Universidade do Minho
Instituto de Educação

Eliane Bihuna de Azevedo

Vivenciando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral

junho de 2019

Vivenciando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral

Eliane Bihuna de Azevedo

UMinho | 2019

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Eliane Bihuna de Azevedo

Vivenciando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral

Tese de Doutoramento em Ciências da Educação
Especialidade em Educação Matemática

Trabalho efetuado sob a orientação do
Professor Doutor Pedro Manuel Baptista Palhares
e da
Professora Doutora Elisandra Bar de Figueiredo

junho de 2019

DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha família de sangue e pela de coração (que cresceu durante a estadia em Braga!), além de ter me agraciado com saúde e força. Dente todos esses elementos que foram fundamentais para a consumação deste sonho, destaco o meu filho Emanuel, que tornou mais leve e mais humana essa àrdua caminhada.

A todos os envolvidos na concretização da convênio firmado entre a UDESC e a UMINHO que possibilitaram a capacitação de seus servidores.

Aos meus orientadores, pela parceira estabelecida, pelo auxílio na condução do trabalho e no discernimento sobre os rumos da pesquisa, principalmente nos momentos que me senti “perdida”, pois foram momentos de muito aprendizado.

À Elisandra que aceitou o convite de ser minha orientadora brasileira, pois essa função poderia ter posto em risco nossa amizade, entretanto, acredito que esse período nos fortaleceu como amigas, colegas de trabalho e pesquisadoras.

Aos meus alunos de *Cálculo*, desde os “cobaias” - como eles próprios se denominavam - até os últimos que participaram da pesquisa, pois sem o engajamento deles na minha investigação, este projeto não teria se concretizado.

Aos professores que de alguma forma contribuíram com este trabalho, seja participando de alguma das etapas da pesquisa ou opinando/compartilhando experiências/tarefas.

Ao meu ex-aluno Marcos por compartilhar comigo seu interesse em ingressar na pesquisa sobre a Resolução de Problemas e sua paixão pelo Cálculo. A partir daquele momento pude dar minha contribuição para que seus objetivos fossem efetivados bem como nasceu meu interesse pela temática de Resolução de Problemas, pois o Cálculo já era amor antigo.

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

Vivenciando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral

RESUMO

O *Cálculo* fornece elementos fundamentais para o desenvolvimento de conceitos das áreas específicas dos cursos relacionados com as Ciências Exatas e é componente curricular obrigatória do primeiro ano. Apesar de sua importância, ao *Cálculo* costumam estar associados elevados índices de repovação e de evasão. Um dos motivos desse, apontado pela literatura, está relacionado com a metodologia de ensino adotada. A metodologia de ensino predominante no Ensino Superior brasileiro é a tradicional. As aulas de *Cálculo* da UDESC/Joinville inserem-se neste contexto tanto com relação à abordagem metodológica quanto ao fracasso escolar. Nesse contexto, intencionando contribuir com a aprendizagem dos estudantes e inovar a sua prática docente, a professora investigadora desenvolveu esta pesquisa cujo objetivo geral foi desenvolver estratégias para utilizar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática para ensinar conteúdos de *Cálculo* através da Resolução de Problemas (RP) durante os horários regulares de aula. Diante desse objetivo, as questões de investigação que nortearam o trabalho foram: Como é que a metodologia de resolução de problemas pode contribuir para a aprendizagem? Quais as dificuldades sentidas pelos alunos durante a realização de atividades usando RP? Quais as dificuldades sentidas pelo professor ao inserir a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através RP nas aulas de *Cálculo* e como superá-las? O público participante foi constituído pelos estudantes regularmente matriculados na disciplina de *Cálculo* ministrada pela pesquisadora, a recolha dos dados ocorreu durantes três semestres letivos consecutivos, tendo iniciado no ano de 2016. Os dados analisados com mais ênfase são oriundos das turmas de *Cálculo* dos cursos de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Química do primeiro semestre letivo de 2017. O diferencial entre essas turmas está no facto de que a segunda dessas é composta essencialmente por ingressantes no Ensino Superior e, a primeira, é formada por estudantes que já cursaram uma disciplina de Matemática Básica ou que são repetentes na disciplina de *Cálculo.* Pela literatura tínhamos conhecimento de que usar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de RP para ensinar novos contéudos através da resolução de problemas era recomendada para um público que desconhecesse o assunto que o professor intencionava ensinar. Entretanto, devido à organização interna e às necessidades da UDESC/Joinville essa condição ideal não era possível de ser atendida naquele momento. Esse foi um desafio a mais na pesquisa, trabalhar com o público não recomendado pela literatura. A abordagem metodológica utilizada neste trabalho foi a pesquisa mista com design concorrente integrado, com predominância do método qualitativo e a metodologia de investigação-ação prática. A análise qualitativa e interpretativa dos dados nos revelaram que a metodologia de RP inserida nas aulas de *Cálculo* permite ao aluno ser mais participativo, desenvolver autonomia em seus estudos, usar sua criatividade, aprender com o erro e com os colegas, dentre outros beneficícios. Os dados também nos mostraram que apesar do reconhecimento dos contributos para a aprendizagem que as atividades de formulação de problemas trazem consigo, os estudantes preferem resolver que formular problemas. Dentre os motivos apresentados para essa preferência está o facto de que o tempo dispendido na elaboração de problemas é maior do que na resolução de um problema. Para complementar a análise qualitativa foi realizada a análise quantitativa por meio da análise de covariância dos resultados de um pré-teste e pós-teste, que foram corrigidos de acordo com uma escala holística focada. Essa análise nos permitiu concluir que a pesquisa promoveu mudanças estatisticamente significativas na aprendizagem da turma do curso de Licenciatura em Química. Esse resultado possibilita-nos inferir que a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de RP pode trazer mais contribuições para a aprendizagem de turmas constituídas por ingressantes que sejam (por maioria) oriundos de escolas públicas e que apresentem maiores dificuldades relacionadas com conteúdos de matemática elementar. Por fim, esta pesquisa mostrou que a metodologia de RP pode trazer contributos para a aprendizagem mesmo de estudantes que tragam consigo algum conhecimento anterior do assunto, mas para tanto, o professor precisa se dispor a priorizar em suas aulas a qualidade das discussões promovidas à quantidade de tarefas realizadas.

Palavras-chave: Ensino de *Cálculo*. Resolução de Problemas. Formulação de Problemas. Investigação-ação.

Experiencing the methodology of teaching-learning-assessment through of Problems Solving in Differential and Integral Calculus classes

ABSTRACT

Calculus provides fundamental elements for the development of concepts of the specific areas of the courses related to Exact Sciences and is a compulsory curricular component of the first year. Despite its importance, the *Calculus* usually has high indexes of reprovation and evasion. One of the reasons for this, pointed out in the literature, is related to the teaching methodology adopted. The predominant teaching methodology in Brazilian Higher Education is the traditional one. The *Calculus* classes of UDESC/Joinville are inserted in this context both with regard to methodological approach and school failure. In this context, intending to contribute to students' learning and innovate their teaching practice, the researcher developed this research whose general objective was to develop strategies to use the methodology of teaching-learning-assessment of Mathematics to teach contents of *Calculus* through Problem Solving (PS) during regular classroom hours. Faced with this objective, the research questions that guided the work were: How can problem solving methodology contribute to the learning? What are the difficulties experienced by the students during their activities using PS? What are the difficulties experienced by the teacher when inserting the teaching-learning- assessment methodology through of PS in the *Calculus* classes and how to overcome them? The participating public was made up of the students regularly enrolled in the discipline of *Calculus* administered by the researcher, the data collection took place during three consecutive semesters beginning in 2016. The data analyzed with more emphasis come from the classes of *Calculus* of the courses of Degree in Mathematics and Degree in Chemistry of the first semester of 2017. The differential between these classes is in the fact that the second one of these is composed essentially by students in Higher Education while the first, is formed by students who have already studied a Basic Mathematics or who are repeating the discipline of *Calculus*. From the literature we learned that using teaching-learning-assessment methodology of PS to teach new contents through problems solving was recommended for an audience that did not know the subject that the teacher intended to teach. However, due to the internal organization and the needs of UDESC/Joinville this ideal condition could not be met at that moment. This was an additional challenge in research, working with the public not recommended by literature. The methodological approach used in this work was the mixed research with integrated concurrent design, with predominance of the qualitative method and the methodology of investigation-practical action. The qualitative and interpretive analysis of the data revealed that the PS methodology included in the *Calculus* classes allows the student to be more participatory, to develop autonomy in their studies, to use their creativity, to learn from mistakes and with colleagues, among other benefits. The data also showed us that despite the recognition of the learning contributions that problem solving activities bring with them, students prefer to solve than pose problem. Among the reasons presented for this preference is the fact that the time spent in elaborating problem is greater than in solving a problem. In order to complement the qualitative analysis, the quantitative analysis was performed by means of the covariance analysis of the results of a pre-test and post-test, which were corrected according to a holistic focused scale. This analysis allowed us to conclude that the research promoted statistically significant changes in the learning of the Graduation Class in Chemistry. This result allows us to infer that the teaching-learning-assessment methodology of PS can bring more contributions to the learning of classes that are made up of students who are similar to the students in this class, that is, that they are (by majority) from public schools and which present greater difficulties related to elementary mathematical contents. Finally, this research showed that the methodology of PS can bring contributions to the learning even of students who bring with them some previous knowledge of the subject that one wishes to teach through PS and that it is possible to fulfill the program content making use of this methodological approach, but to do so, the teacher needs to prioritize in his classes the quality of the discussions promoted to the amount of tasks performed.

Keywords: Calculus Teaching. Problem Solving. Problems Posing. Action-research.

ÍNDICE

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

A1 – Trabalhos que implementam e[ou] analisam uma prática de ensino

A2 – Trabalhos que resultam em uma proposta de ensino com abordagens baseadas na teoria cognitiva e na aprendizagem significativa

A3 – Trabalhos que discutem e analisam concepções apresentadas pelos alunos/professores no processo de aprendizagem/ensino de acordo com algum referencial teórico

A4 – Trabalhos que analisam interação em ambientes virtuais em curso de Cálculo ofertados totalmente/parcialmente na modalidade de ensino a distância

ANCOVA – Análise de covariância

ANOVA – Análise de variância

B1 – Trabalhos que apresentam revisão de literatura e proposta de aula não implementada

B2 – Trabalhos que abordam e discutem as dificuldades no ensino e aprendizagem de Cálculo

B3 – Trabalhos que se apoiam na análise de documentos ou histórica

B4 – Trabalhos que discutem e analisam a abordagem dada a um conteúdo específico segundo a teoria cognitiva

BCC – Bacharelado em Ciência da Computação

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior

CDI – Cálculo Diferencial e Integral

CEFET – MG – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

D – Doutorado

DMAT – Departamento de Matemática

EaD – Ensino a distância

EBRAPEM – Encontro Nacional de Estudantes Brasileiros de Pós-Graduação em Educação Matemática

EC – Erro conceitual

EIAG – Extração inadequada de informações por meio da análise gráfica

FP – Formulação de Problemas

FUVATES – Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social

GIRP – Grupo de Investigação em Resolução de Problemas

GPEAEM – Grupo de Pesquisas e Estudos Avançados em Educação Matemática

GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas

ICME – *International Congress on Mathematical Education*

ICMI – *International Commission on Mathematical Instruction*

IEM – Incorreção em escritas matemáticas

IFSP – Instituto Federal de Educação, ciência e Tecnologia de São Paulo

IM – Investigações Matemáticas

IMPA – Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

LASALLE – Centro Universitário La Salle

LEF – Licenciatura em Física

MA – Mestrado acadêmico

MAT – Turma do Curso de Licenciatura em Matemática

MP – Mestrado profissional

NCTM – *National Council of Teachers of Mathematics*

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PPC – Projetos Políticos de Cursos

PUC – MG – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

PUC – SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

QUI – Turma do Curso de Licenciatura em Química

RP – Resolução de Problemas

RV – Respostas vagas

UC – Unidade Curricular

UDESC – Universidade do Estado de Santa Catarina

UDESC/Joinville – Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina

UEA – Universidade do Estado do Amazonas

UEL – Universidade Estadual de Londrina

UEPB – Universidade Estadual da Paraíba

UERJ – Universidade do Estado do Rio de Janeiro

UERR – Universidade Estadual de Roraima

UESC – Universidade Estadual de Santa Cruz

UFABC – Universidade Federal do ABC

UFBA – Universidade Federal da Bahia

UFC – Universidade Federal do Ceará

UFERSA – Universidade Federal Rural do Semi-Árido

UFES – Universidade Federal do Espírito Santo

UFG – Universidade Federal de Goiás

UFJF – Universidade Federal de Juiz de Fora

UFMA – Universidade Federal do Maranhão

UFMS – Universidade Federal de Santa Maria

UFN – Universidade Franciscana

UFOP – Universidade Federal de Ouro Preto

UFPA – Universidade Federal do Pará

UFPI – Fundação Universidade Federal do Piauí

UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina

UFSJ – Universidade Federal de São João Del-Rei

UFT – Universidade Federal do Tocantins

UFTM – Universidade Federal do Triângulo Mineiro

UMINHO – Universidade do Minho

UNB – Universidade de Brasília

UNESP – Bauru – Universidade Estadual Paulista, Campus de Bauru

UNESP – Marilia – Universidade Estadual Paulista, Campus de Marilia

UNESP – Rio Claro – Universidade Estadual Paulista, Campus de de Rio Claro

UNESP – São José do Rio Preto – Universidade Estadual Paulista, Campus de São José do Rio Preto

UNIAN – Universidade Anhanguera de São Paulo

UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

UNICSUL – Universidade Cruzeiro do Sul

UNIFAP – Universidade Federal do Amapá

UNIFRA – Centro Universitário Franciscano

UNISUL – Universidade do Sul de Santa Catarina

UNIVASF – Universidade Federal do Vale do São Francisco

USP – Ribeirão Preto – Universidade de São Paulo, Campus de Ribeirão Preto

USP – Universidade de São Paulo

USS – Universidade Severino Sombra

UTFPR – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A aplicabilidade dos conceitos inerentes à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral ou simplesmente *Cálculo* encontra-se com facilidade em diversas áreas do conhecimento, tais como Física, Química, Matemática, Engenharias, dentre outras. Os conceitos abordados no *Cálculo* fornecem fundamentos sólidos para desenvolver conceitos mais elaborados relacionados com as áreas específicas dos cursos relacionados com a área de Ciências Exatas. Devido à sua importância, a disciplina de *Cálculo* é uma componente curricular obrigatória que integra o primeiro ano de todos os cursos de graduação das universidades brasileiras que estão vinculados a essa área.

Uma pesquisa promovida pelo Instituto Lobo para o Desenvolvimento da Educação da Ciência e da Tecnologia revelou que a taxa de evasão no primeiro ano dos cursos de graduação brasileiros é cerca de duas a três vezes superior que a existente nos anos posteriores (Silva Filho, Montejunas, Hipólito, & Lobo, 2007). Pela experiência docente de treze anos no Ensino Superior e mais de uma década lecionando *Cálculo,* essa investigadora pode inferir que, ao menos na instituição que leciona, o insucesso de muitos estudantes nessa disciplina pode estar associado com a evasão. Estamos relacionando a expressão "insucesso em *Cálculo*" com a não aprovação na disciplina.

Os elevados índices de reprovação em *Cálculo*, como apontados por Figueiredo, Siple, Azevedo e Moro (2014), não são exclusivos do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC/Joinville), Brasil, instituição que essa pesquisadora leciona e em que a investigação de que trata este relatório final foi desenvolvida. No quesito de resultados finais de (não)aprovação em *Cálculo*, na literatura encontramos relatos de realidades similares à da UDESC/Joinville em outras instituições de Ensino Superior brasileiras públicas e privadas (Alvarenga, Dorr & Vieira, 2016; Barufi, 1999; Ferreira, Santos, Silva & Nascimento, 2016; Rezende, 2003; Santos, Pinto, Souza & Félix, 2016; Serafim Filho, 2016; Wrobel, Zeferino, & Carneiro, 2013). Salientamos que as dificuldades associadas com o ensino e a aprendizagem de *Cálculo* não são problemas exclusivos das universidades brasileiras, pois há pesquisas internacionais, como as de David Tall, Anna Sierpinska e James Robert Leitzel (Marin, 2009), relacionadas a essa temática.

No levantamento de teses e dissertações brasileiras que focaram no ensino e/ou na aprendizagem de *Cálculo* que foi realizado por Pagani e Allevato (2014), as autoras identificaram que o insucesso de muitos estudantes nessa disciplina funciona como propulsor de diversas pesquisas acadêmicas de professores preocupados com o seu ensino e aprendizagem. Dentre os diversos motivos de insucesso na disciplina de *Cálculo*, algumas das justificativas encontradas na literatura indicam que as dificuldades de aprendizagem podem estar relacionadas com as deficiências em conteúdos da matemática proveniente dos níveis de ensino anteriores à universidade (Cury, 2009; Lima, Silva, Santos Jr, & Almeida, 2014); o distanciamento entre o que é aprendido nos Ensinos Fundamental[1] e Médio[2] e o conhecimento que é exigido no Ensino Superior (Menestrina & Gougard, 2003); dificuldades de natureza epistemológica (Rezende, 2003), a metodologia de ensino adotada (Pagani & Allevato, 2016; Rafael & Escher, 2015), dentre outros. No Ensino Superior brasileiro a metodologia predominante continua sendo a tradicional (Serafim Filho, 2016), ou seja, apoiado em aulas expositivas. Abdelmalack (2011) e Noguti (2014) corroboram que as aulas de *Cálculo* não fogem desse contexto. Neste estilo de aula o estudante tem contato com os conceitos já formalizados, ou seja, não há espaço para que o aluno possa fazer suas "próprias descobertas" (Almeida, Fatori & Souza, 2010), pois nesses ambientes os estudantes são acostumados a aceitarem as resoluções apresentadas pelo professor, sem muitos questionamentos, visto que nem sempre o docente propicia tal interação.

A realidade do *Cálculo* da UDESC/Joinville, em particular, das turmas dessa investigadora, no tocante às dificuldades dos estudantes atreladas às carências da formação inicial em matemática básica, as reprovações e evasão na disciplina e a abordagem metodológica adotada são similares ao cenário descrito nos parágrafos supracitados. Essa realidade motivou essa pesquisadora a experienciar como seria o ambiente da sala de aula ao adotar uma metodologia de ensino que propiciasse uma maior participação do aluno e comprometimento deste com a sua aprendizagem, pois as suas aulas até àquele momento sempre foram do estilo expositivo dialogado. Para Anastasiou e Alves (2006), esse estilo de aula caracteriza-se pelo professor estabelecer um diálogo com os alunos buscando ser um mediador na construção do conhecimento relacionado ao conteúdo que deseja trabalhar. Entretanto, apesar dessa professora investigadora deixar explícito em seu plano de ensino que esta seria a metodologia de ensino adotada, não costumava deixar muito tempo para que seus estudantes refletissem sobre o que estavam fazendo nem tempo de resolverem exercícios no horário de aula, sem que a professora estivesse explicando no quadro como se resolvia, ou seja, predominava o ensino tradicional. Esse forte enraizamento com o viés tradicional está diretamente relacionado com a formação inicial da investigadora, que é Licenciada em Matemática e mestre em Matemática Aplicada. Diante do exposto sobre o cenário em que o *Cálculo* está inserido, aliando ao facto desta ser a sua disciplina predileta para

[1] O Ensino Fundamental corresponde ao primeiro, segundo e terceiro ciclo de Portugal.
[2] O Ensino Médio corresponde ao Ensino Secundário de Portugal.

lecionar, ao surgir a oportunidade de se capacitar em nível de doutoramento cuja especialidade era a área de Educação Matemática, ao escrever o projeto de tese, essa professora buscou unir o gosto pela disciplina com metodologia de Resolução de Problemas (RP). Na época, conhecia pouco a RP, mas ao ter contato com o texto de Onuchic (2013) em que a autora defende que em turmas que essa metodologia de ensino foi adotada para ensinar conteúdos através da resolução de problemas, professores e alunos não conseguem mais se adequar ao ensino tradicional, a pesquisadora sentiu-se instigada a vivenciar essa abordagem metodológica em sala de aula e chegar à conclusão se de facto a afirmação poderia ser comprovada. Entretanto, como na revisão de literatura percebeu que em Portugal além da RP há trabalhos que adotam por metodologia de ensino as Investigações Matemáticas (IM) e como lhe parecia existir alguma aproximação entre essas duas abordagens metodológicas, essa autora submeteu a proposta de projeto de tese intitulado "Investigações Matemáticas e Resolução de Problemas aplicados ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral". Entretanto, após iniciar o doutoramento percebeu-se que, pela inexperiência da investigadora em ambas abordagens e por outros motivos que serão explicados de forma mais detalhada no capítulo referente à metodologia, durante esse período não haveria tempo hábil de desenvolver essa proposta inicial. Dessa forma, optamos por focar somente na metodologia de RP e estabelecemos por objetivo geral desenvolver estratégias para utilizar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática para ensinar conteúdos de *Cálculo* através da RP durante os horários regulares de aula. A questão norteadora da pesquisa desenvolvida foi

> **Como utilizar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática para ensinar conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral através da RP de forma a cumprir o plano de ensino?**

Para responder essa pergunta, foram consideradas três questões de investigação: Como é que a metodologia de resolução de problemas pode contribuir para a aprendizagem? Quais as dificuldades sentidas pelos alunos durante a realização de atividades usando RP? Quais as dificuldades sentidas pelo professor ao inserir a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP nas aulas de Cálculo e como superá-las?

A pesquisa desenvolvida na busca por respostas a estas questões de investigação se tratou de uma pesquisa mista por termos dados de cariz tanto qualitativo quanto quantitativo. De acordo com Creswell e Plano Clark (2013), as pesquisas mistas favorecem um entendimento mais detalhado do problema. Neste caso, houve predomínio da análise qualitativa e interpretativa dos dados e a análise quantitativa foi adotada para que pudesse vir a complementar a análise qualitativa, por isso o desenho desta pesquisa mista que mais se adequou ao trabalho foi o concorrente integrado (Creswell, 2009).

Como com essa pesquisa a professora estava realizando uma intervenção na sala de aula, inserindo uma nova metodologia de ensino nas aulas de *Cálculo*, tendo de gerenciar todos os desafios intrínsecos a essa mudança na sua prática e esperava contribuir positivamente com a aprendizagem de seus estudantes, compreendemos que a estratégia geral para recolha de dados apropriada era a investigação-ação prática apoiada em Latorre (2003). Para coleta de dados, além da observação participante por se tratar de uma investigação-ação, foram consideradas as anotações no diário de bordo, os protocolos de respostas, os testes, o plano de ensino da disciplina, os Projetos Políticos Pedagógicos dos Cursos (PPC's) a que os participantes da pesquisa estavam vinculados, dois inquéritos (um sobre a metodologia de RP outro sobre as atividades de formulação de problemas, aqui considerada com uma extensão natural da RP), entrevistas e gravações em áudio. No desenvolvimento da pesquisa foram utilizados o software de geometria dinâmica *GeoGebra* e o *PowerPoint* como recursos tecnológicos que deram apoio ao desenvolvimento das aulas.

Para realizar a análise quantitativa dos dados, as resoluções apresentadas pelos estudantes no pré-teste e no pós-teste foram convertidas em dados numéricos com o auxílio de uma escala holística focada (Charles, Lester & O'Daffer, 1992) para que fosse possível aplicar a análise da covariância (ANCOVA) no software IBM SPSS Statistic 25.

Como essa pesquisa se tratou de uma investigação-ação, o público participante da pesquisa foi constituído pelos estudantes matriculados na disciplina de *Cálculo* que está investigadora era a professora nos dois semestres letivos de 2016 e no primeiro semestre letivo de 2017. Em cada um desses semestres letivos a professora teve duas turmas de *Cálculo.* No ano de 2016 a pesquisadora, apoiada em trabalhos correlatos, estava aprendendo na prática como inserir a metodologia de RP em suas aulas. As ações e reflexões das práticas desenvolvidas nesses dois semestres letivos foram de fundamental importância para que a investigadora pudesse desenvolver sua pesquisa e coletar os dados para a tese no primeiro semestre letivo de 2017. Assim sendo, o público participante, cujos dados foram analisados, foi constituído pelas turmas dos cursos de Licenciatura em Matemática (MAT) e Licenciatura em Química (QUI). A investigadora desenvolveu a pesquisa nas duas turmas em que lecionava para verificar como seria a aceitação e resultados em públicos diferentes, porque o *Cálculo* para a MAT faz parte da segunda fase do curso e, na primeira fase, este curso de graduação possui a disciplina de Matemática Básica. Agregado a esse facto, temos que a ementa dessa unidade curricular é a mesma nos Cursos de Licenciaturas e Engenharia. Por esses motivos, a MAT é uma turma heterogênea tanto em cursos a que os alunos estão vinculados quanto em conhecimento de conteúdos da disciplina de *Cálculo.* Por outro lado, a QUI é formada essencialmente por ingressantes no Ensino Superior.

Para finalizar este capítulo, nos próximos parágrafos, apresentaremos a estrutura com que este relatório final de pesquisa foi organizado.

O Capítulo 1 foi dedicado à apresentação da problemática motivadora dessa pesquisa e um panorama geral sobre a investigação desenvolvida além de apresentar a estrutura geral que o leitor encontrará no restante desse texto.

No Capítulo 2 apresentaremos um pouco da história do desenvolvimento do *Cálculo* moderno, discorreremos sobre o ensino da disciplina de *Cálculo* no território brasileiro e as dificuldades relacionadas com o ensino e a aprendizagem dos conteúdos inerentes a essa disciplina. No final do capítulo será apresentado um estado da arte das pesquisas acadêmicas no âmbito de dissertações e teses depositadas no banco de dados da Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES) que estão relacionadas com assuntos de Cálculo Diferencial e Integral no período de 2013 até ao ano de 2017. Essa busca também foi realizada no repositório da Universidade do Minho, mas focando em teses cuja pesquisa de campo foi desenvolvida no Brasil.

No Capítulo 3 é feita uma revisão de aspectos teóricos relacionados com a metodologia de RP, discussão sobre o entendimento de problema, resolução de problemas, formulação de problemas, estratégias tanto para resolver problemas quanto para formular problemas; e, apresenta-se um panorama de aspectos históricos relacionados com a constituição da metodologia de RP como uma linha de pesquisa no Brasil, um mapeamento de dissertações e teses brasileiras que envolveram o *Cálculo* e a metodologia de RP; e, um retrospecto histórico do surgimento e da abordagem dada à RP no *International Congress on Mathematical Education* (ICME). Além disso é apresentada uma análise de presença da RP nos PPC's dos cursos de graduação da UDESC/Joinville.

O Capítulo 4 é dedicado à descrição detalhada de todo o caminho trilhado ao longo dessa pesquisa. O capítulo inicia apresentando a trajetória acadêmica dessa investigadora e a metodologia de pesquisa adotada. Para estruturar o capítulo, a pesquisadora considerou as orientações de Romberg (2007), que é um roteiro constituído de dez atividades que servem para auxiliar investigadores com menos experiência na pesquisa. Tomando como referência esse roteiro, a investigadora explicou a pesquisa traçada inicialmente, as modificações que ocorrem até chegar na versão final do projeto, além de apresentar as opções metodológicas, as estratégias, os procedimentos de recolha dos dados que foram adotados na busca por responder à pergunta norteadora da pesquisa, o objetivo geral e as questões de investigação. Além disso, apresenta-se aspectos teóricos referentes a pesquisa mista e a investigação-ação que foram, respectivamente, o tipo de abordagem metodológica e a metodologia. Nesse capítulo também explanamos sobre as quatro fases com que dividimos essa pesquisa, as tarefas propostas para propiciar ambientes de RP nas aulas de CDI, além de indicar os resultados da pesquisa que foram divulgados até ao momento da escrita desse texto.

O Capítulo 5 tem por finalidade evidenciar como a professora colocou em prática a RP em suas aulas de *Cálculo*. Para tanto, foram selecionadas quatro das atividades. A investigadora além de descrever as tarefas e como foi o desenvolvimento em sala de aula também apresenta uma análise qualitativa das resoluções apresentadas pelos estudantes e identifica os tipos de erros cometidos nessas resoluções.

O Capítulo 6 apresenta as oito atividades de formulação de problemas que foram realizadas pelos estudantes na modalidade de fórum de discussão na plataforma Moodle. Ao mesmo tempo que explana sobre as situações problemas propostas, classificadas como "semiestruturadas" e "aceitando os dados", exemplifica algumas das criações dos estudantes, analisa as formulações e identifica os assuntos abordados. Em seguida, a investigadora faz uma reflexão sobre a participação dos estudantes no fórum.

O Capítulo 7 discorre sobre a opinião dos estudantes acerca da experiência vivenciada apoiada na análise qualitativa e interpretativa das respostas aos dois inquéritos, um a respeito da metodologia de RP e outro sobre as atividades de formulação de problemas, e das entrevistas semiestruturadas.

O Capítulo 8 é dedicado à análise quantitativa dos dados oriundos do pré-teste e do pós-teste. Nesse capítulo apresenta-se a análise de fiabilidade dos testes e dos pressupostos necessários para a realização da análise de covariância. Todos os testes foram realizados no software de análise estatística denominado IBM SPSS Statistic 25.

Ao final de cada Capítulo (do 2 ao 8) a investigadora apresenta uma síntese dos assuntos abordados e/ou principais conclusões. A análise qualitativa e interpretativa dos dados está diluída ao longo destes capítulos. Por fim, o Capítulo 9 tem por finalidade discutir e responder às questões de investigação a partir da experiência da pesquisa desenvolvida além de ser o momento dessa investigadora apresentar seus comentários finais e sugestões de pesquisas futuras.

CAPÍTULO 2

O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: ASPECTOS HISTÓRICOS, DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM

Antes de discorrermos sobre o Cálculo Diferencial e Integral ou simplesmente *Cálculo* podemos refletir um pouco sobre o significado desta palavra cálculo. O dicionário Bertrand define-a como sendo "concreção dura que se forma na bexiga; acção de calcular; operação para achar resultados da combinação de certos números ou quantidades; uma das partes da matemática, que se preocupa com a resolução de problemas aritméticos ou algébricos" (Figueiredo, 1996, p. 482). Por essa definição podemos perceber que cálculo está associado com operações aritméticas tanto no cotidiano como no ambiente escolar, em todos os níveis de ensino e ramos da Ciências. O sentido que o *Cálculo* tinha na antiguidade converge com seu significado na Medicina, pois é uma palavra de origem latina que significa "pedra", que, na era romana, era usada nos ábacos.

Por outro lado, se questionarmos um estudante que já tenha vivenciado o *Cálculo* como uma disciplina ou até mesmo professores dessa área, esses associariam a palavra com limites, derivadas e integrais que são os conteúdos inerentes a disciplina (Kaput, 1994). Essa concepção não está errada, porém é uma visão limitada, pois *Cálculo* é muito mais do que isso, seus conceitos favoreceram o desenvolvimento de muitas das tecnologias usadas no cotidiano do mundo moderno em variadas áreas de conhecimento. Como exemplos, podemos citar as áreas de Computação, Engenharias, Biologia, Medicina, dentre outras.

O *Cálculo* levou cerca de vinte e três séculos para que suas ideias fossem completamente desenvolvidas. Os primórdios do Cálculo Integral remetem à época de Arquimedes (aproximadamente 250 a. C.) e estão relacionados com processos somativos para o cálculo de algumas áreas, volumes e comprimentos de arco. Por sua vez, a origem do Cálculo Diferencial está associada com problemas de tangentes a curvas e máximos/mínimos e ocorreu somente no final do século XVII com as descobertas de Issac Newton (1642 – 1727) e Gottgried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Apesar das ideias de muitos dos conceitos terem sido resolvidas por construções engenhosas para problemas específicos, quer sejam pelos predecessores pré-gregos, gregos ou islâmicos, ninguém antes de Newton e Leibniz conseguira desenvolver algoritmos que pudessem ser aplicados a novas situações (Katz, 2010), por isso ambos são considerados os inventores do *Cálculo*. E, a nomenclatura Cálculo Diferencial e Integral foi motivada pela necessidade de usar *calculus differentialis* para encontrar tangentes e de usar *calculus summatorius* ou *calculus integralis* para achar quadraturas (Boyer, 2003).

Na primeira parte deste capítulo temos por objetivo apresentar uma síntese de alguns aspectos históricos que retratam a evolução dos principais conceitos do *Cálculo* até às descobertas de Newton e Leibniz. Optamos por esse recorte da história, porque as ideias fundamentais que são ensinadas hoje foram consolidadas no final do século XVII com esses dois famosos cientistas. Na segunda parte do capítulo abordaremos algumas questões relativas ao surgimento do *Cálculo* como disciplina no currículo brasileiro e algumas das dificuldades presentes no seu ensino e aprendizagem. Na terceira e última parte do capítulo apresentaremos um mapeamento das pesquisas brasileiras sobre ensino e aprendizagem em *Cálculo* no período compreendido entre os anos de 2014 a 2017.

2.1. Um pouco da História do *Cálculo*

As primeiras ideias do Cálculo Integral surgiram muito tempo antes do Cálculo Diferencial. A origem da integração está vinculada ao método da exaustão utilizado para calcular áreas, volumes e comprimentos de arcos. De acordo com Boyer (2003), o Papiro de Golonishev ou de Moscov, escrito em aproximadamente 1890 a.C. apresentava alguns problemas matemáticos relacionados com o cálculo do volume de um tronco de pirâmide e área da superfície de um cesto, que corresponderia à de uma superfície esférica.

Segundo Eves (2004), o germe do método da exaustão surgiu com Antífon (cerca de 460 a.C.) propondo solucionar o problema da quadratura do círculo,

> por sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre o círculo e o polígono ao fim exaurir-se-ia. E, como se pode construir um quadrado de área igual à de qualquer polígono, seria então possível construir um quadrado de área igual à do círculo. (Eves, 2004, p. 418).

Essa estratégia de resolução foi criticada por quem acreditava que não seria possível atingir a área do círculo porque uma grandeza estaria sendo subdividida indefinidamente. Entretanto, essa ideia é a base do método da exaustão, que tem o seguinte princípio:

> Se de uma grandeza subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (Eves, 2004, p. 419).

Esse método, creditado a Eudoxo (370 a.C.), pode ser considerado como uma resposta aos paradoxos de Zenão (Eves, 2004) que tinham por finalidade aparente provar que o movimento é ilusório (Silva, 2000). De acordo com Silva (2000), os três paradoxos associados ao movimento são:

> o da dicotomia [Tudo o que se move deve atingir metade do percurso antes de chegar ao fim e, ainda antes de um meio, deve-se atingir um quarto e, antes de um quarto, um oitavo, e assim sucessivamente, sem mais acabar. Logo, o movimento não chega a realizar-se, ao contrário do que parece acontecer.]; o de Aquiles e a tartaruga [Aquiles corre para apanhar uma tartaruga que se afasta dele mas, quando chega ao lugar de onde parte a tartaruga que se afasta dele, já esta lá não está: a distância que os separa é agora mais pequena mas, enquanto Aquiles a percorre, também a tartaruga se desloca e assim sucessivamente, sem mais acabar. Logo, embora caminhando depressa, Aquiles nunca pode atingir a tartaruga, ao contrário do que parece acontecer.]; e o da seta [Lançada de um arco, uma seta fica imóvel em cada instante, pois que, de contrário, ocuparia várias posições num instante, o que é impossível. Ora, o tempo é feito de instantes. Logo, a seta ficará sempre imóvel, contrariamente ao que se observa.] (p. 14).

Como consequência desses paradoxos pode-se perceber que o tempo não é feito de instantes nem um segmento de reta é feito de pontos (Silva, 2000) e que ao considerar-se um número finito de atos, este não ocorrerá (Morris, 1998). Nessa época em que existia somente o reino das grandezas discretas, as grandezas contínuas eram abordadas geometricamente (Boyer, 2003). Observe-se que no método de exaustão já existia a noção primitiva de limites, que é a base necessária para o Cálculo Diferencial que foi descoberto muitos séculos mais tarde.

Para Eves (2004), dentre os estudiosos antigos que trabalharam com o método da exaustão, Arquimedes (250 a. C.) foi "quem aplicou de maneira mais elegante o método de exaustão e quem mais se aproximou da atual e verdadeira integração" (p. 421). Esse método mostrava-se eficiente para provar de forma elegante fórmulas conhecidas. Entretanto, por meio dele não era possível descobrir uma fórmula. Para tanto, considerando ideias de Mecânica, Arquimedes foi o primeiro a usar o método de equilíbrio, também conhecido como método do equilíbrio das alavancas, para encontrar uma expressão matemática que determinasse áreas ou volumes (Katz, 2010). Esse método consiste em:

> corte a região correspondente num número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas finas e (mentalmente) pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centroide conhecidos. (Eves, 2004, p. 422).

Exemplos de como aplicar esse procedimento de Arquimedes, para deduzir fórmulas, foram explorados por Reis (2015) e Benk (2017) em seus respectivos trabalhos de conclusão de curso de graduação intitulados, respectivamente, por “Quadratura da parábola: de Arquimedes à Integral definida” e “O volume da esfera: de Arquimedes ao Cálculo Diferencial e Integral”. Benk, além de explorar como foi feita a dedução da fórmula de volume desenvolvida por Arquimedes, também usou os meios modernos do *Cálculo* para demonstrá-la e ferramentas tecnológicas para construir artefatos que simulam o método do equilíbrio, como o ilustrado na Figura 1.

Figura 1 - Balança de Arquimedes.
Fonte: Benk & Figueiredo, 2017, p. 2.

De acordo com Edwards (1991), alguns autores atribuem a Arquimedes a invenção do *Cálculo*, pois chegara a resultados equivalentes aos obtidos com o *Cálculo* moderno com as ferramentas matemáticas que tinham disponíveis na época. No entanto, esse autor aponta três “ingredientes” que ainda faltavam para o completo desenvolvimento do *Cálculo* naquela época: a explícita introdução do conceito de limites; um algoritmo computacional para o cálculo de áreas e volumes; o reconhecimento da relação inversa entre problemas de áreas e tangentes. E, na opinião de Ávila (2002, p. 86), o motivo do *Cálculo* não ter se desenvolvido com Arquimedes e seus sucessores imediatos está relacionado com “a insistência exagerada no rigor das demonstrações e a preocupação em evitar o infinito”. Ainda, segundo esse autor, Arquimedes conseguia evitar a passagem ao limite usando a “dupla redução ao absurdo”.

Depois dos importantes resultados obtidos por Arquimedes, somente após a publicação de traduções de seus trabalhos na Europa (1540 d.C.) é que o Cálculo Integral voltou a ter contribuições significativas para seu processo evolutivo. Esses aprimoramentos foram dados por Simon Stevin (1548 – 1620) e Luca Valério (1552 – 1618) e consistiram em fazer uma passagem direta do método da exaustão ao limite desviando-se da dupla redução ao absurdo para calcular a área de um segmento parabólico (Eves, 2004).

A ideia das integrais definidas como conhecemos nos dias de hoje foi usada tanto por Stevin (1548 – 1620) quanto por Kepler (1571 – 1630). O primeiro, aplicava à Física para encontrar a força de um fluído exercida pela pressão sobre um dique vertical e, o segundo, à Astronomia para determinar a área das órbitas elípticas dos planetas. Ambos imaginavam uma área subdividida em figuras geométricas planas cujas áreas sabia-se calcular. A ideia de Stevin consistiu em fatiar o "dique em faixas horizontais e então fazer cada uma girar em torno de suas bordas superior e inferior, até que elas se tornassem paralelas ao plano horizontal" (Eves, 2004, p. 424). Por sua vez, Kepler "pensava na área formada de uma infinidade de pequenos triângulos com vértice no Sol e os outros dois vértices em pontos infinitamente próximos um do outro ao longo da órbita" (Boyer, 2003, p. 222). Note-se que o processo de "girar" cada uma dessas áreas planas que foi usado por Stevin corresponde à ideia que usamos no cálculo de volume e, o procedimento de adicionar uma infinidade de áreas muito pequenas, que fora adotado por Kepler, pode ser visto como precursor da integral definida por meios das somas de Riemann. Para que o raciocínio de Kepler culminasse nesse resultado faltou apenas o conceito de limite, que na época ainda não havia sido formalizado. Os triângulos muito pequenos adotados e os discos "muito finos" utilizados por Kepler, respectivamente, no cálculo de área de órbitas elípticas e volume de um "toro" ilustram o que futuramente passou a ser denominado o método dos infinitésimos (Katz, 2010).

Outra contribuição para o cálculo de áreas e volumes veio de Cavalieri (1598 – 1697) com o método dos indivisíveis, que consistia em considerar que "se dois sólidos têm alturas iguais, e se secções feitas por planos paralelos às bases e em igual distância dessas estão sempre numa dada razão, então os volumes dos sólidos também estão nesta mesma razão" (Edwards, 1991, p. 104, tradução nossa). Essa proposição é considerada por autores de textos de geometria espacial como Teorema de Cavalieri. Essa ideia de proporção/razão fundamenta a base intuitiva do Cálculo Integral moderno e resolve muitos problemas que, de outro modo, necessitariam de técnicas avançadas de *Cálculo*. Conforme Eves (2004), cerca de 410 a. C., Demócrito (c. 410 a.C.) já havia apresentado uma forma primitiva do método dos indivisíveis de Cavalieri ao provar o volume de uma pirâmide cuja argumentação pode ter sido de que

> se duas pirâmides de bases equivalentes e alturas iguais são seccionadas por planos paralelos às bases, verificando-se a divisão das alturas numa mesma razão, então as secções correspondentes assim formadas são equivalentes. Portanto as pirâmides contêm mesmo número infinito de secções planas equivalente, o que implica que seus volumes devem ser iguais. (Eves, 2004, p. 420).

Pouco depois de 1629, Fermat (1601 – 1665) havia descoberto como se podia calcular a área abaixo de curvas de funções polinomiais do tipo $y = x^m$. Inicialmente provou para valores de m inteiros positivos, possivelmente usando fórmulas para potências de inteiros ou desigualdades (Boyer, 2003) e, posteriormente, particionando

> o intervalo de $x = 0$ até $x = a$ em uma infinidade de subintervalos tomando os pontos com abscissa $a, aE, aE^2, \ldots$ [Figura 2] onde E é uma quantidade menor que 1. Nesses pontos ele levantava ordenadas da curva depois aproximava a área sob a curva por meio de retângulos. (p. 241).

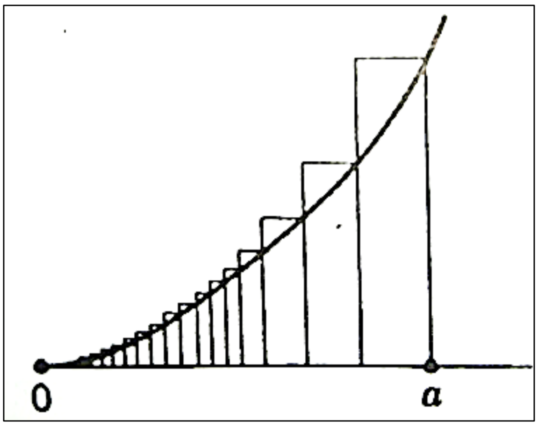


Figura 2 - Procedimento de Fermat para cálculo de áreas.
Fonte: Boyer, 2003, p. 240

Dessa forma, a área de cada um dos retângulos correspondia aos termos de uma progressão geométrica. Para finalizar, quando E se aproximava de 1, os retângulos seriam mais estreitos e a soma das áreas se aproximava da área sob a curva delimitada pelas retas $x = 0$, $x = a$ e $y = 0$. Ao assumir, obtinha-se como resultado $a/(m+1)$ que é o resultado da integral usando as técnicas modernas do *Cálculo*. Esse procedimento, em termos matemáticos atuais, corresponde à soma superior.

Conforme Katz (2010), Wallis (1616 – 1703) "foi outro matemático que deduziu as mesmas fórmulas de integração que Fermat e (...) o primeiro matemático a explicar, de facto, os expoentes fracionários e a utilizá-los de forma consciente" (pp. 612 – 613). Em 1655, publicou no livro intitulado *Arithmetica infinitorum* muitos resultados de integrais baseando-se em métodos de integração aritmética. Segundo Pedersen (2000), essa obra de Wallis "não é sobrecarregada de demonstrações, pois era ousado e confiava em sua espantosa intuição quanto à correlação existente entre as somas das diferentes séries" (p. 38, tradução nossa). E, esse método intuitivo de Wallis, é conhecido como indução incompleta ou conclusão por analogia. Dois exemplos, considerando a notação atual, são $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ (Eves, 2004) e $\int_0^1 (x - x^2)^m \, dx = \frac{(m!)^2}{(2m+1)!}$, para m inteiro positivo (Boyer, 2003). Apesar das maiores contribuições de Wallis serem os processos de integração, ele também deu suas contribuições no Cálculo

Diferencial. Esse matemático encontrou uma expressão para determinação do comprimento de um elemento de arco de uma curva equivalente ao que conhecemos: $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$. Além disso, "fez uso sistemático das séries em análise, contribuindo muito nesse campo para abrir caminho para seu grande contemporâneo Isaac Newton" (Eves, 2004, p. 431) e também discutiu cônicas como curvas de segundo grau.

Com relação às origens do Cálculo Diferencial, Boyer (1949) percebe duas vertentes que remetem aos primórdios da diferenciação, uma cinemática e uma atomística que culminam, respectivamente, com Newton e Leibniz, cujas origens estão vinculadas à resolução de problemas de determinação de retas tangentes a curvas e determinação de máximos e mínimos de funções (Eves, 2004; Melchiors & Soares, 2013; Rezende, 2003). Dentre os predecessores do Cálculo Diferencial, Fermat, Barrow e Wallis, foram os que deixaram contribuições que se aproximam muito das ideias formalizadas por Newton e Leibniz (Eves, 2004).

Fermat foi o primeiro a determinar valores extremos considerando o comportamento característico da função próximo dos pontos de máximo e de mínimo (Edwards, 1991). Para tanto, apoiou-se nas observações de Kepler a respeito dos "incrementos de uma função [que] tornam-se infinitesimais nas vizinhanças de um ponto de máximo ou de mínimo" (Eves, p. 429) para desenvolver um meio de encontrar analiticamente tais pontos de funções polinomiais. O procedimento de Fermat para determinação de pontos extremos consistia em comparar

> o valor de $f(x)$ num ponto com o valor de $f(x+E)$ num ponto vizinho [Figura 3]. Para a maioria dos x a diferença, $f(x+E) - f(x)$, não é pequena ao comparar com E, mas ele percebe que no topo [máximo] ou no fundo [mínimo] da curva essa diferença é muito menor que E e diminui mais rápido que E. Essa ideia deu-lhe a equação aproximada $\frac{f(x+E)-f(x)}{E} = 0$, a qual se torna mais correta à medida que o intervalo E é tomado com menor amplitude. (Simmons, 1993, p. 33, tradução nossa).

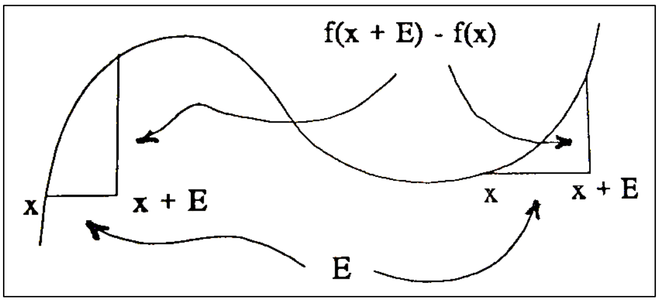


Figura 3 - Procedimento de Fermat para determinação de valores extremos.
Fonte: Simmons, 1993, p. 33

Com esse raciocínio, ao considerar $E = 0$, os resultados lhe davam as abscissas dos pontos de máximo e mínimo do polinômio. Essa técnica para determinação de pontos de mínimo/máximo é equivalente à forma como fazemos hoje, pois em nomenclatura atual, o que Fermat fez corresponde a determinar o ponto crítico[3] que, para ser considerado um máximo/mínimo, deve satisfazer critérios de determinação de pontos extremos. O ponto falho desse resultado de Fermat foi ignorar "o fato de que a derivada se anular não é o suficiente para se ter um máximo ou mínimo comum, mas apenas necessária" (Eves, 2004, p. 429) e por não categorizar o valor que satisfazia a condição estabelecida como sendo um valor máximo ou um valor mínimo.

Outro resultado dos estudos de Fermat também foi um procedimento para encontrar a equação de uma reta tangente ao gráfico de uma curva no ponto P como a posição limite de uma reta secante P e Q conforme o ponto Q se aproxima de P ao longo da curva quando os dois pontos de intersecção com uma curva tendem a coincidir" (Edwards, 1991, p. 132, tradução nossa). Essa ideia de conceber a reta tangente como a posição limite da reta secante permanece no *Cálculo* moderno e corresponde à interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto. Essa é uma das abordagens comumente encontrada em livros didáticos de um primeiro curso de *Cálculo* para introduzir o assunto de derivadas (Anton, Bivens & Davis, 2014; Flemming & Gonçalves, 2006; Stewart, 2013).

Barrow (1630 – 1677), em seu livro *Lectiones opticae et geometricae*, apresentou o chamado triângulo diferencial para determinação de retas tangentes, com uma abordagem muito próxima dos modernos processos de diferenciação. O procedimento adotado por ele consistiu em usar o método da semelhança de triângulos para os triângulos PQR e PTM, ilustrados na Figura 4. Barrow argumentava que era possível estabelecer a relação de proporcionalidade, entre os referidos triângulos, ao considerar o triângulo menor infinitamente pequeno (Burtons, 1995). Ao finalizar esse processo, concluía que a reta tangente era $OT = x - y\left(\frac{e}{a}\right)$, a razão $\frac{e}{a}$ corresponde ao moderno $\frac{dy}{dx}$. Eves (2004) relata que Barrow aplicou esse mesmo raciocínio para encontrar as tangentes às curvas nomeadas como: curva Kappa; curva de Lamé; folium de Descartes; quadratriz e tangentóide.

[3] Ponto crítico é chamado o ponto cuja abscissa x_0 pertence ao domínio da função e $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0)$ não existe.

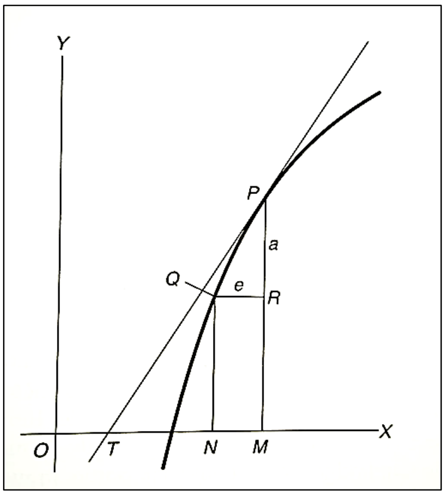


Figura 4 - Procedimento de Barrow para encontrar tangentes a curvas.
Fonte: Eves, 2004, p. 435.

Para Boyer (2003), dentre os matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento do *Cálculo*, Barrow foi o que mais se aproximou dos conceitos modernos e possivelmente reconheceu "a relação inversa existente entre os problemas de tangentes e de quadraturas. Mas sua conservadora adesão a métodos geométricos impediu-o de fazer uso eficaz da relação" (p. 268). Barrow foi o primeiro a relacionar os métodos de diferenciação e integração como processos inversos (Cooke, 1997), ou seja, descobriu o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), cuja demonstração foi feita por meios puramente geométricos[4] (Bourbaki, 1999).

Com o resgate histórico que fizemos até aqui, pode-se perceber que nessa época muitas das ideias fundamentais já foram desenvolvidas, antes de Newton e Leibniz. Dentre elas destacamos as ideias de limite, diferenciação, integração e até o TFC, que é o resultado mais importante dessa teoria. Diante disso, poderíamos nos perguntar, o que é que ainda faltava fazer que tornasse Newton e Leibniz tão importantes nessa história? Eves (2004) responde a esse questionamento:

> Faltava ainda a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais e também um redesenvolvimento, consistente e rigoroso, dos fundamentos da matéria. Foi (...) à criação de um cálculo manipulável e proveitoso que Newton e Leibniz, trabalhando independentemente, deram sua contribuição. (p. 435).

Isaac Newton foi estudante de Cambridge e aluno de Barrow. O seu interesse inicial era a Química, mas despertou o interesse pela matemática após estudar um

[4] De acordo com Katz (2010), James Gregory também, de forma geométrica, ligou as ideias de área e tangentes.

> exemplar [do livro] de Euclides, e logo depois leu a *Clavis* de Outhtred, a *Geometria a Renato*[5] *(sic) Des Cartes* de Schooten, a *Óptica* de Kepler, as obras de Viète, e o que [talvez] tenha sido o mais importante de todos para ele, *Arithmetica infinitorum* de Wallis. (Boyer, 2003, p. 269).

Após esses estudos, segundo Boyer, a partir de 1664, Newton começou a fazer a sua própria matemática por já ter atingido o conhecimento matemático existente na época. No entanto, "suas contribuições para a matemática pura (incluindo *Cálculo*), permaneceram em grande parte inéditas durante toda sua vida" (Edwards, 1991, p. 191, tradução nossa), pois naquela época não havia periódicos para discutir assuntos de matemática e as descobertas eram comunicadas por meio de cartas pessoais. Newton deixou um legado para a comunidade científica matemática de aproximadamente 5000 folhas de manuscritos não publicados, sendo que alguns destes haviam circulado por meio de cartas. A organização sistemática dessa produção levou cerca de três séculos e foi publicada, em oito volumes, no ano de 1967. O material foi editado por D. T. Whiteside e intitulado *The Mathematical Papers of Isaac Newton* (Edwards, 1991).

Os primeiros trabalhos de Newton foram sobre séries infinitas. Em 1665, começou a pensar em fluxos e fluentes. O método dos fluxos consistia em supor uma curva gerada pelo movimento contínuo de um ponto, dessa forma as coordenadas de um ponto passam a ser grandezas variáveis (Eves, 2004). Newton definia fluente e fluxão, respectivamente, como uma quantidade móvel (que flui) e a taxa de variação do fluxo (Cooke, 1997). Em outras palavras, usando notação matemática, dizemos que "a fluxão $\dot{x}$ de uma quantidade x depende do tempo (chamada fluente) era a velocidade com a qual x aumentava através do seu movimento gerador" (Katz, 2010, p. 645). Na linguagem atual do *Cálculo*, os fluentes e fluxões correspondem, respectivamente, às variáveis e às derivadas (Brito & Cardoso, 1997). A descoberta do método dos fluxos de Newton[6] permitiu determinar "máximos e mínimos, tangentes a curvas, curvaturas de curvas, pontos de inflexão e convexidade e concavidade de curvas" (Eves, 2004, pp. 439 – 440), quadraturas e retificações de curvas, além de solucionar algumas equações diferenciais. Conforme Silva (2011), quando Newton estabeleceu a relação existente entre fluentes e fluxões (e vice-versa), ele descobriu o

> Teorema Fundamental do Cálculo, que em termos da geometria significa resolver os dois problemas, o do cálculo de áreas *sob* uma curva e o do traçado da tangente à curva. Ressalta-se ainda que Newton apresenta ideias embrionárias sobre a noção de limite, ao retomar os 'infinitamente pequenos', caídos no esquecimento desde a matemática grega. (p. 398).

[5] Renê Descartes
[6] Apresentado no livro *Method of Fluxions* que foi escrito em 1671, mas publicado somente em 1736 (Eves, 2004).

Todas as descobertas de Newton relacionadas com o *Cálculo* foram realizadas entre os anos de 1664 a 1666. A fim de apresentar de forma resumida os predecessores que influenciaram o trabalho de Newton bem como suas contribuições para o desenvolvimento do *Cálculo* recorremos ao fluxograma de Whiteside citado por Baron (1985), ilustrado na Figura 5.

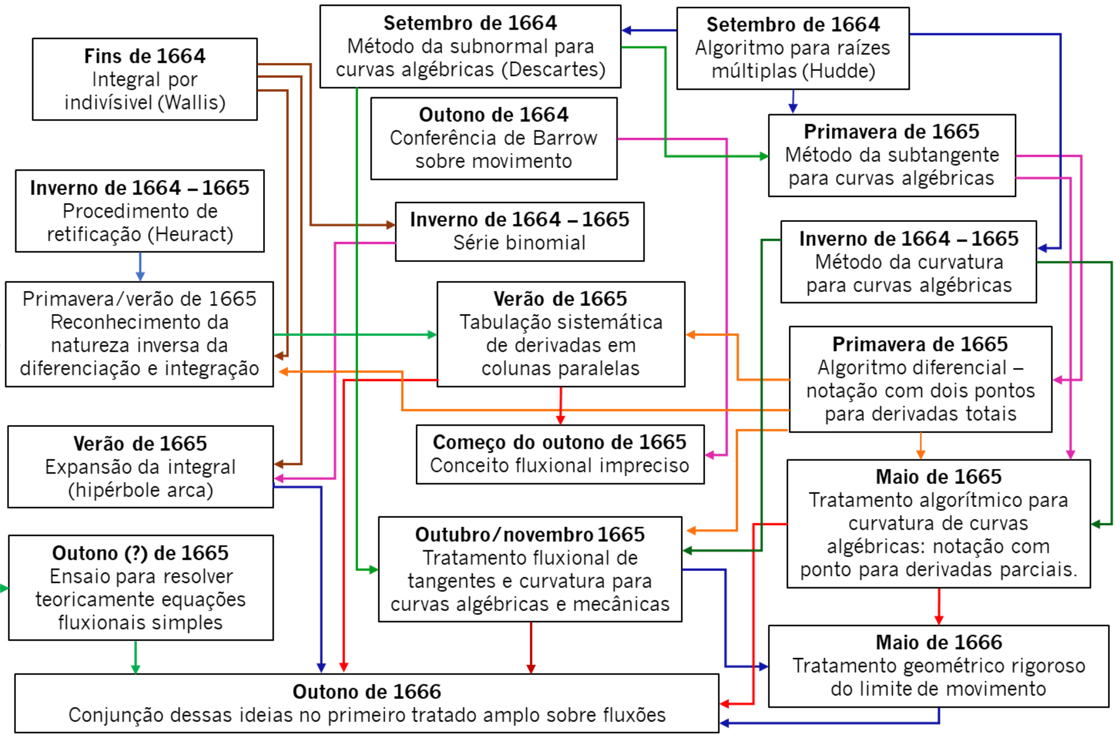


Figura 5 - Percursos das descobertas de Newton[7].
Fonte: Adaptado de Baron, 1985, p. 11

Gottfried Wilhelm Leibniz desde muito cedo teve interesse pela matemática e foi um autodidata nesse ramo dessa Ciência. Conforme Boyer (2003), o fato de ter sido autodidata em matemática pode justificar por que sua obra apresenta algumas redescobertas. De acordo com Rezende (2003), Leibniz aprofundou seus estudos em matemática após ter sido incentivado por Huygens (1629 – 1695) e, em 1673, numa viagem à Londres, ele

> aprendeu muito sobre séries infinitas, comprou uma cópia do *Lectures* de Barrow e tomou conhecimento, através de Collins, do *De Analysi* de Newton. Sua facilidade em assimilar as ideias matemáticas possibilitou-lhe estudar, ainda no ano de 1673, em Paris, os trabalhos matemáticos de Cavalieri, Wren, Jean Gregory, Sluse, Hudde, e outros. (Rezende, 2003, p. 206).

[7] As cores dos conectores não possuem significados, foram escolhidas com o intuito de facilitar a visualização.

De acordo com Eves (2004), nessa estada em Paris, Leibniz cumpria uma missão diplomática e, antes de deixar a cidade, “já havia descoberto o teorema fundamental do cálculo, desenvolvido grande parte de sua notação e estabelecido muitas das fórmulas elementares de diferenciação” (p. 443). Para Leibniz sempre foi importante ter uma boa notação por acreditar que essa facilita a compreensão dos conceitos envolvidos. Possivelmente, a maior aceitação da comunidade científica pela notação diferencial de Leibniz do que pelos fluxos de Newton ocorreu por ter se mostrado mais flexível. Entretanto, os conceitos desenvolvidos por Newton estavam mais perto dos modernos fundamentos do *Cálculo* (Boyer, 2003).

Os trabalhos desenvolvidos por Leibniz que estão relacionados com o desenvolvimento do *Cálculo* foram realizados entre os anos 1673 e 1676. Nox entanto, ele iniciou a divulgação de sua pesquisa através de pequenas notas no *Acta Eruditorum* (jornal científico alemão que ele ajudou a fundar) cerca de dez anos depois de suas descobertas (Katz, 2010).

Por volta do ano de 1676, Leibniz havia chegado aos mesmos resultados que Newton obteve cerca de uma década antes (Boyer, 2003). Todavia, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados (Kline, 1993) e se ele “não era tão profundo em matemática quanto Newton, era talvez mais eclético e embora inferior ao seu rival inglês como analista e físico-matemático, era provavelmente dotado de uma imaginação mais aguda e um sentido superior quanto à forma matemática.” (Eves, 2004, p. 444).

A primeira divulgação do *Cálculo* de Leibniz foi publicada em 1684 intitulada *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales.* Esse longo título, traduzido para o português como “Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais”, deixa claro os assuntos abordados nessa obra (Boyer, 2003). Nessa publicação, Leibniz divulgou regras de diferenciação para produtos, quocientes e potências e aplicações à geometria. As regras de derivação foram obtidas por meio do chamado postulado fundamental que consistia em supor $x + dx = x$. Essa igualdade nos diz que “as diferenciais podem ser comparadas entre si, mas, com respeito às quantidades finitas ordinárias, as diferenciais podem ser desprezadas” (Rezende, 2003, p. 208). Para compreender como Leibniz deduzia as suas fórmulas é necessário conhecer quais eram os seus pressupostos sobre diferenciais. Para ele,

> A diferença entre dois valores sucessivos de x é a diferencial dx, e similarmente para dy. Supõe-se que as grandezas dx e dy são não nulas, mas muito pequenas, portanto, insignificantes com relação aos valores x e y. Da mesma forma, assume-se que um produto de diferenciais, como $(dx)(dy)$ ou $(dx)^2$, por sua vez, é insignificante em comparação com os diferenciais dx e dy. (Edwards, 1991, p. 261, tradução nossa).

Em outras palavras, ao deduzir as regras de diferenciação usando os pressupostos de Leibniz, ao obter termos que contenham diferenciais de ordem maior do que um, pode-se desprezá-los por serem valores infinitesimais. Para exemplificar o processo que Leibniz utilizava na determinação das fórmulas de derivação, usamos o postulado fundamental para deduzir a regra do quociente, ou seja, para obter a expressão $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu-udv}{v^2}$. A dedução está ilustrada no Quadro 1. Escolhemos essa regra porque, pela experiência docente, a forma tradicional de se ensinar e que é apresentada em diversos livros didáticos (Anton, Bivens & Davis, 2014; Flemming & Gonçalves, 2006) é por meio da definição de derivadas. E, dentre as primeiras regras de derivação ensinadas, julgamos que as regras do produto e do quociente são as mais difíceis de provar (usando a definição de derivada) por exigirem várias manipulações algébricas além da aplicação de propriedades de limites[8].

Na publicação no *Acta Eruditorum* de 1686, Leibniz divulgou o Teorema Fundamental do Cálculo, mostrando que "as quadraturas são casos especiais dos inversos das tangentes" (Boyer, 2003, p. 278) enfatizando que na maioria dos métodos de integração de funções familiares, toda a geometria está agregada a elas. Nesse momento, Leibniz também expôs suas notações $dx, \frac{dy}{dx}$ e $\int dx$, que são adotadas até hoje nos cursos de *Cálculo* (Kline, 1993; Rezende, 2003).

Quadro 1 - Dedução da regra do quociente usando o postulado fundamental de Leibniz.

Definindo $z = \frac{u}{v}$.

Pelo postulado fundamental, supõe-se que: $z + dz = z$.

Aplicando o postulado fundamental para as variáveis u e v, temos que:

$$u = u + du \text{ e } v + dv = v.$$

Assim sendo, temos que:

$$z + dz = \frac{u+du}{v+dv} = \left(\frac{u+du}{v+dv}\right).\left(\frac{v-dv}{v-dv}\right) = \frac{uv - udv + vdu - dudv}{v^2 - dv^2}$$

Cancelando o termo com produto de diferenciais e o diferencial ao quadrado, temos que:

$$z + dz = \frac{uv - udv + vdu}{v^2} = \frac{u}{v} + \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Como $z = \frac{u}{v}$, temos que:

$$\frac{u}{v} + d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u}{v} + \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Conclui-se que:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Fonte: Produção da autora.

[8] Outro motivo de termos escolhido a regra do quociente e não a regra do produto é que a demonstração desta segunda regra, usando a ideia de Leibniz, pode ser encontrada em Rezende (2003).

Com o intuito de sintetizar e permitir uma fácil comparação entre a forma como Newton e Leibniz desenvolveram os conceitos de seus respectivos *Cálculo*, apresentamo-los lado a lado na Tabela 1, cuja organização foi proposta por Rezende (2003).

Tabela 1
Comparativo entre o Cálculo de Newton e de Leibniz

Cálculo de Newton	*Cálculo* de Leibniz
As variáveis dependem do tempo ("quantidades fluente" é um conceito cinemático).	As variáveis "percorrem sequências de valores "consecutivos infinitamente próximas.
É fundamentado no conceito cinemático de fluxão.	É fundamentado na noção de diferencial.
A operação de integração, para Newton, se resume simplesmente à "tarefa de determinar as quantidades fluentes para as fluxões dadas".	A operação de integração é, por definição, um somatório de quantidades infinitamente pequenas, mas, no contexto prático, ela também é pensada como operação inversa da diferenciação.
Faz uso das quantidades infinitamente pequenas (a variável "o" é uma quantidade infinitesimal), mas, por outro lado, preocupado com a sua fundamentação lógica, assegura que o seu cálculo independe delas e que pode ser dada uma base rigorosa quanto ao seu conceito de última razão: ressalta ainda que o seu conceito de fluxão é uma velocidade finita e não uma quantidade infinitamente pequena.	Assume incondicionalmente as quantidades infinitamente pequenas em seu cálculo.
Dependia ainda das figuras e de argumentos, em geral, físicos ou geométricos, sobre elas.	O sistema de notação de Leibniz é muito mais poderoso do que o de Newton. O cálculo de Leibniz "superou as figuras", traduzindo todos os seus argumentos na linguagem de símbolos e de fórmulas.
A noção de limite se realiza na ação de desprezar os termos da "primeira razão" que ainda contenham o seu "aumento ínfimo" ("o").	A noção de limite está associada diretamente à atitude de desprezar as quantidades infinitesimais em relação às quantidades finitas, ou de quantidades infinitesimais de ordem superior com respeito a outras de ordem inferior.

Fonte: Rezende, 2003, p. 214.

Nosso interesse nessa seção foi sintetizar alguns dos aspectos históricos a respeito do desenvolvimento do *Cálculo* até Newton e Leibniz, pois com suas descobertas, a maior parte do *Cálculo* que está presente nos atuais conteúdos curriculares estavam consolidados. Conforme Eves (2004), algum tempo depois das invenções desses dois matemáticos, os pesquisadores se dedicaram às aplicações do *Cálculo*, ou seja, ele passou a ser usado como uma ferramenta. De acordo com esse autor, os conceitos fundamentais do *Cálculo* voltaram a ser tratados de forma rigorosa por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), e seus sucessores do século XIX. Silva (2011, p. 399) afirma que somente com os estudos de Cauchy "foi que surgiu uma teoria de Integral independente da Derivada", pois desde a descoberta do Teorema Fundamental do Cálculo por Newton e Leibniz, os processos de derivação e integração sempre foram compreendidos como processos inversos. A difusão do *Cálculo* e seu processo evolutivo após a era desses dois grandes pesquisadores são discutidos em Boyer (2003), Burtons (1995), Eves (2004), Edwards (1991), Fauvel e Gray (1987), Gratan-Guinnes (2000), Kaput (1994), Katz (2010), dentre outros autores.

Para finalizar essa seção, apresentamos na Tabela 2, uma "linha do tempo" com os pesquisadores (alguns citados no texto) e suas respectivas contribuições para o desenvolvimento do *Cálculo* moderno. Acreditamos ser importante estabelecer essa linha cronológica, pois permite ao leitor perceber que o desenvolvimento de qualquer teoria não é um processo solitário, mas sim, um processo evolutivo do desenvolvimento dos conceitos. Como docente de *Cálculo*, muitas vezes essa investigadora já ouviu comentários de seus estudantes do tipo: "Como é que alguém pensou nisso?" ou "Como descobriram isso?". Geralmente, quando o questionamento surge, vira piada em sala de aula, pois os próprios estudantes acabam respondendo que "naquela época não se tinha televisão, internet, ...". Entendemos que comentários como esses surgem porque fala-se muito pouco sobre aspectos históricos.

Tabela 2
Contributos para desenvolvimento do Cálculo moderno até ao início do século XX

Período	Pesquisador	Contributo
Século V a. C.	Zenão	Paradoxos do movimento
c. 400 a. C.	Teodoro	Incomensuráveis
417 – 369 a. C.	Teeteto	Incomensuráveis; teoria da proporção
408 – 355 a. C.	Eudoxo	Teoria das proporções
384 – 322 a. C.	Aristóteles	Lógica dos silogismos
287 – 212 a. C.	Arquimedes	Modelos matemáticos, áreas e volume
1320 – 1387	Nicole Oresme	Cinemática, exponenciais, gráficos

1340 – 1425	Madhava	Séries de potências
1445 – 1545	Kerala Gargya Nilakhanta	Séries de potências
1530 – 1610	Jyesthadeva	Derivações de séries de potências
1571 – 1630	Johan Kepler	Máximos, áreas, volumes
1584 – 1667	Gregory de St. Vicent	Área sob a hipérbole
1596 – 1650	René Descartes	Normais
1598 – 1647	Bonaventura Cavalieri	Áreas e volumes
1601 – 1665	Pierre Fermat	Extremos, tangentes, áreas
1602 – 1675	Gilles Persone de Roberval	Tangentes; áreas
1608 – 1647	Evangelista Torricelli	Áreas e volume
1615 – 1677	Henry Oldenburg	Epistolário sobre cálculo
1616 – 1703	John Wallis	Áreas
1618 – 1667	Alfonso António de Sarasa	Logaritmos e áreas
1620 – 1687	Nicolaus Mercator	Séries de potências para logaritmos
1622 – 1685	René François de Sluse	Algoritmo para derivadas
1622 – 1703	Vincenzo Viviani	Problema de integração múltipla
1623 – 1662	Blaise Pascal	Áreas
1625 – 1683	John Collins	Epistolário sobre cálculo
1628 – 1704	Johann Hude	Algoritmo para derivadas
1630 – 1677	Isaac Barrow	Áreas, tangentes, comprimento de arco
1634 – 1660	Hendrick van Heuraet	Comprimento de arco
1638 – 1675	James Gregory	Áreas, séries
1642 – 1727	Isaac Newton	Séries, fluxões, teorema fundamental, mecânica celeste
1646 – 1716	Gottfried Wilhelm Leibniz	Diferenciais, teorema fundamental, derivadas parciais, equações diferenciais
1654 – 1705	Jakob Bernoulli	Problema da braquistócrona
1661 – 1704	Guillaume François L'Hospital	Texto sobre cálculo diferencial
1667 – 1748	Johan Bernoulli	Cálculo de exponenciais, problema da braquistócrona; equações diferenciais
1675 – 1715	Humphry Ditton	Texto de *Cálculo*
1678 – 1760	Charles Hayes	Texto de *Cálculo*
1685 - 1731	Brook Taylor	Série de Taylor

1685 – 1753	George Berkeley	Crítica dos fundamentos do *Cálculo*
1687 – 1759	Nicolaus I Bernoulli	Regras para derivadas parciais
1698 – 1746	Colin Maclaurin	Texto de *Cálculo*
1700 – 1782	Daniel Bernoulli	Problema da corda vibrante
1707 – 1783	Leonhard Euler	Equações diferenciais; livros de texto
1710 – 1761	Thomas Simpson	Texto de *Cálculo*
1713 – 1765	Alexis Claude Clairaut	Equações diferenciais
1717 – 1783	Jean Le Rond d'Alembert	Problema da corda vibrante
1718 – 1799	Maria Agnesi	Texto de *Cálculo*
1736 – 1813	Joseph-Louis Lagrange	*Cálculo* por via série de potências, integrais de superfície
1744 – 1787	José Anastácio da Cunha	Definição de convergência
1765 – 1843	Sylvestre-François Lacroix	Textos de *Cálculo*
1781 – 1848	Bernhard Bolzano	Continuidade e convergência
1789 – 1857	Augustin-Louis Cauchy	Rigorização do *Cálculo*
1796 – 1874	Adolphe Quetelet	Curvas normais
1801 – 1861	Mikhail Ostrogradski	Teorema da divergência
1802 – 1829	Niels Henrik Abel	Novas ideias sobre convergência
1815 – 1897	Karl Weierstrass	Convergência uniforme
1821 – 1881	Eduard Heine	Novas ideias sobre continuidade
1826 – 1866	Georg Bernhard Riemann	Integração
1831 – 1916	Richard Dedekind	Cortes de Dedekind; axiomas para os números naturais
1845 – 1918	Georg Cantor	Teoria dos conjuntos
1850 – 1891	Sofia Kovalevskaya	Equações com derivadas parciais

Fonte: Katz, 2010, pp. 130; 170; 404; 689; 760; 988.

2.2. O ensino de *Cálculo* no Brasil

A chegada da Família Real Portuguesa em solo brasileiro no ano de 1808 favoreceu o surgimento de instituições de Ensino Superior. Entretanto, nessa época não foram criadas universidades, apenas institutos politécnicos e escolas militares que possuíam caráter de Ensino Superior que visavam suprir as necessidades oriundas da instituição da Colônia portuguesa que foi estabelecida com D. João VI (Masetto, 2002; Ziccardi, 2009).

A partir da Carta de Lei de 04 de dezembro de 1810, com a criação da Academia Real Militar, por aproximadamente cento e dez anos, esta instituição

> (e todas as suas ramificações: Escola Central, Escola Militar, Escola Politécnica, Escolas preparatórias) foi praticamente a única instituição onde os brasileiros poderiam adquirir conhecimentos matemáticos sistemáticos de nível superior e obter um diploma de bacharel e doutorado em ciências físicas e Matemáticas (Silva, 1999[9], p.13, citado por Lima, 2008, sem página).

Essas escolas politécnicas ou militares foram os principais espaços institucionais em que a Matemática acadêmica foi desenvolvida (Dias, 2002). Nesse contexto, a disciplina de *Cálculo* tinha por finalidade "fornecer aos futuros militares e engenheiros as ferramentas matemáticas necessárias para que os mesmos pudessem resolver problemas de suas áreas de atuação" (Lima, 2013, p. 13).

De acordo com Lima (2012), o *Cálculo* foi introduzido pela primeira vez no currículo brasileiro como uma disciplina no *Curso Mathematico* da Academia Real Militar do Rio de Janeiro e o seu ensino era pautado na obra (traduzida para o português) de Sylvestre François Lacroix (1765 – 1843) intitulada *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*, que ficou conhecida como o *Pequeno Lacroix*. Esse livro foi traduzido para o português por Francisco Cordeiro da Silva Torres Alvin (1775 – 1856), professor da academia militar, e se tornou o primeiro livro texto de *Cálculo* do país (Silva[10], 1996, citado por Lima, 2012). De acordo com Dhombres (1985[11]) citado por Lima (2012), Lacroix além de reunir de forma organizada os resultados do século XVII referentes a diferenciação e integração, sendo fidedigno aos autores originais, buscou uma

> nova formatização e uniformidade de conteúdos, que ao apagar as diferenças reduz e unifica os 'métodos' e, portanto, maximiza o ensino, no sentido em que encaminha os estudantes para os resultados verdadeiramente significativos e importantes que existem nessa área até então. (Moreira, 2005, p. 175).

As aplicações encontradas no *Pequeno Lacroix* são todas relacionadas com a própria Matemática. No entanto, essa característica identificada na obra não pode ser interpretada como sendo um aspecto negativo, pois naquele contexto histórico esse manual era um livro-texto cujo objetivo era

---

[9] Silva, C. M. S. (1999). *A Matemática Positivista e sua Difusão no Brasil*. Vitória: EDUFES.

[10] Silva, C. M. S. (1996). O conceito da derivada no ensino da matemática no Brasil no século XIX. In: *ICME-8 Satellit Meeting HPM*, 1996, Braga, v. 1, 86 – 87.

[11] Dhombres, J. (1985). French Mathematical Textbooks from Bézout to Cauchy. In: *Historia Scientiarum*, n. 26.

"apresentar um sumário completo dos assuntos matemáticos tratados, e não propriamente livros como os atualmente denominados didáticos, escritos com o objetivo de contribuir para um melhor aprendizado, por partes dos alunos, do conteúdo apresentado." (Lima, 2012, p. 78)

O ensino de *Cálculo* no Brasil passou por profundas transformações após a fundação da Universidade de São Paulo, no ano de 1934, e a contratação do professor italiano Luiggi Fantappiè, que ficou responsável pela disciplina de Análise Matemática dessa instituição (Lima, 2012, 2013). De acordo com esse autor, os conteúdos dessa disciplina tiveram um rigoso enfoque simbólico-formal com Fantappiè e, essa abordagem mais formal passou a ser adotada nas diversas universidades brasileiras e, mesmo as instituições em que o Cálculo Diferencial e Integral permanecia no currículo escolar, na prática, passaram a lecionar um curso de Análise. Com a priorização do rigor no ensino, o foco da disciplina de Análise mudou muito com relação aos primeiros cursos de *Cálculo* presentes nas escolas militares, em que era ensinado o que supunha-se necessário os engenheiros e militares conhecerem para aplicarem nas suas respectivas práticas profissionais. A disciplina de Análise tinha caráter teórico e nela buscava-se demonstrar todos os resultados sem qualquer preocupação com as técnicas.

O professor Geraldo Ávila, autor brasileiro de livros tanto de *Cálculo* quanto de Análise, como estudante de graduação entre os anos de 1953 e 1956, relata que vivenciou a disciplina de Análise Matemática (com duração de três anos) no período que o *Cálculo* seguia os padrões das escolas francesas. Nessa disciplina, "aprendia-se Cálculo juntamente com a Análise" (Ávila, 2002, p. 87) e não se abordavam tópicos considerados do ensino pré-universitário. Em entrevista que o professor Ubiratan D'Ambrósio deu a Oliveira (2007[12]) citado por Raad (2012), ele revelou que, por experiência discente daquela época, os professores não sentiam necessidade de reverem os conteúdos do Ensino Médio[13], porque consideravam que este nível de ensino propiciava uma boa formação matemática. E, de acordo com Ávila (2002), nessa década, os famosos "Cours d'Analyse" ensinavam

> tudo o que hoje incluímos nas disciplinas de Cálculo de uma ou mais variáveis, e mais ainda funções de uma variável complexa, boa parte de equações diferenciais ordinárias e um tanto das parciais, geometria diferencial de curvas e superfícies e um pouco de Análise de Fourier. (Ávila, 2002, p. 86).

O caráter teórico dado à Análise provocou inúmeras dificuldades relacionadas com a aprendizagem que os ingressantes no Ensino Superior estavam a enfrentar (Lima, 2012, 2013). A partir da década de 50 do século XX, as preocupações didáticas relacionadas com a disciplina de Análise (da

[12] Oliveira, M. C. (2007). A formação matemática de um matemático e educador. In: Wagner Rodrigues Valeste (Org.). Ubiratan D'Ambrósio. 1ª ed. São Paulo: Annablume, v. 1, 55 – 76.
[13] Corresponde ao Ensino Secundário de Portugal.

Universidade de São Paulo - USP) e questionamentos sobre o formalismo excessivo que vinha-se dando a tal curso, partiram da professora Elza Furtado Gomide, que trazia consigo sua experiência de ex-aluna da própria instituição. Com Gomide germinou a ideia de desmembrar a disciplina de Análise Matemática em duas, sendo que no primeiro curso "não se devia ir tão fundo na sistematização e na formalização dos conceitos" (Lima, 2013, p. 405), e ainda, que as técnicas manipulativas de limites, derivadas e integrais deveriam ser abordadas. Esse facto motivou a instituição de uma disciplina de *Cálculo* no início do Curso e outra de Análise (geralmente, dada até hoje, no final do curso), gerando a ideia de que a primeira é pré-requisito da segunda, se contrapondo ao desenvolvimento histórico dessas áreas de conhecimento (Rezende, 2003). A ideia foi introduzida por Fantappiè na USP e serviu de referência para as demais universidades. No entanto, faltou discutir quais seriam os objetivos específicos de cada uma dessas disciplinas. Essa "crise de identidade" da abordagem que deve ser dado ao ensino de *Cálculo* continua presente nos atuais currículos acadêmicos (Ávila, 2002) e encontra-se também em cursos de graduação que não possuem a disciplina de Análise (Lima, 2013).

Ávila (2002) afirma que o foco de orientação dos cursos de graduação da USP e do Rio de Janeiro mudou por forte influência de professores capacitados nos Estados Unidos e dos livros-didáticos norte americanos que chegaram ao Brasil a partir do ano de 1960. De acordo com Lima (2006[14]) citado por Lima e Silva (2011), esses livros propunham uma abordagem diferenciada dos padrões europeus para ensinar Análise Matemática. Esses factos, propiciaram a reestruturação do currículo dessas instituições e, como estas serviram de referência a outras universidades brasileiras, proliferou-se a ideia de trabalhar os conteúdos de *Cálculo* em duas disciplinas (Ávila, 2002; Lima, 2012). De acordo com Ávila (2002), mesmo com essa reestruturação das grades curriculares, muitos docentes e autores brasileiros de livros-didáticos continuaram mantendo bastante rigor no primeiro curso de *Cálculo*. Entretando, mesmo que de forma muito sútil, foi nessa década que as manipulações algébricas de limites, derivadas e integrais começaram a ser contemplatadas e passou-se a dar "maior enfase a [sic] parte operacional, com o objetivo de levar ao aluno a saber manipular bem as técnicas inerentes ao Cálculo" (Raad, 2012, p. 76). De acordo com Lima e Silva (2011), por meio de entrevistas a professores graduados nesse período, percebe-se que "já estava começando a acontecer um fato bastante comum atualmente: os alunos concluírem a disciplina sabendo manipular muito bem as técnicas, mas sem terem aprendido, ainda que de maneira intuitiva ou superficial, o significado de cada um daqueles conceitos vistos" (pp. 5 – 6). Ainda, de acordo com esses autores, em diversos cursos de *Cálculo* da USP,

[14] Lima, E. B. (2006). *Dos Infinitésimos aos Limites: a contribuição de Omar Catunda para a modernização da Análise Matemática no Brasil*. 145 f. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências). Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana.

> embora durante as aulas a preocupação principal do professor fosse a fundamentação rigorosa da teoria, o estilo dos exercícios selecionados por ele para que os alunos resolvessem nos momentos de estudo privilegiava, em demasia, o treino, por meio da repetição, das técnicas de cálculo de derivadas, integrais, etc., e não um aprendizado significativo daqueles conceitos vistos detalhadamente nas aulas teóricas. (Lima & Silva, 2011, p. 8).

Pelo exposto, pode-se perceber que a década de 1960 foi marcada pela ênfase no treinamento por meio de repetições de exercícios. De acordo com Raad (2012), essa é concepção do *Cálculo* que permanece nos dias de hoje na visão de muitos professores que creem que num bom curso de *Cálculo* os métodos de derivação e integração são aprendidos pelo excesso de exercícios.

Ao comparar o ensino de *Cálculo* da década 1970 com 1960 pode-se constatar que, em curtos espaços de tempo, o período foi marcado por movimento de "idas e vindas" para aproximar a disciplina do *Cálculo* e afastá-la da Análise quanto de aproximá-la da Análise e afastá-la do Cálculo.

> Durante a década de 1980 tais idas e vindas se tornam mais explícitas, com a ocorrência desde cursos totalmente voltados às técnicas até outros propondo um retorno a uma disciplina inicial que fosse de Análise, sem qualquer ênfase aos cálculos, adotando, para isso, o livro Calculus de Spivak como referência principal. (Lima & Silva, 2011, p. 9).

Conforme esses autores, no decorrer da década de 1970, o insucesso na disciplina de *Cálculo* desencadeou ações pedagógicas na tentativa de reverter esse quadro. Para tanto, o livro de Edwin Moise intitulado *"Cálculo: um curso universitário*[15]*"* foi adotado (na USP). Essa obra apresenta uma forma diferenciada de se trabalhar com os conceitos,

> propõe uma abordagem em espiral do conteúdo, e a realização de experiências de ensino baseadas em atividades de discussões em grupo e roteiros de estudos dirigidos. No final da década, no entanto, a disciplina volta a ser trabalhada de forma tradicional, por meio, exclusivamente, de aulas expositivas e adotando como referências manuais com abordagens clássicas. (Lima & Silva, 2011, p. 6).

No Brasil, o primeiro curso de *Cálculo* nos moldes atuais do ensino dessa disciplina surgiu no início dos anos de 1990. De acordo com Lima e Silva (2011), a partir dessa época, o rigor com que os conceitos inerentes à disciplina são abordados é definido pelo docente. Esses mesmos autores dizem que atualmente não se identifica mais diferenças tão significativas, como em décadas passadas, no tocante ao ensino de *Cálculo* e espera-se que ao final de um curso o estudante "tenha habilidade em

[15] Moise, E. E. (1972). *Cálculo: um curso universitário - volume 1*. Tradução de Dorival A. Mello e Renate G. Watanabe sob coordenação de Elza Furtado Gomide. Editora Edgar Blucher Ltda. São Paulo. Referência encontrado no artigo disponível em: https://goo.gl/9K7jYB. Acesso em 27 set 2018.

operar com funções reais de uma variável real, sendo capaz de calcular limites, derivadas e integrais de funções deste tipo, além de resolver problemas englobando tais conceitos" (p. 9). Em outras palavras, para um estudante do curso de Matemática, o curso introdutório de *Cálculo* é responsável por apresentar ferramentas de Matemática de nível superior que passarão por tratamento rigoroso e formal na disciplina de Análise (Lima & Silva, 2011). E, para estudantes de outros cursos de graduação, o *Cálculo* é visto como um "curso de serviço" que tem por objetivo "fornecer a ele o ferramental matemático necessário para a resolução de problemas típicos de suas áreas de interesse" (Lima & Silva, 2012). Segundo Reis (2001), o rigor da disciplina de *Cálculo* deveria ter diferentes níveis, visando atender às particularidades de cada curso de graduação, entretanto, na prática, dificilmente isso ocorre. Pela experiência docente, um dos motivos associados à falta dos conhecimentos práticos a serem ensinados no *Cálculo* pode estar relacionado com a heterogeneidade de cursos de graduação na composição das turmas. Como exemplo, podemos tomar por base essa pesquisa, pois como fora mostrado na introdução desse relatório de pesquisa, uma das turmas participante foi formada por alunos dos cursos de Matemática, Física, Química e Engenharias Civil, Mecânica e Elétrica.

Relativamente à pouca motivação dos estudantes pela disciplina de *Cálculo*, Rocha (2016) apresenta três possíveis motivos: falta de aplicações dos conceitos em problemas de suas especialidades durante o curso de *Cálculo*; imaturidade para compreender o quanto a Matemática poderá auxiliá-los na solução de possíveis problemas que encontrarão na vida profissional; e, facto de muitos professores universitários não apresentarem aplicações nas áreas específicas porque as desconhecem. Entendemos que este último motivo apresentado por Rocha reflete diretamente no primeiro, pois se o professor não conhece onde seu estudante de Engenharia, por exemplo, aplicará os conceitos de *Cálculo*, o aluno poderá não ver sentido em estuda-lo. Acreditamos que essa falta de conhecimento do professor pode ser oriunda de sua formação inicial, pois geralmente o professor de *Cálculo* é integrante do quadro docente do Departamento de Matemática, cuja maioria dos professores são formados em Licenciatura ou Bacharelado em Matemática, que "presta serviços" a outros cursos de graduação. Isso ocorre na UDESC/Joinville, instituição em que essa pesquisa está inserida.

Com relação à formação do corpo docente das instituições de Ensino Superior brasileiro, até à década de 1970, não era por meio de concursos ou processos seletivos, mas por meio de convite da universidade que se fazia a contratação dos docentes. E, para ser professor, acreditava-se que quem soubesse o conteúdo, automaticamente, saberia ensinar, pois na época "ensinar significava ministrar grandes aulas expositivas ou palestras sobre um determinado assunto dominado pelo conferencista, mostrar, na prática, como se fazia; e isso um profissional saberia fazer." (Masetto, 2002, p. 11). Com essa concepção, o professor era colocado como o centro do processo de ensino e, o aprender, por parte do estudante, significava "a capacidade de repetir em provas o que o professor havia ensinado em aula" (p. 12). Nessa pespectiva de ensino e aprendizagem, caso o estudante obtivesse insucesso, atribuía-se exclusivamente a ele mesmo o seu fracasso. Além disso, como o estudante universitário escolhia o curso, supunha-se que ele possuía maiores habilidades para a área escolhida (Lima, 2012). O insucesso do aluno poderia mostrar uma escolha inadequada de curso e até mesmo falha no processo de seleção dos ingressantes. Essa concepção a respeito do estudante extinguia a necessidade de questionar-se quanto aos aspectos pedagógicos do professor universitário e,

> em nenhum momento, por exemplo, perguntava-se se o professor tinha transmitido bem a matéria, se havia sido claro em suas explicações, se estabelecera um boa comunicação com o aluno, se o programa estava adaptado às necessidades e aos interesses dos alunos, se o professor dominava minimamente as técnivas de comunicação. Isso tudo, aliás, era percebido como supérfluo, porque, para ensinar era suficiente que o professor dominasse muito bem apenas o conteúdo da matéria a ser transmitida. (Masetto, 2002, p. 12).

Nessa fala de Masetto (2002) percebe-se a concepção de ensino presente muito fortemente no ensino universitário brasileiro, que é o ensino tradicional e ocorre não somente na disciplina de *Cálculo*. Nessa concepção de ensino,

> o professor é o transmissor e detentor do conhecimento e mantém certa distância do aluno, deixando-o como um ser passivo na sala de aula. As avaliações são periódicas, envolvendo provas com a função de 'medir' a capacidade individual dos discentes, onde o quantitativo prevalece sobre o qualitativo (Almeida, 2015, p. 5).

Esse autor também afirma, que apesar de nesse sistema tradicional de ensino os professores estarem inserindo o uso de recursos tecnológicos, a postura quanto à avaliação continua sendo a mesma de "medir" conhecimento. Para Lacaz, Fernandes e Carvalho (2009), nessa concepção, o ensino é centrado no professor e "o contrato didático que é estabelecido com os alunos prevê aulas expositivas, onde o conteúdo a ser ensinado é passado aos estudantes que devem memorizá-lo, repetindo em geral modelos de exercícios fechados que serão posteriormente testados em avaliações somativas" (p. 1078).

