achas que isso acontece?

4º passo: Volta a colocar as três bolas com o número um no prato do lado direito da balança. Depois de as teres acrescentado na balança, retira uma bola com o número um de cada prato da balança.

Questão nº2: O que aconteceu à balança depois de retirares uma bola com o número um de cada prato? Porque é que achas que isso acontece?

5º passo: Volta a colocar as bolas com o número um na balança, uma em cada prato da balança (a balança tem de ficar como está representada no **2º passo**). Agora, acrescenta duas bolas com o número um em cada prato da balança.
Questão nº3: O que aconteceu à balança depois de acrescentares duas bolas com o número um em cada prato? Porque é que achas que isso acontece?

6º passo: Retira as duas bolas que acrescentaste em cada prato da balança (a balança tem de ficar como está representada no **2º passo**). Agora, duplica o número de bolas que tens em cada prato. Ou seja, em cada prato tem de estar o dobro dos elementos que tinhas inicialmente.
Questão nº4: O que aconteceu à balança depois de teres duplicado o número de elementos existentes em cada prato? Porque é que achas que isso acontece?

7º passo: Retira as bolas que acrescentaste em cada prato da balança (a balança tem de ficar como está representada no **2º passo**). Agora, reduz o número de bolas de cada prato da balança para metade. Ou seja, em cada prato tem de estar metade dos elementos que tinhas inicialmente.
Questão nº5: O que aconteceu à balança depois de teres reduzido para metade o número de elementos existentes em cada prato? Porque é que achas que isso acontece?

8º passo: Quando terminares, tira uma fotografia e envia para o Classroom.

Bom trabalho!

Anexo 3: Plano de aula da 5.ª sessão da intervenção pedagógica

Plano de aula da 5ª sessão de intervenção

Tópico: Princípios de equivalência de equações.

Objetivos: Reconhecer que se obtém uma equação equivalente adicionando ou subtraindo um mesmo número a ambos os membros, ou multiplicando-os ou dividindo-os por um mesmo número não nulo e designar estas propriedades por "princípios de equivalência".

Conhecimentos prévios: Realização do guião sobre os Princípios de equivalência de equações, disponibilizado na *Classroom*.

Descrição da aula:

1º momento: Correção das respostas dos alunos ao guião disponibilizado na *Classroom*. Durante a correção serão replicados os passos indicados no guião através da applet https://www.cokitos.pt/equacoes-de-equilibrio-de-algebra/play/. Ou seja, os alunos expõem as suas respostas depois de ser replicado o passo que o ilustra.

Objetivo das questões do guião:

1- Os alunos cheguem à conclusão de que, quando adicionam ou subtraem o mesmo peso a ambos os pratos da balança, não alteram a relação de equilíbrio existente.
2- Os alunos concluírem que o equilíbrio também não se altera quando se multiplica ou divide o número de bolas em cada prato.

2ºmomento:

- Explicação aos alunos, da relação que se pode estabelecer entre o estado de equilíbrio de dois pratos de uma balança e a igualdade entre dois membros da equação.

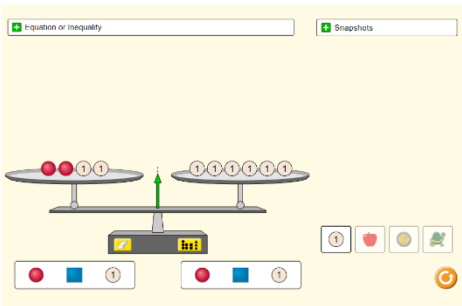


Figura 1: Balança em equilíbrio da atividade anterior

Comentários

Turma do 7.º ano de escolaridade.
Duração: 90 minutos

Esta tarefa permite uma primeira introdução aos princípios de equivalência.

Todos os momentos que se seguem são momentos de interação Professora - alunos

Continuando na applet e mantendo o exemplo utilizado no guião, como evidenciado na Figura 1, questionar a turma:

- Quanto será que pesa uma bola vermelha?

(ouvir as respostas dos alunos)

- Conseguem formular uma equação que nos permita descobrir o peso de cada bola vermelha?

(ouvir as respostas dos alunos)

Depois de formulada a equação, através da applet http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_324_g_3_t_2.html?open=instructions&from=category_g_3_t_2.html pedir aos alunos que representem a equação na balança, como se encontra representado na Figura 2.

Espera-se que os alunos consigam perceber que:

- Como não conhecem o peso da bola vermelha, ou seja, estão perante um valor desconhecido, o designem por x .

- Como a balança está em equilíbrio, ou seja, ambos os pratos têm igual peso, a equação que a balança sugere é $2x + 2 = 6$.

- Para descobrirem o peso da bola terão de descobrir o valor de x.

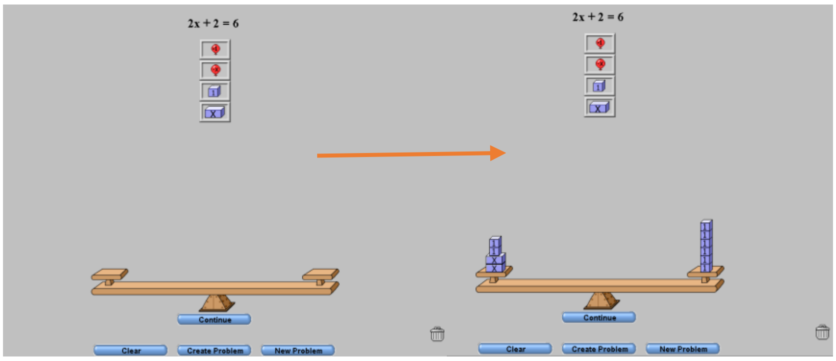


Figura 2: Exemplificação do primeiro passo

Irá ser explicado aos alunos que existem equações mais complexas do que a apresentada que, mentalmente, seriam difíceis de resolver, suscitando, deste modo, a curiosidade dos alunos para o processo de resolução.

<u>3º momento:</u> Com o intuito de descobrir o peso da bola vermelha, que agora está representado por um cubo, de valor x, propor o seguinte desafio à turma:

- Como o objetivo é determinar o valor de x, sem alterarmos o estado de equilíbrio da balança, o que acham que devemos fazer?

(ouvir a resposta dos alunos)

Espera-se que os alunos consigam perceber que têm de aplicar os conhecimentos adquiridos sobre quando adicionam ou subtraem o mesmo peso a ambos os pratos da balança.

4º momento: Depois de, em conjunto, os alunos perceberem que tem de subtrair dois cubos com o número 1 a cada prato da balança (como ilustrado na Figura 3), explicar-lhes que se obteve uma nova equação, equivalente à inicial.

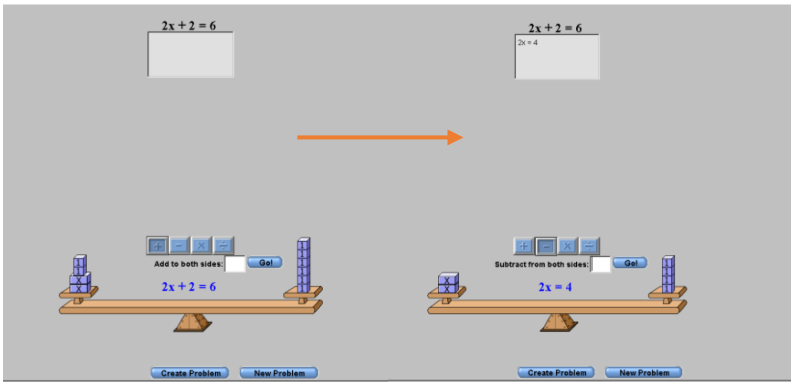


Figura 3: Exemplificação do segundo passo

Para além da exemplificação do processo de resolução da equação através da appelet, os alunos vão registar os passos nos seus cadernos.

<u>5º momento:</u> Explicar aos alunos que acabaram de descobrir a primeira regra para resolver equações: o Princípio de equivalência da adição.

Síntese: Definir Princípio de equivalência da adição, para que os alunos possam registar nos seus cadernos.

<u>6º momento:</u> Continuando a analisar o exemplo anterior:

$$2x + 2 = 6 \Leftrightarrow 2x + 2 - 2 = 6 - 2 \Leftrightarrow 2x = 6 - 2 \Leftrightarrow 2x = 4$$

<u>Questionar os alunos:</u> Observem, com atenção, a primeira e a terceira equação:

$$2x + 2 = 6 \Leftrightarrow 2x = 6 - 2$$

Espera-se que os alunos entendam que o que foi feito, foi passar o termo 2 para o segundo membro, trocando-lhe o sinal.

Conseguem retirar alguma conclusão destes dois passos? Uma possível regra?

(ouvir respostas dos alunos)

Síntese: Definir a Regra Prática da adição.

<u>7º momento:</u> Como ainda não foi descoberto o valor de x, voltar a questionar os alunos:

É importante que os alunos percebam que para simplificarem a equação, têm de isolar a incógnita, de forma que fique com coeficiente 1. Ou seja, neste caso, têm de dividir ambos os membros por 2, ou multiplicá-los por $\frac{1}{2}$.

- Sem alterarmos o estado de equilíbrio da balança, o que acham que devemos fazer para descobrir o valor de x?

(ouvir as respostas)

<u>8º momento:</u> Depois de, em conjunto, os alunos perceberem que tem de dividir ambos os lados por dois (como ilustrado na Figura 4), explicar-lhes, novamente, que voltaram a obter uma nova equação, equivalente à inicial.

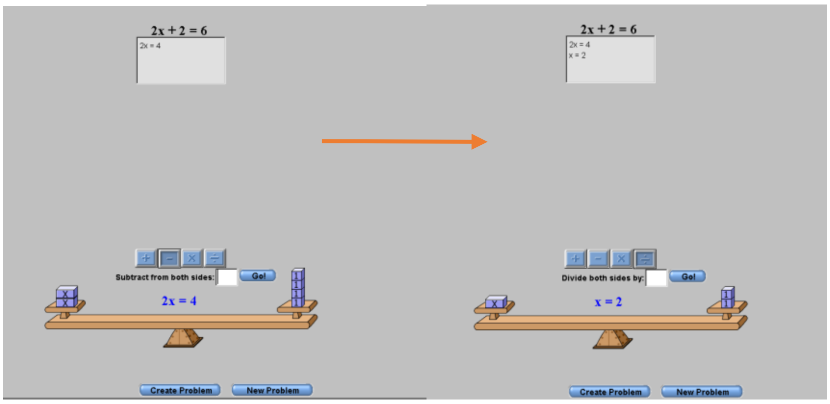


Figura 4: Exemplificação do terceiro passo

9º momento: Explicar aos alunos que acabaram de descobrir a terceira regra para resolver equações: o Princípio de equivalência da multiplicação.

Síntese:

- Definir Princípio de equivalência da multiplicação, para que os alunos possam registar nos seus cadernos.

- Exemplo da resolução da equação $8 = -2x + 6$.

10º momento: Parte prática da aula

Tarefa 1 Resolve as seguintes equações, em $\mathbb{Q}$.

a) $4x = 12$

b) $x + 3 = 7$

c) $2a = a - 5$

d)$-x - 7 = 0$

e) $5y + 5 = 2y - 1$

f) $0 = -2x - 4x - 1 - 7$

g) $2x + 6 = 5x - 8$

11º momento: Momento em que os alunos irão realizar, sozinhos, as três equações seguintes e no final devem enviar fotografia das suas resoluções para a *classroom*.