Com todas as mudanças ocorridas na sociedade ao longo desses anos, desde os primeiros cursos universitários, apesar de alguns paradigmas permanecerem no ensino (no que tange ao estilo de aula e metodologia de ensino predominante) o público mudou,

> no passado o aluno aspirava tanto chegar ao espaço universitário que, ao conseguir atingi-lo, bebia sofregamente os saberes advindos daqueles mestres, a ponto de dispor-se a ouvi-los com reverência e admiração. Hoje, ainda que a disputa por uma vaga seja mais concorrida, a postura do aluno é outra. Mudaram os alunos, mudaram os mestres, mudou a vida (Fischer, 2009, p. 312).

Uma mudança sentida nos jovens estudantes universitários brasileiros da atualidade é uma carência na formação de matemática básica que os auxiliaria no melhor aproveitamento da disciplina de *Cálculo*, pois com a consolidação do movimento conhecido como Matemática Moderna, que teve início em 1950, essa disciplina foi retirada do currículo do ensino secundário (Concordido & Barbosa, 2015). Esse movimento foi responsável por significativas mudanças nos currículos, dentre elas a exclusão do *Cálculo* e o excessivo rigor matemático nas apresentações (Ávila, 1991). Acreditamos que se os estudantes universitários brasileiros, ainda em sua formação básica, tivessem contato com algumas ideias elementares do *Cálculo*, ao menos de forma intuitiva, não sentiriam tanta diferença entre a matemática do Ensino Médio e a que é exigida no Ensino Superior. Essa afirmação é pautada na experiência que já fora vivenciada em Portugal. Neste país atualmente o *Cálculo* faz parte do currículo do ensino secundário, mas já fora retirado do currículo deste nível de ensino no ano de 1936. Como consequência dessa exclusão do *Cálculo*, os alunos passaram a reclamar que "lhes era exigido muito mais do que as suas possibilidades lhes permitiam dar" (Silva, 1999, p. 378) e os professores queixavam-se de que os alunos chegavam nas universidades mal preparados. Segundo esse autor, a solução para esses problemas não era baixar o nível de exigência do Ensino Superior, mas em incorporar novamente o ensino de *Cálculo* ao currículo do secundário, "com eventuais ajustamentos requeridos pela evolução da ciência e métodos de ensino" (p. 378). Esse facto ocorreu na reforma no ano de 1948. Silva (1999) ressalta a importância do estudante ter contato com os conceitos fundamentais do *Cálculo* no ensino pré-universitário argumentando que "o aluno que compreende mais facilmente é aquele que já meditou sobre o assunto, e para quem os novos ensinamentos são uma resposta luminosa a interrogações que ficaram latentes no espírito" (p. 348). Além de Portugal, o *Cálculo* faz parte do Currículo do ensino pré-universitário em países como França, Alemanha, Estados Unidos, Uruguai, Singapura, Coréia do Sul e Hong Kong (Bressoud, Ghedamsi, Martines-Luaces, & Törner, 2016).

Diante da opinião de Silva (1999), inferimos que uma possível hipótese que justifique o distanciamento entre o que é ensinado no Ensino Médio e no Superior brasileiro, que pode acarretar insucesso no *Cálculo* (Menestrina & Gougard, 2003; Serafim Filho, 2016) é a falta de um currículo para o Ensino Básico. Recentemente fora aprovada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) cuja finalidade será orientar Estados e Municípios a construírem seus currículos "com base nas aprendizagens essenciais estabelecidas na BNCC, passando, assim, do plano normativo propositivo para o plano da ação e da gestão curricular que envolve todo o conjunto de decisões e ações definidoras do currículo e de sua dinâmica" (Brasil, 2017, p. 14). A BNCC apresenta um rol de competências e habilidades para todo o Ensino Básico. Nas habilidades por competências de Matemática, voltadas para o Ensino Médio, identificam-se os seguintes conteúdos de *Cálculo*: funções, taxa de variação, limite e otimização[16]. Se nos currículos que, a partir de então devem ser elaborados, esses conteúdos forem contemplados, futuramente, pode ser que essa dificuldade na aprendizagem de *Cálculo* seja reduzida.

De acordo com Rocha (2016), no contexto pedagógico, professores universitários e estudantes acreditam em algumas soluções consideradas "normais" na busca por resolver e/diminuir as dificuldades intrínsecas ao ensino e aprendizagem de *Cálculo*. Uma dessas alternativas é a produção das extensas listas de exercícios de *Cálculo* que tem por finalidade "treinar" os estudantes e prepará-los para as avaliações (Rezende, 2003). Para suavizar as deficiências em conteúdos de Matemática Básica, alguns professores adotam a postura de revisar nas aulas os assuntos necessários para o prosseguimento nos ensinamentos de *Cálculo* à medida que sentirem necessidade (Valverde, 2011). Relacionada a essa questão dos pré-requisitos para bom êxito na disciplina, devido à falta destes conhecimentos básicos associa-se frequentemente as reprovações na disciplina. Conforme Raad (2012),

> Na cultura de ensino de Cálculo em que se privilegia o linear, isto é, um conhecimento só é bem aprendido se o conteúdo que o antecede também for assimilado corretamente, a reprovação é uma consequência natural se esta sequência não for seguida à risca. (p. 115)

Para esse autor, a sequência linear com que os conteúdos de *Cálculo* são ensinados é que causa a necessidade de existirem os pré-requisitos da disciplina em diversas instituições de ensino, com o intuito de diminuir a reprovação por esse motivo, como medidas paliativas criam disciplinas precedentes a esta (Raad, 2012; Rezende, 2003) cuja nomenclatura varia, mas a finalidade é a mesma. Alguns dos nomes atribuídos a esses cursos que antecedem o *Cálculo* são Cálculo Zero, Pré-Calculo, Fundamentos de Matemática e Matemática Básica. Algumas instituições incorporam estas disciplinas na matriz curricular do curso (Moro & Siple, 2010; Nassar, Sousa, & Torraca, 2012; Raad, 2012) outras oferecem como um curso extracurricular antes de iniciar o ano/semestre letivo (Noguti, 2014). Na UDESC/Joinville, somente o curso de Licenciatura em Matemática possui a disciplina de Matemática Básica que é considerada um pré-requisito para o Cálculo Diferencial e Integral, que no momento da

[16] Esses mesmos conteúdos já se faziam presentes, de forma implícita, nas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Brasil, 2006).

criação do curso já fora pensada como uma forma de trabalhar com alguns conteúdos do Ensino Médio almejando diminuir as reprovações e evasão do *Cálculo* (Moro & Siple, 2010).

2.3. Dificuldades associadas ao ensino e a aprendizagem de *Cálculo*

A pesquisa de Silva Filho *et al.* (2007), promovida pelo Instituto Lobo para o Desenvolvimento da Educação da Ciência e da Tecnologia, revela que a evasão dos cursos superiores brasileiros não se difere muito de outros países e que, a nível mundial, "a taxa de evasão no primeiro ano de curso é duas a três vezes maior do que a dos anos seguintes" (p. 643). A reprovação nas disciplinas iniciais pode contribuir para que os índices de evasão no início dos cursos de graduação sejam superiores aos do final dos cursos. Nos cursos relacionados à área de Ciências Exatas das universidades brasileiras a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) está no primeiro ano de curso. Logo, pela afirmação de Silva Filho *et al.* (2007), inferimos que o insucesso em *Cálculo* é um dos fatores que pode desestimular um estudante e até leva-lo a desistência do curso. Por insucesso estamos considerando as reprovações na disciplina. Essas taxas de não aprovação são elevadas tanto na UDESC/Joinville (Figueiredo; Siple; Azevedo; & Moro, 2014) como em outras instituições de Ensino Superior públicas e privada, tais como: *Cálculo* na Universidade Federal Fluminense (Rezende, 2003); Universidade de São Paulo (Barufi, 1999); Universidade Federal do Espírito Santo (Wrobel, Zeferino & Carneiro, 2013); Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (Santos *et al.*, 2016); Universidade Estadual de Goiás (Alvarenga, Dorr, & Vieira, 2016; Ferreira *et al.*, 2016); Pontifícia Universidade Católica de Goiás e Universidade de Brasília (Alvarenga, Dorr, & Vieira, 2016); Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (Serafim Filho, 2016); dentre outras.

Os estudantes ao conquistarem uma vaga no Ensino Superior e iniciarem seus estudos trazem consigo sonhos e expectativas de obterem bom êxitos nas avaliações das disciplinas, pois, geralmente, os ingressantes são alunos bem-sucedidos ao longo do ensino pré-universitário e acostumados a tirarem boas notas (Silva, 2011). Infelizmente, essa não é a realidade experenciada pela maioria dos estudantes das Exatas. Ao "se depararem com questões globais envolvendo os temas anteriormente estudados, em geral de modo departamentalizado, acrescidas de novas ideias impactantes [de *Cálculo*] como o infinito, as aproximações, a continuidade, a incomensurabilidade, etc., quase sempre veem frustradas suas expectativas iniciais" (Silva, 2011, p. 400), que se traduz em insucesso nas primeiras avaliações, gerando frustrações que ocorrem em virtude dos estudantes perceberem que suas notas não são as mesmas que costumavam obter no ensino pré-universitário. Alguns estudantes conscientes, após receberem uma nota baixa, tentam mudar estratégias/técnicas de estudo e até mesmo tempo de estudo extraclasse dedicado a essa disciplina. Entretanto, por experiência docente em *Cálculo*, a maioria dos estudantes que não obtiveram boas notas se desestimulam a estudar e já se consideram reprovados, pois é "normal" reprovar em *Cálculo*. Mello, Mello e Fernandes (2001) afirmam que existem disciplinas que

> devido à sua característica de mitos, essas disciplinas representam um desafio para os alunos, e os relatos das dificuldades encontradas passam de turma em turma, nem sempre de forma fidedigna, contribuindo para aumentar o caráter de mito. Assim, os alunos acabam por considerar natural um insucesso nessas disciplinas, e os professores estabelecem padrões de reprovação 'normais'. Esses padrões tornam aparentemente desnecessária qualquer reflexão sobre os problemas enfrentados na disciplina, já que estão 'dentro da normalidade'. (p. 8)

Corroboramos com Mello, Mello e Fernandes (2001) a respeito de disciplinas com características de mito e entendemos que *Cálculo* se encaixa nesse contexto. Muitos ingressantes no Ensino Superior, mesmo sem terem participado de nenhuma aula de CDI, por contato com ex-alunos, chegam no primeiro dia de aula com medo da disciplina e acreditando que ela é difícil apenas por "ouvirem falar" dela. Acreditamos que esse pré-conceito estabelecido com o *Cálculo* também pode acarretar dificuldades no aprendizado do mesmo.

Ao comparar a matemática ensinada na universidade com a ensinada no Ensino Médio percebe-se um distanciamento grande entre as abordagens dadas aos conteúdos em cada um dos respectivos níveis de ensino (Menestrina & Goudard, 2003). Os estudantes até se deparam com temas abordados anteriormente, mas estes são apresentados de forma mais rigorosa por meio dos conceitos primordiais do Cálculo que, geralmente, não foram introduzidos no ensino pré-universitário. E, essa matemática "diferente", ensinada no início do curso, aliada "às novidades do ser universitário, muitas vezes, a imaturidade e as algumas deficiências trazidas do processo educacional anterior" (Gomes, 2012, p. 1), são fatores que dificultam o aprendizado em *Cálculo* e contribuem para as elevadas taxas de reprovação.

Alguns autores (Pagani & Allevato, 2016; Rafael & Escher, 2015) consideram que a abordagem metodológica também pode acarretar dificuldades de aprendizagem. Nas universidades brasileiras, a metodologia predominante no sistema de ensino é a expositiva (Serafim Filho, 2016). De acordo com Almeida, Fatori e Souza (2010), usualmente,

> nas aulas de Cálculo os conteúdos são apresentados aos alunos como um saber já construído, sem lugar para a intuição, experimentação ou descoberta e perante o qual não é possível a argumentação. Os conceitos são apresentados aos alunos, na maioria das vezes, já formalizados, não decorrentes das suas ações e da reflexão sobre eles,

> dando-se quase nenhum tempo aos alunos para sentirem a formalização como algo natural e necessário à comunicação de processos e resultados. (p.4).

Nessas abordagens tradicionais de ensino o professor é um agente "transmissor" de conhecimento e o aluno um "receptor" de conteúdo. Para Santarosa e Moreira (2011, p. 318), esses "métodos tradicionais de ensino são potencialmente favorecedores da aprendizagem mecânica. Ou seja, uma aprendizagem basicamente memorística, sem significado, e que serve apenas para aplicação em situações conhecidas, a curto prazo". As dificuldades relacionadas ao ensino de *Cálculo* podem ser sentidas por professores em disciplinas posteriores. Gonçalves e Reis (2011) versam sobre esse assunto e, apoiadas na experiência docente, exemplificam a situação expondo que muitos alunos já aprovados em CDI, são capazes de encontrar a derivada de uma função, mas o fazem de forma mecânica, pois muitos quando questionados sobre o significado da solução, não sabem responder. Isso ocorre porque aprenderam a resolver através de regras, um algoritmo a ser seguido, mas de facto não compreenderam os conceitos, pois a aprendizagem deve ter sido por meio da memorização.

Na UDESC/Joinville, além do ensino tradicional, muitos professores de *Cálculo* preveem em seus planos de ensino o uso da metodologia de ensino expositiva dialogada, que segundo Anastasiou e Alves (2009) é

> uma exposição do conteúdo, com a participação ativa dos estudantes, cujo conhecimento prévio deve ser considerado e pode ser tomado como ponto de partida. O professor leva os estudantes a questionarem, interpretarem e discutirem o objeto de estudo, a partir do reconhecimento e do confronto com a realidade. Deve favorecer análise crítica, resultando na produção de novos conhecimentos. Propõe a superação da passividade e imobilidade intelectual dos estudantes. (p.79)

Em outras palavras, o professor estabelece um diálogo com os alunos buscando ser um mediador na construção do conhecimento relacionado ao conteúdo que deseja trabalhar. Entretanto, muitas vezes, o professor deixa pouco tempo tanto para que os seus estudantes possam refletir sobre o que estavam fazendo e não destina tempo para que resolvam exercícios em sala de aula[17]. Nesse contexto, entendemos que tanto em aulas tradicionais quanto em aulas expositivas dialogadas, os estudantes são agentes passivos, pois são acostumados a copiarem (ou, atualmente, tirarem fotos) da resolução dos exemplos propostos e resolvidos (na lousa) pelo professor, sem muitos questionamentos, pois nem sempre o docente propicia tal interação. Além disso, ratificamos o pensamento de Pagani e

[17] A professora investigadora se inclui nessa perspectiva.

Allevato (2016) de que se o docente adota a postura "de resolver o problema, antes mesmo que esse aluno reflita sobre ele, o aluno, geralmente, não considera outras maneiras de resolvê-lo" (p. 92).

Ao questionar docentes de *Cálculo* sobre os motivos geradores de fracasso na disciplina, estes normalmente associam com uma precária formação de matemática básica (Cury, 2009; Lima *et al.*, 2014). Entretanto, analisando o panorama em que se encontra o *Cálculo*, Rezende (2003) faz os seguintes questionamentos:

> Seria realmente o curso de Cálculo imprescindível? E qual a razão de tantas reprovações? Onde reside a dificuldade? No processo de aprendizagem? No aluno, isto é, na 'falta de base' do aluno? Ou estaria esta dificuldade no próprio professor, ou na metodologia de ensino, ou ainda, na estrutura curricular do ensino de matemática que não dá o suporte que esta disciplina merecia? (pp. 4 – 5)

Esse autor não concorda que o problema do *Cálculo* seja a "falta de base", antes acredita que "o problema está 'fora' e é 'anterior' inclusive ao seu próprio tempo de execução" (Rezende, 2003, p. 31), por isso considera que as dificuldades inerentes ao ensino dessa disciplina são de natureza epistemológica e que deve-se "estabelecer os conceitos básicos e necessários para se aprender as ideias básicas de Cálculo" (p. 32). Em sua pesquisa de doutorado, Rezende identificou cinco macros espaços de "dualidades essenciais do *Cálculo* e de seu ensino: discreto/contínuo; finito/infinito; variabilidade/permanência; local/global; sistematização/construção" (p. 325), cujo mapa espectral que apresenta a inter-relação entre essas dualidades está ilustrado na Figura 6.

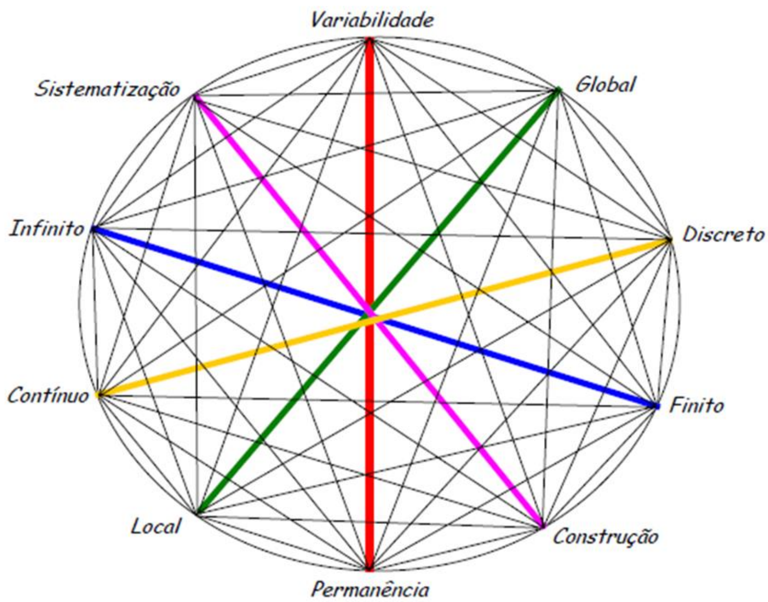


Figura 6 - Mapa espectral das dificuldades de ensino de *Cálculo*.
Fonte: Rezende, 2003, p. 400.

Rezende (2003) concluiu que as dificuldades de natureza epistemológicas do ensino de *Cálculo* são devidas à "omissão/evitação das ideias básicas e dos problemas construtores do *Cálculo* no ensino de Matemática em sentido amplo" (p. 402). Entende que a principal fonte de obstáculos epistemológicos no ensino está relacionada com a ausência da abordagem das ideias e problemas que originaram o *Cálculo* ainda no Ensino Básico e à abordagem dos conceitos no sentido contrário ao que ocorreu ao longo da história de seu desenvolvimento. Barufi (1999) também fala sobre a estrutura lógica-formal (Limite – Derivada – Integral), adotada nas universidades, que é a mesma que de décadas atrás. Kaput (1994), anterior à Rezende, também acreditava de que inserir as ideias primitivas de *Cálculo* desde as séries iniciais é uma forma de atenuar as dificuldades nessa disciplina.

Harel e Trgalová (1996) corroboram com Artigue (1995) que as dificuldades enfrentadas no *Cálculo* são de três espécies: o conceito de função; a formalização dos conceitos e a transição entre fases. Com relação à primeira dificuldade apontada, exemplificam algumas das dificuldades identificadas em estudantes que não entendem o conceito de função: interpretam função como uma equação em que ao escolher um número obtém-se um resultado, ou seja, pode ser vista como dois conjuntos de pontos cujas coordenadas estão correlacionadas; confundem equação com um função, ou seja, podem olhar para a função quadrática, por exemplo, $y = x^2 + 5x + 6$, e nela reconhecer a equação de segundo grau $x^2 + 5x + 6 = 0$, cuja solução pode ser obtida por meio de uma fórmula. Os autores destacam que há dificuldades na formalização do conceito de limite e sua aplicação na convergência de sequências de números reais. Com relação à transição entre fases, identificam dificuldades entre as fases: intuitiva, pragmática e formal. Um exemplo em que é possível identificar a dificuldade com a transição entre fases é ao considerar a expressão $y = k$, com k sendo uma constante real. Ela pode ser interpretada como um elemento do conjunto dos números reais e, geometricamente, representa apenas um ponto sobre a reta real. Por outro lado, se consideramos uma representação no plano cartesiano, $y = k$ representa uma reta paralela ao eixo das abscissas. E ainda, há uma terceira interpretação, muitas vezes representa-se $y = k$ como sendo uma forma mais sintética de representar $y = f(x) = k$, ou seja, a referida expressão trata-se de uma função constante. Por experiência docente, essa função que é a "mais simples de todas" acarreta muita dificuldade de entendimento para o estudante, pois ao atribuir valor de x para encontrarem sua respectiva imagem $f(x)$ não existe onde substituir o x escolhido. E, nas aulas de *Cálculo* nem sempre o professor percebe as dificuldades inerentes às diversas interpretações que podem ser dadas a uma expressão tão simples como tentar clarificar a transição entre as diferentes representações. Pela prática docente, ratificamos as dificuldades identificadas por Artigue. Entretanto, em nossas aulas do primeiro curso de *Cálculo*, geralmente, a convergência de sequências de números reais é explorada de forma intuitiva como uma introdução ao assunto de limite de função. Na sequência como o *Cálculo* é ensinado, um dos primeiros assuntos abordados é o conteúdo de funções. Por experiência, percebemos que muitos estudantes se preocupam pouco em se aprofundar no estudo de funções por supostamente ser um assunto que "dominam" por terem estudado na educação anterior à Universidade. No entanto, nesse nível de ensino, em muitas escolas brasileiras dá-se maior ênfase às funções de primeiro e de segundo grau. E, no *Cálculo*, além dessas funções se trabalha com funções trigonométricas, exponenciais, logarítmicas, dentre outras. Percebemos que muitos estudantes têm "horror" a essas funções, porque não as compreendem.

A pesquisa de doutoramento que visamos relatar neste texto foi motivada pelos baixos índices de aprovação e pelos elevados índices de desistência da disciplina de CDI. No tocante às dificuldades dos estudantes atreladas às carências da formação inicial em matemática básica, as reprovações e evasão na disciplina, características de mito, abordagem metodológica adotada e organização dos conteúdos, a realidade do CDI vivenciada na UDESC/Joinville não difere substancialmente da discussão precedente. A fim de ilustrar os índices de (não) aprovados em *Cálculo* na UDESC/Joinville, na Tabela 3 apresentamos os resultados dessa disciplina, nos diversos cursos de graduação (dentre os cursos de Engenharias, Licenciaturas ou Computação) dessa instituição de ensino, em que a professora investigadora foi a ministrante ao longo de sua carreira docente antes de iniciar essa pesquisa.

Tabela 3
(Não) Aprovados em Cálculo na UDESC/Joinville entre os anos de 2007 até 2015

Ano-Semestre	Sigla/Turma	Matriculados	AP	% AP	R	% R
2007-1	CDI-I (C)	39	12	31	27	69
2007-1	CDI-I (G)	19	4	21	15	79
2007-2	CDI-I (A)	39	11	28	28	72
2007-2	CDI-I (C)	37	9	24	28	76
2008-1	CDI-I (C)	47	22	47	25	53
2008-2	CDI1001 (B)	39	19	49	20	51
2008-2	CDI1001 (J)	37	18	49	19	51
2009-1	CDI-I (C)	42	16	38	26	62
2009-1	CDI1001 (D)	9	5	56	4	44
2009-2	CDI1001 (D)	20	12	60	8	40
2009-2	CDI1001 (E)	50	17	34	33	66
2010-1	CDI1001 (D)	13	5	38	8	62
2010-2	CDI1001 (D)	14	9	64	5	36
2011-1	CDI1001 (D)	19	6	32	13	68

2011-2	CDI1001 (D)	23	5	22	18	78
2012-1	CDI1001 (B)	36	14	39	22	61
2012-2	CDI1001 (B)	41	9	22	32	78
2014-1	CDI1001 (J)	39	8	21	31	79
2014-2	CDI1001 (H)	39	4	10	35	90
2015-1	CDI1001 (B)	39	20	51	19	49

Legenda: AP – Aprovados; R – Reprovados.
Fonte: Sistemas Acadêmicos (SigmaWeb e SIGA)

A Figura 7 ilustra graficamente os dados apresentados na Tabela 3. Por meio dessas duas representações pode-se constatar que dessas 20 turmas de *Cálculo*, apenas em quatro turmas o índice de aprovados foi superior ao de reprovados; e que em 13 turmas o índice de não aprovados foi superior a 60%.

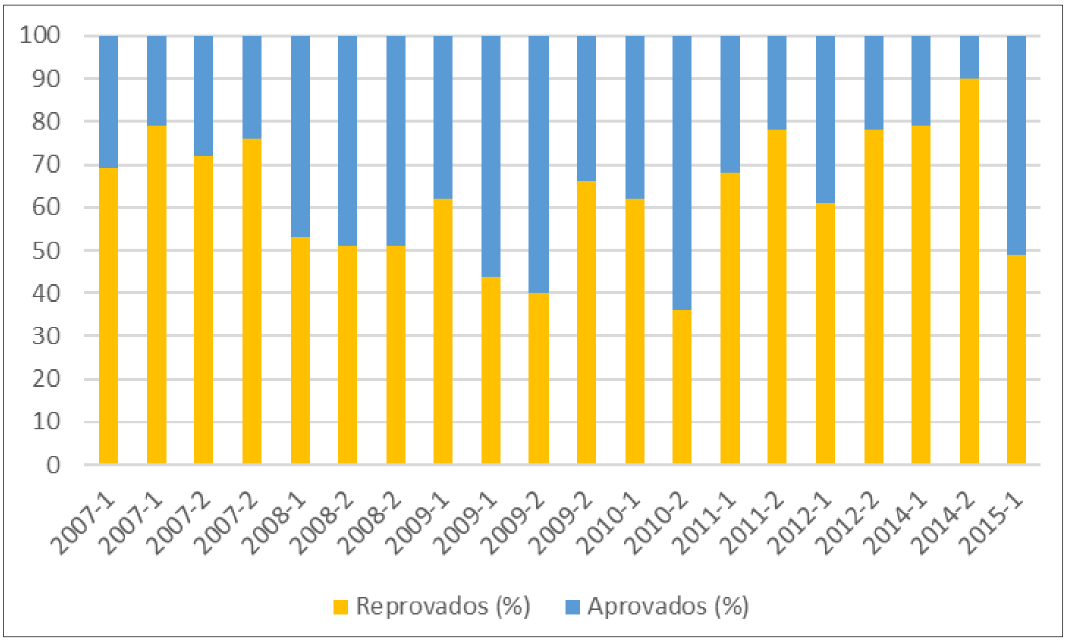


Figura 7 - (Não) aprovados entre os anos de 2007 até 2015.
Fonte: Produção da autora.

Desconfortável com essa realidade, a professora investigadora se propôs a sair de sua zona de conforto, que era ministrar a disciplina com aulas expositivas e dialogadas, para inserir em sua prática docente uma abordagem metodológica mais dinâmica que envolvesse mais os estudantes durante as aulas. Dessa forma, a professora poderia observar se, ao mudar a forma de ensinar, seus alunos poderiam demonstrar mais interesse em aprender e, consequentemente, não abandonassem a disciplina logo após a realização do primeiro teste ou mesmo, antes dele. Por experiência docente, há estudantes que não chegam a fazer nem a primeira avaliação da disciplina. Como nosso interesse de pesquisa estava relacionado com o ensino e a aprendizagem de *Cálculo*, julgamos conveniente ter conhecimentos de pesquisas recentes relacionados a esses itens. Um panorama sobre pesquisas brasileiras que abordaram questões sobre ensino e/ou aprendizagem de *Cálculo* será apresentado na próxima seção.

2.4. Mapeamento de estudos brasileiros relacionados com ensino e aprendizagem de *Cálculo*

Como a pesquisa à qual esse relatório final está vinculado foi desenvolvida em uma universidade brasileira, ao buscar trabalhos relacionados com o ensino e a aprendizagem de *Cálculo*, optamos por considerar apenas os que foram desenvolvidos no Brasil, por se tratar de uma realidade similar à vivenciada.

A fim de ter um panorama das pesquisas que abordam questões relativas ao ensino e à aprendizagem de *Cálculo*, buscamos inicialmente o banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior[18] (CAPES). Ao usar os descritores "cálculo diferencial" e "ensino superior", obtivemos um volume muito grande de informações, foram aproximadamente 106 mil trabalhos. Após essa primeira pesquisa foi feito um refinamento com os mesmos descritores, mas restringindo a área de avaliação dos trabalhos. As áreas selecionadas foram: Educação, Ensino, Ensino de Ciências e Matemáticas. Com essas considerações, reduziu-se um pouco a amostra, mesmo assim, continuava com um volume muito grande de informações (46.300 trabalhos). Entendemos que o elevado número gerado ocorre porque a ferramenta de busca do portal da CAPES considera cada uma das palavras dos descritores ao invés da expressão toda, como consequência, o retorno da pesquisa realizada apresenta muitos trabalhos de áreas que não correspondem às que foram previamente estipuladas. Entretanto, ao fazer a primeira seleção dos trabalhos, pelos títulos, percebemos que os primeiros listados parecem ser os mais prováveis de serem de interesse na busca. Após passar do trabalho listado na posição 700, ficou cada vez mais difícil de encontrar algum trabalho que nos interessasse usando como referência o título. Com isso, optamos por considerar a busca nos primeiros 1500 trabalhos listados, que corresponde a pouco mais de 3% dos 46.300 trabalhos. Sentimos a falta do sistema de busca da CAPES não permitir que se façam mais refinamentos dentro da própria pesquisa já efetuada, pois ao fazer qualquer alteração no refinamento, iniciava-se novamente a pesquisa. Com essas escolhas, entre

[18] Disponível em: http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/

teses de doutorado (D), dissertações de mestrado acadêmico (MA) e mestrado profissional[19] (MP), ao todo selecionamos 208 trabalhos para serem analisados.

A segunda parte da pesquisa relacionada a esse mapeamento de teses e dissertações consistiu em ler os resumos e as palavras chaves de cada um dos trabalhos com o intuito de estabelecer categorias relacionadas com o tema de interesse e com os assuntos abordados. Conforme Ferreira (2002)

> Um conjunto de resumos organizados em torno de uma determinada área do conhecimento (...) pode nos contar uma História de sua produção acadêmica. Mas, é necessário pensar que nesta História foram considerados alguns aspectos dessa produção e que nela há certas limitações. (p. 268)

Segundo essa autora, apesar dos resumos retratarem *uma das possíveis* Histórias, a limitação existente está relacionada ao facto de não ser possível retratar toda a realidade experienciada pelo investigador. No entanto, por meio da leitura crítica dos resumos e processos de "idas e vindas" a eles, foi possível "estabelecer categorias de análise relativas ao tipo de formação, tipo de estudo, técnicas de pesquisa" (Romanowski & Ens, 2006, p. 44). Para tal constituição foi importante recorrer a estudos similares, pois estes permitiram identificar e apontar as tendências de pesquisas na área de conhecimento de interesse. No nosso caso, identificamos que os trabalhos de Pagani e Allevato (2014) e Marini[20] (2014) apresentam um panorama das pesquisas relacionadas com o ensino e a aprendizagem de *Cálculo*, respectivamente, a partir de 1999 e 2003 até o ano de 2013. Esse foi um fator decisivo para restringirmos nosso mapeamento entre os anos de 2014 e 2017, visto que não haveria necessidade de investigar os mesmos trabalhos já considerados por esses autores. Pagani e Allevato (2014) analisaram 28 trabalhos e Marini (2014), 35 trabalhos em nível de mestrado e doutorado. Marini considera um espaço de tempo menor que Pagani e Allevato, entretanto identifica um maior número de trabalhos em virtude de ter considerado alguns artigos com o mesmo título dos trabalhos finais de mestrado/doutorado cujas dissertações/teses não se encontravam disponíveis em ambientes virtuais de acesso público. Tendo em vista que o objetivo dessa pesquisa de doutorado não era a realização de um estado da arte das pesquisas de *Cálculo*, definimos que daríamos sequência ao trabalho de mapeamento realizado por esses autores, pois almejamos estar a par do que vem sendo discutido nas pesquisas atuais dessa área de conhecimento. Após essa delimitação temporal, dos 208 trabalhos selecionados restaram 84

[19] No artigo intitulado "Mestrado profissional, mestrado acadêmico e doutorado", disponível no site https://www.capes.gov.br/images/stories/download/artigos/Artigo_30_08_07.pdf (acesso em 13 jun 2018), define-se o mestrado profissional (MP) como sendo "um título terminal, que se distingue do acadêmico porque este último prepara um pesquisador, que deverá continuar sua carreira com o doutorado, enquanto no MP o que se pretende é imergir um pós-graduando na pesquisa, fazer que ele a conheça bem, mas não necessariamente que ele depois continue a pesquisar. O que importa é que ele (1) conheça por experiência própria o que é pesquisar, (2) saiba onde localizar, no futuro, a pesquisa que interesse a sua profissão, (3) aprenda como incluir a pesquisa existente e a futura no seu trabalho profissional.." (p. 1).

[20] Destacamos que o trabalho de Marini (2014) foi uma das pesquisas encontradas no portal da CAPES.

trabalhos a serem analisados. Após efetuada a análise desses trabalhos, refazendo a pesquisa no portal da CAPES considerando as mesmas áreas de avaliação e como descritores as expressões "cálculo diferencial AND ensino superior" retornaram 315 trabalhos, dos quais 36 pertenciam ao período de 2013 a 2017, sendo que destes, 27 já haviam sido considerados em nossa análise. Na discussão procedente, iremos considerar os 93 trabalhos, cuja distribuição por ano e nível estão apresentadas na Tabela 4 e na Figura 8.

Esses dados nos revelam que o número de trabalhos oriundos de pesquisas de mestrados profissionais é bastante representativo, pois corresponde a 62% da produção acadêmica do período em questão. Com relação ao levantamento apresentado por Pagani e Allevato (2014), houve um aumento em aproximadamente 20% desse tipo de produção.

Tabela 4
Teses e dissertações referentes ao ensino e aprendizagem de Cálculo do período de 2014 a 2017

Ano	Mestrado		Doutorado	Total
	Acadêmico	Profissional		
2014	4	17	6	27
2015	8	12	4	24
2016	2	19	7	28
2017	2	10	2	14
Total	16	58	19	93

Fonte: Produção da autora.

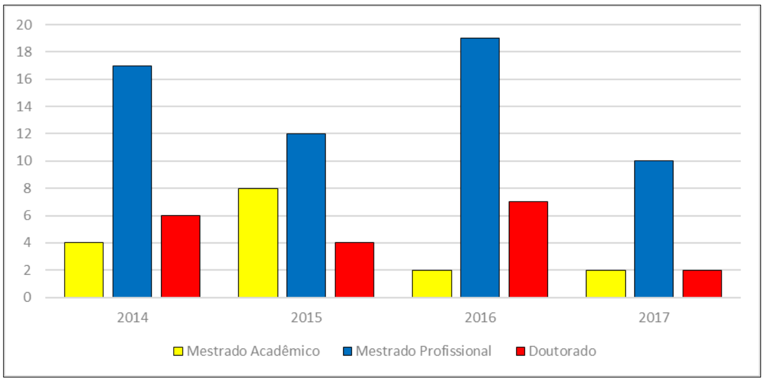


Figura 8 - Distribuição da teses e dissertações entre 2014 e 2017.
Fonte: Produção da autora.

Para identificar o objetivo dos trabalhos, categorizá-los quanto ao tipo de estudo, assuntos abordados e resultados da pesquisa, efetuamos a leitura dos respectivos resumos e palavras-chaves. De acordo com Ferreira (2002), É possível ler em cada resumo e no conjunto deles outros enunciados, outros resumos, outras vozes, e perceber a presença de certos aspectos significativos do debate sobre determinada área de conhecimento, em um determinado período (...) [pela] compreensão das marcas deixadas pelos autores/editores em cada resumo e do estabelecimento de relações de cada um deles (resumo) com outros, e também com uma bibliografia que extrapola a da produção de dissertações e teses. (p. 270).

A constituição de uma história por meio de resumos pode ser entendida como um processo de rede de "vários fios que se cruzam, que se rompem, que se unem, que se questionam dependendo do ponto que se estabelece como partida" (Ferreira, 2002, p. 270). Contudo, nos trabalhos analisados percebemos uma vasta diferença na estrutura dos resumos. Alguns destes permitiram identificar claramente qual era o objetivo do trabalho, quais foram os procedimentos metodológicos adotados e as conclusões do estudo. Outros resumos, por serem muito sucintos, não nos permitiram identificar essas informações. Nesses casos, tivemos de recorrer a leitura da introdução e da conclusão, além de fazer uma "leitura em diagonal[21]" do trabalho. A partir dessa exploração, ratificamos a percepção de Pagani e Allevato (2014) de que muitas pesquisas acadêmicas são motivadas pelos elevados índices de reprovação no primeiro curso de *Cálculo*, provenientes de dificuldades no ensino e na aprendizagem dos conteúdos a ele intrínsecos. Como já foram evidenciados anteriormente, essa pesquisa de doutoramento se inclui nesse contexto. Os conteúdos/temas abordados nas pesquisas catalogadas estão apontados na Tabela 5.

Tabela 5
Distribuição dos assuntos abordados nas teses e dissertações sobre ensino e aprendizagem de Cálculo

Conteúdos/tema abordado	Número	Percentual (%)
Função	9	9,7
Derivada	16	17,2
Limite	10	10,8
Integral	14	15,1
Limite e derivada	7	7,5
Limites, derivadas e integral	9	9,7
Derivada e integral	3	3,2
Elementos de *Cálculo* de forma geral	10	10,8
Outros	15	16,1
Total	93	100,0

[21] Por leitura em diagonal define-se como "um tipo de leitura rápida, em que o objectivo é procurar uma informação específica ou identificar as ideias principais de um texto, que te vai permitir organizar melhor o teu estudo". Definição disponível em: http://www.cursinhoadmissao.com.br/downloads/dicas/3.pdf

Pela Tabela 5, nota-se que o conteúdo mais explorado nos trabalhos acadêmicos é o de derivadas, seguido de integrais e limites. Alguns trabalhos abordam de forma isolada um desses assuntos, outros um pouco de cada assunto. Na categoria de funções foram considerados trabalhos que abordavam funções de uma variável ou duas variáveis. Na categoria "limite", estão sendo considerados também os que abordam o assunto de continuidade, pois está diretamente associado com esse conteúdo. A categoria "integral" considera os trabalhos que abordam integrais indefinidas e definidas. Destacamos que a maioria desses trabalhos aborda o conteúdo de integrais definidas por meio de estudo do Teorema Fundamental do Cálculo ou Somas de Riemann. Na categoria "elementos de *Cálculo* de forma geral" a maioria dos trabalhos enquadrados nela estão relacionados com conteúdos de matemática pré-universitária. E, na categoria "outros" há trabalhos que versam sobre: ambiente virtual de aprendizagem; disciplinas oferecidas na modalidade a distância ou semipresenciais; evasão e/ou indicadores de permanência; desempenho acadêmico em *Cálculo*; dificuldades de aprendizagem; processos formativos e aspectos epistemológicos; comprometimento/regulação do aluno com a aprendizagem; preocupação com aspectos históricos relacionados com o *Cálculo* ou a disciplina de *Cálculo*; proposta de proficiência em *Cálculo*; e, estado da arte.

Ao realizar a investigação das teses e dissertações levantadas, além de categorizar quanto aos assuntos/conteúdos abordados, nosso interesse era encontrar trabalhos que mais se aproximam do nosso interesse de pesquisa, que no caso é o ensino e aprendizagem de *Cálculo* mediados pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. As categorias consideradas estão apresentadas na Tabela 6 e foram adaptadas de Pagani e Allevato (2014). Essas autoras classificaram as pesquisas quanto a natureza empírica (trabalhos que versam sobre alguma prática de ensino) ou teórica, sendo que os trabalhos de natureza empírica, foram agrupados em três subcategorias. Na caracterização das pesquisas, usamos a mesma categorização que Pagani e Allevatto (2014) quanto à natureza dos trabalhos e suas subcategorias. Todavia, fizemos alteração na categoria A3 dessas autoras, ao invés de relacioná-la somente com concepções de ensino apresentadas pelos alunos no processo de aprendizagem também consideramos as concepções dos professores sobre o ensino. Além dessa modificação, sentimos a necessidade de incluir mais uma categoria para as pesquisas de natureza empírica (A4) e outras três nas de natureza teórica (B1, B3 e B4), que serão detalhadas na sequência desse texto. Convém destacar que Marini (2015) também fez uma categorização das pesquisas quanto à abordagem (ensino, aprendizagem, ensino e aprendizagem, currículo, formação de professores e historiografia), mas não apresentou subcategorias que, a nosso ver, favorecem uma melhor compreensão do leitor quanto à interpretação do que encontrará ao buscar por algum dos textos indicados.

Uma primeira interpretação desses dados da Tabela 6 nos permite perceber que 63% (58 de 93 trabalhos) são de natureza empírica e, destes, aproximadamente 70% (41 de 58 trabalhos) dos trabalhos relatam alguma atividade implementada em sala de aula, posteriormente analisada. E, com relação aos trabalhos de natureza teórica, cerca de 68% (24 de 35) consistiram de uma revisão de literatura e da proposição de alguma atividade ainda não implementada. Algumas destas propostas aparecem dispersas ao longo do texto e não apresentam indícios de que fora feita uma pilotagem da proposta antes da versão final.

Tabela 6
Distribuição dos trabalhos em categorias e subcategorias

Natureza	Categoria	Trabalhos que...	Total
Empírica	A1	implementam e[ou] analisam uma prática de ensino	41
	A2	resultam em uma proposta de ensino com abordagens baseadas na teoria cognitiva e na aprendizagem significativa	1
	A3	discutem e analisam concepções apresentadas pelos alunos/professores no processo de aprendizagem/ensino de acordo com algum referencial teórico	11
	A4	analisam interação em ambientes virtuais em curso de *Cálculo* ofertados totalmente/parcialmente na modalidade de ensino a distância (EaD)	5
Teórica	B1	apresentam revisão de literatura e proposta de aula não implementada	24
	B2	abordam e discutem as dificuldades no ensino e aprendizagem de *Cálculo*	6
	B3	se apoiam na análise de documentos ou histórica	4
	B4	discutem e analisam a abordagem dada a um conteúdo específico segundo a teoria cognitiva	1

Na categoria A1 agrupamos os trabalhos que implementaram e analisaram uma prática de ensino. Alguns desses experimentos, como estratégia de ensino, fizeram uso de metodologias diferenciadas, tais como: Resolução de Problemas (Bezerra, 2016; Cardoso da Silva, 2015; Noguti, 2014; Pagani, 2016; Pereira, 2015; Vogado, 2014); Modelagem Matemática (Batista, 2017); Engenharia Didática (Alves, 2014; Ingar, 2014); e, Matemática Realística (Tavares, 2014). Dentre as pesquisas que usaram a Resolução de Problemas, exceto a de Cardoso da Silva (2015), as demais usaram a concepção de ensinar através da Resolução de Problemas e adotaram como referencial teórico os trabalhos de

Onuchic (1999), que falaremos mais no próximo capítulo. O trabalho de Cardoso da Silva (2015) também foi o único que considerou a formulação de problemas associada a resolução de problemas. Diversos trabalhos dessa categoria também fizeram uso de algum software matemático, tais como: Winplot (Pagani, 2016), CAS Mathematica (Ingar, 2014), Máxima (Ladeira, 2014; Oliveira, 2015) e quinze trabalhos fizeram uso do *GeoGebra*. Desses 15 trabalhos, em duas pesquisas o foco principal foi desenvolver atividades que envolvessem conteúdos de *Cálculo*, mais especificamente sobre funções de duas variáveis e taxas de variação, respectivamente, de Lemke (2017) e Silveira (2017). A pesquisa dessas autoras considerou a teoria do conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo (TPACK), por isso, o *GeoGebra* teve um papel central na pesquisa e agiu como uma ferramenta facilitadora da aprendizagem (Lemke, 2017; Silveira, 2017). Da categoria A1, o trabalho de Gomes (2016) é o único que não implementou, mas analisou uma prática. Esse investigador utilizou a Teoria de Resposta ao Item e a Teoria Clássica para calibração dos itens de um teste para analisar os resultados de duas dessas avaliações que foram aplicadas na UNB e propõe um esquema de Avalição Computacional Adaptada para *Cálculo*. A proficiência em *Cálculo* criada pelo Departamento da Matemática da UNB, foi uma proposta inovadora com intenção de melhorar o aproveitamento dos alunos nessa disciplina e baseia-se na avaliação por competências com suporte da psicometria e da estatística. Quatro pesquisas dessa categoria fizeram uso da teoria de Representação Semiótica (Ferreira, 2017; Lino, 2015; Santos, 2017; Silva, 2016). Silva (2016) também utilizou material produzido por impressão 3D para abordar o conteúdo de integrais duplas e triplas. Com relação ao cunho metodológico dessas pesquisas, somente o trabalho de Mattos (2015) apresenta uma análise quantitativa. Muller (2015) indica que sua pesquisa é quali-quantitativa, entretanto, em sua análise não usou ferramentas de estatística. Entendemos que sua pesquisa foi qualitativa com dados quantitativos. Todos da categoria A1 estão explicitados na Tabela 7.

Tabela 7
Teses e dissertações de natureza empírica da categoria A1

Autor	Título	Instituição	Nível	Ano
Alonso, Erasto Piedade	Aspectos Visuais e Gráficos do Teorema Fundamental do Cálculo	UFRJ	MA	2017
Alves, Marcos Junior Guimarães	Uma proposta para o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral com a utilização do software GeoGebra	USS	MP	2014
Araújo, Everton Alves de	Proposta de Ensino do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio via GeoGebra	UNIVASF	MP	2015
Barbosa, Magno Afonso Martins	Proposta do Ensino de Integrais de Funções no Ensino Médio	UEPB	MP	2016

Batista, Barbara Regina da Silveira	Sequências numéricas a partir da geometria fractal para licenciados em Matemática	UNIFRA	MP	2017
Bezerra, Nilra Jane Filgueira	A organização do ensino de Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva da teoria da formação por etapas das ações mentais de Galperin	UFMT	D	2016
Cantaruti, Andréa Cristina Rocha	Ensino de Funções no Primeiro Ano do Ensino Médio: Uma abordagem com ênfase no Comportamento das Funções e sua repercussão no Ensino Superior na disciplina de *Cálculo*	UFSJ	MP	2017
Cardoso da Silva, Janaína	Explorando significados sobre Cálculo de volumes por meio de Formulação e Resolução de Problemas por futuros professores	UEPB	MA	2015
Coimbra, Jayro Mendes	O Ensino de *Cálculo* na Educação Básica	UERJ	MP	2015
Fontes, Liviam Santana	A avaliação da aprendizagem na disciplina Cálculo Diferencial e Integral: em busca de sentidos pedagógicos	UFG	MA	2015
Gomes, Fábio Henrique	Uma proposta de exame de proficiência em Cálculo Diferencial e Integral	UNB	MP	2016
Ingar, Katia Vigo	A visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais da função de duas variáveis reais	PUC – SP	D	2014
Muller, Thaisa Jacintho	Objetos de aprendizagem multimodais e ensino de *Cálculo*: uma proposta baseada em análise de erros	UFRGS	D	2015
Noguti, Fabiane	Um curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas para alunos ingressantes da Universidade Federal do Pampa – Campus Alegrete	UNESP – Rio Claro	D	2014
Pagani, Érica Marlucia Leite	O ensino-aprendizagem-avaliação de derivadas no curso Técnico integrado ao Médio através da Resolução de Problemas	UNICSUL	D	2016
Pires, Luiz Fernando Rodrigues	As influências das tecnologias da informação e comunicação nas estratégias de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral	UFJF	MP	2016
Tavares, Marcele	Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de *Cálculo*	UEL	D	2014
Vogado, Gilberto Emanoel Reis	O ensino e a aprendizagem das ideias preliminares envolvidas no conceito de integral por meio da Resolução de Problemas	PUC – SP	D	2014

Gonçalves, Sandro Salles	Abordagem histórico-cultural em sala de aula inclusiva de Matemática: o processo de apropriação do conceito da função derivada por um aluno cego	UFOP	MP	2014
Oliveira Junior, Jaime Alves de	Um estudo sobre a implementação do cálculo diferencial e integral no ensino médio	USP	MP	2015
Martins Junior, José Cirqueira	Ensino de derivadas em Cálculo I: aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra	UFOP	MP	2015
Kurokawa, Cecília Yumi	Áreas e volumes de Eudoxo e Arquimedes a Cavalieri e o Cálculo Diferencial e Integral	UNICAMP	MP	2015
Ladeira, Alexander Rodrigues	Uma proposta de atividades didáticas com tópicos de matemática básica preparatórios para o estudo de *Cálculo* universitário	PUC – MG	MP	2014
Ladislau, Carlos Cley Evangelista	Noções de Cálculo Diferencial no Ensino Médio	UNIVASF	MP	2014
Lemke, Raiane	Funções reais de duas variáveis e GeoGebra: um livro dinâmico para o ensino de *Cálculo*	UDESC	MP	2017
Lima, Gustavo de Souza Breves	Explorando noções elementares do *Cálculo* em sala de aula, a partir de suas aplicações e sob uma perspectiva histórica	UFRJ	MP	2017
Mattos, Willian Febronio de	Uma contribuição para o ensino de *Cálculo* no ensino médio, utilizando a classe das cônicas	USP – Ribeirão Preto	MP	2015
Moura, Daniela Alves da Silveira	Perspectivas no ensino de limite: numa perspectiva figural e conceitual – foco em objetos de aprendizagem	PUC – MG	MP	2014
Oliveira, Fabio Luiz de	A produção de conhecimento matemático acerca de funções de duas variáveis em um coletivo de seres-humanos-com-mídias	UFOP	MP	2014
Oliveira, Gladys Maria de Souza	Estudo da Aprendizagem do conceito de limite fundamentado na teoria de aprendizagem significativa aplicado à licenciatura em Matemática	UERR	MP	2014
Pereira, Caroline Conrado	Metodologia da Resolução de Problemas e a construção do conceito de limite em uma turma do 3° ano do Ensino Médio	UNIFRA	MP	2015
Ravagnani, Fábio Araújo	Cálculo Diferencial e Integral no Movimento dos Planetas	UNESP – São José do Rio Preto	MP	2014
Reis, Thiago Linhares Brant	Integral definida: conteúdos de ensino e estratégias de aprendizagem	PUC – MG	MP	2015

Ricaldoni, Márcio Augusto Gama	Construção e interpretação de gráficos com o uso de softwares no ensino de *Cálculo*: trabalhando com imagens conceituais relacionadas a Derivadas de Funções Reais	UFOP	MP	2014
Silveira, Renata Feuser	Dinamicidade no ensino de *Cálculo*: uma proposta para taxa de variação de funções reais de uma variável no GeoGebra	UDESC	MP	2017
Nascimento, Patrícia Cacho do	Um estudo sobre os erros dos alunos em Cálculo Diferencial e Integral I em um curso de Engenharia Civil	UNICSUL	MP	2017
Fonseca, Maycon Odailson dos Santos da	Proposta de tarefas para um estudo inicial de derivadas	UTFPR	MP	2017
Santos, Ueslei Galvão do Rosário	O estudo de relações entre os conceitos derivada e declive da reta tangente envolvendo licenciandos em Matemática	UESC	MA	2017
Silva, Sheila Aline dos Santos	Prototipagem rápida de PCOC na impressora 3D para o ensino e aprendizagem de integrais duplas e triplas	UESC	MA	2016
Lino, Marcelo de Araújo	Os registros de representação semiótica na aprendizagem de derivada	UESC	MA	2015
Ferreira, Allan Silva	Diferentes abordagens do conceito de derivada: uma proposta de Investigação Matemática	UESC	MP	2017

A subcategoria A2 contempla trabalhos que se fundamentaram em teorias cognitivas para sugerir uma proposta de trabalho. De acordo com nossa análise, somente a dissertação de mestrado de Macão (2014) se enquadra nessa categoria. Esse pesquisador fez uma análise de dois livros didáticos de *Cálculo* de forma a fazer um enquadramento teórico do conteúdo do conceito derivadas conforme a teoria Três Mundos da Matemática de David Tall: corporificado, operacional e axiomático.

Os trabalhos da categoria A3 são trabalhos que usam um referencial teórico para discutir e analisar concepções apresentadas pelos participantes que são alunos e/ou professores nos processos de ensino e/ou aprendizagem. Donel (2015) usou a teoria construtivista_piagetiana para investigar as dificuldades de aprendizagem em *Cálculo* e concluiu que estas estão relacionadas com o nível de desenvolvimento cognitivo e "são explicadas pela ausência de instrumentos cognitivos da inteligência, [e] da falta de estruturas de pensamento" (p. 143). Farias (2015) investigou possíveis inter-relações de conceitos da Teoria da Atividade e de Comunidades de Práticas. Fernandes (2015) usou a Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Yves Chevallard. Esse pesquisador propôs um modelo heurístico para análise didática ecológica, que permitiu identificar as funcionalidades do objeto matemático pesquisado e estruturar uma proposta de como os conteúdos de *Cálculo* poderiam ser abordados em uma disciplina do curso que "substituiu" a disciplina de *Cálculo* em um curso de Engenharia Civil. Dalmolin (2015) fundamenta-se nos princípios da Teoria Histórico-Cultural, com foco na obra de Davýdov, cuja matriz epistemológica encontra-se no Materialismo Histórico Dialético, considerado como método de estudo. Essa teoria foi aplicada na análise de erros de estudantes. Em seus estudos concluiu que a natureza dos erros detectados revela essa tricotomia existente entre a Aritmética, a Geometria e a Álgebra. Junqueira (2014) e Miranda Rocha (2016) abordam questões epistemológicas. O primeiro destes autores tece uma rede de significados de toda a pesquisa e elenca as dimensões e significados da prática do professor de Cálculo Diferencial e Integral I. O segundo foca na análise de erros de estudantes repetentes em *Cálculo*. Diogo (2015), Fontoura (2016) e Pinto (2014) usam a teoria do Pensamento Matemático Avançado de Tall e/ou Vinner. Além de abordagens mais teóricas, Farias (2015) e Pinto (2014) também usaram os softwares *GeoGebra* e/ou Winplot. Rachelli (2017) usou como referencial teórico e metodológico a teoria APOS e elaborou a decomposição genética a fim de caracterizar as ações mentais dos estudantes na compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca. Minisini (2016) usou como referencial teórico os estudos de Vigotski, a Zona de Desenvolvimento Proximal e os níveis de ajuda, apoiado em pesquisas relacionadas com a teoria cultural da objetivação para abordar o assunto de função afim com licenciandos em Matemática. Os trabalhos da categoria A3 podem estão apresentados na Tabela 8.

Tabela 8
Teses e dissertações de natureza empírica da categoria A3

Autor	Título	Instituição	Nível	Ano
Dalmolin, Beatriz Alves da Silva	A tricotomização entre Aritmética, Álgebra e Geometria nos erros apresentados por estudantes da disciplina de Cálculo Diferencial Integral I	UNISUL	MA	2015
Diogo, Maria das Graças Viana de Sousa	Uma abordagem didático-pedagógica do Cálculo Diferencial e Integral I na formação de professores de Matemática	UNESP – Rio Claro	D	2015
Donel, Marlene Lucia Holz	Dificuldades de aprendizagem em *Cálculo* e a relação com o raciocínio lógico formal – uma análise no Ensino Superior	UNESP – Marilia	MA	2015
Farias, Maria Margarete do Rosário	Introdução a noções de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio no Contexto das TIC: Implicações para Prática do Professor que Ensina Matemática	UNESP – Rio Claro	D	2015
Fernandes, José Augusto Nunes	Ecologia do saber: o ensino de limite em um curso de engenharia	UFPA	D	2015

Fontoura, Leandro Ribeiro	Uma sequência de ensino para o estudo de integrais duplas	UNIFRA	MA	2016
Junqueira, Sônia Maria da Silva	Experiências de estudantes na construção do conhecimento de derivada em aulas de cálculo 1	PUC – SP	D	2014
Miranda Rocha, Messenas	Releitura do processo de aprendizagem de estudantes repetentes de *Cálculo* I	UFES	D	2016
Pinto, Rieuse Lopes	Definições matemáticas sobre funções e suas derivadas como um eixo de discussão para o ensino e a aprendizagem do *Cálculo*	UFOP	MP	2014
Rachelli, Janice	Compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca: análise segundo o modelo cognitivo APOS	UFN	D	2017
Minisini, Emi Gudrud	A evolução do sentido para a noção de função afim para um grupo de estudantes de Licenciatura em Matemática	UNIAN	D	2016

Na categoria A4 concentramos os trabalhos em que a disciplina de *Cálculo* foi ofertada na modalidade de ensino à distância e estão indicados na Tabela 9. Quatro trabalhos dessa categoria se referem a disciplina de *Cálculo* oferecida na modalidade semipresencial (Bezerra, 2015; Campos, 2014; Lopes 2014; Silva, 2017) e uma, na modalidade totalmente à distância (Leite de Almeida, 2016). As pesquisas de Campos (2014) e Lopes (2014), abordaram o uso de algum ambiente virtual de aprendizagem para o ensino de um conteúdo específico. A primeira pesquisadora abordou o assunto de continuidade e, a segunda, derivadas. Como meio de interação entre os participantes, Lopes também fez uso do aplicativo *WhatsApp* e da rede social *Facebook*. Almeida e Silva fizeram uso da plataforma Moodle para interagir virtualmente com os participantes. Exceto Bezerra, os demais autores apontam como aspecto positivo para a aprendizagem a interação entre os pares. Em sua tese, Campos apresentou uma análise minuciosa das interações entre os participantes apoiada nas seguintes teorias: Modelo de Estratégia Argumentativa, da Metáfora do Participacionismo e da Teoria da Cognição Corporificada. Todos esses trabalhos foram de natureza qualitativa. Silva adotou a Análise Textual Discursiva como opção metodológica e foi o único a utilizar um software para o tratamento dos dados qualitativos (ATLAS.ti ®).

Tabela 9

Teses e dissertações de natureza empírica da categoria A4

Autor	Título	Instituição	Nível	Ano
Bezerra, Wellington Lucio	O uso de ferramentas pedagógicas para o ensino de *Cálculo* de uma variável em cursos semipresenciais: o caso do Instituto Federal do Ceará	UFC	MP	2015
Campos, Maria Lucia Tavares de	Discursos sobre continuidade de funções reais de variável real em ambiente virtual colaborativo: uma perspectiva da cognição corporificada	UNIAN	D	2014
Leite de Almeida, Helber Rangel Formiga	Polidocentes-com-Mídias e o Ensino de *Cálculo* I	UNESP – rio Claro	D	2016
Lopes, Vanessa Rodrigues	Aprendizagem em um ambiente construcionista: explorando conhecimentos de *Cálculo* I em espaços virtuais	UFMS	MA	2014
Silva, Armando Paulo da	A modalidade EaD semipresencial e a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral	UNESP – Bauru	D	2017

Os trabalhos categorizados como B1 são resultados de pesquisas que se caracterizam como uma revisão de literatura sobre os conteúdos de *Cálculo* e que apresentam alguma proposta de atividades/aulas que não foram implementadas. As pesquisas categorizadas como B1 estão apresentadas na Tabela 10 e, por meio desta, pode-se observar que todas essas pesquisas são provenientes de mestrado profissional. Vinte e uma (corresponde a 87%) pesquisas dessa categoria estão relacionadas com propostas de atividades a serem desenvolvidas no Ensino Médio. Destas, nove pesquisas fazem uso do software *GeoGebra*. Entretanto, como docentes, entendemos que a maior parte destas não obteria sucesso na aplicação, pois a abordagem apresentada nas dissertações foi similar à apresentada no Ensino Superior. Um exemplo desse comentário pode ser constado no trabalho de Lima (2016). Floret (2016), além de apresentar uma proposta para o Ensino Médio, elaborada após analisar entrevistas de professores sobre essa temática, também apresentou índices de (não) aprovação da UFRJ entre os anos de 2011 e 2013. Nesse período, o índice de reprovação foi em torno de 60%. Um exemplo de proposta desenvolvida para Ensino Superior, com uso do *GeoGebra*, que poderia ser implementado no Ensino Médio, é a de Teixeira Machado (2016). Outras duas pesquisas relacionadas com o Ensino Superior usam abordagens metodológicas diferenciadas da tradicional. Nasserala (2014) usa a Sequência Fedathi e a Engenharia Didática. Souza (2016) adota a Aprendizagem Baseada em

Problemas. Essa autora apresenta um comparativo dos aspectos metodológicos dessa abordagem com as metodologias de Resolução de Problemas e Modelagem Matemática.

Tabela 10

Teses e dissertações de natureza empírica da categoria B1

Autor	Título	Instituição	Nível	Ano
Costa, Jesú Marcio Azevedo da	Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral como ferramenta para cálculos de áreas das figuras planas no Ensino Médio	UNIFAP	MP	2016
Dias, Antonio Alberto de Souza	Cálculo Diferencial e Integral e GeoGebra: Ferramentas para o Ensino de Física na Educação Básica	UFTM	MP	2016
Ferreira, Antonio de Jesus de Sousa	Calculo Diferencial e Integral: Uma proposta para o Ensino Médio	UFMA	MP	2016
Floret, Rejane Teixeira de Souza	Uma proposta para introdução de noções de *Cálculo* no ensino médio	UERJ	MP	2014
Fonseca, Daniel Ribeiro da	Noções de Cálculo Diferencial e Algumas Aplicações Básicas	UFPI	MP	2015
Godinho, Leandro Machado	*Cálculo* no ensino médio: uma proposta para o ensino de derivada na primeira série	UERJ	MP	2014
Lucca Junior, Horácio Emídio	Logaritmos: Uma proposta de abordagem no Ensino Médio utilizando a história, o contexto com as demais ciências e o Cálculo Diferencial e Integral	UFABC	MP	2017
Galindo Junior, Jelmires José	*Cálculo*: uma abordagem ao alcance dos alunos do Ensino Médio	UESC	MP	2016
Silva Junior, Orlando da	*Cálculo* no Ensino Médio: Números Reais	IMPA	MP	2014
Lima, Jandean da Silva	A utilização do Cálculo Diferencial e Integral para o cálculo de volume de sólidos geométricos	UFC	MP	2016
Machado, Flávio Martins	Noções de *Cálculo* I no Ensino Médio: uma proposta de intervenção curricular	UFPA	MP	2016
Teixeira Machado, Jonatas	A utilização do GeoGebra no ensino de *Cálculo* de área no curso de Química: um relato da práxis docente	UNICSUL	MP	2016
Nasserala, Alessandro Mendonça	Elaboração e descrição de situações didáticas com amparo na sequência Fedathi: o caso da integral imprópria	UFC	MP	2014
Taveira Neto, José Gomes	A importância do estudo do Cálculo Diferencial na Educação Básica	UFT	MP	2016

Neves, Paulo de Tarso Smith	Introdução ao ensino do *Cálculo* e aplicações da derivada no Ensino Médio	UNIFAP	MP	2016
Paula, Davidson Mendes Ferreira de	Limite: uma conexão entre o ensino básico e o ensino superior	UFJF	MP	2016
Queiroz, Marcio Andrade	Introdução ao *Cálculo*: Uma proposta para o Ensino Médio	UFBA	MP	2016
Ribeiro, Denylson da Silva	Cálculo Diferencial de funções polinomiais no Ensino Médio com o uso do GeoGebra: fundamentação teórica e suas aplicações	UFERSA	MP	2016
Santos, Ariosvaldo Andrade	Uma proposta para inserção de conceitos básicos de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio	UFJF	MP	2015
Santos, Felipe de Oliveira Lamberg Henriques	Fundamentos do Cálculo Diferencial	UFSC	MP	2014
Santos, Silvan Avelino dos	Funções Afim e Quadrática sob a perspectiva do Cálculo Diferencial	UESC	MP	2014
Sousa, Kelia Rodrigues de Queiroz	*Cálculo*: uma proposta possível para o ensino médio	UFMS	MP	2014
Souza, Antonio Aparecido Alves	Do castelo de esperas à chegada da tecnologia: o uso do Graphmática para o ensino de *Cálculo*	FUVATES	MP	2015
Souza, Débora Vieira de	O ensino de noções de Cálculo Diferencial e Integral por meio da aprendizagem baseada em problemas	IFSP	MP	2016

Na categoria B2 estão agrupados os trabalhos que abordam e discutem as dificuldades no ensino e aprendizagem de *Cálculo* e estão apresentadas na

Tabela 11. Das seis pesquisas enquadradas nessa categoria, três delas são pesquisas de cunho quali-quantitativo (Gomes, 2015; Santos, 2014; Zarpelon, 2016). Gomes e Santos usaram estatística descritiva para analisar, respectivamente, indicadores de permanência dos estudantes no Ensino Superior e o comprometimento do estudante de *Cálculo* de uma Instituição Comunitária de Educação Superior do Rio Grande do Sul. Gomes (2015) chegou à conclusão de que a maior chance de obter sucesso na disciplina de *Cálculo* está relacionada com a satisfação com o curso escolhido e o comprometimento com os estudos. Zarpelon (2016) investiga o desempenho de estudantes e sua conclusão está em consonância com Gomes. Segundo Zarpelon, o (in)sucesso em *Cálculo* está relacionado com as posturas dos discentes perante a disciplina. Pires da Silva (2015) também investiga o comprometimento de ingressantes de três cursos de Engenharia e de Ciência da Computação da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Como conclusão de seu trabalho, Silva sinaliza a necessidade de alterações nas posturas discentes e docentes no que diz respeito ao ensino e a aprendizagem de *Cálculo*. Em seus trabalhos, tanto Gomes quanto Pires da Silva fizeram uma pesquisa do estado da arte. Gomes analisou as publicações do Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE), da Conferência Latino-americana sobre o Abandono no Ensino Superior (CLABES) e da base de dados da CAPES que se referiam a índices de insucesso. Santos buscou publicações nos anais da Reunião Latino-americana de Matemática Educativa e da CLABES, além do banco de dados da CAPES, sobre ensino e aprendizagem. Almeida (2016) faz um mapeamento dos trabalhos relacionados com a disciplina de *Cálculo* que foram apresentados no Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia entre os anos de 2000 e 2014. Com esse levantamento de artigos, observou que a evasão dos cursos de Engenharia e as reprovações no ciclo básico do curso universitário estão fortemente relacionadas com a disciplina de *Cálculo*. Pires da Silva (2015) e Zarpelon (2016) apresentam índices de reprovação na disciplina de *Cálculo*, dos cursos cuja pesquisa estava direcionada, da UFSC e da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UFTPR), respectivamente. Na UFSC entre os anos de 2003 e 2013 os índices de não aprovação oscilam, em média, entre 30% a 70%[22]. Na UFTRP, entre os anos de 2012 e 2014, na média, nos cursos de Engenharia a reprovação foi de 35%. Rafael (2017) estuda ações que quatro instituições de Ensino Superior tomaram com o intuito de reduzir a evasão e reprovação em *Cálculo* I. Dentre as intervenções realizadas nesse âmbito, duas foram comuns a todas as universidades investigadas: criar disciplina preparatória e oferecer monitoria. Esse autor conclui que as ações tomadas foram medidas paliativas, pois não foi possível constatar melhoras significativas na aprendizagem.

Tabela 11
Teses e dissertações de natureza empírica da categoria B2

Autor	Título	Instituição	Nível	Ano
Almeida, Estáquio de	A evasão nos cursos de Engenharia e a sua relação com a Matemática: uma análise a partir do COBENGE	UNICSUL	MP	2016
Gomes, Kelly Amorim	Indicadores de permanência na Educação Superior: o caso da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I	LASALLE	MA	2015
Pires da Silva, Juliane	A relação com o saber: os estudantes de Engenharia e a primeira disciplina de *Cálculo*	UFSC	MA	2015
Rafael, Rosane Cordeiro	Cálculo Diferencial e Integral: um estudo sobre estratégias para redução do percentual de não aprovação	UFJF	MP	2017

[22] É apresentada uma faixa de índices de reprovação, porque Silva (2015) apresenta esses dados por curso e, no caso, eram quatro cursos envolvidos cujos índices de (in)sucesso variavam muito de curso para curso.

Santos, Guilherme Mendes Tomaz dos	O comprometimento do estudante e a aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral I Canoas	LASALLE	MA	2014
Zarpelon, Edinéia	Análise do desempenho de alunos calouros de Engenharia na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I: um estudo de caso na UTFPR	UTFPR	MP	2016

As quatro pesquisas classificadas na categoria B3 são de caráter bibliográfico-documental e estão indicadas na Tabela 12. As pesquisas de Cunha (2016) e Rocha (2016) se referem a aspectos históricos referentes ao desenvolvimento do *Cálculo*. Silva (2015) aborda a trajetória da Matemática no Brasil antes de abordar o assunto de interesse da pesquisa, que era, a trajetória do *Cálculo* do CEFET – SP. Marini (2015), como já foi mencionado anteriormente, fez um levantamento no portal da CAPES e em artigos que estivessem relacionados com o ensino e a aprendizagem de *Cálculo* em solo brasileiro de 2003 a 2013.

Tabela 12
Teses e dissertações de natureza empírica da categoria B3

Autor	Título	Instituição	Nível	Ano
Cunha, Aline Rodrigues da	Algumas contribuições de Newton para o desenvolvimento do *Cálculo*	UFTM	MP	2016
Marini, Wagner	Um panorama de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem do cálculo diferencial e integral 2003 a 2013	PUC – SP	MA	2014
Rocha, Irã Assis	Evolução do Conceito de Função Integrável	UNIAN	D	2016
Silva, Everaldo Paulo da	A Trajetória do *Cálculo* e da Disciplina Matemática do IFSP: das Escolas de Aprendizes Artífices ao CEFET-SP	UFRJ	MA	2015

Na categoria B4 foi considerada somente a pesquisa de Leme (2016) que discute e analisa a abordagem dada a um conteúdo de derivada segundo a teoria dos Três Mundos da Matemática de Tall. Apoiado nesses referenciais, Leme estabeleceu nove fluxos de pensamento relacionados a aprendizagem do conceito de derivadas.

Além dessas dissertações e teses encontradas na base de dados da CAPES, consultamos as teses do repositório do Instituto de Educação da Universidade do Minho (UMINHO) e consideramos os descritores “cálculo diferencial” e “análise matemática[23]”. Nessa busca encontramos duas teses de

[23] Em Portugal, a disciplina de Cálculo Diferencial é, muitas vezes, denominada de Análise Matemática.

doutorado relacionadas com a disciplinas de *Cálculo* (Miranda, 2016; Serafim Filho, 2016). Ambas as pesquisas foram realizadas no Brasil e foram de cunho qualitativo. Serafim Filho investigou os impactos na formação de professores pelo uso de tarefas exploratórias e investigativas com a inserção de tecnologias no ambiente escolar. Ele fez uso dos softwares *GeoGebra* e Winplot para abordar os conteúdos de funções, limite, derivadas e integrais definidas (cálculo de áreas). Miranda investigou como o uso de livros didáticos não tradicionais aliado à tecnologia poderia contribuir para a aprendizagem do conteúdo de limites. Os livros adotados foram o "Guia Mangá de Cálculo Diferencial e Integral[24]" e "Cálculo para Leigos[25]". O primeiro desses é escrito na forma de história em quadrinhos e, o segundo, em uma linguagem menos formal. Os participantes dessa pesquisa elaboraram os seus próprios mapas conceituais a respeito dos assuntos abordados. Ao considerar as categorias aplicadas na análise dos dados oriundos do banco de dados da CAPES, tanto a pesquisa de Miranda quanto a de Serafim Filho seriam categorizadas como sendo do tipo A1.

2.5. Síntese

Com o levantamento de teses e dissertações apresentados nessa seção podemos perceber que o volume de trabalhos que vêm sendo desenvolvidos no Brasil com a temática relacionada com o ensino e a aprendizagem de *Cálculo* é grande. No período analisado percebemos que muitas pesquisadas estão voltadas para o Ensino Médio, que como abordamos nesse capítulo, nesse nível de ensino a necessidade de abordar os conteúdos de *Cálculo* aparece de forma implícita nos documentos oficiais brasileiros (Brasil, 2006, 2017). Entretanto, percebemos que muitas das pesquisas que se referem a essa temática propõem a inserção do *Cálculo* no Ensino Médio com abordagens similares ao do Ensino Superior. Acreditamos que se essa mesma abordagem do Ensino Superior for trabalhada no ensino pré-universitário, os problemas enfrentados na graduação serão transferidos para esse nível de ensino. Kaput (1994) e Rezende (2003) evidenciam que as ideias fundamentais para o *Cálculo* devem ser introduzidas no ensino secundário pois o estudante precisa de um tempo de maturação desses conceitos (Silva, 1999).

Com relação às tecnologias, esse mapeamento permitiu-nos observar que elas estão sendo inseridas nas pesquisas como um elemento auxiliar nos processos de ensino e aprendizagem de *Cálculo*, não mais como foco principal. E o software mais utilizado vem sendo o *GeoGebra*. Acreditamos que essa

[24] Kojima, H. (2010). *Guia Mangá de Cálculo Diferencial e Integral* (Vol. 1). São Paulo, SP: NOVATEC, Becom Co. Ltd.
[25] Ryan, M. (2012). *Cálculo para Leigos*. Rio de Janeiro, RJ: Alta Books.

preferência ocorre por ser um software de geometria dinâmica, gratuito e de fácil manipulação. Além da versão para computadores é possível usá-lo como um aplicativo de celular, que atualmente, por observação em sala de aula, quase 100% dos estudantes no Ensino Superior tem em mãos.

Das pesquisas analisadas nessa seção, as que mais se aproximam do nosso interesse foram os trabalhos de Noguti (2014) e Pagani (2016), que estão relacionados com os conteúdos de matemática básica (essencialmente conjuntos numéricos e funções) e derivadas, respectivamente. Noguti ministrou um curso de Matemática Básica para alunos ingressantes no Ensino Superior em um período que antecedia o início do ano letivo, que poderia ser interpretado como um curso de nivelamento, e que foi ministrado pela própria pesquisadora. O objetivo de instituições que promovem ações desse caráter é melhorar a base da matemática pré-universitária, visando melhores índices de aprovação em *Cálculo* e minimizar a evasão nas fases iniciais do curso de graduação. Pagani[26] ministrou todo o conteúdo de derivadas para um curso de nível técnico. As atividades propostas por essa pesquisadora foram inspiradas no trabalho de mestrado de Abdelmalack (2011). Os trabalhos de Noguti e Pagani abordam conteúdos da disciplina de *Cálculo* da UDESC/Joinville e ambos se apoiaram na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, que era o objeto de interesse dessa pesquisa de doutoramento. Além disso, os trabalhos de Abdelmalack (2011) e de Noguti (2014) serviram de inspiração para essa professora investigadora escrever seu projeto de tese almejando inserir a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP em sua prática profissional. E, o trabalho de Pagani (2016), bem como o contato via correio eletrônico estabelecido com a mesma, propiciou uma troca de experiências que auxiliaram essa investigadora na preparação e condução de seus trabalhos no primeiro semestre letivo do ano de 2017.

Como nosso interesse era adotar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP para abordar conteúdos de *Cálculo* nos horários regulares de aula, ou seja, a pesquisadora ocupa papel de observante e participante de todo o processo, essa pesquisa de estado da arte, nos permitiu apresentar evidências de que esse é o caráter inovador da pesquisa. Afirmação apoiada nas constatações apresentadas nessa seção, pois no período considerado, apenas seis pesquisas relacionam *Cálculo* e Resolução de Problemas como metodologia de ensino. E dessas, somente duas (Silva, 2015; Vogado, 2014) conciliam ambas as temáticas e abordam um conteúdo específico. Nosso desafio, foi fazer essa inserção da metodologia, por um longo período, num ambiente escolar cujos estudantes eram

[26] Essa autora gentilmente nos cedeu uma cópia digital de sua tese através de contacto eletrônico, pois até o momento de escrita desse texto, esse material não está disponibilizado no portal da CAPES.

acostumados com aulas tradicionais e/ou expositivas dialogadas, além de ter que cumprir o plano de ensino da disciplina. No nosso estudo também aliamos a Formulação de Problemas com a Resolução de Problemas e essa temática foi abordada somente por Silva (2015). Outra observação que temos apoiada nas pesquisas consultadas é que, essencialmente, elas assumem caráter de análises qualitativas, algumas com dados quantitativos, com cunho interpretativo. Apenas quatro pesquisas usaram análise estatística e, dessas, três pesquisas foram de natureza teórica da categoria B3. Nessa pesquisa de doutorado usamos a análise estatística como mais uma ferramenta para tirarmos conclusões mais robustas acerca da experiência vivenciada. Esse foi outro aspecto inovador dessa pesquisa.

Em suma, nesse capítulo fizemos um apanhado histórico do desenvolvimento do *Cálculo* na Matemática e sua constituição como disciplina em instituições de ensino brasileiras, discutimos as dificuldades de ensino e aprendizagem dessa disciplina e pudemos ter uma noção panorâmica das pesquisas atuais sobre ensino e aprendizagem de *Cálculo* no Brasil. Portanto, foi possível justificar os aspectos inovadores dessa pesquisa. No próximo capítulo abordaremos questões relacionadas a Resolução de Problemas.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Pelo estado da arte das pesquisas relacionadas com o ensino e a aprendizagem de *Cálculo* apresentado no Capítulo 2, percebeu-se que existe uma lacuna de pesquisa relacionada ao ensino de *Cálculo* através da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Resolução de Problemas (RP). Um aspecto relevante da pesquisa a que esse relatório se refere é que fora implementada no cotidiano da sala de aula, pois observa-se que muitas investigações que adotam a RP como metodologia de ensino continuam sendo desenvolvidas em "ambientes laboratoriais[27]" (Abdelmalack, 2011; Silva, 2015); ou, quando abordadas em turmas regulares, se referem a algum tópico específico do conteúdo (Pagani, 2016; Ribeiro, 2010). Assim, esse capítulo é dedicado a revisão de literatura de aspectos relacionados com a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Os problemas fazem parte da atividade humana e nos possibilitam novos aprendizados na tentativa de solucioná-los. Por isso, não devemos encará-los, dentro e fora do contexto escolar, com o sentido negativo que o significado da palavra traz consigo, como pode ser identificado na definição de problema, apresentada no Dicionário da Língua Portuguesa Contemporânea:

> Questão que se coloca para ser resolvida segundo métodos lógicos, racionais; exercício escolar que consiste em responder, a partir de dados conhecidos, a uma dada questão (...) Qualquer questão difícil de resolver ou de explicar e que, por esse motivo, causa perplexidade (...) Dificuldade na realização ou na compreensão de alguma coisa. (2001, pp. 2965 – 2966)

Esse mesmo dicionário define resolução como sendo "Acção ou resultado de resolver (...) Operação pela qual se soluciona um problema, uma dificuldade, um caso, um enigma" (Dicionário da Língua Portuguesa Contemporânea, 2001, p. 3219). Com essas definições percebe-se que as palavras problema e resolução estão relacionadas e podemos pensar a resolução de problemas como sendo o caminho/meio utilizado para se solucionar o problema. A expressão "resolução de problemas" também pode ser vista como uma metodologia de ensino apoiada na resolução de problemas.

[27] Expressão usada por Onuchic (1999).

Nesse capítulo, veremos que na literatura não há um consenso sobre a definição de problema nem sobre a compreensão do significado da expressão Resolução de Problemas. Além disso, abordaremos alguns aspectos históricos da RP como metodologia de ensino, com maior ênfase nas escolas brasileiras, e a formulação de problemas como uma extensão da RP. No final desse capítulo será apresentada uma análise da RP a partir do *International Congress on Mathematics Education* (ICME) e o estado atual de pesquisas que envolvem ensino e aprendizagem de RP no Ensino Superior, buscando trabalhos relacionados com o *Cálculo*.

3.1. O que é um Problema?

Polya (2006), no prefácio da primeira edição de seu livro, afirma que "uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema". Complementa ainda dizendo que, por mais simples que seja o problema, o estudante que se sentiu desafiado em resolver o problema proposto utilizando seus conhecimentos prévios, sentirá tanto a tensão durante a busca pela solução adequada quanto o prazer da descoberta ao obtê-la. Todo esse processo propicia o desenvolvimento de habilidades mentais do estudante que deixará marcas nas memórias que extrapolam o contexto escolar.

Segundo Polya (1985[28]), "temos um problema sempre que procuramos os meios para atingir um objetivo" (p.1). Esse autor não apresenta uma definição explícita de sua concepção de problemas, mas deixa claro que apesar de haver vários tipos de problemas, o professor deve saber diferenciar problemas rotineiros de não rotineiros. O problema que não se resolve por rotina exige um certo grau de criação e originalidade por parte do aluno, enquanto o problema de rotina não exige nada disso. Os problemas rotineiros são considerados os que não exigem esforço dos estudantes, pois se resolvem mecanicamente, enquanto os não rotineiros, por não se conhecer a forma de encontrar a solução, permitem que haja desenvolvimento intelectual do aluno (Polya, 1985). Antes de abordamos as diferentes denominações dadas aos problemas por outros autores, analisaremos um pouco mais sobre o entendimento que se tem a respeito de problema na Educação Matemática, pois nem todo problema selecionado pelo docente para abordar em sala de aula é, de facto, um problema para o estudante. Para elucidar essa afirmação, apresentamos a seguinte situação posta por Dante (2009):

> Se um professor de biologia pergunta a um aluno que estuda em uma escola num bairro violento: 'Quantas pernas tem uma aranha?', ele poderá ouvir respostas semelhante às

[28] Polya, G. (1985). O ensino por meio de problemas. *Revista do Professor de Matemática*, n. 7, p. 11 – 16 (versão online, pp. 1 – 2). Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/7/3.htm

relatadas por Claxton (1984[29]): 'Quem me dera eu tivesse os mesmos problemas que o senhor'. Isso mostra que o que é problema para um indivíduo imerso em determinado contexto, com determinados conhecimentos, experiências e expectativas, não o é para outro. Para esse aluno, a pergunta não chega a ser um problema que ele queira resolver, ou por não ser significativo para ele, ou porque não é um questionamento de sua vivência, ou ainda porque não gosta ou não se interessa por aranhas, e para ele é indiferente que a aranha tenha ou não oito patas. (p. 12)

Além do contexto em que o discente está inserido que pode ter como consequência o "problema" do professor não ser um problema para o aluno, como evidenciado na fala de Dante, na literatura é consenso que o que é problema para um estudante, para outro, pode ser apenas um exercício (Polya, 2006; Ponte, 2003; Onuchic, 1999). Essa situação pode ocorrer se o aluno já tiver conhecimento prévio sobre o assunto abordado no problema.

Ponte (2003) afirma que o ensino e a aprendizagem de Matemática advêm das experiências vivenciadas em sala de aula pelo estudante e essas dependem muito da escolha das tarefas feitas pelo docente. Para esse autor há quatro tipos de tarefas, com diferentes níveis de dificuldades, que são: exercício, problema, exploração e investigação. Considerando que as tarefas podem ser abertos ou fechados e o nível de dificuldade varia de fácil a difícil, Ponte utiliza um plano cartesiano para representar geometricamente os tipos de tarefas conforme o seu nível de dificuldade, como ilustrado na

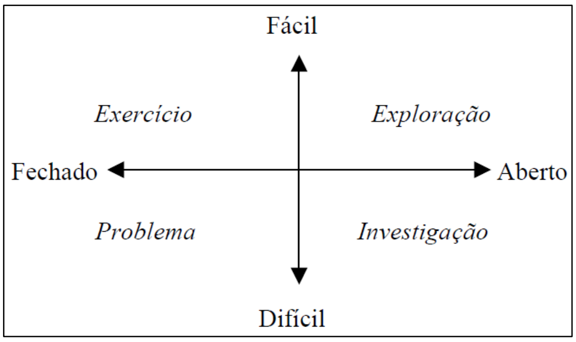


Figura 9 - Tipos de tarefas.
Fonte: Ponte, 2003, p. 5.

Pela interpretação da Figura 9 pode-se concluir que os problemas são tarefas com elevado grau de dificuldade e tarefas fechadas. O contexto dos quatro tipos de tarefas, apontadas por Ponte, pode ser uma situação real, semirreal ou puramente matemática. Apoiado na classificação de tarefas de Skovsmose (2000[30]), esse autor define as situações semirreais como sendo aquelas que à "primeira vista

[29] Claxton, G. (1984). *Live and learn – An introduction to the psychology of growth and change in everyday life.* Londres: Harper & Row.
[30] Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, 14, 66-91.

parecem reais, mas que na prática são abstractas, pois nelas não há que atender às propriedades dos objectos excepto aquelas que o contrato didáctico indica serem relevantes para a respectiva resolução." (Ponte, 2003, p. 6). Nessa pesquisa, as tarefas matemáticas que foram propostas foram de contexto semirreal ou de caráter puramente matemático com a finalidade de explorar conceitos específicos do *Cálculo*.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN's) afirmam que o problema "não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada" (Brasil, 1998, p. 41). Em outras palavras, os PNC's só consideram por problema uma tarefa que o estudante precise estabelecer estratégias de resolução, ou seja, tarefas cuja solução não é obtida mediante a mera aplicação de algoritmos/fórmulas. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é o documento mais atual que estabelece competências e habilidades que se almeja atingir ao longo do Ensino Básico não define problema, mas fala que a formulação e resolução de problemas fazem parte do letramento matemático[31] (Brasil, 2017).

Para Resnik e Glaiser (1975), problema é uma situação na qual um indivíduo é chamado a realizar uma tarefa cujas instruções fornecidas não especificam completamente o modo de encontrar a solução. Dante (2009, p. 11) afirma que problema "é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo". Vale e Pimentel (2004) definem problema como sendo "uma situação para a qual não se dispõe, à partida, de um procedimento que nos permite determinar a solução" (p. 12). Kantowski (1981[32]) citada por Abrantes (1989) compreende problema como "uma situação que difere de um exercício pelo facto de o aluno não dispor de um procedimento ou algoritmo que conduzirá com certeza a uma solução" (p. 3). Serrazina (2017) entende que problema "é uma situação para a qual se procura uma solução, não existindo à partida um procedimento que conduza a essa solução, havendo uma fronteira ténue entre problema e tarefa de investigação" (p. 60). Firmino da Silva (2016) considera um problema como sendo

> uma situação desafiadora, que exige do aluno criatividade, originalidade, reflexão e tomada de decisões, o que favorece a aquisição de experiências que o ajudará a tomar suas próprias decisões e pensar por si mesmo, ou seja, construir o seu próprio conhecimento matemático e descobrir suas próprias respostas. (p. 2)

---

[31] A BNCC define letramento matemático como as "competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. O letramento deve também assegurar que todos os estudantes reconheçam que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para compreender e atuar no mundo e para que também percebam o caráter de jogo intelectual da Matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e que pode também ser prazeroso (fruição)" (Brasil, 2017, p. 522)

[32] Kantowski, M. G. (1981). Problem solving. In: Fennema (Ed.), *Mathematics education research: Implications for the 80's* , 111 – 126.

Apesar de variações na forma de conceber o significado de problemas, todas as definições possuem um aspecto comum que está relacionado ao facto de que o estudante deve mostrar interesse em resolver a situação que lhe for proposta, fazendo-o refletir/pensar. Nessa pesquisa, corroboramos com Onuchic (1999) de que problema é "tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver" (p. 215) que converge com os aspectos levantados anteriormente a esse respeito. Diante dessa concepção de problema, podemos nos questionar: "Um problema com características essencialmente matemáticas é um problema?" Essa indagação foi feita à professora pesquisadora Norma Suely Gomes Allevato[33], durante uma mesa redonda sobre Resolução de Problemas no VII Congresso Internacional de Ensino de Matemática[34], realizado em Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil, no ano de 2017. Para responder à pergunta, Allevato propôs ao público participante três equações polinomiais para serem resolvidas, sendo uma de primeiro, outra de segundo e a última de terceiro grau. As equações propostas foram similares as apresentadas na Figura 10.

1) $3x + 5 = 0$
2) $x^2 - 4 = 0$
3) $3x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0$

Figura 10 - Exemplos de equações polinomiais.
Fonte: Produção da autora.

Para promover a discussão com a turma constituída naquele momento por todos os presentes na sessão, Allevato colocou as equações na lousa e, conjuntamente, foi feita a discussão se seriam ou não um problema. Para tanto, os participantes tiveram que se imaginar ocupando a posição de um aluno do Ensino Médio. Por unanimidade, chegou-se à conclusão de que as duas primeiras equações não seriam um problema, pois com manipulações algébricas, mecanicamente, obter-se-ia a resposta. Entretanto, a equação polinomial de terceiro grau não se obteria facilmente a resposta a menos que se conhecesse o teorema das raízes racionais e o dispositivo de Briot-Ruffini. Portanto, resolver essa equação cúbica seria um problema se considerada antes do estudante ter esses conhecimentos prévios. Entendemos também que ao interpretar um problema puramente matemático como um problema que pode vir a motivar um novo conteúdo depende da abordagem, em sala de aula, dada pelo docente. Nesse caso se o professor já tivesse ensinado o teorema das raízes racionais e/ou dispositivo prático de Briot-

[33] Desde seu trabalho de doutoramento (Allevato, 2005), a professora Norma Suely Gomes Allevato se dedica a investigações na área de Resolução de Problemas e publica materiais sobre esse assunto com a professora Lourdes de La Rosa Onuchic. No Brasil, ambas são referências nacionais em pesquisas sobre a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Resolução de Problemas Matemáticos sob a concepção de ensinar conteúdos através da RP.
[34] http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii

Ruffini, para encontrar as raízes da equação cúbica não passaria de um exercício de fixação. Por outro lado, se o professor propuser a terceira equação como um desafio à turma para que encontrem as suas respectivas raízes dando oportunidade de compartilharem/discutirem com os colegas as estratégias utilizadas, essa tarefa poderia ser um problema gerador de novo conhecimento. Por fim, corroboramos com Allevato e com Ponte (2005) de que para ser considerado um problema não há necessidade de trazer um contexto "extra-matemático[35]", mas um problema é importante que o aluno não disponha de algum procedimento que lhe dê a solução imediata.

3.2. Tipologia de problemas

Assim como a definição de problema não possui uma definição única, a tipologia de problemas também não é unânime. O artigo de Silva (2014) apresenta um levantamento das diferentes classificações de problemas que são encontradas na literatura. As tipologias de problemas constatadas por esse autor estão sintetizadas na Tabela 13.

Tabela 13
Tipologia de problemas apresentada no artigo de Silva (2014)

Referência	Classificação
Echeverría e Pozo (1998)	Problema bem definido Problema mal definido
Echeverría (1998)	Problemas qualitativos Problemas quantitativos
Polya (1978)	Problemas rotineiros Problemas não rotineiros Problema de determinação Problema de demonstração Problemas práticos
Huete e Bravo (2006) cita	
1. Simon (1973) citado por Trigo (1996, pp. 33 – 34)	Problemas bem estruturados Problema que não apresentam estrutura bem definida
2. Fredericksen (1984)	Problemas bem estruturados Problemas mal estruturados Problema com estado inicial bem definido e estado final bem definido

[35] Expressão usado por Ponte (2005).