Tarefa 2 Resolve as seguintes equações, em $\mathbb{Q}$.

a) $3x + 1 = 5x - 8$

b) $-8y - 1 = 1 - 7y - 2 - 5y$

c) $-12x - 5 - 7 = x - 4 + 3x$

Trabalho de casa: Tarefa construída em conformidade com os erros detetados nas resoluções dos alunos às três equações propostas no final da aula.

Tarefas adicionais: Realização da Ficha 5, Cap. 2, Subcapítulo 2, da aplicação Milage Aprender+. Ficha 5 – Equações sem parênteses e sem denominadores: Resolve as seguintes equações. **1.** $3x - 1 = 2x + 3$ **2.** $3 - 3x = -5 + 5x$ **3.** $10x - 3 = -10 + 4$ **4.** $2 - 4x = -2x - 10$ **Material:** Computador, caderno diário, telemóvel, balança de dois pratos com recurso à applet, mesa digitalizadora, material de escrita.	*As tarefas adicionais destinam-se aos alunos que completarem as tarefas mais rapidamente, para que possam continuar a trabalhar.*

Anexo 4: Plano de aula da 6.ª sessão da intervenção pedagógica

Plano de aula da 6ª sessão de intervenção	*Comentários*

Tópico: Resolução de equações aplicando os princípios de equivalência.

Turma do 7.º ano de escolaridade.
Duração: 45 minutos

Objetivos: Análise, identificação e correção de possíveis erros nas equações da aula anterior.

Conhecimentos prévios: Resolver equações do 1.º grau utilizando os princípios de equivalência.

Descrição da aula

1º momento: Exploração, discussão e correção da tarefa disponibilizada como trabalho de casa.

Tarefa: A seguir são apresentadas resoluções de equações, em $\mathbb{Q}$, da Jéssica, da Mariana e do Marco, **com erros**.

Em cada caso, identifica os erros e resolve corretamente a equação proposta.

Resolução da Jéssica	*Resolução da Mariana*	*Resolução do Marco*
$-6x-4-3=x-2+4x$	$2x+5=5x-1+7$	$-4y-2=2-6y-4-3y$
$=-6x+x+4=2+3+4$	$\Leftrightarrow 7x=5x-6$	$\Leftrightarrow 4x+6x+3x=2-4-2$
$= \ -5x+4=9$	$\Leftrightarrow 7x-5x=-6$	$\Leftrightarrow 13x=-4$
$= \ -5x=9-4$	$\Leftrightarrow 2x=-6$	$\Leftrightarrow \frac{13}{13}x=\frac{-4}{13}$
$= \ -5x=5$	$\Leftrightarrow \frac{2}{2}x=\frac{-6}{6}$	$\Leftrightarrow x=\frac{4}{13}$
$= \ \frac{-5}{-5}x=\frac{5}{-5}$	$\Leftrightarrow x=-1$	C.S. $=\left\{\frac{4}{13}\right\}$
$= \ x=-\frac{5}{5}$		
C.S. $=\left\{-\frac{5}{5}\right\}$		

Para a resolução da tarefa, será pedido aos alunos para apresentarem, oralmente, as suas resoluções.
Enquanto os alunos expõem as suas resoluções, cabe ao professor guiá-los, questioná-los, e alertá-los para pormenores que devem ser tidos em atenção.

Exploração

1- Leitura do enunciado da tarefa à turma.

2- Identificação, análise e correção dos erros na resolução da Jéssica.

3- Identificação, análise e correção dos erros na resolução da Mariana.

4- Identificação, análise e correção dos erros na resolução do Marco.

Depois de corrigirem as equações, cada aluno fotografa as suas novas resoluções e envia para a classroom da turma.

2º momento: Cada aluno vai analisar, identificar e corrigir os possíveis erros nas suas equações da aula anterior.

Trabalho de casa: Manual Pi 7– Volume 3 – Pág. 25 – tarefa 4 e 5.

4. Resolve cada uma das seguintes equações. Sempre que necessário, aproxima a duas casas decimais.

4.1. $2x - 3 = 5$ **4.2.** $5x - 6 - x = -3x$ **4.3.** $3z - 8z = 4$

5. Observa, com atenção, as duas situações seguintes e determina, em cada uma delas, o valor de Δ. Explica o teu raciocínio.

5.1.

5.2.

Tarefas adicionais: Realização da Ficha 7, Cap. 2, Subcapítulo 2, da aplicação Milage Aprender+.

Ficha 7 – Solução, equivalência e resolução de equações:

Considere as equações:

(I) $x + 5 = -30$ (II) $2x - 1 = x$

(III) $4 - x + 3x = 8$ (IV) $-8x - 7 = 53 - 5x$

1. Indique o sinal da solução da equação (I).
2. Verifique que 1 é solução da equação (II).
3. Indique uma equação equivalente à equação (III).
4. Resolva a equação (IV).

As tarefas adicionais destinam-se aos alunos que completarem as tarefas mais rapidamente, para que possam continuar a trabalhar.

Material: Computador, caderno diário, telemóvel, mesa digitalizadora, material de escrita.

Anexo 5: Plano de aula da 7.ª sessão da intervenção pedagógica

Plano de aula da 7ª sessão de intervenção	***Comentários***
Tópico: Equações com parênteses **Objetivo:** Resolver equações com parênteses **Conhecimentos prévios:** Resolver equações do 1.ºgrau, aplicando os princípios de equivalência. **<u>1º momento:</u>** Correção do trabalho de casa. **<u>2º momento:</u>** Atividade Motivacional: Truque de mágia <u>Descrição:</u> Para o truque são usadas apenas as cartas com números e os ases que vão representar o número um.	*Turma do 7.º ano de escolaridade.* *Duração: 90 minutos*
1º passo: Baralham-se muito bem as cartas. **2ºpasso:** É pedido a dois alunos para escolherem uma carta cada um, memorizá-la e não dizer qual escolheram. **3ºpasso:** É pedido a cada aluno que, depois de ter memorizado o número que escolheu, faça alguns cálculos: 1.º cálculo –deve multiplicar o número da carta escolhida por 2. 2.º cálculo –deve adicionar 5 ao resultado anterior. 3.º cálculo –deve multiplicar por 5 o resultado obtido anteriormente. **4º passo:** Perguntar a cada aluno qual foi o resultado que obteve. **5º passo:** Adivinhar o número da carta. **<u>3º momento:</u>** Exploração do truque **1ª pergunta:** Conseguem representar matematicamente este problema?	***Objetivo da atividade:*** *Introduzir as equações com parênteses.*
2ª pergunta: A pessoa que está a adivinhar o número da carta que foi escolhida, desconhece o seu valor certo? Como podemos representar esse valor desconhecido? **3ª pergunta:** Considerando, agora, que o valor da carta escolhida é x, sigam as instruções que vos dei anteriormente, e escrevem a expressão algébrica que pode traduzir esses passos.	*Espera-se que os alunos:* *2- Como desconhecem o número da carta, o designem por uma incógnita, por exemplo,* x. *3- Cheguem à expressão* $5(2x+5)$

4ªpergunta: Aluno x e y (alunos que escolheram as cartas no início da aula), qual foi o resultado que obtiveram quando escolheram a vossa carta?

5ª pergunta: Então a expressão $5(2x+5)$ terá de ser igual a que valor?

6ª pergunta: Que nome podemos dar à expressão $5(2x+5) = resultado\ obtido$?

7ªpergunta: O que acham que devemos fazer para descobrir o valor da carta escolhida?

8ª pergunta: Qual acham que deve ser o primeiro passo a aplicar para resolver esta equação?

9ªpergunta: Depois de os alunos obterem a equação simplificada $10x + 25 = resultado\ obtido$, perguntar-lhes quais serão os próximos passos para resolver a equação?

4- Concluam que o valor vai depender da carta que cada aluno escolheu.
5- Entendam que a expressão $5(2x+5)$ tem de ser igual ao resultado dos cálculos que fizeram depois de terem escolhido a carta.
6- Percebam que a expressão é uma equação.
7- Percebam que têm de resolver a equação.
8- Entendam que devem simplificar a equação, desembaraçando de parênteses, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação.
9- Entendam que têm de aplicar os conhecimentos que já adquiriram nas últimas aulas, sobre os princípios de equivalência, ou seja, que basta subtrair 25 ao resultado obtido e dividir esse valor por 10.

<u>4º momento:</u> Parte prática

Tarefa 1 Resolve as seguintes equações, em $\mathbb{Q}$.

a) $6(x-1)+2=5$

b) $3+2(x-5)=6x-15$

c) $9-(4x+6)=1+(-3x+5)$

d) $-(-7+x)=3(6-4x)$

Tarefa 2 Resolve as seguintes equações, em $\mathbb{Q}$.

a) $-3x+2(x-1)=-2-2(x-4)+2x$

b) $x-3(x-2)-(2x-6)=0$

c) $1-2(3-x)+2x=-(x-1)+4x$

Parte prática:
A parte prática da aula vai ser dividida em dois momentos:
- Primeiro, os alunos vão resolver a tarefa 1, sendo que no final será feita a correção, em conjunto.
- De seguida, irão resolver a tarefa 2, sozinhos e sem ajuda, e quando terminarem devem enviar fotografia das suas resoluções para a classroom.

Trabalhos de casa:

Tarefa 1: Tarefa que irá ser construída em conformidade com os erros detetados nas resoluções dos alunos às três equações propostas no final da aula.

Tarefa 2 Considera as seguintes equações, em $\mathbb{Q}$.

1) $a - 1 = -1$ | **2)** $-7x - (1 + x) = -1 - 8x$ | **3)** $2x = 2(x + 1)$

4) $3x = 3x + 2$ | **5)** $2x + 1 = 3$ | **6)** $-x - 3 = -3 - x$

1. Resolve cada uma das equações anteriores.
2. Agrupa as equações de acordo com o número de elementos do conjunto-solução.

Tarefas adicionais: Realização da Ficha 10, Cap. 2, Subcapítulo 2, da aplicação Milage Aprender+.

As tarefas adicionais destinam-se aos alunos que completarem as tarefas mais rapidamente, para que possam continuar a trabalhar.

<u>Ficha 10 – Expressões algébricas e resolução de equações com parênteses.</u>

Questão 1. Qual das equações é equivalente à equação seguinte:

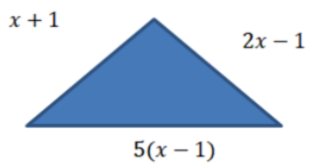
$$\mathbf{3(x-2) = -(x+3)}$$

a) $3x - 6 = x - 3$ **b)** $-6x + 10 = 0$

c) $3x - 6 = -x - 3$ **d)** $-6x - 10 = 0$

Questão 2. Resolve a seguinte equação $-3(x - 2) = 5x + 4$ com parênteses apresentando o conjunto solução na sua forma irredutível.

Questão 3. Considera as expressões que representam as medidas, em cm, do triângulo ao lado. A figura não se encontra representada à escala.



1. Escreve uma expressão algébrica simplificada que represente o perímetro do triângulo.

2. Determina o valor do perímetro, supondo que $x = 2$.

Material: Computador, telemóvel, caderno diário, baralho de cartas, mesa digitalizadora, material de escrita.

Anexo 6: Plano de aula da 9.ª sessão da intervenção pedagógica

Plano de aula da 9ª sessão de intervenção	***Comentários***

Tópico: Resolução de equações com parênteses.