3. Rietmam (1965)	Problema com estado inicial bem definido e estado final mal definido Problema com estado inicial mal definido e estado final bem definido Problema com estado inicial mal definido e estado final mal definido
4. Greeno (1978)	Problema de estrutura indutora Problema de transformação Problema de ordenamento
5. Sarduy (1987)	Problema de raciocínio Problemas recreativos
Passoni & Campos (2011) Huete & Bravo (2006) Vergnaud (2009)	Problema do tipo aditivo Problema do tipo multiplicativo
Smole, Ishihara, & Taunay	Problemas bem estruturados Problemas mal estruturados
Butts (1977)	Exercício de reconhecimento Exercício de algoritmos Problemas de aplicação Problemas de pesquisa aberta Situação problema
Dante (2009)	Exercícios de reconhecimento Exercícios de algoritmo Problemas-padrão Problemas-padrão simples Problemas-padrão composto Problemas-processo ou heurístico Problemas de aplicação Problemas de quebra-cabeça
Stancanelli (2001)	Problemas sem solução Problemas com mais de uma solução Problema com excesso de dados Problema de lógica Problemas não convencional
Toledo & Toledo (1997)	Problemas de arme e efetue Problema de enredo Problemas não convencionais Problemas de aplicação

Charles & Lester (1984) citado por Borralho (1990) citado por Rabelo (2002)	Problemas de um passo Problemas de dois ou mais passos Problemas-processo Problemas de aplicação Problemas tipo puzzle
Silva (2003) Borasi (1986) citado por Sá (2004)	Problemas-narrativas Problema tipo exercício Problema verbal Desafio Prova Vida real Situação problema Situação

Fonte: Produção da autora.

Pela Tabela 13 podemos perceber que, de acordo com Silva (2014), os autores Butts[36] (1977) e Dante (2009) classificam alguns problemas como exercícios. Convém destacar que não corroboramos com esta concepção. Além disso, percebemos que diversas das definições elencadas nesta tabela podem ser intuídas a partir do nome atribuído a sua classificação. Por exemplo, problemas aditivos de Passoni e Campos (2011[37]), Vergnaud (2009[38]) e Huete e Bravo (2006[39]), são os que envolvem somente operações de adição/subtração na sua resolução. Esses tipos de problema correspondem aos problemas de um passo, assim denominados por Charles e Lester (1984[40]) como referido por Borralho (1990[41]). Os problemas bem/mal definidos de Echeverría e Pozo (1998) são classificações gerais de problemas, ou seja, não são exclusivos de problemas matemáticos. Essas definições correspondem às de problemas bem/mal estruturados de Simon (1973[42]) e Fredericksen (1984[43]), ambos citados por Huete e Bravo (2006), além de Smole, Ishihara e Taunay[44]. Percebemos que além dos tipos de problemas com nomes diferentes, mas com mesmo significado, autores como Dante (2009) e Butts (1977), dentre outros, apresentam algumas de suas denominações iguais. No caso, estamos nos referindo aos problemas de algoritmo, de reconhecimento e de aplicação. Silva (2014) comenta que os problemas que estão sendo

[36] Citado por Silva (2014), mas nas referências bibliográficas e notas de rodapé nada consta sobre essa bibliografia.
[37] Passoni, J. C.; & Campos, T. M. M. (2003). *Revisitando os problemas aditivos de Vergnaud de 1976*. In: Machado, S. A. (Org.). *Aprendizagem em matemática*: registros e representações semiótica. 8ª ed. São Paulo: Papirus.
[38] Vergnaud, G. (2009). A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba - PR: Editora da UFPR.
[39] Huete, J. C. S.; & Bravo, A. A. F. A. (2006). *O ensino da matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artmed.
[40] Citado por Silva (2014), mas nas referências bibliográficas e notas de rodapé nada consta sobre essa bibliografia
[41] Borralho. A. M. A. (1990). *Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de matemática: proposta de um programa de intervenção*. Portugal, Associação dos Professores de Matemática, 1990, p. 75.
[42] Simon, H. A. (1973). *The estructure of ill estructured problems*. Artificial intelligencfe, (4), 181-201.
[43] Fredericken, N. (1984). Implications of cognitive theory for instruction in problem solving. *Review of Educational Research*. (54), 363-407.
[44] Smole, K. S., Ishihara, C. A., Taunay, M., & Cândido, P. *Refletindo sobre alguns aspectos do processo de resolver problemas*. Disponível em: https://goo.gl/GJT4sm.

utilizados com menos frequência no ensino são os de raciocínio e recreativo de Sarduy (1987[45]) e que estes geralmente aparecem no Ensino Fundamental I[46]. Silva (2014) afirma que Stancanelli (2001[47]) "não pretende fazer uma classificação dos problemas e, sim fazer uma reflexão sobre os diferentes tipos de problemas que podem ser oferecidos aos alunos" (p. 13). Corroboramos com esse entendimento de Stancanelli bem como com os tipos de problema que considera importantes, que são os problemas: sem solução, com mais de uma solução, com excesso de dados, de lógica e não convencional, cujas definições são:

> Problemas sem solução – são problemas que rompem com a concepção de que [todos] os dados apresentados [devem] ser usados na sua resolução e que todo problema tem solução. (p. 107).
> Problemas com mais de uma solução – são problemas que rompem com a crença de que todo problema tem uma única resposta, bem como com a crença de que há sempre uma maneira certa de resolvê-lo e que, mesmo quando há várias soluções, uma delas é a correta. (p. 109)
> Problemas de lógica – são problemas que fornecem uma proposta de resolução cuja base não é numérica, que exige[m] raciocínio dedutivo e que proporcionam uma experiência rica para o desenvolvimento de operações de pensamento como previsão e checagem, levantamento de hipóteses, busca de suposição, análise e classificação. (p. 114)
> Problemas não convencionais – são problemas que podem ter mais de uma solução bem como transformar-se em novos problemas interessantes com a alteração de alguns de seus dados. (p. 116). (Stancanelli, 2001 referido por Silva, 2014, p. 14)

Apesar da tipologia de problemas dos diversos autores elencados por Silva (2014) fazerem alusão ao Ensino Básico, muitos dessas classificações podem ser exploradas no Ensino Superior. Pela experiência docente no Ensino Superior observa-se que o estudante brasileiro é acostumado a acreditar que todo problema/exercício que foi proposto tem solução e solução única, que precisa utilizar todos os dados fornecidos e que a solução de todo problema matemático necessita de realização de cálculos. Esses motivos nos levam a ratificar a importância de se trabalhar com a diversidade de problemas, como os considerados por Stancanelli (2001), ao longo das variadas disciplinas de matemática e em todos os níveis de ensino.

Como pode ser percebido pelo exposto até o momento, há uma diversidade de classificações de tipos de problemas na literatura, todavia, algumas das definições de autores diferentes com diferentes

---

[45] Sarduy, A. F. (1987). *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria.* La habana: Editorial Pueblo y educación.
[46] O Ensino Fundamental I corresponde ao primeiro ciclo de Portugal.
[47] Stancanelli, R. (2001). Conhecendo diferentes tipos de problemas. In: Smole & Diniz (Org.). *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática.* Porto Alegre: Artmed editora.

nomenclaturas são similares. Além dos tipos de problemas já apresentados na Tabela 13, destacamos as classificações conforme o Grupo de Investigação em Resolução de Problemas (GIRP), de Portugal. Esse grupo considera que um problema pode ser enquadrado em mais de uma classe dos seguintes tipos de problemas de: processo, conteúdo, aplicação e aparato experimental (Vale & Pimentel, 2004). Conforme ilustrado na Figura 11, observamos que o GIRP entende que um problema poder ser de apenas um dos tipos considerados, como pode estar simultaneamente até nas quatro classificações.

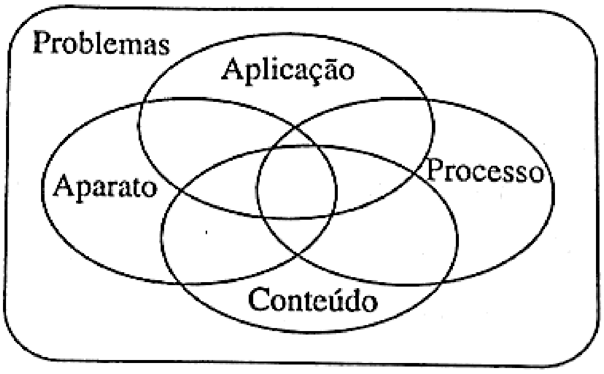


Figura 11 - Relação entre os tipos de problemas segundo o GIRP.
Fonte: Vale e Pimentel, 2004, p. 21.

De acordo com Vale e Pimentel (2004), os problemas de conteúdo "requerem a utilização de conteúdos programáticos, conceitos, definições e técnicas matemáticas" (p. 19). Os problemas de aplicação utilizam "dados da vida real, apresentados ao solucionador ou por ele recolhidos" (p. 20). Essa definição de problema converge com a definição de problema de aplicação de Dante (2009): "são aqueles que retratam situações reais do dia a dia e que exige o uso da matemática para serem resolvidos" (p. 27). Os problemas de aparato experimental são problemas que dificilmente se resolveriam "sem a utilização do aparato [experimental] e que suscita[m] a utilização de métodos de investigação próprio das ciências experimentais" (Vale & Pimentel, 2004, p. 20). E, o problema de processo é um problema que

> não se resolve, geralmente, pela aplicação directa de um algoritmo, isto é, dificilmente se resolverá sem a utilização de estratégias de resolução de problemas, tais como: descobrir um padrão, trabalhar do fim para o princípio, fazer um esquema ou um desenho, fazer uma lista organizada, reduzir a um problema mais simples, formular e testar uma conjectura. (Vale & Pimentel, 2004, p. 19)

Para Dante (2009), os problemas de processo são definidos como sendo problemas que "não podem ser traduzidos diretamente para a linguagem matemática, nem resolvidos pela aplicação automática de algoritmos, pois exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que poderá levá-lo à solução." (p. 25). Percebemos que as definições de Dante (2009) e Vale e Pimentel (2004) de problemas de processo também são convergentes. Para esses autores, nesse tipo de problema o aluno não obtém a solução diretamente pela aplicação de algum algoritmo, necessita refletir sobre o problema a fim de estabelecer estratégias de solução. As estratégias apontadas por Vale e Pimentel que estão em destaque na citação anterior foram algumas das estratégias que a professora investigadora intencionava que seus estudantes usassem ao resolverem as tarefas propostas. Entendemos que as tarefas integrantes da análise de dados oriundos dessa pesquisa são, essencialmente, problemas de processo.

Onuchic e Allevato (2011) falam a respeito dessa diversidade de tipos de problemas usando a expressão "problemas adjetivados", cuja sentença está em conformidade com as suas qualidades específicas. Para essas autoras, independentemente do adjetivo que complementa a expressão problema, são todos problemas que se diferem de acordo com as estratégias de resolução requeridas para obtenção da solução. Diante dessa ampla variedade de classes de problemas que podem ser trabalhados em sala de aula, entendemos que o professor deve proporcionar ao estudante oportunidade de ter contato com as diversas formas de apresentação de um problema a fim de que o estudante desenvolva o seu pensamento matemático. Polya (1985) acredita que "a principal tarefa do ensino da Matemática, em nível secundário, é a de ensinar os jovens a PENSAR" (p. 1). Apesar de Polya se referir ao nível médio, estendemos esse pensamento para o nível superior. Ressaltamos que "ensinar a pensar" é, comumente, uma justificativa dada por docentes de *Cálculo* quando são questionados sobre a utilidade dos conceitos ensinados/aprendidos na disciplina.

Até ao momento, abordamos a tipologia de problemas e mencionamos a expressão "resolução de problemas". Podemos nos perguntar, qual é o entendimento que se tem de resolução de problemas na literatura? A resposta a essa indagação será dada na próxima seção.

3.3. Entendimentos sobre resolução de problemas

A Resolução de Problemas[48] pode ser concebida tanto como uma abordagem utilitária, no sentido de solucionar problemas do cotidiano, e formativa, pois "permite desenvolver processos e capacidades do pensamento" (Vale & Pimentel, 2004, p. 10), quanto como uma teoria de ensino e aprendizagem de matemática e se faz presente em documentos oficiais com caráter de instruções curriculares (Brasil, 1998; Brasil, 2017; MEC, 2013; NCTM, 1985; NCTM, 1994). Lester (1993) considera a resolução de

[48] Por convenção, usaremos a expressão Resolução de Problemas com as iniciais "R" e "P" maiúsculo ao nos referirmos a ela como uma teoria. Entretanto, respeitaremos a notação escolhida por referenciais teóricos em citações.

problemas como "uma actividade que requer que um indivíduo se envolva numa variedade de acções cognitivas cada uma das quais exigindo algum conhecimento e capacidade" (p. 23). Para Abrantes (1989), a resolução de problemas "consiste numa larga variedade de processos, actividades e experiências, e o Ensino da Matemática deveria reflectir essa diversidade" (p. 1). Palhares (1997) e Vale e Pimentel (2004) entendem que a resolução de problemas, do ponto de vista de atividade, pode ser definida como sendo um conjunto de ações tomadas por um indivíduo ou um grupo de indivíduos para resolver um problema por seus próprios meios. Pires (2011) considera o termo resolução de problemas como "uma actividade convergente em que se tenta conseguir uma solução para um determinado problema, recorrendo a técnicas e a estratégias adequadas" (p. 32). Ainda, complementando essas definições, entendemos que por meio da resolução de problemas os estudantes têm oportunidade de explorarem seus conhecimentos matemáticos e desenvolver novos conhecimentos (Gomes & Viseu, 2017). Polya (2006) afirma que resolver problemas é habilitação prática e como consequência dessa visão só se aprende "a resolver problemas, resolvendo-os" (p. 4).

Em sala de aula, a Resolução de Problemas pode ser encarada por três diferentes vertentes:

> como um processo, quando pretendemos dotar os alunos com estratégias de resolução tornando-os solucionadores cada vez mais aptos de problemas; (...) [como] uma finalidade, quando tentamos atender os aspectos matemáticos como explorar, investigar, descobrir e usar raciocínios plausíveis; e [como] um método de ensino, que surge para introduzir conceitos envolvendo exploração e descoberta de acordo com as finalidades do ensino da matemática e de factos, conceitos e procedimentos matemáticos (Vale & Pimentel, 2004, p. 11).

Ao admitir a RP como um método de ensino, o professor deve proporcionar "aos alunos um leque variado de problemas não rotineiros nos quais possam ser aplicadas diferentes estratégias [de resolução]." (Vale, 2017, p. 138). Serrazina (2017) também salienta a importância de se trabalhar com problemas que tenham diferentes estratégias de solução no "ensino básico e, consequentemente, na formação de professores" (p. 65). Entendemos que, no Ensino Superior tanto licenciandos (futuros professores) como os estudantes dos variados cursos da área de Exatas também se beneficiam ao terem contato com uma diversidade de tipos de problemas e estratégias de Resolução de Problemas. Nem sempre nos cursos iniciais de *Cálculo*, que é considerada uma matemática de nível superior existe essa oportunidade, mesmo estando previsto nos Projetos Políticos de Cursos (PPC's[49]) que os egressos devem formular e/ou resolver problemas, pois como já fora abordado na Capítulo 2, as aulas nas universidades

[49] Na UDESC/Joinville verificou-se que todos os cursos de graduação, no PPC, mencionam que o profissional em formação deve estar apto a resolver e/ou formular problemas. (Silva, Figueiredo, & Azevedo, 2017).

brasileiras são predominantemente do estilo tradicional. Rodrigues, Silva e Ferreira (2016[50]) citado por Ferreira, Silva e Martins (2017) identificaram que nos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil a RP se faz presente nas ementas dos diversos cursos analisados, no entanto, "a Resolução de Problemas ainda não figura como uma disciplina; aparece apenas como um recurso metodológico, inserida em outras disciplinas da área de Educação" (p. 189). Cremos que não há necessidade de uma disciplina específica para abordar tal assunto, mas que ao longo da formação acadêmica o futuro profissional, principalmente, os licenciandos tenham oportunidade de experenciarem aulas com abordagens metodológicas diversificadas (dentre elas, a RP). Dessa forma os licenciandos poderiam sentir os benefícios de dinamizar as aulas e possivelmente possa ser despertado o desejo de as implementarem em sua futura carreira, pois dizem que "ao vivenciar uma prática diferenciada de resolução de problemas, o professor-aluno também se apropria de uma nova forma de ensinar e aprender Matemática" (Justulin & Noguti, 2017, p. 24).

Lester (1993) fala que apesar da RP ter tido destaque nos currículos escolares, naquela época, ainda não havia clareza sobre como a "tornar parte integrante desse mesmo currículo. (...) Em vez de programas com coerência e direcção, apresentam-se aos professores uma miscelânea bem intencionada de problemas, listas de estratégias para ensinar e sugestões de actividades para a sala de aula" (p. 18). Duas décadas depois dessa opinião acerca da RP nos currículos escolares, Vale, Pimentel e Barbosa (2015) revelam situação similar à apontada por Lester. Essas autoras dizem que "apesar dos enormes avanços conseguidos na área da investigação em resolução de problemas, o seu impacto no currículo e sobretudo na sala de aula de matemática de modo a produzir bons resolvedores de problemas tem sido muito limitado" (p. 39).

Desde o final dos anos 70 até meados dos anos 80 do século XX várias pesquisas dedicaram tempo a observar as diferenças entre os chamados bons e maus resolvedores de problema. Para Lester (1993) os melhores sobre esse assunto são os de Schoenfeld (1985[51], 1987[52]) e, segundo esse autor, há cinco aspectos que diferem os bons dos maus resolvedores. A saber:

1. Os bons resolvedores de problemas não só sabem mais do que os fracos resolvedores como sabem de forma diferente - o seu conhecimento está bem relacionado e é composto de esquemas ricos.
2. Os bons resolvedores tendem a focar a sua atenção nas características estruturais dos problemas; os fracos resolvedores nas suas características superficiais.

[50] Rodrigues, M. U.; Silva, L. D.; & Ferreira, N. C. (2016). Clássicos da Educação Matemática nos Cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil. In: Dambrosio, B. S.; & Miarka, R. (Orgs.). *Clássicos da Educação Matemática Brasileira: múltiplos olhares.* Campinas, São Paulo, 301 – 346.
[51] Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando, FL: Academic Press.
[52] Schoenfeld, A. H. (1987). *Cognitive science and mathematics education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

3. Os bons resolvedores estão mais conscientes do que os fracos resolvedores acerca dos seus pontos fortes e fracos.
4. Os bons resolvedores são melhores do que os fracos resolvedores a controlar e a regular os seus esforços de resolução.
5. Os bons resolvedores tendem a preocupar-se mais do que os fracos resolvedores com a obtenção de soluções "elegantes". (Lester, 1993, p. 19)

Na sequência desse texto iremos explorar algumas das estratégias de Resolução de Problemas que podem ser indicadas/ensinadas aos estudantes.

3.4. Estratégias de resolução de problemas

As estratégias de resolução de problemas correspondem ao conjunto de técnicas que podem ser adotadas ao buscar a solução de um problema (Gomes & Viseu, 2017). Esses autores julgam importante discutir variadas estratégias de resolução e diferentes soluções, para se combater a ideia de que todo problema possui solução, que ela é única e que há um único caminho para se obter a solução correta. Na literatura encontram-se várias estratégias de resolução de problemas, entretanto "dependendo do problema e do nível de ensino em que o aluno está, existem estratégias mais ou menos adequadas para a sua resolução" (Serrazina, 2017, p. 60). A escolha da estratégia adequada pode não ser uma tarefa fácil, mas é necessária. Segundo Vale, Pimentel e Barbosa (2015), a expressão estratégia, adotada por educadores matemáticos, equivale à noção de heurística que foi introduzida por Polya no seu livro *How to Solve It,* que fora publicado pela primeira vez no ano de 1945. Para Polya (1985), a heurística "é o estudo dos caminhos e meios da descoberta e invenção; estuda, especialmente na resolução de problemas, essas etapas que se apresentam naturalmente, com freqüência (sic) e que têm alguma probabilidade de nos conduzir à solução" (p. 2).

Musser e Shaughnessy (1980) apresentam cinco estratégias de resolução de problemas: *tentativa e erro*, quando se "prevê" a solução não esquecendo de verificar se todas as informações dadas são satisfeitas; *padrões*, ao usar a generalização a partir das evidências observadas em casos particulares; *resolver um problema mais simples*, implica resolver um problema mais simples que pode ser visto como transitório para melhor compreender o problema proposto; *começar pelo problema inverso*, em vez de iniciar a resolução manipulando os dados, se começa pelo resultado almejado ou que deseja-se mostrar; e, *simulação*, quando a solução do problema é obtida por meio da realização de um experimento para coleta e análise de dados.

Vale e Pimentel (2004) apresentam oito estratégias de resolução de problemas, sendo que dessas, cinco correspondem as consideradas por Musser e Shaughnessy, acrescentando algumas informações na classe de estratégias cujo entendimentos são intuitivos pelas expressões usadas. A saber: descobrir um padrão/descobrir uma regra ou lei de formação; fazer tentativas/fazer conjecturas; trabalhar do fim para o princípio; reduzir a um problema mais simples/decomposição/simplificação; e, fazer uma simulação/fazer uma experimentação/fazer uma dramatização. As três estratégias adicionais de Musser e Shaughnessy são: *usar a dedução lógica/fazer eliminação*, analisam-se "todas as hipóteses e vai-se eliminando, uma a uma, aquelas que não são possíveis" (p. 24); *fazer um desenho, diagrama, gráfico* ou *esquema,* geralmente "é útil em combinação com outras, mas por vezes também é usada como estratégia principal, sem a qual seria muito mais difícil ou mesmo impossível resolver o problema" (p. 29); *fazer uma lista organizada ou fazer uma tabela*, além de ser um estratégia de resolução pode ser utilizada "simplesmente para representar, organizar e guardar informação" (p. 25).

Serrazina (2017) apresenta dez estratégias de resolução de problemas: utilizar um esquema/diagrama/tabela/gráfico; trabalhar do fim para o início; simular/simplificar o problema; descobrir uma regularidade/regra; tentativa e erro; organizar uma sequência de passos; procurar um problema análogo, mas mais simples; desdobrar um problema complexo em questões mais simples; criar um problema equivalente; e, explorar casos particulares. Comparando a classificação de Serrazina com as de Musser e Shaughnessy (1980) e Vale e Pimentel (2004) percebemos as estratégias "trabalhar do fim para o início", "tentativa e erro" e "descobrir uma regularidade/regra" são iguais a esses autores; a classe "utilizar um esquema/diagrama/tabela/gráfico" aglutina duas das estratégias de Vale e Pimentel (fazer um desenho, diagrama, gráfico ou esquema e fazer uma lista organizada ou fazer uma tabela); o plano "simular/simplificar o problema" funde duas das estratégias tanto de Musser e Shaughnessy (simulação e resolver um problema mais simples) como de Vale e Pimentel (simulação/fazer uma experimentação/fazer uma dramatização e reduzir a um problema mais simples/decomposição/simplificação); as estratégias "procurar um problema análogo, mas mais simples" e "desdobrar um problema complexo em questões mais simples" correspondem a "simplificação" de Musser e Shaughnessy, e a estratégia de "reduzir a um problema mais simples/decomposição/simplificação" de Vale e Pimentel; a estratégia "explorar casos particulares" faz parte da tática de resolução na busca de padrão dos demais autores citados. Portanto, dentre todas as estratégias de Serrazina, identificamos que apenas a técnica de "criar um problema equivalente" se difere dos demais referenciais citados. Esse plano de resolução pode ser usado quando "temos um problema com números grandes, substituindo-os inicialmente por números menores, de modo que se possa trabalhar com representações" (Serrazina, 2017, p. 64).

Pelas estratégias de resolução de problemas consideradas por Musser e Shaughnessy (1980), Serrazina (2017) e Vale e Pimentel (2004) percebemos que ao longo de quase quatro décadas, apesar do número de estratégias apresentadas não ser o mesmo, pouco foi acrescentado com relação ao referencial mais antigo. Além disso, percebemos que as estratégias mais recentes incorporaram as estratégias de Musser e Shaughnessy (1980).

Após esse apanhado das estratégias de resolução de problemas podemos nos questionar: como se resolvem os problemas? E, como o professor pode ensinar a resolver problemas? Como organizar uma aula usando a metodologia de Resolução de Problemas? Na próxima seção abordaremos esses assuntos, e, à luz da literatura, procuramos evidenciar as orientações dadas para que tanto uma pessoa interessada em resolver um problema possa se tornar um “bom resolvedor” de problemas quanto ao docente que deseje usar a Resolução de Problemas como uma abordagem metodológica.

3.5. Ensinar a resolver problemas

Dentre as diversas orientações encontradas na literatura que visam ensinar a resolver problemas, a mais conhecida em nível mundial, certamente é a proposta apresentada no livro “How to Solve It” cujo autor é George Polya. Para esse matemático húngaro os bons resolvedores de problema passam por quatro fases durante o processo de resolução, que são, respectivamente: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. A primeira fase é a *compreensão do problema* em que se busca interpretar o problema, ou seja, ter claramente identificado o objetivo do problema, os dados que se tem, quais condições a serem satisfeitas e as variáveis envolvidas. A segunda fase é a do *estabelecimento de um plano* em que se buscam estratégias de resolução a partir das possíveis conexões dos dados com as variáveis do problema. A terceira fase corresponde a *execução do plano* estabelecido. Caso o plano estabelecido não tenha possibilitado chegar às conclusões, deve-se rever as estratégias usadas, ou seja, retornar à fase de planificação. A quarta e última fase é a do *retrospecto*, ou seja, fase de examinar criticamente as estratégias e a solução encontrada. (Polya, 2006). Se constatar-se que a solução obtida não é a correta ou não atende todas as exigências do problema, deve-se reiniciar todo o processo. Nem sempre é possível identificar facilmente todas essas fases independentes uma da outra. Polya (2006) fornece um roteiro, ilustrado na Tabela 14, com muitos questionamentos que intencionam auxiliar o estudante a pensar sobre o problema, estabelecer estratégias de resolução e fazer o discernimento das fases.

Tabela 14

Roteiro de Polya para resolver problemas

Fase	Questionamentos/orientações
Compreensão do problema	Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?
Estabelecimento de um plano	Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível sua utilização? É possível reformular o problema? É possível ainda reformulá-lo de outra maneira? Volte às definições. Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?
Execução do plano	Ao executar o plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demostrar que ele está correto?
Examine a solução obtida	É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Fonte: Polya (2006, pp. XIX – XX)

Analisando as indagações de Polya em seu roteiro apresentado na Tabela 14 conseguimos identificar algumas das estratégias discutidas anteriormente: traçar uma figura, usar um problema correlato, simplificar o problema (É possível imaginar um problema correlato mais acessível?), usar a dedução lógica/fazer eliminação (Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado;

até que ponto fica assim determinada a incógnita?). Essa constatação nos induz a inferir que as estratégias de resolução de problemas sugeridas na literatura podem ter sido inspiradas nesse roteiro de Polya.

Polya acreditava que por meio dessa organização das etapas de resolução, era possível ensinar um estudante a se tornar um bom resolvedor de problemas e, para isso, o professor devia "proporcionar-lhe muitas oportunidades de imitação e prática" (Polya, 2006, p. 4). Esse pesquisador dá as seguintes orientações de como o professor pode conduzir uma aula usando seu método de resolução de problemas:

> O professor pergunta: o que você quer? Qual é a incógnita? Se o objetivo da pesquisa, a incógnita, estiver suficientemente clara para o aluno, o professor poderá continuar: o que você tem, quais são os dados, qual é a condição? Se o aluno der respostas suficientemente claras também a estas questões, o professor poderá voltar à sua questão inicial e desenvolvê-la: o que você quer obter? Qual é a incógnita? Como você pode obter esta incógnita? Com que dados você pode determinar este tipo de incógnita? E estas perguntas têm bastante possibilidade de mobilizar na mente do aluno os conhecimentos apropriados e conduzi-lo à solução. (Polya, 1985, p. 2)

Polya (1985) acreditava que essa estratégia prática e de bom senso adotada pelo professor propiciaria, com o tempo, que o estudante aprendesse a fazer essas perguntas a si mesmo focando na resolução do problema. Para o aluno atingir essa autonomia, Polya dá os seguintes conselhos:

> Enfrente seu problema se quiser resolvê-lo e pergunte-se: o que é que eu quero? Quando souber a resposta e o seu objetivo estiver claro, examine tudo o que se encontra à sua disposição e que você poderia utilizar para atingir o objetivo e pergunte-se: o que é que eu tenho? Tendo examinado durante algum tempo tudo o que tiver possibilidade de ser usado, você poderá voltar à primeira questão e ampliá-la: o que eu quero? Como posso obtê-lo? Onde posso obtê-lo? E, interrogando-se assim, você poderá se aproximar da solução do problema. (Polya, 1985, p. 2)

Com a divulgação do trabalho de Polya em meados da década de 1950, a resolução de problemas passou a ganhar força como linha de pesquisa. Vale, Pimentel e Barbosa (2015) dizem que ensinar a resolver problemas como sugerido por Polya

> não produzia os efeitos desejados, ou seja, não tornava os alunos melhores resolvedores de problemas. As heurísticas ajudam a refletir e interpretar situações- problema, mas como são demasiado genéricas não ajudam o aluno que está sem saber o que fazer

durante uma tentativa de resolução. Schoenfeld (1992[53]), fazendo essa constatação, sugere que as heurísticas de Polya são essencialmente descritivas, fornecendo apenas largas categorias de processos. A caraterização de Polya não fornecia a quantidade de pormenores que permitisse a pessoas não familiarizadas com as estratégias ser capaz de utilizá-las. Para ultrapassar esta dificuldade, este investigador preconiza: (a) desenvolver nos alunos um maior número de estratégias mais específicas, mais ligadas a determinadas categorias de problemas; (b) ensinar estratégias metacognitivas para que os alunos aprendam a aplicar no momento adequado as estratégias de resolução de problemas e os conhecimentos adquiridos; e (c) estudar modos de eliminar crenças contraproducentes dos alunos e fomentar crenças produtivas sobre a matemática, a resolução de problemas e as suas próprias competências pessoais. (Vale, Pimentel & Barbosa, 2015, p. 42)

De acordo com Charles (1991) para promover a abordagem de Schoenfeld (1985[54]), que priorizava o desenvolvimento das habilidades metacognitivas dos estudantes para resolverem seus problemas, pode-se contribuir na organização do trabalho discente fazendo-se os seguintes questionamentos: O que exatamente você está fazendo? (Você sabe descrever isto precisamente?) Por que você está fazendo isso? (Como isso "cabe" na sua solução?) Como isso te ajuda? (O que você vai fazer com o resultado quando atingi-lo?) (Charles, 1991, p. 335, tradução nossa). Com essas perguntas percebe-se que Schoenfeld busca fazer com que o estudante resolva um problema refletindo sobre as ações que estão sendo tomadas durante todo o percurso de resolução.

Charles e Lester (1982[55]) citado por Charles (1991) propõem trabalhar com um quadro de avisos deixado pelo professor em lugar visível na sala de aula, intencionando assim "facilitar o pensamento do aluno" (p. 336). O quadro de avisos proposto por esses autores é composto por três fases vivenciadas na resolução de um problema, que são: compreendendo o problema, resolvendo o problema; respondendo o problema e avaliando a resposta. As orientações dadas por Charles e Lester (1982) em cada uma das etapas do processo de resolução estão apresentadas na Tabela 15.

---

[53] Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 334–370). New York, NY: Macmillan Publishing Co

[54] Schoenfeld, A. (1985). Metacognitive e epistemological issues in mathematics understanding. In: Silver, E. (Ed.). *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

[55] Charles, R.; & Lester, F. (1982). *Teaching problem solving: What, why and how.* Palo Alto, CA: Dale Seymour Publishing Company.

Tabela 15

Orientações de Charles e Lester para auxiliar o estudante a resolver problemas

Fase	Orientações
Compreendendo o problema	Leia o problema Defina o que precisa encontrar Retire os dados importantes
Resolvendo o problema	Olhe para um padrão Adivinhe e verifique Escreva uma equação Use raciocínio lógico Revise o trabalho Faça uma figura Faça uma lista organizada Faça uma tabela Use os objetos Simplifique o problema
Respondendo o problema e avaliando a resposta	Você usou todas as informações importantes? Verifique seu trabalho Verifique se a resposta faz sentido Escreva a resposta em uma sentença completa

Fonte: Charles, 1991, p. 336.

Charles e Lester (1982) sentiam a falta de orientações voltadas aos professores que os ajudassem no sentido de como poderiam atuar em sala de aula. Segundo esses pesquisadores, percebia-se apenas a recomendação de que o docente deveria facilitar o pensamento do estudante, mas não apontava caminhos para tal. Nessa acepção, Charles (1991) afirma que a "estratégia de ensino de Charles e Lester foi projetada para refletir quatro funções principais que um professor pode desempenhar na facilitação do pensamento do aluno" (p. 337, tradução nossa). Segundo Charles e Lester (1982) os quatro papéis que o professor exerce na sala de aula em que se considera a resolução de problemas devem ser de *promover a compreensão do estudante; monitorar e facilitar o entendimento do aluno; promover a reflexão do estudante* e *ampliar a compreensão* e podem ser organizados em três fases que são o *antes, durante e depois*. O roteiro de plano de aula sugerido por esses autores considerando as funções do professor e as fases de uma aula está esquematizado no

Quadro 2. Nesse roteiro contam ainda uma sugestão de referenciar problemas similares que foram previamente resolvidos e uma proposta de uma extensão do problema resolvido.

Quadro 2 - Roteiro de aula de Charles e Lester para auxiliar o professor

Ações de Ensino Antes	Questões para entender o problema
Leia o problema Faça perguntas para entender o problema Discuta possíveis estratégias de soluções	[Escreva aqui questões relacionadas a compreensão do problema]
Promover a Compreensão do Estudante	
Ações de Ensino Durante	Possíveis dicas para solucionar o problema
Observe os estudantes Dê sugestões quando necessário Exija que os alunos retornem e resolvam o problema Amplie quando necessário	[Escreva grupos de questões relacionadas a abordagens específicas de solução]
Monitorar e Avaliar	
Ações de Ensino Depois	Possível Solução
Discuta soluções. Nomeie estratégias. Discuta problemas relacionados e ampliações. Discutas casos especiais quando necessários. Conecte conteúdos matemáticos.	[Mostre aqui uma ou mais soluções possíveis]
Promover Reflexões e Ampliar a Compreensão	
Problemas Relacionados:	[Relacione com problemas similares resolvidos previamente]
Ampliação do Problema:	[Escreva aqui uma extensão do problema original]

Fonte: Charles, 1991, p. 338, tradução nossa.

Vale e Pimentel (2004) apresentam um esquema de resolução de problemas que foi adaptado do modelo de Fernandes, Vale, Silva, Fonseca e Pimentel (1998[56]), que propunha uma modificação no método de Polya na segunda e terceira fase. No modelo desses pesquisadores as fases de "estabelecendo um plano" e "executando o plano" foram concatenadas em uma única devido à dificuldade de distingui-las na prática. Assim, o modelo adaptado de Vale e Pimentel possui três fases: *ler e compreender o problema, fazer e executar o plano*; e, *verificar a resposta.* Na Figura 12 apresentamos o esquema proposto por Vale e Pimentel que sintetiza todo o processo de resolução de

[56] Fernandes, D., Vale, I., Silva, J. C., Fonseca, L., & Pimentel, T. (1998). *Matemática 7* – Livro de texto de Matemática para o 7° ano. Porto: Areal Editores.

problemas que pode ser indicado como auxílio aos estudantes nesse percurso. Esse diagrama reúne os processos, as capacidades e as estratégias de resolução de problemas. Essas autoras acreditam que é possível aprender a resolver problemas e, além disso, afirmam que

> a familiaridade com o uso de estratégias dentro de um modelo de resolução de problemas vai permitir ao aluno passar gradualmente da resolução de uma situação problemática fechada e estruturada para uma situação mais aberta sem o perigo de se sentir perdido. (Vale & Pimentel, 2004, p. 25)

Diante das orientações sobre o processo de resolução de problemas, por parte dos alunos, que foram aqui apresentadas, percebemos que esses modelos são adaptações do método de Polya, cuja essência é invariante. A função do professor parece ser ensinar o aluno a pensar/resolver problemas. Contudo, fala-se pouco em como o docente pode atingir esse objetivo almejado. Schoenfeld (1985) referido por Charles (1991) apresentou questionamentos que o professor pode fazer durante a aula. Charles e Lester (1982) apresentam uma proposta de como o professor pode preparar a sua aula de forma que seja convergente com as recomendações dadas aos alunos para resolver problemas. Esses trabalhos analisados não fazem referência a metodologia de ensino que o professor pode adotar seguindo os modelos propostos, eles apresentam dicas de como trabalhar com a resolução de problemas do ponto de vista da atividade. No trabalho de Polya (2006), pela forma como os exemplos de problemas foram resolvidos identifica-se facilmente que as aulas são do estilo tradicional e o próprio autor deixa evidências disso, no momento que fala que aprende-se treinando a habilidade de resolver problemas.

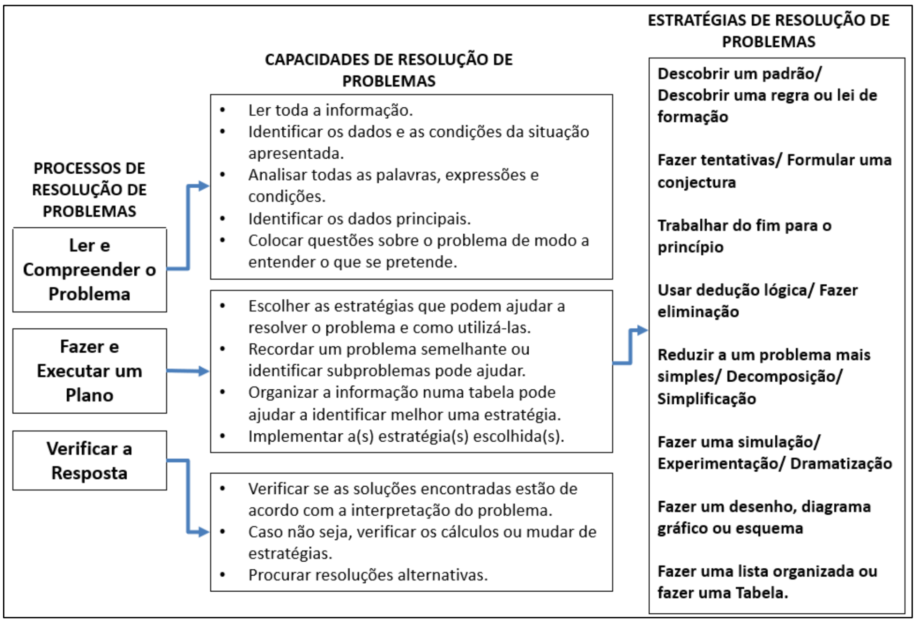


Figura 12 - Esquema de Resolução de Problemas de Vale e Pimentel.
Fonte: Vale e Pimentel, 2004, p. 26.

Anteriormente, foi dito que a resolução de problemas pode ser vista como um processo, uma finalidade ou um método de ensino, que estão diretamente relacionadas com as três concepções de ensino de resolução de problemas, que se referem a ensinar *sobre, para* ou *através* da resolução de problemas, respectivamente. Corroboramos com Schroeder e Lester (1989) de que é importante conhecer as diferenças entre essas três concepções de ensino, pois o docente organizará as suas aulas conforme esses pontos de vista. Esses autores dizem que essa classificação das concepções de resolução de problemas foi divulgada a primeira vez por Hatfield (1978[57]), mas provavelmente tenha sido adotada por algum de seus predecessores. *Ensinar sobre resolver problemas* é a concepção que se apoia no desenvolvimento da aula seguindo as quatro fases do método de Polya ou alguma de suas variações (Schroeder e Lester, 1989; Vale, Pimentel & Barbosa, 2015) e busca ensinar os estudantes como se resolvem os problemas usando as quatro fases de Polya. *Ensinar para resolver problemas* é a mais comumente encontrada nas aulas de matemática e nos livros didáticos. Nessa concepção, o principal objetivo de ensinar matemática é que o aluno seja capaz de aplicá-la. Em outras palavras, os professores ensinam primeiro a teoria e, como forma de aplicação, no final do conteúdo trabalham com problemas, ou seja, “habilidades para transferirem o que eles têm ensinado para problemas contextualizados” (Schroeder e Lester, 1989, p. 32, tradução nossa). Ao lecionar sob essa concepção, a sequência que costuma ser adotada pelo docente é:

> (a) aprendizagem inicial de conceitos e procedimentos; (b) prática de “problemas de palavras”; (c) exposição a uma variedade de estratégias (e.g. fazer um diagrama, tentativa e erro); e (d) experiências na aplicação destas competências na resolução de “novos problemas” ou “problemas não rotineiros” (Vale, Pimentel e Barbosa, 2015, p. 42).

Essas autoras destacam que na literatura há críticas referentes a essa concepção de ensino nomeadamente que ao ensinar para resolver problemas dá-se uma importância secundária aos problemas e esses são trabalhados “como um tema independente e isolado no desenvolvimento das ideias matemáticas” (Vale, Pimentel & Barbosa, 2015, p. 42) e que há poucas evidências de que trabalhando dessa forma os estudantes melhoram suas habilidades em resolver problemas. *Ensinar através[58] da resolução de problemas* os “problemas são valorizados como meio de fazer matemática” (Schroeder e Lester, 1989, p. 33, tradução nossa), ou seja,

---

[57] Hatfield, L. (1978). Heuristical emphases in the instruction of mathematical problem solving: Rationales and research. In L. Hatfield, & A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop* (pp. 21–42). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

[58] Ensinar *através* da resolução de problemas é equivalente ao ensinar *via* resolução de problemas. Optamos por considerar ensinar *através* da resolução de problemas, porque é a expressão adotada por Onuchic (1999) e Onuchic e Allevato (2014) que são nossos referenciais teóricos.

os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado, formalmente, o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. (Onuchic e Allevato, 2011, p. 45).

Van de Walle (2001[59]) referido por Allevato (2005) apresenta orientações ao professor de como ele pode conduzir uma aula que almeja ensinar através da resolução de problemas. Ele organiza, em três momentos, as ações do professor em uma aula: antes, durante e depois. Essa organização é similar à de Charles e Lester (1982), como pode ser observado na Tabela 16, entretanto, não a apresenta como um plano de aula.

Tabela 16
Sugestão de Van de Walle de encaminhamento de aula através da resolução de problemas

Fase	Objetivo	Procedimentos
Antes	Preparação	Preparar mentalmente os estudantes para trabalhar no problema. Certificar-se de que os estudantes entenderam a tarefa. Certificar-se de que os estudantes entenderam suas responsabilidades.
Durante	Trabalho dos estudantes	Deixar os alunos trabalharem sozinhos demonstrando respeito e confiança em suas habilidades. Ouvir ativa e cuidadosamente. Observar e avaliar o trabalho dos alunos. Encorajá-los a testar suas ideias. Fornecer apenas dicas e sugestões. Não corrigir erros.
Depois	Discussão com a classe	Aceitar as sugestões dos alunos sem avaliá-las. Conduzir as discussões à medida que os estudantes justificam e avaliam seus resultados e métodos.

Fonte: Allevato, 2005, p. 63.

O Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), da UNESP de Rio Claro, São Paulo, Brasil, coordenado pela professora Lourdes de La Rosa Onuchic, tem por objetivo "buscar o desenvolvimento de estudos que atinjam a sala de aula, tanto sob a perspectiva do aluno quanto do professor, em todos os níveis de escolaridade." (Andrade & Onuchic, 2017, p. 433). Os membros desse

[59] Van de Walle, J. A. (2001). Teaching Through Problem Solving. In: Van de Walle, J. A. *Elementary and Middle School Mathematics.* New York: Longman, 2001. p.40-61.

grupo fazem uso de um roteiro de atividades, que foi elaborado com a finalidade de auxiliar o professor a conduzir uma aula mediada pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Resolução de Problemas Matemáticos sob a concepção de ensinar através da resolução de problemas. A primeira versão do roteiro nasceu em um Programa de Educação Continuada, no ano de 1998, que teve por objetivo ajudar os professores a colocarem em prática a metodologia de resolução de problemas (Onuchic, 1999; Onuchic & Allevato, 2011). A pedido dos participantes dessa formação continuada, durante o curso, estruturaram um roteiro com seis etapas: formar grupos – entregar a atividade; o papel do professor; registrar os resultados na lousa; realizar uma plenária; analisar os resultados; buscar um consenso; fazer a formalização (Onuchic, 1999). Comparando esse roteiro com a organização de aula sugerida por Van de Walle percebe-se semelhanças na estrutura da aula de ambos autores. Allevato (2005), em seu trabalho, sugere uma alteração na fase inicial, proposta por Van de Walle (2001). A sugestão dessa autora é que

> o professor apresente o problema por escrito aos alunos e, durante alguns minutos, os grupos trabalhem sem nenhuma intervenção do professor; tampouco o professor lê com eles o problema (os alunos devem ser orientados, logo no início, de que esse será o procedimento adotado). Durante o tempo em que os alunos lêem e procuram interpretar e resolver o problema, o professor apenas observa. Procura perceber a forma como discutem, que dificuldades encontram, que sugestões oferecem e que procedimentos adotam. Procura também avaliar o nível de participação de cada aluno na realização da atividade. (Allevato, 2005, p. 64)

De acordo com Onuchic e Allevato (2011) nas pesquisas em que o roteiro proposto por Onuchic (1999) foi adotado, os professores revelaram dificuldades ao trabalhar dessa forma e, por vezes, sentiam dificuldades em conduzir a aula e, até mesmo, nos conteúdos que iriam desenvolver com os estudantes. Essas autoras relatam ainda que "tentando atender à demanda de prover os alunos de conhecimentos prévios necessários ao desenvolvimento mais produtivo da metodologia" (Onuchic & Allevato, 2011, p. 83) o roteiro foi reestruturado. Assim, originou-se o segundo roteiro de orientação ao professor de como conduzir uma aula através da RP, que é constituído de nove etapas: preparação do problema; leitura individual; leitura em conjunto; resolução do problema; observar e incentivar; registro das resoluções na lousa; plenária; busca do consenso; formalização do conteúdo. O detalhamento de cada uma dessas etapas é apresentado na Tabela 17.

Tabela 17

Roteiro do GTERP de orientações ao professor

Etapa	Detalhamento
1. Preparação do problema	O professor escolhe o problema que servirá para introduzir um novo assunto.
2. Leitura individual	Uma cópia do problema é entregue ao aluno e este faz a sua leitura.
3. Leitura em conjunto	Formam-se grupos e estes releem e interpretam o problema. O professor pode esclarecer dúvidas tanto referentes ao entendimento de palavras não compreendidas como eventuais dúvidas do que se pede no problema.
4. Resolução do problema	O grupo usa seus conhecimentos anteriores na busca pela solução.
5. Observar e incentivar	O professor monitora os trabalhos sendo desenvolvidos e atua como mediador das dúvidas. Entretanto, deve tomar cuidado para não dar as respostas prontas aos alunos. Por meio de questionamentos o professor deve intervir e/ou estimular o desenvolvimento do trabalho.
6. Registro das resoluções na lousa	Representantes dos grupos são convidados a registrarem suas resoluções na lousa.
7. Plenária	Promove-se uma discussão coletiva sobre as resoluções apresentadas. O professor atua como guia e mediador das discussões.
8. Busca do consenso	A partir da análise conjunta das resoluções busca-se chegar a conclusão sobre aos resultados corretos.
9. Formalização do conteúdo	O professor formaliza o conteúdo, apresentando linguagem e notação matemática adequadas.

Fonte: Adaptado de Onuchic e Allevato, 2011, pp. 83 – 85.

Allevato e Onuchic (2014) dizem que a etapa da formalização do conteúdo “teria forte viés do ensino para a resolução de problemas, contudo isso, não desconfigura a metodologia porque essa concepção (através) inclui as demais” (p. 46). A esse respeito, Onuchic (1999) afirma que teoricamente as três vertentes de resolução de problemas matemáticos podem ser abordadas de forma independente, todavia, “na prática elas se superpõem em várias combinações e sequências” (p. 207).

Além do roteiro apresentado na Tabela 17, existem mais duas versões posteriores. A terceira edição do roteiro incluiu uma décima etapa, que consiste na *proposição de novos problemas*, relacionados ao problema gerador, pois “possibilitam analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo ou tópico matemático (Allevato & Onuchic, 2014, p. 46). A versão mais atual desse roteiro inclui 11 etapas cuja modificação com relação aos dois roteiros anteriores é que a primeira etapa passou a ser “formar grupos” (Andrade & Onuchic, 2017, p. 439). Incluindo essa etapa automaticamente, as demais mudam uma posição no roteiro. Na prática, a segunda etapa continua sendo a primeira, pois o planejamento da aula ocorrerá com antecedência. Onuchic e Allevato (2011) enfatizavam que “não há formas rígidas de se trabalhar através da resolução de problemas” (p. 82), logo, entendemos que adequações no roteiro podem ser feitas conforme as necessidades desde que não se deixe de fazer o essencial que é realizar a discussão coletiva (plenária) e a formalização do conteúdo. Com relação à última etapa do roteiro atualizado do GTERP, Andrade e Onuchic (2017) dizem que

> Para os professores, propor problemas e estendê-los para enriquecer a aprendizagem dos alunos são fundamentais para ensinar matemática através da resolução de problemas. Para os estudantes, o processo de propor seus próprios problemas aprofunda e amplia sua habilidade em resolvê-los e a compreender ideias matemáticas básicas. (p. 441)

Nessa fala identificamos uma ampliação no entendimento do que vem a ser a “proposição de problemas”, pois por Allevato e Onuchic (2014) entendemos que essa etapa correspondia à continuidade natural de exploração do conteúdo novo que o professor almejava trabalhar e estava introduzindo por meio de um problema. Entretanto, pela citação anterior de Andrade e Onuchic (2017) parece-nos que, além da compreensão anterior, as autoras estão se referenciando a atividade de formulação de problemas, ou seja, sugerem trabalhar formulação e resolução de problemas. Assim, poderíamos ver a formulação como uma extensão natural da resolução de problemas e as duas sendo trabalhadas simultaneamente. Esse assunto também é abordado no trabalho de Vale, Pimentel e Barbosa (2015). Todavia, como a publicação de Andrade e Onuchic (2017) ainda é recente, para termos certeza desse nosso entendimento a respeito da décima primeira etapa do roteiro mais atualizado, precisamos aguardar futuras publicações vinculadas aos membros do GTERP que a façam uso dessa última versão.

Por fim, encerramos essa seção cientes de que a formulação de problemas pode ser integrada ao processo de resolução de problemas e na próxima seção, a aprensentaremos para compreendermos o seu entendimento a luz dos referenciais teóricos.

3.6. O que é formulação de problemas?

A ideia de trabalhar com formulação de problemas no contexto escolar não é recente, ela já aparece nos trabalhos de Polya, concomitante com a resolução de problemas. Em sua obra, Polya (2006) afirma que se o aluno não tiver a oportunidade de criar seus próprios problemas sua experiência matemática ficaria incompleta. Apesar dessa concepção, nas obras de Polya percebe-se maior ênfase dada à resolução do que à formulação de problemas e, conforme Palhares (1997), possivelmente esse pode ter sido um motivo pelo qual esse tema foi pouco discutido antes da década de 1990. E, foi a partir dessa década que a comunidade educativa passou a se interessar pela formulação de problemas (Palhares, 1997).

Barbosa e Vale (2015) ressaltam a importância de aliar a formulação de problemas à resolução de problemas, argumentando que

> a formulação de problemas pode ser uma estratégia poderosa para desenvolver capacidades de resolução de problemas e de ter bons resolvedores de problemas, por outro lado, a formulação de problemas matemáticos é necessária para se ser um bom resolvedor de problemas. Ao aprender a resolver problemas e ao aprender através da resolução de problemas, os alunos têm inúmeras oportunidades para estabelecer conexões entre ideias matemáticas e desenvolver a sua compreensão conceptual (p. 3).

Esse pensamento converge com o entendimento de Brown e Walter (1990) sobre a formulação de problemas, pois consideram que essa atividade pode auxiliar os alunos a verem um conteúdo sob um novo olhar, além de propiciar a eles uma compreensão mais profunda. Silver (1994) entende a formulação de problemas tanto como a elaboração de um novo problema, quanto a reformulação de um dado problema e, nessa perspectiva, a formulação pode ocorrer em três momentos: antes, durante ou depois da resolução de um problema. Nesse sentido, a criação de um novo problema ocorre antes da resolução do problema e o processo de reestruturação (a recriação) pode ocorrer durante ou depois da resolução de problemas. A formulação de problemas, vista como uma atividade de ensino, "ocorre quando um indivíduo inventa ou descobre um novo problema" (Palhares, 1997, p. 167) e pode ser entendida como uma oportunidade do estudante problematizar situações "usando a sua própria linguagem, experiências e conhecimento" (Barbosa & Vale, 2015, p. 3). Nesse mesmo contexto, Stoyanova (1997) entende a formulação de problemas como "um processo, pelo qual, com base em sua experiência matemática, os alunos constroem interpretações pessoais de situações concretas e as formulam como problemas matemáticos bem estruturados e significativos" (p. 5, tradução nossa). Apesar das variações na forma de definir a resolução, dentre os pesquisadores de Educação Matemática, é consensual conceber a formulação de problemas como a criação de novos problemas ou a recriação de determinados problemas (Zuya, 2017) e essa corresponde também à nossa concepção. Corroboramos ainda com Cunha, Martins e Viseu (2014) de que na formulação de problemas "o aluno é desafiado a formular um enunciado de um problema cujo contexto dê sentido aos conceitos que aprendeu e se traduz numa estratégia de resolução que tenha como solução a informação dada" (p. 2).

Uma significativa diferença entre resolver e formular problemas está em quem elabora o problema. Na resolução de problemas o professor é o responsável pela escolha/elaboração de um problema, "cabendo ao aluno responder às solicitações que lhe são feitas. Na formulação de problemas, o aluno é desafiado a problematizar situações do dia a dia usando a sua própria linguagem, vivências e conhecimentos" (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008, p. 27). Para esses autores é incontestável a importância da atividade de formulação de problemas,

> pois contribui não só para o aprofundamento dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também para a compreensão dos processos suscitados pela sua resolução. Encorajar os alunos a escrever, a partilhar e a resolver os seus próprios problemas, é um contexto de aprendizagem muito rico para o desenvolvimento da sua capacidade de resolução de problemas. Ao colocarem problemas, os alunos apercebem-se da sua estrutura, desenvolvendo, assim, pensamento crítico e capacidades de raciocínio ao mesmo tempo que aprendem a exprimir as suas ideias de modo mais preciso. (Boavida *et al.*, 2008, p. 27)

Entretanto, de acordo com Vale e Pimentel (2012), "a formulação de problemas tem sido uma componente da aula de matemática bastante negligenciada, mas essencial na aprendizagem matemática" (pp.347 – 348). Concordamos com a opinião dessas autoras, pois pela experiência docente no Ensino Superior, sabemos que, ao menos nas disciplinas do ciclo básico da UDESC/Joinville, não se costuma trabalhar com a formulação de problemas que está diretamente relacionada com a resolução de problemas. Muitas vezes, quando se trabalha com problemas em sala de aula eles são utilizados como sendo um fim no ensino, ou seja, ensinamos para resolver problemas, visto que eles são trabalhados ao final de um conteúdo como uma aplicação do que fora ensinado.

A atividade de formulação de problemas está diretamente relacionada com a criatividade e de acordo com Silver (1997) os três vieses mais importantes a ela relacionados são: a *fluência*, competência de gerar variadas ideias de como solucionar a tarefa; a *flexibilidade*, capacidade de elaborar diferentes resoluções com abordagens diversificadas; e, a *novidade*, destreza em produzir ideias originais por meio de pensamentos não usuais. Esse mesmo autor apresenta uma comparação entre as atividades do estudante na resolução de problemas e na formulação de problemas, relacionando-as com a criatividade que apresentamos na Tabela 18.

Tabela 18

Aspectos comuns entre resolução e formulação de problemas com a criatividade

Resolução de Problemas		Criatividade		Formulação de Problemas
Alunos exploram problemas abertos com muitas interpretações, métodos de solução, ou respostas.	→	Fluência	←	Alunos geram muitos problemas para serem resolvidos. Os alunos compartilham esses problemas.
Os estudantes resolvem sozinhos, depois procuram outras formas. Os alunos discutem muitos métodos de solução.	→	Flexibilidade	←	Alunos formulam problemas que são resolvidos de diferentes maneiras. Os alunos usam a abordagem "E se não?" para inventar problemas.
Os alunos examinam muitos métodos ou respostas de solução ou justificativas, para depois gerarem outras diferentes.	→	Novidade	←	Os alunos examinam vários problemas formulados, depois formulam outro que seja diferente.

Fonte: Silver, 1997, p. 78, tradução nossa.

Após termos discutido o significado de formulação de problemas e falado um pouco sobre a importância de se trabalhar com formulação e resolução de problemas, além das diferenças entre essas duas abordagens e a relação dessas com a criatividade, a seguir, veremos algumas das estratégias de formulação de problemas encontradas nos referenciais teóricos.

3.7. Estratégias de Formulação de Problemas

Para facilitar a atividade de formulação de problemas, existem algumas estratégias que podem ser úteis nesse processo. Vejamos algumas destas que são encontradas na literatura.

Stoyanova (1997) apresenta três estratégias de formulação de problemas: *formulação livre* –os problemas são elaborados sem a necessidade de satisfazer qualquer tipo de critério pré-estabelecido; *situações semi-estruturadas* – os problemas formulados são similares a problemas já resolvidos ou apresentam algumas informações que devem ser atendidas; e, *problemas estruturados* – os problemas criados a partir de problemas já resolvidos, ou seja, são reformulações de problemas. Palhares (1997), sugere quatro estratégias de formulação de problemas: *aceitando os dados*, "a partir de uma situação estática (pode ser uma definição, um teorema, um objecto, uma condição...), formulam-se perguntas. Dependendo destas, poderemos ter criado um problema" (p. 170); *E se em vez disso?*, "a partir de uma situação, listamos os seus atributos, negamos um ou mais dos seus atributos e então formulamos perguntas que por sua vez poderão originar a negação de outro atributo e mais perguntas." (p. 171); *variação de um problema*, "a partir de um problema, podemos obter outros problemas por meio de generalização, especialização, analogia, decomposição e recomposição" (p. 171); e, *recontextualização*, "depois de resolvido o problema, e identificado algum traço característico do mesmo, podemos formular novos problemas fixando essa característica e envolvendo-o num novo contexto" (p. 171). Dessas estratégias, as duas primeiras são apoiadas nas ideias de Walter e Brown (1993[60]), a terceira em Polya (1957[61]) e a última em Palhares (1992[62]). Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008, p. 28) apresentam duas estratégias: "E se em vez de?" e "aceitando os dados", cujas concepções são similares as apresentadas por Walter e Brown (1993) referidos por Palhares (1997) e, segundo essas autoras, a primeira estratégia relaciona-se diretamente com a reformulação de problemas e, a segunda, com a criação de problemas.

Nessa pesquisa de doutoramento, as atividades de formulação de problemas, que serão aqui relatadas, foram do tipo semiestruturadas e aceitando os dados. A professora pesquisadora também propôs aos seus alunos uma atividade extraclasse de formulação livre, mas exigia que o problema formulado estivesse relacionado com o curso de graduação ao qual o estudante estava vinculado. Mais detalhes sobre essas atividades serão descritas no Capítulo 6. Na próxima seção, abordaremos algumas questões relacionadas com o trabalho iniciado por Onuchic, que é nosso referencial teórico da pesquisa.

3.8. A Resolução de Problemas no Brasil

No Brasil, após muitos estudos e conhecimento sobre trabalhos relacionados com a resolução de problemas que vinham sendo desenvolvidos por pesquisadores das universidades norte-americanas (Andrade & Onuchic, 2017), desde o ano de 1989, a professora Lourdes de La Rosa Onuchic iniciava suas pesquisas nesse tema, assumindo-o como uma metodologia de ensino em Educação Matemática (Onuchic, 1999) sob a concepção de ensinar através da resolução de problemas. De acordo com essa pesquisadora o principal objetivo de abordar o ensino e a aprendizagem de matemática através da resolução de problemas "baseia-se na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias dentro do trabalho feito em cada unidade temática" (Onuchic, 1999, p. 208). Nessa concepção de ensino o professor deixa de ser o ator principal na sala de aula. Em outras palavras, o professor deixa de ser um transmissor de conhecimento e passa a assumir o papel de mediador do conhecimento e o aluno assume

[60] Brown, S. I.; & Walter, M. (1993). *Problem Posing: Reflections and Aplications.* News Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
[61] Polya, G. (1957). *How to Solve It.* New York: Doubleday Anchor Books, 2ª ed.
[62] Palhares, P. (1992). *The introduction of a Problem Solving Strategy as a Means to Teach Mental Arithmetic.* Lisboa: APM.

uma postura mais ativa na sala de aula, tornando-se assim mais comprometido com a sua aprendizagem. Em 1992, foi criado o GTERP, coordenado pela professora Onuchic, que desenvolve pesquisas que visam atingir a sala de aula em todos os níveis de ensino. Lester (2013) salienta a importância de pesquisas com essa finalidade, por haver falta de descrições relativas às interações na sala de aula em RP.

A fim de auxiliar o professor a gerir uma aula em que se deseje ensinar matemática através da resolução de problemas, ao longo de sua existência, o GTERP estabeleceu roteiros de atividades com a finalidade de fornecer orientações a esse docente. Como já explicitado na seção anterior, o roteiro do GTERP está na sua quarta versão. Nessa pesquisa foi usada a terceira versão que é constituída de dez etapas, as quais estão ilustradas na Figura 13 (Allevato & Onuchic, 2014).

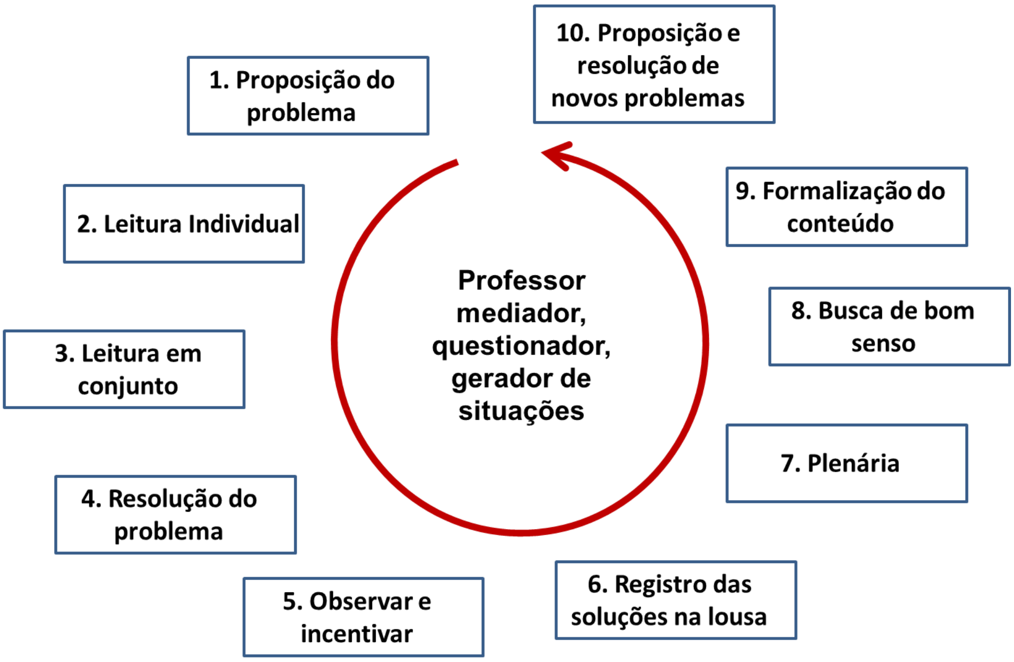


Figura 13 - Roteiro de atividades do GTERP.
Fonte: Adaptado do slide de apresentação de Allevato no XX EBRAPEM, 2016.

Em uma aula apoiada no roteiro da Figura 13, a introdução de um conteúdo é feita por meio de um problema proposto à classe que fora previamente preparada pelo professor de forma que fosse possível introduzir um novo conceito. Após a leitura individual e conjunta, os grupos de trabalho formados discutem entre si e resolvem o problema proposto para depois socializar as suas resoluções com toda a turma. Após chegar ao consenso da resposta correta, o professor deve fazer a formalização do conteúdo. A função do professor durante todo o processo deve ser de observador e mediador. Ao surgirem dúvidas, o professor deve dar algum auxílio aos estudantes por meio de questionamentos e deve tomar cuidado para não ajudar demais os estudantes, ou seja, o professor não pode fornecer a resposta pronta ao aluno, pois dessa forma não permitiria que o estudante desenvolvesse seus conhecimentos e vivenciasse a tensão e o prazer da descoberta (Polya, 2006). A pesquisa de doutoramento ao qual este trabalho está vinculado adotou o roteiro de dez etapas para ensinar os conteúdos de *Cálculo* através da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Resolução de Problemas. Entretanto, algumas adequações no roteiro foram necessárias, mas que não ferem os princípios dessa concepção. As justificativas e as modificações realizadas no roteiro para viabilizar a implementação da metodologia ao nosso contexto serão descritas no Capítulo 4.

Após a pesquisa de mestrado de Pironel (2002[63]) intitulada "A avaliação no processo de Ensino-Aprendizagem da Matemática", em que ele procurou responder "o que/por que/como avaliar?" é que o GTERP passou a considerar em seus estudos e pesquisas a avaliação como um processo integrado às atividades de sala de aula e empregar a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação, que na dinâmica de trabalho nas aulas de Matemática, passou a ser entendida como uma metodologia (Onuchic & Allevato, 2011). Essas autoras ressaltam que a tríade ensino-aprendizagem-avaliação intenciona "expressar uma concepção em que o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento pelo aluno, com o professor atuando como guia e mediador" (Allevato & Onuchic, 2014, p. 43). Nessa concepção,

> pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário. (Onuchic & Allevato, 2011, p. 81).

Para Melo e Huanca (2012), a avaliação integrada no ensino através da metodologia de ensino e aprendizagem de Resolução de Problemas "deve ser um apoio para a aprendizagem de ideias matemáticas importantes e fornecer informações úteis, tanto para os professores, quanto para os alunos" (p. 9). Andrade e Onuchic (2017) explicam que a avaliação integrada no processo de resolução de problemas, do ponto de vista de ensino, permite "acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando sua aprendizagem e reorientando as práticas em sala de aula, quando necessário". O Quadro 3, proposto por Huanca (2006), busca evidenciar motivos pelos quais acreditar que os processos de ensino, de aprendizagem e de avaliação passaram a ser vistos de forma indissociada.

---

[63] A investigadora teve acesso a essa informação, dada pela professora Allevato, no grupo de trabalho em Resolução de Problemas no XX EBRAPEM, na cidade de Curitiba em novembro de 2016.

Quadro 3 - Entendimento sobre abordagens de ensino, de aprendizagem e de avaliação de forma distintas e integradas.

Três processos distintos	Ensino A responsabilidade é do professor, que visa a aprendizagem do aluno.	Aprendizagem Os alunos devem aprender com compreensão. A responsabilidade é dos alunos. Como? Sabendo relacionar as ideias que têm com as novas ideias que querem construir.	Avaliação A avaliação apoia a aprendizagem e informa aos professores quanto ao crescimento dos alunos e, também, informa aos professores quanto ao seu próprio trabalho.
Um processo duplo	Ensino-Aprendizagem É algo maior. É maior [do] que o ensino. É maior [do] que a aprendizagem. Acontece simultaneamente durante a construção do conhecimento, através da resolução de problemas, tendo os alunos como construtores desse conhecimento.		
Um processo triplo	Ensino-Aprendizagem-Avaliação É um ser todo maior. É maior [do] que o ensino, [do] que a aprendizagem, [do] que a avaliação, tendo a avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem. O professor avalia o crescimento dos alunos. Os alunos fazem também sua avaliação destinada a guiar e a aumentar sua aprendizagem.		

Fonte: Huanca (2006, p. 44)

Ao adotar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas o professor deve ter clareza de que a tradicional avaliação escrita não deve ser a única forma de avaliar o estudante. Melo e Huanca (2012) dizem que conforme o objetivo do docente, estando em concordância com o plano de ensino, para avaliar o estudante o professor pode empregar “trabalhos em grupos e individuais, provas orais e escritas, seminários, observações de cadernos, realização de problemas em sala ou em casa e observações dos alunos em classe” (p. 11). Dentre as diversas formas que pode ser consideradas, numa aula cuja abordagem metodológica seja ensinar através da resolução de problemas e que use o roteiro do GTERP ou alguma de suas possíveis variações, o ápice do momento de avaliação ocorre nas etapas da “plenária” e da “busca do bom senso”, pois cada participante pode tanto se auto avaliar como avaliar os seus pares. O estudante se auto avalia no momento em que compara a estratégia de resolução sua e/ou do seu grupo, tanto ensina quanto aprende ao argumentar sobre as crenças que levaram a seguir determinado caminho e chegar as suas devidas conclusões. Além disso, pela prática docente, sabemos que o professor também aprende muito com seus estudantes se souber lhes ouvir, pois quando eles expõem suas ideias, podem não ser os habituais caminhos que uma pessoa mais experiente (como o professor) usaria. Em outras palavras, os estudantes são mais criativos por não terem certos vícios na forma de estruturar e de pensar matematicamente. No processo de ouvir, além do docente aprender, simultaneamente avalia se tem fundamento a ideia e, caso identifique erros, por meio de questionamentos, pode induzir o aluno a pensar se o que fizeram realmente tem sentido bem como pode apontar algum caminho aos grupos que estejam "perdidos".

O diagrama ilustrado na Figura 14, apresentado por Van de Walle (2001) referido por Huanca (2006), resume os quatro elementos básicos que um professor deve considerar para que o ensino de matemática seja eficiente:

> 1. Uma apreciação da disciplina Matemática - o que significa 'fazer Matemática';
> 2. Uma compreensão de como os estudantes aprendem e constroem idéias;
> 3. Uma habilidade em projetar e selecionar tarefas, de modo que os estudantes aprendam Matemática num ambiente de resolução de problemas;
> 4. A habilidade de integrar a avaliação com o processo de ensino para intensificar aaprendizagem e melhorar seu ensino, diariamente. (Huanca, 2006, pp. 39 – 40)

Pela Figura 14, entendemos que um ensino eficiente de Matemática pode ocorrer quando as preocupações com o ensino, a aprendizagem e avaliação são desenvolvidas de forma integrada, possibilitando ao estudante "fazer matemática", ou seja, construir os conceitos com base em conhecimentos que traz consigo. Por fim, o ensino eficiente de matemática é resultado da interseção desses quatro elementos. Nesse contexto, entendemos que a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas reúne esses quatro elementos, por isso pode ser uma abordagem interessante para se inserir, ou melhor, pôr em prática nos cursos de graduação. Em particular, na disciplina de *Cálculo* que é o objeto de interesse dessa pesquisa.

Andrade e Onuchic (2017) fazem uma retrospectiva sobre todos os trabalhos de mestrado e doutorado que foram desenvolvidos por membros do GTERP durante os 25 anos de existência do grupo. Ao todo foram 17 dissertações de mestrado concluídas e três em andamento e, 11 teses de doutorado defendidas e quatro em andamento. As produções concluídas do GTERP estão catalogadas na Tabela 21[64]. Mesmo antes de ter todos esses trabalhos desenvolvidos e/ou concluídos no ano de 2011, Onuchic e Allevato (2011) concluíam que

> o que temos chamado Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, destacou-se à nossa atenção o fato de que esta forma de trabalho por nós desenvolvida e pesquisada, em sala de aula de Matemática, poderia ser considerada, mais do que uma metodologia, uma forma de Filosofia de Educação Matemática, dado seu alcance ao trabalho de alunos, professores, ensino, aprendizagem, avaliação, trabalho cooperativo e colaborativo, trabalho do professor em sala de aula; reflexão na ação e sobre a ação. A Resolução de Problemas, como praticada

[64] A catalogação tomou como referência o artigo de Andrade e Onuchic (2017).

por esse grupo, tem matiz filosófico aliado às filosofias contemporâneas da Educação Matemática. (p. 85)

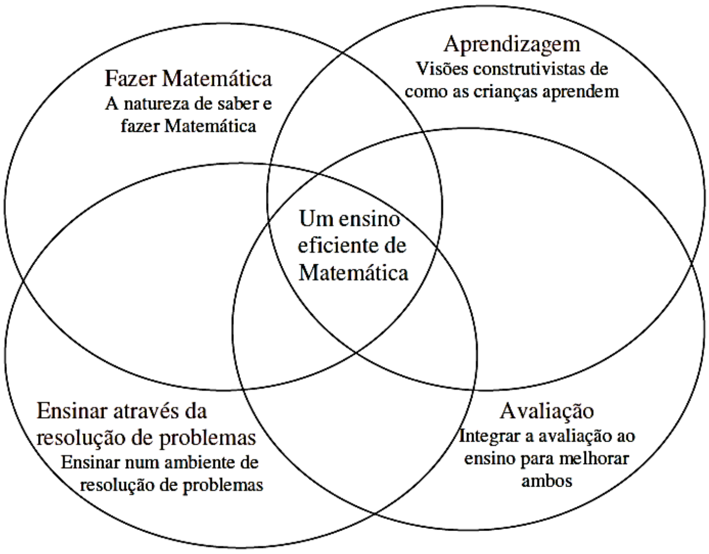


Figura 14 - Elementos básicos para tornar o ensino de Matemática eficiente.
Fonte: Huanca (2006, p. 40)

Essas autoras argumentam que como os objetivos das pesquisas desenvolvidas no grupo têm por intuito desenvolver investigações que de facto sejam aplicáveis nos ambientes escolares levando em consideração as atividades tanto do discente quanto do docente, "buscando aprofundar conhecimentos e melhor compreender a dinâmica e as implicações do Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas no trabalho com Matemática" (Onuchic & Allevato, 2011, p. 86), então esse movimento de ação/reflexão/ação sobre as atividades desenvolvidas converge com as concepções filosóficas de Bicudo (2010[65]) e de Garnica (2003[66]) como referido por Salles (2006[67]). Portanto, percebe-se uma contínua evolução do entendimento acerca da Resolução de Problemas.

Nessa seção fizemos um apanhado histórico da Resolução de Problemas nas pesquisas e no âmbito escolar buscando evidenciar a sua evolução na Educação Matemática, no Brasil, ao longo desses anos. Na próxima seção abordaremos "como", "em qual momento" e "se aparece" a Resolução de Problemas nos PPC's dos Cursos de Graduação que tiveram participantes nessa pesquisa de doutoramento.

[65] Bicudo, M. A. V. (2010). Filosofia da Educação Matemática segundo uma Perspectiva Fenomenológica. In: Bicudo, M. A. V. (Org). *Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas.* São Paulo: Editora UNESP, 2010. p. 23-47.
[66] Referência bibliográfica não encontrada.
[67] Salles, S. Reflexões sobre Educação Matemática numa Perspectiva Filosófica. In: Meneghetti, R. C. G. (Org). *Educação Matemática: vivências refletidas.* São Paulo: Centauro, 2006. p. 57-78.

3.9. Resolução de problemas nos Projetos Políticos Pedagógicos dos Cursos

Desde a publicação da *An Agenda for Action* do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), no ano de 1980, se recomenda que a resolução de problemas deveria ser "foco da matemática escolar" e diversos documentos oficiais passaram (e continuam) a indicar a RP como sendo uma estratégia de ensino a ser considerada nos currículos escolares (Brasil, 2000, 2006, 2017;MEC, 2013; ME-DGIDC, 2007).

Documentos oficiais, tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (Brasil, 1998), tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio (Brasil, 2002), orientam o professor a utilizar problemas para conduzir a formação dos conceitos antes de introduzir a linguagem matemática em sala de aula. A BNCC (Brasil, 2017) é o documento mais atual que estabelece competências e habilidades esperadas de um estudante de nível básico, dentre elas estão a formulação e a resolução de problemas. Na percepção de Morais, Onuchic e Leal Jr (2017), na BNCC a resolução de problemas é entendida como uma

> prática comum na sala de aula de matemática, a via por meio da qual os estudantes irão aprender matemática, formar o pensamento matemático, tornarem-se investigativos, críticos, não só no que compete à sala de aula de matemática, mas à vida" (p. 408).

Esses autores ainda salientam que nas pesquisas a resolução de problemas tem sido indicada "como um recurso didático (...) e não como um saber, como uma Matemática para ensinar (pp. 426 – 427). E ainda, em consonância com os PCN's e a BNCC, que são diretrizes educacionais brasileiras, Morais, Onuchic e Leal Jr (2017) percebem que "a resolução de problemas participa de sua constituição de forma direta e explícita, a qual desponta como uma Matemática *para* ensinar, um saber da docência, um saber que se deve constar nas etapas iniciais da formação de professores" (p. 427). Corroboramos com esses autores de que a resolução de problemas deve estar presente nos cursos de graduação, principalmente, nos cursos de Licenciatura que são os responsáveis por formar os futuros professores. Esse pensamento se justifica pelo facto de que os egressos das Licenciaturas, que exercerem a profissão na área de formação escolhida, atuarão tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio e, em suas aulas, deverão atender essas diretrizes. Para tanto, espera-se que o curso universitário tenha lhes proporcionado essas vivências. Caso contrário, mesmo assim será possível cumprir tais exigências, mas dispenderá mais esforço.

O público dessa pesquisa de doutoramento eram estudantes do primeiro curso de Cálculo Diferencial e Integral das turmas das Licenciaturas em Matemática e em Química. Entretanto, como essas classes possuíam também estudantes das Engenharias e da Computação, optamos por analisar os Projetos Políticos Pedagógicos de todos Cursos envolvidos. Estudando os PPC's intencionamos averiguar se esses estudantes terem contato com a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas estaria atendendo aos interesses dos seus respectivos Cursos. Essa investigação nos revelou que os oito Cursos de graduação envolvidos se referem em pelo menos um item de seu PPC à expressão resolver problemas e/ou resolução de problemas e/ou formulação de problemas, como pode ser observado na Tabela 19. Essa constatação já era esperada, pois os PPC's precisam atender às suas respectivas Diretrizes Curriculares Nacionais e, nestas, já havia menção a resolução de problemas. Como exemplos, consideremos a Resolução CNE/CES 11 que institui as *Diretrizes dos Cursos de Engenharia*, e Resolução CNE/CP N° 1 referente às *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena*, esses documentos apontam que dentre as competências e habilidades dos egressos espera-se que, respectivamente, que o engenheiro seja capaz de "(...) V - identificar, formular e resolver problemas de engenharia" (BRASIL, 2002a, p. 1) e que, nos cursos de Licenciatura, "a aprendizagem deverá ser orientada pelo princípio metodológico geral, que pode ser traduzido pela ação-reflexão-ação e que aponta a resolução de situações-problema como uma das estratégias didáticas privilegiadas" (BRASIL, 2002b, p. 2). Com relação aos cursos de Licenciatura, o Ministério da Educação brasileiro divulgou uma nova resolução (Resolução N° 2, de 1º de julho de 2015) que define as *Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada* e, neste documento a resolução de problemas é indicada como uma das abordagens pedagógicas a ser considerada:

> IV - às dinâmicas pedagógicas que contribuam para o exercício profissional e o desenvolvimento do profissional do magistério por meio de visão ampla do processo formativo, seus diferentes ritmos, tempos e espaços, em face das dimensões psicossociais, histórico-culturais, afetivas, relacionais e interativas que permeiam a ação pedagógica, possibilitando as condições para o exercício do pensamento crítico, a resolução de problemas, o trabalho coletivo e interdisciplinar, a criatividade, a inovação, a liderança e a autonomia (BRASIL, 2015, p. 6).

Atualmente, na UDESC/Joinville, as Licenciaturas estão reestruturando seus respectivos cursos a fim de atender às novas orientações do Ministério da Educação.

Tabela 19

Resolução de problemas nos PPC's

	CIV	ELE	MEC	EPS	FIS	QUI	MAT	BCC
Objetivo geral	X	X						
Objetivo específico				X			X	X
Perfil profissional		X	X	X	X			X
Campo de atuação profissional								X
Princípios que norteiam a formação profissional	X		X			X		
Competências e habilidades exigidas		X		X				
O Curso e suas finalidades				X				
Estrutura Curricular Proposta				X				

Legenda: CIV – Engenharia Civil; ELE – Engenharia Elétrica; MEC – Engenharia Mecânica; EPS – Engenharia de Produção e Sistemas; FIS – Licenciatura em Física; QUI – Licenciatura em Química; MAT – Licenciatura em Matemática; BCC – Bacharelado em Ciência da Computação.

Fonte: Adaptado de Silva, Figueiredo e Azevedo, 2018.

Apesar de termos constatado que em todos os Cursos existe referência a resolução de problemas, percebemos que somente os cursos de Licenciatura em Química e Licenciatura em Matemática revelam caráter pedagógico. O primeiro destes cursos, ao apresentar os princípios que norteiam a formação profissional deseja "buscar uma formação ampla e multidisciplinar fundamentada em sólidos conhecimentos de Química, que lhe possibilite (...) exercitar sua criatividade na resolução de problemas (...)" (UDESC, 2007b, p. 18). O segundo Curso tem por objetivo específico "aperfeiçoar sua capacidade de modelar e resolver problemas" (UDESC, 2005, p. 8). Entendemos também que esse objetivo específico do curso de Licenciatura em Matemática apresenta-se de forma muito genérica, permitindo interpretar que essa capacidade de resolver problemas esteja relacionada com problemas gerais que serão encontrados nas futuras práticas profissionais, como fica evidente no PPC dos demais cursos. Para evidenciar essa generalidade no entendimento acerca da resolução de problemas citamos como exemplo o que o Curso de Engenharia de Produção e Sistemas almeja com a estrutura curricular proposta:

> O núcleo de conteúdos profissionalizantes do Curso está estruturado visando uma formação profissional geral, versando sobre um conjunto coerente de tópicos estabelecidos nas diretrizes curriculares e desdobrados numa série de disciplinas que buscam estimular uma atuação crítica e criativa na identificação e resolução de problemas, considerando aspectos econômicos, sociais, ambientais, políticos e culturais dentro de uma visão ética e humanística. (UDESC, 2002, p. 26).

Outro exemplo, podemos considerar o objetivo do curso de Engenharia Civil: "formar profissionais capazes de oferecer soluções competentes e eficazes aos problemas identificados em diversas áreas [da Engenharia Civil] (...)". (UDESC, 2007a, p. 3). Em ambos exemplos supracitados, a expressão resolução de problemas não é usada no sentido de abordagem metodológica. O detalhamento de em que momentos os PPCs, dos oito Cursos analisados, fazem menção a resolução de problemas está disponível no Anexo 1.

Por fim, após abordarmos questões relacionadas com a Resolução de Problemas focadas nos PPC's dos Cursos a que pertenciam os participantes dessa pesquisa, buscaremos evidenciar como se percebe a evolução da Resolução de Problemas a partir dos estudos e pesquisas apresentados no *International Congress on Mathematical Education*.

3.10. A evolução da Resolução de Problemas a partir dos ICME's

O *International Congress on Mathematical Education* (ICME[68]) é um evento quadrienal realizado sob os auspícios do *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI[69]). O ICME é um dos eventos mais importante de Educação Matemática e tem por objetivo apresentar os estados atuais e as tendências na pesquisa em Educação Matemática e na prática do ensino de Matemática em todos os níveis. Por isso, investigar os temas abordados nesse evento ao longo de toda sua existência pode ajudar a compreender melhor como se desenvolveram as pesquisas em diversas linhas temáticas, dentre elas, a Resolução de Problemas. Uma pesquisa de Morais (2015) consistiu em traçar o panorama da Resolução de Problemas a partir do ICME. Essa seção relatará essa trajetória da pesquisa sobre a Resolução de Problemas sob a perspectiva dessa investigadora.

Em seu trabalho de doutoramento, Morais (2015) almejava investigar "como se deu o processo de inclusão da Resolução de Problemas, como uma temática da pesquisa em Educação Matemática, a partir de documentos" (p. 414). Essa autora acreditava que conseguiria teria uma possível resposta a esse questionamento ao analisar apenas os documentos referentes aos dois primeiros ICME's. À medida que Morais imergiu em seus estudos a questão norteadora de seu trabalho passou a ser: "Como se dá o processo constitutivo da Resolução de Problemas como uma temática da pesquisa em Educação Matemática a partir de documentos produzidos nos ICME's?". Na sua busca por inventariar a trajetória do RP nos ICME's, fez um estudo aprofundado de diversos materiais publicados na forma de *proceedings*,

[68] https://www.mathunion.org/icmi/conferences/icme-international-congress-mathematical-education

[69] O ICMI é uma organização criada em 1908 com o objetivo de fazer um estudo comparativo sobre os métodos e planos de ensino de matemática em escolas secundárias que, ao longo do tempo passou a discutir assuntos relacionados com a educação e o ensino em todos os níveis de ensino. Mais informações disponíveis no endereço eletrônico: https://www.mathunion.org/icmi/organization/historical-sketch-icmi. Acesso em 19 jul 2018.

livros de resumos de comunicações curtas e pôsteres, livros de resumo de relatórios de pesquisa, livros de palestras selecionais, CD-ROM e divulgação em sítios eletrônicos. A análise documental dessa autora compreendeu ao período de 1969 até 2008. Muitas dessas fontes foram cedidas à pesquisadora a partir de acervos pessoais. Como o evento é quadrienal[70], Morais se aprofundou nas publicações de onze ICME's. Na época da pesquisa já havia ocorrido a décima segunda edição do evento, entretanto a pesquisadora relata que a previsão de divulgação dos *proceedings* do ICME XII era o ano de 2014, que correspondia a fase final de elaboração da referida tese. Com seus estudos, Morais identificou quatro fases da RP nos ICME's, conforme apresentadas na Tabela 20.

Tabela 20
Fases da RP identificado nos ICME's

Fase	ICME	Ano	
1	I	1969	A RP não é tema de discussão de palestras e de sessões plenárias
2	II	1972	A RP imerge nos ICMEs como um dos temas de discussão das sessões plenárias do ICME-II
3	III IV V	1976 1980 1984	Foco no ensino e aprendizagem de Matemática com RP
4	VI VII VIII IX X XI	1988 1992 1996 2000 2004 2008	A RP é incorporada ao currículo de Matemática de alguns países

Fonte: Morais, 2015.

Pelos dados da Tabela 20, de acordo com os documentos que Morais (2015) analisou, percebemos que o tema RP imergiu no ICME em sua segunda edição Fase 2. Entretanto, Liljedahl, Santos-Trigo, Malaspina e Bruder (2016), na introdução do documento preparatório para o trabalho do grupo, intitulado *Problem Solving in Mathematics Education*, afirmam que a temática resolução de problemas matemáticos esteve em todas as conferências da ICME desde a sua primeira edição. No ICME II, Polya foi convidado para proferir uma palestra em virtude das importantes contribuições que este matemático húngaro deu à área de Educação Matemática com a publicação das obras "*How to solve it*, *Mathematics and Plausible Reasoning* e *Mathematical Discovery*, assim como por outras pesquisas que

[70] Com exceção, o ICME II foi realizado três anos após o ICME I.

se propuseram a ajudar a explicar o processo central da Matemática – o de resolver problemas" (Morais, 2015, p. 87). Essa autora acredita que Polya foi indicado porque a RP precisava ser melhor compreendida e esta área era objeto de sua pesquisa há alguns anos, e ainda, destaca que possivelmente seus trabalhos ganharam mais visibilidade porque foram publicados na língua inglesa, que a partir do ICME III, foi considerada a língua "oficial" do evento. Na fase 3, Morais identifica cinco aspectos a respeito da RP ao longo de três edições do ICME:

1. *Incipiente* – busca por um melhor entendimento de como colocar em prática a RP nas aulas de Matemática.
2. *Continuidade* – o foco das pesquisas divulgadas permaneceu relacionado com o ambiente escolar na tentativa de melhor compreender como inserir nas aulas uma abordagem de forma eficiente.
3. *Dissolução em outras áreas* – pesquisas evidenciam proximidade da RP com a Modelagem Matemática e a tecnologia de informação. Ademais, na busca da compreensão de componentes primordiais que influenciam no bom êxito na resolução de problemas, recorreu-se à Psicologia da Aprendizagem e à Ciência Cognitiva para melhor compreender.
4. *Reafirmação* – apesar de poucas pesquisas estarem efetivamente atingindo a sala de aula, muito material sobre RP estava sendo produzido, porém, muitos eram baseados na intuição dos pesquisadores. Esses motivos podem justificar a necessidade sentida em entender como os estudantes pensam, para contribuir de forma mais satisfatória com a sua aprendizagem além de desenvolver formas de avaliá-los.
5. *"novas" concepções* – houve um alargamento no entendimento da expressão Resolução de problemas com o surgimento de novos atendimentos do tema à luz de teorias metacognitivas, com a percepção de problemas similares, a formulação ou proposição de problemas e a *Open-Ended Approach*[71].

Na fase 4, exceto o aspecto incipiente, os demais se mantiveram nos demais eventos. Além desses, imergiram mais dois aspectos que estão diretamente relacionados: RP e currículo; e, maturidade da pesquisa. No ICME VIII foi criado um grupo de trabalho específico para debater a resolução de problemas e o currículo e, nesse grupo, foram abordados aspectos de como os

[71] A metodologia *Open-Ended Approach* entende "que o ensino de Matemática deveria ser trabalhado a partir de problemas matemáticos, formulados para terem múltiplas respostas corretas "incompletas" ou "com fim aberto"." (Morais, 2015, p. 373)

programas de Matemática dessem atenção adequada à Resolução de Problemas e sobre quais os desafios enfrentados ao projetar e administrar avaliações apropriadas de Resolução de Problemas; os requisitos especiais de Resolução de Problemas na formação de professores; as possibilidades de um currículo de matemática inovador; e o que a pesquisa revelou sobre fatores psicológicos e sociais que são relevantes para a Resolução de Problemas. Somente uma pesquisa madura sobre um determinado tema, no caso Resolução de Problemas, possibilita sua inserção no currículo. (Morais, 2015, pp. 407 – 408)

De acordo com as percepções de Morais, a inserção da RP no currículo escolar é concebível após a pesquisa na área estar consolidada. E, essa maturidade na pesquisa permitiu que países como Japão, Singapura, Inglaterra e Austrália a implantassem em seus currículos.

Por fim, após termos a visão panorâmica da Resolução de Problemas a partir do olhar de Morais (2015), até o décimo primeiro ICME, na próxima seção focaremos nas pesquisas nos trabalhos acadêmicos que vêm sendo desenvolvidas no Brasil cuja temática é a Resolução de Problemas.