Turma do 7.º ano de escolaridade.
Duração: 45 minutos

Objetivos: Análise, identificação e correção de possíveis erros nas equações da aula anterior.

Conhecimentos prévios: Resolver equações do 1.º grau com parênteses.

Descrição da aula:

<u>1º momento:</u> Exploração, discussão e correção da tarefa disponibilizada como trabalho de casa.

Tarefa: A Anaís, o Paulo e a Marta resolveram a mesma equação, na aula de Matemática.
Na tabela seguinte apresenta-se a resolução de cada um deles, onde nenhuma está correta.
Em cada caso, identifica os erros e resolve corretamente a equação proposta, em $\mathbb{Q}$.

Para a resolução da tarefa, será pedido aos alunos para apresentarem, oralmente, as suas resoluções.
Enquanto os alunos expõem as suas resoluções, cabe ao professor guiá-los, questioná-los, e alertá-los para pormenores que devem ser tidos em atenção.

Resolução da Anaís	$-4x-2(x-1)=6-3(3-x)$ $\Leftrightarrow -4x-2x-3=6-3\times 3+3\times(-x)$ $\Leftrightarrow -4x-2x-3=6-9-3x$ $\Leftrightarrow -4x-2x+3x=6-9+3$ $\Leftrightarrow -6x+3x=-3+3$ $\Leftrightarrow -3x=3$ $\Leftrightarrow \frac{-3}{-3}x=\frac{3}{-3}$ $\Leftrightarrow x=-1$ C.S. $=\{-1\}$
Resolução do Paulo	$-4x-2(x-1)=6-3(3-x)$ $-4-2x-(-2)=3(3-x)$ $4-2x-(-2)=9+3x$ $-2x+3x=-9+2-4$ $0x=-7-4$ $0x=-11$ $\frac{0}{0}x=-\frac{11}{0}$ $x=-11$
Resolução da Marta	$-4x-2(x-1)=6-3(3-x)$ $\Leftrightarrow -6(x-1)=-3\times 3-3\times x$ $\Leftrightarrow -6x-6=-9-3x$ $\Leftrightarrow -6x+3x=-9+6$ $\Leftrightarrow -6x+3x=-3$ $\Leftrightarrow -3x=3$ $\frac{-3}{-3}x=\frac{3}{-3}=-1$ C.S. $=\{-1\}$

Exploração **1-** Leitura do enunciado da tarefa à turma. **2-** Identificação e análise dos erros na resolução da Anaís. **3-** Identificação e análise dos erros na resolução do Paulo. **4-** Identificação e análise dos erros na resolução da Marta. **5-** Correção da equação.	
<u>2º momento:</u> Cada aluno vai analisar, identificar e corrigir os possíveis erros nas suas equações da aula anterior.	*Depois de corrigirem as equações, cada aluno fotografa as suas novas resoluções e envia para a classroom da turma.*
Tarefas adicionais: Realização da Ficha 17, Cap. 2, Subcapítulo 2, da aplicação Milage Aprender+. <u>Ficha 17 – Resolução de equações com e sem parênteses:</u> Resolve cada uma das seguintes equações, indicando o conjunto-solução. **1.** $5x - 7 = 13$ **2.** $9 - x = 2x + 3$ **3.** $2(3x - 1) = 3 + x$ **4.** $2(4 - x) = 3 - (x + 1)$	*As tarefas adicionais destinam-se aos alunos que completarem as tarefas mais rapidamente, para que possam continuar a trabalhar.*
Material: Computador, caderno diário, telemóvel, mesa digitalizadora, material de escrita.	

Anexo 7: Plano de aula da 10.ª sessão da intervenção pedagógica

Plano de aula da 10ª sessão de intervenção

Tópico: Equações com denominadores

Objetivos: Resolver equações que envolvam coeficientes e termos independentes na forma de fração.

Formato de ensino: Adquire caraterísticas de ensino exploratório.

<u>Atividade Motivacional:</u>

Tarefa 1 A seguir são apresentados exemplos de resolução de 3 equações, em $\mathbb{Q}$. Para o primeiro exemplo são apresentados dois processos distintos para resolver a mesma equação.

Copia, para o teu caderno, todos os exemplos e completa as justificações/explicações de todos os passos.

Exemplo 1

1º Processo:

$$\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}-\frac{7}{3}x$$

Agrupar os termos ______no 1ºmembro e os termos ______ no 2ºmembro, usando a ____________________

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x+\frac{7}{3}x=\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$$

Simplificação dos _______ ____________________

$$\Leftrightarrow \frac{8}{3}x=\frac{1}{3}$$

_________ ambos os membros da equação pelo ______ do coeficiente do termo dependente, usando o Princípio_______________

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8}\left(\frac{8}{3}x\right)=\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}$$

____________________ ____________________

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{8}$$

C.S. $=\left\{\frac{1}{8}\right\}$

2º Processo:

$$\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}-\frac{7}{3}x$$

Adicionam-se (ou subtraem-se) os__________________ e mantém-se os ____________

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{3}=\frac{5-7x}{3}$$

Duas frações com o mesmo ____________ são iguais se os ____________forem iguais também.

$$\Leftrightarrow x+4=5-7x$$

Agrupar os _______________ ____________________

$$\Leftrightarrow x+7x=5-4$$

Simplificação_______________ ____________________

$$\Leftrightarrow 8x=1$$

Divide-se _______________ ____________________

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{8}$$

C.S. $=\left\{\frac{1}{8}\right\}$

Exemplo 2

$$x-3=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \underset{(\times 4)}{\frac{x}{1}}-\underset{(\times 4)}{\frac{3}{1}}=\underset{(\times 2)}{\frac{1}{2}}x+\underset{(\times 1)}{\frac{1}{4}}$$

Colocam-se todos os termos da equação com o mesmo ____________________

$$\Leftrightarrow \frac{4x}{4}-\frac{12}{4}=\frac{2}{4}x+\frac{1}{4}$$

Adicionam-se _________ ____________________ ____________________

$$\Leftrightarrow \frac{4x-12}{4}=\frac{2x+1}{4}$$

Duas frações _________ ____________________

$$\Leftrightarrow 4x-12=2x+1$$

Agrupar no _________ ____________________

$$\Leftrightarrow 4x-2x=12+1$$

Simplificação _________ ____________________

$$\Leftrightarrow 2x=13$$

Divide-se _________ ____________________

$$\Leftrightarrow x=\frac{13}{2}$$

C.S. $=\left\{\frac{13}{2}\right\}$

Exemplo 3

$$\frac{3x+4}{2}=4\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

Desembaraçar de _________ utilizando a ____________ ____________________

$$\Leftrightarrow \frac{3x+4}{2}=4x-\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underset{(\times 3)}{\frac{3x+4}{2}}=\underset{(\times 6)}{\frac{4x}{1}}-\underset{(\times 2)}{\frac{4}{3}}$$

Colocam-se todos os termos ____________________ ____________________

$$\Leftrightarrow \frac{9x+12}{6}=\frac{24x}{6}-\frac{8}{6}$$

Adicionam-se _________ ____________________

$$\Leftrightarrow \frac{9x+12}{6}=\frac{24x-8}{6}$$

Duas frações _________ ____________________

$$\Leftrightarrow 9x+12=24x-8$$

Agrupar no _________ ____________________

$$\Leftrightarrow 9x-24x=-8-12$$

Simplificação_________ ____________________

$$\Leftrightarrow -15x=-20$$

Divide-se_________ ____________________

$$\Leftrightarrow x=\frac{-20}{-15}$$

Simplificação_________ ____________________

$$\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$$

C.S. $=\left\{\frac{4}{3}\right\}$

Comentários

Turma do 7.º ano de escolaridade.

Duração: 90 minutos

A atividade motivacional foi disponibilizada aos alunos, no final da última aula, como trabalho de casa.

Para a resolução da tarefa, será pedido aos alunos para apresentarem, oralmente, as suas resoluções.

Os objetivos da atividade vão ser cumpridos ao longo da sua correção. Ou seja, enquanto os alunos expõem as suas resoluções, cabe ao professor guiá-los, questioná-los, e alertá-los para pormenores que devem ser tidos em atenção.

1º momento da aula: Correção da atividade motivacional

Objetivos específicos da atividade:

Espera-se que com o **1º processo** do exemplo 1, os alunos:

1- Percebam que o **1º passo** foi agrupar os termos com incógnita no 1.º membro e os termos sem incógnita no 2.ºmembro, usando o princípio da adição.

2- Percebam que no **2º passo**, tantos os coeficientes dos termos dependentes como os termos independentes são números racionais, representados na forma de fração e têm o mesmo denominador. Ou seja, espera-se que, compreendam e recordem, que para adicionar (ou subtrair) dois números que estejam representados por frações com denominadores iguais, adicionam-se (ou subtraem-se) os numeradores e mantém-se os denominadores.

3- Compreendam que no **3º passo**, para isolar a incógnita, multiplicaram ambos os membros (princípio de equivalência da multiplicação) pelo inverso do coeficiente do termo dependente.

4- Percebam que no **4º passo**, simplificaram ambos os membros.

Objetivo do 1º exemplo: *os alunos entendem como se pode resolver uma equação que envolva termos na forma de fração, mas todos com o mesmo denominador.*

Espera-se que com o **2º processo** do exemplo 1, os alunos:

1-Percebam que no **1º passo**, como todos os termos da equação estão representados na forma de fração e têm o mesmo denominador, se adicionaram os numeradores e mantiveram-se os denominadores.

2- Entendam que no **2º passo**, quando se elimina os denominadores, se diz que se está a desembaraçar a equação de denominadores. Compreendam também, que só o podem fazer porque, se duas frações são iguais e têm o mesmo denominador, então, os numeradores também têm de ser iguais.

3- Percebam que o **3º passo** foi agrupar os termos com incógnita no 1.º membro e os termos sem incógnita no 2.º membro, usando o princípio da adição.

4- Percebam que no **4º passo**, simplificaram (adicionaram os termos semelhantes) em ambos os membros.

5- Compreendam que no **5º passo**, para isolar a incógnita, dividiram ambos os membros (princípio de equivalência da multiplicação) pelo valor do coeficiente do termo dependente.

Espera-se que com o **2º exemplo**, os alunos:

1 - Compreendam que do **1º passo** para o **2º passo,** colocam-se todos os termos da equação com o mesmo denominador.

2 - Percebam que do **2º passo** para o **3º passo** apenas simplificaram os termos, ou seja, como todos os termos da equação estão representados na forma de fração e têm o mesmo denominador, adicionaram-se os numeradores e mantiveram-se os denominadores.

3 - Percebam que do **3º passo** para o **4º passo,** tal como aconteceu no exemplo anterior, se elimina os denominadores, ou seja, estamos a desembaraçar a equação de denominadores.

4 - Depreendam, que a partir do **4º passo**, seguem-se os passos de resolução de uma equação sem parênteses e sem denominadores.

Objetivo do 2º exemplo: *os alunos entendem como se pode resolver uma equação que envolva termos na forma de fração, com diferentes denominadores.*

Conclusão que os alunos devem alcançar do 2º exemplo: *Para resolver uma equação com denominadores, reduzem-se todos os termos da equação ao mesmo denominador e, de seguida, desembaraça-se de denominadores.*

Espera-se que com o **3º exemplo**, os alunos:

1- Compreendam que do **1º passo** para o **2º passo,** aplicou-se a propriedade distributiva da multiplicação para se retirar os parênteses, ou seja, desembaraça-se a equação de parênteses.