3.11. Um levantamento das pesquisas em Resolução de Problemas no âmbito de trabalhos acadêmicos

No livro intitulado *Perspectivas para Resolução de Problemas* lançado em novembro de 2017, cujos organizadores foram Lourdes de Le Rosa Onuchic, Luis Carlos Leal Junior e Márcio Pironel, há dois capítulos que apresentam um estado da arte nas pesquisas brasileiras de Resolução de Problemas, que são os artigos de Andrade e Onuchic (2017) e Ferreira, Silva e Martins (2017). O primeiro desses artigos apresenta um breve resumo de todos os trabalhos que foram desenvolvidos pelo GTERP, que no âmbito de Brasil é o grupo de pesquisa mais atuante nessa temática, ao longo de seus 25 anos de existência. Ao todo foram desenvolvidas 28 pesquisas acadêmicas, sendo 17 em nível de mestrado e 11[72] em nível de doutorado. Além dessas pesquisas, naquela época havia em andamento três trabalhos de mestrado e quatro de doutorado. A Tabela 21 apresenta todas essas pesquisas concluídas, conforme Andrade e Onuchic (2017).

Tabela 21

Teses e dissertações produzidas por membros do GTERP no período de 1992 e 2015

Nível	Autor	Título do trabalho	Ano
Mestrado	Valdir Rodrigues	Resolução de Problemas como estratégia para incentivar e desenvolver a criatividade dos alunos na prática educativa de matemática	1992

[72] O artigo fala de onze pesquisas de doutorado concluídas, mas elenca dez.

Carlos Roberto dos Santos	As influências da linguagem e da comunicação no ensino-aprendizagem da matemática	1995
Luciene Souto Botta	Números racionais e raciocínio proporcional: considerações sobre o ensino-aprendizagem	1997
Silvanio de Andrade	Ensino-Aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula	1998
Lívia Lopes Azevedo	Uma proposta de mudança, na Licenciatura em Matemática do ICLMA, apoiada na metodologia de "ensino de matemática via resolução de problemas"	1998
Flávia Sueli Fabiani	Números complexos via resolução de problemas	1998
Maria Lúcia Boero	A introdução da disciplina "Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas" no Curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências Biológicas, Exatas e Experimentais da Universidade Presbiteriana Mackenzie	1999
Márcio Pironel	A Avaliação integrada no processo de ensino-aprendizagem da Matemática	2002
Elizabeth Quirino de Azevedo	Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas	2002
Wagner José Bolzan	A matemática nos cursos profissionalizantes de Mecânica	2003
Mariângela Pereira	O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas no 3º ciclo do Ensino Fundamental	2004
Roger Rubens Huaman Huanca	A Resolução de Problemas no Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática além da Sala de Aula	2006
Paulo Henrique Hermínio	Matemática financeira – um enfoque da resolução de problemas como metodologia de ensino e aprendizagem	2008
Marcos Vinícius Ribeiro	O Ensino do Conceito de Integral, em Sala de Aula, com recursos de História da Matemática e da Resolução de Problemas	2010
Analucia Castro Pimenta de Souza	Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas	2010
Eliane Saliba Botta	O ensino do conceito de função e conceitos relacionados a partir da resolução de problemas	2010

	Tatiane da Cunha Puti	A Produção de Significado durante o Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Equações polinomiais	2011
Doutorado	Leonardo Paulovich	Conceitos algébricos iniciais: um estudo sobre sua formação nos anos de escolaridade	1998
	Walter Paulette	Novo enfoque da disciplina Matemática e suas Aplicações, no Curso de Administração de Empresas da Universidade Paulista	2003
	Norma Suely Gomes Allevato	Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência	2005
	Célia Barros Nunes	O Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática	2010
	Fernanda dos Santos Menino	Resolução de Problemas no Cenário da Matemática Discreta	2013
	Elizabeth Quirino de Azevedo	O processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas no contexto da Formação inicial do Professor de Matemática	2014
	Roger Ruben Huaman Huanca	A Resolução de Problemas e a Modelização Matemática no Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação: uma contribuição para a Formação Continuada do Professor de Matemática	2014
	Fabiane Cristina Höper Noguti	Um curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas para alunos ingressantes da Universidade Federal do Pampa – Campus Alegrete	2014
	Andresa Maria Justulin	A formação de professores de Matemática no contexto da Resolução de Problemas	2014
	Rosilda dos Santos Morais	O processo constitutivo da Resolução de Problemas como uma temática de pesquisa em Educação Matemática – Um inventário a partir de documentos dos ICMEs	2015

Fonte: Produção da autora.

Ferreira, Silva e Martins (2017) apresentam um mapeamento mais refinado, de acordo com nossos interesses, sobre as pesquisas em Resolução de Problemas desenvolvidas no GTERP e no GPEAEM[73]. Esses autores classificam as pesquisas em Resolução de Problemas relacionadas com o nível superior em duas categorias: as voltadas para a formação inicial de professores de Matemática, ou seja, as que foram desenvolvidas nos cursos de Licenciatura; e, as pesquisas desenvolvidas em outros cursos

[73] O GPEAEM - Grupo de Pesquisas e Estudos Avançados em Educação Matemática, da Universidade Cruzeiro do Sul, é coordenado pela professora Norma Sueli Gomes Allevato.

da área de Ciências Exatas, isto é, investigações realizadas em cursos de Engenharias, Computação, dentre outros. Em nossa pesquisa, ambas categorias apresentadas por esses autores nos interessavam por termos desenvolvido a pesquisa com alunos dos cursos de Licenciaturas, Engenharias e Computação. Os autores ainda apresentam duas subcategorias para essas categorias, quanto à abordagem dos conteúdos nessas investigações, ou seja, interessava saberem se os assuntos abordados eram integrantes dos conteúdos do Ensino Básico (conteúdos de Matemática do Ensino Fundamental ou Médio) ou do Ensino Superior (conteúdos de Cálculo Diferenciais e Integral, Álgebra Linear, Equações Diferencias, dentre outros). A Tabela 22 apresenta o enquadramento das pesquisas do GTERP e do GPEAEM conforme essas categorias e abordagens predefinidas.

Tabela 22
Pesquisas do utilizam a Resolução de Problemas no Ensino Superior

Conteúdos de Matemática do...	Cursos de graduação em que a pesquisa foi desenvolvida	
	Licenciatura em Matemática	Outros Cursos
Ensino Básico	Azevedo (1998) Boero (1999) Costa (2012) Nunes (2010) Azevedo (2014)	Allevato (2005) Bastos (2013) Noguti (2014)
Ensino Superior	Ferreira (2017)	Paulette (2003) Ribeiro (2010) Abdelmalack (2011) Rossi (2012)

Fonte: Adaptado de Ferreira, Silva e Martins, 2017, p. 192.

Das 13 pesquisas apontadas na Tabela 22, nove foram desenvolvidas no GTERP e quatro no GPEAEM (Abdelmalack, 2011; Bastos, 2013; Costa, 2012; Rossi, 2012). As pesquisas classificadas com abordagem de Ensino Básico, apesar de estarem sendo desenvolvidas no Ensino Superior, exceto nas Licenciatura em Matemática, todas foram realizadas em uma disciplina que abordava conteúdos de Matemática Elementar, com exceção da pesquisa de Bastos (2013), que foi desenvolvida na disciplina de Física – Física Elétrica. Geralmente, os cursos que oferecem disciplinas com essas características almejam "sanar deficiências na aprendizagem desses conteúdos ocorridas durante a Educação Básica[74] ou revisar e fortalecer a aprendizagem dos alunos" (Ferreira, Silva e Martins, 2017, p. 193). Esses

[74] No Brasil, a expressão Educação Básica tem o mesmo sentido de Ensino Básico.

autores acreditam que ofertar uma disciplina com essa finalidade e continuar adotando os meios tradicionais de ensino, ou seja, continuar dando a mesma abordagem que os estudantes já tiveram no ensino anterior à Universidade não estaria contribuindo muito para a formação do discente. Por isso, creem que adotar por metodologia de ensino a Resolução de Problemas, pode contribuir positivamente para a "recuperação" de tais conteúdos.

Dentre as pesquisas enquadradas na abordagem de conteúdos da Educação Básica, destacamos duas (Allevato, 2005; Noguti, 2014) que mais contribuíram para o aprendizado dessa investigador tanto para organização de um trabalho de pesquisa quanto para "aprender a pôr em prática" a metodologia de Resolução de Problemas.

Allevato (2005) teve por objetivo analisar de que forma os alunos relacionam o que fazem na sala de aula, quando utilizam lápis e papel, com o que fazem utilizando o computador na resolução de problemas fechados sobre funções utilizando o software WinPlot. A pesquisa foi desenvolvida com uma turma do segundo semestre do curso de Administração de Empresas e a abordagem metodológica adotada pelo professor era a de ensino-aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas. Essa investigação teve cunho qualitativo e contou com a observação participante da pesquisadora. Para coleta de evidências foram utilizadas gravações em áudio do diálogo entre a pesquisadora e os estudantes, além de entrevista com o docente da turma, documentos escritos (trabalhos e avaliações escritas) produzidos pelos alunos e registros no diário de campo da pesquisadora. Essa pesquisa foi desenvolvida conforme o Modelo de Romberg, que consiste em orientar pesquisadores com menos experiência na condução da investigação. Para tanto, elenca dez etapas comuns às variadas pesquisas. No entendimento da pesquisadora, o uso do software possibilitou o preenchimento de algumas lacunas de conhecimento e propiciou o surgimento de problemas secundários. Além disso, também foi perceptível a dupla linguagem abordada devido às diferenças entre a linguagem do software e as representações matemáticas e essas diferenças devem ser confrontadas em sala de aula. Como dificuldades a pesquisadora apontou a preocupação do professor com o cumprimento do plano de ensino e, por isso, para evitar constrangimentos com o docente, a investigadora não pôde explorar os problemas realizados tanto quanto gostaria. Como sugestão de pesquisa futura, propunha desenvolver-se investigação similar com problemas abertos e/ou considerar um público com melhor formação de matemática básica.

Essa investigadora se identificou com a dificuldade, levantada por Allevato (2005), no tocante a preocupação do professor da disciplina com relação ao cumprimento do seu plano de ensino, pois fez parte de nossa vivência visto que a investigação foi inserida no cotidiano da sala de aula. Além disso, na pesquisa de Allevato a tecnologia foi aliada à metodologia de Resolução de Problemas. Na época em que foi desenvolvida a pesquisa se tratou de uma inovação, pois no Brasil a partir do ano 2000 é que os computadores passaram a se tornar mais populares. Apesar desta pesquisa ter sido realizada quase duas décadas depois, para essa investigadora inserir um software de geometria dinâmica em suas aulas, foi uma inovação. Por meio dessa experiência, ratificamos com Allevato as vantagens e dificuldades de usar em sala de aula a metodologia e a tecnologia. Atualmente, tem-se um grande diferencial do momento em que a pesquisa de Allevato foi desenvolvida. Antes era necessário ensinar os estudantes universitários a usarem o software nos *desktops* dos laboratórios da Universidade, atualmente o facto do professor usar algum software em suas aulas de Matemática permite ao aluno ter uma noção básica de como usá-lo e explorar por conta própria as ferramentas que precisa. Outra facilidade que se tem, é que o estudante pode ter em suas mãos facilmente essas ferramentas tecnológicas que podem facilitar seu aprendizado, pois há versões gratuitas de software, como o *GeoGebra*, na forma de aplicativo para celular (que quase todos os estudantes brasileiros do Ensino Superior tem em mãos e usam na sala de aula).

Noguti (2014) utilizou a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação para ministrar toda uma disciplina de Matemática Básica que fora oferecida no período de transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior. O público participante foi formado por um grupo de 40 alunos ingressantes na Universidade Federal do Pampa – Campus Alegrete pertencentes aos cursos de Engenharia Civil, Elétrica, Mecânica e de Telecomunicações. No semestre subsequente a esse Curso, a pesquisadora acompanhou o desempenho em Cálculo Diferencial e Integral de todos os participantes, pois buscava responder à seguinte questão de investigação: *Quais as contribuições de um Curso de Matemática Básica, utilizando-se da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, para auxiliar os alunos ingressantes, nas disciplinas de Matemática, em particular do Cálculo I, no Ensino Superior?* Noguti, assim como Allevato, também seguiu as orientações de Romberg para desenvolver sua pesquisa. Para coleta de dados usou avaliação diagnóstica, questionários respondidos pelos alunos, notas de caderno de campo, trabalhos produzidos pelos alunos, e gravações em vídeo dos encontros. A pesquisa foi qualitativa com dados quantitativos. Segundo a autora, o uso de uma abordagem metodológica diferenciada resultou em alunos mais participativos nas aulas e melhores resultados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. A pesquisa de Noguti evidencia que é possível ministrar toda uma disciplina usando a metodologia de Resolução de Problemas. Para tanto é necessário muito planejamento do professor, para que ele consiga gerir seu tempo de forma a atender as exigências da matriz curricular e, ao mesmo tempo, dar oportunidade dos estudantes trabalharem/discutirem em grupos, além de conjuntamente, para construírem seu conhecimento.

Com relação às pesquisas que utilizaram a Resolução de Problemas para abordar assuntos do Ensino Superior, elas ocorreram "dentro do ambiente de trabalho profissional dos pesquisadores, e os assuntos escolhidos para o desenvolvimento dos projetos partiram de conteúdos que os alunos tinham muita dificuldade em aprender" (Ferreira, Silva e Martins, 2017, p. 197). Dentre as cinco pesquisas com essa abordagem, duas possuem relação mais direta com nossos interesses, que são as pesquisas de Abdelmalack (2011) e de Ribeiro (2010), por abordarem assuntos de *Cálculo*. As pesquisas de Paulette (2003), Ferreira (2017) e Rossi (2012) trataram, respectivamente, de conteúdos da disciplina de Matemática do curso de Administração, Álgebra Moderna e Equações Diferenciais.

Ribeiro (2010) teve por objetivo construir os conceitos de integral simples e dupla em coordenadas retangulares. Para tanto preparou nove atividades para serem desenvolvidas. Estas atividades fizeram uso da História da Matemática e, por meio delas, os estudantes tiveram a oportunidade de rever os assuntos de função, limite, continuidade, derivada e integral. Os três primeiros assuntos já eram do conhecimento dos estudantes, mas haviam sido trabalhados de forma técnica. A pesquisa foi desenvolvida em quatro turmas da Faculdade de Engenharia de Sorocaba: uma da Engenharia Civil, duas da Engenharia Elétrica e uma da Computação. Ribeiro descreveu detalhadamente o percurso de sua pesquisa seguindo as orientações de Romberg. Esse pesquisador pôde constatar que o uso da História da Matemática permitiu aos estudantes uma melhor compreensão de como surgiram as ideias do *Cálculo* e possibilitou transpor esse conhecimento para as tarefas propostas. Com relação ao uso da metodologia de Resolução de Problemas para ensinar Matemática através de problemas, afirma que os alunos puderam "colocar-se no lugar dos desbravadores de novos conceitos de Matemática e do Cálculo e [sentirem a] tensão e o prazer na busca pela certa resposta de um problema, trabalhando com a autoestima" (Ribeiro, 2010, p. 306), percebendo-se assim um espírito investigativo e colaborativo na sala de aula.

Abdelmalack (2011) teve por objetivo averiguar como se realiza a aprendizagem de derivadas através da Resolução de Problemas. Essa pesquisadora trabalhou em horário extraclasse com seis estudantes, que voluntariamente aderiram à pesquisa, e trabalharam em duplas. Ao todo foram desenvolvidas seis atividades, em nove encontros, a fim de trabalhar com a interpretação cinemática ou mecânica da derivada (velocidade/taxa de variação média) e geométrica da derivada, além de propriedades de derivadas, regras de derivação, gráficos de função construídos a partir da derivada e otimização. Os participantes foram alunos de Engenharia que cursavam *Cálculo* e que ainda não tinham conhecimento sobre o assunto. A metodologia de pesquisa utilizada foi a qualitativa e, para coleta de dados, foi considerada a observação participante, registros escritos das atividades desenvolvidas pelos alunos, anotações no diário de campo e gravações em vídeo dos encontros. De acordo com a pesquisadora seus alunos se mostraram receptivos à abordagem metodológica adotada e participaram ativamente tanto na resolução dos problemas como no momento das plenárias. A pesquisadora reflete sobre sua prática e conclui que se tivesse inserido o uso de algum software poderia ter proporcionado maior exploração das atividades propostas o que auxiliaria na compreensão dos estudantes.

Nas pesquisas enquadradas na classificação de Ferreira, Silva e Leal Jr (2017) que estão apresentadas na Tabela 22, não aparece o trabalho de Pagani (2016), porque essa pesquisadora abordou o conteúdo de *Cálculo*, mas em nível de Ensino Médio. Apesar de não se tratar de pesquisa realizada no Ensino Superior, iremos considera-la, pois as descrições detalhadas da metodologia dessa tese, auxiliaram essa investigadora. Além disso, o contato virtual estabelecido com a pesquisadora ajudou a estabelecer estratégias de como poderia proceder em sala de aula no sentido de gerir o tempo a fim de cumprir o programa e atender as orientações para ensinar através da Resolução de Problemas.

Pagani (2016) investigou como a Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matmática através da Resolução de Problemas contribui para o desenvolvimento do trabalho com derivadas em sala de aula no curso técnico de Eletrônica. A pesquisa foi de cunho qualitativo e a pesquisadora foi observadora e participante. Como instrumentos de recolha de dados foram utilizados três questionários (o primeiro aplicado aos professores das disciplinas técnicas; o segundo, aos alunos de uma turma do 3º ano desse curso técnico na modalidade integrada; e, o terceiro, fora aplicado no final da coleta de dados à turma de alunos do 2º ano, cujas atividades foram desenvolvidas em sala de aula), diário de campo, gravações em áudio e vídeo, registros dos alunos. A pesquisadora assumiu o papel de professora da turma para trabalhar o conteúdo de derivadas abordando os seguintes assuntos: taxa de variação média e instantânea, retas secante e tangente, regras de derivação, (de)crescimento de função, máximos e mínimos locais, regra da cadeia e problemas de otimização. As funções consideradas nas atividades propostas foram as funções constante, afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica e as funções trigonométricas, que são as mais utilizadas nas aplicações do curso de Eletrônica. Pagani, para desenvolver as tarefas propostas aos estudantes, adaptou as atividades desenvolvidas por Abdelmalack (2011) e, em sua pesquisa, integrou o uso de tecnologia (Winplot), como sugerido por Abdelmalack. Um diferencial entre essas pesquisas é que Pagani trabalhou com uma turma de 34 alunos em horário regular de aula. Na pesquisa, Pagani observou que os alunos conseguiram relacionar o conteúdo de derivadas com as aplicações do curso, bem como a viabilidade de concretizar o ensino através da Resolução de Problemas para ensinar *Cálculo* no curso técnico. Além disso apresenta lacunas de pesquisa que podem orientar o desenvolvimento de trabalhos futuros. A autora sugere produção de material e reestruturação da grade curricular, levando em consideração essa metodologia. Também sugere mais pesquisas que aliem a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas ao uso de tecnologias e incentivar a Formação de Professores de Matemática.

A fim de verificar pesquisas em Resolução de Problemas, com o olhar seletivo para pesquisas voltadas para o Ensino Superior e, particularmente, o ensino de *Cálculo*, que não estavam relacionadas com o GTERP e o GPEAEM, realizamos uma pesquisa no banco de teses e dissertações da CAPES. Para tanto, consideramos por descritores, de forma simultânea, as seguintes expressões "ensino de cálculo diferencial" AND "resolução de problemas" AND "ensino superior". Nessa busca, não delimitamos o período desejado. Essa ferramenta de busca nos deu um retorno de 42 trabalhos, entre teses e dissertações. O refinamento desses dados iniciou pela leitura dos títulos. Os trabalhos que ficamos em dúvida se abordavam o tema de interesse, buscamos a leitura do resumo e palavras chaves. Nessa leitura preliminar foi identificado o uso da expressão Resolução de Problemas no sentido de buscar solução de problemas/exercícios (Barichello, 2008; Machado, 2008; Nogueira, 2016), não no contexto de metodologia de ensino que era nosso interesse. Após essa seleção, restaram somente quatro trabalhos, porém desses, um deles não foi encontrado em versão digital. Portanto, desconsiderando esse trabalho que não tivemos acesso, restaram três trabalhos que estão catalogados na Tabela 23. Observamos ainda que todas essas pesquisas já foram categorizadas no capítulo 2. E, dentre estas, a pesquisa de Ribeiro (2010) já fora discutida nessa seção. Logo, resta-nos falar um pouco mais da pesquisa de Vogado (2014) e de Cardoso da Silva (2015).

Tabela 23
Trabalhos acadêmicos que abordam RP, Ensino Superior e Cálculo

Autor	Titulo	Instituição	Nível	Ano
Cardoso da Silva, Janaína	Explorando significados sobre Cálculo de volumes por meio de Formulação e Resolução de Problemas por futuros professores	UEPB	MA	2015
Ribeiro, Marcos Vinicius	O Ensino do Conceito de Integral, em Sala de Aula, com recursos da História da Matemática e da Resolução de Problemas	UNESP-Rio Claro	MA	2010
Vogado, Gilberto Emanoel Reis	O Ensino e aprendizagem das ideias preliminares envolvidas no conceito de Integral por meio da Resolução de Problemas	PUC-SP	D	2014

A tese de Vogado (2014) teve por objetivo investigar o desempenho estratégico de 16 duplas de estudantes da Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará,

> frente a uma sequência de ensino que visa[va] ao processo de introdução ao conceito de Integral por meio da Resolução de Problemas, bem como identificar em suas estratégias de resolução, observando a predominância individual e/ou simultânea dos aspectos básicos das atividades matemáticas, segundo Fischbein, quais sejam: a intuição, o algoritmo e o formal (p. 138).

Para recolha de dados dessa pesquisa qualitativa foi usado o diário de campo do investigador, protocolos dos alunos resultantes dos atividades desenvolvidas, áudio e vídeo das aulas. Ao todo foram desenvolvidas sete sequências de ensino que desejavam construir gradativamente o conceito de integral. Ao longo dessas foi utilizado o software *GeoGebra* para dinamizar as aulas e proporcionar melhor compreensão do conceito de integral por meio da visualização. As conclusões do pesquisador corroboraram com a literatura de Resolução de Problemas de que os trabalhos em grupo geram um ambiente de mais discussões que auxiliam na construção do conhecimento e, ainda, que tecnologia aliada a essa metodologia pode trazer benefícios à aprendizagem. Com relação às discussões conjuntas, nas primeiras atividades a participação foi tímida, mas com o tempo se tornaram mais produtivas e os alunos mais confiantes. Pela leitura do texto entendemos que essa pesquisa foi desenvolvida em horários extraclasse, mas essa informação ficou subentendida.

Cardoso da Silva (2015), em seu trabalho de mestrado, investigou como o futuro professor de Matemática formula e resolve problemas matemáticos que envolvem o conteúdo de volumes a partir do aplicativo *GeoGebra* 3D, ou seja, está relacionado com o conteúdo de integral. A pesquisa, desenvolvida no Instituto Federal da Paraíba campus de Campo Grande, foi qualitativa e caracterizou-se pelo estudo de caso de três dos participantes. O critério de seleção dos casos a serem analisados foi o desempenho acadêmico designados ótimo, regular e ruim. Ressalta-se que os participantes da pesquisa já haviam cursado *Cálculo*. Para coleta de dados foram usadas a observação participante, gravações em áudio e registros das formulações e resoluções de problemas produzidos pelos estudantes. Ao todo foram propostas quatro situações problemas, que envolviam um cilindro, uma esfera, um cone e um paraboloide. As formulações e resoluções dos problemas foram realizadas de forma individual. Ao analisar esses dados, observou-se que os estudantes de desempenho acadêmico ótimo e regular formularam e resolveram as quatro situações problemas de forma satisfatória, sendo que o primeiro formulou problemas que evidenciam maior criatividade. O estudante de desempenho acadêmico ruim, mesmo diante de suas limitações atendeu parcialmente as expectativas da investigadora. Ele conseguiu resolver três das quatro situações problemas e, nas resoluções, usou a mesma estratégia em todas as formulações. Como dificuldade da pesquisa, Silva destaca o facto do aplicativo *GeoGebra* 3D funcionar somente quando há conexão de internet e, como pesquisas futuras, sugere investigar

> Como a interação professora aluno influencia na apreensão de um conteúdo no Nível Superior? De que modo o significado referencial influencia no desempenho de alunos numa disciplina de Cálculo em Nível Superior? Qual a relação entre as metodologias utilizadas em sala de aula e o índice de aprovação/reprovação na disciplina de Cálculo? (Cardoso da Silva, 2015, p. 138).

Pela análise desse trabalho, percebemos que não se trata do uso da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Resolução de Problemas, pois aqui a resolução de problemas foi uma atividade matemática. No texto, não há evidências de que houve um compartilhamento das soluções e discussão dessas com o grupo, o que poderia evidenciar o uso da metodologia de Resolução de Problemas. Apesar deste quesito que nos interessa não ter sido contemplado no trabalho de Cardoso da Silva (2015), essa pesquisa foi a única encontrada em nossa busca que abordou o tema de formulação de problemas.

Dentre as pesquisas aqui analisadas, percebemos que somente as pesquisas de Ribeiro (2010) e de Pagani (2016) usufruíram da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Resolução de Problemas na disciplina de *Cálculo* no ambiente de sala de aula. No entanto, Ribeiro não trabalhou num primeiro curso de *Cálculo* universitário e Pagani realizou sua pesquisa no Ensino Médio Técnico. Além disso percebemos que todas as pesquisas aqui citadas foram qualitativas e outro aspecto comum se refere aos instrumentos de recolha de dados que, geralmente, consistem das anotações no diário de campo do pesquisador, gravações em áudio e/ou vídeo, protocolos de resoluções dos participantes.

3.12. Síntese

Nesse capítulo discutimos o entendimento do que vem a ser problema, resolução e formulação de problemas, estratégias de resolução de problemas, orientações voltadas para o aluno (resolvedor de problemas) e para o professor de como fazer uso da resolução de problemas do ponto de vista de atividade e de metodologia, respectivamente. Dos roteiros desenvolvidos para auxiliar o professor no trabalho em sala de aula com a Resolução de Problemas, constatamos que somente o roteiro de atividades usado pelo grupo GTERP faz menção ao uso em todos os níveis de ensino. Os demais fazem referência ao ensino que antecede o universitário.

Apesar da Resolução de Problemas ter cerca de 73 anos de história, após a divulgação do trabalho de Polya, no âmbito da Educação Matemática, no Ensino Superior brasileiro esse ainda é um tema pouco explorado. Geralmente, em cursos de Licenciatura em Matemática ao abordar-se esse assunto, é trabalhado de forma teórica e como algum tópico das disciplinas pedagógicas. Ou seja, há poucas oportunidades dos futuros professores vivenciarem a Resolução de Problemas para sentirem os seus benefícios bem como perceberem possíveis limitações e terem conhecimento prático de mais uma abordagem metodológica que poderá ser adotada em suas práticas profissionais.

Os últimos aspectos abordados nesse capítulo estão relacionados com a evolução das pesquisas em Resolução de Problemas a partir dos ICME's e com a apresentação de estudos correlacionados com a temática de interesse desses pesquisadores. Por fim, essa revisão de estado do conhecimento sobre a temática de Resolução de Problemas como metodologia de ensino permite-nos ratificar a constatação de Ferreira, Silva e Martins (2017) de que há poucas pesquisas nessa linha desenvolvidas no Ensino Superior. Esses autores afirmam que "seria importante podermos contar com mais pesquisas nessa área [metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas] e fazer com que essas pesquisas cheguem à sala de aula como metodologia" (p. 216). Dessa forma, há evidências de que nossa pesquisa poderia gerar contribuições de interesse para a comunidade da Educação Matemática por se tratar de uma investigação realizada com alunos regularmente matriculados na disciplina de *Cálculo*, portanto, não houve critério de seleção dos participantes, e pela investigadora ser a própria professora da turma. Portanto, houve o desafio de conciliar as atividades de ensino por meio da Resolução de Problemas com a necessidade de cumprir o plano de ensino. Ademais, identificamos outros dois aspectos relevantes de nossa pesquisa. Um deles é por se tratar de uma metodologia de pesquisa mista, que usufruiu da análise estatística para auxiliar na interpretação dos dados, pois, como constatamos, muitas das pesquisas desenvolvidas na área de Resolução de Problemas são qualitativas. Outro diferencial de nossa pesquisa é por fazer uma tentativa de aliar a formulação de problemas com Resolução de Problemas na modalidade de um fórum de discussão na plataforma Moodle. Os detalhes dessas ações aqui mencionadas serão discutidos nos capítulos posteriores.

No próximo capítulo será apresentada toda a trajetória da pesquisa a que se refere este relatório final, apontando as opções metodológicas, as estratégias e técnicas de recolhas de dados que foram adotados.

CAPÍTULO 4

METODOLOGIA

A metodologia é a "explicação minuciosa, detalhada, rigorosa e exata de toda ação desenvolvida no método (caminho) do trabalho de pesquisa" (Kauark, Manhães & Medeiros, 2010, pp. 53 – 54). Em outras palavras, o capítulo referente à metodologia é o momento propício de apresentar todo o caminho trilhado ao longo de uma pesquisa, detalhando quais as opções metodológicas, estratégias, procedimentos de recolha e análise de dados que foram adotados na busca por respostas para a questão norteadora, o(s) objetivo(s) e as questões de investigação. Esse é o objetivo desse capítulo. Para tanto, iniciaremos apresentando a trajetória acadêmica e a concessão desse projeto de tese, a metodologia de pesquisa escolhida, as estratégias e procedimentos adotados para a concretização dessa pesquisa. Atendendo que em muito deste capítulo existe um percurso pessoal de construção gradual dos procedimentos, achou-se por bem usar a primeira pessoa nestes momentos.

4.1. Trajetória Acadêmica e escolha da Metodologia de Pesquisa

Ao ingressar no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa no ano de 1999, não conhecia a diferença entre um curso de Licenciatura e de Bacharelado. Escolhi o curso simplesmente por gostar de matemática e assim me tornei professora. Nunca tinha antes desejado ser professora, mas sou apaixonada pela profissão escolhida "acidentalmente". Os primeiros contatos que tive com pesquisa científica ocorreram na graduação, quando tive a oportunidade de ingressar como bolsista de iniciação científica (IC) em agosto do ano 2000. Por ter sido bolsista de IC por dois anos, desenvolvi o gosto pela pesquisa e, naturalmente, desejei continuar meus estudos. Assim que concluí a graduação no ano de 2002, ingressei no curso de mestrado em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. No ano de 2005, após ter finalizado o mestrado, ingressei como professora do Departamento de Matemática (DMAT) do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC/Joinville). Como o DMAT é responsável por ministrar as disciplinas do ciclo básico de todos os cursos de graduação da UDESC/Joinville, ao longo de uma década, ministrei diversas disciplinas de matemática para os variados Cursos. Entretanto, a disciplina com a que mais me identifiquei e que mais vezes ministrei foi a de Cálculo Diferencial e Integral I, a qual é considerada, por muitos estudantes, como difícil. A ela também estão associados elevados índices de reprovação e de desistência (Alvarenga, Dorr, & Vieira, 2016; Barufi, 1999; Ferreira *et al.*, 2016; Figueiredo *et al.,* 2014; Pagani, 2016; Rezende, 2003; Santos *et al.,* 2016; Serafim Filho, 2016; Wrobel, Zeferino & Carneiro, 2013).

Com a prática docente percebi uma lacuna na minha formação acadêmica, pois como mestre em Matemática Aplicada, minha formação sempre foi voltada para a área técnica da matemática, ou seja, sempre estive preocupada em ensinar o conteúdo pelo conteúdo. Assim sendo, as aulas que ministrava sempre foram do estilo expositivo dialogado. Em suma, uma réplica do estilo de ensino com o qual tive contato durante toda a minha trajetória acadêmica.

Em 2015, quando foi estabelecido o acordo entre a Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) e a Universidade do Minho (UMINHO) para capacitar a nível de doutoramento seus professores e técnicos, na área de Ciências da Educação, vi a oportunidade de preencher a lacuna existente em minha formação acadêmica. Para tanto, escrevi o projeto de tese voltado para especialidade da área de Educação Matemática, em que me propunha a experenciar uma mudança na minha prática de ensino na disciplina de *Cálculo*, por ser a minha preferida e saber que existe o problema de reprovação e o de evasão associados a ela. Com o projeto de tese aprovado no edital interno de seleção da UDESC e, posteriormente, com aprovação do mesmo no Comitê Científico da UMINHO, para desenvolver essa pesquisa na área de Educação era necessário buscar "subsídios à configuração e condução de um trabalho de investigação científica cuja consistência depende, também, dos recursos oferecidos pela Metodologia de Pesquisa e adotados pelo pesquisador" (Allevato, 2005, p. 17).

Na revisão de literatura para escrita do projeto de tese conheci o Método de Romberg (Romberg, 2007), que pode ser sintetizado em um fluxograma (ilustrado na Figura 15) constituído de dez atividades comuns à maioria dos Métodos de Pesquisa. Assim sendo, pode auxiliar pesquisadores inexperientes a conduzirem suas pesquisas. Como me enquadrava nessa situação, optei por adotá-lo na condução da pesquisa. Nesse modelo de Romberg, as quatro primeiras atividades iniciam-se no momento em que o pesquisador sente a necessidade de pesquisar algo, que é o momento em que tem origem o fenômeno de interesse. A quinta e sexta atividades estão relacionadas à tomada de decisão a respeito "do que" e "como fazer" para resolver o problema de pesquisa identificado. Baseado em resultados publicados de outros pesquisadores, o pesquisador elabora um plano de ação para sua pesquisa. Na sétima atividade o pesquisador procura elementos que garantam ou justifiquem suas condições. As demais atividades referem-se à interpretação das evidências junto ao fenômeno a ser investigado, no relato dos resultados antecipando ações de outros investigadores.

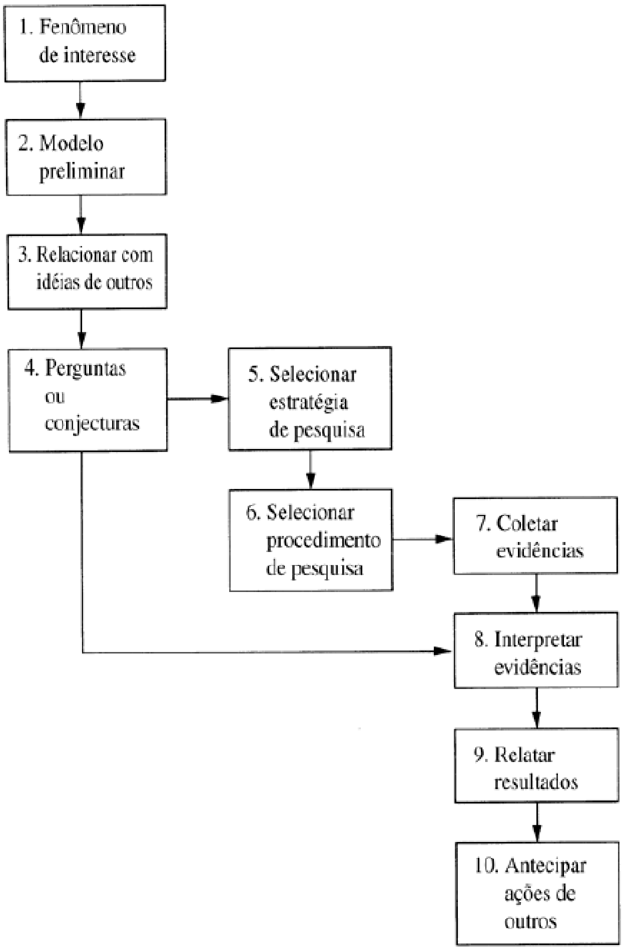


Figura 15 - Fluxograma do Método de Romberg.
Fonte: Romberg, 2007[75], p. 5

Na sequência desse texto detalharemos as etapas do modelo de Romberg aplicada a nossa pesquisa.

4.2. Fenômeno de interesse

Romberg (2007) afirma que "toda pesquisa começa com uma curiosidade sobre um fenômeno particular do mundo real" (p. 5). E, no ramo da Educação Matemática o fenômeno "tem origem no emaranhado de relações que compõem as questões relativas à Educação Matemática e que a constituem um campo de estudos extremamente fértil" (Allevato, 2005, p. 20). O fenômeno de interesse dessa pesquisa era

Ensinar o conteúdo de aplicações de derivadas através da Resolução de Problemas e das Investigações Matemáticas.

[75] Artigo original: Romberg, T. A. (1992). Perspectives on Schorlaship and Research Methods. In: Grouws, D. A. (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NCTM, New York: Simon&Schuster, pp. 49 – 64. Romberg (2007) é a tradução desse artigo feita por Onuchic, L. R. & Boero, M. L. que fora publicado na revista BOLEMA.

Em particular, essa pesquisadora tinha interesse em desenvolver o conteúdo de taxa relacionada, pois, por sua prática docente, percebia que esse era um dos tópicos que os estudantes apresentavam bastante dificuldade em interpretar e expressar matematicamente as informações dadas em problemas contextualizados.

4.3. Modelo preliminar

Para Romberg (2007), nessa etapa, o "pesquisador faz suposições sobre certos aspectos importantes como variáveis do fenômeno de interesse e de como estes aspectos estão relacionados, depois os ilustra em um modelo" (p. 6). Em outras palavras, o investigador estrutura o seu trabalho de pesquisa conforme suas concepções e crenças sobre o fenômeno que deseja estudar. Essa organização também servirá para guiar o pesquisador nos rumos de seu trabalho, mesmo sabendo que modificações/reestruturações ocorrerão ao longo da trajetória de pesquisa conforme o investigador imerge em seu trabalho.

Onuchic e Noguti (2014) afirmam que o modelo preliminar pode vir a ajudar o pesquisador a fazer a sua pergunta de pesquisa. Entretanto, no momento em que escrevi o projeto de tese me propondo a usar o Modelo de Romberg, não percebia como ele poderia me ajudar na investigação, não me era claro que primeiro deveria fazer um esboço apontando fenômeno de interesse e como o pretendia desenvolver na pesquisa. A partir da interpretação desse esquema poderia propor conjecturas que auxiliariam a formular a pergunta norteadora da pesquisa. Esse entendimento tive, quase um ano após ter iniciado a pesquisa, durante minha participação em um evento técnico-científico[76]. Nesse encontro o estudante tem oportunidade de discutir sua pesquisa em um grupo específico com a sua temática de interesse. Nos trabalhos do grupo específico de Resolução de Problemas tive contato com pós-graduandos integrantes do grupo GTERP que adotam o Modelo de Romberg. Após ter compreendido que nesse modelo usa-se uma representação por meio de fluxograma como uma forma de "resumir" sua pesquisa, ver as conexões existentes nos caminhos a trilhar, retomei ao meu projeto de tese original e organizei o modelo preliminar, que está ilustrado na Figura 16, e que já integra a pergunta de investigação.

[76] XX Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática, ocorrido na cidade de Curitiba, em novembro de 2016.

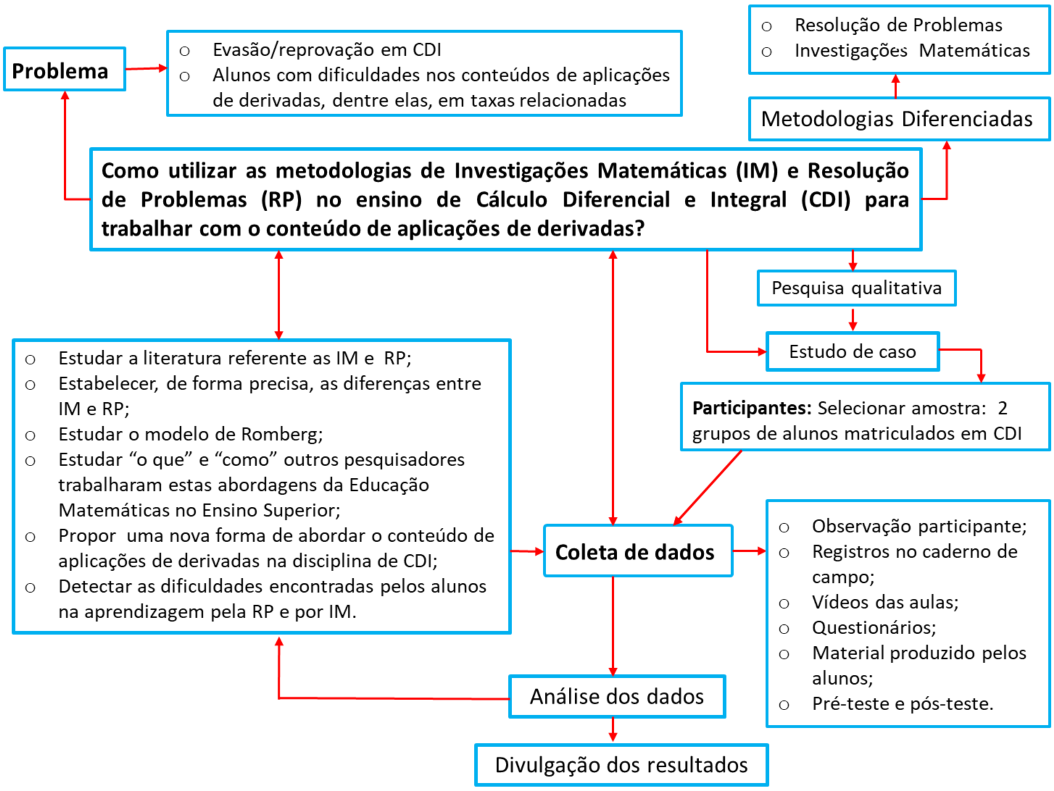


Figura 16 - Modelo Preliminar.
Fonte: Produção da autora.

Resumidamente, a partir do problema motivador da pesquisa que estava associado com a evasão/reprovação em *Cálculo* e alunos com dificuldades variadas, desde matemática básica a conteúdos específicos de derivadas, acreditava que mudar a forma da abordagem metodológica usada em sala de aula poderia motivar mais os estudantes a permanecerem na disciplina, pois muitos estudantes não chegam a fazer nem a primeira avaliação de *Cálculo*. Para tanto, me propus a experienciar novas abordagens metodologias: as investigações matemáticas e a resolução de problemas tendo a seguinte questão norteadora do trabalho:

Como utilizar as metodologias de Investigações Matemáticas (IM) e Resolução de Problemas (RP) no ensino de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) para trabalhar com o conteúdo de aplicações de derivadas?

Para responder essa questão, selecionaria dois grupos de estudantes matriculados em *Cálculo* e faria os experimentos de ensino em horário extraclasse. Em cada grupo usaria uma das abordagens metodológicas escolhidas e, ao final, analisaria ambas experiências de ensino e teceria "comparações" de acordo com as percepções de professora e de observadora participante. Entendia que essa pesquisa seria de cunho qualitativo com dados quantitativos (pré e pós-teste) e com design de estudo de caso, em que os casos seriam compostos por pelo menos um subgrupo de cada grupo participante. No transcorrer da pesquisa, a ideia inicial sofreu modificações conforme a pesquisa avançava. O modelo modificado será apresentado na seção 4.4.

4.4. Relacionar com ideias de outros

Romberg (2007, p. 6) enfatiza que, ao desenvolver uma pesquisa, é importante "examinar o que outras pessoas pensam sobre o fenômeno e determinar se suas ideias podem ser usadas para esclarecer, ampliar ou modificar o modelo proposto".

Na busca por trabalhos correlatos realizados no Brasil, foram encontrados somente trabalhos que versavam sobre a Resolução de Problemas e, destes, poucos trabalhos que abordam o uso da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática no Ensino Superior, em particular, que abordam assuntos relacionados ao *Cálculo*. No mapeamento de teses e dissertações brasileiras que integravam resolução de problemas e ensino de *Cálculo*, realizado por Pagani e Allevato (2014), foi identificado uma lacuna na pesquisa, pois haviam sido encontrados ao todo 28 trabalhos, sendo que destes, o assunto mais abordado era o de derivadas (nove trabalhos). Em outras palavras, o tema de meu interesse era o assunto que tinha mais trabalhos publicados na área. No entanto, nas primeiras pesquisas realizadas percebemos que geralmente o público participante se tratava de um grupo selecionado por algum critério e os experimentos de ensino ocorriam em horário extraclasse. Como exemplo dessa abordagem citamos o trabalho de Abdelmalack (2011) que foi um dos trabalhos inspiradores no momento de escrita desse projeto de tese.

Com relação às pesquisas em IM, foi constatado que há uma lacuna sobre pesquisas que usam essa abordagem metodológica. Apesar disso, com aval dos orientadores, optei por focar somente na metodologia de RP, pois nenhuma das metodologias de ensino que estava me propondo a aplicar, eram de meu domínio. Dessa forma, com mais maturidade, futuramente, poderia dar continuidade à pesquisa me dedicando às IM. Com a redução do tema a ser investigado, meu trabalho seria muito similar ao de Abdelmalack (2011) se o assunto abordado fosse somente o conteúdo de derivadas e com um pequeno grupo em horário extraclasse. Assim sendo, com a redução do assunto a ser pesquisado busquei ampliar o objetivo da pesquisa. Ao invés de se trabalhar apenas com o conteúdo de aplicações de derivadas, o objetivo geral passou a ser:

> **Desenvolver estratégias para utilizar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática para ensinar conteúdos de CDI através da RP durante os horários regulares de aula.**

Outro trabalho, similar ao meu, que foi desenvolvido no momento em que este projeto de pesquisa estava sendo reestruturado foi o de Pagani (2016). Em sua tese, Pagani usou adaptações do trabalho de Abdelmalack (2011), considerou como público participante toda uma turma e realizou os experimentos de ensino nos horários regulares da disciplina de *Cálculo* de um Curso Técnico, ou seja, em nível secundário.

Desde o primeiro semestre letivo de doutoramento inseri, em sala de aula, algumas tarefas matemáticas com o intuito de me familiarizar com o uso da metodologia de RP para ensinar novos conteúdos. Esses primeiros experimentos de ensino, como serão descritos posteriormente nesse capítulo foram adaptações de trabalhos desenvolvidos por outros pesquisadores. Após cada experimento de ensino, registrava o mais breve possível (geralmente no mesmo dia) no meu diário de bordo virtual (blog) todas as minhas impressões de como foi o desenvolvimento da aula, as discussões ocorridas durante a resolução dos problemas e no momento da plenária. Como passei a me preocupar mais em desenvolver estratégias para abordar os conteúdos de *Cálculo* usando a RP e conseguir cumprir o plano de ensino, cometi uma falha (percebida após concluir a coleta de dados) ao não estabelecer o critério de que os grupos formados, para desenvolverem as atividades propostas, deveriam ser sempre os mesmos. Assim sendo, apesar de ter sido gerado um grande volume de dados coletados, ficou impossível realizar um estudo de caso como previamente imaginado. Todavia, como após cada atividade desenvolvida, fazia uma reflexão sobre ela, sobre o comportamento da turma e reformulava as atividades a serem reaplicadas em semestre posterior, esse processo de ação-reflexão-ação caracterizou uma investigação-ação. Esse é um aspecto inovador da pesquisa, pois em nenhum dos trabalhos encontrados no estado da arte sobre *Cálculo*, apresentado no Capítulo 2, nem nos trabalhos cuja abordagem metodológica foi a resolução de problemas, como visto no Capítulo 3, encontramos esse *design* de pesquisa.

Nessa busca por relacionar com trabalhos de outros, após a participação em eventos técnicos científicos, vi a possibilidade de aliar a formulação de problemas (FP) com a RP, pois apesar de ser conhecida desde a divulgação dos trabalhos de Polya sobre a RP, há carência de trabalhos sobre o nosso tema de interesse.

Outro entendimento meu que estava equivocado era de que a pesquisa se tratava de natureza qualitativa. Como previa a aplicação de um pré-teste e de um pós-teste para auxiliar a complementar a análise qualitativa dos dados, a pesquisa que este relatório se referencia se trata de uma pesquisa mista, em que o viés qualitativo é predominante (assunto a ser abordado na seção 4.5.1).

Diante do exposto, após ter conhecimento das pesquisas desenvolvidas por outros investigadores que tratam do tema de RP e de identificadas lacunas de pesquisa, o modelo modificado de Romberg passou a ser o ilustrado no fluxograma da Figura 17. Além das modificações já descritas anteriormente, optamos por não realizar gravações em vídeo, porque não teríamos tempo de analisá-las. Ressaltamos ainda que esse fluxograma, que retrata a investigação desenvolvida, considera a pergunta norteadora da pesquisa, pois, diante das colocações apresentadas nessa subseção, já havia sido reformulada.

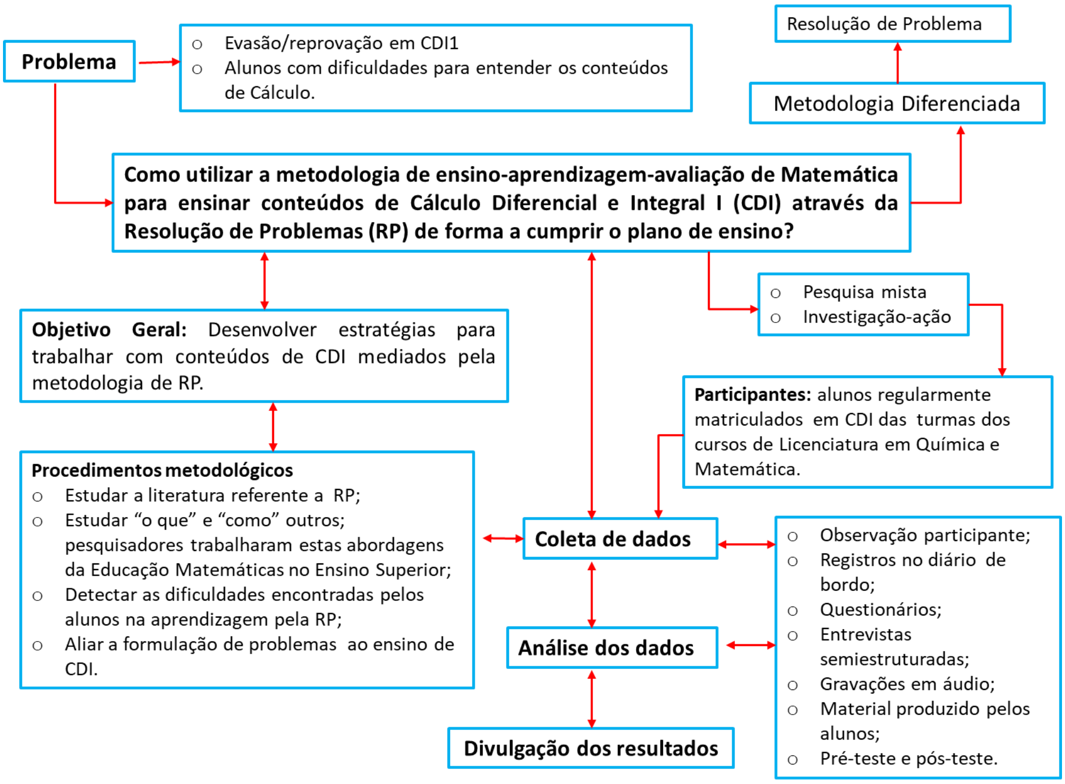


Figura 17 - Modelo Modificado.
Fonte: Produção da autora.

Convém destacarmos que o modelo de Romberg (2007) não apresenta uma etapa específica cuja atividade é denominada Modelo Modificado. Essa expressão foi concebida pelos membros do grupo GTERP, que passaram a considerar como uma etapa adicional ao modelo de Romberg. Assim sendo, o GTERP passou a usar um fluxograma constituído de 11 atividades para guiar uma pesquisa. Esse novo esquema se difere do Modelo de Romberg, apresentado na Figura 15, apenas pela introdução da atividade Modelo Modificado após a atividade 3 de Romberg. Com essa modificação, o novo fluxograma passou a ser chamado pelos membros do GTERP de *Fluxograma de Romberg-Onuchic*, ou seja, foi incorporado ao modelo o sobrenome da coordenadora do grupo de pesquisa. Esse fluxograma (Figura 18) também ilustra visualmente os três blocos que "constituem" a pesquisa segundo as orientações de Romberg. Por entendermos que a essência de ambos os fluxogramas é a mesma, continuaremos nos referindo ao Modelo de Romberg, visto que era a proposta inicial dessa pesquisa.

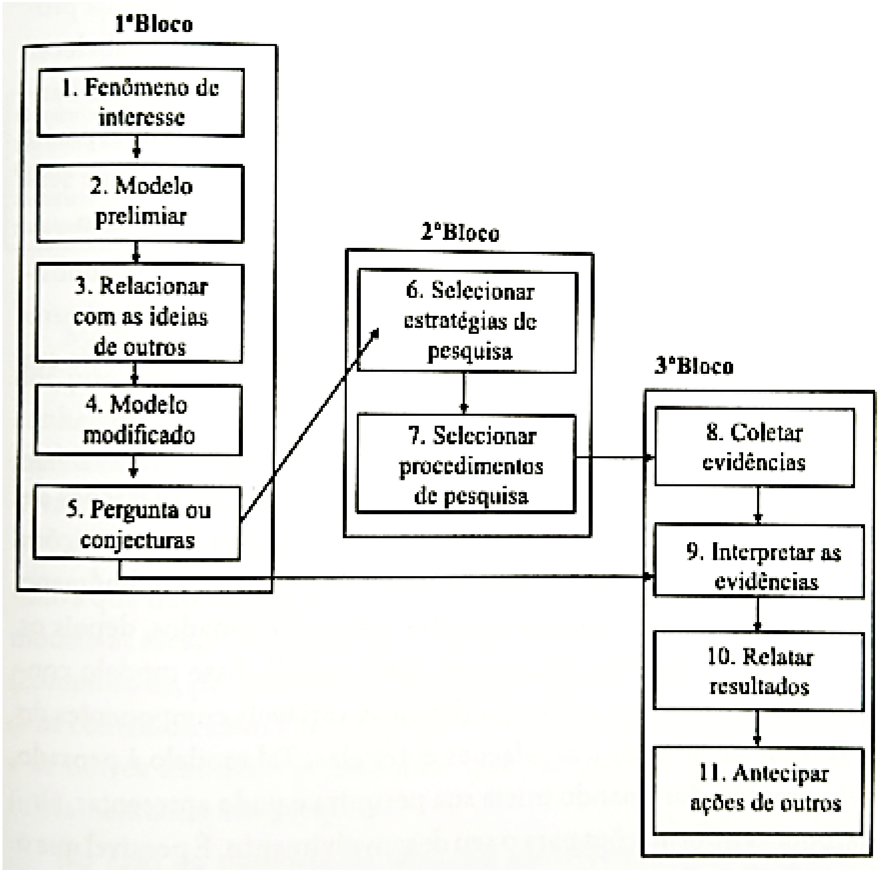


Figura 18 - Fluxograma de Romberg-Onuchic.
Fonte: Allevato e Onuchic, 2014, p. 59.

4.5. Perguntas ou conjecturas

Para Romberg (2007), “este é um passo chave no processo de pesquisa porque, conforme se examina um particular fenômeno, uma quantidade de perguntas potenciais inevitavelmente aparece” (p. 7). Em outras palavras, os questionamentos ou conjecturas surgem naturalmente da curiosidade do investigador a respeito do fenômeno de interesse. Ainda, de acordo com esse autor as perguntas podem ser orientadas no passado, no presente ou no futuro e, geralmente, os estudos de caráter descritivo possuem questões de investigação orientadas no passado ou no presente e, os estudos preditivos, no futuro.

Na subseção anterior apresentamos a versão final da pergunta norteadora desse trabalho que está mais centrada nas ações da professora pesquisadora, no entanto, nosso interesse também era investigar questões relacionadas com a aprendizagem dos alunos. A fim de responder à questão norteadora da pesquisa elaboramos as seguintes questões de investigação:

I. Como é que a metodologia de resolução de problemas pode contribuir para a aprendizagem?
II. Quais as dificuldades sentidas pelos alunos durante a realização de atividades usando RP?

III. Quais as dificuldades sentidas pelo professor ao inserir a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP nas aulas de Cálculo e como superá-las?

As questões de investigação conduzem a definição do paradigma de pesquisa a ser considerado e, consequentemente, das estratégias e procedimentos a serem adotados para coleta e análise dos dados (Coutinho, 2011; Kauark, Manhães & Medeiros, 2010). Das três questões de investigação supracitadas, temos uma de cariz qualitativo e quantitativo (questão I) e as outras duas questões cariz somente qualitativo. Portanto, essa pesquisa se trata de uma pesquisa mista, em que a interpretação dos dados quantitativos servirá para complementar a análise qualitativa. Conforme Barbosa (2009),

> para proceder à selecção do design mais adequado ao estudo, o investigador deve tomar duas decisões prioritárias: (1) se pretende ou não conduzir o estudo dentro de um paradigma dominante; e (2) se as fases quantitativa e qualitativa são sequenciais ou concorrentes. No entanto, para que uma metodologia seja considerada mista os dados devem ser misturados ou integrados num dado momento do estudo, seja na definição de objectivos, na escolha dos procedimentos de recolha de dados ou na fase de análise e interpretação dos dados. (p. 100)

Portanto, a questão (1) levantada por Barbosa está atendida, pois o paradigma dominante será o qualitativo. Para respondermos a questão (2) levantada por Barbosa, na próxima subseção apresentaremos o entendimento que se tem sobre métodos mistos, à luz da literatura, além de deixar claro qual o design adotado.

4.5.1. Metodologia de Pesquisa Mista

As pesquisas mistas consideram tanto dados qualitativos quanto quantitativos e surgiram no ano de 1959 (Creswell, 2009). Entretanto, a combinação de dados foi alvo de muito debate entre puristas de ambos os lados. Para esses era inaceitável trabalhar concomitantemente com essas abordagens, pois havia incompatibilidade de paradigmas, visto que as pesquisas quantitativas são apoiadas no paradigma positivista e, as pesquisas qualitativas, no paradigma construtivista (Coutinho, 2011). De acordo com Tashakkori e Teddlie (2003), a pesquisa mista passou a ser aceite como uma terceira abordagem metodológica de investigação, gradualmente, após a década de 1990 com a aceitação de que esse tipo de pesquisa se enquadra no paradigma pragmático.

Creswell e Plano Clark (2013) apontam algumas vantagens e desvantagens de trabalhar com uma das abordagens:

> os dados qualitativos proporcionam um entendimento detalhado de um problema, enquanto os dados quantitativos proporcionam um entendimento mais geral. Esse entendimento qualitativo surge do estudo de alguns indivíduos e da exploração de suas perspectivas em grande profundidade, enquanto o entendimento quantitativo surge do exame de um número maior de pessoas e da avaliação das respostas segundo algumas variáveis. A pesquisa qualitativa e a pesquisa quantitativa apresentam quadros ou perspectivas diferentes e cada uma delas tem suas limitações. Quando os pesquisadores estudam alguns indivíduos qualitativamente, a capacidade para generalizar os resultados para muitos é perdida. Quando os pesquisadores examinam quantitativamente muitos indivíduos, o entendimento de qualquer indivíduo isoladamente é diminuído. (p. 24)

Diante do exposto, os autores argumentam que a integração de dados quantitativos e qualitativos em uma pesquisa oportuniza uma compreensão mais ampla do objeto de pesquisa do que se fossem abordados de forma independente, pois "as limitações de um método podem ser compensadas pelas potencialidades do outro método" (Creswell e Plano Clark, 2013, p. 24). Nesse mesmo sentido, Paranhos, Figueiredo Filho, Rocha, Silva Junior e Souza (2016) apontam como vantagem na associação de ambas abordagens metodológicas o facto de "retirar o melhor de cada uma para responder uma questão específica" (p. 389). Esses autores usam uma representação por meio de diagramas para representar esse entendimento (Figura 19) e explicam que a integração dessas abordagens (C) proporciona um modelo mais robusto que é inexplorado quando as contribuições das abordagens qualitativa e quantitativa são tratadas independentemente (A e B).

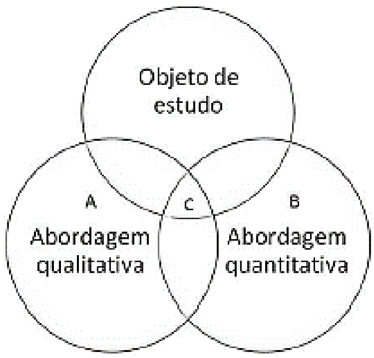


Figura 19 - Complementaridade das abordagens metodológicas.
Fonte: Paranhos *et al.*, 2016, p. 389.

Conforme Paranhos *et al.* (2016), na literatura os principais argumentos que fundamentam a integração de dados e/ou técnicas são o de confirmação e de complementariedade. Na primeira perspectiva, o método da triangulação dos dados é usado para mostrar a convergência dos resultados independente dos tipos de dados e/ou técnicas. Na perspectiva de complementaridade, busca-se "ponderar as vantagens e limitações de cada técnica específica e/ou tipo de dado" (p. 390). Teddlie e

Tashakkori (2009) apontam três razões pelas quais os métodos mistos são mais robustos que se os dados forem tratados segundo abordagens metodológicas isoladas. De acordo com esses autores, a pesquisa de método misto: pode abordar simultaneamente uma série de pesquisas confirmatórias e exploratórias com questões de abordagens qualitativa e quantitativa; fornece inferências mais robustas; e, oferece a oportunidade para uma maior variedade de pontos de vista divergentes.

Creswell e Plano Clark (2013), após anos de pesquisas sobre métodos mistos, que consistiram em analisar o tratamento que os investigadores deram às abordagens quantitativas e qualitativas em artigos, elaboraram uma lista com características que julgam essenciais que descrevem adequadamente pesquisas mistas. De acordo com esses autores, nos métodos mistos, o pesquisador

> - coleta e analisa de modo persuasivo e rigoroso tanto os dados qualitativos quanto os quantitativos (tendo por base as questões de pesquisa);
> - mistura (ou integra ou vincula) as duas formas de dados concomitantemente, combinando-os (ou misturando-os) de modo sequencial, fazendo um construir o outro ou incorporando um no outro;
> - dá prioridade a uma ou a ambas as formas de dados (em termos do que a pesquisa enfatiza);
> - usa esses procedimentos em um único estudo ou em múltiplas fases de um programa de estudo;
> - estrutura esses procedimentos de acordo com [suas] visões de mundo filosóficas e lentes teóricas; e
> - combina os procedimentos em projetos de pesquisa específicos que direcionam o plano para a condução do estudo. (Creswell & Plano Clark, 2013, p. 22)

Corroborando com os autores supracitados, nessa pesquisa adotamos o método misto com a finalidade dos dados quantitativos complementarem as percepções da análise qualitativa, pois, por meio do pré-teste e pós-teste que foram aplicados, desejávamos constatar se estatiscamente era possível inferir que o trabalho desenvolvido causou mudanças.

De acordo com Creswell (2009), as estratégias mais utilizadas em investigações mistas são os métodos mistos *sequenciais* ou *concorrentes.* No *método misto sequencial*, o pesquisador procura elaborar ou expandir os resultados obtidos por métodos qualitativos com uso de métodos quantitativos ou vice-versa. No *método misto concorrente*, os dados quantitativos e qualitativos são recolhidos em simultâneo e faz-se a integração dos dados na interpretação dos resultados. Em nosso estudo os dados qualitativos e quantitativos foram coletados durante o mesmo semestre letivo e os dados foram integrados somente na interpretação dos resultados, por isso, o design do método da pesquisa foi o método misto concorrente. Ainda, segundo Creswell (2009) essa estratégia pode ser classificada como design concorrente: *de triangulação*, *integrado* ou *transformativo*. No primeiro design a ênfase dada aos dados qualitativos e quantitativos é a mesma, após os dados recolhidos e analisados é feito um confronto dos resultados obtidos por análises distintas. No segundo design um dos métodos possui predominância sobre outro e os dados do método que tem menor ênfase auxiliam na interpretação dos dados do método de maior ênfase. No terceiro design os dois outros modelos podem ser considerados, seu diferencial está no facto de existir um aporte teórico específico que influencia nos objetivos e nas questões de investigação. A Figura 20 ilustra visualmente cada um desses designs. Nessa Figura, o tamanho da letra está relacionado com a ênfase dada na pesquisa. As escritas em “caixa alta” representam o caráter dominante na pesquisa.

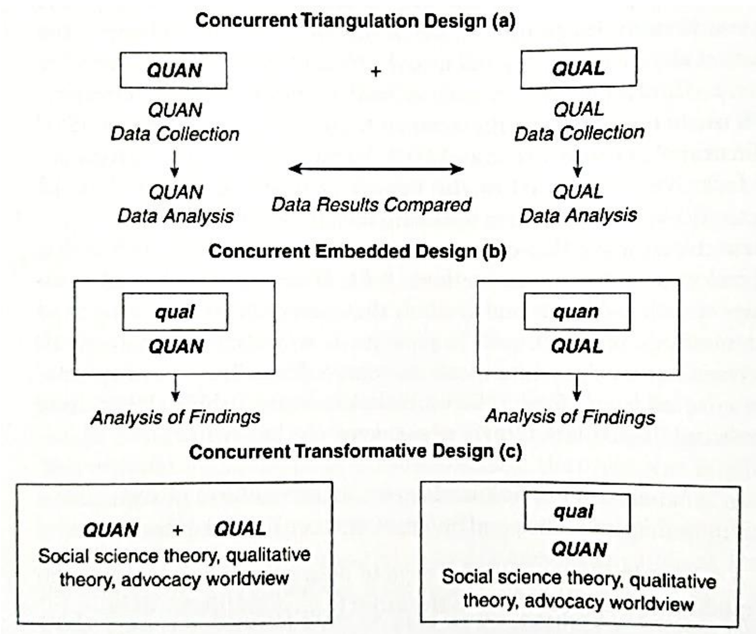


Figura 20 - Design de pesquisas do método misto concorrente.
Fonte: Creswell, 2009, p. 210.

O design de pesquisa que parece mais se adequar a esse trabalho é o *método misto concorrente integrado* e o esquema que representa a dinâmica aplicada a esse estudo está ilustrado na Figura 21.

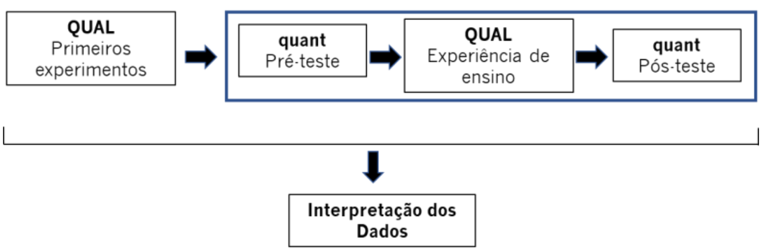


Figura 21 - Diagrama do design concorrente integrado aplicada na pesquisa.
Fonte: Produção da autora.

A primeira “caixa” da Figura 21 refere-se aos experimentos que ocorreram ao longo do primeiro ano de pesquisa. Essa fase não fez parte da análise dos dados da pesquisa, mas foi de fundamental importância para a formação dessa doutoranda como professora-investigadora que estava tendo os primeiros contactos com o uso da metodologia de Resolução de Problemas aplicada em sala de aula. A coleta “oficial” dos dados analisados nessa pesquisa (corresponde às três “caixas” subsequentes à primeira ilustrada na Figura 21) foi toda feita no mesmo semestre letivo, por isso entendemos que a pesquisa se enquadra no design concorrente integrada. Os detalhes dessas fases serão descritos posteriormente na seção 4.9. Como em toda a pesquisa os participantes foram alunos matriculados na disciplina de *Cálculo* cuja docente era essa investigadora, ou seja, não houve nenhum critério aleatório de escolha desses elementos constituintes, esse estudo foi *quase experimental*. (Creswell, 2009).

Até o momento, nessa subseção, abordamos a estratégia usada para análise dos dados quantitativos, ainda precisamos falar sobre a análise dos dados qualitativos, pois “para melhor fundamentar os procedimentos metodológicos utilizados ao longo do estudo, é fundamental identificar qual a estratégia de investigação adoptada em cada uma das abordagens, qualitativa e quantitativa” (Barbosa, 2009, p. 100).

Com relação à pesquisa qualitativa, essa investigadora atuou como observadora e participante de todo o processo. Entretanto, como mencionado anteriormente, minha formação acadêmica anterior ao doutoramento não foi na área de Educação, portanto, minha experiência tanto como discente quanto docente foram em aulas do estilo tradicional ou tradicional dialogada. Por isso, ao ingressar no doutorado tive que me aprofundar teoricamente sobre o tema de Resolução de Problemas, do ponto de vista de metodologia de ensino e, além disso, precisei aprender na prática como incorporá-la às minhas aulas. Devido a essa necessidade pessoal, esse é outro motivo pelo qual o design de estudo de caso que pensei no momento de elaboração do projeto de tese foi cedendo espaço ao processo de ação-reflexão-ação a cada leitura que fazia, a cada experimento de ensino que realizava e às sessões de orientação, o que conduziu naturalmente a caracterizar essa pesquisa como uma investigação-ação[77] - estilo de investigação que pode ser utilizado tanto em pesquisas qualitativas como em quantitativas (Bisquerra, 1989; Bogdan & Biklen, 1994; Coutinho, 2011). Posteriormente, na subseção 4.7.1 clarificaremos aspectos teóricos a respeito da investigação-ação.

Após enquadrarmos nossa pesquisa no referencial teórico, daremos continuidade às atividades do Modelo de Romberg. Na próxima seção abordaremos as estratégias de pesquisa.

[77] No Brasil costuma-se usar a expressão pesquisa-ação.

4.6. Estratégias de Pesquisa

Romberg (2007) enfatiza que as estratégias a serem escolhidas a fim de coletar evidências para responder as questões de investigação estão diretamente relacionadas com a "visão de mundo na qual as questões estão situadas, do modelo preliminar que foi construído a fim de explicar o 'fenômeno de interesse' e da conjectura que se faz sobre a evidência necessária" (p. 8).

Nessa pesquisa, a estratégia geral para recolha de dados, que atuou como "fio condutor" de todo esse trabalho, foi a investigação-ação prática realizada com a inserção da metodologia de RP para ensinar conteúdos de *Cálculo*, em turmas em horários regulares de aula. Essas aulas foram norteadas conforme o roteiro de orientações do grupo GTERP (apresentado no Capítulo 3).

4.7. Procedimentos Específicos

A partir da estratégia geral definida o pesquisador necessita escolher os procedimentos a serem utilizados que permitirão concretizar a estratégia planeada. Os procedimentos são os meios de conectar a estratégia geral com os métodos de pesquisa e que tornam praticável o que foi idealizado (Allevato, 2005).

Romberg (2007) afirma que há dois aspectos na literatura que precisam ser compreendidos. O primeiro é que "os métodos específicos discutidos na literatura de pesquisa podem incluir a maneira na qual a informação é coletada, o modo como ela é agregada e analisada, ou, às vezes, como ela é relatada" (p. 16). O segundo aspecto é que os métodos vigentes usados por um investigador "para coletar evidências dependem de pelo menos cinco factores: a visão de mundo; a orientação do tempo das perguntas a serem feitas; se a situação atualmente existe ou não; a fonte de informação prevista; e o julgamento do produto" (p. 16). Segundo esse autor, diversos métodos específicos encontrados na literatura satisfazem esses critérios ou fazem uso deles. Romberg classifica esses métodos em três grupos:

- *os métodos usados quando as evidências já existem* – nesse grupo estão os métodos "nos quais os pesquisadores não têm parâmetro para gerar novos dados" (Romberg, 2007, p. 17). Três métodos se enquadram nessa categoria: historiografia, análise de conteúdo e análise de tendências.
- *os métodos usados quando uma situação existe e a evidência deve ser desenvolvida* – nessa situação "o pesquisador tem controle sobre como a informação é coletada e agregada" (p. 17). Nesse grupo incluem-se os diversos métodos, dentre eles a etnografia, os estudos de caso e a

investigação-ação.

- *os métodos que consideram condições que não existem* – métodos de abordagem experimental em que o pesquisador cria a situação, a estuda e analisa seus efeitos. Nesse grupo enquadram-se os estudos de experimentos de ensino, os experimentos comparativos e os experimentos interrompidos numa sequência de tempo.

De acordo com classificação de Romberg (2007), consideramos os métodos cuja situação existe e a evidência deve ser desenvolvida, pois adotamos a investigação-ação como design de pesquisa. A próxima subseção é dedicada a essa abordagem de pesquisa.

4.7.1. Investigação-ação

De acordo com Bisquerra (1989), a investigação-ação teve origem com Kurt Lewin, em 1946[78], que a descrevia com um processo em espiral composto pela planificação, ação e evolução dos resultados de ação sendo que as características essenciais dessa modalidade de pesquisa eram: contribuição para mudança social, caráter participativo e impulso democrático. Cohen e Manion (1991) definem a investigação-ação como "uma intervenção de pequena escala no funcionamento do mundo real e um exame atento dos efeitos de tal intervenção" (p. 217, tradução nossa). Bogdan e Biklen (1994) a definem como "um tipo de investigação aplicada no qual o investigador se envolve activamente na causa da investigação-ação" (p. 293). Essas definições são convergentes no sentido de que nessa modalidade de pesquisa o investigador deve envolver-se ativamente na pesquisa.

A partir da análise das expressões "investigação" e "ação" de forma isolada pode-se inferir a definição de investigação-ação de forma similar às apresentadas anteriormente, pois a primeira expressão refere-se a pesquisa e, a segunda, a atuação/desempenho. Ao considerar as duas palavras juntas, no contexto educacional, podemos entender a investigação-ação como uma "estratégia metodológica de estudo que é geralmente levado a efeito pelo professor sobre a acção pedagógica desempenhada por si com os seus alunos" (Sousa, 2009, p. 95). Com olhar voltado ao ambiente escolar, Latorre (2003) define investigação-ação como "uma investigação prática realizada pelos professores, de forma colaborativa, com o objetivo de melhorar sua prática educacional por meio de ciclos de ação e reflexão" (p. 24, tradução nossa). Stenhouse (1979[79]) referido por Cohen e Manion (1991) reforça que a investigação-ação deve contribuir tanto para a prática como para "uma teoria da educação e do ensino que seja acessível a outros professores" (p. 217, tradução nossa). Tripp (2005) entende a investigação-

[78] Em Bisquerra (1989) o leitor pode encontrar mais detalhes da evolução histórica da investigação-ação.

[79] Stenhouse, L. (1979). *What is action-research.* Norwich C. A. R. E., University of East Anglia, Norwich (mimeograph).

ação educacional como "uma estratégia para o desenvolvimento de professores e pesquisadores de modo que eles possam utilizar suas pesquisas para aprimorar seu ensino e, em decorrência, o aprendizado de seus alunos" (p. 445). Para Coutinho (2011), a investigação-ação tem por objetivos "compreender, melhorar e reformar práticas; [fazer uma] intervenção em pequena escala no funcionamento das entidades reais e análise detalhada dos efeitos dessa investigação" (p. 316). No âmbito educacional parece ser consensual de que o professor que realiza investigação-ação deseja melhorar/aprimorar sua prática e a aprendizagem dos alunos e, para tanto, realiza intervenções em sua sala tendo que gerenciar todos os desafios intrínsecos ao realizar pesquisa em uma "turma real"[80].

Podemos nos questionar em que contextos é possível usar a investigação-ação na sala de aula. Sousa (2009) afirma que a investigação-ação "poderá ser aplicada em quaisquer situações de sala de aula ou de escola em que possam ser aplicados mecanismos de avaliação traduzindo *feedbacks* sobre o sistema" (p. 96). Cohen e Manion (1991) exemplificam sete áreas em que a metodologia de investigação-ação pode ser aplicada no âmbito educacional:

> (1) métodos de aprendizagem – na descoberta de métodos novos que possam substituir os tradicionais (...); (2) estratégias de aprendizagem – experimentando aproximações integradas de aprendizagem em vez do estilo unilinear de transmissão do conhecimento; (3) procedimentos de avaliação – ensaiando novos métodos de ação contínua; (4) atitudes e valores – possibilidade de encorajar atitudes mais positivas de trabalho, por exemplo, ou modificação dos sistemas de valores contínuos dos alunos com vistas a alguns aspectos de vida; (5) formação contínua dos professores – procurando desenvolver capacidades, experimentar novos métodos de aprendizagem, poder de análise, autoavaliação, por exemplo; (6) gestão e controle – a introdução gradual das técnicas de modificação de comportamento; e (7) administração - aumentando a eficiência de algum aspecto da parte administrativa escolar. (pp. 226 – 227, tradução nossa)

A partir desses exemplos de aplicabilidade da investigação-ação no ambiente escolar, Coutinho (2011) afirma que essa é "a metodologia mais apta a favorecer mudanças" (p. 319) sempre que o investigador sentir a necessidade de "intervir na reconstrução de uma realidade" (p. 319). Em outras palavras, a investigação-ação é um método de pesquisa recomendada quando o professor-pesquisador sentir a necessidade ou estiver motivado a sair de sua zona de conforto para interferir na realidade escolar, ao menos, na de sua sala de aula.

Diante dessas concepções acerca da investigação-ação educacional entendemos que essa é a metodologia adequada para nossa pesquisa, pois realizei intervenções no contexto de uma sala de aula

[80] Por turma real nos referimos a turma formada por estudantes que se matricularam na disciplina sem saber previamente que participariam de uma pesquisa. Assim sendo, não houve a necessidade de estabelecer algum critério de seleção dos alunos que seriam os participantes da pesquisa.

real e, com a inserção da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Resolução de Problemas de Matemática, estive aprimorando/inovando minhas práticas almejando melhor aprendizado dos alunos. Além de aprender e compreender, na prática, como ministrar aulas por meio da Resolução de Problemas, fazia autorreflexão sobre cada atividade desenvolvida em sala de aula, reformulava as tarefas, reaplicava no semestre posterior. A partir da experiência vivida nos dois primeiros semestres de experimentos me senti apta a inserir um número maior de atividades no terceiro semestre letivo, que correspondia ao semestre da coleta de dados "oficiais" para análise mais detalhada dos resultados. Toda essa movimentação da pesquisa que corresponde às etapas de planificar, agir, observar, reflexionar, reestruturar e reaplicar faz parte da espiral dos ciclos de uma investigação-ação.

Com relação aos ciclos de investigação, na literatura encontram-se diversos esquemas que os retratam. Segundo Tripp (2005), isso ocorre porque "algumas pessoas reconheceram e conceptualizaram o ciclo sem conhecimento das demais versões já existentes e denominaram o mesmo ciclo e suas etapas de muitos modos diferentes" (p. 446). Portanto, apesar de na literatura não haver unanimidade nas denominações das etapas de cada ciclo, a essência é a mesma. Os ciclos espirais retratam o processo de ação-reflexão ao longo da pesquisa. Nessa investigação consideramos a proposta de Latorre (2003). Esse autor considera que cada ciclo consiste em planificar-atuar-observar-reflexionar (Figura 22). Mais dois exemplos dos ciclos espirais podem ser encontrados em Tripp (2005) e Rocha (2012). O primeiro autor considera quatro etapas, como Latorre, e a segunda autora, adota um modelo de ciclo espiral composto por seis fases.

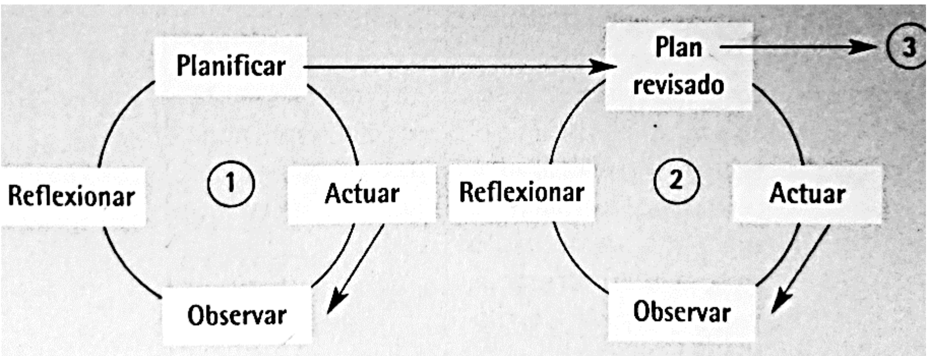


Figura 22 - Espiral dos ciclos da investigação-ação.
Fonte: Latorre, 2003, p. 32

Latorre (2003) explica em que consiste cada uma dessas etapas, considerando que a pesquisa de investigação-ação está sendo desenvolvida por um grupo de professores-investigadores:

- Desenvolver um plano de ação criteriosamente informado para melhorar a prática atual. O plano deve ser flexível, de modo a permitir a adaptação a efeitos imprevistos.

- Atuar para implementar o plano, que deve ser deliberado e controlado.
- Observar a ação para coletar evidências para avaliá-lo. A observação deve ser planejada e manter um diário para registrar os propósitos. O processo da ação e seus efeitos devem ser observados e controlados individual ou coletivamente, refletindo sobre a ação registrada durante a observação, auxiliada pela discussão entre os membros do grupo.
- A reflexão do grupo pode levar à reconstrução do significado da situação social e fornecer a base para um novo planejamento para continuar outro ciclo. (p.33, tradução nossa)

Apesar dessa pesquisa não ter sido desenvolvida por um grupo de investigadores atuando diretamente na pesquisa, corroboramos com Latorre sobre o dinamismo da investigação-ação. Nosso grupo de discussão-reflexão sobre as ações planeadas e desenvolvidas pode ser interpretado como as reflexões e discussões das ações tomadas por essa doutoranda e seus orientadores. Ter com quem discutir a pesquisa é importante, pois

> muito do que acontece no decurso de uma investigação não ocorre de acordo com o que fora previsto. Não é a acção que deve obedecer a um plano prescritor de regras definitivas, bem pelo contrário, o plano é que tem de ser reajustado, sempre que as derivas da acção ocorrerem de forma não planeada. Esse facto deve, aliás, ser também matéria para reflexão, significação e produção de conhecimento prático, contribuindo desse modo para o dinamismo do processo. (Máximo-Esteves, 2008, p. 82).

Essa autora fala do dinamismo de qualquer pesquisa, no entanto, na investigação-ação o mesmo é muito evidente, visto que os ciclos espirais contribuem para que o investigador tenha consciência de suas ações, decisões e consequências e, com base no conhecimento adquirido em um ciclo, reestruturam-se as ações na expectativa de melhor contribuir para o aprendizado.

Com relação aos processos que deverão ser utilizados em uma pesquisa, estes dependem dos objetivos e das circunstâncias em que essa é desenvolvida. Por isso, é importante que o "tipo de investigação-ação utilizada seja adequada aos objetivos, práticas, participantes, situação" (Tripp, 2005, p. 446). De acordo com Latorre (2003), na literatura há concordância de que em investigação-ação existem três visões de pesquisa: a *técnica*, a *prática* e a *crítica emancipatória*. Na *investigação-ação técnica* os professores desenvolvem uma pesquisa cujos propósitos de trabalho e desenvolvimento metodológico são pré-estabelecidos por especialistas ou por uma equipe. A *investigação prática* se difere da técnica porque nesse tipo pesquisa é o docente quem seleciona os problemas de pesquisa e quem está no controle do próprio projeto. E, a *investigação-ação crítica* e *emancipatória* é considerada emancipatória porque os professores vinculam suas ações conforme o ambiente que atuam e procuram estender a mudança para outras áreas sociais; e crítica, porque está comprometida tanto com a organização e transformação da prática educacional como da social. Entendemos que nossa pesquisa assumiu o design de investigação-ação prática, pois a tomada de decisão sobre "o que", "como" e "quando" fazer partiram dessa investigadora (com anuência dos orientadores). Ratificamos também com Tripp (2005), de que nessa concepção de investigação-ação, o professor toma as decisões desejando contribuir para o desenvolvimento de seus estudantes, "o que significa que serão feitas mudanças para melhorar a aprendizagem e a autoestima de seus alunos, para aumentar interesse, autonomia ou cooperação e assim por diante" (p. 457).

Na seção 4.9 apresentaremos as quatro fases desta pesquisa, sendo que as três primeiras fases corresponderam à coleta de dados e cada uma destas fases corresponde a um ciclo de Latorre (Figura 22). Além de três ciclos, identificamos subciclos com as mesmas características, pois a cada atividade matemática que era desenvolvida em sala de aula sob a concepção de ensinar através da resolução de problemas, pois a investigadora planejava, atuava, observava e reflexionava acerca da tarefa proposta e as replanejava para que fica mais acessível aos estudantes. A reestruturação das tarefas almejavam que os alunos não sentissem a necessidade de que precisavam de um novo conteúdo para resolverem o problemas proposto, pois com estes problemas eram problemas geradores que propiciariam a introdução de novo assunto com base nos conhecimentos prévios dos estudantes. para consideramos os ciclos de Latorre.

Na próxima seção daremos continuidade às atividades do Modelo do Romberg focando nas técnicas de recolha de dados adotada.

4.8. Recolha de dados

De acordo com Romberg (2007) essa etapa deve ser feita "sem rodeios, uma vez que se tenha decidido coletar certa informação para construir um argumento, considerando as perguntas que foram feitas" (p. 8). Como adotamos a investigação-ação como estratégia metodológica para a pesquisa, Latorre (2003) aponta um conjunto de técnicas e instrumentos de recolha de dados recomendados para esse design de investigação que podem ser divididos em três categorias:

- *técnicas baseadas na observação* – centrada no investigador que presencia-vivencia todo o fenômeno em estudo;
- *técnicas baseadas na conversação* – centrada nos participantes, interação e diálogo com os mesmos;
- *análise de documentos* – centrada no investigador e consiste na análise dos documentos escritos

de várias espécies, para aprofundamento teórico, documentos oficiais e material produzido pelos participantes.

De acordo com Sousa (2009) essas técnicas e instrumentos usados em uma investigação-ação podem ainda ser classificados como instrumentos, estratégias ou meios audiovisuais, como apresentados na Tabela 24.

Tabela 24
Técnicas e instrumentos de investigação-ação

Instrumentos	Estratégias	Meios Audiovisuais
Testes;	Entrevista;	Vídeo;
Escalas;	Observação participante;	Fotografia;
Questionários;	Análise documental.	Gravação em áudio;
Observação sistemática.		Diapositivos[81].

Fonte: Sousa, 2009, p. 318

Das técnicas e instrumentos apresentados na Tabela 24, nessa pesquisa não foram empregados o recurso de vídeo e a observação sistemática. O recurso de vídeo não foi considerado pelo facto de que durante o período de realização do doutoramento não haveria tempo útil para analisar todo o material produzido. Outra justificativa é que na instituição em que foi realizada a pesquisa não havia recursos suficientes para que a gravação de todas as aulas fosse realizada, pois o DMAT dispunha de uma câmera de vídeo e, no momento de nossa coleta de dados, havia três doutorandos recolhendo dados e precisando desse recurso audiovisual. Nas próximas subseções definiremos cada um dos recursos que foram usados nessa pesquisa.

4.8.1. Observação Participante

A observação dos factos é uma estratégia muito comum em pesquisas de cunho qualitativo e uma atividade fundamental na investigação-ação (Latorre, 2003). Gil (2008) define a observação como sendo "o uso dos sentidos com vistas a adquirir os conhecimentos necessários para o cotidiano" (p. 100). Para esse autor, a principal vantagem dessa técnica com relação a outras é que nela os factos são percebidos diretamente pelo investigador visto que não há intermediação. Dessa forma, a subjetividade envolvida no processo é reduzida. Conforme o nível de interação do pesquisador, a observação pode ser participante ou não participante. De acordo com Alvez-Mazzotti e Gewandsznajder (1999), nesse tipo de

[81] Termo usado para representar imagens estáticas. Por exemplo, slides produzidos no *PowerPoint*.

observação “o pesquisador se torna parte da situação observada, interagindo por longos períodos com os sujeitos, buscando partilhar o seu cotidiano para sentir o que significa estar naquela situação” (p.166). E, para registrarem as observações os investigadores utilizam registros do tipo narrativo descritivo (Latorre, 2003). De acordo com Máximo-Esteves (2008) os instrumentos metodológicos mais utilizados por investigadores para registrar as observações são as notas de campo e os diários.

4.8.2. Análise documental

Por documentos considera-se “qualquer registro escrito que possa ser usado como fonte de informação” (Alvez-Mazzotti & Gewandsznajder, 1999, p. 169). Nessa pesquisa foram considerados os seguintes documentos: diário de bordo, protocolos de respostas dos alunos, questionários, plano de ensino e plano político pedagógico dos cursos de graduação envolvidos na pesquisa.

4.8.2.1. Diário de bordo

O diário é o local em que o pesquisador registra cuidadosamente todas as etapas e ações que estão sendo desenvolvidas durante a pesquisa. Corroboramos com Latorre (2003) de que

> o diário do pesquisador recolhe observações, reflexões, interpretações, hipóteses e explicações sobre o que aconteceu. Ele fornece informações que são muito úteis para pesquisa. Como registro, trata-se de um compêndio de dados que pode alertar os professores para que desenvolvam seu raciocínio, mudem seus valores e melhorem sua prática. O diário é uma técnica narrativa que traz sentimentos e crenças capturados no momento em que ocorrem ou logo após, proporcionando assim uma ‘dimensão do estado de humor’ à ação humana. (pp. 60 – 61, tradução nossa)

Essa investigadora criou um diário de bordo virtual (blog), pela facilidade de poder acessá-lo em qualquer lugar que estivesse e em qualquer momento desde que houvesse conexão de internet. Além disso, se no momento não podia escrever em detalhes no diário, o meu correio eletrônico funcionava como um caderno de lembretes, pois escrevia mensagens curtas, para mim mesma, com o intuito de mais tarde registrar no blog as informações. A ideia de ter um diário de bordo em formato de blog foi inspirada nos diários de bordo dos nossos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática. Essa técnica havia sido empregada no semestre letivo que auxiliei uma colega de departamento na disciplina de Estágio Curricular Supervisionado. Importante ressaltar que por questões de ética o blog não é público, somente meus orientadores tinham permissão para acessar as informações. O blog foi atualizado constantemente durante os dois primeiros anos de doutoramento, enquanto estava reestruturando o projeto, projetando as ações, colocando-as em prática, coletando dados e fazendo uma análise preliminar dos resultados. Particularmente, foi um instrumento fundamental para a escrita da tese, pois como as aulas não foram gravadas em vídeo era a fonte que tinha disponível para consultar e relembrar todos os factos ocorridos durante os experimentos de ensino.

4.8.2.2. Protocolos de respostas dos alunos

Durante os três semestres letivos, todas as resoluções das atividades que foram desenvolvidas em sala de aula, em material impresso, foram recolhidas e digitalizadas. Além das resoluções dos problemas e/ou sequencias didáticas aplicadas também foram digitalizadas as respostas dos testes e questionários aplicados. Outro documento que compõe esse acervo são as atividades de formulação de problemas que foram entregues pela plataforma Moodle. Ter o acesso a todos esses materiais de forma física facilita o seu manuseio durante a análise de dados, entretanto, tê-los armazenados em meio digital e deixá-los disponíveis em uma "nuvem de dados" é uma maneira mais segura de garantir que os dados não serão perdidos, além de possibilitar que o pesquisador tenha acesso a qualquer informação no momento que precisar e em qualquer lugar. Nesse caso, todos os dados relacionados com a pesquisa estão armazenados em uma conta do Dropbox.