2- Compreendam que do **2º passo** para o **3º passo,** colocam-se todos os termos da equação com o mesmo denominador e a partir daí, constatem que após terem desembaraçado a equação de parênteses, seguem-se os passos de resolução do exemplo anterior.

2º momento: Parte prática da aula

Tarefa 1 Resolve as seguintes equações, em $\mathbb{Q}$.

a) $\frac{x-5}{2} = \frac{3x+1}{2}$

b) $\frac{x}{3} + 4 = \frac{x}{2} - 1$

c) $\frac{5(x+2)}{2} - \frac{x}{5} = 5$

d) $2x - (1 - 3x) - \frac{4-x}{3} = 1$

Tarefa 2: Resolve as seguintes equações, em $\mathbb{Q}$.

a) $\frac{2}{5} - 3x = \frac{12}{5}$

b) $\frac{x-1}{2} = \frac{x}{3} - (x - 3)$

c) $\frac{2(x-1)}{3} = \frac{3}{2} - \frac{x+1}{6}$

Trabalho de casa: Tarefa construída em conformidade com os erros detetados nas resoluções dos alunos às três equações propostas no final da aula.

Tarefas adicionais: Realização da Ficha 5, Cap. 2, Subcapítulo 5, da aplicação Milage Aprender+.

<u>Ficha 5 – Equações com denominadores e problemas recorrendo a equações</u>

1. Resolve a equação seguinte.

$$\frac{1}{5}(1 - x) = \frac{1}{2} + x$$

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Apresenta a solução na forma de fração irredutível.

Objetivo do 3º exemplo: *os alunos entendem como se resolve uma equação que envolva parênteses e termos na forma de fração, com diferentes denominadores.*

Conclusão que os alunos devem alcançar do 3º exemplo: *Quando uma equação tem parênteses e denominadores, deve começar-se por tirar os parênteses e, só de seguida, desembaraçar de denominadores.*

Parte prática:

A parte prática da aula vai ser dividida em dois momentos:

- Primeiro, os alunos vão resolver a tarefa 1, sendo que no final será feita a correção, em conjunto.

- De seguida, irão resolver a tarefa 2 e quando terminarem devem enviar fotografia das suas resoluções para a classroom.

As tarefas adicionais destinam-se aos alunos que completarem as tarefas mais rapidamente, para que possam continuar a trabalhar.

.

2. A organização «Médico em Casa» presta assistência médica ao domicílio. Os utentes pagam a consulta e a deslocação do médico. Sabe-se que: • O preço da consulta é 10 euros; • Cada quilómetro percorrido pelo médico na deslocação é pago a 40 cêntimos. O Sr. Pereira adoeceu e recorreu aos serviços da organização «Médico em Casa». Pagou 18 euros pela consulta e pela deslocação do médico. Quantos quilómetros percorreu o médico nessa deslocação? Mostra como chegaste à tua resposta. **Material:** Computador, telemóvel, caderno diário, mesa digitalizadora, material de escrita	

Anexo 8: Plano de aula da 11.ª sessão da intervenção pedagógica

Plano de aula da 11ª sessão de intervenção	*Comentários*
Tópico: Resolução de equações com denominadores	
Objetivos: Análise, identificação e correção de possíveis erros nas equações da aula anterior.	*Turma do 7.º ano de escolaridade. Duração: 45 minutos*
Conhecimentos prévios: Resolver equações do 1.º grau com denominadores.	
Descrição da aula:	
<u>1º momento:</u> Exploração, discussão e correção da tarefa disponibilizada como trabalho de casa.	
Tarefa: A Bruna e o Hugo resolveram a mesma equação, na aula de Matemática.	
Na tabela seguinte apresenta-se a resolução de cada um deles, onde nenhuma está correta.	
Em cada caso, identifica os erros e resolve corretamente a equação proposta, em $\mathbb{Q}$.	*Para a resolução da tarefa, será pedido aos alunos para apresentarem, oralmente, as suas resoluções. Enquanto os alunos expõem as suas resoluções, cabe ao professor guiá-los, questioná-los, e alertá-los para pormenores que devem ser tidos em atenção.*

Resolução da Bruna	***Resolução do Hugo***
$\frac{x}{3}-\frac{5(2x-1)}{2}=1-3x$	$\frac{x}{3}-\frac{5(2x-1)}{2}=1-3x$
$\Leftrightarrow \frac{x}{3}-\frac{10x-5}{2}=1-3x$	$\underset{(\times 2)}{\frac{x}{3}}-\underset{(\times 3)}{\frac{10x+5}{2}}=1-3x$
$\Leftrightarrow x-10x-5=1-3x$	$\frac{x}{6}-\frac{30x+15}{6}=1-3x$
$x-10x=5+1$	$x-30x+15=1-3x$
$-9x=6$	$x-30x-3x=1+15$
$\frac{-9x}{-9}=\frac{6}{-9}=x=\frac{6}{9}$	$29x-3x=16$
	$26x=16$
C.S. $=\frac{6}{9}$	$\frac{26x}{26x}=\frac{16}{26}$
	$x=\frac{16}{26}$

Exploração **1-** Leitura do enunciado da tarefa à turma. **2-** Identificação e análise dos erros na resolução da Bruna. **3-** Identificação e análise dos erros na resolução o Hugo. **4-** Correção da equação. **<u>2º momento:</u>** Cada aluno vai analisar, identificar e corrigir os possíveis erros nas suas equações da aula anterior. **Trabalho de casa:** Atribuições da Khan Academy. **Tarefas adicionais:** **Tarefa:** Resolve as seguintes equações, em $\mathbb{Q}$. **a)** $x-\frac{x+2}{3}=0$ **b)** $\frac{x-1}{3}=\frac{2x+3}{2}$ **c)** $-(x+1)-\frac{x}{3}=5$ **d)** $2(x-3)+\frac{x-1}{2}=5$ **Material:** Computador, caderno diário, telemóvel, mesa digitalizadora, material de escrita.	*Depois de corrigirem as equações, cada aluno fotografa as suas novas resoluções e envia para a classroom da turma.* *As tarefas adicionais destinam-se aos alunos que completarem as tarefas mais rapidamente, para que possam continuar a trabalhar.*