4.8.2.3. Questionários

Os questionários podem ser definidos como uma técnica de investigação constituída por um conjunto de indagações relacionadas com o tema investigado (Gil, 2008; Latorre, 2003). Geralmente, são entregues aos respondentes por meio impresso. Com a facilidade das tecnologias digitais que temos nos dias de hoje, alguns pesquisadores optam por criar formulários online e o enviam por correio eletrônico.

A fim de conhecer a opinião dos estudantes sobre a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Resolução de Problemas foi elaborado um questionário com duas questões abertas e seis questões fechadas. Uma das questões abertas se referia à identificação do curso a quem o respondente pertencia bem como ao número de vezes que esteve matriculado na disciplina; e, a outra, para que o estudante pudesse expressar livremente comentários que expressassem sua opinião/sugestões/críticas a respeito da metodologia inserida em sala de aula. As questões fechadas deveriam ser respondidas de acordo com a escala Likert de cinco pontos e que inquiriam opinião sobre: a forma de ensino com que teve contato na disciplina de *Cálculo* naquele semestre letivo vigente; à metodologia de RP no curso de *Cálculo*; às atividades propostas para serem trabalhadas em grupo durante as aulas; aos recursos utilizados na disciplina; a sua adaptação com a metodologia de RP; os motivos que melhor representava(m) a(s) dificuldade(s) sentida(s) em trabalhar com a metodologia de RP; e, opinião com relação à metodologia de RP inserida nas aulas. O questionário na íntegra está disponível no Anexo 2.

Outro questionário foi elaborado para captar informações a respeito das atividades de formulação de problemas que foram desenvolvidas em horário extraclasse. Esse inquérito versou sobre: a experiência desenvolvida; a importância da formulação de problemas; o comparativo da formulação de problemas versus resolução de problemas. Essas três questões também usaram a escala Likert de cinco pontos. A última questão era aberta para que pudessem expressar espontaneamente a opinião sobre as atividades de formulação de problemas. O questionário na íntegra está disponível no Anexo 3.

4.8.2.4. Plano de ensino

Para institucionalizar o compromisso de que a professora-doutoranda adotaria a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Resolução de Problemas para introduzir novos conteúdos de *Cálculo*, essa abordagem metodológica foi incorporada ao plano de ensino da disciplina, o qual foi aprovado pelos respectivos coordenadores de Curso de graduação ao qual a disciplina estava vinculada.

4.8.2.5. Plano Político Pedagógica do Curso

Esses documentos encontram-se disponíveis na homepage da UDESC/Joinville[82] e foram analisados com a finalidade de averiguar se a Resolução de Problemas se fazia presente nesses documentos norteados dos Cursos de graduação. Caso a resposta fosse afirmativa, identificaríamos "onde" ela era recomendada.

4.8.3. Entrevistas

A entrevista é uma técnica de recolha de dados que pode ser concebida como um diálogo entre duas pessoas, iniciado "pelo entrevistador com o objetivo específico de obter informações relevantes para uma investigação" (Bisquerra, 1989, p. 103). Em outras palavras, é uma forma de interação social, de diálogo assimétrico, "em que uma das partes busca coletar dados e a outra se apresenta como fonte de informação" (Gil, 2008, p. 109).

Diferentes tipos de entrevistas podem ser definidos conforme o seu nível de estruturação (Gil, 2008). De acordo com Máximo-Esteves (2005), em investigações de natureza qualitativa os gêneros mais comuns de entrevista são*: em profundidade, de história de vida* e *semiestruturada*. A autora complementa ainda indicando que a entrevista focalizada em grupos está se tornando mais popular. A

[82] Disponível em: https://www.udesc.br/cct/home

entrevista em profundidade é pouco estruturada, orientada por questões abertas, procura obter respostas ricas em descrições e detalhes, e ainda, pode ocorrer em várias sessões. A *entrevista de história de vida* também pode ocorrer em vários encontros e é orientada por um guião evolutivo que é adequado a cada encontro de acordo com o sequenciamento progressivo do assunto narrado. A entrevista *semiestruturada* é realizada em um único encontro com duração máxima de 45 minutos e é orientada por um guião previamente definido pelo investigador em que as questões que aludem a temas que "abrem portas a respostas amplas e desejavelmente longas, eivadas de pormenor, e veicula os pontos de vistas dos respondentes" (Máximo-Esteves, 2008, p. 96). E, a *entrevista focalizada em grupos*, de cinco a dez pessoas, visa dar oportunidades aos entrevistados de partilharem suas experiências e não passa de quatro sessões.

Na literatura não há unanimidade sobre as denominações de gênero de entrevistas nem de número de classificações. Por exemplo, Gil (2008) considera quatro gêneros de entrevistas (informais, focalizadas, por pautas e formalizadas), enquanto que Boni e Quaresma (2005) apresentam seis gêneros (entrevista estruturada, semiestruturada, projetiva, aberta, entrevistas com grupos focais e história de vida).

Nesse estudo optamos por entrevistas semiestruturadas que foram realizadas com características de uma conversa da professora de *Cálculo* (a investigadora) com seus estudantes. Após definir o critério de escolha dos alunos a serem entrevistados, efetuei o convite por e-mail. Após o aceite, organizei uma agenda de entrevistas e todas foram realizadas no meu gabinete no DMAT. As entrevistas foram áudio gravadas, com a concordância dos entrevistados. As suas transcrições foram feitas na íntegra, no entanto, foram desconsiderados os trechos que os entrevistados fugiam do foco de interesse. Apesar das respectivas transcrições terem sido enviadas por e-mail aos entrevistados, para que pudessem verificar se estavam de acordo com ela, poucos foram os que responderam concordando e/ou efetuando pequenas correções de escrita. Mais detalhes sobre o critério de seleção dos estudantes, quantas entrevistas foram realizadas e quando ocorreram serão fornecidos posteriormente nas seções 4.9.3.2 e 7.3.

4.8.4. Testes

Os testes em investigação educativa são empregados "para medir capacidades, aquisições, comportamentos e competências" (Sousa, 2009, p. 204) e por isso devem ser cuidadosamente elaborados garantindo-lhe o rigor, validade e fidelidade por todos os procedimentos. Os testes (pré-teste e pós-teste) elaborados deveriam avaliar os conhecimentos adquiridos em *Cálculo* e versaram sobre os seguintes assuntos: inequações, funções, limite, derivada e interpretação mecânica da derivada. Como o pré-teste e o pós-teste foram exatamente iguais, quando estivermos nos referindo aos dois testes, por convenção iremos mencionar apenas os testes. Os testes foram compostos por seis problemas cujas resoluções eram dissertativas em que os estudantes poderiam usar todo o seu conhecimento para solucioná-los. Eles foram elaborados no segundo semestre de 2016 com o objetivo de que a análise estatística dos resultados desse instrumento de avaliação viesse a complementar a análise qualitativa dos dados. Os detalhes do processo da aplicação piloto e de validação dos testes estão descritos na seção 4.9.3.2. Para que fosse possível realizar a análise estatística, os testes foram corrigidos de acordo com uma *escala holística focada* (Charles, Lester & O'Daffer, 1992) adaptada ao conteúdo do teste.

O software IBM SPSS Statistics 25 foi utilizado com o intuito de realizar a análise estatística por meio de uma ANCOVA, que é um método de análise estatística desenvolvido por Fischer em 1932 e pode ser entendido como uma combinação entre as análises de variância e de regressão (Glass & Hopkins, 1995; Marôco, 2010). Ao realizar uma ANCOVA testa-se simultaneamente o efeito das interações do grupo/turma (fator principal) e os resultados do pré-teste (covariável/variável independente) sobre as notas do pós-teste (variável dependente). Antes de efetuar uma ANCOVA é necessária a verificação dos seguintes pressupostos (Barbosa, 2009; Vieira, 2013): normalidade das distribuições, homogeneidade das variâncias, homogeneidade das retas de regressão, existência de uma relação linear entre a covariante e a variável dependente; e, fiabilidade da medição da covariante. A verificação de todos esses pressupostos será explanada no Capítulo 8, que trata especificamente da análise quantitativa.

Para selecionar as turmas que seriam as turmas de controle, usei minha experiência docente, pois conhecia o histórico do desempenho das demais turmas do primeiro curso de *Cálculo* da UDESC/Joinville desde 2007 desde a época que coordenei um projeto de ensino[83] em que as provas eram unificadas. Apesar do projeto ter encerrado em 2011, continuei lecionando a disciplina em diversos cursos da UDESC/Joinville. Sendo assim, tinha conhecimento da média de aprovações e da forma como eram compostas as turmas. Depois de mapear as possíveis turmas que seriam turma de controle, pedi autorização da professora regular dessas turmas para que os testes pudessem ser aplicados. Com a concordância da professora, ficou definido que a turma do curso de Licenciatura em Física seria a turma de controle da turma de Licenciatura em Química e, sua turma não exclusiva[84] seria a turma de controle da Licenciatura em Matemática. Ambos os testes foram realizados em todas as turmas no mesmo dia

[83] Para mais detalhes desse projeto de ensino consulte (Figueiredo *et. al.*, 2014)

[84] Turmas não exclusiva são constituídas por alunos dos diversos Cursos de graduação da UDESC/Joinville que estão a cursar ao menos pela segunda vez a disciplina.

em seus respectivos horários de aula. As minhas turmas foram avisadas que no dia 06 de março de 2017, fariam uma atividade avaliativa (pré-teste), mas sem dar muitos detalhes. Avisei-os porque gostaria que todos os matriculados estivessem presentes. Após ter sido aplicada a atividade avaliativa, de forma individual e sem consulta a qualquer tipo de material de pesquisa, expliquei que a atividade avaliativa era um pré-teste e que, ao final do semestre, fariam um pós-teste em data a ser futuramente combinada. Em nenhum momento os estudantes foram informados de que ambos os testes seriam a mesma avaliação escrita. Nas turmas de controle, por opção da docente responsável, os estudantes não foram informados com antecedência que fariam o pré-teste. No dia do teste, a professora explicou aos estudantes de que se tratava da atividade que fariam naquele dia e os mesmos foram convidados a participarem voluntariamente da pesquisa. Após esses esclarecimentos iniciais, o termo de consentimento e livre esclarecido foi assinado por esses estudantes de forma a registrar por escrito que concordavam em colaborar com a pesquisa. O pós-teste foi aplicado no dia 14 de junho de 2017 e todas as turmas participantes foram informadas com antecedência sobre essa data.

4.8.5. Escalas

Durante a pesquisa fizemos uso de duas escalas: a Likert e a holística focada. A *escala Likert* é uma escala de níveis diferentes usada “para registrar o grau de concordância ou discordância com determinada afirmação sobre uma atitude, uma crença, ou um juízo de valor” (Tuckman, 2000, p. 280). Essa escala foi utilizada em dois inquéritos, sendo que um deles teve por finalidade, conhecer a aceitação ou não dos estudantes com relação à metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e, o outro, sobre as atividades de formulação de problemas. Os cinco pontos considerados na escala Likert foram, nessa ordem: discordo totalmente; discordo; indiferente; concordo; e, concordo totalmente.

A escala holística focada é *holística* porque considera o processo de obtenção da solução, não apenas a resposta; e, é *focada* por atribuir um escore de acordo com as estratégias utilizadas na resolução do problema (Charles, Lester & O’Daffer, 1992). Por meio dessa escala foi possível transformar as resoluções discursivas, apresentadas pelos estudantes nos testes, em dados numéricos, os quais possibilitaram a realização da análise estatística. A pontuação atribuída a cada um dos itens dos problemas variou de 0 até 4 (Anexo 4). Para inserir os dados no SPSS e efetuar a análise, o escore atribuído conforme a escala holística focada adotada foi convertido para uma escala de notas de 0 a 100 pontos.

4.8.6. Meios Audiovisuais

Os recursos audiovisuais utilizados no decorrer da pesquisa foram: fotografias, gravações em áudio e diapositivos. As fotografias foram tiradas pela própria investigadora durante a realização de algumas atividades em sala de aula. As gravações em áudio foram usadas nas entrevistas e na última atividade desenvolvida em sala de aula usando a metodologia de RP. As gravações das entrevistas foram feitas usando o aplicativo *Voicex* para celular[85] e o software *Audacity* para notebook. Para gravar a aula mencionada a professora colocou o celular no bolso de seu jaleco. No momento da plenária, a professora parava em pé próxima dos alunos que estivesse explicando a estratégia de resolução efectuada pela equipe para que o áudio ficasse mais claro. Com relação a diapositivos, foram usadas apresentações no *PowerPoint*, geralmente, para apresentar as diferentes soluções dos problemas propostos pelas equipes para serem discutidas no momento da plenária (quando não era possível finalizar a plenária e formalização do conteúdo em uma mesma aula) e no momento da formalização do conteúdo. Os materiais usados na formalização do conteúdo eram todos disponibilizados na plataforma *Moodle*. Esse foi um recurso adotado para "ganhar tempo" em sala de aula, visto que desenvolver uma aula em que é disponibilizado tempo para o aluno discutir a resolução com os colegas integrantes de seu grupo o ritmo da aula é mais lento se comparado com as aulas tradicionais e expositivas dialogadas. Além desses recursos audiovisuais, o software de geometria dinâmica *GeoGebra*, foi utilizado com frequência para auxiliar nas interpretações dos conceitos por meio da análise gráfica.

4.9. Coleta de informações

Nessa fase se coletam as evidências por meio das estratégias e procedimentos previamente planejados, tendo em vista gerar subsídios para que as questões norteadoras da pesquisa sejam respondidas. Apesar de se ter planejado com antecedência os meios de coletar os dados, Romberg (2007) ressalta que "se se está examinando a cultura de uma sala de aula, os procedimentos para coletar informação podem se expandir ou tornarem-se mais focados na medida em que se coletam os dados" e que "esse passo deve ser feito sem rodeios" (p. 8). Intencionando deixar claro esse dinamismo da pesquisa realizada em sala de aula aliada ao método de investigação-ação, na próxima subseção iremos apresentar a trajetória da pesquisa que esse relatório tem por finalidade.

[85] Celular corresponde a telemóvel, no português de Portugal.

4.9.1. Trajetória da pesquisa

Durante os dois primeiros anos de doutoramento essa investigadora esteve a ministrar aulas de CDI, semestralmente, para duas turmas do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC/Joinville), localizado na cidade de Joinville, Santa Catarina, Brasil. Por esse motivo, optamos por adotar as minhas próprias turmas como sendo o público participante da pesquisa. No momento que os alunos se matriculavam na disciplina de CDI que seria ministrada por mim, não sabiam que fariam parte da coleta de dados de minha pesquisa de doutoramento. Porém, no primeiro dia de aula, ao apresentar o plano de ensino da unidade curricular (UC), no momento que falava sobre a metodologia a ser usada em sala de aula, propunha desenvolvê-las por meio de aulas expositivas e dialogadas e com a inserção da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de RP para introduzir novos conteúdos. Nesse momento, também esclarecia aos alunos que a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP era tema do meu doutoramento e os convidava a participarem da pesquisa. Após os esclarecimentos necessários, o termo de consentimento livre esclarecido (Anexo 5) era assinado pelos estudantes que estivessem de acordo em colaborarem com a pesquisa. Ao longo de todo o período de doutoramento, tive conhecimento de dois alunos que haviam se matriculado em minhas turmas de CDI que, após o primeiro dia de aula de 2017/1, solicitaram remanejamento de sala, porque não desejavam participar da pesquisa. A solicitação foi atendida pela chefia[86] do Departamento de Matemática da UDESC/Joinville, pois estava no período de reajuste de matrícula[87].

Ao longo do ano de 2016 foram realizados alguns experimentos nas aulas de CDI com o intuito de me familiarizar com a metodologia de RP, sentir a aceitação dos alunos e aprender a utilizar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação, sob a concepção de ensinar através da RP. A coleta de dados que seriam analisados com maior ênfase nessa tese foi realizada no primeiro semestre letivo de 2017. Como antes dessa pesquisa, minhas aulas sempre foram expositivas e dialogadas, precisava vivenciar na prática docente essa abordagem metodológica. Visto que durante toda a minha trajetória acadêmica, como discente e docente, o contato com a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP havia sido apenas de forma teórica e muito superficial, a fim de aprender como ministrar uma aula usando essa metodologia, busquei aparato na revisão bibliográfica de trabalhos de mestrado e doutorado para compreender como outros pesquisadores adotaram essa abordagem metodológica.

Os primeiros trabalhos que relatavam o uso da RP no Ensino Superior com que tive contato foram a dissertação de mestrado de Abdelmalack (2011) e a tese de doutorado de Noguti (2014).

[86]Informação recebida na discussão sobre os andamentos do trabalho no dia da Jornada Doutoral, realizada no dia 19 de outubro de 2017 na cidade de Florianópolis, Santa Catarina, Brasil.

[87] Havendo vaga em outra turma, os estudantes podem solicitar remanejamento de turma num determinado período no início do semestre letivo.

Abdelmalack desenvolveu um trabalho com o conteúdo de aplicações de derivadas com um grupo de seis alunos em horário extraclasse. E, Noguti ofertou um curso de Matemática Básica aos alunos ingressantes no Ensino Superior, que foi realizado no período que antecedia o início do período letivo. Ambas pesquisadoras adotaram o roteiro de atividades do grupo GTERP para orientarem suas aulas. Após ler a descrição detalhada da metodologia usada por essas pesquisadoras senti-me motivada e desafiada a inserir a metodologia nas minhas aulas de CDI. Essa motivação se deu por ver relatos que em aulas que usaram essa abordagem metodológica, os alunos passaram a participar de forma ativa nas tarefas propostas. Esses relatos informam que a participação dos estudantes nos trabalhos em grupo iniciava de forma tímida, mas conseguiam se adaptar com os trabalhos em grupo. Pela experiência docente de 11 anos (na época em que a pesquisa estava iniciando o doutoramento), sabia que em nas minhas aulas, os alunos participavam muito pouco e, como professora, raramente proporcionava oportunidade para os alunos trabalharem em grupo e de fazerem suas próprias descobertas. Lendo os trabalhos de Abdelmalack e Noguti, percebi que usando a resolução de problemas como metodologia poderia ser uma forma de fazer com que meus alunos saíssem do comodismo de receberem tudo pronto[88] e tornarem-se agentes mais ativos e comprometidos com sua aprendizagem. Para tanto, como docente, precisava mudar minha prática de ensino. Ou seja, deveria deixar de “falar tanto” em sala de aula e aprender a “ouvir mais”, pois adotando essa metodologia minha função passaria a ser de mediadora do conhecimento. Assim sendo, não poderia apresentar respostas aos alunos do tipo sim/não ou certo/errado ou ainda apontar explicitamente o caminho correto para obter uma solução. Adotando a nova abordagem metodológica, no momento que o estudante estivesse resolvendo um problema, se era necessário prestar auxílio, como professora deveria auxiliar o estudante com a interpretação dos problemas propostos por meio de questionamentos, e ainda, caso percebesse equívocos na resolução, deveria instigar a reflexão dos estudantes se os caminhos adotados no processo de resolução eram adequados.

A trajetória dessa pesquisa pode ser organizada em quatro fases, como apresentadas na Tabela 25. Na sequência desse capítulo serão descritos com mais detalhes o desenvolvimento metodológico e os procedimentos adotados desde o primeiro semestre letivo de 2016 até o final do primeiro semestre letivo de 2017 (Fases I, II e III) buscando evidenciar o processo de ação-reflexão-ação da professora ao longo da trajetória de pesquisa, que caracteriza uma investigação-ação.

[88] A expressão “tudo pronto” foi usada porque as aulas que a professora ministrava não proporcionavam oportunidades dos estudantes resolverem exercícios propostos, ela sempre resolvia com a turma.

Tabela 25
Apresentação e descrição das fases percebidas no percurso da pesquisa

Fase	Período	Descrição
I	De janeiro a junho de 2016	– Revisão bibliográfica; – Reestruturação do projeto de tese; – Elaboração de atividades a serem experienciadas em sala de aula; – Primeiros contatos da professora doutoranda com o uso da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; – Elaboração e validação de questionário de avaliação da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; – Criação e atualização constante do diário de bordo virtual (blog).
II	De julho a dezembro de 2016	– Revisão bibliográfica; – Reelaboração de atividades experienciadas na Fase I e elaboração de novas atividades; – Aplicação das atividades referidas no item anterior; – Definição de que as turmas de *Cálculo* que fariam parte da coleta de dados no primeiro semestre de 2017 seriam as mesmas do atual semestre letivo; – Elaboração e realização de entrevistas semiestruturadas, aplicadas em dois momentos (no meio e final do semestre letivo); – Divulgação dos primeiros experimentos da Fase I e participação em eventos técnicos científicos; – Criação de um "grupo de estudo" extraclasse; – Elaboração e validação do pré-teste e pós-teste; – Inserção da formulação de problemas no projeto de tese; – Elaboração e validação das atividades de formulação de problemas; – Elaboração de dois questionários para avaliar as atividades de formulação de problemas (um para aplicar antes outro após a realização das atividades); – Atualização constante do blog; – Aplicação dos questionários elaborados na Fase I;
III	De janeiro a junho de 2017	– Inserção da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no plano de ensino da disciplina de *Cálculo* ministrada pela professora doutoranda; – Seleção das turmas de controle; – Aplicação do pré-teste e do pós-teste, respectivamente, nos meses de março e junho; – Reestruturação das atividades desenvolvidas na Fase II e elaboração de novas atividades; – Aplicação das atividades (re)elaboradas; – Criação e gerenciamento de um fórum de discussão na plataforma Moodle para discutir as atividades de formulação de problemas; – Entrevistas semiestruturadas realizadas no final do semestre letivo; – Aplicação do questionário de avaliação das atividades de

		formulação de problemas; – Atualização constante do blog; – Revisão bibliográfica;
IV	De julho de 2017 a dezembro de 2018	– Atualização do blog; – Análise quantitativa e qualitativa dos dados; – Divulgação do trabalho e participação em eventos técnico científicos da área; – Elaboração e submissão de dois artigos para revistas; – Revisão bibliográfica; – Redação da tese.

4.9.2. Fase I – 2016/1[89]

4.9.2.1. Experimentos

Os primeiros experimentos realizados ocorreram no primeiro semestre letivo[90] de 2016 na UDESC/Joinville. O público participante desse semestre letivo foi composto por alunos ingressantes na Universidade, matriculados nas turmas de CDI, dos cursos de Bacharelado em Ciência da Computação (BCC) e Licenciatura em Física (LEF). Em cada uma dessas turmas existia um estudante que estava a cursar CDI ao menos pela segunda vez. Ao todo havia 76 matriculados, sendo 38 estudantes em cada turma. Convém destacar, que a disciplina de CDI é uma disciplina de primeira fase em todos os cursos de graduação da UDESC/Joinville, exceto no curso de Licenciatura de Matemática que é na segunda fase, e tem uma carga horária de 108 horas/aula, sendo 6 horas/aulas semanais distribuídas em 2 horas/aula consecutivas nas segundas, quartas e sextas-feiras, com duração de 50 minutos cada hora/aula. A Tabela 26 resume as tarefas desenvolvidas em sala de aula nesse semestre letivo com o uso da metodologia de Resolução de Problemas. Essas tarefas encontram-se na íntegra no Anexo 6.

Tabela 26
Tarefas desenvolvidas por meio da metodologia de RP em 2016/1

Nome[91]	Assunto(s) envolvido(s) que desejava-se trabalhar	Fonte
Tarefa I	Conjuntos numéricos e intervalos Inequação do primeiro/segundo grau	Adaptado de Noguti (2014)
Tarefa II	Noção intuitiva de limite Definição formal de limite	Sabatke (2016)

[89] Por convenção, ao denotar AAAA/1 ou AAAA/2 significa, respectivamente, primeiro semestre letivo do ano AAAA e segundo semestre letivo do ano AAAA.
[90] Na UDESC/Joinville o primeiro semestre letivo, geralmente, é considerado do final de fevereiro até meados de julho; e, o segundo semestre letivo inicia no final de julho e termina em meados de dezembro.
[91] Considerado nesse texto.

Tarefa III	Interpretação cinemática da derivada Definição de derivada de uma função em um ponto Interpretação geométrica da derivada	Adaptado de Abdelmalack (2011)
Tarefa IV	Otimização	Adaptado de Nunes, Noguti e Allevato (2014)

A primeira tarefa desenvolvida em sala (Tarefa I), teve duração de 6 horas/aula, a contar do primeiro dia de aula. A primeira parte da Tarefa I era um problema de caráter matemático para trabalhar com conjuntos. A segunda e terceira parte eram compostas por dois problemas relacionados com o conteúdo de inequações e funções do primeiro grau e intervalos. Como os problemas tinham a finalidade de motivar o estudo desses conteúdos, o aluno poderia usar os conhecimentos matemáticos que possuía, para resolvê-los. Cada uma das partes dessa tarefa foi trabalhada em uma aula[92], nas quais as etapas do roteiro de Allevato e Onuchic (2014) foram adotadas.

A Tarefa II teve por objetivo trabalhar com a definição formal de limite de uma função real de uma variável real, foi aplicada por essa professora pesquisadora, mas elaborada pela acadêmica Jéssica Meyer Sabatke. Na época, ela estava finalizando o curso de Licenciatura em Matemática e o tema da pesquisa de seu trabalho de graduação foi o uso da metodologia de ensino chamada Engenharia Didática[93] para abordar a definição formal de limite. Seu objetivo era aplicar a sequência didática desenvolvida em alguma turma de CDI cujo conteúdo de limites estivesse sendo introduzido. Como pela teoria da Engenharia Didática, uma tarefa não pode ser aplicada pela pessoa que a elaborou, aceitei participar da pesquisa dela cedendo as minhas turmas de CDI e conduzindo as aulas seguindo as orientações do roteiro de Allevato e Onuchic (2014). Entendemos que essas aulas se caracterizaram como aulas mediadas pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática para ensinar através da RP, pois a sequência didática foi utilizada para introduzir o conteúdo de limites. Essa tarefa foi desenvolvida ao longo de 6 horas/aula.

A Tarefa III foi adaptada da dissertação de mestrado de Abdelmalack (2011) e consistiu em introduzir o conteúdo de derivadas a partir da interpretação cinemática da derivada. O último problema desse conjunto de tarefas, tratava da determinação da taxa de variação média para intervalos cada vez menores, sem considerar a variável independente como sendo o tempo. Nesse problema, definia-se derivada de uma função real de uma variável real em um ponto e indagava-se sobre a derivada num

[92] Nesse contexto uma aula corresponde a duas horas-aula seguidas uma da outra sem interrupções.
[93] Uma diferença entre Engenharia Didática e RP identificada é que na Engenharia Didática há necessidade de fazer uma análise *a priori* e *a posteriori* das atividades propostas. Mais detalhes podem ser encontrados na tese de doutorado de Zuchi (2005).

ponto específico. Essa Tarefa foi completada em 2 horas/aula e como novo problema proposto (décima etapa do roteiro utilizado) propôs-se como trabalho extraclasse a sequência didática que motivaria a interpretação geométrica da derivada. Essa tarefa extraclasse foi discutida na aula posterior. Mais detalhes dessa experiência encontram-se em Azevedo, Figueiredo e Palhares (2016).

A Tarefa IV foi extraída de Nunes, Noguti e Allevato (2014). Essas autoras apresentavam uma sugestão de como abordar o conteúdo de otimização no Ensino Médio[94] e sugeriam que poderia ser adaptada para o Ensino Superior. Essa tarefa visava discutir os cilindros circulares que poderiam ser construídos a partir de uma folha retangular de papel, sem recortá-la, e investigar se o volume dos cilindros construídos seria o mesmo. Essa era a proposta para ser experienciada nas aulas de Ensino Médio. Inicialmente, adotei essa mesma dinâmica na aula de *Cálculo*. Depois de generalizar a solução para uma folha de papel de qualquer dimensão, aumentei o grau de dificuldade, desafiando os alunos a encontrarem as dimensões do cilindro circular, com base e tampa, de maior volume que poderia ser construído a partir de uma folha retangular de papel. Essa tarefa foi realizada em 2 horas/aula.

4.9.2.2. Procedimentos

Em meados do primeiro semestre de 2016 foi iniciada a construção de um inquérito a ser aplicado ao público participante da pesquisa com o objetivo de poder detectar as impressões pessoais dos estudantes sobre a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP inserida nas aulas de CDI. Para validar esse instrumento de avaliação, a primeira versão do inquérito foi enviada (na versão digital) a seis professores do DMAT, sendo que desses docentes um atua na área de estatística, três na área de Educação e outros dois na área de Matemática. O intuito desse procedimento, além de saber se as questões estavam bem formuladas, era receber contribuições que viessem a agregar o instrumento de avaliação e facilitar a compreensão do respondente. Obtivemos retorno de quatro dos seis professores. As sugestões de melhoria foram avaliadas e aceitas as que julgamos pertinentes. Para finalizar o instrumento de avaliação era necessário fazer uma pilotagem com um público similar ao da coleta de dados oficial da pesquisa. Logo, meus alunos daquele semestre letivo vigente atendiam esse critério. Assim sendo, todos os alunos matriculados com a professora foram convidados a responder ao inquérito, de forma virtual, cujo formulário digital foi criado no *google docs* e disponibilizado aos respondentes via e-mail. Dos 76 matriculados, apenas 12 acadêmicos preencheram o formulário. Apesar do pequeno número de retorno que tivemos, foi percebido que os respondentes entenderam todos os questionamentos e não houve sugestão de reformulação de escrita. Essa experiência nos permitiu definir

[94] Equivalente ao Ensino Secundário de Portugal.

que nos demais semestres em que o questionário fosse aplicado, usaríamos o meio impresso e em horário de aula, com o intuito de obter um número mais expressivo de respostas.

4.9.2.3. Reflexões

No primeiro semestre letivo, em particular, na Tarefa I, senti muita dificuldade em cumprir a sexta etapa do roteiro de Allevato e Onuchic (2014), relacionada ao registro das atividades na lousa, por não conseguir alunos que se prontificassem de forma voluntária a apresentarem suas resoluções. Por isso, a partir da Tarefa II, as discussões das soluções apresentadas ocorreram de forma oral. E, para formalizar o conteúdo, usava a lousa. Com a experiência adquirida nesses primeiros experimentos e por discussões ocorridas em eventos técnico científicos que participei, compreendi que não devia solicitar espontaneamente voluntários para registrarem suas resoluções na lousa, mas deveria identificar os grupos que apresentaram estratégias diferentes e solicitar para que essas equipes elegessem um representante para ir à lousa apresentar sua estratégia de solução. Como tentativa de amenizar esse problema, a partir do segundo semestre de 2016, no primeiro dia de aula, durante a apresentação do plano de ensino, ao explanar sobre a metodologia a ser adotada, passei a fazer uma breve apresentação (preparada no *PowerPoint*) para clarificar aos estudantes como era uma aula mediada por essa abordagem metodológica (roteiro de Allevato e Onuchic, 2014) e que como se pode proceder na resolução de um problema (quatro etapas de Polya, 2006).

Com relação à receptividade dos estudantes com a metodologia de RP, na Tarefa I, realizada no primeiro dia de aula, houve muita resistência em romperem com a forma tradicional de aula. Apesar de ter solicitado que o trabalho fosse realizado em grupos de dois ou mais integrantes, poucos estudantes atenderam a solicitação. Nas demais tarefas propostas, a resistência a trabalhar em grupos, foi menor. Outro constrangimento observado foi que no momento em que os estudantes solicitavam meu auxílio, faziam questionamentos buscando ouvir como resposta certo/errado ou sim/não. No entanto, respondia por meio de outro questionamento com a intensão de fazer o estudante repensar a estratégia adotada, caso estivesse errado, e pudesse se sentir mais seguro com a solução proposta, se estivesse correta. Dessa mesma forma, a professora procedeu nos demais semestres.

No primeiro semestre de doutoramento, sobre a questão da autoavaliação, não me era muito clara “como ocorria” nem “como” deveria ser feita, pois nos referenciais bibliográficos lidos até aquele momento, nenhum se referia de forma explícita a respeito desse item. Acreditava que a autoavaliação era uma autorreflexão sobre sua forma de agir nas situações postas em aula. Por isso, elaboramos um inquérito com três questionamentos a fim de saber como o próprio estudante avaliava seu trabalho no grupo, como avaliava seu grupo e um espaço para deixar opinião/sugestão/críticas sobre a metodologia de RP que fora adotada em algumas aulas. Esse inquérito foi feito na forma digital, em um formulário criado no *google docs*, e foi enviado por e-mail a todos os estudantes após a realização da Tarefa III. Dos 76 matriculados, 44 responderam esse formulário. Porém, foi somente após ter participado do grupo de discussão sobre Resolução de Problemas no XX Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática, em novembro de 2016 na cidade de Curitiba, Paraná, Brasil, e ter presenciado o professor Márcio Pironel[95] falar sobre avaliação é que ficou-me claro que o ápice da autoavaliação da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação ocorre no momento da plenária. Nesse momento os estudantes têm a oportunidade de discutirem suas ideias, compararem suas soluções com as soluções dos colegas e aprenderem com as diferentes formas de resolução ou mesmo compreendendo seu próprio erro. Esses são os motivos pelos quais o momento de discussão das resoluções propostas pelos estudantes é tão importante.

O formulário sobre avaliação que fora respondido pelos estudantes do primeiro semestre de 2016 não foi mais utilizado nos semestres posteriores. Mas o comentário deixado por um estudante repetente, que esteve matriculado na turma de LEF, encorajou-me a continuar com a pesquisa no segundo semestre de 2016. Pois, como será explanado na próxima seção, uma de suas turmas seria formada essencialmente por alunos repetentes de CDI e, era de conhecimento que essa metodologia é recomendada para estudantes que ainda não tivessem tido contato com o conceito/conteúdo que o professor desejava ensinar (Andrade & Onuchic, 2017). Na Figura 23 pode-se ver o comentário desse estudante, afirmando que com o uso da metodologia de RP pôde entender melhor os conceitos de *Cálculo*.

> Apesar de já ter feito Cálculo I, descobri que não sabia muito sobre o assunto. Quando analisa-se o raciocínio envolvido na matéria, acredito que o aprendizado seja mais efetivo, ou seja, o Cálculo deixa de ser uma coisa mecânica e passa a ser uma lógica. Através desses exercícios, é possível entender toda a lógica envolvida na Matemática e perceber que tudo tem fundamento e não "caiu do céu". Desde os exercícios com funções, limites e agora derivada, consigo concluir que esse tipo de método melhora e muito a assimilação dos conteúdos.

Figura 23 - Opinião sobre a metodologia de RP de um estudante que fez pela segunda vez CDI.
Fonte: Dados da pesquisa.

4.9.3. Fase II – 2016/2

[95] Nos trabalhos de Onuchic e Allevato o termo avaliação em metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de RP passou a ser utilizado após o trabalho de mestrado de Pironel (2002).

4.9.3.1. Experimentos

No segundo semestre letivo de 2016 ministrei CDI para as turmas dos cursos de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Química, sendo que o número de matriculados em cada turma, respectivamente, foi de 38 e 34 alunos, totalizando 72 participantes da pesquisa. Por convenção, sempre que nos referirmos às turmas dos cursos de Licenciatura em Matemática e Química, respectivamente, denotaremos por MAT e QUI. Vale ressaltar que na MAT havia apenas 11 acadêmicos que cursavam Licenciatura em Matemática, os demais estudantes estavam vinculados ao curso de LEF ou aos cursos de Engenharia (Civil, Elétrica ou Mecânica). Essa heterogeneidade de cursos numa mesma sala ocorre com frequência na turma de *Cálculo* da MAT, porque nesse Curso a disciplina é componente curricular da segunda fase. Dessa forma, alunos repetentes de CDI podem se matricular nessa turma, visto que a ementa dessa UC é a mesma tanto nos cursos de Licenciaturas como nos de Engenharias da UDESC/Joinville. Dos 38 alunos matriculados na MAT, apenas seis cursavam pela primeira vez a disciplina e todos esses eram alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Esse segundo semestre de pesquisa foi uma experiência muito diferente do semestre anterior, pois em 2016/1 havia trabalhado com apenas dois alunos que já haviam cursado CDI.

Pelas informações apresentadas na Tabela 27, sobre as Tarefas desenvolvidas usando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP, no segundo semestre de 2016 foram inseridas duas tarefas a mais do que no primeiro semestre letivo e correspondem às Tarefas II' e III'. As atividades que já haviam sido aplicadas no primeiro semestre de 2016, exceto a Tarefa VI', foram readequadas. Algumas modificações nas atividades tiveram o intuito de facilitar a compreensão dos estudantes, outras apenas se referiram a alteração de contexto dos problemas a fim de que as Tarefas não ficassem enfadonhas a algum estudante que estivesse repetindo a unidade curricular e fosse meu ex-aluno de CDI, por estar refazendo problemas cuja solução já conhecia/lembrava do semestre anterior. O Anexo 7 apresenta na íntegra todas as atividades que foram desenvolvidas em 2016/2.

A primeira parte (problemas 1 e 2) da Tarefa I', com relação à Tarefa I, teve apenas o *layout* modificado. Nos problemas da segunda e da terceira parte da Tarefa I, que traziam problemas com contexto real, foram modificadas as contextualizações. Por exemplo, o último problema proposto que almejava trabalhar com as inequações de segundo grau teve sua contextualização modificada, porque na primeira versão (Tarefa I – problema 6) o problema tratava de um grupo de estudantes que estava alugando um ônibus para ir a um concerto e, conhecendo a realidade brasileira, isso dificilmente poderia ser uma situação real. Por isso, optou-se por supor que os estudantes estariam fretando um ônibus para assistir um jogo de futebol. Cada uma das partes desse conjunto de tarefas teve duração de 2 horas/aula.

Tabela 27

Tarefas desenvolvidas por meio da metodologia de RP em 2016/2

Nome	Assunto(s) envolvido(s) que desejava-se trabalhar	Fonte
Tarefa I’	Conjuntos numéricos Inequação de primeiro grau e intervalos Inequação de segundo grau Inequações quocientes	Tarefa I reestruturada
Tarefa II’	Definição de módulo ou valor absoluto Equações modulares	Autoria própria
Tarefa III’	Definição de função Formas de representação Domínio discreto e domínio contínuo Função do primeiro grau Funções definidas por partes Funções polinomiais Funções compostas Paridade de uma função	Autoria própria
Tarefa IV’	Noção intuitiva de limite – Parte 1 Definição formal de limite – Parte 2 Definição formal de limite no infinito – Parte 3	Adaptado de Sabatke (2016) e Sabatke, Figueireo, Siple e Azevedo (2017)
Tarefa V’	Interpretação cinemática da derivada Definição de derivada de uma função em um ponto Interpretação geométrica da derivada	Igual a Tarefa III
Tarefa VI’	Otimização	Igual a Tarefa IV

A Tarefa II’, essencialmente matemática, foi elaborada pensando na ordem sequencial com que a professora costumava abordar os conteúdos programáticos do plano de ensino. Por experiência docente, geralmente os estudantes resolvem de forma mecânica, “tirando” o módulo diretamente porque aprenderam assim (quem já conhecia), mas desconhecem o motivo de tal procedimento. Para esclarecer a situação que acabo de colocar, tome-se como exemplo a equação modular $|2 - x| = 3$. Para resolve-la, tira-se a notação de módulo e escreve-se $2 - x = \pm 3$, obtém-se a solução das duas equações e, alguns estudantes lembram de testar se os valores encontrados satisfazem a equação dada. Com o intuito de explicar esse significado e motivar a definição, propus uma atividade que iniciava indagando sobre a distância entre dois números (na reta real), um negativo, outro positivo. Dessa forma, buscava-se a interpretação geométrica do significado do valor absoluto. Em seguida, foram propostas duas equações modulares para serem resolvidas, pois dessa forma poderia identificar as estratégias usadas pelos estudantes para resolvê-las.

Apesar de nas Tarefas I' e II' o assunto de funções de primeiro grau e de função modular terem surgido espontaneamente, somente na Tarefa III' buscou-se entender a concepção do estudante acerca da definição de função. O objetivo dessa atividade foi abordar as diferentes formas de representação de uma função. Para tanto, foram propostos aos estudantes problemas que envolviam tipos de linguagens diferente, tais como: obter a forma de representação gráfica de um problema dado na linguagem corrente, sendo que o problema não apresentava dados numéricos; representar graficamente uma função dada na forma tabular e fazer a diferenciação entre domínio discreto e domínio contínuo; interpretar graficamente quando uma curva plana representa o gráfico de uma função; a partir do gráfico extrair as informações sobre os conjuntos que representam o domínio e a imagem da função; trabalhar com função composta e paridade de uma função.

As duas primeiras partes da Tarefa IV' foram uma adaptação da sequência didática apresentada na Tarefa II, que fazia parte da pesquisa de Sabatke (2016) e a terceira parte da Tarefa II foi extraída de Sabatke *et al.* (2017). As modificações feitas nas duas primeiras partes foram: diminuir as atividades referentes a investigação preliminar (entendimento sobre limite e exploração sobre inserir polígonos inscritos num círculo e incluir a exploração da (não)existência do limite bilateral das funções $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$ e $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$ em $x = 0$. A discussão da existência ou não desses limites por construção de tabelas com valores cada vez mais próximos de zero pode levar a conclusões erradas, por isso essas funções foram escolhidas, pois motivavam a necessidade de se ter um procedimento com mais rigor matemático que garanta a existência e unicidade do limite. Ou seja, uma forma rigorosa de se provar que o valor determinado por aproximações e/ou por análise gráfica de facto é o limite desejado. No semestre anterior, já havia feito essa discussão com a turma, mas não fazia parte da sequência didática.

A Tarefa V' não foi alterada com relação à Tarefa III. A única modificação foi o layout. Quanto ao experimento de ensino em sala de aula, na primeira parte dessa sequência didática foi realizada a discussão de toda ela em sala de aula. Mas, como havia várias tabelas a serem preenchidas, no momento da plenária quando devia-se discutir os dados das tabelas, optei por apresentar os cálculos previamente feitos no software *Excel* e fizemos a discussão em torno dos motivos que geraram alguns valores diferentes daqueles apresentados bem como tecer comentários de possíveis erros que observei/identifiquei no momento da resolução dos problemas. A parte 2 da tarefa foi proposta como atividade extraclasse e deveria ser entregue na aula seguinte, que seria iniciada com a sua discussão. Com essa dinâmica os estudantes tiveram mais tempo para pensar sobre o que estava sendo proposto e consegui adiantar- um pouco o conteúdo, pois trabalhando com essas atividades estava "me atrasando" no conteúdo se comparada com minhas aulas ministradas de forma tradicional.

A Tarefa VI' foi a mesma Tarefa IV aplicada no primeiro semestre de 2016. Porém, em virtude do avançado tempo do semestre letivo, optei por não distribuir folhas de papel para que os alunos construíssem os cilindros, levei duas folhas retangulares, de mesmo tamanho, de plástico transparente. Com questionamentos sobre as possibilidades existentes para construir um cilindro sem haver perda de material e, com auxílio dos estudantes, os cilindros foram construídos. Depois dessa dinâmica, o desenvolvimento da atividade se deu de forma similar à experiência do semestre anterior.

4.9.3.2. Procedimentos

No final do mês de agosto, como os alunos da QUI eram participativos e interagiam bastante com a professora, senti-me à vontade para questionar a turma a fim de saber se estavam satisfeitos com a forma como as aulas estavam sendo conduzidas. Em outras palavras, desejava saber se estavam se adaptando com a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP utilizada. Para minha surpresa, alguns estudantes se manifestaram publicamente contrários à metodologia que estava sendo adotada. Dentre as justificativas, argumentavam que não gostavam de primeiro resolver um problema da forma como julgavam correto e, no momento da plenária, descobrirem que fizeram "tudo errado". O estudante estava se referindo a fazer "tudo errado", porque as suas resoluções eram diferentes da forma como a professora fazia na formalização do conteúdo. E, quando alguma solução apresentada na lousa continha algum tipo de erro, geralmente de matemática básica, sob meu olhar docente, esses eram os melhores momentos da plenária, porque tinha a oportunidade de corrigir/discutir esses tipos de erros antes da avaliação escrita. Em sala de aula, coloquei esse ponto de vista, mas parecia que continuavam não concordando. Essa polêmica gerada em sala de aula, fez com que sentíssemos a necessidade de entrevistar alguns alunos dessa turma para entender mais os motivos que os fazia não estarem satisfeitos com a abordagem que vinha sendo dada. Para tanto, convidei seis alunos, cinco da QUI e um da MAT[96]. Dentre esses, convidei os alunos da QUI que se manifestaram contrários à metodologia e os demais que não conhecia.

As entrevistas ocorrem no final do mês de setembro, pois essa estratégia foi definida em reunião com os meus orientadores no dia sete deste mesmo mês. Após essa definição, levou cerca de duas semanas entre estabelecer o contato com os estudantes e conseguir agendar os horários para entrevista, conforme a sua disponibilidade. No mês de setembro, continuei utilizando na QUI as atividades

[96] Nessa turma não houve manifestações contrárias ao uso da metodologia.

preparadas para trabalhar através da RP, mas alterei a dinâmica da sala de aula. Passei a auxiliar mais os estudantes no esclarecimento de dúvidas e promover mais discussões conjuntas para resolver o problema com a turma, ou seja, estava usando a abordagem de ensinar *sobre* resolver problemas.

As entrevistas foram semiestruturadas e assumiram um tom de conversa com os estudantes (Anexo 8). O objetivo da entrevista foi registrar as impressões pessoais desses estudantes sobre a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da RP, tentando evidenciar aspectos positivos e negativos do uso dela em sala de aula para introduzir novos conteúdos, ou seja, os motivos pelos quais (des)aprovavam seu uso; bem como ouvir críticas e sugestões sobre tarefas que poderia/deveria propor em suas aulas que poderiam ajudar o aluno em seu aprendizado; e, opinião sobre a criação de um grupo de estudo em horário extraclasse no qual me faria presente com o intuito de sanar as dificuldades. Surpreendentemente, dos seis estudantes entrevistados, apenas um deles era indiferente a eu usar ou não a metodologia de RP. Os demais discentes todos se mostraram favoráveis ao seu uso em sala de aula, pois os estudantes tinham a oportunidade de usar do seu conhecimento prévio para resolver problemas que almejavam trabalhar com novos conteúdos. Além disso, apontaram como aspecto positivo os trabalhos em grupo que vinham sendo desenvolvidos na sala de aula, principalmente para alunos com mais dificuldades. Como sugestões de atividades que poderia implementar para auxiliá-los na aprendizagem, pediram mais trabalhos[97] extraclasses, por exemplos, exercícios que tivesse preparado para trabalhar em sala, depois da formalização do conteúdo, e não tivesse tido tempo de fazê-lo, poderia deixar como trabalho extraclasse. Outra sugestão foi marcar um horário para tirar dúvidas via *chat* na plataforma Moodle. A primeira sugestão foi implementada. Passei a dar trabalhos semanais, que deveriam ser postados no Moodle. A segunda sugestão, não foi implementada, porque já existia horário de monitoria de CDI que disponibilizava essa ferramenta, no entanto, nenhum dos meus alunos a usava. Para motivá-los a usar, teria de atribuir alguma nota, como fora feito com os trabalhos. Com relação à criação de um grupo de estudo em horário extraclasse, todos os entrevistados acharam interessante. Na prática, disponibilizei, além dos meus horários normais de atendimento extraclasse no meu gabinete, mais dois horários semanais (das 11h às 12h) que estaria disponível a fim de auxiliar os estudantes nesse estudo em grupo. Esse acompanhamento foi ofertado numa sala de aula, próxima das salas que diversos estudantes tinham aula no horário antecedente ao atendimento marcado afim de facilitar a sua participação. Apesar de todos terem aprovado essa estratégia, julgamos que ela não teve sucesso, pois inicialmente, almejamos que nesse grupo de estudo poderia esclarecer todo o tipo de dúvidas, desde as mais básicas até dos conteúdos recém trabalhados

[97] Chamados pelos alunos de “trabalhinhos”.

em sala de aula e não estava sendo procurada pelos estudantes que possuíam mais dificuldades. A ideia desse acompanhamento dos alunos surgiu após a professora identificar na correção da primeira avaliação escrita muitos erros de matemática elementar que não foram observados durante as aulas. Durante todo o período de existência desse atendimento, o maior número de estudantes que procurou atendimento foi seis. Porém, não estavam trabalhando em grupo. Esses horários extras disponibilizados, na prática, funcionaram como mais dois horários de atendimento extraclasse da professora. Geralmente, os estudantes procuravam por dúvidas pontuais e referentes aos trabalhos extraclasses que foram incorporados à disciplina. Convém destacar que esses horários de atendimentos foram ofertados para as duas turmas. Além da baixa procura que teve, os alunos que procuraram com mais frequência, foram os alunos da MAT, que não apresentavam tantas dificuldades. Na Figura 24, pode-se observar uma estudante resolvendo na lousa um problema que tinha dúvida. Esse foi o único dia que, ao meu ver, de facto, houve trabalho em grupo, pois os demais estudantes presentes na classe possuíam dúvida sobre o mesmo assunto e estavam auxiliando a resolução que estava sendo feita na lousa.

Em meados de novembro, entrevistei mais sete estudantes, dois da QUI e cinco da MAT, em torno de 20 dias antes do término das aulas do semestre letivo[98]. Essas entrevistas buscaram avaliar as ações tomadas após as primeiras entrevistas, as atividades desenvolvidas em sala de aula e em horários extraclasse, além de questionar sobre atividades que poderiam ser implementadas em um próximo semestre (roteiro da entrevista no Anexo 8). Além disso, desejava saber a opinião desses estudantes sobre o uso da metodologia para introduzir os conteúdos. Os aspectos positivos destacados por esses entrevistados foram os mesmos apontados pelos alunos que participaram das entrevistas do meio do semestre. Com relação aos trabalhos extraclasse, que foram propostos após a sugestão do primeiro grupo de entrevistados, esses estudantes acharam muito trabalho e que deveria diminuir a quantidade de trabalhos propostos. Ao todo foram treze alunos entrevistados, desses nove aprovavam o uso da metodologia e quatro consideravam indiferente trabalhar ou não com RP, pois os conteúdos que precisavam estudar estavam disponibilizados na apostila. Mais detalhes dessas entrevistas podem ser encontrados em Azevedo, Figueiredo e Palhares (2017a).

[98] Não realizei a entrevista na última semana de aula, porque estive em licença médica.

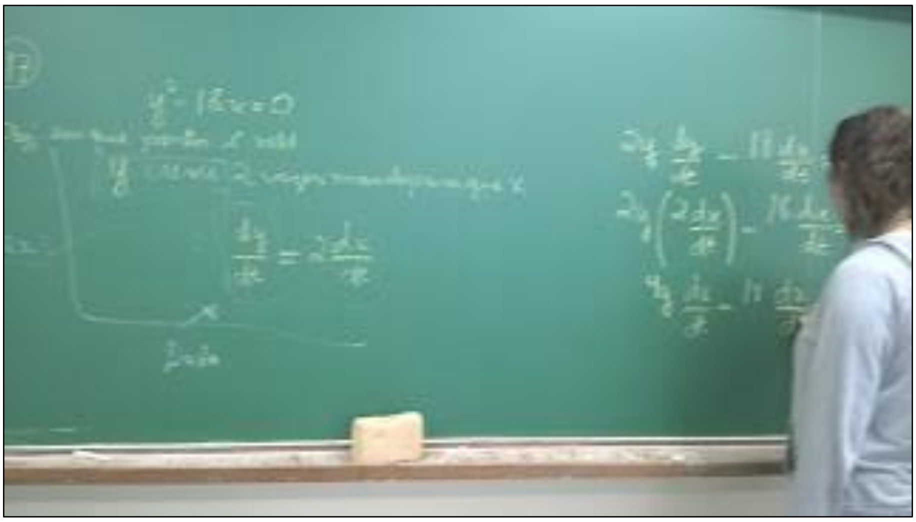


Figura 24 - Atendimento extraclasse do dia 25 de outubro de 2016.
Fonte: Arquivo pessoal.

Em setembro foram elaborados os testes a serem aplicados no primeiro semestre de 2017 nas minhas turmas de CDI, que seriam o público participante da pesquisa, e a duas turmas similares a essas, que seriam as turmas de controle. Para validação desse instrumento de avaliação, contamos com a colaboração de quatro professores do DMAT. Desses, três professores deram retorno e apresentaram suas contribuições. Para finalizar a validação era necessário encontrar um público similar ao que foi usado quando o teste estava sendo preparado. Para tanto, não poderíamos aplicar em alguma turma de CDI da UDESC/Joinville, pois alguns desses alunos poderiam reprovar na disciplina no segundo semestre de 2016 e, no semestre seguinte, serem meus alunos. Dessa forma, poderíamos estar alterando os resultados do teste, por ter alunos que já o conheciam. Por esses motivos tivemos que contar com a colaboração de um professor de CDI externo à UDESC/Joinville. Para tanto, entrei em contato com alguns ex-colegas do DMAT que possivelmente poderiam colaborar com a pesquisa. Um desses possuía um cargo administrativo em uma Instituição de Ensino Superior privada de Joinville e indicou uma das professoras que poderia nos auxiliar. Entramos em contato por e-mail e, com a concordância dessa professora, foi combinada a data da aplicação do teste. O teste foi aplicado por essa professora colaboradora com nossa pesquisa. Essa turma era constituída por alunos dos cursos de Engenharia, portanto, similar à turma da MAT, e tinha 35 matriculados. No dia do teste, 24 estudantes compareceram. Nenhum problema foi detectado nos enunciados dos problemas. A versão final encontra-se no Anexo 9.

A proposta inicial do projeto de tese não contemplava a Formulação de Problemas (FP) aliada ao trabalho que seria desenvolvido mediado pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP. Porém, motivada por um questionamento relativo a FP, que me fora feito na discussão do trabalho apresentado no II Colóquio Luso Brasileiro de Educação, em setembro de 2016 (Azevedo, Figueiredo & Palhares, 2016), e inspirada pelo relato de atividades de FP encontrado no artigo de Cunha, Martins e Viseu (2014), surgiu a ideia de agregar à pesquisa que estava sendo desenvolvida atividades de FP. Com a anuência dos orientadores dessa inserção na pesquisa, foram elaboradas oito atividades de FP que seriam aplicadas aos meus alunos de CDI do primeiro semestre de 2017. Para validação dessas atividades solicitamos auxílio de três professores do DMAT para as avaliarem. Desses, somente dois professores deram retorno e apresentaram suas contribuições. Para finalizar o processo de validação das atividades precisávamos fazer uma pilotagem a fim de identificar possíveis problemas de entendimento/compressão das situações problemas propostas, além de observar o tempo de resolução. Como já era final do semestre letivo, não teríamos tempo para aplicar em alguma turma similar. Contornamos esse "problema" convidando os monitores das disciplinas de *Cálculo* Diferencial Integral I e II a participarem. Ao todo, dez monitores foram convidados, nove[99] aceitaram. Desses, sete eram monitores de CDI. Essa atividade foi realizada no último dia letivo daquele ano escolar, dia 12 de dezembro de 2016. Detalhes da forma como foi desenvolvida essa atividade encontra-se em Azevedo, Figueiredo e Palhares (2017b). A versão final dessas atividades está no Anexo 10.

4.9.3.3. Reflexões

No segundo semestre em que fiz a inserção de atividades mediadas pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP foi um desafio trabalhar com uma turma com muitos alunos repetentes, pois pela revisão de literatura sabíamos que recomendava-se fazer uso dessa metodologia para inserir novos conteúdos com um público que não tivesse conhecimento prévio sobre o conceito que o professor almeja construir com a atividade proposta. Essa recomendação é dada pois acredita-se que se o estudante "já conhece ou tem memorizados tais métodos de resolução ou não está interessado na atividade, não será para ele um problema" (Allevato & Onuchic, 2014, p. 44). Entretanto, nessa pesquisa, por causa da estrutura de funcionamento da UDESC/Joinville, essa condição não era possível de ser atendida. E tivemos de lidar com a nossa realidade. Em uma das atividades desenvolvidas constatei que ter alunos que já sabiam um pouco de derivadas pode ter atrapalhado um pouco o bom desenvolvimento da segunda parte da Tarefa V'. Esse comentário está pautado em um episódio ocorrido na sala de aula no dia de uma das plenárias, pois estudantes calouros na disciplina estavam se sentindo prejudicados porque ainda não sabiam que derivada "deveria" ser utilizada para encontrar o coeficiente angular da reta tangente. Essa reclamação veio à tona porque esse estudante estava a comparar sua resolução com

[99] O décimo não pôde participar porque estava participando de um intercâmbio.

a solução proposta por um aluno repetente que conhecia a regra da potência, pois aplicando-a, obtinha de forma rápida a solução do problema proposto. Argumentei que não havia a necessidade de usar derivadas para encontrar o coeficiente angular da reta tangente, aquele problema almejava auxiliar na construção da ideia intuitiva de porquê o coeficiente angular da reta tangente é interpretado como sendo a derivada de uma função no ponto. Como a aula não foi gravada não há como apresentar nesse momento o diálogo estabelecido entre professora e aluno que se sentiu prejudicado. No semestre anterior a mesma atividade fora proposta as turmas, mas nenhum aluno manifestou esse sentimento. A diferença é que as turmas eram, quase que em sua totalidade, formada por calouros. E, quem se sentiu prejudicado fazia parte da MAT cuja maioria dos estudantes era repetente na disciplina. Após esse episódio, a professora reestruturou essa Tarefa tentando eliminar a ideia de que dever-se-ia usar derivadas para encontrar o coeficiente angular da reta tangente. Essa atividade reestruturada será analisada na seção 5.3. O episódio relatado me preocupava, visto que no primeiro semestre letivo de 2017, que seria o semestre da coleta oficial dos dados da pesquisa a serem analisados, continuaria com as mesmas turmas desse semestre.

Com relação à participação dos estudantes no momento da plenária, nesse segundo semestre de ensaios em sala de aula, na MAT no início do semestre com minha insistência, alguns alunos se prontificavam a registrarem as soluções no quadro. Com o passar do tempo, omiti essa etapa, por sentir que a turma não estava disposta a participar e optei por promover discussões de forma oral por causa da resistência dos alunos apresentarem suas resoluções. Na QUI ocorria o contrário que na MAT. Havia alunos que se prontificavam a registrarem suas soluções na lousa. Por isso, no momento em que a turma se manifestou contrária ao uso da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP nas aulas me surpreendi muito, visto que havia esse interesse espontâneo em registrarem na lousa suas soluções e, a partir dessas resoluções, ricas discussões eram promovidas a partir de algum erro identificado, de origens diversas, dentre eles, os erros relativos à matemática básica eram discutidos na plenária.

Quanto às atividades de formulação de problemas, que foram agregadas à pesquisa, na fase final do processo de validação desse instrumento, foi observado que os monitores gastaram bastante tempo na elaboração dos problemas propostos. Com o número de tarefas que almejava-se trabalhar usando a abordagem de RP, sabia que o ritmo de suas aulas seria mais lento. Deveria optar por trabalhar priorizando mais a qualidade do que a quantidade de problemas/exercícios a serem desenvolvido em sala de aula, por isso não estava vendo como poderia incorporar a atividade de formulação de problemas com a de resolução de problemas em sala de aula. Até que tivemos a ideia de propor as atividades de

FP como sendo um fórum de discussão na plataforma Moodle. Nesse ambiente as duas turmas seriam apenas uma, pois não faria distinção entre turmas. Dessa forma, um estudante poderia dar contribuições ao trabalho do outro bem como poderia questionar o que não entendesse. Cada uma das situações problemas seriam disponibilizadas conforme julgasse que já seria possível formular um problema relacionado com os assuntos que já haviam sido abordados em sala de aula. Mais detalhes de como foi essa experiência serão dados no Capítulo 6.

4.9.4. Fase III – 2017/1

4.9.4.1. Experimentos

Depois de dois semestres letivos inserindo em apenas algumas aulas de CDI a metodologia de RP, me senti mais preparada e desafiada a incluir oficialmente a metodologia de RP em uma sequência de aulas. Para tanto, incluí no plano de ensino da disciplina (Anexo 11) a metodologia de ensino de RP como uma das abordagens metodológicas a ser adotada, pois dessa forma estava me comprometendo oficialmente de incorporá-la à minha prática docente. Os tópicos da ementa da disciplina que foram trabalhados sob a concepção de ensinar *através* da resolução de problemas foram: funções de uma variável real, limite e continuidade, derivada e diferencial, análise da variação de funções e otimização. Integrais indefinidas foi o único conteúdo da ementa em que essa abordagem metodológica não foi adotada por falta de tempo, visto que trabalhar de forma diferente da tradicional dispende um maior tempo tanto na preparação da atividade quanto no desenvolvimento na sala. Para introduzir esses assuntos por meio da metodologia de RP foram utilizadas em torno de 30% da carga horária da disciplina. As primeiras atividades elaboradas foram adaptadas de material encontrado na revisão bibliográfica e as demais foram desenvolvidas por essa investigadora. Para tanto, utilizei muito da minha experiência como docente de CDI adicionada a ideias que emergiram a partir da revisão de literatura.

Ao longo do primeiro semestre letivo de 2017 foram desenvolvidas 19 tarefas para introduzir/abordar temas relacionados com os conteúdos anteriormente citados. Algumas das tarefas planeadas foram constituídas por um conjunto de tarefas e outras por uma única que consistiu em resolver um problema. As tarefas propostas estão listadas na Tabela 28 e disponíveis no Anexo 12. Destas, as Tarefas 11 e 12 foram propostas em horários extraclasses.

Tabela 28

Tarefas desenvolvidas por meio da metodologia de RP no primeiro semestre de 2017

Nome[100]	Assunto(s) envolvido(s) que desejava-se trabalhar	Fonte
Tarefa 1	Definição de função Formas de representação Domínio discreto e domínio contínuo	Autoria própria – Parte da Tarefa III'
Tarefa 2	Representação gráfica Domínio e imagem	Autoria própria
Tarefa 3	Inequação/função de primeiro grau	Adaptado de Adami, Dorneles Filho, & Lorandi (2015)
Tarefa 4	Definição de módulo ou valor absoluto Equações modulares	Produção da autora – Igual a Tarefa II'
Tarefa 5	Inequação/função quadrática	Adaptado do vestibular da UDESC-SC
Tarefa 6	Polinômios e introdução à otimização	Adaptado de Anton (2014)
Tarefa 7	Funções compostas Paridade de funções	Produção da autora – Parte da Tarefa III'
Tarefa 8	Funções exponenciais e logarítmicas Funções inversas	Adaptado de Brunheira (2014)
Tarefa 9	Noção intuitiva de limite	Tarefa de Sabatke (2016) – Parte da Tarefa IV'
Tarefa 10	Definição formal de limite	Tarefa de Sabatke (2016) – Parte da Tarefa IV'
Tarefa 11	Definição formal de limite no infinito	Adaptado de Sabatke, Figueiredo, Siple e Azevedo (2017) e Abdelmalack (2010)
Tarefa 12	Função contínua	Azevedo, Siple, Figueiredo e Palhares (2017)
Tarefa 13	Interpretação cinemática da derivada Definição de derivada num ponto	Adaptação de Abdelmalack (2011) e reestruturação da primeira parte da Tarefa V'
Tarefa 14	Interpretação geométrica da derivada	Produção da autora – Adaptação da segunda parte da Tarefa V'

[100] Considerado nesse texto.

Tarefa 15	Diferença entre derivada de uma função num ponto, derivada de função e reta tangente	Produção da autora
Tarefa 16	Regra da cadeia	Produção da autora
Tarefa 17	Diferencial e Aproximação linear local	Produção da autora
Tarefa 18	Análise da variação de funções	Produção da autora
Tarefa 19	Otimização	Adaptado de Anton (2014)

Após ter iniciado a disciplina de CDI pela "ordem usual" dos conteúdos previstos na ementa da unidade curricular (iniciando por conjuntos numéricos) e ter aplicado atividades mediadas pela RP, optei por iniciar o primeiro semestre letivo de 2017 pelo conteúdo de funções, Tarefa 1. Dessa forma, o assunto "conjuntos numéricos" (Tarefa I') foi abordado em vários momentos subsequentes. O primeiro momento em que o assunto foi discutido ocorreu ao abordar a diferença entre os domínios discreto e contínuo dos problemas 3 e 4 dessa tarefa que correspondem aos problemas 5 e 6 da Tarefa III'. Em 2017/1, os problemas 3 e 4 da Tarefa III' correspondem aos problemas 3 e 4 da Tarefa 2. A alteração da ordem dos problemas foi feita com o intuito de primeiro trabalhar com a representação de funções na forma tabular e, na sequência, esses dados serem representados geometricamente. Após essas abordagens foi feita a transposição da linguagem escrita para a interpretação gráfica de função, sem que a representação analítica de função fosse conhecida (início da Tarefa 2). Mais detalhes da Tarefa 1 e a análise dos dados oriundos dessa prática serão descritos na seção 5.2.

A Tarefa 2 também teve por objetivo identificar geometricamente se uma curva dada representava ou não o gráfico de uma função além de identificar graficamente conjuntos que representam domínio e imagem. Na discussão dessa atividade foi possível abordar o assunto de operações entre os conjuntos e intervalos, pois para representar corretamente os domínios e imagens foi necessário utilizar uniões entre conjuntos.

A Tarefa 3 consistiu na resolução de um problema cujo objetivo era abordar os seguintes conteúdos: funções de primeiro grau e inequações. Esse problema permitiu discutir várias estratégias de resolução, que geralmente em uma aula tradicional de CDI não são consideradas, como exemplo, citamos as estratégias de construir uma tabela com simulação de valores e análise gráfica. Esse problema pode ser classificado como um problema aberto[101], pois desejava-se saber o quanto um estudante gastaria para imprimir (na reprografia) uma apostila de CDI, mas não foi dado o número de

[101] Boavida *et. al.* (2008, p. 19) definem problema aberto como os problemas que "podem ter mais do que um caminho para chegar à solução e mais do que uma resposta correcta".

páginas que continha esse material nem a forma de impressão, por exemplo, se seria frente e verso, ou ainda, se seria uma ou duas páginas por folha. Isso permitiu várias discussões no momento da plenária. Esse problema era similar aos problemas 3 e 5 da Tarefa I'.

A Tarefa 4 teve o intuito de abordar os conteúdos de valor absoluto de um número e equações modulares. Na formalização do conteúdo também foi abordada a função modular e resolução de inequações modulares, de forma analítica e gráfica.

A Tarefa 5 consistiu da resolução de um problema envolvendo área e perímetro de um quadrado, cujo objetivo era trabalhar com inequações de segundo grau. Esse problema propiciou discutir a diferença entre área e perímetro que, apesar de estarmos falando de CDI no Ensino Superior, por experiência docente, essa confusão existe com frequência. Como a figura ilustrada no problema da Tarefa 5 (Figura 25) era um quadrado cuja área poderia ser obtida fazendo a decomposição como a soma da área de dois quadrados (um maior e outro menor) e dois retângulos congruentes (em posições diferentes), no momento da formalização do conteúdo a professora pôde explorar a intepretação geométrica do trinômio do quadrado perfeito bem como ensinar aos estudantes a técnica de completar quadrados. Essa técnica é necessária para obter a função inversa de função quadrática (que contenha o termo de primeiro grau) bem como em uma das técnicas de integração (estudadas no final do semestre letivo) e no estudo das seções cônicas, estudadas na UC de Geometria Analítica. Dessa forma, o problema permitiu a interdisciplinaridade.

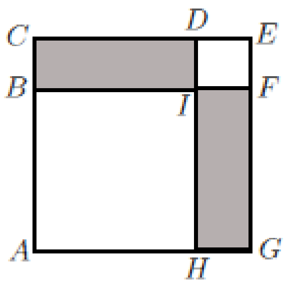


Figura 25 - Uma forma de decompor a área de um quadrado.
Fonte: Prova do vestibular da UDESC.

A Tarefa 6 teve por objetivo trabalhar com polinômios de terceiro grau. Para tanto foi proposto um problema em que desejava-se construir uma caixa, com tampa, a partir de uma folha de retangular cujas medidas foram dadas. Para a construção, deviam ser retirados quatro quadrados, como ilustrados na Figura 26, e, a seguir, serem dobradas as partes pontilhadas. O problema solicitava que fosse encontrada a função que representava o volume, seu respectivo domínio, além de pedir a ilustração do gráfico da função volume e uma estimativa do lado do quadrado a ser recortado de forma que o volume da caixa confeccionada fosse o maior possível. Esse problema permitiu aos estudantes passarem da visão bidimensional para a tridimensional. Além disso, na plenária foi possível discutir amplamente o conjunto que representava o domínio, que para obter poder-se-ia interpretar a medida máxima que o lado do quadrado poderia ter de forma que fosse possível recortar os quatro quadrados de mesmo lado bem como poder-se-ia resolver por inequações. Nesse caso, a inequação a ser resolvida era de terceiro grau. Dessa forma, na formalização do conteúdo além de abordar polinômios de grau n, pude revisar como obtém-se as raízes de um polinômio de grau maior do que dois, dispositivo prático de Briot-Ruffini, teorema da decomposição de um polinômio e teorema das raízes racionais. Esses três últimos assuntos não fazem parte da ementa de CDI, mas o conhecimento deles se faz necessário em conteúdos posteriores, como por exemplo, no cálculo de limites que são quocientes de polinômios. Todos esses conteúdos foram trabalhados como sendo uma consequência muito natural, provenientes das discussões no momento da resolução do problema e plenária. Esse problema permitiu ainda introduzir a ideia de otimização, que é uma das aplicações do *Cálculo*, e proporcionou uma discussão com alunos das licenciaturas de que essa seria uma possível dinâmica de ser aplicada com alunos do Ensino Médio e um meio de explorar nesse nível de ensino conteúdos de CDI, que os documentos oficiais brasileiros[102] recomendam inserir.

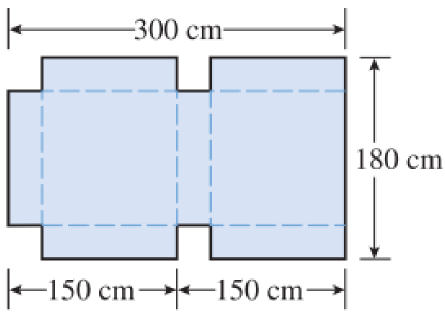


Figura 26 – Caixa planificada.
Fonte: Anton, 2014, p.63

O primeiro problema matemático da Tarefa 7 foi uma modificação de parte da Tarefa III', relacionada com o conteúdo de funções composta. A primeira versão com as compostas solicitadas, a partir de valores dados numa tabela, ficou muito enfadonha para ser respondida devido ao processo repetitivo necessário para responder por completo à atividade, pois eram muitas composições. Por isso, foi feita uma redução nas informações dadas na tabela desse problema. No entanto, no momento em que foi aplicada a atividade na primeira turma, durante a plenária, foi observado que todas as respostas

[102] No Brasil, no Ensino Médio não se estuda conteúdos de CDI, exceto em alguns cursos técnicos.

poderiam induzir o aluno a interpretar que para qualquer número a o valor $(fog)(a)$ seria igual a $(gof)(a)$. Essa coincidência eu só constatei no momento da plenária, quando fui indagada por um estudante se essa igualdade seria sempre satisfeita. A partir desse questionamento, surgiram outros que acabaram mudando o rumo da aula. Ao invés de continuar a discussão da Tarefa 7, foi abordado o conteúdo de funções inversas já na primeira aula sobre funções compostas. Esse episódio ocorreu porque não efetuei os cálculos do que estava propondo aos meus alunos, pois me preocupei apenas com a existência dos valores necessários para que as composições solicitadas, na Tabela 3 da Tarefa 7, existissem. Para aplicar a Tarefa na outra turma, modifiquei os valores da tabela fornecida aos estudantes e isso resolveu o "problema" ocorrido na turma anterior. No entanto, na QUI não consegui trabalhar a atividade sob a concepção de ensinar através da RP, mas sob ensinar *sobre* RP, porque a turma não conhecia a definição de função composta. Mesmo com essa mudança que ocorreu no desenvolvimento da aula, julgo que foi muito produtiva, pois a turma participou ativamente da aula. A mudança de estratégia durante o desenvolvimento da aula foi necessária e feita pensando nos alunos, pois mais importante do que ficar presa a uma metodologia que desejava aplicar para coletar dados para minha pesquisa, era me preocupar com o aprendizado de meus alunos. O objetivo dessa atividade era trabalhar com a condição necessária para existir a função composta, ou seja, que a imagem de f estivesse contida no domínio de g para que existisse a composta de g com f. Matematicamente, desejava-se obter o valor da função gof. Essa atividade foi pensada para que os estudantes refletissem a respeito de que condições deveriam ser respeitadas para que a composição desejada fosse possível, pois geralmente os estudantes fazem de forma mecânica a composição, sem se preocuparem com tais condições. Entretanto, se os estudantes não soubessem o significado de gof (assunto já estudado no Ensino Médio) não conseguiriam nem iniciar a atividade proposta. Esses episódios foram relatados aqui com o intuito de mostrar a necessidade do professor ser flexível em suas aulas e se preocupar sempre com o aprendizado de seus estudantes. A segunda parte da Tarefa 7 fornecia o gráfico de uma função para as abscissas positivas. A seguir, definia-se função par e função ímpar analítica e graficamente, e pedia-se para completar o gráfico da função ilustrada, considerando as abscissas negativas se a função fosse uma função par e se fosse uma função ímpar.

A Tarefa 8 foi uma sequência didática adaptada do material didático para aula de Matemática produzido por Lina Brunheira (2014) e publicado na revista Educação e Matemática. A atividade inicia chamando a atenção dos estudantes já pelo título: "A Lua aqui tão perto...". Nesse problema considerava-se uma medida fixa como sendo a espessura de uma folha de papel que deveria ser dobrada sempre ao meio. E, deseja-se saber quantas vezes seria necessário efectuar o procedimento de dobrar ao meio uma folha de papel para se atingir a altura de uma pessoa. Após o estudante compreender esse procedimento, desafia-se o estudante a determinar o número de dobras de uma folha de papel que seriam necessárias para se obter a distância da Terra à Lua. Esse problema de investigação matemática permite que o estudante observe e estabeleça padrões, faça estimativas e resolva equações exponenciais e logarítmicas.

As Tarefas 9 e 10, correspondem à Tarefa VI', sobre a ideia intuitiva de limite e definição formal de limite, respectivamente. A Tarefa 11 é uma continuidade dessas atividades. O objetivo foi trabalhar com a definição formal de limite no infinito. O problema proposto foi uma sequência didática em que o estudante deveria encontrar as constantes que faltavam para ter a função que representava a produtividade de um funcionário em função do tempo de experiência que o mesmo tinha no emprego. Depois de encontrados esses valores e de determinados o tempo de experiência que deveria ter um profissional para que produzisse um determinado número de peças, definia-se a tolerância como sendo a diferença entre o máximo de peças que um funcionário pode produzir e o número de peças produzidas por um funcionário para que a empresa atinja o mínimo satisfatório economicamente para o desenvolvimento lucrativo da produção. Em seguida, atribuía-se percentagens de tolerância admitida e esperava-se que o estudante encontrasse o tempo de experiência para que a produção satisfizesse a tolerância dada. Simulava-se uma tolerância menor e depois se propunha fazer para uma tolerância genérica. Por fim, pedia-se para o estudante completar a definição formal de limite no infinito, com base na experiência que teve ao longo da sequência didática. Essa atividade foi proposta para ser desenvolvida em horário extraclasse. Mais detalhes sobre essa atividade e análise dos dados oriundos dela podem ser vistos em Azevedo, Sabatke, Figueiredo e Siple (2017).

A Tarefa 12 teve por objetivo abordar o conteúdo de funções contínuas, mas não foi sob a concepção de ensinar através da RP, pois após ter desenvolvido na sequência as Tarefas 9 e 10 (em sala de aula), o objetivo era calcular limites geometricamente, antes de introduzir as propriedades e técnicas para calcular limites. A aula subsequente foi iniciada fornecendo o gráfico ilustrado na Figura 27 e solicitando para que os estudantes avaliassem a existência dos limites nos pontos cujas abscissas eram -4, -2, -1, 2, 4 e 6, além de determinar, se existisse, o valor da imagem da função para essa mesmas abscissas. Além disso, foi solicitado para avaliarem a (não)existência das imagens da função ilustrada nessas mesmas abscissas. Dessa forma, no momento da discussão do problema proposto a professora pôde explorar a interpretação gráfica da (não)existência do limite e ao analisar as imagens e comparar com os limites, aproveitou o momento para definir continuidade de uma função real de uma variável real em um ponto. Analisando no gráfico o limite quando a abscissa tende a 6 foi falado também sobre assíntota vertical. Ademais, também foi discutido geometricamente quando se tem uma assíntota horizontal e, a seguir, elas foram definidas. Toda essa discussão foi proporcionada por já ter ficado clara aos estudantes a noção de limite bilateral. Por esses motivos, a Tarefa 12 pôde ser proposta em horário extraclasse, pois não fazia mais sentido utilizá-la para introduzir um assunto que já havia sido discutido em sala. Ela iniciava com uma investigação preliminar a respeito do que o aluno entendia por continuidade de uma função; solicitava um exemplo prático de função contínua; fornecia um gráfico que representava a concentração de um medicamento na corrente sanguínea, solicitava que o estudante interpretasse o significado das descontinuidades do gráfico ilustrado. Entretanto, o principal objetivo dessa tarefa era aplicar a Matemática na vida real ao estudar a continuidade de função que descreve o imposto de renda que todo cidadão brasileiro remunerado deve pagar à Receita Federal e este valor é calculado com base na renda mensal. Para tanto, após encontrar a função que descreve o imposto de renda, solicitava-se para simular o quanto de imposto uma pessoa que recebe mensalmente um salário de 3.000 reais pagaria no ano de 2016. Como houve mudança na tabela que define o imposto de renda em abril de 2016, ainda se questionava ao estudante se a correção feita na tabela beneficiou financeiramente a referida pessoa.

A ideia da nova versão da Tarefa 13 relacionada com a interpretação cinemática da derivada teve a contribuição de uma colega de trabalho do DMAT. Em 2016/2, a professora-pesquisadora compartilhou com essa professora sua primeira versão da Tarefa para introduzir a assunto de derivadas, que fora adaptação de Abdelmalack (2011), pois ela desejava trabalhar de uma forma diferenciada o conteúdo de velocidade instantânea com seus estudantes, no final do capítulo sobre derivadas. Para tanto, essa professora fez uma modificação da sequência didática que compartilhei. Ela usou sua experiência de ciclista para formular um problema contextualizado e compartilhou conosco sua nova versão. Com autorização dela, a ideia foi readaptada e assim teve origem a segunda versão da Tarefa 13 que fora utilizada para introduzir o conteúdo de derivadas por meio da interpretação cinemática. Os dois primeiros problemas dessa atividade são relacionados com a determinação da velocidade média do pedal realizado por um ciclista em intervalos de tempo fornecidos e, a seguir, a determinação da velocidade média em intervalos de tempo cada vez menores e solicitava que o estudante conjecturasse o valor que acreditava ser a velocidade em um instante específico. O último problema dessa Tarefa foi similar ao terceiro problema da Tarefa V', apenas a função e a variável utilizada foram modificadas.

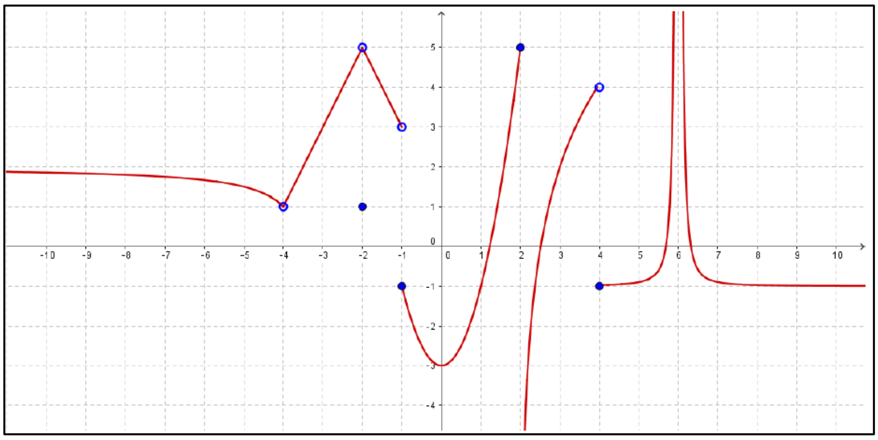


Figura 27 - Gráfico de uma função descontínua.
Fonte: Produção da autora.

A Tarefa 14 refere-se à interpretação geométrica da derivada e foi dada como trabalho extraclasse ao final da aula em que foi realizada a plenária e formalização da Tarefa 13. Como relatado na seção 4.9.3.3, em 2016/2 teve calouros na disciplina que se sentiram prejudicados por ainda não terem conhecimento sobre o conteúdo de derivadas para resolver o problema proposto, porque estavam fazendo comparações das suas estratégias de resolução com as resoluções de alunos repetentes que já possuíam um conhecimento prévio sobre derivadas. Por isso, reestruturei o enunciado do problema, mas mantive a ideia. Acreditávamos que se os estudantes resolvessem os itens propostos na sequência didática de acordo com a ordem dada, permitiria a muitos deles observarem que a reta tangente ao gráfico de uma função f em um determinado ponto P corresponde à posição limite da reta secante ao gráfico de f, obtida ao fixar o ponto P e ao mover sobre o gráfico de f o ponto Q na direção do ponto P. Com a modificação feita, acreditamos que resolvemos a situação ocorrida no semestre anterior, pois continuei tendo muitos alunos que faziam ao menos pela segunda vez a disciplina e nenhum deles usou as regras de derivação para determinar o coeficiente angular da reta tangente. Mais detalhes do desenvolvimento dessa atividade estão na seção 5.3.

A Tarefa 15 foi proposta na aula após a formalização da Tarefa 14. Por experiência docente, nas falas e resoluções de exercícios dos estudantes encontra-se a interpretação equivocada da derivada. Muitos estudantes afirmam que a derivada de uma função é a reta tangente. Com o intuito de fazer a diferenciação entre a derivada de uma função num ponto, reta tangente e derivada de função foi elaborada essa sequência didática que iniciava solicitando que fosse encontrada a derivada de uma função quadrática genérica, depois particularizava os coeficientes dessa função e pedia o valor da derivada em um ponto específico, a equação da reta tangente que passa nesse ponto escolhido bem como sua representação geométrica. Em seguida, definia-se a derivada de uma função, solicitava-se que o estudante encontrasse a função derivada (do caso particular considerado) e a representasse geometricamente no mesmo plano cartesiano em que fora representada a função dada e a reta tangente. Por fim, pedia-se a derivada da função genérica.

A Tarefa 16 teve por objetivo fazer com que o estudante intuísse a regra da cadeia aplicada a funções compostas da forma $y = \left(g(x)\right)^n$, para $n \in \mathbb{R}$ e g sendo uma função diferenciável. Para tanto foram propostas duas situações em que os estudantes já saberiam obter a derivada das funções $\left(g(x)\right)^2$, $\left(g(x)\right)^3$ e $\left(g(x)\right)^4$ por meio das regras de derivação já conhecidas. Após terem encontrado as respectivas derivadas, esperava-se que o estudante observasse algum possível padrão nas respostas que o permitisse conjecturar qual seria a derivada de $\left(g(x)\right)^n$, para um número n qualquer. Essa atividade não obteve o êxito esperado para poder trabalhar sob a concepção de ensinar através da RP, pois para que os estudantes tivessem condições de resolver o problema, eles necessitavam de domínio das regras básicas de derivação. Como a Tarefa foi proposta antes da realização da avaliação escrita referente às primeiras regras de derivação, muitos estudantes ainda não tinham feito exercícios extraclasse sobre derivadas. Essa constatação foi comprovada no momento dos trabalhos em grupos, pois nas dúvidas apresentadas pelas equipes que solicitavam auxílio era evidente que desconheciam as regras de derivação, além de ser perceptível que não sabiam utilizar a tabela com as regras de derivação, que tinham em mãos. Como essa percepção foi geral, nas duas turmas tive de abandonar a ideia de ensinar *através* da RP e passei a ensinar *sobre* RP, por meio de uma aula expositiva dialogada. Dessa forma, houve bastante participação dos estudantes. Eles puderam esclarecer dúvidas para a prova que seria realizada em breve. Nessa época, metade do semestre letivo já havia passado e mesmo com muitas atividades diferenciadas que vinham sendo desenvolvidas e diversos trabalhos extraclasses, os estudantes continuavam com o hábito de estudar para avaliação escrita somente nas vésperas da prova. Ao elaborar essa sequência didática imaginei que seria resolvida com muita facilidade pelos estudantes e que serviria como revisão para a avaliação escrita. Após a atividade ter sido aplicada creio que teria sido mais interessante se ela fosse realizada na aula após a avaliação escrita, pois dessa forma os estudantes já estariam mais habituados a usarem as regras de derivação e teriam o conhecimento necessário para a resolução do que lhes foi proposto. Mesmo com esses constrangimentos, recolhi os protocolos dos estudantes e ao analisar as soluções, verifiquei que ter escolhido a função g como sendo um polinômio de primeiro grau no primeiro item não foi uma boa escolha, pois alguns dos estudantes que expandiram o binômio de Newton, que surgia na resolução, aplicaram corretamente as regras de derivação, mas com a expressão algébrica expandida, era difícil conseguir padronizar a derivada para um n qualquer, pois precisariam "comprimir" a expressão expandida. Dessa forma, para uma possível reaplicação da tarefa sugiro que essa função seja substituída por uma função trigonométrica, por exemplo, por $sen(ax)$, pois com essa alteração, facilitaria a identificação de um padrão na derivada.

A Tarefa 17 é uma sequência didática com a finalidade de motivar a definição de diferencial e perceber que localmente uma função diferenciável pode ser aproximada por uma reta, cujo procedimento é chamado de aproximação linear local. Essa atividade inicia fornecendo dois gráficos sobrepostos no mesmo plano cartesiano. Os gráficos correspondem às representações geométricas de uma função cúbica f e de uma função de primeiro grau g. Inicialmente questiona-se se, visualmente, os estudantes percebem alguma relação existente entre as duas funções fornecidas. Depois de encontrar a primeira derivada de f, pede-se para preencher uma tabela com diversos valores, que correspondem aos incrementos Δx, Δy, ao diferencial dy e ao valor absoluto da diferença $\Delta y - dy$, considerando variações cada vez menores. Após o preenchimento da tabela com todos esses valores, deseja-se que o estudante interprete esses resultados numéricos a fim de comparar o incremento e o diferencial da variável dependente, e ainda, conjecturar o que ocorre com os valores de f e g nas vizinhanças do ponto de tangência.

A Tarefa 18 foi elaborada com o intuito de abordar o conteúdo de "Análise da variação de funções", ou seja, almejava-se discutir os seguintes assuntos: (de)crescimento de função, pontos críticos, concavidade do gráfico de uma função, determinação de pontos extremos e pontos de inflexão. Essa atividade ficou extensa, mas possibilitou que os estudantes de forma natural pudessem, por meio da análise gráfica, chegar às conclusões das definições e teoremas relacionados com os assuntos anteriormente citados. Para elaborar essa sequência didática usei minha experiência como docente de CDI e ela teve origem em uma autorreflexão de como costumava lecionar o assunto. Nessa análise, percebi que costumava iniciar propondo um gráfico (na lousa) e, por meio de questionamentos aos alunos, essa representação gráfica me permitia explorar as diversas definições e teoremas envolvidos. Na Tarefa 18, mantive essa ideia. A diferença com relação aos procedimentos adotados anteriormente está no facto de que forneci um gráfico no meio impresso aos estudantes e, a partir desta ilustração, dei a oportunidade dos estudantes refletirem sobre continuidade, diferenciabilidade, (de)crescimento da função proposta e inclinação da reta tangente, que eram assuntos de seu domínio, pois tinham sido abordados recentemente na disciplina. Após essa exploração, foi solicitado que conjecturassem alguma possível relação entre (de)crescimento de uma função e primeira derivada de uma função, ou seja, desejava que relacionassem crescimento/decrescimento com o coeficiente angular da reta tangente que é dado pela derivada de uma função no ponto de tangência. Seguindo a mesma linha de raciocínio, nessa sequência didática, foi fornecido o gráfico da função primeira derivada e questionou-se sobre (de)crescimento dela; também questionou-se sobre os intervalos em que a concavidade do gráfico da função era voltada para cima/baixo; e, se solicitou que fosse conjecturada a relação entre (de)crescimento da função primeira derivada com a concavidade do gráfico de uma função. Na sequência, foi fornecido o gráfico da segunda derivada da função e questionou-se onde ela era positiva/negativa e induziu-se um confronto entre essas informações e o (de)crescimento da primeira derivada. Por fim, os gráficos da função dada e de sua segunda derivada foram sobrepostos com o intuito de que fosse constatada alguma relação entre a concavidade do gráfico da função com o sinal da função segunda derivada. A extensão dessa sequência assustou os estudantes assim que tiveram contato com ela no material impresso entregue pela professora. Porém, à medida que os estudantes avançavam em suas análises, conseguiam observar que as informações se conectavam. Maiores detalhes sobre o desenvolvimento dessa tarefa em sala de aula e análise dos resultados podem ser encontrado na seção 5.4.

A Tarefa 19 foi na última aula do semestre letivo, cuja abordagem metodológica adotada foi a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP e consistiu de um único problema que visava abordar o conteúdo de otimização, ou seja, aplicação de derivadas. No ano de 2016 em sala de aula já havia sido aplicada uma sequência didática para fazer a discussão do conteúdo de otimização. Em 2017/1 optei por não utilizar a mesma dinâmica, porque alguns dos meus estudantes já haviam sido meus alunos em semestres anteriores e acreditava que para eles, rever a dinâmica não seria interessante. Por isso, propus um clássico problema de otimização, encontrado nos livros didáticos, que consistia em determinar a dimensão do lado dos quatro quadrados (de mesma área) que deveriam ser retirados dos cantos de uma folha retangular de forma que a caixa aberta construída tivesse o maior volume possível. Apesar de não ser um problema inédito, foi um problema que propiciou bastante discussão devido às diversas estratégias que foram adotadas pelas equipes a fim de resolvê-lo. Os relatos dessa atividade e análise dos dados encontram-se na seção 5.5.

O tempo destinado para o desenvolvimento de cada uma das atividades em sala de aula, geralmente, foi de duas a três horas/aula para que fossem resolvidas pelos estudantes, compartilhadas/discutidas as soluções e formalizado o conteúdo. Todos os protocolos de respostas oriundos dessas práticas foram recolhidos e digitalizados. Como, desde o primeiro semestre de 2016, as atividades eram aplicadas em duas turmas, o volume de dados gerados foi grande. Nesse trabalho, optamos por relatar o desenvolvimento em sala de aula, analisar/comentar as resoluções propostas pelos grupos e categorizar os tipos de erros identificados nas respostas de quatro das atividades aplicadas, que foram indicadas nos parágrafos anteriores. O critério para seleção de que tarefas seriam apresentadas nesse texto foi o de escolher atividades que contemplassem vários períodos do semestre letivo que pudessem evidenciar as estratégias usadas pela professora-pesquisadora para, ao mesmo tempo, usar as sugestões do roteiro de Allevato e Onuchic (2014) na condução de suas aulas e cumprir a ementa da disciplina de CDI no tempo previsto. No decorrer do relato dessa experiência docente também desejamos clarificar as adaptações no roteiro de Allevato e Onuchic que senti a necessidade de fazer a fim de tornar viável a aplicabilidade do mesmo em suas aulas dando conta de cumprir o currículo da unidade curricular.

4.9.4.2. Caracterização do público participante

O público participante dessa pesquisa foi composto pelos alunos regularmente matriculados na disciplina de CDI dos cursos de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Química da UDESC/Joinville. As turmas de MAT e QUI tiveram, respectivamente, 50 e 34 alunos matriculados. Na Tabela 29, apresentam-se os cursos aos quais os acadêmicos estavam vinculados.

Tabela 29
Cursos dos matriculados nas turmas de MAT e QUI

Curso	Turma	
	MAT	QUI
Ciência da Computação	3	0
Engenharia Civil	12	2
Engenharia Elétrica	2	1
Engenharia Mecânica	7	1
Engenharia de Produção	1	1
Licenciatura em Física	7	0
Licenciatura em Matemática	15	0
Licenciatura em Química	3	29
Total	50	34

A disciplina de CDI é oferecida nos cursos de graduação da UDESC/Joinville na primeira fase, exceto no curso de Licenciatura em Matemática, que é na segunda fase. Nesse curso, a disciplina tem como pré-requisito a disciplina de Matemática Básica, nos demais cursos de graduação não há pré-requisito. Como na UDESC/Joinville a ementa de CDI é a mesma nos cursos de Engenharias, Licenciaturas e Computação, quando um estudante reprova, no semestre seguinte ele pode escolher em que turma irá se matricular, exceto nas turmas de ingressantes. Por esse motivo, adicionado ao facto da disciplina ser oferecida na segunda fase do curso de Licenciatura em Matemática, é que a turma de CDI que seria exclusiva aos alunos da Matemática, possui tantos estudantes dos demais cursos de graduação. Dos 15 estudantes do curso de Matemática, matriculados em MAT, somente oito estudantes estavam cursando pela primeira vez. Com relação a QUI, que era uma turma de ingressantes, excepcionalmente nesse semestre, sete estudantes estavam cursando ao menos pela segunda vez e, desses, dois estudantes eram do curso de Química e os demais eram das Engenharias.

Destacamos ainda que dos 84 alunos matriculados que tive no primeiro semestre letivo de 2017, 17 já haviam sido meus alunos em semestres anteriores. Desses, seis foram seus alunos no primeiro semestre de 2016 e, os demais, no segundo semestre de 2016. Sendo assim, todos esses ex-alunos participaram das minhas primeiras experiências com a metodologia de RP na prática da sala de aula. Ainda, convém salientar que no momento em que os alunos se matricularam nas turmas de MAT e QUI eles sabiam qual era o professor designado, mas não tinham conhecimento de que a professora faria uso de uma metodologia diferente da tradicional. Eles tomaram ciência de que fariam parte dessa pesquisa no primeiro dia de aula no momento da apresentação do plano de ensino.

Como o objetivo da pesquisa era fazer o uso da metodologia de RP sob a concepção de ensinar através da RP, pela literatura, sabia-se que o ideal seria que os participantes não tivessem conhecimento sobre o conteúdo que se desejava ensinar por meio dos problemas geradores (Andrade & Onuchic, 2017, p. 439), porém, com a realidade no qual a pesquisa estava inserida, esse quesito não poderia ser atendido, visto que mesmo a turma de ingressantes da QUI possuía alunos repetentes. Esses alunos foram inseridos nas turmas de ingressantes por meio de reajuste de matrícula, por falta de vaga em turmas não exclusivas. Dessa forma, foi um desafio a mais ter de trabalhar com uma metodologia diferenciada com alunos que já conheciam parte do conteúdo que desejava ensinar. Como será descrito ainda, ao longo do texto, o facto de ter alunos que já conheciam parte do conteúdo de CDI, não foi empecilho para conduzir as aulas de introdução a novos conteúdos por meio da metodologia de RP. Inclusive, em entrevistas e em questionários de avaliação, há relatos de alunos nessa situação se posicionando a favor do uso dessa metodologia em CDI e em outras disciplinas, esse ponto está descrito no Capítulo 7.

4.10. Interpretar evidências

Após ter coletado as evidências o pesquisador deve categorizar, organizar e interpretar as informações. Esse não é um trabalho fácil, geralmente o volume de dados coletados é grande. Entretanto, muitas dessas informações são irrelevantes para o relatório final. Por isso, Romberg (2007, p. 9) fala que “tentar encontrar informação importante dentre todas que estejam disponíveis é uma arte na qual certas pessoas são melhores do que outras”.

Essa pesquisa por se tratar de uma investigação-ação, ao longo de todo seu percurso foram feitas reflexões acerca das atividades que estavam sendo aplicadas em sala de aula, visando seu aprimoramento e de como eu estava conduzindo as aulas mediadas pela Resolução de Problemas. Todavia, uma análise mais rigorosa dos dados coletados foi realizada um tempo após ter-se encerrado a coleta de dados. Esse distanciamento dos dados é importante ao pesquisador para que “possa perceber os dados sob outras perspectivas, ler e desenvolver outras ideias, ganhar entusiasmo renovado pelas evidências. A este procedimento se dá o nome de estranhamento dos dados” (Allevato, 2005, p. 33).

4.11. Relatar Resultados

Romberg (2007) afirma que “ser membro de uma comunidade de pesquisa implica numa responsabilidade de informar aos outros membros sobre a investigação terminada e buscar seus comentários e críticas” (p. 9). Allevato (2005) complementa dizendo que “comentários, críticas e sugestões são a fonte de novas questões para investigação, de novas ideias, ou mesmo reforçam e complementam ideias” (p. 33). Corroboramos com esses autores e, para essa doutoranda que teve sua formação anterior na área de Matemática Aplicada, que apesar do nome, trabalha com muita matemática “dura”, foi de grande importância para sua formação ter participado em diversos eventos relacionados com sua área de pesquisa.

Dentre os eventos que participei nesse período, julgo que os dois que mais contribuíram para minha formação em assuntos relacionados com minha pesquisa foram o XX Encontro Nacional de Estudantes Brasileiros de Pós-Graduação em Educação Matemática e IV Seminário em Resolução de Problemas e I Seminário Internacional em Resolução de Problemas. O primeiro desses eventos é específico para que pós-graduandos em Educação Matemática possam discutir seus projetos de pesquisa em grupos de trabalho, de temas específicos, com pesquisadores de referência na área temática do grupo. E, o segundo evento tem um forte viés de formação nos temas atuais de pesquisas em Resolução de Problemas em nível nacional e internacional. Os trabalhos relacionados com a pesquisa, divulgados no período de doutoramento, foram: Azevedo (2016, 2017); Azevedo, Figueiredo e Palhares (2016, 2017a, 2017b, 2017c), Azevedo, Sabatke, Figueiredo e Siple (2017); Azevedo, Figueiredo, Siple e Palhares (2017); Azevedo, Figueiredo, & Palhares (2019a, 2019b).

4.12. Antecipar ações de outros

Em uma pesquisa, os investigadores "tentam situar cada estudo em uma cadeia de investigações" (Romberg, 2007, p. 9), que tem origem em comentários e sugestões oriundos de membros de uma comunidade científica (Allevato, 2005). O fluxograma da Figura 28 ilustra como ocorre a movimentação cíclica no "mundo científico".

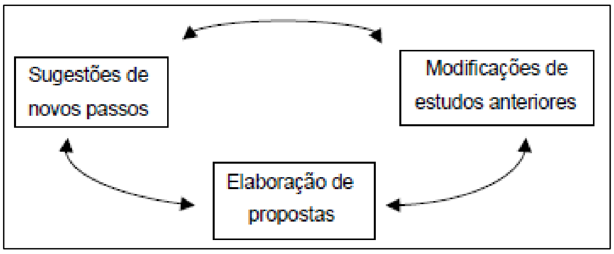


Figura 28 - Estrutura de funcionamento de uma cadeia de investigações.
Fonte: Allevato, 2005, p. 33.

Me identifico com essa caracterização cíclica de Allevato (2005), pois após decidir que submeteria o projeto de doutoramento, parti para leituras de trabalhos de mestrado/doutorado que estivessem relacionados com a área de Educação Matemática e *Cálculo*. A partir dessas leituras, surgiu o interesse pela metodologia de Resolução de Problemas e a curiosidade pela metodologia de Investigações Matemáticas, pois, como leiga em ambos os assuntos, me pareciam muito similares e gostaria de me aprofundar em suas semelhanças/diferenças e como as aplicaria no cotidiano escolar. Após iniciar o doutoramento, com mais leituras, participação em eventos, orientações, ou seja, contato com a comunidade científica, tive ideias e sugestões de possíveis encaminhamentos e adquiri mais maturidade na pesquisa para reestruturar o projeto. Novas ideias foram surgindo conforme a experiência vinha sendo adquirida, e claro, nem tudo pôde ser concretizado durante esse tempo de capacitação. Ao finalizar esse trabalho espero deixar possíveis caminhos para que a pesquisa tenha continuidade bem como meu relato possa servir de inspiração para novas pesquisas, como um dia os trabalhos de Abdelmalack (2011) e Noguti (2014) foram para mim.

4.13. Síntese

Nesse capítulo, apresentamos os caminhos trilhados ao longo dessa pesquisa e para sua estruturação. As orientações de Romberg (2007) foram norteadoras na organização desse capítulo e este não está totalmente encerrado, pois pouco abordamos sobre as três últimas atividades desse modelo (interpretar informações, relatar resultados e antecipar ações de outros). A interpretação de informações e relato de resultados ocorreram de forma simultânea em muitos momentos nos próximos capítulos. E, no capítulo final será feita uma síntese desses resultados e apontaremos perspectivas futuras.

O assunto que teve maior ênfase nesse capítulo foi o desenvolvimento da pesquisa por meio da investigação-ação. Para Bisquerra (1989), a investigação-ação "é intrinsicamente democrática por não necessitar "nenhuma preparação especial para ser capaz de compreender os resultados das investigações nem tão pouco para realizá-las. A investigação de campo requer habilidades de observação, comparação, contraste e reflexão" (p. 292, tradução nossa) e o professor tem essa capacidade de reflexionar sobre sua prática. Esse autor ainda enfatiza a quase inexistência de trabalhos em que professores façam esses tipos de relatos, que podem contribuir para melhorar o aprendizado do aluno. Apesar dessa referência ter quase três décadas, pelo levantamento de trabalhos envolvendo o ensino de *Cálculo* e a metodologia de Resolução de Problemas (Capítulos 2 e 3) percebemos que ainda existente essa carência de professores investigando sua própria prática no ambiente real de sala de aula, em que o desafio para o professor é maior, pois precisa atender as exigências dos programas curriculares em tempo determinado e tem uma diversidade de alunos com habilidades e interesses variados. Assim sendo, essa pode ser considerada uma das características inovadoras desse trabalho juntamente com o facto de fazer uso da metodologia mista, que também não é muito explorada, ao menos em pesquisas brasileiras, na área de Educação.

Por fim, no próximo capítulo será apresentado o relato de como foi o desenvolvimento das quatro Tarefas selecionadas bem como será apresentada a análise dos dados do ponto de vista qualitativo e as reflexões da professora sobre a terceira fase da pesquisa.

CAPÍTULO 5

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA PRÁTICA

Esse capítulo tem por objetivo relatar as estratégias de ensino adotadas pela professora-pesquisadora-doutoranda para pôr em prática a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Como explorado no Capítulo 3, nessa concepção de ensino, a introdução de um novo conteúdo é feita por meio de um problema proposto à classe e, em grupos, os estudantes devem discutir e resolver o problema, usando todo o conhecimento que possuem. Em seguida, as diferentes estratégias de resolução são apresentadas e discutidas com a turma. Após chegar ao consenso da resposta adequada, o professor deve fazer a formalização do conteúdo e propor novos problemas. Essa dinâmica de aula está de acordo com as orientações de como conduzir uma aula através da Resolução de Problemas que são sugeridas e adotada pelos membros do GTERP. No transcorrer desse capítulo evidenciaremos as adaptações que sentimos necessidade fazer (em alguns momentos) para adequar à nossa realidade.

Como seria inviável descrever minuciosamente como ocorreram todos os experimentos de ensino e para que as descrições não ficassem muito repetitivas, selecionamos quatro atividades, realizadas no primeiro semestre letivo do ano de 2017, para relatar, bem como analisar, as respostas dos estudantes e identificar/categorizar os tipos de erros. O critério de seleção adotado para escolher essas tarefas foi apresentar diferentes momentos vivenciados em sala de aula. A primeira tarefa a ser relatada apresentará o primeiro contato que os estudantes tiveram com a metodologia de resolução de problemas nas aulas de *Cálculo.* A segunda (Tarefa 14) ocorreu em meados do semestre letivo. A terceira (Tarefa 18) e quarta tarefa (Tarefa 19) ocorreram no final do semestre letivo, período em que os estudantes estavam familiarizados com a metodologia adotada pela professora. Destacamos que ao longo de todo o texto, estamos adotando a expressão Tarefa para representar as sequências didáticas e/ou problemas geradores propostos aos estudantes e que tinham por objetivo introduzir um novo assunto. As Tarefas referem-se às aulas em que a metodologia de Resolução de Problemas foi a abordagem metodológica considerada. Como apresentado no Capítulo 4, o público participante foi constituído pelas turmas de *Cálculo*, dessa professora, dos cursos de Licenciatura em Matemática (MAT) e Licenciatura em Química (QUI).

5.1. Iniciando o semestre letivo de 2017

No primeiro dia letivo de aula, em ambas as turmas, após apresentar o plano de ensino (Anexo 11), a professora explicou o que vem a ser a Resolução de Problemas vista como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação. A professora apresentou as orientações de Polya (2006) para que o aluno se torne um bom resolvedor de problemas e discutiu como é a dinâmica de uma aula em que o professor deseja ensinar os conteúdos através da metodologia de RP. Para clarificar a dinâmica que estava se propondo a desenvolver com eles foi apresentado o roteiro de Allevato e Onuchic (2014). Em seguida, foi apresentado o termo de consentimento e livre esclarecido (Anexo 5) solicitando que os acadêmicos que estivessem de acordo em participar da pesquisa o assinassem. Caso alguém se manifestasse contrário, a professora tomaria o cuidado de não usar suas (estratégias de) resoluções na escrita da tese e em futuras publicações. Dois alunos que não concordaram optaram por solicitar reajuste de matrícula, ou seja, pediram para trocar de turma[103]. Acreditamos que esses esclarecimentos iniciais sobre a metodologia tenham sido importantes por permitir que os estudantes entendessem a dinâmica das aulas, pois na primeira atividade proposta pela professora, um grupo a chamou para saber se a resposta estava correta e, entre os integrantes da equipe, a professora ouviu o comentário: "*Ela não pode responder, teoricamente*". Além dessas recomendações, no primeiro contato que teve com as turmas, a professora enfatizou a importância da socialização das estratégias de soluções no momento do "registro na lousa" e "plenária". A ênfase a essas etapas foi dada porque nos primeiros experimentos realizados em 2016 a professora não obteve sucesso nessas etapas, pois teve dificuldades em fazer com que seus alunos participassem.

Concluído o momento de apresentação da disciplina, plano de aula e dinâmica das aulas, a primeira atividade do semestre a ser trabalhada através da metodologia de RP foi proposta. Para que os trabalhos fossem iniciados, foi solicitado que fossem formadas duplas ou trios[104] e distribuída uma atividade impressa para cada aluno, além de recomendar que ao final cada grupo entregasse apenas uma folha de resposta por equipe. Enquanto a professora distribuía as atividades, os alunos já liam de forma individual o que estava sendo solicitado. Em seguida, foi feita a leitura em conjunto da Tarefa 1 e questionado se havia alguma dúvida de entendimento sobre o que estava sendo solicitado. Convém destacar que, apesar de nem sempre as aulas terem ocorrido no mesmo dia em ambas as turmas, o desenvolvimento delas foi muito parecido. Geralmente, a QUI estava uma aula atrasada com relação a

[103] Essa informação foi cedida pela chefe e coordenadora do curso de Licenciatura em Matemática no dia da Jornada Doutoral, quando a doutoranda apresentou o andamento dos seus trabalhos.

[104] Ao longo do semestre, muitas equipes não foram sempre as mesmas, porque não foi feita essa exigência. A escolha foi por afinidade. Até ao final do semestre, cada grupo possuía de 3 a 5 integrantes.

MAT. Essa disparidade foi ocasionada porque no primeiro dia letivo do semestre, que seria o primeiro dia de aula de CDI em ambas as turmas, não houve aula na QUI, pois, por orientações Institucionais, as turmas de alunos ingressantes devem ser dispensadas no primeiro dia para que possam participar de uma aula inaugural. Para não tornar a leitura desse texto tão cansativa, optamos por relatar de forma simultanea tanto o desenvolvimento das aulas (das Tarefas selecionadas) bem como a análise dos dados. Algum episódio ocorrido em alguma das turmas que julgarmos merecer destaque, no momento em que for relatado será especificado em que turma ocorreu.

Na sequência desse texto serão apresentados os relatos das quatro Tarefas selecionadas de forma a evidenciar como a professora concretizou a inserção da metodologia de Resolução de Problemas em suas aulas de *Cálculo*. Como posto no Capítulo 4, o critério estabelecido para selecionar as Tarefas que seriam relatadas nesse texto foi escolher atividades desenvolvidas em diferentes momentos do semestre letivo (início, meio e fim), para que o leitor pudesse perceber as estratégias adotadas pela professora para ensinar através da Resolução de Problemas, conforme as orientações de Allevato e Onuchic (2014), almejando o aprendizado do aluno, e tendo de gerir o tempo dispendido nas atividades para que não afetasse o cumprimento das componentes curriculares exigidas. Convencionamos que cada Tarefa receberá um número que corresponde à ordem com que foi aplicada, considerando o total de 19 Tarefas.

5.2. Tarefa 1 – Função

A primeira tarefa (Anexo 12) teve por objetivo saber o que os alunos entendem por função bem como conhecer se eles identificam a aplicação de funções, pois esse assunto já é de conhecimento deles trazido do Ensino Básico, e ainda, desejava-se discutir a diferença entre domínios discretos e contínuos. A tarefa iniciava com a pergunta: O que você entende por função? A seguir, solicitava ao menos um exemplo prático de função. Na sequência fornecia duas tabelas com os valores das temperaturas de Joinville. A primeira tabela apresentava as médias climatológicas, dos últimos 30 anos, das temperaturas mínimas e máximas durante o ano e, a outra, com a previsão da temperatura horária ao longo de um dia, com intervalos de 2 horas. Em ambas, foi solicitada a construção de um gráfico, utilizando as informações dadas nas respectivas tabelas e, no final, era questionado se existia alguma diferença ou semelhança entre os dois problemas.

Durante a realização da atividade, a professora ouviu vários comentários de que as questões mais difíceis eram as duas primeiras, porque precisavam definir/explicar em palavras seu entendimento sobre funções. Normalmente, numa aula tradicional o professor inicia colocando a definição formal e dá exemplos. O estudante acaba focando sua atenção em como usar o que fora definido e nem sempre entende o significado da definição formal.

Na Tabela 30, encontra-se a categorização das respostas dadas ao entendimento do que é uma função. Ao todo 33 equipes foram formadas, sendo 18[105] na QUI, pois a maioria optou por duplas. Vale salientar que a soma do número das respostas de algumas questões é superior a 33, porque há equipes que apresentaram mais de uma resposta. Por convenção, ao longo do relato das atividades desenvolvidas em sala de aula usando a metodologia de ensinar através da RP denotaremos o número de grupos que apresentou determinada resposta na MAT e QUI por GM e GQ, respectivamente, e por TG o total do número de grupos da MAT e da QUI. E ainda, convencionamos que Gn significa grupo n. Nessa Tarefa, o valor de n de 1 a 15 representa os grupos da MAT e, de 16 a 33, os da QUI. Vale ressaltar que em cada atividade os grupos foram denotados por Gn, porém, como a professora-pesquisadora não exigiu que os grupos formados na primeira aula deveriam ser mantidos até o final do semestre, o grupo Gn da Tarefa 1 pode não ser o mesmo Gn de outra atividade.

Tabela 30
Categorias sobre o entendimento do que é uma função

		GM	GQ	TG
Correta	Regra/relação de correspondência entre dois conjuntos	7	5	15
	Definição formal	2	1	
Errada	Representação de um conteúdo em linguagem matemática	1	0	23
	Artifício matemático para analisar dados	2	0	
	Serve para fazer previsões	2	0	
	Expressão algébrica que se atribuem valores	0	4	
	Expressão com incógnitas que pode ser representado graficamente	0	5	
	Tem domínio, contradomínio e imagem	0	1	
	Representação de uma variável	1	0	
	Equação matemática	1	0	
	Cálculo matemático que demonstra variações	0	2	
	Variação de uma situação em função de uma variável	0	2	
	Forma de medida para calcular a média	0	1	
	Estratégia de resolução de enigmas	0	1	

Pela Tabela 30, pode-se perceber que 15 grupos souberam definir, em palavras (Figura 29) ou formalmente, o que é uma função. Achamos essa quantidade baixa, visto que função não é um conteúdo

[105] A turma da QUI terminou com 34 matriculados, mas no início do semestre eram 38 matriculados.

desconhecido dos alunos. Dentre as respostas categorizadas como erradas, há respostas que ilustram para que servem funções (Figura 30), ou ainda, que elencam função com domínio, imagem, variação, ou seja, são afirmações verdadeiras, mas que não respondem ao questionamento inicial. E, também há respostas erradas, como por exemplo, dizer que uma função é uma equação algébrica (Figura 31).

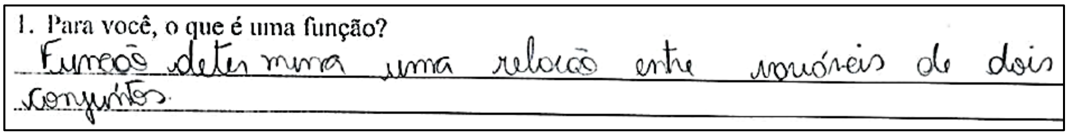

1. Para você, o que é uma função?
Função determina uma relação entre variáveis de dois conjuntos.

Figura 29 - Resposta da questão 1 do grupo G5 da Tarefa 1.
Fonte: Dados da pesquisa

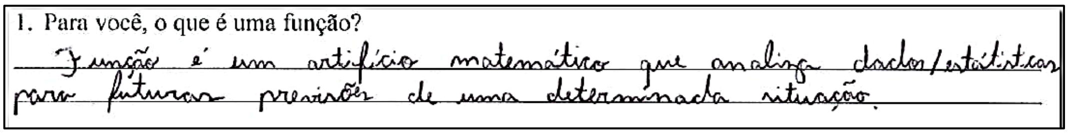

1. Para você, o que é uma função?
Função é um artifício matemático que analisa dados/estatísticas para futuras previsões de uma determinada situação.

Figura 30 - Resposta da questão 1 do grupo G9 da Tarefa 1.
Fonte: Dados da pesquisa

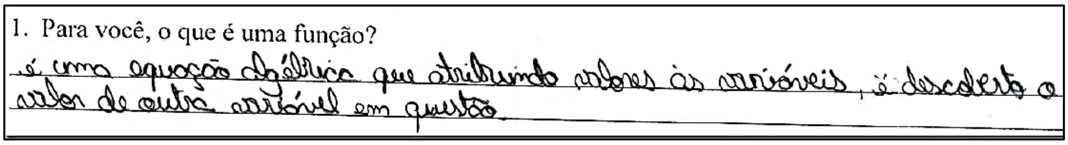

1. Para você, o que é uma função?
é uma equação algébrica que atribuindo valores às variáveis, é descoberto o valor de outra variável em questão.

Figura 31 - Resposta da questão 1 do grupo G18 da Tarefa 1.
Fonte: Dados da pesquisa

A Tabela 31 apresenta a categorização, por áreas do conhecimento, os exemplos práticos de funções dados pelos grupos.

Tabela 31
Categorização dos exemplos práticos de funções

Área do conhecimento	GM	GQ	TG
Cotidiano	8	4	12
Física	5	13	18
Biologia	3	0	3
Química	1	5	6
Economia	5	5	10
Matemática	1	2	3

Pode-se notar que a maioria dos estudantes associou os exemplos práticos de função a área da Física: velocidade (6[106]); aceleração (2); temperatura (3); pressão atmosférica (5); corrente elétrica (1);

[106] Entre parênteses representamos o número de estudantes que apresentou resposta de acordo com essa categoria.

ondas eletromagnéticas (1). Os exemplos relacionados com o cotidiano se referem ao valor gasto: ao tomar um táxi (7), como ilustra a Figura 32; ao abastecer um veículo (4); com energia elétrica (1). Na área da economia, apontaram o uso funções em: lucro (5); vendas (2); juros (1); inflação (1); e, produção de uma empresa (1). Da Química: titulação (5), ilustrado na Figura 33, e tempo de reação de um remédio (1). Da Biologia: crescimento populacional (2) e disseminação de doenças (1). Da Matemática: função polinomial e função definida por partes. Desses, 2 grupos relacionaram a função de primeiro grau com a corrida de táxi e a função definida por partes com a energia elétrica (Figura 34).

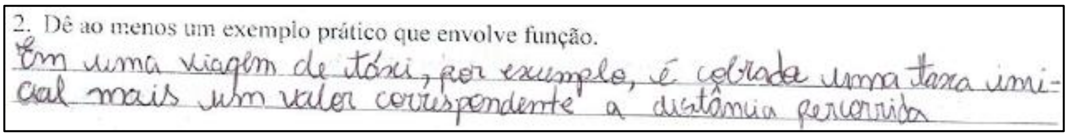

2. Dê ao menos um exemplo prático que envolve função.
Em uma viagem de táxi, por exemplo, é cobrada uma taxa ini-cial mais um valor correspondente à distância percorrida

Figura 32 - Resposta da questão 2 do grupo G23 da Tarefa 1.
Fonte: Dados da pesquisa

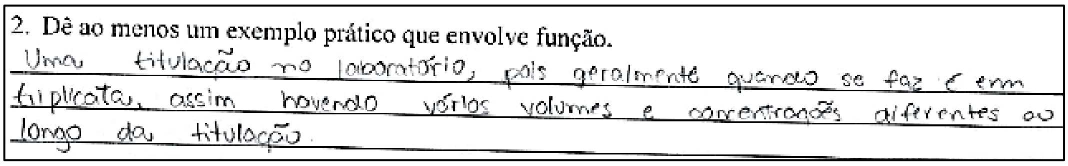

2. Dê ao menos um exemplo prático que envolve função.
Uma titulação no laboratório, pois geralmente quando se faz é em triplicata, assim havendo vários volumes e concentrações diferentes ao longo da titulação.

Figura 33 - Resposta da questão 2 do grupo G27 da Tarefa 1.
Fonte: Dados da pesquisa

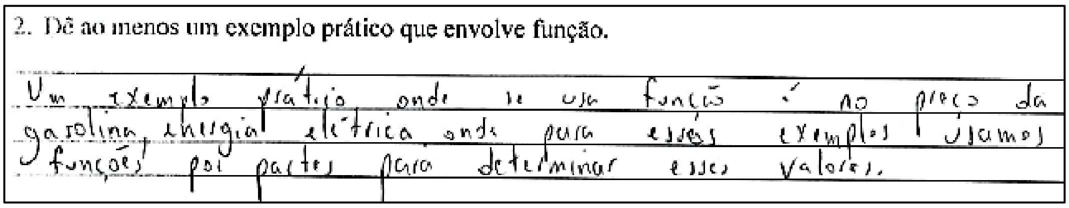

2. Dê ao menos um exemplo prático que envolve função.
Um exemplo prático onde se usa função é no preço da gasolina, energia elétrica onde para esses exemplos usamos funções por partes para determinar esses valores.

Figura 34 - Resposta da questão 2 do grupo da G12 da Tarefa 1.
Fonte: Dados da pesquisa

Observe que, apesar da maioria dos alunos não ter conseguido definir corretamente o que é uma função, conseguiram identificar exemplos práticos de funções. Dentre os exemplos citados, somente a titulação[107] não é aplicação de função, pois titulação é um processo que transforma um ácido mais uma base em sódio mais água. Quanto ao exemplo de funções, exceto um grupo que entregou em branco, todos descreveram em palavras. Um trio além de exemplificar em palavras deu a expressão matemática.

A questão 3 dessa atividade estava relacionada com a representação de função na forma tabular e solicitava para representar o gráfico das médias aritméticas entre a máxima e a mínima temperatura das médias climatológicas dos últimos 30 anos da cidade de Joinville. Durante os trabalhos em grupos

[107] Titulação é "um processo físico para determinação da concentração em valores específicos de uma substância desconhecida podendo ser esta de natureza ácida ou alcalino-básica. Quando a substância de concentração desconhecida é um ácido usamos uma base de concentração conhecida para determinar a concentração do ácido e vice-versa". Definição disponível em: http://www.infoescola.com/quimica/titulacao/. Acesso em 22 fev 2017.

algumas equipes estavam calculando a média anual das temperaturas máximas e mínimas. Nesses casos, para auxiliá-los a entender a diferença entre o que determinaram e o que era solicitado bastava questioná-los como fizeram, o que significa média anual e média ao longo do ano, pois ao explicarem o raciocínio constatavam a diferença entre essas médias. Na Tabela 32 encontra-se a categorização das respostas do item “a” do problema 3.

Tabela 32
Categorização das respostas do item “a” do problema 3 da Tarefa 1

		GM	GQ	TG
Correta	Gráfico das médias das temperaturas, sem unir os pontos	1	1	3
	Gráfico em barras das médias das temperaturas	0	1	
Parcialmente Correta	Gráficos das médias das temperaturas, unindo pontos	10	13	27
	Gráficos das médias, máximas e mínimas unindo os pontos	1	0	
	Gráfico em barras das temperaturas máximas, mínimas e das médias representado por linha unindo os pontos	0	2	
	Gráfico das médias das temperaturas, como segmentos constantes, mas uniu verticalmente as quebras	1	0	
Erradas	Gráficos das temperaturas máximas e mínimas, unindo os pontos	2	0	3
	Gráfico em linhas com eixos invertidos	0	1	

Pode-se perceber que 27 (aproximadamente 70%) equipes acertaram parcialmente o que foi proposto, pois construíram o gráfico das médias das temperaturas, mas uniram os pontos (Figura 35). Somente 3 equipes acertaram completamente esse item e dessas, 2 equipes apresentaram o gráfico das médias sem unir os pontos (Figura 36) e um grupo apresentou gráfico em barras das médias das temperaturas (Figura 37). Além dessa equipe, mais 2 equipes apresentaram o gráfico em barras representando as temperaturas máximas e mínimas e, no mesmo gráfico, representaram o gráfico das médias das temperaturas unindo os pontos (Figura 38). Particularmente, nos surpreendeu encontrar respostas com gráfico em barras, trabalhados em Estatística. Convém ainda destacar que essa solução inesperada pela professora foi dada por ingressantes na Universidade. Ou seja, alunos que ainda não estão viciados a olhar apenas de uma única forma para um problema de *Cálculo*.

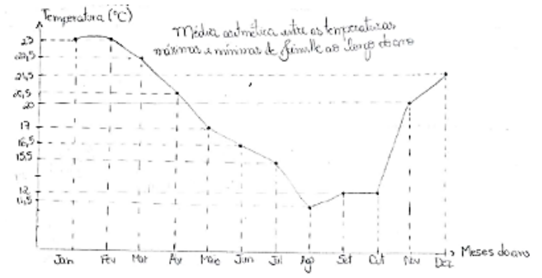


Figura 35 - Solução do item “a” da equipe G22 da questão 3 da Tarefa 1.
Fonte: Dados da pesquisa

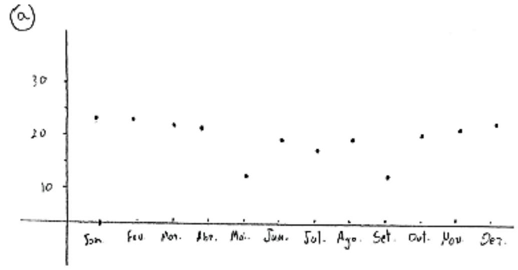


Figura 36 - Solução do item “a” da equipe G7 da questão 3 da Tarefa 1.
Fonte: Dados da pesquisa

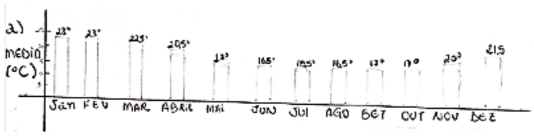


Figura 37 - Solução do item “a” da equipe G31 da questão 3 da Tarefa 1.
Fonte: Dados da pesquisa

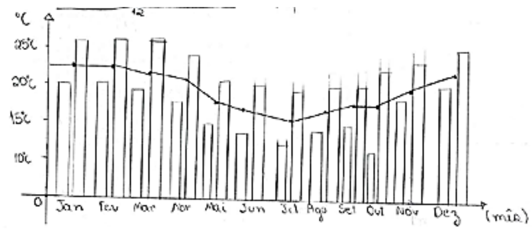


Figura 38 - Solução do item “a” da equipe G16 da questão 3 da Tarefa 1.
Fonte: Dados da pesquisa

Duas equipes apresentaram gráficos que não representam o gráfico de uma função, porque há abscissas com mais de uma ordenada. Uma dessas equipes inverteu os eixos coordenados, isto é, plotaram temperatura versus meses do ano (Figura 39). E, a outra, representou segmentos de retas (Figura 40), ou seja, consideraram o domínio como sendo um domínio contínuo. Essa interpretação está correta, pois interpretaram a média da temperatura como sendo uma função constante ao longo de todo o mês. O equívoco cometido por essa equipe foi ao fazer segmentos verticais para unir os saltos (pontos de descontinuidades) que existiam na representação gráfica.

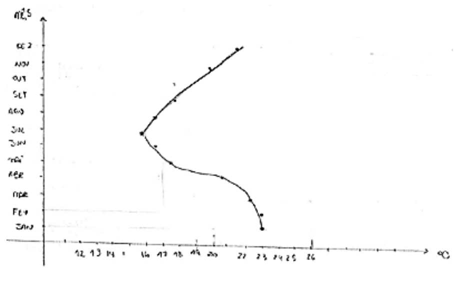


Figura 39 - Solução do item “a” da equipe G20 da questão 3 da Tarefa 1.
Fonte: Dados da pesquisa

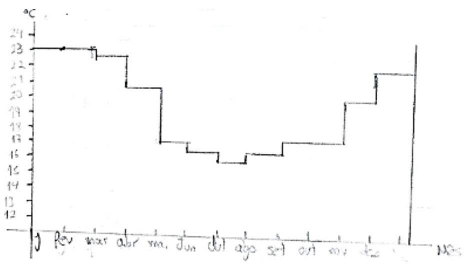


Figura 40 - Solução do item “a” da equipe G32 da questão 3 da Tarefa 1.
Fonte: Dados da pesquisa

No item “b” do problema 3 questionava-se, com base nos dados da precipitação mensal, fornecida na Tabela 1 da atividade, qual era a estação do ano mais chuvosa em Joinville e pedia-se justificativas para a resposta dada. Pelas categorias de respostas apresentadas na Tabela 33, percebe-se que aproximadamente 85% das equipes responderam corretamente que a estação mais chuvosa é o verão. Porém, somente uma dessas equipes analisou se a resposta era condizente com a experiência de vida em Joinville. Essa equipe respondeu que: *"Em Jlle [Joinville], chove mais no verão em curtos períodos de tempo, e no inverno o período chuvoso é maior, embora a precipitação seja menor".*

Tabela 33
Categorização das respostas do item "b" da questão 3 da Tarefa 1

		GM	GQ	TG
Correta	Verão, com justificativa	0	1	1
Parcialmente correta	Verão, sem justificativa	11	16	27
Errada	Janeiro	1	1	2
Não respondeu		1	1	2

Durante a atividade, muitas equipes pediram auxílio da professora por não concordarem com os dados referentes a precipitação, pois pela Tabela 1 fornecida no problema 3, no mês de janeiro chovia mais, mas pela experiência de vida de Joinville, não concordavam, porque no inverno chovia mais. Nesses casos, a professora teve que esclarecer a ambas as turmas o significado de precipitação, pois estavam associando a palavra à quantidade de dias chuvosos ao invés de volume de chuva acumulada ao longo de todo o mês.

A questão 4, fornecia uma tabela com a previsão de temperatura para a cidade de Joinville no dia 12 de julho de 2016, a cada 2 horas. O item "a" solicitava para construir o gráfico dessa previsão de temperatura. As categorias das respostas encontradas nos protocolos estão apresentadas na Tabela 34.

Tabela 34
Categorização das respostas do item "a" da questão 4 da Tarefa 1

		GM	GQ	TG
Correta	Gráfico de linhas	13	18	31
Parcialmente correta	Gráficos de pontos	1	0	1
Errada	Gráfico com segmentos de função constante, unidos por segmentos verticais	0	1	1

A representação gráfica desse item teve 94% de acerto (Figura 41). Pode ser que ao ilustrarem esse gráfico as equipes tenham unido os pontos por estarem acostumados a trabalharem com funções contínuas e nem tenham refletido sobre o facto de poder ou não uni-los. Duas equipes apresentaram resposta errada, uma pela falta de unir os pontos e, a outra, por representar como constante a respectiva temperatura nos intervalos de duas horas, além de fazerem os segmentos de retas verticais para conectar os segmentos constantes (Figura 42). Nesse caso, as temperaturas não podem ser constantes ao longo de todo o intervalo de tempo de 2 horas, pois se fosse, ao passar de um intervalo para outro a temperatura teria que se elevar/diminuir instantaneamente, impossível fisicamente.

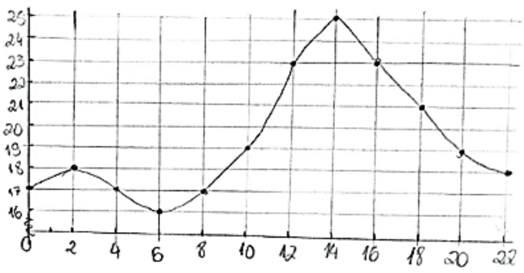


Figura 41 - Solução do item “a” da equipe G13 da questão 4 da Tarefa 1.
Fonte: Dados da pesquisa

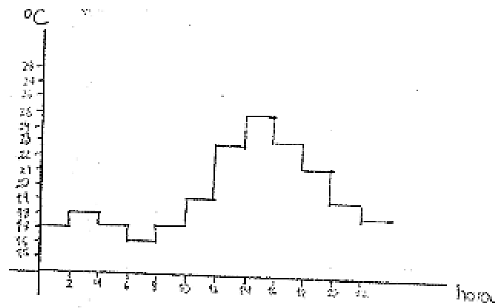


Figura 42 - Solução do item “a” da equipe G32 da questão 4 da Tarefa 1.
Fonte: Dados da pesquisa

O item “b” do problema 4 questionava se existia alguma diferença com relação ao domínio da função temperatura desse problema com relação ao problema 3. A Tabela 35 apresenta a categorização das respostas desse item.

Tabela 35
Categorização das respostas do item “b” da questão 4 da Tarefa 1

		GM	GQ	TG
Correta	Domínio discreto num e contínuo no outro	2	1	3
Errada	Comportamento oposto	0	5	25
	Diferença na unidade de medida do tempo	6	7	
	Diferença das escalas de variação de temperatura	2	2	
	Um ou dois elementos a mais no domínio	1	1	
	Diferença na forma de obter a média das temperaturas	1	0	
Não respondeu		2	3	5

Pelas categorias apresentadas na Tabela 35, observa-se que as diferenças detectadas foram bem variadas. Somente três grupos responderam que a diferença entre as duas questões, com resposta que a professora “almejava de ouvir ”, era que o domínio do problema 3 era domínio discreto (ao representar apenas os pontos) e, do problema 4, era contínuo (Figura 43). Ressalve-se que os termos “discreto” e “contínuo” podem ter sido influenciados pela professora, pois conversando com as equipes, que já tinham feito os dois gráficos corretamente, acabou usando os termos domínio contínuo/discreto, pois percebeu que constataram essa diferença nos tipos de domínios, mas não sabiam os nomes corretos para evidenciar a diferenciação. Outras respostas identificaram informações, mas irrelevantes, tais como destacar comportamentos opostos observando os "picos" dos gráficos (Figura 44), unidade de medida adotada para o tempo (Figura 45), conjunto imagem diferente (Figura 46), dentre outras respostas. Pela pequena quantidade de respostas esperadas/adequadas, pode ser que não tenha ficado claro no enunciado que confronto de informações se desejava que fosse analisado. Mas, por outro lado, no Ensino Básico não se costuma muito trabalhar com funções com domínio discreto. Geralmente, o domínio discreto é abordado nos conteúdos de Estatística.

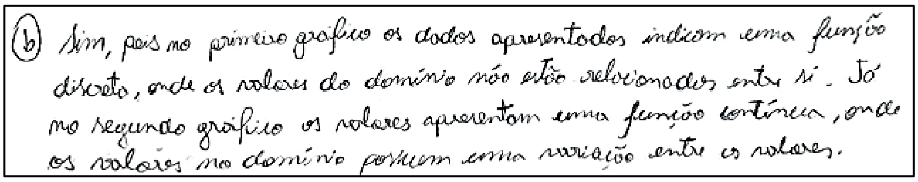

(b) Sim, pois no primeiro gráfico os dados apresentados indicam uma função discreta, onde os valores do domínio não estão relacionados entre si. Já no segundo gráfico os valores apresentam uma função contínua, onde os valores no domínio possuem uma variação entre os valores.

Figura 43 - Resposta do item "b" da equipe G7 da questão 4 da Tarefa 1.
Fonte: Dados da pesquisa.

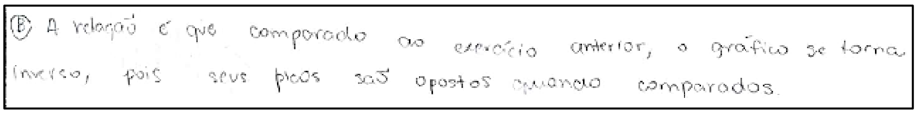

(b) A relação é que comparado ao exercício anterior, o gráfico se torna inverso, pois seus picos são opostos quando comparados.

Figura 44 - Resposta do item "b" da equipe G20 da questão 4 da Tarefa 1.
Fonte: Dados da pesquisa.

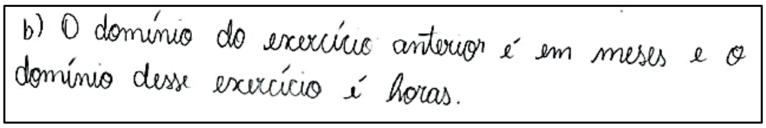

b) O domínio do exercício anterior é em meses e o domínio desse exercício é horas.

Figura 45 - Resposta do item "b" da equipe G13 da questão 4 da Tarefa 1.
Fonte: Dados da pesquisa.

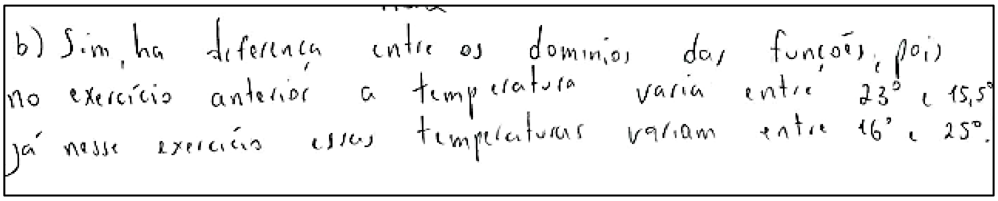

b) Sim, há diferença entre os domínios das funções, pois no exercício anterior a temperatura varia entre 23° e 15,5° já nesse exercício essas temperaturas variam entre 16° e 25°.

Figura 46 - Resposta do item "b" da equipe G12 da questão 4 da Tarefa 1.
Fonte: Dados da pesquisa.

5.2.1. A plenária

Na MAT, tanto o entendimento do que é uma função como os exemplos práticos de função, foram discutidos de forma oral. A professora solicitou que alguns grupos apresentassem suas respostas sobre o que é uma função. Depois de algumas equipes voluntariamente apresentarem a resposta, a professora definiu formalmente função real de uma variável real, apresentando a notação matemática, definindo os conjuntos que representam o domínio, o contradomínio e a imagem.

Na sequência, solicitou que dessem os exemplos práticos de funções que identificaram. Para exemplificar, ainda sem usar a representação analítica, a professora resgatou a representação de funções por diagramas, pois é fácil e rápido para discutir a diferença entre ser ou não função, além de auxiliar na compreensão e diferenciação entre contradomínio e imagem de uma função. Geralmente, não se fala em contradomínio, usa-se diretamente o conjunto imagem. Essa diferenciação gerou bastante discussão e propiciou abordar o assunto de função injetora, sobrejetora e bijetora, já na primeira aula de funções. Além disso, pelos elementos dos conjuntos escolhidos por contradomínio conterem números irracionais, foi necessário revisar todos os conjuntos numéricos, pois os estudantes não estavam identificando o conjunto numérico ao qual os números "π" e "e" pertenciam.

Ao analisar as respostas que os alunos da MAT apresentaram em seus protocolos, percebemos que havia grupos com entendimento errado sobre a definição de função e, essas definições erradas não foram identificadas no momento da plenária, pois os grupos não as apresentaram. Por isso, decidimos que em outras aulas, quando percebêssemos que não daria tempo para discutir todo trabalho realizado, a professora recolheria as atividades para digitaliza-las, pois julgamos esse procedimento seria mais viável do que iniciar uma plenária e não conseguir findá-la no mesmo dia. Com essa dinâmica, poderíamos fazer uma análise preliminar das respostas e selecionar as variadas respostas (certas e erradas) dadas pelos grupos e, como forma de agilizar os trabalhos em sala e promover a discussão com toda a turma, preparar uma apresentação no software *PowerPoint* com as respostas selecionadas. Como na turma da QUI a plenária foi uma aula após a plenária da MAT, lá essa estratégia fora adotada desde a primeira plenária.

Na plenária da QUI a professora também iniciou solicitando para que os alunos falassem oralmente sobre como os grupos definiram função. Como a turma não se pronunciou voluntariamente, pois ainda estava muito tímida, visto que quase todos os estudantes eram ingressantes e esse era o segundo dia de aula de CDI, a professora optou por projetar uma a uma as respostas previamente selecionadas com o intuito de suscitar as discussões. A professora lia as respostas e os questionava se concordavam ou não com tal definição e pedindo para que argumentassem sobre o assunto. Dessa forma, começaram a interagir e fazer a plenária de facto existir. A primeira definição projetada falava em expressão algébrica (Figura 47) e, a segunda, muito parecida com a primeira, mas dizia equação (Figura 31). Quando a turma foi questionada sobre a diferença entre as duas definições apresentadas, são souberam responder. Então nesse momento foi revista a diferença entre expressão algébrica e equação. Depois disso, foi concluído que não é correto falar equação algébrica para função. Após apresentar as outras duas definições encontradas nos protocolos os alunos foram indagados a fim de saber se conseguiam extrair (se existisse) algo em comum entre elas. A turma identificou que as ideias centrais envolvidas nas definições eram de variação e de relação. A formalização da definição de função na turma da QUI foi similar à já relatada na turma da MAT.

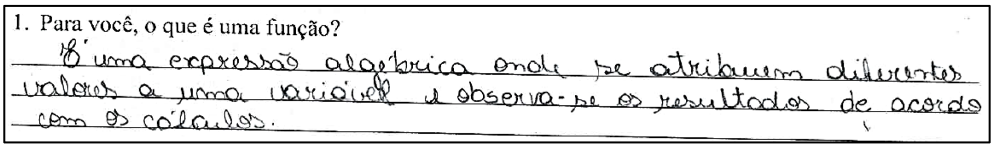

1. Para você, o que é uma função?
É uma expressão algébrica onde se atribuem diferentes valores a uma variável e observa-se os resultados de acordo com os cálculos.

Figura 47 - Definição de função apresentada pela equipe G17 na questão 1 da Tarefa 1.
Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa turma como exemplo prático, surgiu a titulação. Como professora de matemática, a professora-pesquisadora se deparou com um termo desconhecido, pois esse é um termo comum para alguém da área de Química, ela questionou a turma sobre o que entendiam por titulação. Pelas explicações que deram, percebeu que o entendimento dos estudantes de que titulação era uma função estava equivocado. Como a professora já havia lido, com antecedência, todas as respostas dos estudantes nos protocolos recolhidos, já havia pesquisado sobre o significado dessa expressão. Além disso, pessoalmente conversou com uma professora do departamento de Química para que lhe auxiliasse no entendimento do que é a titulação. Assim, no momento da plenária, pôde esclarecer a turma de que a titulação é um procedimento que transforma ácido mais base em sódio mais água, isto é,

$$HCL + NaOH \rightarrow NaCL + H_2O.$$

E, como o número de mols do ácido (M_{ac}) e da base (M_b) precisam ser iguais, chega-se na equação

$$M_{ac}V_{ac} = M_bV_b,$$

ou seja, o produto da massa do ácido pelo seu volume é igual ao produto da massa da base pelo volume. Portanto, a titulação não é uma função, é uma equação. Ao explicar esse exemplo prático que partiu dos próprios estudantes, percebeu que a turma ficou muito interessada, porque estava falando de Química na aula de *Cálculo*.

Com relação à discussão dos problemas 3 e 4, na MAT, a professora escolheu representantes de três equipes para que colocassem na lousa o gráfico da média entre as temperaturas máximas e mínimas das médias climatológicas dos últimos 30 anos. A escolha não foi arbitrária. Esses grupos foram selecionados por apresentarem gráficos distintos, como pode ser observado na foto da Figura 48.

Figura 48 - Registro na lousa do item “a” do problema 3 da Tarefa 1 da turma MAT.
Fonte: Arquivo pessoal.

Depois que os três gráficos da Figura 48 estavam ilustrados, foi iniciada a discussão conjunta com o intuito de que a turma argumentasse qual dos gráficos julgavam ser o mais adequado para representar a solução do problema 3. A primeira constatação foi de que o segundo gráfico ilustrado não satisfazia ao que ao que o problema pedia. A primeira ilustração foi classificada como correta. Em seguida, foi confrontado o primeiro gráfico ilustrado com o terceiro que, em princípio, a turma achava que estava errado. Diante disso, para entenderem que o correto era não unir os pontos, a professora perguntou se existia algo entre os meses de janeiro e fevereiro, depois, fez pergunta similar considerando outros meses. Somente depois de muita conversa, chegaram ao consenso do correto, pois acreditavam que existiam dias (era o algo) entre os meses. Em seguida, foi discutido o problema 4. Somente uma equipe apresentou o gráfico sem unir os pontos. Nessa questão, depois da discussão sobre se o correto era unir ou não os pontos no problema anterior, a turma não teve dificuldades em compreender que a solução correta era com linha cheia. E, para finalizar, para identificar a diferença entre os domínios, com as discussões, ficou claro que a diferença estava no facto de poderem ou não unir os pontos, ou seja, que a diferença estava relacionada com os elementos do domínio.

Na turma da QUI, para discutirmos a questão das temperaturas mínima e máxima nos 30 anos, foram selecionados 6 gráficos distintos que foram apresentados pelos grupos (Figura 49). A professora mostrou, um a um, todos os gráficos na mesma tela, e fez uma análise conjunta sobre aquelas respostas. Após toda a discussão, continuavam achando que a linha deveria ser cheia, ou seja, pontos conectados. Para entenderem que não podiam unir e perceberem que não existe nada entre os meses janeiro e fevereiro, fevereiro e março e assim sucessivamente, recorremos à forma como é organizado um dia. Em seguida, a professora colocou a seguinte situação: *“Hoje [24 de fevereiro de 2017], sexta-feira às 10h40 estamos aqui na sala de aula e daqui a 24 horas onde estaremos?”* Em seguida, a professora comentou que um dia completo (de 24 horas) passa por dois dias do calendário, pois até às

23h59min59s ainda era dia 24, depois disso teríamos 0h0min0s. Indagou-os: *"que dia era/seria?"* Responderam corretamente que seria dia 25. Depois disso, a professora retomou a discussão para a análise que interessava perguntando se entre o dia 31 de janeiro às 23h59min59s e 0h0min0s do dia 01 de fevereiro existia algo entre eles. Pela interação deles na sala de aula e pelas respostas apresentadas a professora acredita que com as comparações usadas nas explicações, os estudantes compreenderam o que queria mostrar. Com isso, novamente a professora perguntou qual era a resposta mais adequada. Responderam que era o gráfico cujos pontos não estavam unidos. E, a professora ressaltou que a segunda imagem (Figura 49), para estar totalmente correta, as linhas verticais deveriam ser pontilhadas.

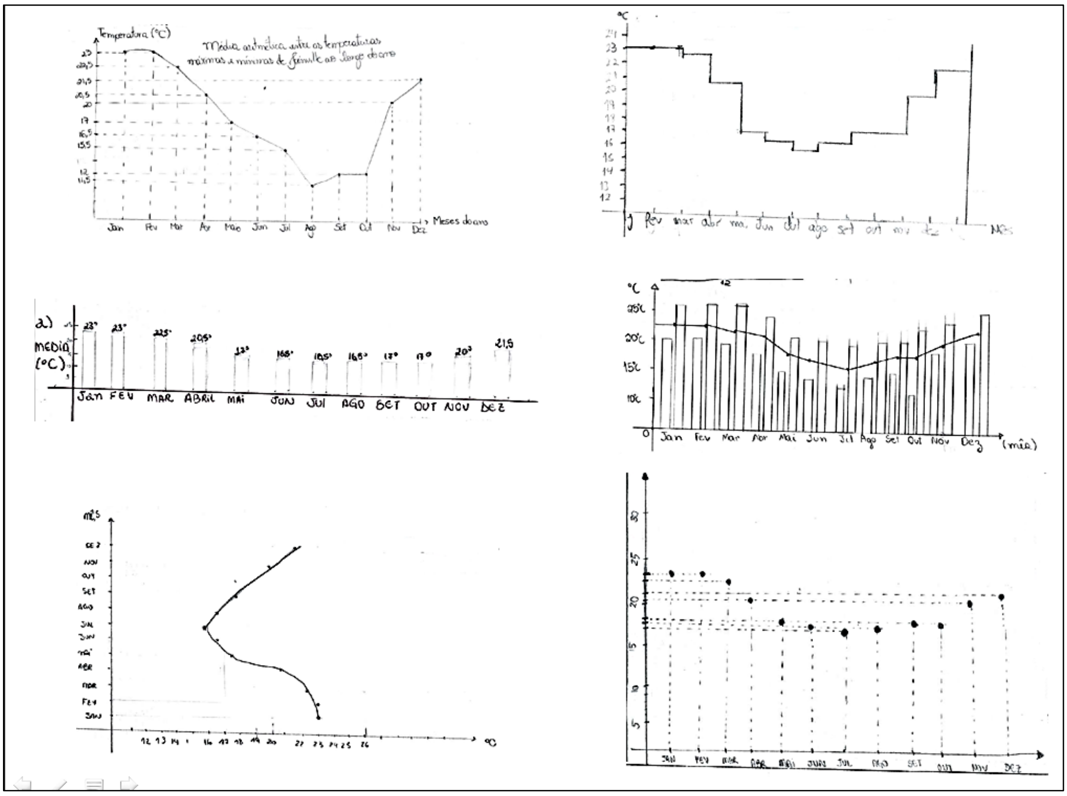


Figura 49 - Diferentes respostas da QUI para o problema 3 da Tarefa 1.
Fonte: Print do slide usado na plenária da Tarefa 1 na QUI.

Com relação ao item "b" do problema 3, sobre a precipitação, o dia da plenária foi um ótimo dia para discutir, porque no dia anterior no final da tarde "caiu um temporal[108]" na cidade de Joinville. Foi muita água em pouco tempo, muitas ruas ficaram alagadas. Então, os alunos entenderam perfeitamente o que significa precipitação, ou seja, que não importa a sensação de que chove o mês inteiro, como nos

[108] Significa que a precipitação foi grande em pouco tempo.

nossos meses de inverno, mas a quantidade de água acumulada ao longo do mês e que este acúmulo pode ser obtido até pela intensa chuva ocorrida em um único dia.

Com relação ao item "a" do problema 4, o gráfico da temperatura em um dia, apenas um grupo havia feito com a ideia de função definida por partes e cada uma destas partes ser uma função constante, mas usou segmentos de retas verticais para passar de uma temperatura para outra. Depois de toda a discussão anterior, rapidamente a turma concluiu que no local das semirretas verticais, devia-se deixar pontilhado ou não colocar representação alguma.

5.2.2. Comentários

Avaliamos como positiva a adaptação feita na quinta etapa do roteiro de Onuchic e Allevato (2014), que se refere ao registro das atividades na lousa, pois julgamos que as discussões geradas na aula foram tão produtivas quanto teriam sido com o registro na lousa, com o diferencial de que o tempo gasto com a escrita no quadro foi aproveitado em discussões conjuntas e o facto de poder retomar slides anteriores para fazer comparações entre respostas facilitou a conversa. A professora-pesquisadora também acredita que os alunos não se sentiram constrangidos com suas respostas sendo projetadas nos slides, que não eram identificadas, mas os autores acabavam se identificando no momento da discussão. Como a professora-pesquisadora considerou produtiva essa dinâmica realizada na plenária, sempre que foi possível, manteve essa adaptação do referido roteiro.

Na Tabela 36 encontram-se a categorização dos erros encontrados nessa primeira atividade. Salienta-se que nessa categorização foram analisadas todas as respostas independentes de terem sido classificadas como corretas, parcialmente corretas ou erradas. Para essa análise foram consideradas 4 categorias: incorreção em escritas matemáticas (IEM); extração inadequada de informações por meio da análise gráfica (EIAG); respostas vagas (RV), isto é, o grupo apresentou constatações verdadeiras, mas não respondeu de forma explícita o que fora solicitado; e, erro conceitual (EC).

Tabela 36
Número de erros, por itens, identificados nas respostas

Categoria	1	2	3A	3B	4A	4B
IEM	15	0	0	0	0	0
EIAG	0	0	0	0	0	0
RV	21	0	0	27	0	25
EC	2	5	30	2	2	0

Com relação aos dados apresentados na Tabela 36 pode-se constatar que a maior concentração de erros está relacionada com respostas vagas nas questões 1, 3b e 4b. Na questão 1, relacionada ao que o grupo entendia por definição de função, foram identificadas 21 respostas vagas. Nessa categoria, encontram-se as respostas de muitos estudantes que indicaram “utilidades” de funções, como ilustrada na Figura 30 em vez de definirem função. Na questão 3b, foram consideradas respostas vagas as que apenas apresentaram o verão como sendo a estação mais chuvosa, mas não justificaram como tinham chegado a essa conclusão. E, as 25 respostas da questão 4b dessa categoria estão associadas a constatações verdadeiras, mas que não agregaram conhecimento sobre funções, apenas falavam de observações pontuais baseadas nos dados das tabelas fornecidas e nos gráficos construídos (Figura 44, Figura 45 e Figura 46). O maior número de erros na atividade foi de erro conceitual ocorrido na questão 3a. Esse item estava relacionado com a construção do gráfico das médias das temperaturas ao longo de um ano e o erro mais frequente identificado foi o de unir os pontos dos gráficos. Isso não era possível porque se tratava de um domínio discreto. Julgamos que esse elevado número de erros não deve ter ocorrido no item “a” do problema 4, porque desde que os alunos têm os primeiros contatos com funções no Ensino Básico, se trabalha muito com domínio contínuo. E, para construir gráficos de funções dadas na forma analítica costuma-se atribuir valores para a abscissa *“x”* para encontrar o valor da ordenada *“y”*, a seguir, marcam-se os pares ordenados encontrados e unem-se os pontos, sem haver a preocupação de existir ou não os valores intermediários. Como nesse item o domínio era contínuo, ao usar esse procedimento, obtém-se a resposta correta. E, usando esse procedimento no item “a” do problema 3, obtém-se uma resposta errada. Como exemplos de escritas matemáticas inadequadas temos a resposta ilustrada na Figura 31, que define função como sendo uma “equação algébrica” ao invés de uma “expressão algébrica”.

5.3. Tarefa 14 – Interpretação Geométrica

A Tarefa 14 consistia de um problema com 4 itens, como ilustrado na Figura 50. O objetivo desse problema era que a partir da determinação do coeficiente angular de cada uma das retas secantes que passavam por um ponto fixo, denotado por P, e por um ponto Q dado (item “a”) e da ilustração de todas essas retas no mesmo plano cartesiano (item “b”), o estudante pudesse observar que a reta tangente ao gráfico da função dada, no ponto P, era a posição limite das retas secantes ao gráfico de f que passavam pelo ponto P.

1. Seja C o gráfico da função $f(x) = x^2$.

a. Sabendo que a ***reta secante*** ao gráfico de uma função f é definida como sendo uma reta que intercepta ao menos em dois pontos o gráfico de f, determine o coeficiente angular da reta secante a C que passa pelos pontos:

i. $P(2,4)$ e $Q(0,0)$;
ii. $P(2,4)$ e $Q(1,1)$;
iii. $P(2,4)$ e $Q\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$;
iv. $P(2,4)$ e $Q(1{,}9;3{,}61)$;
v. $P(2,4)$ e $Q(x_0,x_0^2)$.

b. Represente geometricamente o gráfico de f e, no mesmo plano cartesiano, trace as retas secantes que passam pelos pontos P e Q dados no item a.

c. O que você pode observar com relação aos valores das abscissas dos pontos Q (do item b) com relação ao valor da abscissa de P?

d. O que pode falar a respeito de como se determina o coeficiente angular da reta tangente a C em P? Por quê?

Figura 50 - Problema proposto na Tarefa 14.
Fonte: Produção da autora.

Em ambas as turmas a Tarefa 14 foi realizada em horário extraclasse como sendo a extensão da Tarefa 13, que visava introduzir a definição de derivada. Em outras palavras, a Tarefa 14 pode ser interpretada como a “proposição de novos problemas”, que corresponde a atividade 10 do terceiro roteiro do GTERP. Essa Tarefa foi desenvolvida em horário extraclasse com o intuito de adiantar um pouco o conteúdo. Em ambas as turmas a atividade poderia ser feita em grupo, mas deveria ser entregue de forma individual, visto que a professora desejava que todos os estudantes refletissem sobre as questões que estavam sendo abordadas. Ela deveria ser entregue via plataforma Moodle, até ao dia que antecedia a próxima aula de CDI para que a professora organizasse uma apresentação com as diferentes estratégias adotadas na resolução. Porém, nem todos os alunos entregaram pelo Moodle. A maioria entregou no início da aula em que a plenária seria realizada. Por isso, na plenária a ser relatada nessa seção a professora não discutiu todas as diferentes resoluções, pois os alunos que entregaram a atividade somente no dia da plenária não colocaram a sua resposta, diferente das demais, para discussão naquele momento. A professora pesquisadora constatou esse facto somente no momento em que estava realizando a análise dos protocolos entregues.

Como a atividade não foi resolvida em sala de aula, nessa seção serão discutidas as respostas encontradas nos protocolos. Ao todo houve 53 protocolos entregues, sendo 32 da MAT e 21 da QUI. Ao apresentar alguma das resoluções feitas pelos estudantes iremos identificar cada estudante por En, sendo que n de 1 até 31 representará um estudante da MAT e de 33 até 53 da QUI.

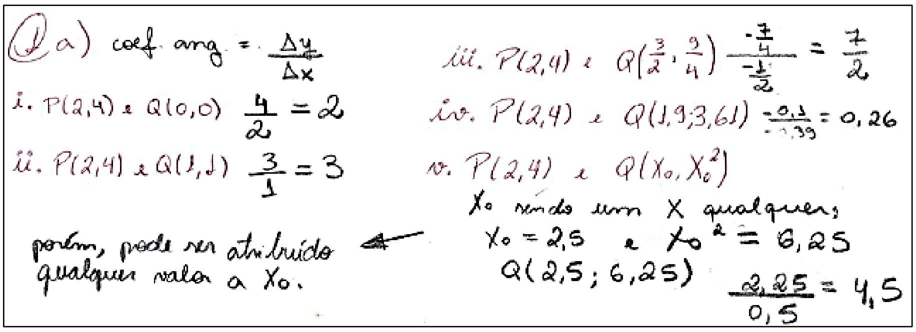
5.3.1. Análise das respostas

O problema proposto iniciava definindo o que se entende por uma reta secante e, a seguir, no item "a" solicitava-se que fossem determinados os coeficientes angulares de retas secantes ao gráfico de $f(x) = x^2$. Esse item possuía 5 subitens, nos quais eram fornecidas as coordenadas do ponto Q, de forma que do primeiro ao quarto subitem, as coordenadas do ponto Q estavam aumentando de valor de modo que se aproximavam das coordenadas do ponto $P(2,4)$. E, no último subitem, o ponto Q possuía coordenadas genéricas. A Tabela 37 apresenta as estratégias de resolução adotadas pelos estudantes bem como sua categorização como correta/parcialmente correta/errada.

Tabela 37
Respostas do item "a" da Tarefa 14

		GM	GQ	TG
Correta	Usou a definição do coeficiente angular	22	9	49
	Usou sistema linear para encontrar os coeficientes angular e linear	5	6	
	Usou a equação geral da reta	2	0	
Parcialmente correta	Usou a definição do coeficiente angular, mas no item v, atribuiu um valor para x_0	2	1	4
	Calculou o limite do coeficiente angular da reta secante com Q tendendo a P	1	0	

Da Tabela 37, pode-se observar que 49 (de 53) estudantes determinaram corretamente o valor do coeficiente angular da reta secante em todos os pontos propostos. Entendemos que o item "a" desse problema não foi um problema para os estudantes, pois do ensino pré-universitário eles já conhecem a definição de coeficiente angular de uma reta definida por dois pontos, ou seja, sabem que para calcular o coeficiente angular basta fazer o quociente entre a variação das ordenadas pela variação das abscissas. Apesar de não ser um problema esse item, pois fazem os cálculos sem dificuldades, a interpretação dos resultados que seria exigida nos demais itens era de grande importância para que os estudantes conseguissem conjecturar a relação existente entre este coeficiente angular da reta secante com o coeficiente angular da reta tangente. Trinta e seis estudantes adotaram essa estratégia para responder o item "a". Desses, três estudantes acertaram parcialmente, porque no subitem "v" não entenderam que o x_0 dado no ponto Q, era uma abscissa genérica que deveria ser usada, por isso escolheram um valor para ela (Figura 51).


1 a) coef. ang. = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

i. $P(2,4)$ e $Q(0,0)$ $\frac{4}{2} = 2$

ii. $P(2,4)$ e $Q(1,1)$ $\frac{3}{1} = 3$

iii. $P(2,4)$ e $Q(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ $\frac{-\frac{7}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{7}{2}$

iv. $P(2,4)$ e $Q(1,9;3,61)$ $\frac{-0,1}{-0,39} = 0,26$

v. $P(2,4)$ e $Q(X_0, X_0^2)$

X_0 sendo um X qualquer;

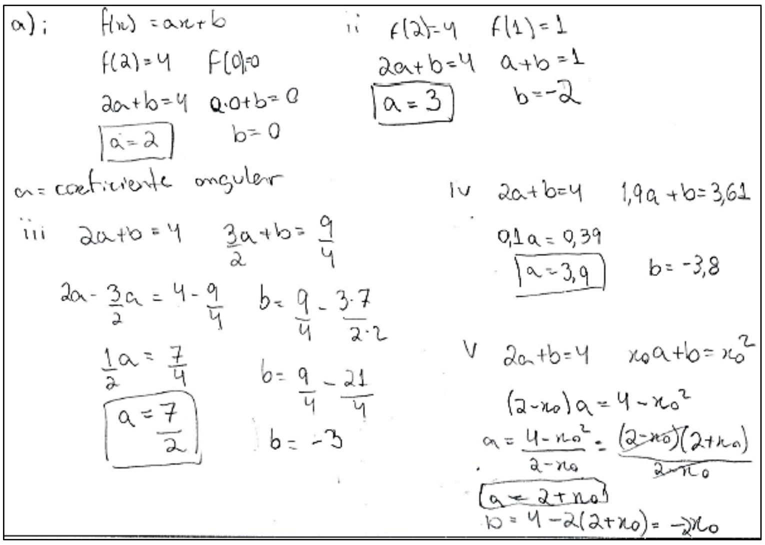
$X_0 = 2,5$ e $X_0^2 = 6,25$

$Q(2,5; 6,25)$ $\frac{2,25}{0,5} = 4,5$

porém, pode ser atribuído qualquer valor a X_0.

Figura 51 - Resposta do item “a” da Tarefa 14 de E13.
Fonte: Dados da pesquisa.

A segunda estratégia de resolução mais adotada foi considerar a forma genérica de uma função de primeiro grau, visto que seu gráfico é uma reta, e substituir as coordenadas dos pontos dados nessa expressão analítica, em cada um dos subitens, e determinar os respectivos coeficientes angular e linear por meio da resolução de um sistema de equações lineares. Onze estudantes resolveram dessa forma, como ilustrado na Figura 52. Todos os estudantes que usaram essa estratégia, concluíram que o coeficiente angular do subitem “v” era $a = 2 + x_0$, independentemente da técnica adotada para resolver o sistema de equações lineares encontrado. A maioria dos estudantes que determinou o coeficiente angular usando a primeira estratégia apresentou como resposta $a = \frac{x_0^2-4}{x_0-2}$, sem realizar a simplificação da expressão. Um estudante resolveu diretamente usando o software *GeoGebra*, construiu o gráfico da função, identificou os pontos dados no item “a” e determinou as respectivas equações gerais da reta. A partir delas identificou o coeficiente angular. E, outro estudante substituiu as coordenadas dos pontos na equação da geral da reta ($y - y_0 = m(x - x_0)$) para encontrar o coeficiente angular (*m*).


a); $f(x) = ax+b$

$f(2)=4$ $f(0)=0$

$2a+b=4$ $a \cdot 0+b=0$

$\boxed{a=2}$ $b=0$

a = coeficiente angular

ii $f(2)=4$ $f(1)=1$

$2a+b=4$ $a+b=1$

$\boxed{a=3}$ $b=-2$

iii $2a+b=4$ $\frac{3a}{2}+b=\frac{9}{4}$

$2a-\frac{3}{2}a = 4-\frac{9}{4}$ $b=\frac{9}{4}-\frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 2}$

$\frac{1}{2}a = \frac{7}{4}$ $b=\frac{9}{4}-\frac{21}{4}$

$\boxed{a=\frac{7}{2}}$ $b=-3$

iv $2a+b=4$ $1,9a+b=3,61$

$0,1a=0,39$

$\boxed{a=3,9}$ $b=-3,8$

v $2a+b=4$ $x_0a+b=x_0^2$

$(2-x_0)a = 4-x_0^2$

$a = \frac{4-x_0^2}{2-x_0} = \frac{(2-x_0)(2+x_0)}{2-x_0}$

$\boxed{a=2+x_0}$

$b = 4-2(2+x_0) = -2x_0$

Figura 52 - Resposta do item “a” da Tarefa 14 de E12.
Fonte: Dados da pesquisa.

Ainda nesse item, vale a pena discutir a solução apresentada pelo estudante E15 cuja (parte da) resolução proposta encontra-se na Figura 53. Pode-se observar que o referido estudante disse que usaria a definição de derivada de uma função num ponto para calcular o coeficiente angular da reta secante. Porém, pela imagem apresentada nessa figura, ele inicia a resolução do item “a” calculando $\lim\limits_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Na sequência, substituiu corretamente Δy por $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, mas considerou que $\Delta x \to 2$. Se estivesse usando adequadamente a definição de derivada, Δx deveria tender a 0. Nessa situação, Δx não tendia a 2, ele era exatamente igual a 2, pois essa era a diferença entre as abscissas das coordenadas dos pontos dados o primeiro subitem do item “a”. Os cálculos feitos por esses estudantes, depois da primeira igualdade apresentada, estão todos corretos. O erro identificado na resolução foi dizer que estaria usando a definição de derivada, quando de facto não usou, e pertence a categoria EC. Esse estudante usou a mesma argumentação em todos os subitens. Dessa forma, as manipulações algébricas para calcular a derivada da função no ponto P, no subitem que envolvia as coordenadas genéricas foi feita corretamente, mas foi cometido erro da categoria IEM, pois não continuou usando a notação de limite enquanto realizava as possíveis simplificações, como pode ser observado na Figura 54.

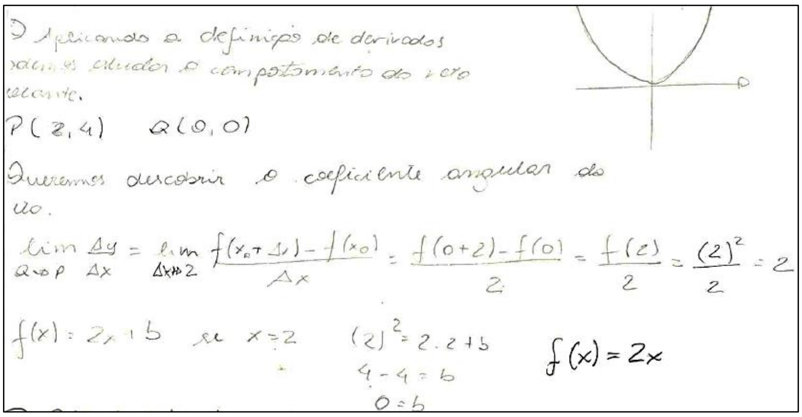


Figura 53 - Resposta do subitem “i” do item “a” da Tarefa 14 de E15.
Fonte: Dados da pesquisa.

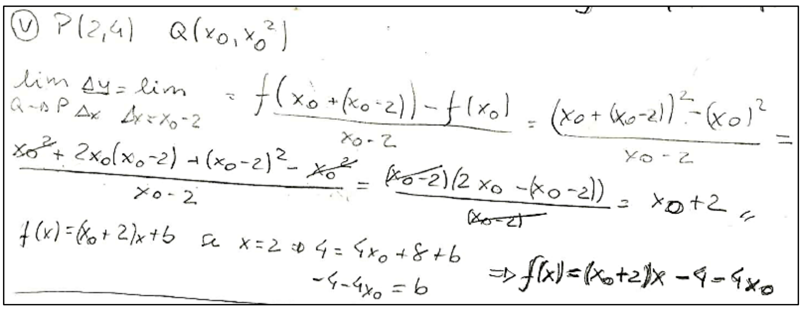


Figura 54 - Resposta do subitem “v” do item “a” da Tarefa 14 de E15.
Fonte: Dados da pesquisa.

O item “b” solicitava que fosse construído o gráfico da função f e, no mesmo plano cartesiano, fossem representadas as retas secantes que passavam pelos pontos mencionados no item “a”. As categorias das respostas dadas a esse item podem ser observadas na Tabela 38.

Tabela 38

Respostas do item “b” da Tarefa 14

		GM	GQ	TG
Correta	Representou o gráfico de f e todas as retas secantes no mesmo plano cartesiano	17	13	30
Parcialmente correta	Representação incompleta	9	2	11
Errada	Apresentou um gráfico em cada subitem do item “a”, mas não fez a sobreposição	1	1	5
	Representou somente uma reta secante	2	1	
Não respondeu		3	4	7

Das 30 equipes que responderam corretamente, 23 representaram no ambiente lápis e papel (Figura 55) e as demais utilizaram algum software gráfico. Onze equipes tiveram as respostas classificadas como parcialmente corretas, pois não finalizaram a construção do gráfico que fora solicitado. Dessas, oito equipes esboçaram no plano cartesiano uma ou duas retas secantes ao gráfico da função condizentes com as informações do item “a” e as demais retas secantes aleatórias, pois passavam pelo ponto P, mas não respeitavam o ponto Q. A Figura 56 ilustra essa situação. Observe que apesar dos pontos Q_2, Q_3 e Q_4 estarem com suas coordenadas representadas corretamente, o estudante não traçou corretamente o gráfico de f, pois os pontos Q pertencem a esse gráfico. Dois estudantes representaram as quatro retas secantes do item “a”, mas não ilustraram o gráfico de f (Figura 57) e um estudante representou uma reta secante e outras retas “tangentes” ao gráfico de f no ponto P.

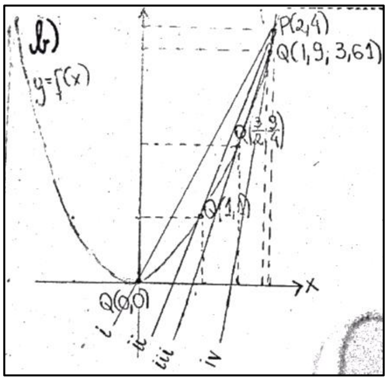


Figura 55 - Gráfico do item “b” da Tarefa 14 de E52.
Fonte: Dados da pesquisa.

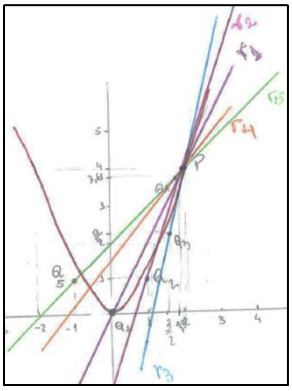


Figura 56 - Gráfico do item “b” do Tarefa 14 de E16.
Fonte: Dados da pesquisa.

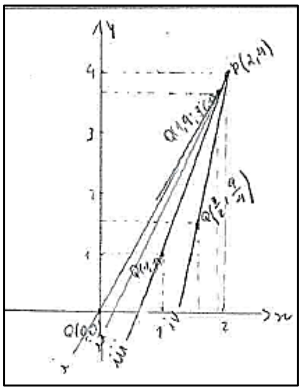


Figura 57 - Gráfico do item “b” do Tarefa 14 de E41.
Fonte: Dados da pesquisa.

O item “c” questionava o estudante sobre o que ocorria com as coordenadas do ponto Q com relação às coordenadas do ponto P. Apesar de 57% dos respondentes terem representado corretamente o gráfico do item “b”, que poderia facilitar a visualização do que estava ocorrendo com as coordenadas dos dois pontos em análise, 43 (de 53) estudantes (que corresponde a 81%) apresentaram a conclusão almejada pela professora. Desses, 23 estudantes observaram que as abscissas do ponto Q se aproximam das abscissas do ponto P e outros 21, responderam de forma equivalente, que as abscissas de Q se aproximam de 2, com variações na escrita. Alguns estudantes complementaram a resposta com informações verdadeiras, como a resposta ilustrada na Figura 58, em que o estudante interpretou que as retas secantes estavam “tendendo” a ser a reta tangente, que era a intenção da Tarefa e, outros dois complementaram com informações falsas, um deles dizendo que o coeficiente angular da reta tangente seria zero (Figura 59) e outro estudante dizendo que os pontos se aproximam, mas que esse ponto não existe. Ou seja, informações incoerentes, pois o ponto não pode existir e não existir ao mesmo tempo.

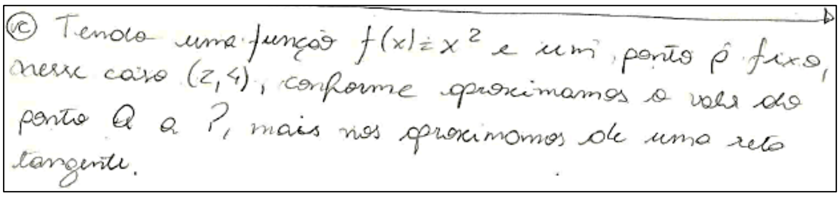

c) Tendo uma função $f(x)=x^2$ e um ponto P fixo, nesse caso (2,4), conforme aproximamos o valor do ponto Q a P, mais nos aproximamos de uma reta tangente.

Figura 58 - Resposta do item “c” da Tarefa 14 de E15.
Fonte: Dados da pesquisa.

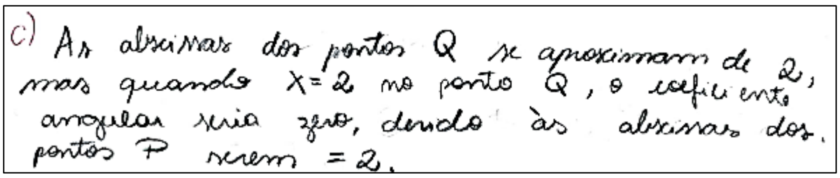

c) As abscissas dos pontos Q se aproximam de 2, mas quando x = 2 no ponto Q, o coeficiente angular seria zero, devido às abscissas dos pontos P serem = 2.

Figura 59 - Resposta do item “c” da Tarefa 14 de E13.
Fonte: Dados da pesquisa.

As demais respostas encontradas nos protocolos estão descritas nas categorias apresentadas na Tabela 39.

Tabela 39

Respostas do item "c" da Tarefa 14

		GM	GQ	TG
Correta	O valor da abscissa de Q se aproxima da abscissa de P, com variações na escrita	10	11	43
	A inclinação da reta secante se aproxima da inclinação da reta tangente	1	0	
	As abscissas se aproximam de 2	14	7	
Parcialmente correta	As abscissas se aproximam, mas complementou com informações erradas	2	0	2
Errada	Apenas as abscissas do ponto Q se alteram	1	1	5
	Todos os valores são menores do que 2	0	1	
	Se aproxima de 1	1	1	
Não respondeu		2	1	3

No item "d" esperava-se que, apoiado nas observações dos itens anteriores, o estudante fosse capaz de conjecturar como era possível encontrar o coeficiente angular de uma reta tangente. Apesar da professora julgar que os estudantes compreenderam bem a ideia de que a reta tangente pode ser vista como a posição limite das retas secantes, devido ao número de respostas corretas no item "c", somente 13 estudantes conjecturaram que o coeficiente angular da reta tangente é o limite da taxa de variação de y com relação a x quando $Q \to P$. Desses, cinco estudantes conseguiram relacionar ainda esse limite com a derivada da função f no ponto P, como ilustrado na Figura 60. Vinte e sete estudantes responderam, com variações na escrita, que o coeficiente angular da reta tangente é igual ao coeficiente angular da reta secante (Figura 61), o que não é verdade. Desses, seis estudantes complementaram com mais informações que davam a ideia de limite, por exemplo, como pode ser observado na Figura 62, justificaram *"quando Q tende a P".* Nessa imagem, percebe-se que existem mais erros da categoria de incorreção de escrita matemática (IEM). O estudante parece ter entendido a ideia conceitual, mas não se expressou muito bem matematicamente. Os estudantes que apresentaram a ideia de limite tiveram sua resposta classificada como parcialmente correta. O outro estudante cuja resposta pertence a essa categoria apresentou o valor do coeficiente angular da reta tangente corretamente, porém não relacionou com a ideia de limite. Ele obteve a resposta correta porque no subitem "v" do item "a", obteve a forma simplificada do coeficiente angular da reta secante em um ponto de abscissa x_0 qualquer (Figura 52). Então, nesse item, apenas assumiu que $x_0 = 2$ (Figura 63).

No item v, calculamos o coeficiente para um ponto genérico (x_0, x_0^2)
Se considerarmos (x_0, x_0^2) como sendo exatamente o nosso ponto de interesse $(2,4)$, é como se calculássemos o limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Logo, o coeficiente da reta tangente em P

$$m = x_0 + 2 = 2+2 = 4$$

que é o valor para o qual estamos tendendo no item a.

Figura 60 - Resposta do item “d” da Tarefa 14 de E42.
Fonte: Dados da pesquisa.

d) Para determinar o coeficiente angular da reta tangente a C, fez-se a relação $tg = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$ com $tg = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Pois este equivale ao ângulo da reta em relação ao eixo x.

Figura 61 - Resposta do item “d” da Tarefa 14 de E37.
Fonte: Dados da pesquisa.

d) Se considerarmos a tangente em P, e o cálculo para essa
$m = tg\alpha = \frac{Y - y_0}{X - x_0}$, em P teria-se $m = \frac{y_0 - y_0}{x_0 - x_0} = \frac{0}{0}$, assim levando a considerar P o limite para a inclinação dessa reta. Além disso, a variação de y é a função do x mais a abscissa de aproximação a P. Pode-se afirmar então que
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f_0}{\Delta x}$ quando Q tende a P.

Figura 62 - Resposta do item “d” da Tarefa 14 de E6.
Fonte: Dados da pesquisa.

d) Usando a equação genérica encontrada no item a)v temos que o coeficiente angular corresponde a $a = 2 + x_0$, tomando $x_0 = 2$
Temos o coeficiente da reta tangente $a = 4$, a reta é tangente pois apresenta apenas um ponto em comum com $f(x)$.

Figura 63 - Resposta do item “d” da Tarefa 14 de E12.
Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação às respostas erradas, as outras cinco respostas que não foram similares às da Figura 63, apresentaram as seguintes justificativas: dois estudantes explicaram como obter a reta tangente, mas não mencionaram como se encontra seu coeficiente angular; entre os demais, um justificou que o coeficiente angular se aproxima de 2 e outros dois argumentaram que derivando a equação da reta tangente encontra-se o coeficiente angular e uma constante. A Tabela 40 apresenta as categorias das respostas dadas pelos estudantes nesse item que foram discutidas até o momento.

Tabela 40
Respostas do item "d" da Tarefa 14

		GM	GQ	TG
Correta	Coeficiente angular da reta tangente é o limite do coeficiente angular da reta secante	6	2	14
	O coeficiente angular da reta tangente é o limite do coeficiente angular da reta secante e é igual a $f'(x_0)$	0	5	
	O coeficiente angular da reta tangente é -4	1	0	
Parcialmente correta	Explicou a posição limite, mas disse que o coeficiente angular da reta secante é igual ao da reta tangente	1	5	7
	Calculou o coeficiente angular da reta tangente, porque simplificou a expressão do coeficiente angular da reta secante, mas não falou em limites.	1	0	
Errada	Justificativas diversas	21	7	28
Não respondeu		2	2	4

5.3.2. Categoria dos erros

Nesta atividade foram identificados erros pertencentes às categorias: incorreção de escrita matemática (IEM), erro conceitual (EC), incorreção na construção de gráficos (ICG) e respostas vagas (RV).

No item "a", as respostas classificadas como IEM estão relacionadas com a falta de rigor matemático para denotar os cálculos que estavam sendo feitos a fim de obter o coeficiente angular, com exceção da resposta do estudante E15 que já fora discutida nas Figura 53 e Figura 54. Exemplos dessa situação são mostrados Figura 65. O estudante efetuou corretamente os cálculos para encontrar o coeficiente angular, mas em nenhum momento explicou como se calcula o coeficiente nem usou alguma notação para ele, apenas identificou o nome do subitem que estava respondendo e igualou-o ao quociente que representa o coeficiente desejado. Dessa forma, somente o leitor que conhece a definição de coeficiente angular é que conseguiria entender o significado daqueles cálculos. Outro exemplo dessa categoria de erro está ilustrado na Figura 51, em que o estudante escreveu como se calcula o coeficiente angular, mas em cada um dos subitens, efetuou os cálculos sem usar a notação m escolhida para denotar esse coeficiente. Com relação aos erros conceituais, além do estudante E15, mais dois acadêmicos apresentaram respostas dessa categoria. Ambos cometeram erro ao calcular o coeficiente angular da reta secante que passava pelos pontos P e $Q(x_0, x_0^2)$, porque após substituir corretamente as coordenadas na definição de coeficiente angular, assumiram x_0 como sendo 2 e, ao invés de obter o quociente $\frac{0}{0}$, responderam que era igual a zero (Figura 64).

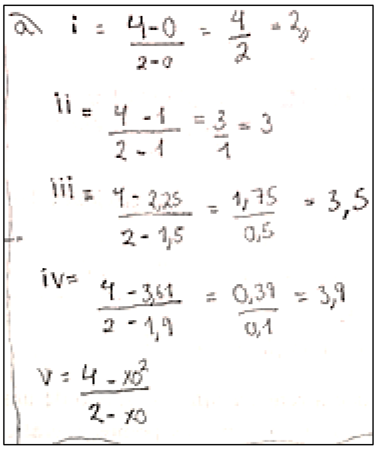


Figura 65 - Resposta do item "a" da Tarefa 14 de E33.
Fonte: Dados da pesquisa.

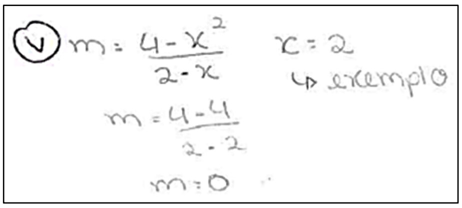


Figura 64 - Resposta do item "a" da Tarefa 14 de E44.
Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação ao item "b", houve 19 acadêmicos que cometeram algum equívoco ao construir o gráfico solicitado. Dois exemplos de respostas pertencentes a essa categoria estão ilustrados nas Figura 56 e Figura 57. Na Figura 56 observa-se que o ponto Q do subitem 3 foi ilustrado como se não pertencesse ao gráfico de f e foram ilustradas outras duas retas secantes com coordenadas do ponto Q aleatórias. Na Figura 57 as retas secantes, correspondem às desejadas, porém como não fora ilustrado o gráfico da função f, como solicitado no item "b", essas retas não são retas secantes a nenhuma curva. Além dessas situações, houve estudantes que apresentaram apenas uma reta secante e deram indicativo na ilustração de que as retas secantes estavam tendendo a ser uma reta tangente (Figura 66). Essa ideia é correta, mas não é condizente com o que fora solicitado. E ainda, teve estudantes que representaram uma reta em cada item (Figura 67). Ou seja, esses estudantes não se atentaram ao facto de ser exigida a representação da função f e de todas as retas secantes no mesmo plano cartesiano.

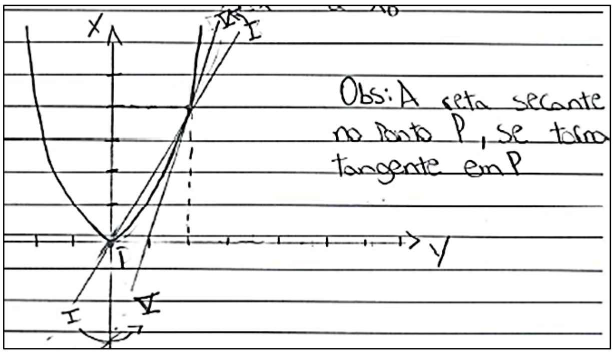


Figura 66 - Gráfico do item “a” da Tarefa 14 de E17.
Fonte: Dados da pesquisa.