Anexo 9: Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Exmo(a). Sr(a). Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade de Minho, enquanto professora estagiária, pretendo desenvolver uma experiência de ensino que potencie a aprendizagem dos alunos. O desenvolvimento dessa experiência implica a recolha de dados, que serão obtidos através da resolução de tarefas, observação de aulas e questionários. Para uma melhor compreensão das atividades que se desenvolvem na aula de Matemática necessito de proceder à recolha de dados através de gravações (áudio e vídeo). Para esse fim, venho por este meio solicitar a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio e vídeo dos dados necessários à concretização da experiência de ensino e de aprendizagem na sala de aula do seu educando.

Comprometo-me a usar os dados apenas para fins académicos e a não divulgar o nome da escola e dos alunos, nem expor qualquer indicador que envolva o seu educando. Só me interessa a informação que me ajude a repensar e a melhorar as estratégias de ensino em prol da aprendizagem dos alunos.

Agradeço desde já a sua colaboração. Para qualquer esclarecimento adicional pode contactar-me através do correio eletrónico: ______________________________

________________, _____ de novembro de 2020

A Professora Estagiária,

____

Sara Sofia de Lima Pinto

- -

Autorização

Eu, ____, Encarregado de Educação do(a) aluno(a) ____, autorizo que se faça o registo em áudio e vídeo das atividades de ensino e de aprendizagem na aula de Matemática que envolvem o meu educando desde que seja salvaguardado o anonimato do seu nome e de qualquer indicador que o indicie.

Encarregado(a) de Educação,

____

Anexo 10: Questionário Final

No âmbito da realização de um estudo de investigação sobre *O erro na regulação da aprendizagem de equações*, que constitui objeto de estudo do meu relatório de estágio profissional do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, venho pedir a tua colaboração para responder às questões que a seguir são apresentadas.
As respostas às questões serão mantidas confidenciais e serão usadas para um estudo sempre sob a forma de anonimato.

Questionário Final

1- Durante as aulas dedicadas à resolução de equações, cometeste algum erro? ☐Sim ☐Não

2- Se sim, quais consideras que foram as causas pelas quais cometeste algum erro?

____

____

____

____

3- Na tua opinião, quando cometes um erro, como é que o deves encarar?

____

____

____

4- Já alguma vez tinhas corrigido alguma tarefa tua, com o objetivo de descobrir os teus próprios erros, sem antes teres acesso à sua resolução ou a qualquer tipo de ajuda? ☐Sim ☐Não

4.1. Se sim, explica como e em que disciplina aconteceu. ________________________

____

____

5- Consideras que a análise/discussão das tarefas realizadas a partir dos erros detetados nas resoluções das equações da turma:

a) Foi importante, pois apercebi-me imediatamente de alguns erros que cometia;
b) Foi importante, pois embora não me tenha apercebido de imediato de erros que possa ter cometido, fez-me estar atento em situações futuras;
c) Foi irrelevante para a minha aprendizagem, embora tenha estado atento/a, esta tarefa em nada alterou os meus conhecimentos;
d) Foi-me indiferente, pois não estive atento/a;
e) Outra. ____________________

6- Quando fui corrigir as minhas resoluções das equações:

a) Consegui descobrir todos os meus erros e percebi o porquê de ter errado;

b) Consegui descobrir a maioria dos meus erros e percebi o porquê de ter errado nesses passos;

c) Apesar de ter descoberto poucos erros, já foi bom pois consegui percebê-los;

d) Não consegui corrigir as equações;

e) Outra. ____

7- Consideras que conseguiste aprender com os teus erros? ☐Sim ☐Não

Justifica a tua resposta. ____

____

____

____

8- Depois de teres detetado e compreendido os teus erros, quais são os aspetos (cuidados) que mais tens em atenção quando resolves equações, para não voltares a cometer os mesmos erros?

____

____

____

____

____

9- Nas afirmações seguintes, assinala com **X** no quadrado que mais se adequa à tua opinião, considerando a seguinte escala: **D - Discordo; I - Indiferente; C - Concordo**;

Quando resolvo uma equação sinto dificuldades:	**D**	**I**	**C**
Na adição de termos semelhantes.	☐	☐	☐
Em desembaraçar (eliminar) de parênteses, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação.	☐	☐	☐
Em reduzir todos os termos ao mesmo denominador.	☐	☐	☐
Aplicar os princípios de equivalência.	☐	☐	☐
Desembaraçar (eliminar) os denominadores.	☐	☐	☐
Outra: ____			

As minhas dificuldades devem-se a:

	D	I	C
Falta de algumas bases matemáticas;	☐	☐	☐
Falta de concentração enquanto resolvo as equações;	☐	☐	☐
Falta de interesse pela disciplina de Matemática;	☐	☐	☐
Falta de confiança nas minhas capacidades;	☐	☐	☐
Falta de atenção durante as aulas;	☐	☐	☐
Falta de estudo;	☐	☐	☐
Outra: ____			

10- Indica aspetos positivos (até três) desta estratégia de ensino que valoriza os erros dos alunos nas atividades de aprendizagem.

____

____

____

____

11- Indica aspetos negativos (até três) desta estratégia de ensino que valoriza os erros dos alunos nas atividades de aprendizagem.

____

____

____

____

12- Comenta a seguinte frase: "Errar faz parte do processo de aprendizagem".

____

____

____

13- Comenta a seguinte frase: "Quem tem ambições, não se pode dar ao luxo de errar".

____

____

____

Obrigada pela tua participação!