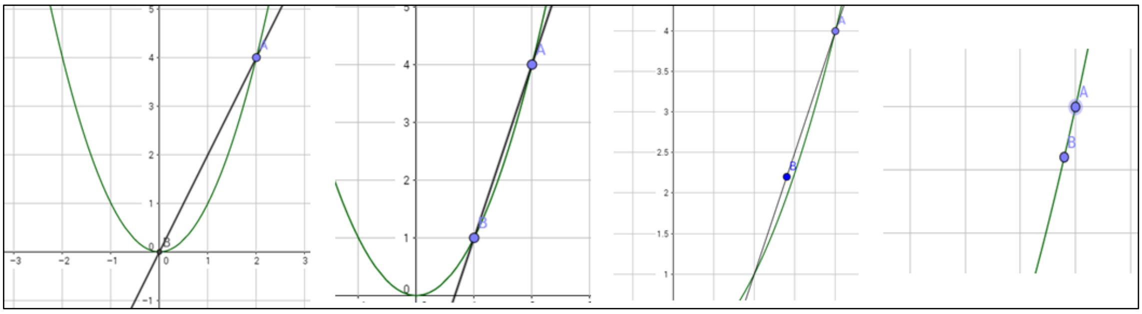


Figura 67 - Gráfico do item “a” da Tarefa 14 de E28[109].
Fonte: Dados da pesquisa.

No item “c” foram constatados erros das categorias RV e EC. Um exemplo de RV foi ilustrado na Figura 58, pois o estudante observou que a reta secante se aproxima da reta tangente, mas não respondeu como estavam se aproximando as abscissas do ponto Q com relação ao ponto P. Outra resposta considerada como RV foi a da Figura 68, em que o estudante afirma que as coordenadas se aproximam e que o coeficiente angular da reta tangente será maior. Dessa forma, poderíamos entender que o coeficiente não será um número fixo ou até mesmo que não existe, se estará sempre crescendo. As demais respostas enquadradas nessa categoria foram: *“as abscissas são sempre menores que 2”* ou “*as abscissas do ponto Q variam enquanto as de P permanecem constantes*” (Figura 69). Com relação à categoria de EC, as respostas apresentadas foram similares à apresentada na Figura 59, ou seja, dizendo que o coeficiente angular da reta tangente era nulo.

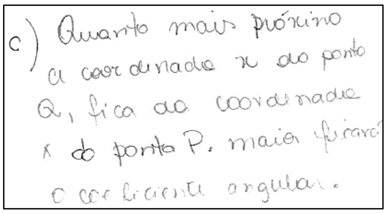


Figura 68 – Resposta do item “a” da Tarefa 14 de E16.
Fonte: Dados da pesquisa.

[109] Esse estudante fez os gráficos no *GeoGebra* e foram organizados lado a lado por essa doutoranda na escrita da tese.

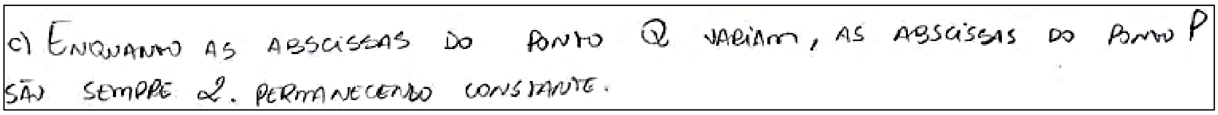

c) Enquanto as abscissas do ponto Q variam, as abscissas do ponto P são sempre 2. permanecendo constante.

Figura 69 – Resposta do item “a” da Tarefa 14 de E53.
Fonte: Dados da pesquisa.

O item “d” foi o que teve um número maior de erros das categorias IEM e EC. Vinte e sete estudantes tiveram suas respostas consideradas como EC. Quase todas essas respostas estão relacionadas com o facto de acharem que o coeficiente angular da reta tangente é o mesmo que o da reta secante, como já foi discutido na seção anterior, alguns deixaram isso de forma implícita (Figura 60) outros de forma explícita em suas respostas (Figura 70). Destacamos ainda, uma das respostas dessa categoria, ilustrada na Figura 71, em que o estudante apresentou justificativas que davam a ideia de limite (com IEM), porém no final de suas argumentações, concluiu dizendo que para encontrar o coeficiente angular da reta tangente deve-se fazer $tg(\theta) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, que é a forma como é calculado o coeficiente angular de qualquer reta, desde que se conheçam dois pontos pertencentes a ela.

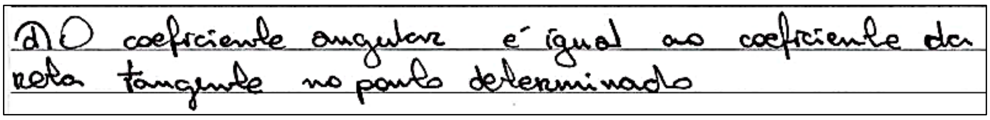

d) O coeficiente angular é igual ao coeficiente da reta tangente no ponto determinado

Figura 70 - Resposta do item “a” da Tarefa 14 de E9.
Fonte: Dados da pesquisa.

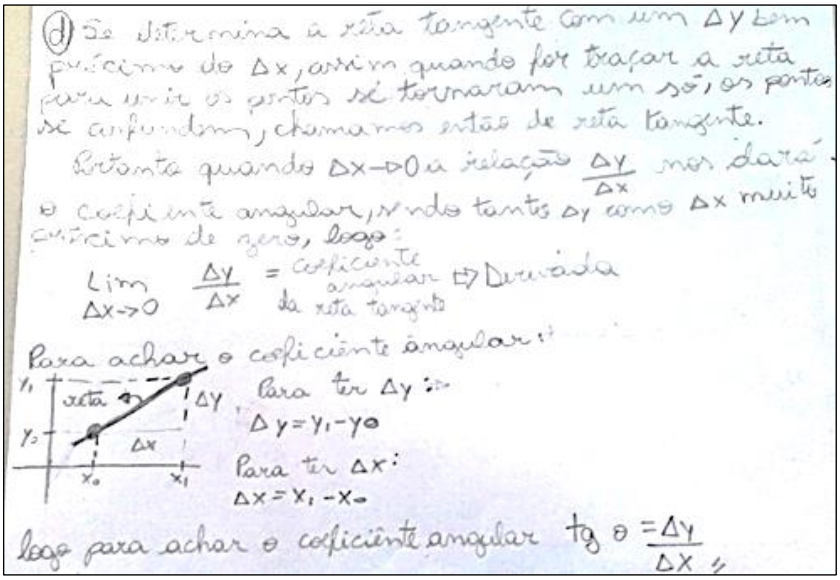

d) Se determina a reta tangente com um Δy bem próximo do Δx, assim quando for traçar a reta para unir os pontos se tornaram um só, os pontos se confundem, chamamos então de reta tangente.
Portanto quando Δx→0 a relação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nos dará o coeficiente angular, sendo tanto Δy como Δx muito próximos de zero, logo:
$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = coeficiente angular da reta tangente ⇒ Derivada
Para achar o coeficiente angular:
Para ter Δy:
$\Delta y = y_1 - y_0$
Para ter Δx:
$\Delta x = x_1 - x_0$
logo para achar o coeficiente angular $tg\ \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Figura 71 - Resposta do item “a” da Tarefa 14 de E47.
Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação à categoria IEM destacamos as respostas que já foram apresentadas nas Figura 62 e Figura 63. Numa delas o estudante deixou de forma implícita o limite ao escrever “quando Q tende a P” e na outra, foi calculado o limite sem se falar em limite, mas na resposta digitada que o mesmo estudante entregou via plataforma Moodle (Figura 72) observa-se que foi usada a notação adequada.

> Usando a equação genérica encontrada no item a)v temos que o coeficiente angular corresponde a $a = 2 + x_0$, tomando $x_0 = 2$ temos o coeficiente angular da reta tangente, $a = 4$.
> A reta é dita tangente pois apresenta apenas um ponto em comum com f(x).
> Também podemos dizer que o coeficiente angular é dado pelo limite de $x_0 \rightarrow 2$, ou seja, $a = \lim_{x_0 \to 2} 2 + x_0 = 4$.

Figura 72 - Resposta do item “d” da Tarefa 14 de E12.
Fonte: Dados da pesquisa

Os números de respostas pertencentes a cada uma das categorias aqui mencionadas estão apresentados na Tabela 41.

Tabela 41.
Número de erros, por itens, identificados nas respostas

Categoria	a	b	c	d
IEM	16	0	0	13
ICG	0	19	0	0
RV	0	0	6	0
EC	3	0	4	27

5.3.3. A plenária e a formalização do conteúdo

A professora fez a leitura da definição de reta secante, dada no início do problema e, em seguida, questionou se para todos estava claro o entendimento do que era uma reta secante. Em cada turma, ao menos um aluno manifestou-se dizendo que achou a definição meio confusa. Então, para tentar esclarecer, a professora questionou a turma de onde conheciam retas secantes. Ambas as turmas responderam que sabiam que reta secante é a reta que intercepta a circunferência em dois pontos. Essa é a ideia que se tem da Geometria do ensino pré-universitário. Na lousa, a professora fez a ilustração de uma reta secante a uma circunferência e questionou, se em termos de *Cálculo* essa representação gráfica (circunferência) era uma função. Responderam que não. E quando questionados sobre o que era necessário para que a imagem ilustrada fosse uma função, responderam que deveria ser feita uma restrição no domínio. Assim sendo, a professora apagou a “metade” (abaixo da reta horizontal que passa pelo centro) da circunferência. Em seguida, foi feita a releitura da definição de reta secante dada no item “a” do problema em questão: “*reta secante* ao gráfico de uma função f é definida como sendo uma reta que intercepta ao menos em dois pontos o gráfico de f”. Retornando ao esboço feito na lousa, a professora questionou se satisfazia essa definição. A resposta foi que a reta interceptava em exatamente dois pontos. Então, para finalizar essa discussão e auxiliar no entendimento da expressão “ao menos em dois pontos” a professora prolongou os extremos da função cujo gráfico era uma semicircunferência. O gráfico ilustrado foi similar ao apresentado na Figura 73. Dessa forma, parece que compreenderam a definição de reta secante que fora dada. Esse é um conceito que geralmente os livros de *Cálculo* (da bibliografia usualmente utilizada) usam no momento que começam a introduzir a interpretação geométrica da derivada, pois iniciam considerando uma reta que passa por dois pontos pertencentes ao gráfico de uma função, mas não a definem. Pelas ilustrações, parece que realmente a reta secante só pode interceptar o gráfico de uma função em dois pontos, como pode ser observado na Figura 74.

Após o esclarecimento sobre a reta secante, em ambas as turmas para iniciar a plenária a professora projetou duas soluções do item “a”. Na primeira solução apresentada, para determinar o coeficiente angular das retas secantes o estudante tinha utilizado a definição de coeficiente angular, ou seja, para calcular os coeficientes usou a fórmula $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. E, na segunda solução apresentada, o estudante aplicava as coordenadas dos pontos na expressão analítica de uma função de primeiro grau $y = ax + b$ e resolvia um sistema de equações lineares para encontrar as constantes a e b, sendo que a é o coeficiente angular. A Figura 51 e a Figura 52, respectivamente, retratam essas duas situações. Houve consenso de que as respostas estavam corretas.

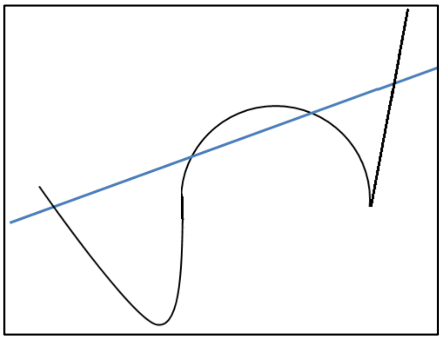


Figura 73 - Gráfico para ilustrar uma reta secante.
Fonte: Produção da autora.

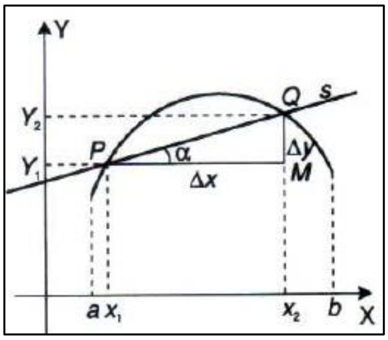


Figura 74 - Reta secante.
Fonte: Fleming e Gonçalves, 2006, p.115.

Para discutir o item “b” em ambas as turmas foram projetados dois gráficos. Um feito na ambiente lápis e papel e outro feito no *GeoGebra*. Também não houve discussão, pois concordavam com a solução apresentada. Até ao momento de preparação para a plenária a professora não tinha recebido soluções com algum tipo de erro, como discutido na seção anterior, por isso, esse item não teve discussão, visto que nenhum estudante discordou das soluções.

Quanto ao item “c”, na QUI foram apresentadas duas respostas, ambas eram muito similares, diziam que as abscissas do ponto Q se aproximam de 2, que era o valor da abscissa de P. Logo, por serem soluções equivalentes, não houve discussão. Na MAT também foram apresentadas duas soluções, uma dizendo que às abscissas de Q estavam crescendo e se aproximando de 1, como ilustrado na Figura 75, e a outra dizendo que *“os valores de Q se aproximam dos valores de P ”.* O estudante E24 interpretou errado as abscissas de Q para responder que tendem a 1, quando a professora apresentou a resposta, sabia de quem era, mas o estudante não se manifestou.

R: Os valores das abscissas do ponto Q estão aumentando e se aproximando de 1, enquanto o valor da abscissa P esta fixo.

Figura 75 - Resposta do item “c” da Tarefa 14 de E24.
Fonte: Dados da pesquisa.

A fim de entender o raciocínio usado pelo estudante, a professora projetou também o gráfico feito por E24 (Figura 76) no item “b” para auxiliar na interpretação da resposta.

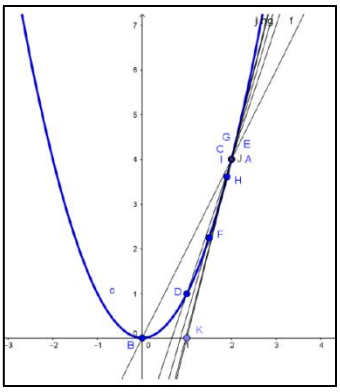


Figura 76 - Gráfico apresentado no item “b” da Tarefa 14 de E24.
Fonte: Dados da pesquisa.

O diálogo[110] estabelecido com a turma foi o seguinte:

P: Como vocês interpretam esta resposta?
A: Eu tinha pensado primeiro assim (silêncio)... Porque vejo que o x das retas [secantes] se aproximam de 1.
P: Exatamente. Entendo como você. Ao apresentar essa resposta a pessoa deve ter confundido a abscissa do ponto P, com as abscissas da função linear cujos gráficos são as retas secantes.

[110] Nos diálogos a serem apresentados no texto, *P* e *A* representam, respectivamente, as falas da professora e algum aluno.

Como os demais alunos demonstraram concordar com a justificativa da professora, prosseguiu a plenária. Ao final da aula, o estudante que apresentou a solução da Figura 76, que não se manifestou na plenária, ainda estava refletindo sobre o assunto. Então, na resolução dele (no papel) a professora teve de traçar segmentos de retas verticais a fim de destacar as abscissas dos pontos Q pertencentes ao gráfico de f, que estavam no gráfico por ele construído. Dessa forma, a professora pôde mostrar que as abscissas das retas secantes estavam tendendo a 1, porém as abscissas dos pontos Q se aproximavam de 2. Somente depois da professora explicar detalhadamente ao estudante, ela sentiu que ele conseguiu compreender o que fora discutido na plenária.

Com relação ao item “d”, que teve um maior número de respostas inadequadas, a professora apresentou quatro respostas na turma da QUI e sete respostas na MAT. Nesse item, a professora apresentou uma resposta de cada vez. Após ler a resposta para a turma, a professora solicitava manifestações a fim de saber se concordavam ou discordavam da resposta apresentada. Na sequência, serão apresentadas e comentadas as soluções levadas para plenária em cada uma das turmas.

Na QUI, as respostas apresentadas correspondem às da Figura 77, Figura 78, Figura 60 e Figura 79.

d) Que ela é a posição limite da reta secante, porque quanto mais a reta secante está se aproximando do ponto mais ela tende a intersectar apenas um ponto, passando a ser a reta tangente.

Figura 77 - Resposta do item “d” da Tarefa 14 de E36.
Fonte: Dados da pesquisa.

d) $m = \frac{4-y}{2-0}$, precisamos de dois pontos para determinar o coeficiente angular, P(2,4) e, como é uma reta tangente e P esta no 1º quadrante, o segundo ponto será Q(0,y)

Figura 78 - Resposta do item “d” da Tarefa 14 de E44.
Fonte: Dados da pesquisa.

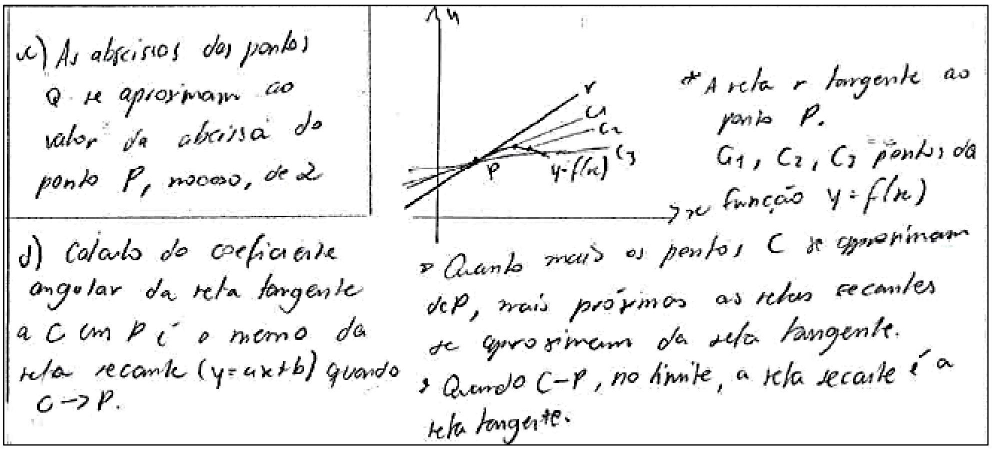


Figura 79 - Resposta do item "d" da Tarefa 14 de E41.
Fonte: Dados da pesquisa

Pela primeira resposta apresentada (Figura 77) foi possível perceber que esse aluno entende que a reta tangente *"tende a interceptar [o gráfico de f] em apenas um ponto"*. Na plenária a turma concordou com a resposta. Nesse momento, a professora não se manifestou sobre a definição equivocada da reta tangente. Ela iria retornar a esse assunto após a discussão de todas as respostas. Na exploração da segunda resposta (Figura 78), foi discutido que toda reta que não é paralela ao eixo das abscissas tem uma interseção com o eixo das ordenadas, ou seja, existe o ponto da forma $Q(0, y)$ como mencionado na resposta. Porém, pensando dessa forma para encontrar a equação da reta tangente seria necessário conhecer mais um ponto que não pertence ao gráfico da função dada e que também esteja na reta, pois esse estudante estava usando a definição de coeficiente angular de uma reta que pode ser calculado conhecendo-se dois pontos a ela pertencentes. A terceira resposta apresentada (Figura 60) retrata exatamente a definição de coeficiente angular em termos de definição de derivada de uma função aplicada num ponto. E, na quarta resposta (Figura 79[111]), foi observado que o estudante inicialmente disse que o coeficiente angular era o mesmo da reta tangente (concordando com a resposta da Figura 78), mas finalizou a primeira frase dizendo quando Q tende a P. Conjuntamente, a turma identificou que se tratava de um limite. O restante da explicação desse estudante lembra a ideia de como o material didático explicava que a reta tangente é a posição limite da reta secante. A professora questionou o acadêmico E52 para saber se ele havia consultado livros para fazer a atividade. Ele afirmou que não, apenas usou a intuição. A professora ficou satisfeita por perceber que nessa turma de ingressantes teve alunos que conseguiram desenvolver o conceito correto trabalhando de forma independente.

[111] Na plenária foi apresentada a resposta do estudante E52, escrita de forma muito similar a essa, pois sempre faziam trabalhos juntos. Porém, nesse texto não foi apresentada a resposta de E52 porque as imagens não ficaram com uma boa resolução.

Na turma da MAT a professora levou para discutir na plenária as respostas apresentadas nas Figuras, nessa ordem: Figura 80, Figura 81, Figura 82, Figura 62, Figura 83, Figura 84 e Figura 85.

d) o coeficiente angular se determina pela equação fundamental da reta: $y - y_0 = m(x - x_0)$

Figura 80 - Resposta do item "d" da Tarefa 14 de E10.
Fonte: Dados da pesquisa

R: O coeficiente angular pode ser calculado de duas maneiras:

- $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ou $\text{tg}\,\alpha = \frac{co}{ca} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Por que trabalhamos com a variação das distancia $y2 - y1$ e $x2 - x1$.

Figura 81 - Resposta do item "d" da Tarefa 14 de E24.
Fonte: Dados da pesquisa

d) É dada pela taxa de Variação de y por Variação de x.

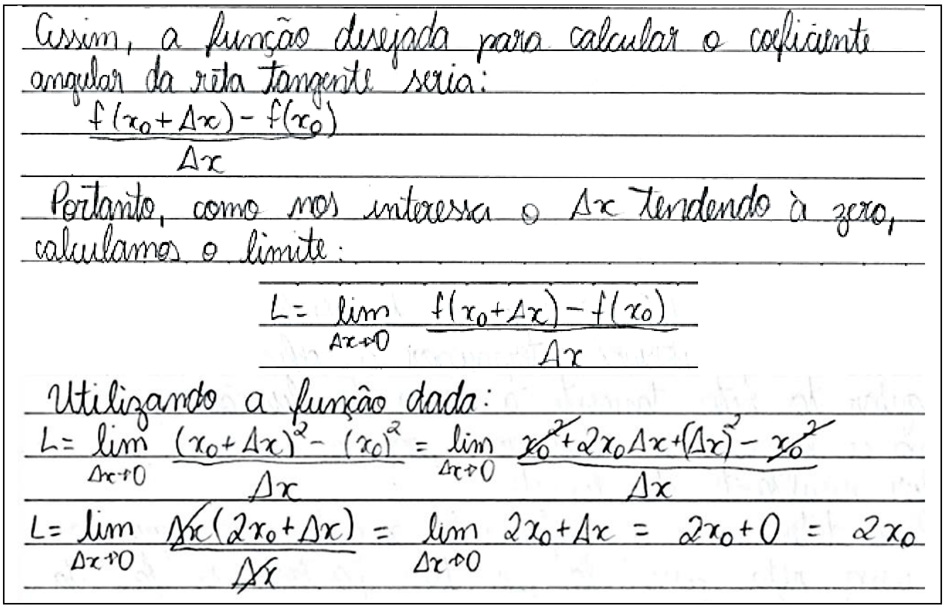
Figura 82 - Resposta do item "d" da Tarefa 14 de E7.
Fonte: Dados da pesquisa.

(d) Bom, como observado no item anterior, notamos que para um ponto P fixo, e um Δx infinitesimalmente pequeno, podemos encontrar uma reta tangente à curva C. Quanto menor a variação de x, mais próximo de P a estará.

Figura 83 - Resposta do item "d" da Tarefa 14 de E15.
Fonte: Dados da pesquisa.

d) Calcular utilizando o limite com x tendendo à abscissa do ponto P, será possível determinar o coeficiente angular da reta tangente à curva da função, pois como a função é contínua, podemos assumir este valor resultante do limite.

Figura 84 - Parte 1 da resposta do item "d" da Tarefa 14 de E11.
Fonte: Dados da pesquisa.



Assim, a função desejada para calcular o coeficiente angular da reta tangente seria:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Portanto, como nos interessa o Δx tendendo à zero, calculamos o limite:

$$L=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Utilizando a função dada:

$$L=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-(x_0)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{x_0^2}+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-\cancel{x_0^2}}{\Delta x}$$

$$L=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(2x_0+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}2x_0+\Delta x=2x_0+0=2x_0$$

Figura 85 - Parte 2 da resposta do item "d" da Tarefa 14 de E11.
Fonte: Dados da pesquisa.

A professora inicialmente apresentou para discussão as respostas da Figura 80, Figura 81 e Figura 82. A resposta apresentada na primeira dessas imagens foi concluída que estava incompleta, pois apresentou a equação geral de uma reta e, para encontrar o coeficiente angular, seria necessário ainda isolar o "m", que representa esse coeficiente, e ainda substituir mais um ponto pertencente à reta. A Figura 81 menciona duas formas de calcular o coeficiente angular, mas as duas são iguais. E, a Figura 82, fala da taxa de variação. Analisando essas três imagens foi concluído que todas essas respostas consideram o coeficiente angular da reta tangente como sendo igual ao da reta secante. A quarta solução analisada (Figura 62), além da interpretação das 3 soluções recém discutidas, incluiu um item a mais para a conversa, pois ao falar Q tende a P, ficou subentendido que estava falando de um limite da taxa de variação. Para interpretar a solução da Figura 83 foi necessário recorrer à Figura 58, pois uma imagem complementava a informação da outra. Nesse momento surgiu a ideia de aproximação e falou-se de grandezas infinitamente pequenas. A professora teve de explanar um ponto sobre o significado dessas grandezas. A solução da Figura 63 foi a primeira que apresentou o valor do coeficiente angular da reta tangente no ponto P. A explicação do estudante estava clara, mas a professora aproveitou a oportunidade para questionar a turma se era possível garantir que sempre o coeficiente angular seria dado pela expressão $a = x_0 + 2$. Se olhar apenas para essa expressão, a resposta seria sim. Mas, a professora buscou a informação no item "a" de como era a expressão, antes de simplifica-la. Assim, a turma identificou que a expressão era válida para $x_0 \neq 2$. Logo, tinha sentido substituir x_0 por 2 somente se estivesse sendo tomado o limite. Na Figura 63 não consta o limite, mas na imagem desse mesmo estudante que foi apresentada em aula existia, pois no momento em que digitou a solução para submeter a resposta na plataforma Moodle, E12 não substituiu diretamente x_0 por 2, ele fez $a = \lim_{x_0 \to 2} x_0 + 2 = 4$, mas não justificou porque usou limite (Figura 72). Discutindo essas 6 soluções já havíamos explorado os conceitos almejados pela professora, mas a última solução selecionada para a plenária foi a mais completa de todas. A estudante que a apresentou fez de forma muito minuciosa e detalhada, que poderia ser considerada a formalização do conteúdo. A Figura 84 e a Figura 85 retratam parte das argumentações usadas na resolução. A professora, depois de fazer a leitura da primeira parte da resposta da Figura 84 solicitou que a estudante (que sempre era muito comunicativa) responsável pela solução explicasse o seu raciocínio aos colegas. Como ela foi muito rápida e objetiva em sua explanação, a professora escreveu no quadro:

$$m_t = \lim_{Q \to P} m_s = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

e continuou desenvolvendo a expressão, com auxílio da turma, até chegar na seguinte expressão:

$$m_t = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Nesse momento a professora questionou quantos pontos era necessário conhecer para que fosse possível calcular o coeficiente angular da reta tangente. Algum aluno respondeu que eram necessários dois pontos. Para continuar, a professora chamou a atenção de que seria interessante escrever o coeficiente angular da reta tangente m_t em termos apenas do ponto de tangência e, para tanto, bastava fazer a mudança de variável $\Delta x = x_1 - x_0$. Dessa forma, obtém-se que:

$$m_t = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Dessa forma, naturalmente, a professora fez a formalização do conteúdo que desejava trabalhar com a proposição dessa atividade. Após finalizar essa explicação, a aluna E11 que gostaria de saber se sua conclusão, apresentada na Figura 85, estava correta. Como até a formalização já fora concluída, a professora confirmou que estava, mas ela não conseguia enxergar a igualdade da resposta do item “d” com a encontrada no subitem “v” do item “a”, que eram, respectivamente, $m_t = 2x_0$ e $m_t = a = x_0 + 2$. Para respondê-la, a professora retornou ao quadro na expressão que define m_t, com a necessidade de se conhecer dois pontos e aplicou-a nessa situação em que $f(x) = x^2$, o ponto de tangência era $P(2{,}4)$ e o outro ponto conhecido era $Q(x_0, x_0^2)$. Dessa forma, provou-se que $m_t = x_0 + 2$. As expressões finais são diferentes, porém, ao substituir x_0 por 2, o resultado final é o mesmo.

Na QUI, não houve a última discussão relatada. Então, após discutir a solução da Figura 79, para formalizar esse assunto a professora prosseguiu de forma similar à relatada na MAT.

Após ter concluído a formalização de como se calculava o coeficiente angular da reta tangente, a professora perguntou o que de facto entendiam por reta tangente. A pergunta foi feita porque nas respostas deles foi identificado o entendimento de que a reta tangente intercepta o gráfico da função em apenas um ponto (Figura 77). Para motivar mais uma discussão a respeito, inspirada na explicação de Pagani (2016), a professora apresentou três imagens de uma reta interceptando uma curva (Figura 86, Figura 87 e Figura 88) e perguntou se alguma delas se encaixa no que acreditam ser uma reta tangente.

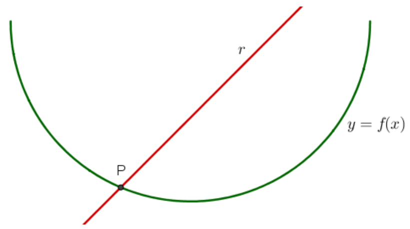


Figura 86 - Situação 1.
Fonte: Produção da autora.

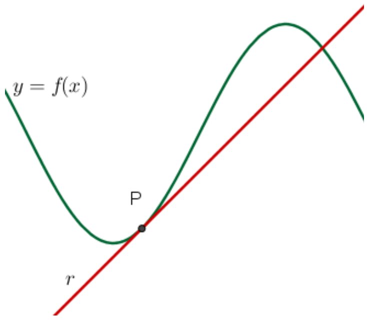


Figura 87 - Situação 2.
Fonte: Produção da autora.

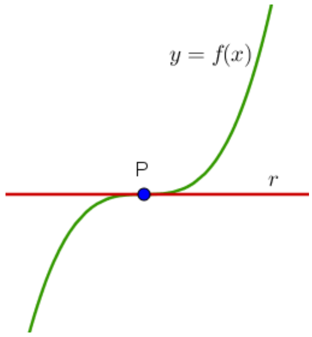


Figura 88 - Situação 3.
Fonte: Produção da autora.

Em ambas as turmas foi consenso que nenhuma das imagens ilustradas na Figura 86, Figura 87 e Figura 88 representava uma reta tangente. Para explicar, a professora levantou a tela branca e usou as imagens projetadas dessas figuras projetadas no quadro verde (as imagens projetadas ficavam muito claras, mas eram visíveis) e marcou um ponto Q sobre a curva ilustrada, traçou uma reta secante passando pelos pontos P e Q. Em seguida, a professora supôs o ponto P como sendo fixo e deslocou o ponto Q, sobre a curva, em direção ao ponto P e, para cada ponto Q ilustrado, traçava as respectivas retas secantes até chegar na reta, que visualmente, acreditava-se ser a reta tangente. A professora fez esse procedimento nas três imagens apresentadas, tendo iniciado pela Figura 87 e finalizado pela Figura 86. Após os gráficos estarem parecidos com as imagens ilustradas na Figura 89, Figura 90 e Figura 91, a professora perguntou:

P: Então, com este raciocínio, quais figuras representam retas tangentes?

Em coro, as turmas responderam que a segunda (Figura 90) e terceira (Figura 91) imagem era retas tangentes. Em seguida, a professora comentou que essas retas tangentes fogem da ideia tradicional que se tem a respeito delas, no sentido de que uma reta tangente deve “tocar” ou interceptar a curva em um único ponto. Após esse comentário, um acadêmico perguntou:

A: Professora, então uma reta tangente também pode ser secante?
*P: Sim, temos como exemplo a segunda imagem [*Figura 87*] e [*Figura 90*], que é uma reta tangente no ponto P, mas também é uma reta secante ao olharmos todo o gráfico de f. É importante sempre olharem para o ponto de interesse, que no caso, é o ponto de tangência.*

Com essa explicação e os demais comentários que se seguiram, a professora almejava deixar claro que o conceito de retas tangentes é um conceito local.

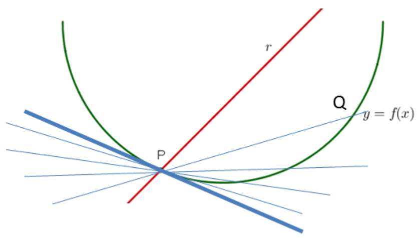


Figura 89 - Situação 1.
Fonte: Produção da autora.

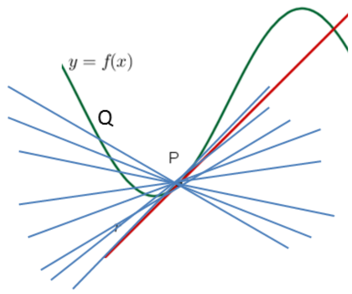


Figura 90 - Situação 2.
Fonte: Produção da autora.

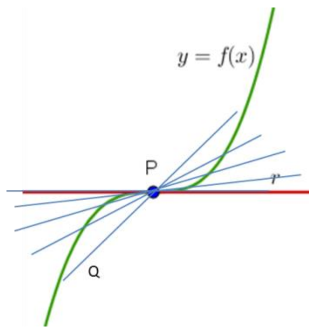


Figura 91 - Situação 3.
Fonte: Produção da autora.

Na MAT, a dinâmica sobre as imagens ilustradas na Figura 86, Figura 87 e Figura 88 foi similar à desenvolvida na QUI, pois a turma também acreditava que nenhuma das situações ilustradas nessas imagens retratava uma reta tangente. Finalizando essa discussão, a professora ainda os questionou se achavam que sempre existiria uma reta tangente. A turma achou que sim. A fim de fazer com que os alunos percebessem que essa conclusão não era verdadeira, a professora esboçou no quadro um gráfico que tinha um ponto de tangência vertical e adotou o procedimento descrito anteriormente de considerar uma reta secante, fixar o ponto que desejaríamos ser o ponto de tangência e mover o outro ponto em direção ao ponto P. Dessa forma, geometricamente via-se que a reta tangente seria uma reta vertical, como ilustrado na Figura 92.

Em seguida, o diálogo estabelecido foi:

P: Quando mais próximo de P o ponto Q chega, o que está ocorrendo com o ângulo dessa reta?
A: Está se aproximando de $90°$.
P: Sabemos que o coeficiente angular de uma reta também é igual ao valor tangente do ângulo que essa reta forma com o eixo das abscissas. Então, qual é a $tg(90°)$?
A: Não existe.
P: Muito bem, pela função tangente, sabemos quando ângulo se aproxima de 90 graus as imagens da função tendem a mais ou a menos infinito, depende o lado pelo qual estamos nos aproximando de $\frac{\pi}{2}$. Então, o limite que representa o coeficiente angular da

reta tangente não existe. Logo, não existe reta tangente nessa situação. Dizemos que esse é um ponto de tangência vertical, ou seja, que não existe derivada.

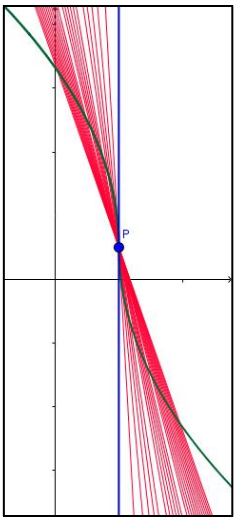


Figura 92 - Ponto de tangência vertical.
Fonte: Produção da autora.

Para concluir a formalização, a professora definiu a equação da reta tangente, segundo Anton, Bivens e Davis (2014), conforme apresentada na Figura 93.

DEFINIÇÃO Suponha que x_0 seja um ponto do domínio da função f. A ***reta tangente*** à curva $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é a reta de equação

$$y - f(x_0) = m_{tg}(x - x_0)$$

onde

$$m_{tg} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

sempre que existir o limite. Para simplificar, também dizemos que essa reta é a reta tangente a $y = f(x)$ em x_0.

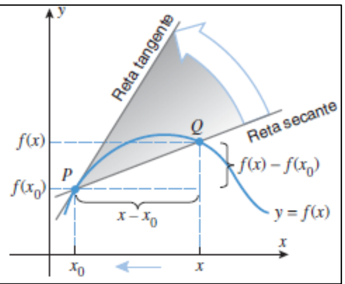


Figura 93 - Definição de reta tangência.
Fonte: Anton *et al.*, 2014, p. 132.

Após a finalização da Tarefa 14, para concluir a introdução ao conteúdo de derivadas, a professora propôs a Tarefa 15, que tinha por objetivo definir a derivada de uma função. Por experiência docente dessa professora pesquisadora, é comum estudantes de *Cálculo* confundirem a reta tangente ao gráfico de uma função com a derivada da função. Somente após a discussão dessa terceira atividade relacionada ao conteúdo de derivadas desenvolvidas através da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de RP é que a professora propôs novos problemas envolvendo o conteúdo abordado nessa sequência didática.

5.3.4. Comentários

Com relação à aplicação da Tarefa 14, na MAT, ocorreu algo interessante se comparado com o semestre anterior. Mesmo muitos dos alunos dessa turma já tendo algum conhecimento prévio de regras básicas de derivação, nenhum deles usou desse recurso para encontrar de forma rápida o coeficiente angular da reta tangente. Na versão anterior dessa atividade, aplicada no segundo semestre de 2016, vários alunos repetentes tinham usado as regras de derivação. Pode ser que a reformulação dessa atividade tenha contribuído para que o conceito fosse construído naturalmente. Nessa turma, quando terminou a aula, a aluna que apresentou a resposta mais completa ao item "d", relatou que nesse semestre estava contente porque de uma forma bem natural conseguiu fazer sozinha a dedução do coeficiente angular da reta tangente. Esse relato deixou a professora se sentindo satisfeita, pois essa estudante fora sua aluna no semestre anterior e, por relato informal dela, no momento em que viu o termo velocidade na atividade equivalente a Tarefa 13, ela se bloqueou com relação à disciplina e continuou comparecendo às aulas somente por frequência.

5.4. Tarefa 18 – Análise da Variação de Funções

A motivação para elaborar esta sequência didática foi de caráter pessoal da investigadora, pois apesar de ter utilizado a metodologia de RP em várias aulas ao longo do semestre, no seu interior algo a incomodava, pois queria fazer algo diferente do que já encontrava relatado em trabalhos similares. Então, ela pensou em como ministrava aquele conteúdo em semestres anteriores, que perguntas costumava fazer para definir máximos e mínimos, pontos críticos, pontos extremos, função crescente/decrescente, concavidade e pontos de inflexão. Neste retrospecto, constatou que sempre iniciava plotando um gráfico e analisando o que já se conhecia sobre a função que ele representava, considerando os conteúdos de CDI já ministrados até aquele momento. Aí surgiu a ideia de começar a representar no *GeoGebra* um gráfico parecido com as suas imagens mentais. O resultado foi o gráfico da Figura 94.

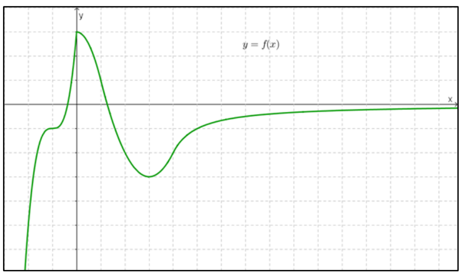


Figura 94 - Gráfico da função f.
Fonte: Produção da autora.

A seguir, as perguntas rotineiras que costuma fazer, se tornaram os itens de “a” até “d”, ou seja: Você acredita que f tem um valor máximo? E valor mínimo? Caso afirmativo, em que ponto(s)? Em que intervalo(s) f é crescente? E decrescente? A função f é contínua em todo seu domínio? A função f é diferenciável em todo seu domínio? Por quê?

Depois desses questionamentos, o intuito da professora era definir função crescente e decrescente e relacionar esse comportamento com o coeficiente angular da reta tangente, pois já era de conhecimento dos alunos que este valor numérico é dado pela derivada da função no ponto. Para tanto, solicitou que na Figura 94 fossem representados segmentos de retas tangentes ao longo de todo o domínio de f. A seguir, pediu-se para que os alunos respondessem em que intervalos as retas tangentes tinham inclinação positiva? E negativa? E nula? (questionamentos dos itens “e” e “f”).

Na sequência, lhe interessava fazer com que o aluno identificasse os intervalos em que a concavidade do gráfico da função era voltada para baixo/cima (item g). Com essa observação, seu objetivo era fazer com que o aluno intuísse naturalmente a definição de concavidade, ou seja, perceber que nos intervalos em que a f' é crescente, a concavidade do gráfico de f é voltada para cima e nos intervalos em que f' é decrescente, a concavidade do gráfico de f é voltada para baixo. Para tanto, foi proposto o gráfico da primeira derivada de f (Figura 95) e solicitado que identificassem os intervalos em que a função f' era (de)crescente.

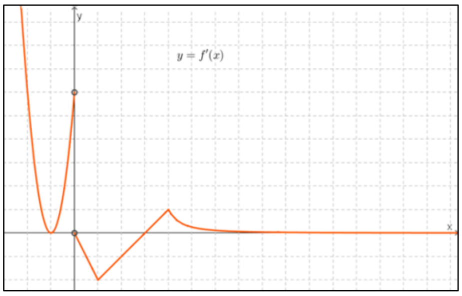


Figura 95 - Gráfico da função f'.
Fonte: Produção da autora.

Para que ficasse mais fácil o estudante perceber que o (de)crescimento da derivada relacionava-se com a concavidade voltada para baixo/cima, a professora teve a ideia de sobrepor os gráficos de f e f' (Figura 96) e pedir para que conjecturassem alguma possível relação existente entre a concavidade do gráfico de uma função e o (de)crescimento da primeira derivada de f (item “i”), ou seja, estava motivando a definição de concavidade voltada para cima/baixo.

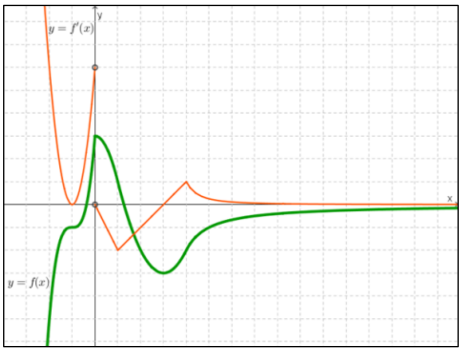


Figura 96 - Gráficos f e f' sobrepostos.
Fonte: Produção da autora.

No item "j" foi fornecido o gráfico da segunda derivada de f e solicitado os intervalos em que f'' é positiva? E negativa? E nula? No item "k" foram fornecidos os gráficos de f' e f'' sobrepostos (Figura 97) e foi solicitado ao aluno para que conjecturasse alguma possível relação existente entre (de)crescimento de f' com o sinal de f''.

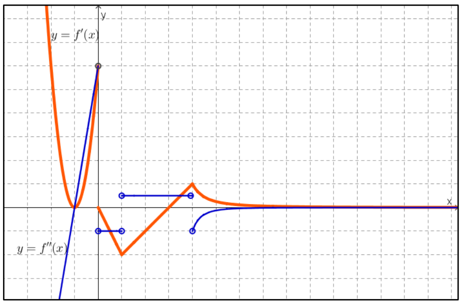


Figura 97 - Gráficos f' e f'' sobrepostos.
Fonte: Produção da autora.

E, para finalizar, no item "l" foram fornecidos os gráficos de f e f'' sobrepostos (Figura 98) e foi solicitado ao aluno que para conjecturasse a relação entre a concavidade do gráfico de f e o sinal de f''.

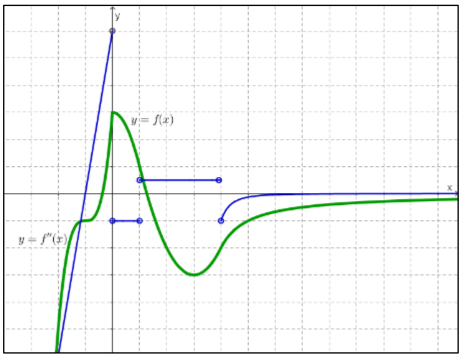


Figura 98 - Gráficos f e f'' sobrepostos.
Fonte: Produção da autora.

A tarefa na sua íntegra pode ser vista no Anexo 12. Na próxima seção será descrito como ela foi desenvolvida em sala de aula. Como essa tarefa era longa, pois era composta por 12 itens, ao planejar a professora já tinha ciência de que ela não seria concluída no mesmo dia. Então, já se programou para que a sequência didática fosse desenvolvida em 4 horas aulas, sendo que nas duas primeiras aulas as equipes iriam resolver a atividade (até a quinta etapa do roteiro de Allevato e Onuchic, 2014) e nas outras duas aulas seria feita a discussão e formalização do conteúdo.

5.4.1. Relato e análise da Tarefa

Em ambas as turmas, ao iniciar a aula, a professora entregou as três folhas impressas com a atividade. Nesse momento, os alunos se alvoroçaram e ficaram receosos de não conseguirem responder a atividade. Foram ouvidos comentários do tipo: *"Meu Deus, tudo isso, prof!"*. A professora tentou acalma-los dizendo que não deviam se assustar, pois acreditava que tinham condições de responder tudo o que lhes estava sendo questionado com o conhecimento que já possuíam. Em seguida, foi solicitado que os grupos fossem formados. Neste dia, os grupos de trabalho variaram de dois a cinco integrantes e tiveram dois alunos que optaram por fazer as atividades de forma individual. A leitura em grupo da atividade foi omitida, a pedido dos próprios alunos. A professora deu a orientação de que não precisavam encontrar as funções cujos gráficos estavam retratados nas figuras e que deveriam usar as informações extraídas diretamente dos gráficos para responderem o que fosse solicitado. Em seguida, a professora os deixou trabalhando em grupo. Durante todo o tempo a professora circulou pela sala prestando atendimento às dúvidas que surgiam, mas sempre tentando indicar o caminho sem dizer diretamente como se fazia. Ao todo foram formados 17 grupos de trabalho, sendo 12 grupos da MAT e 5 da QUI. Por convenção, Gn indica grupo n, com n de 1 até 12 equipes da MAT e de 13 até 17 da QUI.

Nos próximos parágrafos serão relatados alguns episódios que julgamos interessantes que ocorreram no desenvolvimento da sequência e serão apresentadas as (categorias de) respostas dos grupos e a análise qualitativa desses dados. Nos diálogos ocorridos em aula, por convenção, *P* e *A* representam, respectivamente, as falas da professora e algum aluno.

No item "a", cujas interrogações eram acerca da existência de um valor máximo/mínimo e ainda era solicitado para justificar a resposta, a dúvida geral foi saber como justificar a resposta, pois não sabiam se expressar matematicamente de forma adequada. Então, a professora os orientou a escreverem em palavras o que acreditavam ser a solução, pois os termos adequados seriam inseridos posteriormente, no momento da formalização do conteúdo.

Na Tabela 42, encontra-se a categorização das respostas apresentadas pelos alunos.

Tabela 42
Categorias e repostas do item "a" da Tarefa 18

			GM	GQ	TG
Ponto de Máximo	Correta	$P(0,3)$ com variações na escrita	6	3	9
	Parcialmente correta	Ponto cujo $y = 3$	3	2	5
	Errada	Máximo em $x = 3$	1	0	1
Ponto de Mínimo	Correta	Não existe, com justificativas	3	3	9
		Ponto $(3, -3)$, com justificativa	2	0	
		Não existe mínimo global e o ponto $(3, -3)$ é mínimo local, com justificativas	1	0	
	Parcialmente correta	Não existe, sem justificativas.	0	1	4
		Ponto $(3, -3)$, sem justificativas	2	0	
		Não existe mínimo global e o ponto $(3, -3)$ é mínimo local, sem justificativas	1	0	
	Errada	Mínimo em $x = -3$	1	0	2
		Mínimo em $-\infty$	0	1	
Errada	Confundiu pontos extremos e pontos de inflexão		1	0	2
	Apresentou o ponto $P(0,3)$ sem classificar		1	0	

Quinze equipes apresentaram o ponto $P(0,3)$ como sendo um ponto de máximo absoluto, sem usarem o termo absoluto (pois não o conheciam). Porém, cinco desses grupos ao indicarem o ponto de máximo falaram que era o ponto em que $y = 3$ (Figura 99). Neste caso particular foi considerado como uma resposta parcialmente correta, porque existia um único ponto cuja ordenada fosse 3. Mas este facto foi discutido no momento da plenária para que tivessem mais cuidados com este tipo de escrita, pois para uma mesma ordenada poderia existir mais que uma abscissa. Ainda foi discutida a forma de representação de um ponto, pois se apresentar apenas a resposta (0,3) sem mencionar que essas são as coordenadas de um ponto, algum leitor pode entender como sendo um intervalo aberto de 0 até 3, pois anotação é a mesma[112]. Com relação à existência de um mínimo, seis equipes apresentaram o ponto $Q(3, -3)$ como sendo um mínimo (local) e 10 equipes analisaram a não existência de um mínimo (absoluto). Pelas respostas, entendemos que usaram o conhecimento de limites para justificar a não

[112] $]0,3[$ é uma outra notação de intervalo aberto utilizada. Nas aulas de Cálculo dessa investigadora costuma-se utilizar os parênteses para representar os intervalos abertos.

existência de um mínimo ao argumentarem “quando $x \to -\infty$, $y \to -\infty$” (Figura 100), pois é equivalente a dizer que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, ou seja, que não há mínimo absoluto. E, as equipes que argumentaram dizendo *“a função vai para (ou parte do) infinito”* ou que *“seria* $-\infty$ *”* também observaram o limite infinito, mas não se expressaram bem matematicamente. Estes tipos de erros são categorizados como IEM. Pela experiência docente, com frequência, encontra-se a escrita errada “$y = -\infty$” como se infinito fosse um número e pudesse ser alguma das coordenadas de um ponto.


Acredita-se que o ponto máximo é quando y = 3. Já o ponto mínimo não existe para tal gráfico, visto que a função parte do infinito.

Figura 99 - Resposta dada ao item “a” pela equipe G11.
Fonte: Dados da pesquisa.

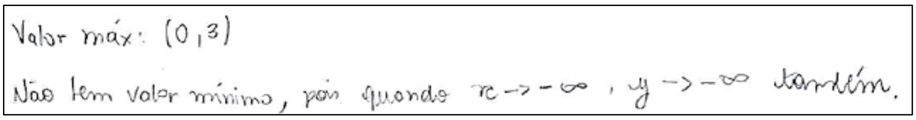

Valor máx: (0,3)
Não tem valor mínimo, pois quando x -> -∞ , y -> -∞ também.

Figura 100 - Resposta dada ao item “a” pela equipe G15.
Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação às respostas erradas apresentadas, acreditamos que uma equipe identificou os pontos de máximo absoluto e mínimo local corretamente, mas ao escrever apresentaram o valor da ordenada observado no gráfico como se fosse o valor da abscissa (Figura 101). E, a outra resposta considerada errada foi porque responderam que a função tem máximos e mínimos, mas usaram como justificativa o facto de existir mudança de concavidade (Figura 102). No ponto de máximo absoluto apresentado na Figura 94 da atividade proposta, isso ocorre, mas no mínimo local $Q(3, -3)$ essa observação não é verdadeira. Sabemos que nem todo ponto extremo é um ponto de inflexão, mas como a atividade foi trabalhada antes de formalizar o conteúdo, pode ser que os valores extremos fornecidos no gráfico se encaixassem nessa situação que é um caso particular.

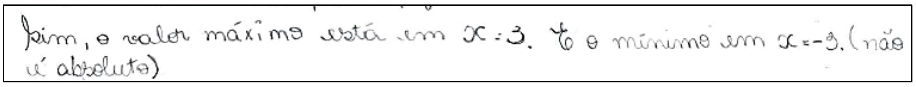

Sim, o valor máximo está em x = 3. E o mínimo em x = -3. (não é absoluto)

Figura 101 - Resposta dada ao item “a” pela equipe G12.
Fonte: Dados da pesquisa.

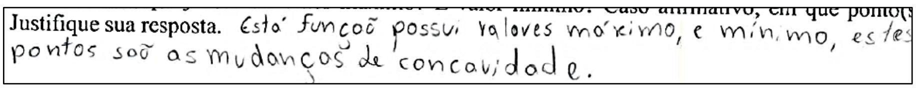

Justifique sua resposta. Está função possui valores máximo, e mínimo, estes pontos são as mudanças de concavidade.

Figura 102 - Resposta dada ao item “a” pela equipe G4.
Fonte: Dados da pesquisa.

No item “b”, que pedia intervalos em que a função é crescente/decrescente, a dúvida de diversas equipes era saber o que ocorria para valores próximos de $x = -1$, pois parecia ser uma “função constante”. Então, a professora os lembrava de que o gráfico parecia com o de uma função cúbica transladada nesse ponto.

Algumas equipes estavam interpretando de forma equivocada o intervalo de (de)crescimento da função. Por exemplo, achavam que a função era crescente *“de menos infinito até 3”*. Nesses casos, a professora os auxiliava solicitando que a explicassem como chegaram naquela conclusão. Ao apontarem no gráfico para lhe explicarem onde a função era crescente, ela identificou que estavam olhando a variação das ordenadas. Ao perguntar qual era a variação de x, respondiam corretamente que era de menos infinito até zero. Entendemos que os alunos que cometeram esse tipo de erro, categorizado como IEAG, compreendiam o que é uma função crescente, mas apresentaram a resposta de forma inadequada. Então aconselhei que indicassem nos intervalos apresentados qual era a variável que estavam considerando (x ou y).

Na Tabela 43 pode-se observar as categorias de respostas apresentadas pelos grupos ao item “b”.

Tabela 43
Categorias e repostas do item “b” da Tarefa 18

			GM	GQ	TG
Crescente	Correta	$(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$, com variações na escrita	10	5	15
	Parcialmente correta	$(-\infty, 3]; [3, +\infty)$	2	0	2
Decrescente	Correta	$[0,3]$	12	5	17

Pelos dados é possível observar que 15 equipes identificaram corretamente que f é crescente e decrescente, respectivamente, no intervalo de $(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$ e $[0,3]$. Cremos que as duas equipes que apresentaram resposta parcialmente correta para intervalos em que a função é crescente interpretaram corretamente, apenas se equivocaram ao escrever os intervalos, pois ao responderem que era crescente em “$(-\infty, 3]$; $[3, +\infty)$” o limitante superior do primeiro intervalo apresentado corresponde à imagem de $x = 0$. Essa interpretação fundamenta-se no facto de que a equipe apresentou o intervalo de decrescimento correto. Ainda, observou-se que os grupos apresentaram respostas com os extremos dos intervalos diferentes, alguns incluíram o(s) extremo(s) conhecido(s) no intervalo outros não. E ainda, algumas equipes apenas listaram os intervalos, sendo assim, não usaram o símbolo de união dos conjuntos. Na plenária argumentaram que apenas foram escrevendo os conjuntos sem terem a preocupação de escrever de formar única, considerando as operações entre os conjuntos, tanto que na Figura 103 percebe-se o uso do “e” entre os conjuntos, mas este “e” não significa a interseção entre os conjuntos, que não era o caso. Esses mesmos alunos ainda apresentaram uma informação adicional, identificaram os pontos de abscissas -1 e 3 como sendo os pontos em que a função nem cresce nem decresce, ou seja, identificaram os chamados pontos críticos (candidatos a serem pontos de máximo/mínimo local(is)).

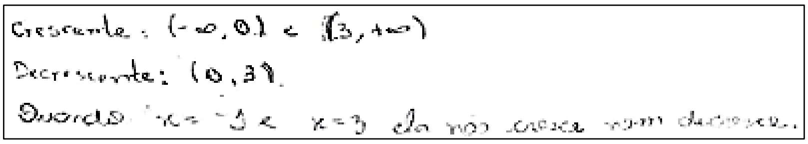

Crescente: $(-\infty, 0)$ e $[3, +\infty)$
Decrescente: $(0, 3]$
Quando $x = -1$ e $x = 3$ ela não cresce nem decresce.

Figura 103 - Resposta dada ao item “b” pela equipe G3.
Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação ao item “c” em que fora questionado se f era contínua em todo seu domínio, alguns grupos chamavam a professora para confirmar se o que pensavam sobre a continuidade estava correto. Para uma dupla a professora teve que explicar um pouco sobre a definição de continuidade, e depois que explicou, entendeu que a dúvida era sobre diferenciabilidade, mas os estudantes se atrapalharam no momento de perguntarem. Pela resposta deles, continuaram com a confusão e percebe-se que não compreendiam a diferença entre reta tangente e função tangente, pois na resposta apareceu até função cotangente (Figura 104). Essa foi uma, das duas equipes (Tabela 44), que erraram a resposta do item “c”. A outra equipe que errou, interpretou a assíntota horizontal que podia ser observada no gráfico, da Figura 1 da atividade, como se fosse uma assíntota vertical (Figura 105), ou seja, ao interpretar o gráfico a equipe “trocou” as variáveis x e y, pois pela resposta entenderam que $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$, mas o correto era $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

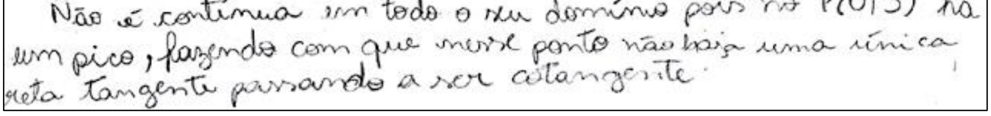

Não é contínua em todo o seu domínio pois no P(0,3) há um pico, fazendo com que nesse ponto não haja uma única reta tangente passando a ser cotangente

Figura 104 - Resposta dada ao item “c” pela equipe G14.
Fonte: Dados da pesquisa.

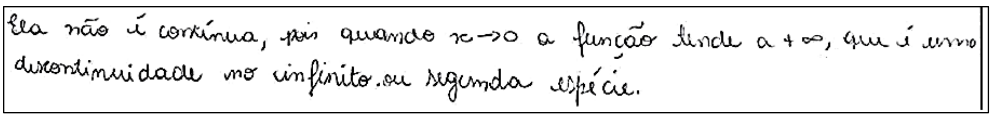

Ela não é contínua, pois quando $x \to 0$ a função tende a $+\infty$, que é uma descontinuidade no infinito ou segunda espécie.

Figura 105 - Resposta dada ao item “c” pela equipe G15.
Fonte: Dados da pesquisa.

As respostas do item “c”, apresentadas pelos grupos, estão categorizadas na Tabela 44.

Tabela 44

Categorias e repostas do item “c” da Tarefa 18

		GM	GQ	TG
Correta	Usou argumentação geométrica para concluir que é contínua	6	2	9
	Usou a definição formal de continuidade	1	0	
Parcialmente correta	Argumentou geometricamente porque era contínua, mas errou a definição formal de continuidade	1	0	6
	Analisou apenas a existência do limite bilateral para concluir que a função era contínua	3	0	
	Contínua porque não apresenta descontinuidade, sem justificativas	1	1	
Errada	Não é contínua porque tem um pico	0	1	2
	Concluiu que não é contínua porque interpretou equivocadamente que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$	0	1	

Das 15 equipes que responderam que a função é contínua, surgiram três categorias de respostas: nove grupos visualizaram graficamente que não havia pontos de descontinuidades, ou seja, saltos e/ou buracos e/ou assíntota vertical (Figura 106); três equipes argumentaram que a função é contínua porque os limites laterais existem e são iguais (Figura 107), ou seja, demonstraram conhecimento sobre o entendimento da existência de limite bilateral; somente um grupo usou corretamente a definição de continuidade e um grupo fez uso da noção intuitiva de continuidade; e, dois grupos disseram apenas que a função não apresenta descontinuidade, sem justificar.

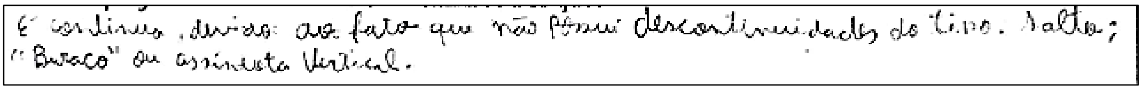

É contínua, devido ao fato que não possui descontinuidades do tipo: salto; "Buraco" ou assíntota Vertical.

Figura 106 - Resposta dada ao item “c” pela equipe G9.
Fonte: Dados da pesquisa.

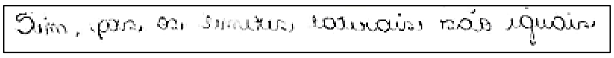

Sim, pois os limites laterais são iguais.

Figura 107 - Resposta dada ao item “c” pela equipe G5.
Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação ao item “d”, questão relacionada à diferenciabilidade de f, alguns alunos queriam entender melhor o que era um pico, pois suspeitavam que na figura apresentada existia um, mas não sabiam explicar. Nestes casos, a professora lembrava-os da função modular, pois nela facilmente identifica-se um pico, que é o ponto de encontro de duas semirretas, entretanto, no gráfico da atividade não eram segmentos de retas que estavam sendo representadas. Então, a professora fazia para eles o esboço do gráfico de uma função que parecia com uma parábola (que apresenta uma suave mudança no vértice) e, a seguir, fazia o esboço de uma curva similar a parábola anteriormente representada, mas formando um bico no "vértice". Quando os questionava a diferença entre os dois gráficos, respondiam que um tinha um pico e alguns se manifestavam exclamando: *Ah, entendi!* Depois da intervenção, deixava o grupo trabalhar de forma independente. A Tabela 45 pode ser observada as respostas que os alunos deram a esse item.

Tabela 45
Categorias e repostas do item "d" da Tarefa 18

	Não é diferencial, pois...	GM	GQ	TG
Correta	no ponto $(0,3)$, porque é um pico	8	4	12
Parcialmente correta	no ponto $(0,3)$, mas complementou com alguma informação equivocada	4	0	4
Errada	nos picos e pontos de inflexão, mas não indicou nenhum ponto	0	1	1

Nesse item, todos os grupos responderam que a função não era diferenciável em todo o seu domínio, mas quatro colocaram uma informação adicional errada, dizendo que também não é diferenciável no infinito ou no ponto em que $x = -1$ ou nos pontos em que há mudança de concavidade. As demais equipes argumentaram que a função não é diferenciável no pico ou no ponto em que não existe reta tangente horizontal (Figura 108) ou porque as derivadas laterais eram diferentes. Todas as respostas se referem ao ponto em que $x = 0$, mas nem todas as respostas deixavam de forma explícita que estavam falando desse ponto.

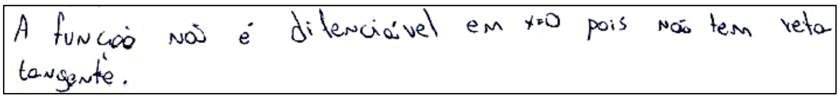

A funcão não é diferenciável em x=0 pois não tem reta tangente.

Figura 108 - Resposta dada ao item "c" pela equipe G7.
Fonte: Dados da pesquisa.

O item "e" pedia para representar segmentos de retas tangentes ao longo de todo o domínio de f e responder em que intervalos as retas tangentes têm inclinação positiva, negativa e nula. Esse item causou bastante discussão nas equipes. Na Figura 109 encontra-se o gráfico de uma das equipes que estava com essa dificuldade. Observe que muitos dos segmentos de retas tangentes traçados procuraram fazer de forma que a reta não interseccionasse o gráfico da função. As retas cujo esboço “corta” o gráfico em mais de um ponto (perto da abscissa -1) foram feitas depois do auxílio da professora para entenderem onde a inclinação era nula.

Com as dúvidas apresentadas foi possível detectar que estes alunos não tinham entendido corretamente o que é uma reta tangente, apesar desse assunto já ter sido abordado. Alguns grupos que traçavam uma reta que imaginavam ser a reta tangente, chamavam a professora para auxiliar porque julgavam que tal reta não poderia ser tangente, pois interceptava o gráfico em mais pontos, ou seja, seria secante. Para esclarecer a dúvida a professora teve de resgatar a ideia já trabalhada com eles a fim de que compreendessem que tangência é um conceito local.

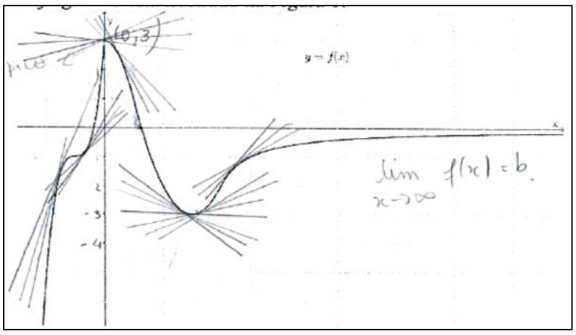


Figura 109 - Representação das retas tangentes da equipe G15.
Fonte: Dados da pesquisa.

Outra dúvida que ocorreu em ambas as turmas esteve relacionada com a reta tangente com inclinação nula. Geralmente esses alunos tinham traçado a reta tangente paralela ao eixo x no ponto em $x = 3$, mas não sabiam dizer o que ocorria com o coeficiente angular ou se realmente aquela reta era uma reta tangente. Para auxiliar, a professora dava explicações parecidas com as já relatadas anteriormente nessa atividade (item “e”), para continuar, a conversa se dava de forma similar ao seguinte diálogo:

P: Vocês acham que tem mais alguma reta tangente onde a inclinação é nula?
A: No $x = 0$ que é um pico?
P: Podemos traçar uma reta paralela ao eixo x neste ponto?
A: Sim. [e traçavam]
P: Concordo com vocês que graficamente estamos enxergando essa reta, mas agora vamos pensar o que sabemos da teoria de derivadas. Se tomarmos o ponto em que $x = 0$ e outro com $x < 0$, traçarmos a reta secante e fizermos este ponto [mostrando no papel] se deslocar em direção ao pico, teríamos essa reta tangente [mostrava no papel]. Se tomarmos um $x > 0$ e usarmos o mesmo procedimento, estaríamos chegando nesta [mostrava no papel que era outra reta]. Então, já que a derivada no ponto é o coeficiente angular da reta tangente, pelo gráfico da Figura 2, o que podem me dizer a respeito da derivada em zero?
A: É descontínua.

P: Isso, pela esquerda é 6 e pela direita zero, então existe $f'(0)$?
A: Não.
P: Isso mesmo. Então, pela teoria de derivadas podemos falar que existe a reta tangente que visualizamos?
A: Não.

Surpreendeu-nos constatar tantos alunos com dificuldade em identificar o pico e duvidar que a reta tangente pudesse interceptar mais um ponto do gráfico da função, pois a professora trabalhou com eles na Tarefa 14 e foram bem participativos no momento da formalização da interpretação geométrica da reta tangente, momento que este assunto fora abordado e discussão similar a essa já havia ocorrido. A Tabela 46 apresenta as respostas dos alunos dadas a esse item bem como a classificação da resposta.

Tabela 46
Categorias e respostas do item "e" da Tarefa 18

Inclinação	Classificação	Resposta	GM	GQ	TG
Positiva	Correta	$(-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (3,+\infty)$, com variações na escrita	7	4	11
	Parcialmente correta	$(-\infty,0] \cup [3,5]$	0	1	3
		$(-\infty,-1) \cup \left(-\frac{1}{2},3\right) \cup (3,+\infty)$	1	0	
		$(-\infty,-1) \cup (-1,3) \cup (3,+\infty)$	1	0	
	Errada	Onde a função é crescente	2	0	3
		Escreveu $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ como coordenada de um ponto	1	0	
Negativa	Correta	(0,3)	9	4	13
	Errada	Onde a função é decrescente	2	1	4
		Escreveu $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ como coordenada de um ponto	1	0	
Nula	Correta	Nos pontos em que $x=-1$ e $x=3$	7	2	9
	Parcialmente correta	No ponto (3,-3)	0	2	3
		Nos pontos críticos, mas não identificou	1	0	
		Ponto (3,3)	1	0	3
	Errada	Ponto (-3,3)	1	0	
		No pico	1	0	

Pelas respostas apresentadas na Tabela 46, percebe-se que 3 equipes não apresentaram os intervalos em que a inclinação é positiva. Dessas, duas equipes responderam que a inclinação é positiva onde a função é crescente, constatação verdadeira, mas não apresentaram os intervalos de crescimento da função; e, três equipes responderam que a inclinação é negativa nos intervalos que a função é decrescente. Uma equipe apresentou os intervalos $[3{,}5]$ e $(-\infty, 0]$ como sendo os intervalos em que a inclinação é positiva, que são subintervalos da solução correta, para chegar à conclusão escolheu um ponto específico, traçou na Figura 1 da atividade (que corresponde à Figura 94) o esboço da reta tangente, mas ao justificar a resposta escreveu tangente positiva ao invés de coeficiente angular da reta tangente. Essa equipe procedeu da mesma forma e cometeu o mesmo equívoco para justificar o coeficiente angular negativo (apesar de apresentar subintervalos corretos) e nulo (Figura 110). Quanto às notações de intervalos, houve variações, como já comentado no item “b”, e esse mesmo comportamento foi encontrado nos demais itens que precisavam apresentar intervalos. Por isso, posteriormente, não faremos mais esse tipo de observação.

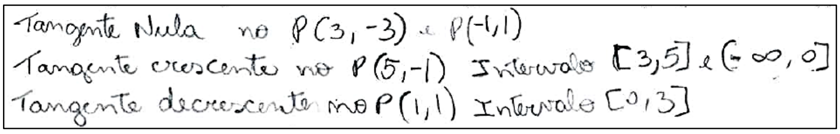

Tangente Nula no P(3, -3) e P(-1,1)
Tangente crescente no P(5,-1) Intervalo [3,5] e (-∞, 0]
Tangente decrescente no P(1,1) Intervalo [0,3]

Figura 110 - Resposta dada ao item “e” pela equipe G14.
Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação às respostas erradas, uma equipe escreveu $\lim\limits_{x \to 0^+}$ como um dos limitantes dos intervalos (Figura 111). No momento da plenária, justificaram que interpretaram as ordenadas dos pontos de máximo/mínimo como sendo a resposta do limite. E, a outra equipe apresentou um subintervalo errado em que a inclinação é positiva, pois também olhou para o valor da ordenada em um dos limitantes do intervalo apresentado. Com relação aos locais que a reta tangente é nula, nota-se que das 15 equipes que responderam, somente duas não apontaram o ponto de coordenadas $(3, -3)$. Uma dessas respondeu: *“nos pontos críticos”* e, a outra, *“no pico”.* Então não podemos afirmar que os pontos mencionados correspondem aos corretos, pois não é possível identificar quais são os pontos que estão chamando de críticos e pico. Além disso, nove grupos identificaram os dois pontos cujo coeficiente é nulo.

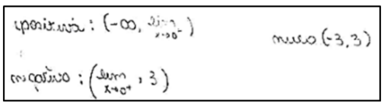

positivo: $(-\infty, \lim\limits_{x \to 0^-})$
nulo (-3,3)
negativo: $(\lim\limits_{x \to 0^+}, 3)$

Figura 111 - Resposta dada ao item “e” pela equipe G5.
Fonte: Dados da pesquisa.

No item “f” era solicitado para conjecturar alguma relação entre o (de)crescimento de uma função e o sinal da primeira derivada a partir das observações feitas nos itens “e” e “d”. Nesse item a dificuldade apresentada foi interpretar o que estava sendo solicitado, pois pedia para relacionar (de)crescimento da função com o sinal da primeira derivada, e no item “e” fora solicitado para analisar o sinal da inclinação das retas e, para responder, dessa forma, algumas equipes não precisaram associar o coeficiente angular com a derivada no ponto para responder o que estava sendo solicitado. Por isso, a professora questionou-os se lembravam de alguma relação entre o coeficiente angular da reta tangente e as derivadas, a resposta foi afirmativa e prosseguiram os trabalhos.

Na Tabela 47 estão às categorias das conjecturas elaboradas pelos grupos para responder o item “f”.

Tabela 47

Categorias e respostas do item “f” da Tarefa 18

		GM	GQ	TG
Correta	Relacionou o sinal da primeira derivada com crescimento e decrescimento da função ou vice-versa.	7	2	12
	Relacionou o sinal do coeficiente angular com crescimento e decrescimento da função.	3	0	
Parcialmente correta	Relacionou o sinal da primeira derivada com crescimento e decrescimento da função, mas complementou com informações erradas.	0	1	5
	Relacionou o sinal do coeficiente angular com crescimento e decrescimento da função, mas cometeu algum equívoco ao se expressar.	2	2	

Pelas informações da Tabela 47, percebe-se que todas as equipes fizeram conjecturas (ao menos) parcialmente. Algumas equipes cometeram equívocos na forma de se expressar ou por omitir alguma informação. E, alguns grupos deixaram subentendido que estava falando do (de)crescimento da função ao leitor, mas houve grupos que escreveram por completo as suas conclusões (Figura 112).

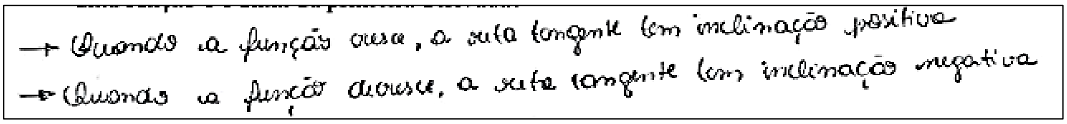


Figura 112 - Resposta dada ao item “f” pela equipe G11.
Fonte: Dados da pesquisa.

Nove equipes conseguiram relacionar o sinal da primeira derivada com o (de)crescimento da função, que era a intenção inicial. Dessas, uma equipe escreveu novamente os intervalos que identificou no item "e" e, além de associar com (de)crescimento da função, falou também da concavidade, mas esta observação não estava correta em todo o intervalo apresentado. Com relação aos equívocos cometidos ao associar o coeficiente angular com decrescimento da função, interpretamos dessa forma porque ao invés de escreverem coeficiente angular da reta tangente usaram a expressão "sinal da tangente" (Figura 113) e "retas tangentes positivas" (Figura 114).

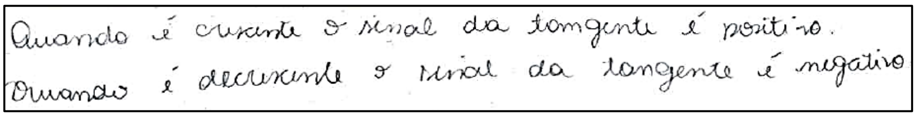

Quando é crescente o sinal da tangente é positivo.
Quando é decrescente o sinal da tangente é negativo

Figura 113 - Resposta dada ao item "f" pela equipe G15.
Fonte: Dados da pesquisa.

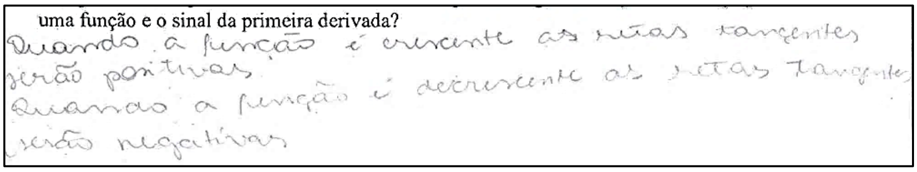

uma função e o sinal da primeira derivada?
Quando a função é crescente as retas tangentes serão positivas.
Quando a função é decrescente as retas tangentes serão negativas

Figura 114 - Resposta dada ao item "f" pela equipe G16.
Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação ao item "g" em que eram solicitados os intervalos em que a concavidade do gráfico de f era voltada para baixo/cima, a dificuldade sentida nesse item foi o fato de que várias equipes não sabiam exatamente o que era concavidade. Achavam que havia somente um intervalo em que a concavidade do gráfico da função f era voltado para cima e outro para baixo, pois olhavam somente a parte do gráfico que parecia uma parábola. Para explicar o que significa o gráfico de uma função ter concavidade voltada para cima/baixo, a professora partiu de onde conhecem essa expressão, ou seja, desenhou uma parábola com concavidade para cima e outra para baixo em uma folha de papel. O diálogo que se estabelecia com os estudantes era:

P: Sabemos que esta é uma parábola com a concavidade voltada para cima. É bem nítida essa concavidade se vocês estiverem com toda a parábola. Agora, se estiverem só com esse pedacinho [traçava uma reta vertical e mostrava apenas uma parte do ramo antes ou depois do vértice, que parece uma "reta"], a concavidade continua sendo para cima?
A: Acho que sim.
P: A concavidade de uma parábola é somente pra cima ou pra baixo. Então, nesse pedacinho olhem que a curva tem uma "pequena barriguinha" voltada para cima. Mesmo que seja uma leve inclinação para cima, a concavidade continua sendo para cima.

Considerando a parábola com a concavidade voltada para baixo, a professora explicou de forma similar aos estudantes que o significado da concavidade do gráfico de função voltada para baixo.

A Tabela 48 apresenta os detalhes das respostas dadas pelos alunos no item "g". Nesse item, 11 grupos responderam corretamente tanto os intervalos em que a concavidade é voltada para cima quanto os intervalos em que a concavidade é voltada para baixo. As respostas de quatro esquipes foram classificadas como parcialmente corretas. Dessas, três equipes apresentaram ao menos um intervalo contendo um subintervalo com concavidade contrária ao que fora indicado. E, não foi possível compreender o erro das duas equipes que apresentaram apenas um intervalo por resposta.

Tabela 48

Categorias e respostas do item "g" da Tarefa 18

			GM	GQ	TG
Concavidade voltada para cima	Correta	$(-\infty,-1) \cup (0,1) \cup (4,+\infty)$, com variações na escrita	8	3	11
	Parcialmente correta	$(-\infty,-1) \cup [0,\mathrm{a}] \cup (4,+\infty)$, com $1 < \mathrm{a} < 2$	1	0	4
		$(-\infty,-1) \cup (0,1) \cup (3,+\infty)$	1	0	
		$(-\infty,-1] \cup (0,2) \cup [4,5]$	0	1	
		$(-\infty,-1) \cup (0,1) \cup (4,-2)$	1	0	
	Errada	$(-\infty,3)$	0	1	2
		$(-1,1]$	1	0	
Concavidade voltada para baixo	Correta	$(-1,0) \cup (1,4)$, com variações na escrita	8	2	10
		$(-1,0) \cup [\mathrm{a},4]$, com $1 < \mathrm{a} < 2$	1	0	
	Parcialmente correta	$(-1,0) \cup (1,3)$	1	0	5
		$(-1,0) \cup (1,2)$	1	0	
		$[-1,0] \cup [2,4]$	0	1	
		$[1,4]$	0	1	
	Errada	$(0,+\infty)$	0	1	2
		$[0,5]$	1	0	

O item "h", pedia os intervalos de (de)crescimento de f'. Nesse item, não houve dúvidas, pois, o assunto era de conhecimento dos alunos e já haviam respondido o item "b" que estava relacionado com o mesmo assunto. Somente uma equipe não respondeu este item, por falta de tempo para finalizar a atividade, visto que demoraram muito para inicia-la, por estarem conversando sobre outros assuntos.

A partir deste item, essa equipe não respondeu mais nada na atividade. E, uma equipe errou um intervalo em que a função derivada era crescente. Julgamos que o grupo identificou corretamente o intervalo $(-1,0)$, mas escreveu $(-1,6)$ porque colocou a ordenada como limitante superior do intervalo. Todas as demais equipes responderam corretamente os intervalos de crescimento/decrescimento da função f', apenas houve variações nas escritas dos intervalos, como já mencionado em itens anteriores. Os detalhes das respostas dos grupos dadas a esse item podem ser observados na Tabela 49.

Tabela 49
Categorias e respostas do item "h" da Tarefa 18

			GM	GQ	TG
Crescente	Correta	$(-1,0) \cup (1,4)$, com variações na escrita	10	5	15
	Parcialmente correta	$(-1,6) \cup \ (1,4)$	1	0	1
Decrescente	Correta	$(-\infty,-1) \cup (0,1) \cup (4,+\infty)$, com variações na escrita	11	5	16
Não respondeu			1	0	1

O item "i" apresentou os gráficos de f e f' sobrepostos e solicitava que usassem os itens "g" e "h" para conjecturar alguma possível relação existente entre a concavidade do gráfico de uma função e o (de)crescimento da primeira derivada de f. Algumas equipes estavam com dificuldades em entender o que estava sendo solicitado. Para auxiliá-los na interpretação, apontando para o primeiro intervalo da Figura 2 da Tarefa 18 (corresponde a Figura 95) e escondendo o restante do gráfico, o diálogo estabelecido entre a professora e a equipe se dava conforme apresentado abaixo.

P: Aqui f' é crescente ou decrescente?
A: Aqui é decrescente.
P: E a concavidade do gráfico de f neste intervalo?
A: Para baixo.
P: Agora olhem o que ocorre, no próximo intervalo, com f e f'.
A: f' é crescente e f tem concavidade para cima.
P: Agora é só continuar.

Algumas equipes, para facilitar a interpretação gráfica, para identificarem a relação entre a função e sua segunda derivada, traçaram retas verticais em cada local em que ocorria mudança de concavidade no gráfico da função f, conforme apresentado na imagem da Figura 115.

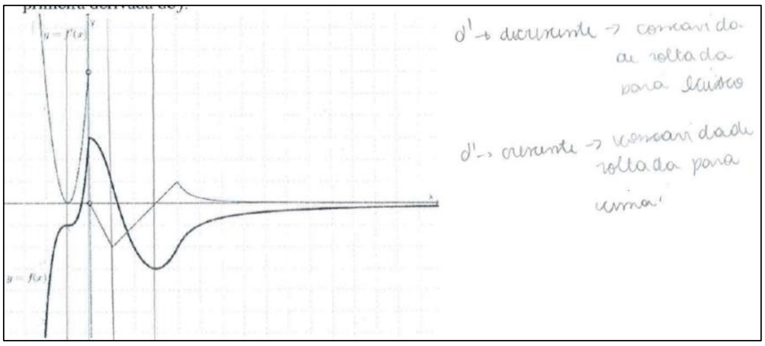


Figura 115 - Resposta dada ao item "i" pela equipe G15.
Fonte: Dados da pesquisa.

A Tabela 50 apresenta as categorias de respostas do item "i".

Tabela 50
Categorias e repostas do item "i" da Tarefa 18

		GM	GQ	TG
Correta	f' decrescente, concavidade para baixo ou vice-versa; f' crescente, concavidade para cima ou vice-versa.	10	4	14
Parcialmente correta	Respondeu que concavidade está ligada diretamente ao crescimento e decrescimento de da derivada, mas não especificou de que forma.	1	0	1
Errada	Quando f decresce, f' cresce.	1	0	2
	Nos intervalos em que a função é decrescente com concavidade para baixo a sua derivada é positiva. Nos intervalos em que a função é crescente com concavidade para cima a sua derivada é negativa.	0	1	

Pelas informações da Tabela 50, pode-se observar que 14 equipes que conseguiram fazer a conjectura correta, todas escreveram de forma muito parecida com as imagens ilustradas na Figura 116, Figura 117 e Figura 118. Na primeira, vê-se que a equipe foi cuidadosa ao escrever, mesmo não tendo usado muita simbologia matemática, a conjectura está correta e qualquer leitor que tenha conhecimento de CDI entenderá a colocação. A segunda imagem está sendo mais objetiva, mas não houve prejuízo no entendimento de sua conjectura. Já na terceira imagem, o grupo fez a conjectura correta, mas omitiu informações importantes para um bom entendimento do leitor, pois da forma como é apresentada é necessário que o leitor, ao ler a conjetura, leia as entrelinhas, ou seja, leia "[quando a concavidade do gráfico da função é] para cima [a derivada primeira] é crescente". Analogamente, para a segunda sentença.

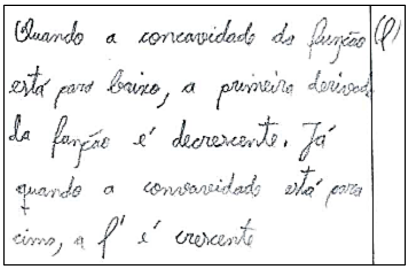
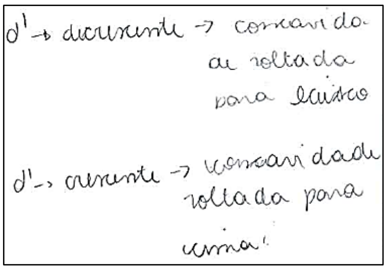
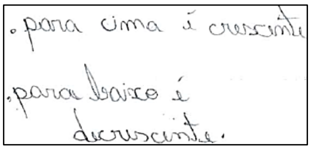

Quando a concavidade da função (f) está para baixo, a primeira derivada da função é decrescente. Já quando a concavidade está para cima, a f' é crescente

Figura 116 - Resposta dada ao item “i” pela equipe G6.
Fonte: Dados da pesquisa.


d' → decrescente → concavidade voltada para baixo

d' → crescente → concavidade voltada para cima.

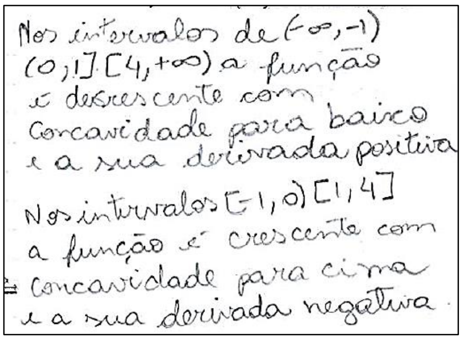
Figura 117 - Resposta dada ao item “i” pela equipe G15.
Fonte: Dados da pesquisa.


. para cima é crescente

. para baixo é decrescente.

Figura 118 - Resposta dada ao item “i” pela equipe G2.
Fonte: Dados da pesquisa.

As conjecturas erradas estão ilustradas na Figura 119 e na Figura 120. Ao analisar a Figura 3 da atividade (corresponde a Figura 97) e a resposta da Figura 119, entendemos que a equipe identificou os intervalos em que a derivada é decrescente, olhou para o gráfico da função f que tem a concavidade voltada para cima nos intervalos indicados, mas a função primeira derivada não é positiva em todos os intervalos indicados nessa imagem. De forma análoga, entendemos o restante da resposta dessa equipe. Ou seja, essa equipe pode ter observado informações verdadeiras, mas se expressou mal matematicamente. A resposta da Figura 120 é uma constatação verdadeira apenas para o intervalo $(-\infty, 1]$.


Nos intervalos de (-∞,-1) (0,1] [4,+∞) a função é decrescente com concavidade para baixo e a sua derivada positiva

Nos intervalos [-1,0) [1,4] a função é crescente com concavidade para cima e a sua derivada negativa.

Figura 119 - Resposta dada ao item “i” pela equipe G14.
Fonte: Dados da pesquisa.

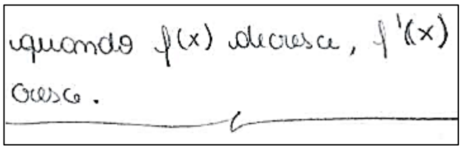

quando f(x) decresce, f'(x) cresce.

Figura 120 - Resposta dada ao item “i” pela equipe G11.
Fonte: Dados da pesquisa.

No item “j” em que eram solicitados os intervalos em que f'' era positiva, negativa e nula, alguns grupos interpretaram errado o que estava sendo solicitado, ao invés de estudarem o sinal de f'', estudaram o crescimento/decrescimento de f'' (Figura 121), mas ao responderem os intervalos de crescimento foram apresentados como se fossem os intervalos em que f'' fosse positiva, decrescimento, como negativo, e ainda, apresentaram como se f'' fosse nula nos intervalos em que realmente é ou parece ser (como onde existe assíntota horizontal). Julgamos que esse erro pode ter ocorrido, porque nos itens “b” e “h” fora solicitado para estudar (de)crescimento das funções f e f', respectivamente. Nos grupos que a professora percebeu essa confusão, conseguiu intervir de forma que o erro fosse identificado. Para auxiliá-los, a professora perguntava como identificaram que y era positivo, negativo e nulo, ao analisarem um gráfico. Ao responderem que era, respectivamente, acima, abaixo e sobre o eixo x, orientava que fizessem essa análise considerando o gráfico de $y = f''(x)$.

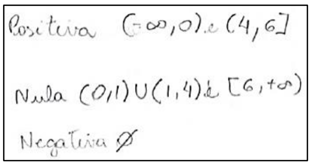


Figura 121 - Resposta dada ao item “j” pela equipe G14.
Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse item algumas equipes estavam identificando que havia $y = 0$ para $x > 6$, como resposta apresentada na Figura 121. Então, a professora teve que retomar ao primeiro gráfico da função f para que pudessem observar que existia uma assíntota horizontal. Por isso, os gráficos de f' e f'' também possuíam e, por isso, parecia que a função era nula naquele intervalo. Para melhor compreenderem a assíntota horizontal (termo já introduzido no conteúdo de funções), a professora explicou que se uma reta é assíntota, então as distâncias entre as imagens da função e esta reta se tornam tão pequenas que se torna difícil distinguir a diferença entre esses dois valores.

Na Tabela 51, estão apresentadas as respostas dos alunos dadas ao item “j”.

Tabela 51
Categorias e repostas do item “j” da Tarefa 18

			GM	GQ	TG
Positiva	Correta	$(-1,0) \cup (1,4)$, com variações na escrita	8	2	10
	Parcialmente correta	$(-1,0) \cup (1,3)$	1	0	2
		$[-1,6) \cup (1,4)$	1	0	
	Errada	$(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$, com variações na escrita	2	0	4
		$(-\infty, 0) \cup (4,6]$	0	1	
		Para todo $y > 0$	0	1	
Negativa	Correta	$(-\infty, -1) \cup (0,1) \cup (4, +\infty)$, com variações na escrita	8	0	8
	Parcialmente correta	$(-\infty, -1) \cup (4,6)$	1	0	4
		$(-\infty, -1], (4, +\infty)$	0	1	
		$(-\infty, -1) \cup (0,1) \cup (4,6)$	0	1	

		$(-\infty,-1],(0,1),(-1,+\infty)$	1	0	
	Errada	Para todo $y < 0$.	0	1	2
		Não há	0	1	
Nula	Correta	No ponto em que $x = -1$	6	0	6
	Parcialmente	No intervalo $(6,+\infty)$	1	1	3
	Errada	$(0,1) \cup (1,4)$	2	0	4
		Pontos: $(0,6),(0,-1),(1,-1),\left(1,\frac{1}{2}\right),(4,-1),\left(4,\frac{1}{2}\right)$	1	0	
		$y = 0$ em $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ e $x = 4$	0	1	
Não respondeu			0	1	1

Os itens “k” e “l” foram feitos de forma muito rápida se comparado com os demais, cremos que seja por já terem entendido a lógica para estruturarem as suas conjecturas. As categorias das respostas apresentadas ao item “k” que pedia para conjecturar a relação existente entre o (de)crescimento de f' com o sinal de f'' estão apresentadas na Tabela 52.

Tabela 52
Categorias e conjecturas do item “k” da Tarefa 18

		GM	GQ	TG
Correta	Se f' é decrescente, f'' será negativa ou vice-versa. Se f' for crescente, f'' será positiva ou vice-versa.	10	3	13
Errada	O (de)crescimento de f' está diretamente ligado a concavidade de f.	1	0	3
	O crescimento e decrescimento de f estão diretamente ligados a concavidade de f'	1	0	
	Associou o sinal de f'' com o (de)crescimento da (reta) tangente	1	0	
Não respondeu		0	1	1

Pela Tabela 52, temos que 13 equipes conseguiram apresentar a conjectura almejada nesse item, isto é, constatar que nos intervalos que f' é decrescente, a função f'' é negativa ou vice-versa (Figura 122). Ou, conclusão equivalente a essa considerando f' uma função crescente (Figura 123).

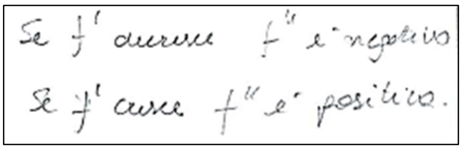


Figura 122 - Resposta dada ao item “k” pela equipe G8.
Fonte: Dados da pesquisa.

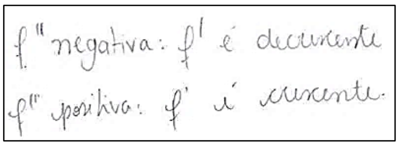


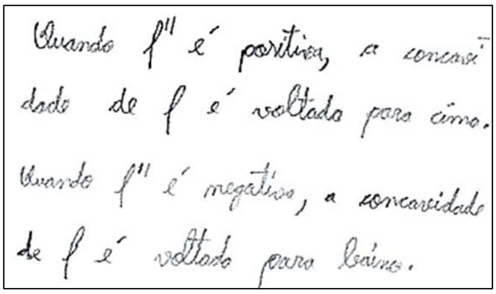
Figura 123 - Resposta dada ao item “k” pela equipe G10.
Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação ao item “l”, as categorias das respostas apresentadas pelos grupos estão na Tabela 53.

Tabela 53
Categorias e conjecturas do item “l” da Tarefa 18

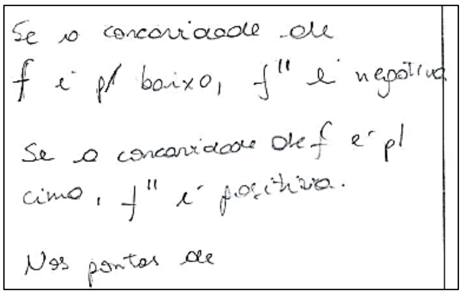
		GM	GQ	TG
Correta	Se f'' é positiva, a concavidade de f é voltada para cima ou vice-versa.	9	3	12
Parcialmente correta	Se a concavidade é voltada para baixo, a tangente é negativa. Se a concavidade é voltada para cima, a tangente é positiva.	1	0	1
Errada	A concavidade do gráfico de f está relacionada com (de)crescimento de f''.	1	0	2
	Relacionou (de)crescimento de f e concavidade com (de)crescimento de f'' ou com continuidade de f''.	0	1	
Não respondeu		1	1	2

Note que 12 das 16 equipes conseguiram conjecturar que se f'' é positiva, então a concavidade de f é voltada para cima ou vice-versa. Duas das respostas corretas estão ilustradas na Figura 124 e na Figura 125. Acreditamos que o grupo cuja resposta foi classificada como parcialmente correta conseguiu intuir a conjectura correta, mas se expressou mal matematicamente, pois usou as expressões “tangente positiva” e “tangente negativa” ao querer se referir ao sinal do inclinação das retas tangentes, que são dadas pela derivada primeira no ponto.



Quando f'' é positiva, a concavidade de f é voltada para cima.
Quando f'' é negativa, a concavidade de f é voltado para baixo.

Figura 124 - Resposta dada ao item "l" pela equipe G6.
Fonte: Dados da pesquisa.



Se a concavidade de f é p/ baixo, f'' é negativa.
Se a concavidade de f é p/ cima, f'' é positiva.
Nos pontos de

Figura 125 - Resposta dada ao item "c" pela equipe G8.
Fonte: Dados da pesquisa.

Na Tabela 54 encontra-se uma categorização dos erros encontrados nas respostas apresentadas pelas equipes. Salienta-se que nessa categorização foram analisadas todas as respostas independentes de terem sido classificadas como corretas, parcialmente corretas ou erradas. Para essa análise foram consideradas quatro categorias: incorreção em escritas matemáticas (IEM); extração inadequada de informações por meio da análise gráfica (EIAG); respostas vagas (RV); e, erro conceitual (EC).

Tabela 54
Número de erros, por itens, identificados nas respostas

Categoria	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
IEM	13	0	4	1	9	5	11	11	0	8	2	0
EIAG	0	0	1	0	0	0	5	1	0	4	0	0
RV	2	0	2	1	3	2	0	1	1	1	0	2
EC	0	0	4	1	1	1	0	0	2	2	3	2

Com relação aos dados apresentados na Tabela 54 vale ressaltar que algumas das respostas (em sua minoria) pertencem a duas ou três categorias. Para ilustrar essa classificação, considere a resolução apresentada na Figura 121. Nesse exemplo o grupo G14 respondeu que f'' é positiva nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(4,6]$, nula nos intervalos $(0,1) \cup (1,4)$ e $[6, +\infty)$ e que não existe intervalos em que a derivada segunda é negativa. Essa equipe aparece em três categorias, pois: entre os intervalos usou a conjunção "e" (duas vezes) ao invés de união (IEM); confundiu sinal da derivada segunda com (de)crescimento de f'' (EC); e, apresentou o intervalo $[6, +\infty)$ como sendo onde a derivada segunda é nula, mas para tanto, interpretou a reta $y = 0$, que é assíntota horizontal de f'' para x tendendo a $+\infty$, como se fosse uma função constante (EIAG). Pelos dados da Tabela 54 pode-se observar que os erros mais frequentes ocorreram nos itens "a", "g" e "h" e estão todos na categoria IEM e se deram pela escrita inadequada de um ponto (item "a") e/ou pela falta de uso do símbolo de união entre os conjuntos apresentados (itens "g" e "h"). Destacamos ainda que os itens que solicitavam intervalos em que a função ou alguma das derivadas fossem positivas ou negativas ou crescentes ou decrescentes, não foi considerado como erro a representação do extremo do intervalo aberto ou fechado, pois como a atividade foi aplicada com o intuito de ensinar através da RP, os estudantes ainda não tinham conhecimento dessas convenções.

5.4.2. A plenária

Em ambas as turmas a discussão foi parecida. Porém, a turma de calouros da Química foi mais participativa. Julgamos que um fator que pode contribuir para isso é o menor número de alunos em sala e por ter um grupo de trabalho que interage muito entre si e com a professora. A dinâmica na sala de aula no dia da discussão e formalização do conteúdo foi a seguinte: a professora iniciava a aula relembrando o que fora feito na aula anterior e, para promover a discussão das resoluções apresentadas, para cada item da atividade proposta ela projetava as respostas pré-selecionadas (uma a uma) e, após ler todas, lançava a discussão para a turma analisar se acreditavam que as resoluções estavam corretas, se concordavam ou não com as soluções apresentadas. Após a turma chegar ao consenso das respostas adequadas, por item ou depois de alguns itens, conforme julgava mais conveniente, a professora formalizava, ou seja, trabalhava com as definições e teoremas cujos itens estavam relacionados.

Com essa dinâmica, ao chegarmos no item “k”, a professora teve que “acelerar” um pouco a discussão, pois sentiu que os alunos estavam começando a ficar entediados, pois a atividade foi muito longa. Então, ela parou de ler todas as respostas e começou a analisar conjuntamente qual era a solução. A professora apontava os intervalos em questão e interpretava com a turma o que ocorria com as duas funções que estavam sendo analisadas, por exemplo, crescimento/decrescimento de f' com sinal de f''. Se a professora tivesse adotado essa estratégia desde o início dessa plenária, teria sido muito mais rápido, mas estaria fugindo bastante das recomendações do roteiro de Onuchic e Allevato (2014) para ensinar através da RP. Da forma como a professora conduziu o final dessa aula, identificamos que a concepção da metodologia de RP, nesse momento, foi ensinar sobre RP, pois não estava mais discutindo as diferentes soluções apresentadas pelos grupos, mas estes estavam conjuntamente resolvendo o problema, sendo norteados pelas orientações da professora.

Como já mencionado anteriormente, essa sequência didática envolveu os seguintes assuntos: pontos de máximo/mínimo local e/ou global; pontos críticos; função crescente/decrescente; concavidade; teste da primeira derivada e ponto de inflexão. Ao encerrar a atividade, ainda foi possível aproveitar o mesmo material para motivar o teste da segunda derivada e definir formalmente assíntotas verticais e oblíquas. Para finalizar o processo de formalização foi apresentando um “roteiro” com os itens que devem ser considerados ao proceder a construção do gráfico de uma função a partir da teoria de derivadas. Como exemplo, foi trabalhada a função $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$.

5.4.3. Comentários

Apesar dessa atividade ter sido de cunho matemático, entendemos que essa sequência didática realmente foi um problema para os alunos, pois em princípio não sabiam responder o que lhes fora proposto (Allevato & Onuchic, 2011; Vale & Pimentel, 2004), mas se sentiram desafiados a resolverem (Allevato & Onuchic, 2011; Dante, 2009), e, ao passo que conseguiam fazer as conjecturas existentes, era visível a empolgação com que estavam fazendo as suas descobertas. Cremos que essa sequência didática atingiu seu objetivo, que era fazer com que o estudante intuísse algumas definições e resultados de teoremas relacionados à análise de variação de funções e pôde contribuir positivamente tanto do ponto de vista de ensino quando de aprendizagem do conteúdo em questão, pois, apesar de nem sempre usarem os termos matemáticos adequados no momento de explicar seu raciocínio, ao menos 12 das 16[113] equipes conseguiram fazer as conjecturas almejadas por essa investigadora nos itens "f", "k" e "l". Esse número corresponde a 75% das respostas corretas. Certamente essa sequência didática poderá ser utilizada/adaptada por outros professores de CDI para usarem em suas aulas. Além disso, poderá ser ampliada, incluindo mais alguns itens para que o discente possa chegar às conclusões encontradas no teste da segunda derivada. Esta ampliação foi feita conjuntamente com ambas as turmas no momento da formalização do conteúdo.

5.5. Tarefa 19 – Otimização

A atividade foi proposta no dia 02 de junho de 2017. Apesar dessa atividade ter sido proposta quando faltavam 40 minutos para encerrar a aula, nesse dia os grupos conseguiram resolvê-lo, e ainda, foi feita a socialização das respostas. Para iniciar a Tarefa 19, foram omitidas as etapas 2 e 3 do roteiro de Allevato e Onuchic (2014) que dizem respeito a leitura individual e conjunta, respectivamente, pois como a professora já estava usando o datashow na aula do dia, projetou o problema da caixa (Figura 126), a fim de discutir com a turma o conteúdo de otimização em situações aplicadas, como sendo uma sequência da aula daquele dia. O problema proposto tratava de encontrar a medida dos quadrados que devem ser retirados dos cantos de uma folha retangular a fim de que a caixa construída tivesse o volume máximo. Problemas similares a esse encontram-se em diversos livros de *Cálculo*, como Anton, Bivens e

[113] Considerando somente os grupos que fizeram todos os itens. Caso contrário, seriam 12 de 17 equipes.

Davis (2014), Stewart (2013) e Flemming e Gonçalves (2006). Ao propor essa atividade o objetivo da professora era de que os estudantes pudessem entender que apesar de ser possível construir caixas com diferentes volumes com uma folha retangular, existem dimensões que geram a caixa de maior volume.

Apresentado o problema, a professora solicitou que fossem formados seis grupos de trabalho na turma de Matemática e quatro na turma da Química, com o intuito de que com um número menor de equipes todas tivessem tempo de explanar aos colegas as estratégias usadas/estabelecidas. A professora estipulou um tempo de 20 minutos para a resolução do problema a fim de que fosse possível apresentarem as estratégias de resolução que foram usadas no mesmo dia, visto que não daria mais tempo de ser feita a formalização naquela aula. A professora entregou para os grupos as folhas com o problema a ser resolvido e folhas extras de rascunho (tamanho A4), que poderiam ser utilizadas para simular a confecção de caixas que pudessem vir a auxiliar na resolução do problema. O desenvolvimento de toda esta atividade foi áudio-gravado via celular colocado no bolso do jaleco da professora. Dessa forma, todos os envolvidos participaram normalmente, pois não se sentiram retraídos por perceberem que as conversas estavam sendo gravadas. Após essa experiência, a professora pesquisadora acha que deveria ter adotado esse procedimento antes, pois facilitou inclusive para ela tirar fotos dos alunos trabalhando nos grupos.

PROBLEMA (Adaptado de ANTON, 2014)

Uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um pedaço retangular de papelão cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando-se para cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa poderá ter.

Registre/descreva nesta folha o raciocínio utilizado.

Figura 126 - Problema da caixa.
Fonte: Adaptado de Anton, Bivens e Davis, 2014.

Durante os atendimentos prestados pela professora, poucas equipes tiveram dificuldades em interpretar como a caixa deveria ser confeccionada. Um grupo achou que já havia realizado essa atividade no início do semestre, pois para motivar o estudo dos polinômios, a professora havia proposto uma atividade que envolvia uma caixa com tampa que devia ser confeccionada com um pedaço retangular de papel e retirando-se alguns quadrados de pontos específicos (Tarefa 6 do Anexo 12). Naquela atividade, a professora não deu a oportunidade dos estudantes confeccionarem suas próprias caixas, como nessa (Figura 127 e Figura 128). Então, realmente, já havíamos trabalhado um problema envolvendo a construção de uma caixa, mas em outro contexto.

Figura 127 - Equipe G2 resolvendo a Tarefa 18.
Fonte: Acervo pessoal.

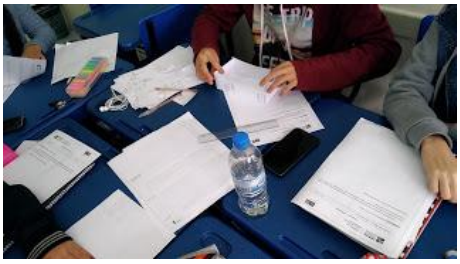


Figura 128 - Equipe G7 resolvendo a Tarefa 18.
Fonte: Acervo pessoal.

No momento da resolução do problema uma equipe estava tendo dificuldades porque estava construindo uma caixa no formato de um paralelepípedo retangular, porém no momento de definir a função volume estava considerando que a caixa tinha base quadrada. Diversos atendimentos não eram dúvidas, mas chamavam a professora com a esperança de que a mesma confirmasse se os procedimentos que estavam sendo adotados pelo grupo eram corretos. Então, para não responder certo/errado, solicitava para que explicassem o raciocínio utilizado por eles e fazia questionamentos caso não tivessem ficado claros, para a professora, os argumentos utilizados.

Conforme o combinado, após 20 minutos reservados para a discussão nos grupos e resolução do problema, foi iniciado o momento de socialização das respostas. Na sequência, apresentamos resumidamente a explanação oral da(s) estratégia(s) de resolução estabelecidas por cada uma das equipes. A ordem apresentada nesse documento corresponde à ordem de apresentação das equipes. Por convenção, Gn significa grupo n, sendo que n de 1 a 6 correspondem aos grupos da MAT e, n de 7 a 10, da QUI.

5.5.1. Estratégias de solução

Os integrantes de G1, intuitivamente, achavam que a medida do lado do quadrado a ser retirado deveria ser 1/3 das dimensões da folha. Então, tomaram uma folha A4, fizeram esta divisão tanto na largura quanto no comprimento da folha e assim recortaram quatro retângulos dos cantos. Ao dobrarem as abas restantes, perceberam que não poderiam ser os retângulos retirados, porque “sobrou face” da caixa visto que não retiraram quadrados, como solicitado. Então, mantiveram a hipótese do 1/3 da medida do lado, mas substituíram por 1/3 da medida do menor lado da folha dada. Como ilustrado na Figura 129, depois encontraram a função que descreve o volume de uma caixa a ser construída com uma folha retangular de dimensões a e b.

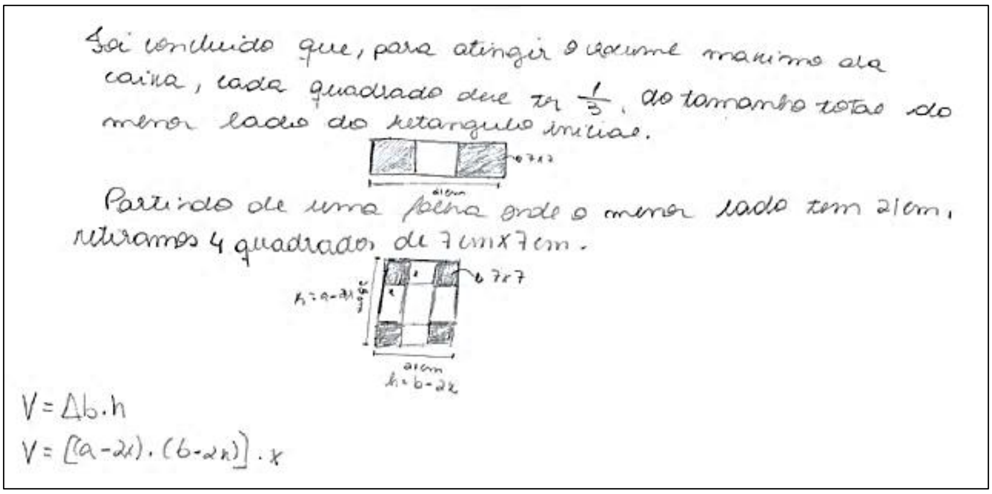


Figura 129 - Estratégia do grupo G1 da Tarefa 19.
Fonte: Dados da pesquisa.

Os integrantes de G2 construíram algumas caixas com as folhas de rascunho fornecidas. Usaram metade das folhas de A4 para construir as caixas. Depois que entenderam o processo de construção, partiram para a parte analítica. Assumiram que as dimensões da folha A4 eram 300 x 200 mm. Para encontrarem a área do fundo da caixa, usaram uma forma bem diferente do tradicional. G2 considerou h como sendo o lado do quadrado a ser retirado que corresponde a altura da caixa, de a e b as medidas do comprimento e largura da folha, respectivamente. Então, a área da base é igual a área total da folha A4 menos 4 vezes a área de um dos quadrados a serem retirados menos $2ah$ e menos $2bh$. Essas duas últimas expressões correspondem às áreas das faces laterais. Depois disso, escreveram as dimensões da caixa em termos de h, encontraram a função volume e os pontos críticos (Figura 130). Faltou concluir qual deveria ser a medida h. Provavelmente o grupo teria finalizado utilizando o teste da primeira derivada, se tivessem tido mais tempo, pois pela resolução apresentada na Figura 130, percebe-se que G2 estava fazendo o estudo do sinal, visto que esboçou uma parábola e devia estar relacionada com o gráfico da primeira derivada.

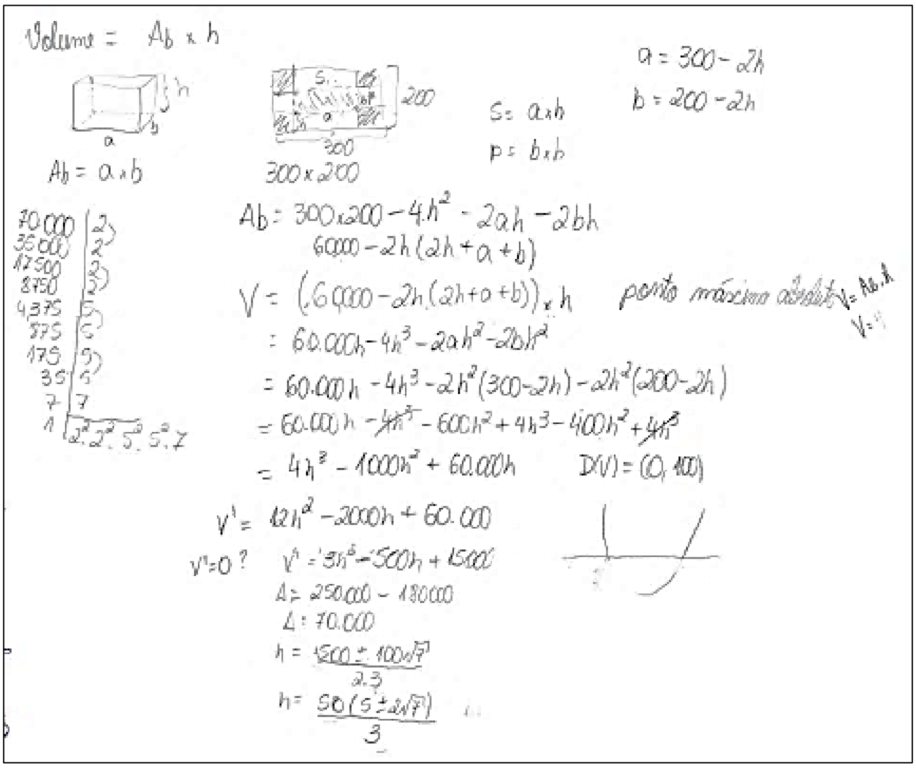


Figura 130 - Estratégia do grupo G2 da Tarefa 19.
Fonte: Dados da pesquisa.

A equipe G3 apresentou duas estratégias de resolução. A primeira estratégia (Figura 131) consistiu em construir algumas caixas com as folhas A4 fornecidas, montar a função volume de forma genérica, em seguida, particularizar as dimensões da folha, escolher vários valores para medida do lado do quadrado a ser retirado, mas o grupo não deixou evidente qual foi a solução encontrada. No momento da plenária, ficou claro que não sabiam como obter a conclusão, aí entra a segunda estratégia utilizada para responder.

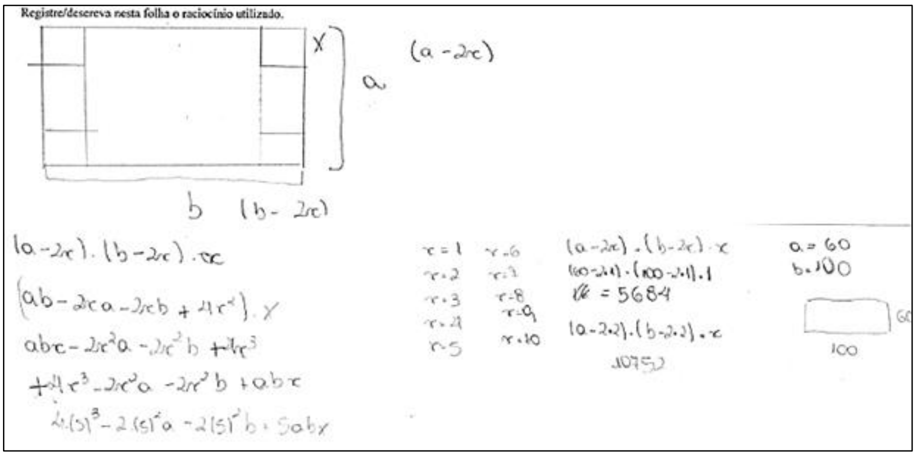


Figura 131 - Estratégia 1 do grupo G3 da Tarefa 19.
Fonte: Dados da pesquisa.

A segunda estratégia foi desenvolvida por um dos integrantes que estava com o grupo, mas que costuma trabalhar de forma independente. E, quando os colegas precisavam, ele auxiliava. Esse comportamento possivelmente era porque ele já fora aprovado na disciplina de CDI em outra Instituição de Ensino Superior e não conseguiu validar a disciplina por normas internas da Universidade. Então, esse aluno do grupo G3 já conhecia o conteúdo e deixava os colegas terem a oportunidade de desenvolverem suas estratégias sem interferir. Após estar com sua solução encaminhada/concluída auxiliava os colegas no que fosse necessário. Para esse aluno, a maioria dos problemas propostos ao longo de todo o semestre letivo não passaram de exercícios, pois ele já conhecia a forma de se obter a solução via *Cálculo*. Afirmação amparada pelo contato pessoal que a professora teve com o aluno durante esse tempo e nas soluções apresentadas por ele. Nesse problema, para obter a solução, atribuiu dimensões genéricas para a folha retangular, encontrou a função volume, obteve os pontos críticos. Neste momento, ele sabia que precisava aplicar o teste da segunda derivada, mas questionou a professora se era isso mesmo que devia fazer, por causa do “tamanho” dos pontos críticos encontrados, visto que estava considerando todas as dimensões genéricas. A professora confirmou que poderia usar, já que ele sabia o que devia fazer, mas ela não imaginava que o mesmo faria todo o desenvolvimento à mão (Figura 132).

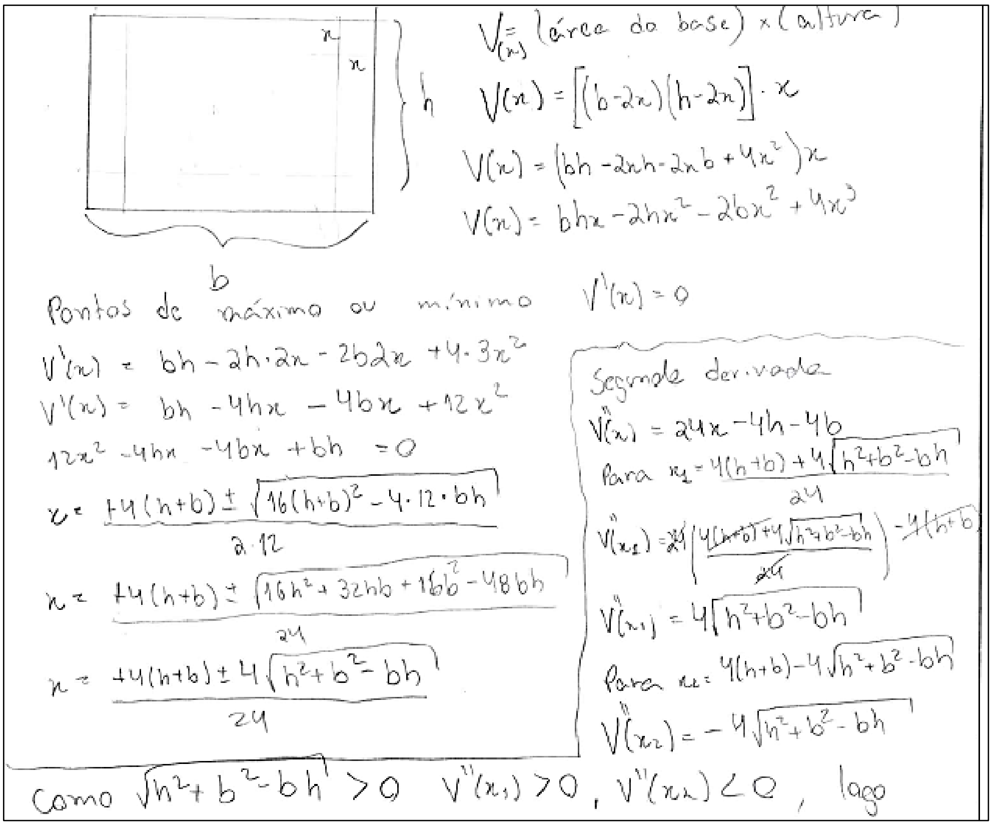


Figura 132 - Estratégia 2 do grupo G3 da Tarefa 19.
Fonte: Dados da pesquisa.

A equipe G4 construiu uma única caixa para entender como seriam tiradas as dimensões dela. Encontraram a função genérica para o volume e a função derivada, mas não souberam como continuar. Escolheram dimensões para a folha e fizeram cálculos do volume. Iniciaram assumindo um valor pequeno para x e foram aumentando (Figura 133). Mas, no momento da socialização das estratégias usadas disseram que assumiram as dimensões da folha A4. Bem possível que os cálculos com os registros desta consideração tenham ficado com outro aluno da equipe que não entregou sua própria produção. Pela resolução apresentada na Figura 133, não é possível compreender a conclusão obtida por G4, pois fizeram inicialmente tudo genérico. Em seguida, escolheram valores de a e b e assumiram valores para x. Porém não apresentam a conclusão.

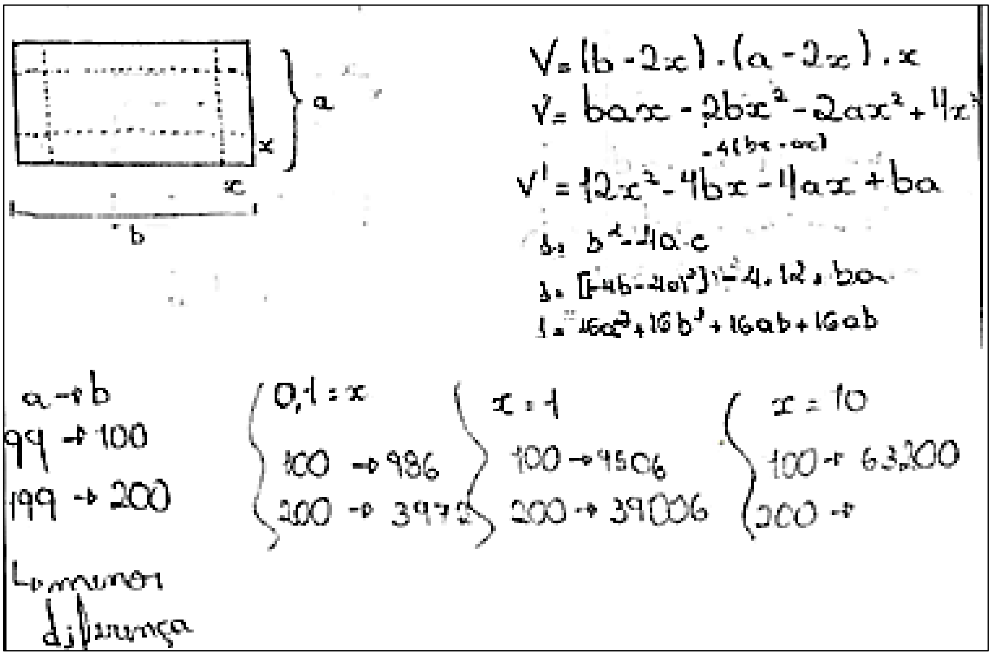


Figura 133 - Estratégia do grupo G4 da Tarefa 19.
Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 134, percebe-se que G5 atribuiu dimensões para a folha retangular (100 x 50), chamaram de x, y e m as dimensões da caixa. Escolhendo m, que era o lado do quadrado, encontraram as medidas de x e y e calcularam os volumes. Para os valores de m escolhidos de forma aleatória, concluíram que o maior volume seria obtido com $m = 10$ unidades de comprimento. Esse resultado confere com a solução obtida por teoria de derivadas considerando essas dimensões. Ainda, pela resolução apresentada, pode-se observar que apesar de não haver evidencias de que tenham utilizado, na organização da solução essa equipe usou a notação de taxa relacionada no momento em que escreveram $\frac{dV}{dm}\Big|_{min}^{máx}$ e considerou erroneamente que $\frac{dV}{dm} = dx.dy.dm$.

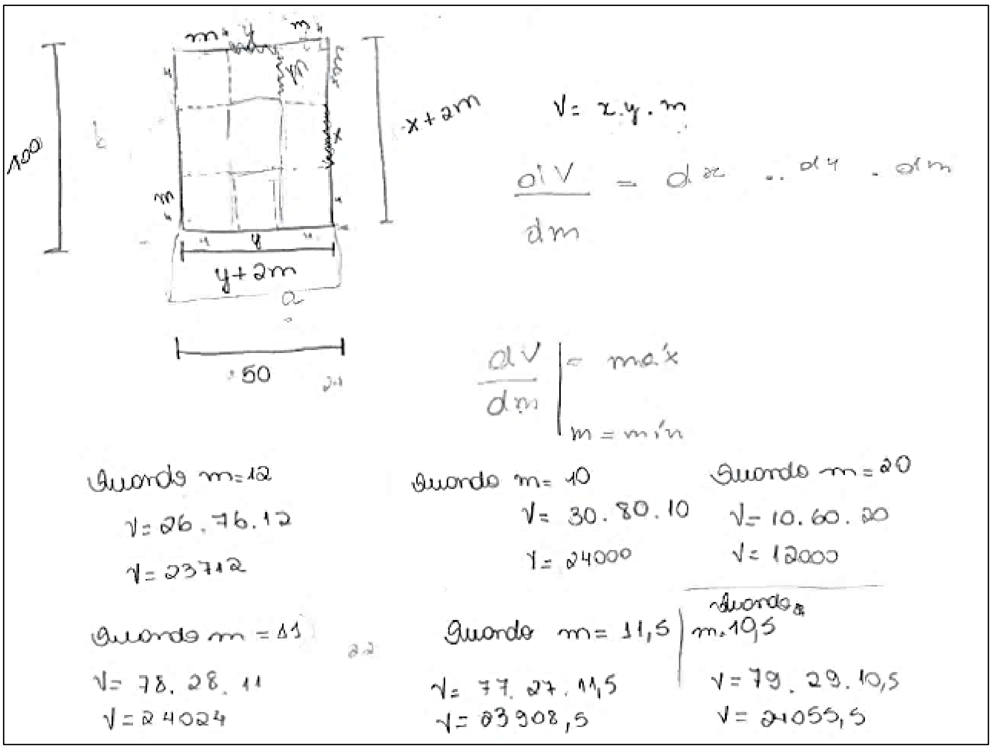
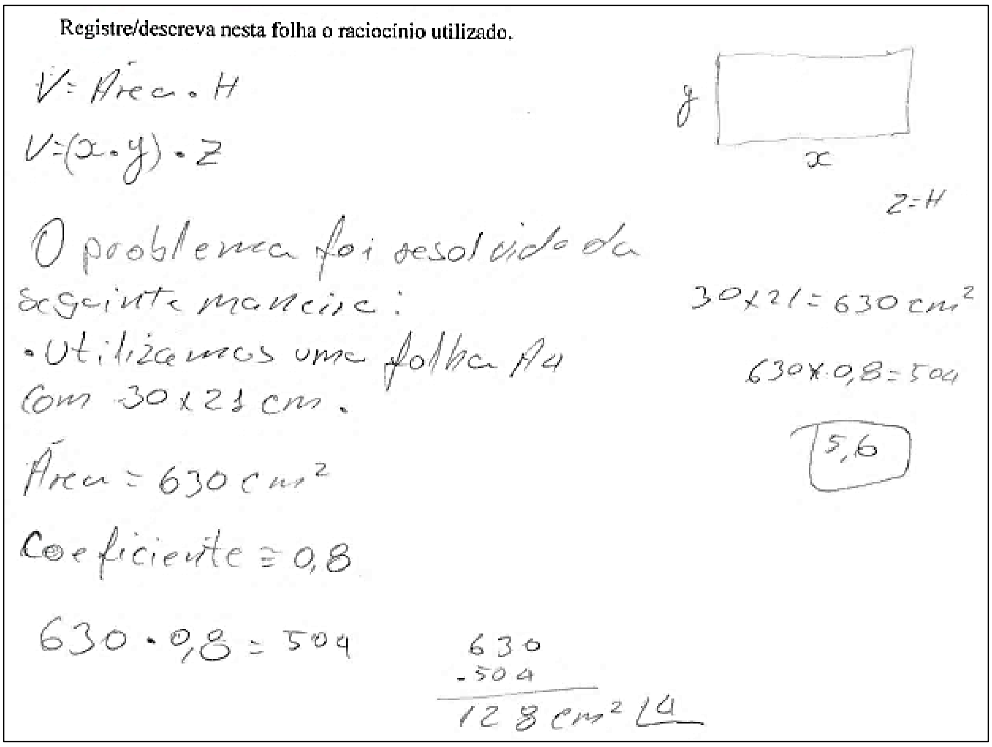


Figura 134 - Estratégia do grupo G5 da Tarefa 19.
Fonte: Dados da pesquisa.

A equipe G6 entendeu rapidamente como se dava a construção da caixa e fizeram a simulação de algumas caixas com diferentes dimensões. Ou seja, parecia que estavam resolvendo de forma parecida com o que já fora relatado até o momento. Porém, pela solução apresentada na Figura 135, nota-se que a estratégia de resolução foi bem diferente das demais equipes. Na plenária, o líder de G6 explicou que fizeram uma proporção entre a área da folha A4 utilizada e a área dos quadrados a serem retirados. Com isso encontraram um coeficiente de 0,8. Com esse, determinaram então a área do fundo da caixa para depois calcularem o volume. Como a professora não tinha entendido o raciocínio de como e porque fizeram isso, o líder explicou que com base nos valores do volume obtido com as caixas que construíram, empiricamente, descobriram que o volume máximo era obtido quando a área do fundo da caixa tinha coeficiente 0,8, ou seja, correspondia a 80% da área total da folha considerada. Dessa forma, para a folha A4, a área total seria $630cm^2$. Multiplicando pelo coeficiente de 0,8 concluía-se que o volume do fundo da caixa deveria ser $504cm^2$. Fazendo a diferença desses valores obtinha-se $128cm^2$ como sendo a soma das áreas dos quatro quadradinhos. Observa-se um erro de conta. O correto 126 cm^2. Este resultado era dividido por 4 para encontrar a área de cada quadradinho e, por fim, extraindo a raiz quadrado chegava-se em 5,6 cm por medida do lado do quadrado da caixa de volume máximo.


Registre/descreva nesta folha o raciocínio utilizado.

$V = Área \cdot H$

$V = (x \cdot y) \cdot z$

y x

$z = H$

O problema foi resolvido da seguinte maneira:

• Utilizamos uma folha A4 com 30 x 21 cm.

$30 \times 21 = 630\ cm^2$

$630 \times 0,8 = 504$

$\boxed{5,6}$

Área = 630 cm²

Coeficiente ≅ 0,8

$630 \cdot 0,8 = 504$

$630 - 504 = 128\ cm^2$ 14

Figura 135 - Estratégia do grupo G6 da Tarefa 19.
Fonte: Dados da pesquisa.

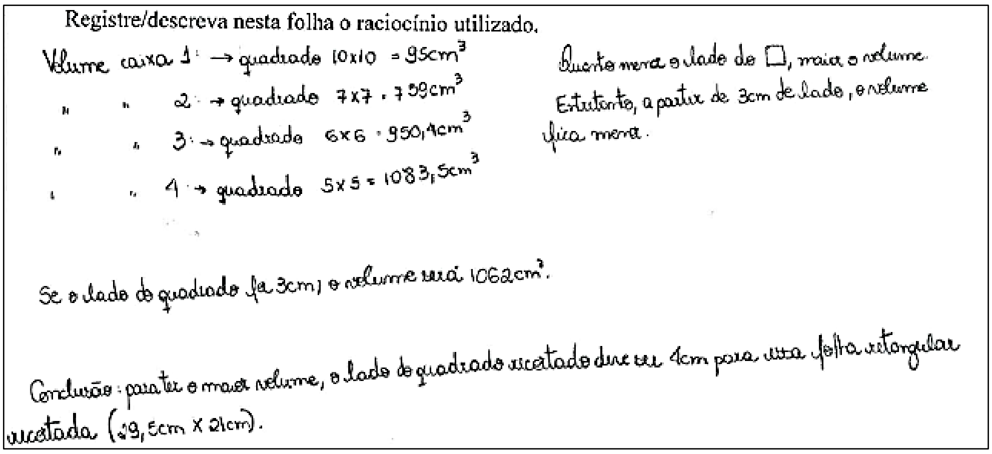
Para completar a explicação, quando a professora disse que não conseguia entender porque buscaram inicialmente o coeficiente 0,8, a argumentação do líder do grupo G6 de como poderia explicar volume para quem não entende de derivadas foi genial e, parte dela, pode ser vista no Quadro 4.

É, vamos supor (..), é, imagine que alguém pegue uma maçã e pergunte pra você rapidamente, qual é o volume dessa maçã? [Imagine] Que você não entende nada de derivada. Você pega um recipiente cilíndrico com água, você vê o volume inicial [a], coloca a maçã ali dentro, o volume final [b], $a - b$.

Quadro 4 - Transcrição da fala do líder do grupo G6 durante a plenária da Tarefa 19.
Fonte: Dados da pesquisa.

Com essa argumentação a professora pôde compreender de onde surgiu a ideia de fazerem uma proporção entre áreas para determinar o coeficiente de 0,8. Achamos muito criativa a forma com que esse aluno conseguiu justificar como calcular o volume de uma maçã. A turma toda gostou muito dessa explicação prática de proporção dada por esse aluno. Destacamos ainda que esse aluno não tem facilidade para aprender, mas as interpretações dele fazendo conexões entre os conteúdos estudados e o mundo real são sempre muito interessantes. Mas, muitas vezes essas interpretações apenas a professora toma conhecimento porque são feitas nos horários de atendimento extraclasse.

O grupo G7 era um grupo com um bom entrosamento para trabalhos em conjunto. Eles costumavam estabelecer estratégias e cada um fazia a sua parte. Distribuíram entre si as folhas de rascunho que a professora forneceu e combinaram que cada um faria uma caixa retirando um quadrado com lado de diferente medida. Além disso, eram detalhistas. Não apenas recortaram os quadrados como também colaram com fita larga as faces laterais da caixa para finalizar a construção. Calcularam os respectivos volumes. Inicialmente a conclusão foi de que quanto menor o lado do quadrado, maior o volume (Figura 136). Enquanto um deles explicava como resolveram o problema, a professora perguntou se tinham testado valores menores do que 4. No mesmo instante em que o questionamento fora feito, dois dos membros estavam fazendo as contas e acabaram concluindo que o maior volume seria obtido ao retirar um quadrado de lado 4 cm. De maneira empírica chegaram à conclusão correta.


Registre/descreva nesta folha o raciocínio utilizado.

Volume caixa 1: → quadrado 10x10 = 95cm³
" " 2: → quadrado 7x7 = 759cm³
" " 3: → quadrado 6x6 = 950,4cm³
" " 4 → quadrado 5x5 = 1083,5cm³

Quanto menor o lado do □, maior o volume. Entretanto, a partir de 3cm de lado, o volume fica menor.

Se o lado do quadrado for 3cm, o volume será 1062cm³.

Conclusão: para ter o maior volume, o lado do quadrado recortado deve ser 4cm para uma folha retangular recortada (29,5cm x 21cm).

Figura 136 - Estratégia do grupo G7 da Tarefa 19.
Fonte: Dados de pesquisa.

A equipe G8 assumiu que a folha tinha dimensões de $6x3$ cm para entender como construir a caixa e calcularam o volume considerando uma altura escolhida aleatoriamente (Figura 137). No momento de explicarem a solução estavam finalizando a construção da caixa. Para que conseguissem colar as faces laterais fizeram abas nas laterais (verticais) do quadrado. Mas, ao calcular o volume desconsideraram a existência "dessas abas", ou seja, elas foram meramente ilustrativas. E ainda, no momento em que a líder do grupo fez a colocação apresentada no Quadro 5, pelas argumentações apresentadas para responder os questionamentos da professora que estava tentando entender o raciocínio usado, ela identificou que achavam que qualquer caixa construída com uma folha de mesma dimensão teria o mesmo volume.

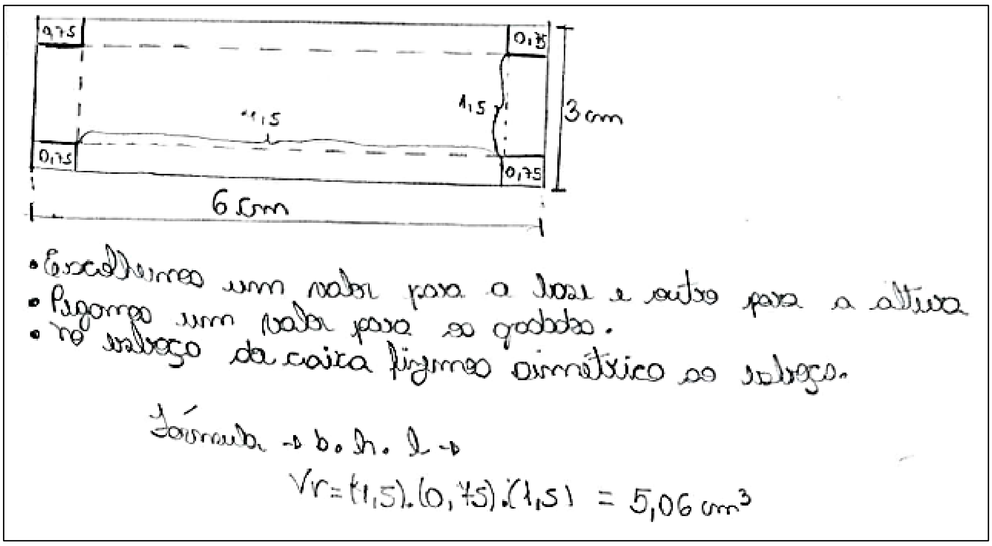


Figura 137 - Estratégia do grupo G8 da Tarefa 19.
Fonte: Dados da pesquisa.

Se eu colocar água na caixa e o lado for menor, ela vai ter mais espaço de base, então vai render uma certa quantidade de água. Mas se a caixa for mais alta, com a mesma quantidade de água, ela ainda vai caber a mesma quantidade de água, porque mesmo que a base diminua, ela aumentou em altura.

Quadro 5 - Transcrição da fala do líder do grupo G8 na plenária da Tarefa 19.
Fonte: Dados da pesquisa.

Para mostrar que isso não era verdade, sem falar diretamente que estavam errados, a professora emprestou as caixas construídas pela equipe G7 para auxiliá-los. Quando o grupo estava com as caixas em mãos, a professora pediu para que imaginassem que as caixas fossem recipientes para armazenamento de alimentos, como por exemplo, de arroz, e aí os questionou se a quantidade de arroz que caberia em cada caixa seria a mesma. Responderam que não, mas não estavam acreditando que de fato as caixas foram construídas a partir de uma folha com as mesmas dimensões, porque uma delas era bem "fininha", base estreita e alta (Figura 138). Então a professora sobrepôs os quadrados de lado 10 cm recortados, pela equipe G7, sobre uma folha de A4 para provar que realmente aquela caixa “fininha” a partir de uma folha dessas. Para encerrar a discussão que surgiu, a líder disse grupo disse que ainda iria pensar mais sobre o assunto. Apesar de toda a discussão, a professora ficou contente de ver que essa aluna, que já havia desistido de passar na disciplina, continuava participando das aulas e estava se esforçando para acompanha-las.

Figura 138 - G7 resolvendo a Tarefa 19.
Fonte: Acervo pessoal.

A equipe G9 simulou a construção de uma caixa e, depois disso, partiu para a formalização. Identificaram corretamente as dimensões da caixa genérica e depois assumiram as medidas da folha A4 (Figura 139). Para chegarem nessa formalização pediram ajuda para identificar as dimensões da caixa. Ao analisar o protocolo da equipe, percebeu-se que fizeram a proporção entre: volume e área; volume e altura; altura e volume. Todas sem justificativas. Obtiveram que a soma das medidas dos lados dos quadrados do lado maior da folha deveria ser a diferença entre a maior e menor dimensão da folha. Dessa forma, o lado do quadrado mediria 4,35 cm. Este valor corresponde a 7% acima da solução correta do problema. Ou seja, por meios totalmente empíricos, podemos dizer até intuitivos, obtiveram uma resposta muito próximo da correta.

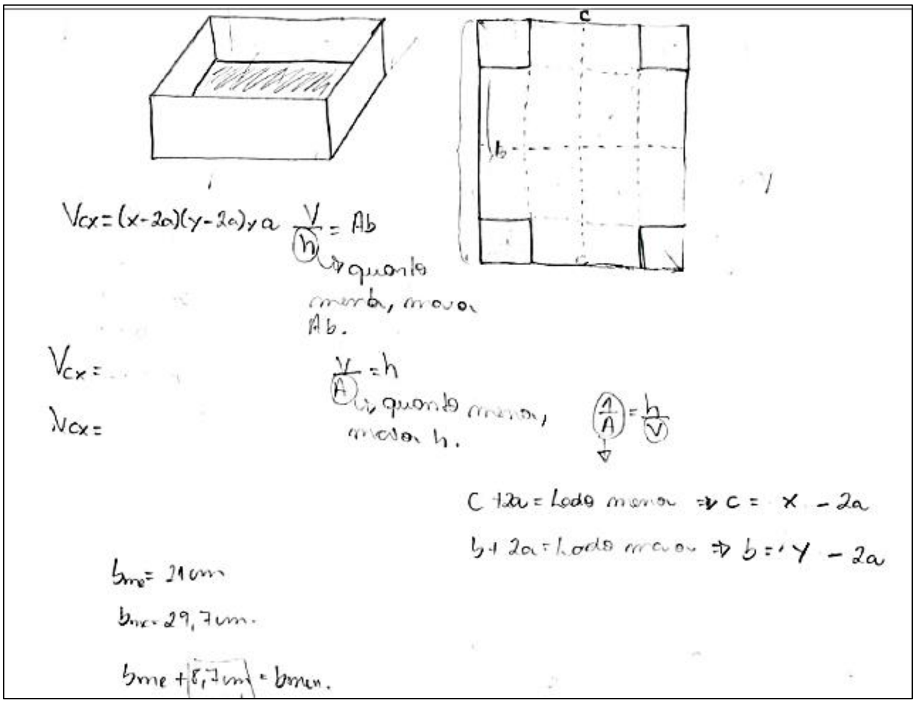


Figura 139 - Estratégia do grupo G9 da Tarefa 19.
Fonte: Dados da pesquisa.

A equipe G10, simulou a construção de uma caixa, a seguir, considerou que as dimensões da folha eram 11×30 cm e, numericamente, testaram vários possíveis valores para o lado do quadrado a ser retirado, chegando à conclusão de que essa medida deveria ser 2,5 cm (Figura 140). Por teoria de derivadas, esse resultado se confirma.

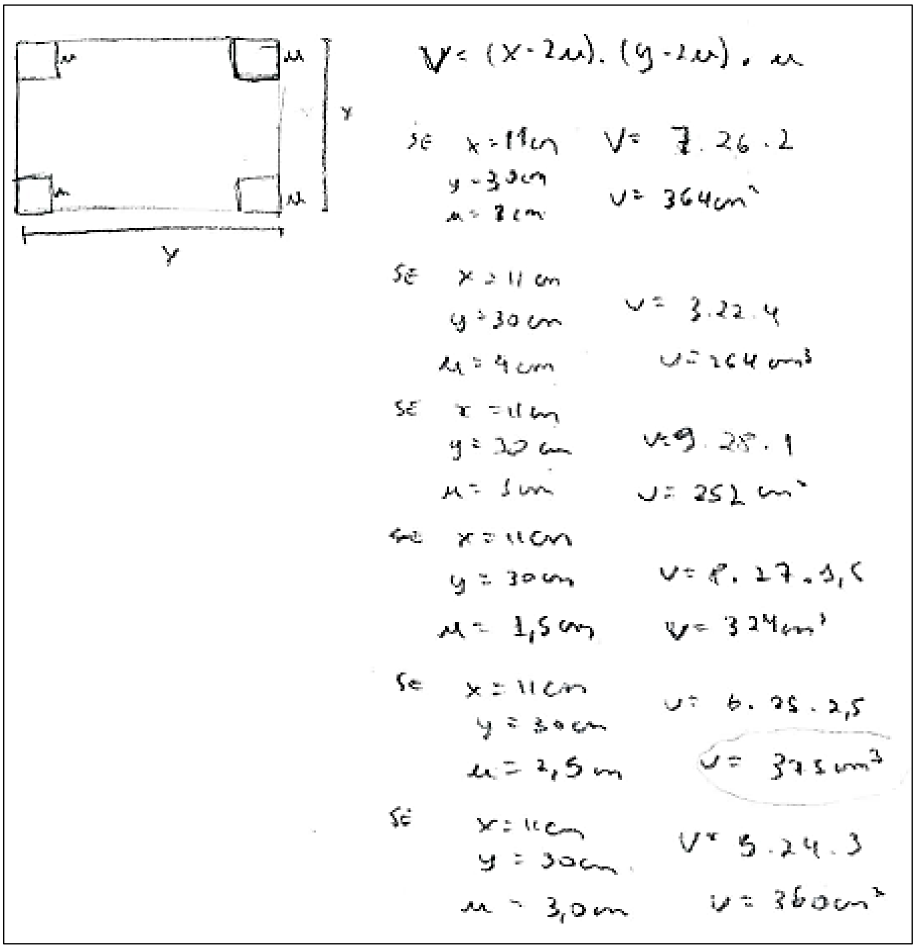


Figura 140 - Estratégia do grupo G10 da Tarefa 19.
Fonte: Dados da pesquisa.

5.5.2. Formalização

Na aula do dia 05 de junho foi feita a formalização do conteúdo. Para iniciar, em ambas as turmas, brevemente foram recapituladas as estratégias utilizadas pelas equipes para resolverem o problema. Depois desse momento, a professora começou trabalhando com o caso particular. Após ter encontrado a função que descreve o volume, a professora questionou-os a respeito do domínio dessa função. A primeira resposta que deram foi o conjunto dos números reais, porque era um polinômio. Quando a professora lembrou que precisávamos considerar o contexto do problema, apresentam a resposta $x > 0$. Depois disso, ambas as turmas foram questionadas se existia alguma restrição sobre a medida do lado do quadrado a ser retirado. No Quadro 6, segue o diálogo na turma da Química.

Quadro 6 - Transcrição do diálogo com a aluna líder do grupo G7 na plenária da Tarefa 19

P: Lembrem que chamamos de x *o lado do quadrado a ser recortado. Então, na apresentação das estratégias que usaram para resolver o problema, ninguém mencionou se existia alguma restrição sobre esta medida, existe?*
A: Primeiro eu iria cortar um quadrado de lado 12, mas vimos que não dava.
P: Por quê?
A: Porque a medida passava da metade do menor lado da folha.
P: Exatamente. Por isso, ao analisar o domínio não basta resolver a inequação $V \geq 0$ *é necessário interpretar para que valores de* x *é possível construir essa caixa.*

Fonte: Transcrição de áudio gravado da aula.

Na turma da Matemática, ninguém se manifestou espontaneamente para responder a colocação, mas quando "induzidos" pela professora, responderam corretamente. Nessa turma a aula foi no primeiro horário, às 7h30 da manhã. Nesse dia e horário geralmente a turma é sempre quieta e pouco participativa. Muitos estudantes dessa turma já justificaram que não conseguem estar acordados/participativos na aula por causa do horário. Esse problema, que a professora não tem como solucionar, acaba afetando o rendimento dos alunos.

Depois de termos definido a função volume e o domínio, discutimos como iríamos encontrar a dimensão x para que a caixa tivesse volume máximo. Nesse momento, a professora discutiu a importância de considerar o intervalo fechado como domínio, sempre que fosse possível, pois, dessa forma, com uma função contínua no intervalo fechado, temos o teorema de Weierstrass para garantir a existência de pontos extremos absolutos. Surgiu dúvida nas duas turmas do que era ponto extremo. Recapitulamos a definição. Creio que um motivo que pode gerar dificuldade no entendimento do que é um ponto extremo poder estar associado ao facto de uma mesma palavra assumir significados diferentes, pois, nesse caso, ora usa-se ponto extremo para se referir a máximo/mínimo ora para falar do extremo do intervalo. Para provar que era ponto de máximo, foi usado o teste da segunda derivada, mas também foi enfatizado que poderiam utilizar o teste da primeira derivada.

Para que os estudantes lembrassem do resultado do teste da segunda derivada, que já havia sido trabalhado, foi esboçada, no quadro, uma curva semelhante a uma parábola com a concavidade para baixo e outra para cima. A seguir, foi perguntado a respeito da concavidade se era para baixo ou para cima. Com a resposta dos alunos, questionava sobre o sinal de f''. Como o ponto crítico é um ponto em que $f'(c) = 0$ (só existia esse tipo de ponto crítico no problema por se tratar de uma função polinomial), concluímos que nesse ponto $f''(c) > 0$, se a concavidade era voltada para cima (ou $f''(c)$< 0, se a concavidade é voltada para baixo). Dessa forma, teria mais sentido pensar porque a segunda derivada negativa implica ponto de máximo e a segunda derivada positiva implica um ponto de mínimo.

Após a conclusão analítica e gráfica da medida do lado do quadrado a ser retirado que geraria a caixa de maior volume, a professora puxou a discussão de que essa seria uma atividade que poderia ser utilizada no ensino pré-universitário para abordar a otimização, que é assunto de CDI. Provavelmente, esses alunos resolveriam simulando várias caixas e calculando seus respectivos volumes, que foi a estratégia adotada por algumas equipes. A professora complementou dizendo que nesse nível de ensino julgava mais plausível propor o problema de encontrar a caixa de volume máximo que pode ser construída com uma folha de dimensões fixas. Outro ponto levantado na discussão foi que, para esse problema, seria aconselhável utilizar algum software gráfico para estimar mais facilmente qual seria o valor aproximado de x que gera a caixa de maior volume, pois essa função é um polinômio de terceiro grau, e que não há dispositivo prático para encontrar qualquer raiz, como acontece no caso das funções quadráticas.

Em seguida, foi resolvido o caso geral. Para facilitar a explicação foi usada uma apresentação no *PowerPoint* a fim de poupar tempo em escrita no quadro. Ao encerrar essa discussão, a professora propôs mais quatro problemas relacionados a esse assunto que referiam-se a: encontrar as dimensões do cilindro de maior volume inscrito num cone; decidir se era vantagem uma empresa aumentar a produção de ácido sulfúrico; e, determinar as dimensões do menor terreno em que pudesse ser construído um edifício com $2.000\ m^2$ de piso.

Pelo pouco tempo que tivemos para realizar essa atividade, julgamos que as discussões oriundas das diferentes estratégias de resolução do problema foram muito produtivas. Em ambas as turmas foi notável a empolgação dos alunos resolvendo o problema proposto, muitas vezes, por meio da intuição e por caminhos muitos diferentes dos tradicionais que professores de *Cálculo* poderiam imaginar.

5.5.3. Análise das estratégias e categoria dos erros

A Tabela 55 sintetiza as estratégias usadas pelas equipes para resolver o problema. Ao analisar as informações dessa tabela é possível perceber que as estratégias de resolução foram bem diversificadas, pois apesar de ter somente 10 grupos de trabalho surgiram 7 estratégias. Destacamos que somente uma equipe apresentou a solução do problema genérico como foi proposto inicialmente (G3). As demais, todas particularizam as dimensões da folha em algum momento da resolução do problema, ou seja, fizeram uma simplificação do problema gerador. Pode ser que se tivesse sido dado mais tempo para a realização desta tarefa, mais equipes, após terem encontrado a solução do problema simplificado, retomassem o problema inicialmente proposto. Cinco equipes após interpretarem como a caixa era confeccionada, atribuíram dimensões genéricas e apresentaram a função volume genérica. Destacamos que uma das equipes (G3) apresentou duas estratégias de solução, ambas apresentaram a função volume genérica, por isso contamos cinco ao invés de seis equipes nessa categoria. Em seguida, todas as equipes atribuíram dimensões para a folha retangular. Destas, duas equipes (G4 e G10) simularam caixas e deixaram clara qual deveria ser a medida do lado do quadrado para que o volume da caixa fosse o maior possível, uma equipe (G2) adotou o mesmo procedimento, esta usou teoria de derivadas, porém não finalizou apresentando de forma explicitamente a resposta e outras duas equipes (G1 e G9) utilizaram alguma proporção intuída para chegar às suas conclusões. Cinco equipes, após a interpretação de como a caixa era confeccionada, particularizam as dimensões da folha para fazerem suas simulações. Duas dessas equipes (G5 e G7), por tentativas, encontraram a dimensão correta que maximiza o volume. Uma (G6) usou uma proporção entre a área total e a área da base da caixa e obteve um valor superior ao correto. E, uma equipe (G9) faz apenas uma simulação de caixa e julgava que aquela caixa era a de maior volume que poderia ser construída com aquela folha. Ou seja, não haviam entendido que com uma mesma folha de papelão poderiam ser confeccionadas caixas com diferentes volumes.

Tabela 55
Estratégias[114] usadas na resolução do problema da Tarefa 19

		GM	GQ	TG
Apresentou a função volume genérica	Particularizou as dimensões da folha e fez algumas simulações, mas não ficou clara a conclusão.	1	0	7
	Particularizou as dimensões da folha e fez algumas simulações e deixou clara a conclusão.	1	1	
	Particularizou as dimensões da folha, empiricamente descobriram alguma proporção que resultou numa medida do lado do quadrado superior ao real.	1	1	
	Particularizou as dimensões da folha e usou a teoria de derivadas, mas sem ficar clara a solução.	1	0	
	Usou teoria de derivadas para obter solução genérica correta.	1	0	

[114] A Tabela 55 apresenta 11 estratégias porque a equipe G3 apresentou duas.

Não apresentou a função volume genérica	Particularizou as dimensões da folha, fez algumas simulações e empiricamente obteve solução correta.	1	0	4
	Usou proporção entre áreas, para um caso particular de folha e concluiu um valor maior que o correto.	1	1	
	Particularizou as dimensões da folha e simulou uma única caixa.	0	1	

Com relação às categorias de erros, nessa Tarefa 19 foram identificadas 3 categorias: IEM, EC e RV. A primeira solução da equipe G3 foi classificada na categoria IEM, porque ao trabalhar com a função volume apresentou à expressão analítica, mas não atribuiu nenhum nome à função (Figura 130). As equipes G5 e G8 cometeram erros conceituais. A primeira equipe por pensar na taxa de variação do volume com relação a medida do lado a ser recortado do quadrado (Figura 133), pois o problema não abordava esse assunto. A equipe escreveu $\left.\frac{dV}{dm}\right|_{min}^{max}$. Entendemos que por apresentar valor mínimo e máximo estavam querendo calcular uma taxa média de variação, mas a notação está inadequada (IEM), pois usou notação de diferencial ao invés de notação de variação. Outro erro conceitual cometido por essa mesma equipe foi por considerar $\frac{dV}{dm} = dx.dy.dm$. Essa igualdade não é verdadeira. A equipe G8 apresentou erro conceitual, pois pela explicação da equipe sobre a estratégia usada, ficou claro que estavam concluindo que quanto maior a área da base maior seria o volume. Essa conclusão não é verdadeira. A equipe G7 concluiu corretamente o valor do lado do quadrado a ser recortado, mas na Figura 135 pode ser observado que durante a resolução estavam concluindo que quanto menor o lado do quadrado, maior seria o volume. Entretanto, no momento da explanação, a equipe derrubou essa hipótese. Como a conclusão final está correta, a resolução da equipe G7 não foi categorizada como EC. Como RV, classificamos a solução da equipe G6. Essa equipe argumentou muito bem sua solução no momento da plenária, mas no papel, faltou justificar "o que" e "por que" estavam seguindo aquela direção. A Tabela 56, resume, em números, as categorias de erro aqui discutidas.

Tabela 56
Número de erros, por itens, identificados nas respostas

Categoria	Problema da caixa
IEM	2
EC	2
RV	1

5.5.4. Comentários

Diante da análise apresentada anteriormente, consideramos que essa atividade teve contribuições positivas para o aprendizado dos estudantes e que as discussões promovidas permitiram perceber que com folhas de papel de mesmo tamanho poderiam ser construídas caixas com diferentes volumes. Algumas vezes nem os professores têm esta clareza. Afirmação pautada na experiência que tivemos ao ministrar uma oficina aos professores do Ensino Fundamental e Médio de Laguna[115] – Santa Catarina. Nessa oportunidade, foi proposto esse mesmo problema e alguns docentes pensavam que qualquer caixa a ser construída teria o seu volume máximo.

Essa atividade proporcionou um grande envolvimento dos estudantes com a tarefa que lhes fora proposta, permitiu que eles usassem de sua criatividade para solucionar o problema e possibilitou uma reflexão sobre seu modo de pensar (Romanatto, 2012). Por isso, o momento da plenária é um momento muito rico de partilha de conhecimento, pois a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP propicia essa discussão sobre as várias formas de olhar para um mesmo problema, ou seja, tanto os estudantes quanto a professora tiveram a oportunidade de ampliar/agregar conhecimentos que poderão ser incorporados na (futura) prática docente.

Esse problema da caixa foi a última tarefa do semestre em que a professora introduziu algum assunto através da RP. Particularmente, a professora gostou muito da dinâmica deste experimento, pois conseguiu a participação de todas as equipes no momento da plenária. Apesar de não ter existido o registro na lousa, como recomendado pelo roteiro de Allevato e Onuchic (2014), tendo dado a oportunidade de cada equipe explanar aos demais o seu raciocínio e nesse momento mesmo ser discutida a sua solução, proporcionou um *feedback* ao grupo e a busca do consenso simultaneamente. Ao finalizar a plenária, no momento da formalização não foi necessário resgatar as soluções em apresentações de slides (como foi feito em outras atividades), pois para resolver o problema proposto inicialmente, exceto um aluno, todos particularizaram as dimensões da folha usando dimensões distintas. Assim, não haveria como chegar a um consenso de qual era a resposta correta, apenas se o raciocínio utilizado se mostrou adequado. Diante do exposto, ao reaplicar essa atividade em um próximo semestre, o professor pode propor diretamente um problema com dimensões fixas a fim de facilitar o consenso sobre qual a resposta correta e, em seguida, o professor poderá expandir para o caso geral.

[115] Essa experiência está descrita no artigo “Professores do Ensino Básico vivenciando a Resolução de Problemas” de Marcos Manoel da Silva, Elisandra Bar de Figueiredo e Eliane Bihuna de Azevedo e foi apresentado no VII Congresso Internacional de Educação Matemática em Canoas/RS no mês de outubro de 2017.

5.6. Síntese

Nesse capítulo, com a apresentação das quatro tarefas e de como elas foram abordadas em sala de aula, ilustramos as estratégias usadas por essa investigadora para concretizar a inserção da metodologia de Resolução de Problemas para introduzir novos conteúdos. Desde o início da pesquisa nos propusemos a adotar o roteiro do grupo GTERP (Allevato & Onuchic, 2014), constituído por dez etapas para conduzir essas aulas. Entretanto, a maior dificuldade sentida ao aplicar esse roteiro foi com a quinta etapa que se refere ao "registro na lousa" das resoluções. Um dos motivos dessa dificuldade percebida é o tempo gasto para tal registro. Em uma aula com duração de 100 minutos, com turmas que têm em média 40 estudantes, em que se formam cerca de dez grupos de trabalho, o registro na lousa torna-se inviável, pois se cada grupo for apresentar sua resolução faltaria lugar na lousa. Para contornar esse problema, Cardoso (2018) achou uma alternativa que é fornecer aos grupos uma folha A0 para que na medida em que fosse sendo solucionado o problema o mesmo fosse registrado nessa folha. Entretanto, não tivemos essa ideia ao realizar essa investigação. No transcorrer do semestre letivo, de forma natural, foram ocorrendo modificações na forma de conduzir a aula, motivadas por não ter sido possível finalizar as Tarefas propostas no mesmo dia de aula. A dinâmica adotada com mais frequência nessa investigação, foi "dividir" as etapas do roteiro do GTERP em dois dias de aula, sendo que no primeiro dia devia-se ter a Tarefa solucionada. Ao finalizar a aula, a professora recolhia uma resolução de cada equipe, as digitalizava, selecionava as diferentes estratégias identificadas e, no segundo dia de aula, a professora iniciava com uma apresentação preparada no *PowerPoint* para promover uma "discussão coletiva" a partir das respostas selecionadas do material digitalizado. Dessa forma, a "plenária" e a "busca do consenso" eram realizadas concomitantemente.

Por meio dos experimentos de ensino desenvolvidos, percebemos que o(s) problema(s) proposto(s) ao(s) estudante(s) não precisa(m) ser inédito(s) para se adotar a metodologia de RP, pois corroboramos com Romanatto (2012) que um simples exercício matemático pode ser transformado em um problema. Para tanto, depende apenas de como o professor conduzirá a sua aula. Vivenciamos isso na prática, pois algumas das tarefas propostas foram de cunho mais matemático outras com características mais reais e/ou clássicas, como o problema da caixa (Tarefa 19).

Com relação aos tipos de erros encontrados, ao longo desse capítulo identificamos cinco categorias de erros, relembrando-as: incorreção em escritas matemáticas (IEM); extração inadequada de informações por meio da análise gráfica (EIAG); respostas vagas (RV); erro conceitual (EC); incorreção na construção de gráficos (ICG). Considerando essas categorias, na Tabela 57 apresentamos de forma sucinta o número de erros identificados em cada uma das quatro Tarefas relatadas e analisadas.

Tabela 57

Categorias de erros por Tarefa desenvolvida

Categoria	Tarefa				Total
	1	14	18	19	
IEM	15	29	64	2	110
EIAG	0	0	11	0	11
RV	73	6	15	1	95
EC	41	34	16	2	93
ICG	0	19	0	0	19

Pela Tabela 57 podemos constatar que das cinco categorias, a maioria dos tipos de erros se concentram em três delas: IEM, RV e EC. A maior concentração de erros IEM ocorreram na Tarefa 18 e estão associados a notações de intervalos. Os erros das categoria EC e RV ocorreram com mais frequência na primeira atividade, relacionada com o conteúdo de funções. Mais especificamente, os erros do tipo EC e RV ocorreram em maior número ao definirem uma função e/ou não perceberem a diferença entre domínio discreto e domínio contínuo.

Por fim, nesse capítulo apresentamos as Tarefas em que a metodologia de RP foi aplicada em sala de aula, uma análise qualitativa das respostas dos grupos de trabalhos e a classificação dos tipos de erro. No próximo capítulo abordaremos as tarefas de formulação de problemas que foram propostas para serem trabalhadas em horários extraclasse e discutidas em um fórum de discussão criado na plataforma Moodle.

CAPÍTULO 6

FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS NA MODALIDADE DE FÓRUM NO MOODLE

As tarefas de formulação de problemas que foram propostas aos estudantes e que serão apresentadas na sequência deste texto classificam-se como "semiestruturadas" e "aceitando os dados", de acordo com a explanação feita no Capítulo 2. Esse capítulo tem por objetivo apresentar as situações problemas propostas aos estudantes além de fazer uma análise qualitativa dos problemas elaborados investigando a coerência entre os problemas formulados com a resolução apresentada e situação proposta. Os cuidados com a validação desse instrumento de coleta de dados foram apresentados na seção 4.9.3.2. Nesse capítulo também será apresentada a reflexão da professora acerca da interação que existiu no fórum criado para discutir as atividades de Formulação de Problemas.

6.1. Contexto

As tarefas de FP (abordadas no Capítulo 4) foram elaboradas e validadas no segundo semestre letivo de 2016 e inseridas no cronograma da disciplina de *Cálculo*. No momento da validação desse instrumento de coleta de dados foi constatado que o tempo consumido na criação de problemas era muito maior que o tempo gasto na resolução de um problema. Com a finalidade de reservar mais tempo em sala de aula para que fossem desenvolvidas as atividades mediadas pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP , tivemos a ideia de criar um fórum de discussão, na plataforma Moodle, para cada uma das oito situações problemas. Uma das motivações de propor o trabalho nessa modalidade foi porque, pelos experimentos realizados no ano de 2016, a professora-pesquisadora sabia que seria muito difícil gerir, de forma satisfatória, o tempo em sala de aula para que tanto as atividades de formulação quanto as de resolução de problemas fossem realizadas, e ainda, a ementa da disciplina fosse cumprida. Para tanto, acreditamos que com mais experiência a professora-pesquisadora conseguiria aliar a FP com a RP em sala de aula.

Julgamos pertinente trabalhar FP e RP, visto que os atuais documentos oficiais brasileiros indicam que o estudante do Ensino Fundamental deve ter um letramento matemático que é definido como

> as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação

e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (Brasil, 2017, p. 222)

Essas orientações não são voltadas para o Ensino Superior, mas como as turmas participantes da pesquisa são dos cursos de Licenciaturas em Matemática e Química, portanto, correspondem aos futuros educadores dos Ensino Fundamental e Médio, julgamos importante para a formação acadêmica, terem a oportunidade de vivenciarem a elaboração de problemas. Para tanto, as situações problema foram propostas aos alunos para serem desenvolvidas em horários extraclasse e poderiam ser feitas de forma individual ou em grupo de até seis integrantes.

No primeiro dia de aula do primeiro semestre de 2017 a professora-pesquisadora apresentou a proposta do trabalho de elaboração de problemas durante a explanação sobre os critérios de avaliação da disciplina previstos no plano de ensino. Ela solicitou que cada estudante se inscrevesse na disciplina "Cálculo 1 Matemática e Química" criada na plataforma Moodle, pois nesse ambiente virtual seria disponibilizado todo o material a ser utilizado na disciplina. Nessa disciplina virtual as duas turmas participantes da pesquisa compunham uma única turma que fora criada com o intuito de proporcionar maior discussão no fórum, pois todos os estudantes poderiam comentar, reformular e/ou fazer questionamentos nos problemas elaborados por qualquer um dos estudantes inscritos na plataforma. Nessa turma virtual foi permitido que estudantes da MAT e da QUI fizessem trabalhos em conjunto. A saber, duas equipes foram formadas por alunos de turmas diferentes. Ressaltamos ainda que todos os trabalhos de FP deveriam ser entregues em ambiente específico criado na plataforma Moodle. Na Figura 141 encontra-se a dinâmica do fórum pré-estabelecida pela professora-pesquisadora.

Dinâmica do fórum:

1. Para cada situação aqui proposta (pelo professor) deverá ser **elaborado/proposto/formulado um problema** cuja **solução** seja a situação apresentada e que utilize **conteúdos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.**

2. Após o primeiro acadêmico postar seu problema **formulado e resolvido**, os demais poderão fazer perguntas, dar sua opinião, sugerir modificação, bem como propor um novo problema, pois todas as situações propostas são desafios (é assim que entendo a formulação), cuja solução é a mesma, mas o "enunciado"/problema é outro.

Obs: No momento em que você for propor um novo problema (diferente), peço para que seja criado um novo tópico para discussão, para que desta forma tenhamos uma lógica no raciocínio. Se necessário, novas recomendações serão dadas ao longo do semestre.

Figura 141 - Dinâmica do fórum de discussão dos trabalhos de FP.
Fonte: *Print* das informações disponibilizadas no Moodle.

No início do semestre a professora disponibilizou as oito situações problemas do Anexo 10, que serão apresentadas e discutidas na seção 6.2, e que foram enviadas aos estudantes pela plataforma Moodle e pelo e-mail individual cadastrado no sistema acadêmico da Universidade (chamado SIGA) sem data limite para entrega de cada uma das situações. Esse prazo não fora estipulado inicialmente porque, como explicado pela professora pesquisadora aos alunos, esperava que conforme os conteúdos fossem sendo abordados em sala de aula, os estudantes por iniciativa própria elaborassem um problema e postassem no fórum para que esse fosse apreciado e discutido por qualquer participante. Passadas três semanas de aula, não tendo tido nenhuma proposta de problema elaborado postada na plataforma, a professora teve de intervir (Figura 142) no sentido de provocar os estudantes para que iniciassem as elaborações. Porém, as postagens referentes à primeira situação problema foram realizadas somente no último dia do prazo estipulado pela professora-pesquisadora. Depois dessa primeira experiência, a professora começou a estipular prazos para que fossem apresentados os problemas elaborados para cada uma das respectivas situações. O prazo estabelecido para entregas dos problemas elaborados variou do dia 24 de março até 26 de junho. A professora-pesquisadora permitiu que os estudantes fizessem novas proposições e/ou interagissem em todos os problemas elaborados até o final do mês de junho.

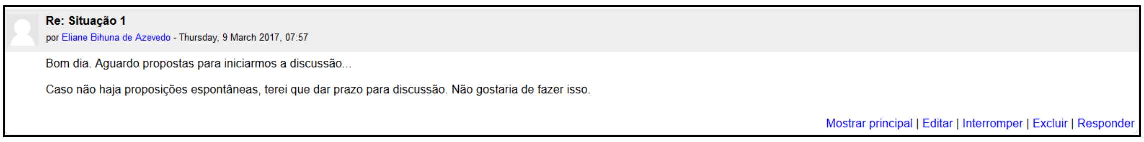


Figura 142 - Dinâmica do fórum de discussão dos trabalhos de FP.
Fonte: *Print* da tela da disciplina Cálculo 1 – Matemática e Química na plataforma Moodle.

A Tabela 58 apresenta de forma detalhada como os estudantes estiveram organizados para elaborarem os problemas. Por esses dados pode-se observar que apesar de ter sido dada a oportunidade dos estudantes trabalharem em grupos, a maioria dos trabalhos entregues foi feita de forma individual. Em termos percentuais, os trabalhos individuais variaram de 61% (nas situações 3 e 4) a 75% (nas situações 7 e 8) dos problemas formulados. Nota-se também que a Situação 1 foi a que teve maior número de problemas propostos e de alunos envolvidos nas elaborações. Ao todo foram 36 estudantes nessa situação. Consideramos esse número pouco expressivo, pois ao todo havia 84 matriculados na disciplina. Apesar dessa atividade ter sido um dos trabalhos avaliativos da disciplina[116], menos de metade dos estudantes entregaram a primeira formulação (situação problema que teve maior número de proposições). Esse número foi diminuindo[117] conforme o avanço do semestre. A sétima situação problema foi a que teve menor número de estudantes ativos no processo de elaboração.

[116] A nota semestral (NS) da disciplina era calculada pela fórmula $NS = \frac{3P+T}{4}$, com P e T sendo, respectivamente, as médias aritméticas dos provas escritas e trabalhos extraclasses.

[117] Exceto da situação problema 7 para 8, mas convém destacar que a data limite de entrega dessas proposições foi a mesma.

Tabela 58
Número de problemas elaborados e organização dos estudantes elaboradores

Situação	Número de integrantes no grupo						Total de Problemas elaborados	Total de Estudantes elaboradores
	1	2	3	4	5	6		
1	14	4	0	2	0	1	21	36
2	16	2	0	2	0	0	20	28
3	8	3	0	1	1	0	13	23
4	8	4	1	0	0	0	13	19
5	9	2	1	1	0	0	13	16
6	6	2	0	0	0	0	8	10
7	3	1	0	0	0	0	4	5
8	7	1	0	0	0	0	8	9

Com relação às interações existentes no fórum de discussão, como será apresentado nesse texto, podemos desde já avaliar como sendo pouco satisfatórias, pois os estudantes dificilmente interagiram de forma espontânea e de forma que viesse a enriquecer o problema proposto por algum colega. A professora pesquisadora observou também que, geralmente, os estudantes aguardavam que ela fizesse algum comentário ou questionamento que, geralmente, era respondido pelo próprio elaborador. E ainda, muitos dos comentários nas postagens foram feitos nos últimos dias do semestre após a professora pesquisadora ter divulgado os critérios que seriam adotados para atribuir a nota final referente ao trabalho de FP. Um desses critérios estava relacionado com número de participação/interação no trabalho de outros estudantes. Ressaltamos que os critérios de avaliação não foram divulgados no início do semestre letivo, porque a investigadora não tinha clareza de como faria, visto que era a primeira vez que estava propondo tarefas matemáticas desse tipo. Na Tabela 59 pode ser observado o número total de algum tipo de interação ocorrida nas postagens. Na contagem das interações feitas pelos estudantes foram contabilizados tanto os comentários feitos em postagem de colegas como nas próprias postagens, respondendo às indagações feitas pela própria professora.

Tabela 59. *Número de participações no fórum*

Situação problema	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de interações no fórum	25	17	0	9	3	7	7	9

Comparando o número de participações nos comentários do fórum de discussão da Tabela 59 com o número de problemas formulados apresentados na Tabela 58, pode-se notar que houve pouca interação, pois o número de comentários feitos nas postagens foi pouco superior ao número de problemas elaborados em apenas três das situações problemas. Como exemplo, considere a primeira situação problema: houve 25 comentários e 21 problemas formulados. Alguns exemplos de tipos de interações ocorridas serão apresentados na seção 6.9 quando estiverem sendo apresentados alguns dos problemas elaborados.

Para analisar os problemas formulados pelos estudantes foram consideradas três categorias. A primeira, está relacionada com a estrutura do enunciado do problema, ou seja, analisamos se o problema elaborado atendeu integralmente, parcialmente ou não atendeu à situação proposta. A segunda categoria considerada foi quanto ao tipo de problema elaborado, se apresentava características de problema facilmente encontrado em livros didático, se apresentava alguma variação dos problemas encontrados em materiais didáticos ou se o problema elaborado era uma ideia inédita denominadas, respectivamente, de clássicos, adaptado de clássicos e não clássicos. A cada uma dessas categorias foram consideradas duas subcategorias, ou seja, se os problemas possuíam caráter contextualizado ou estritamente matemático. A terceira categoria de análise considerada foi verificar se a resolução do problema elaborado atendia ao problema formulado. Nessa análise foi considerado o problema proposto submetido, independentemente de estarem ou não atendendo à situação proposta. A Tabela 60 apresenta a classificação de todos os problemas elaborados pelos estudantes conforme essas categorias.

Tabela 60

Categorização dos problemas elaborados

Situação		1	2	3	4	5	6	7	8
Atendeu a situação proposta	Sim	10	1	4	6	4	2	2	2
	Não	5	9	5	2	5	3	1	3
	Parcialmente	6	10	4	5	4	3	1	3
Tipo de problema formulado	Clássico contextualizado	0	0	0	0	0	0	0	1
	Clássico matemático	14	14	9	1	10	2	0	2
	Adaptado de clássico contextualizado	0	0	0	0	0	0	0	2
	Adaptado de clássico matemático	0	0	0	0	0	0	2	0
	Não clássico contextualizado	4	0	1	11	0	4	1	2
	Não clássico matemático	1	3	1	1	2	0	0	0
	Não categorizado por não ter sido formulado o problema	2	3	2	0	1	2	1	1
Resolveu o problema formulado	Correto	10	15	11	9	8	6	0	3
	Parcialmente correto	8	1	0	2	1	0	2	3
	Errado	1	0	0	0	1	0	1	1
	Não resolveu	0	1	0	2	3	0	0	0
	Apresentou uma interpretação ou resolução para problema não elaborado	2	3	2	0	0	2	1	1
Total de trabalhos entregues		21	20	13	13	13	8	4	8

Analisando os números de trabalhos entregues apresentados na Tabela 60, pode-se observar que, em média, 36% dos alunos fizeram proposições de problemas que atendiam por completo às situações problemas propostas. No entanto, na segunda situação problema somente uma (de vinte proposições) satisfez essa categoria de análise. Em média, 32% dos problemas formulados atenderam parcialmente e outros 32% não atenderam à situação problema proposta. Com relação aos tipos de problemas elaborados, nas situações 1, 2, 3 e 5, na média, 71% dos estudantes criaram problemas parecidos com os problemas encontrados nos materiais didáticos. Nas demais situações esse número foi inferior a 25%. E, a situação 4 teve o maior número de problemas não clássicos contextualizados. Com relação à resolução dos problemas que foram elaborados pelos próprios estudantes, na média, aproximadamente 64% das resoluções apresentadas estavam corretas, exceto na situação 7, que nenhum estudante acertou por completo. Na próxima seção, tanto as proposições de problemas como suas resoluções serão analisadas e exemplificadas, por situação problema.

6.2. Situações problemas propostas e análise

Nesta seção serão apresentadas as situações problemas propostas aos estudantes, as expectativas esperadas pela professora-pesquisadora ao elaborá-las e análise qualitativa dos problemas criados pelos estudantes. Convencionamos que ao apresentar algum problema e/ou resolução dos estudantes iremos denotar por Gn o grupo que elaborou, com n variando de 1 a 29, pois estes correspondem aos números atribuídos aos grupos/estudantes que propuseram ao menos um problema e este estará sendo mencionando em algum momento nesse texto. Salienta-se que apesar da notação ser a mesma da já utilizada no Capítulo 5, para referenciar resoluções propostas nas atividades desenvolvidas em sala de aula, a designação Gn não se refere aos mesmos grupos. Convém destacar também que alguns estudantes ora trabalharam em grupo ora de forma individual. Nesses casos, o mesmo estudante foi designado por diferentes referências. Uma para o grupo a que pertence, outra para o trabalho individual.

6.2.1. Situação 1

A primeira situação proposta foi: *"Elabore um problema cuja solução apresente a condição de que se as abscissas estiverem entre* -2 *e* 6*, então as ordenadas estarão entre 1 e 3"*. No momento em que a professora-pesquisadora elaborou, pensou no conteúdo de limites por definição, pois considerou uma função racional e imaginou o problema matemático que seria encontrar alguma relação entre ε e

δ para provar, mais especificamente, que $\lim_{x \to 1} \sqrt{x+3} = 2$. Para determinar tal relação poderiam ser usados argumentos gráficos e/ou algébricos, por meio da definição formal de limite.

No momento em que essa situação foi proposta aos monitores de CDI, no processo da validação desse instrumento de coleta de dados, todos os grupos elaboraram problemas relacionados ao conteúdo de funções. Por isso, ao propor a seus estudantes de 2017/1, a professora-pesquisadora solicitou entrega do problema elaborado após trabalhar com os assuntos de inequações e funções. E, após ter sido abordado o conteúdo de limites a professora instigou-os a reformularem ou elaborarem um novo problema que envolvesse esse assunto.

Ao todo foram elaborados 21 problemas para a primeira situação e, geralmente, esses abordavam mais de um assunto. Os conteúdos que apareceram com mais frequência nos problemas formulados pelos estudantes foram funções e limites. Na Tabela 61 encontram-se mais detalhes sobre os assuntos envolvidos nos problemas elaborados.

Tabela 61
Assuntos envolvidos nos problemas formulados referentes à primeira situação

Assunto		Número de problemas	Total de problemas
Função	Função do primeiro grau	7	33
	Função do segundo grau	8	
	Função modular	2	
	Função definida por partes	3	
	Função constante	1	
	Função potencial	2	
	Função bijetora	1	
	Domínio e/ou imagem	7	
	(De)crescimento de uma função	1	
	Determinação dos zeros de uma função	1	
Limite	Definição formal de limite	4	6
	Cálculo de limite (geometricamente)	2	
Outros	Gráfico e pontos de interseção entre curvas	1	9
	Intervalos	2	
	Inequação do primeiro grau	2	
	Sistema de equações	2	
	Taxa de variação	1	
	Área de triângulo	1	

Apesar da professora-pesquisadora ter recomendado que os problemas elaborados deveriam atender conteúdos estudados na disciplina de CDI houve estudantes que apresentaram formulações que estavam relacionadas com outras áreas de conhecimento. No caso da primeira situação problema, duas formulações se referiam à área de Álgebra, e uma, à Geometria, como pode ser observado, respectivamente, na Figura 143 e Figura 144.

Para a proposta de problema, para solução apresentada onde os valores de x, se encontram entre -2 e 6, e os valores de y, se encontrem entre 1 e 3.

Então utilizei o segundo valor de x e y para encontrar o primeiro valor dos dois, correspondentes.

Ou seja 6 e 3 para chegar através de dois sistemas, a -2 e 1.

x = -2 e 6

Substitui 6 o segundo valor de x, para poder encontrar -2, o primeiro valor.

$$\begin{Bmatrix} 6x + y = 0 \\ x + y = 10 \end{Bmatrix}$$

$$y = 0 - 6x$$

$$y = -6x$$

$$x + (-6x) = -10$$

$$x - 6x = -10$$

$$-5x = -10$$

$$x = \frac{-10}{5}$$

$$x = -2$$

y = 1 e 3

Substitui o 3 o segundo valor de y, para poder encontrar 1, o primeiro valor.

$$\begin{Bmatrix} x + 3y = 0 \\ x + y = 2 \end{Bmatrix}$$

$$x = 0 - 3y$$

$$x = -3y$$

$$x + y = 2$$

$$-3y + y = 2$$

$$-2y = 2$$

$$y = \frac{2}{2}$$

$$y = 1$$

Figura 143 - Problema formulado por G1 para atender à primeira situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Problema: De acordo com a figura abaixo, encontre a área do triangulo:

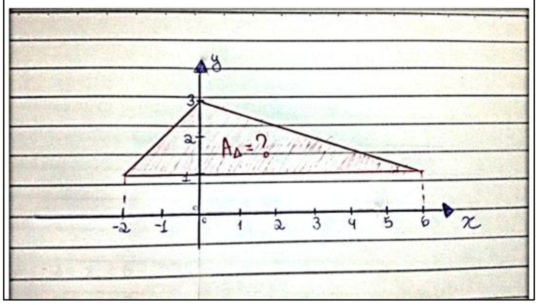


Figura 144 - Problema formulado por G2 para atender à primeira situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

O trabalho entregue pelo estudante G1 não apresentou o enunciado de um problema. Pela Figura 143 entendemos que G1 está resolvendo um problema de cunho matemático que poderia ser: "*Encontre a solução dos sistemas de equações lineares* $\begin{cases} 6x + y = 0 \\ x + y = 10 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$". Porém, além da solução apresentar erros de matemática básica, os sistemas não foram resolvidos, pois, em ambos os casos, foi usado o método da eliminação de variáveis para resolver o sistema, isolando uma das incógnitas na primeira equação e, substituindo na segunda o resultado encontrado, obteve-se o valor para uma das variáveis. Entretanto, G1 não concluiu a resolução, pois não usou o valor da incógnita determinada em alguma das equações do sistema para determinar o valor da outra incógnita. Conforme as categorias estabelecidas para análise dos problemas formulados, esse estudante não atendeu à situação proposta porque não ficou claro o enunciado do problema que estava sendo resolvido. As demais categorias não foram analisadas, pela falta do problema formulado.

Com relação ao problema da Figura 144, percebemos que se trata de um problema clássico matemático e a resolução (aqui omitida) estava correta. Essa proposição atende à primeira situação, mas não usava conteúdos de *Cálculo*. Entretanto, poderia ter sido reformulada de forma a atender essa exigência. Por exemplo, poderiam ter sido solicitadas as expressões analíticas das funções que representam os lados do triângulo e representar geometricamente a área delimitada simultaneamente por essas funções afim.

Um exemplo de problema elaborado que atendeu parcialmente à primeira situação proposta e de caráter não clássico contextualizado está ilustrado na Figura 145. Nesse problema o estudante G3 simulou experimentos laboratoriais para encontrar uma expressão matemática que associasse a quantidade de bactérias vivas com a variação de temperatura. A ideia apresentada por esse estudante é encontrada em problemas de Equações Diferenciais que tratam de (de)crescimento populacional cujo modelo relaciona-se com as funções exponenciais. Portanto, o problema elaborado é contextualizado, mas numa situação hipotética. Em outras situações, problemas elaborados por outros estudantes também apresentam situações “reais” que na prática não são verídicas. Esse problema atendeu parcialmente à situação, pois as abscissas e as ordenadas consideradas na resolução do problema não atendem totalmente as condições especificadas na primeira situação. Esse problema elaborado é um exemplo de como os estudantes podem ser criativos. Infelizmente, nesse texto não é possível discutir todas as proposições e resoluções apresentadas pelos estudantes, pois ficaria muito extenso a cansativo ao leitor, além de não ser nosso objetivo.

Um biólogo, a fim de determinar a relação entre a população de bactérias e a temperatura, fez diversos experimentos em laboratório com a temperatura controlada de 21°C, em um determinado intervalo de tempo fixado t. Ele mediu a variação da temperatura (x) e correlacionou com a taxa populacional de bactérias vivas no tempo final t_f, dividido pela quantidade de bactérias vivas no tempo inicial t_0 (f(x)). Depois de vários ensaios ele chegou a seguinte fórmula:

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

1.Faça a representação gráfica da função.

2.Qual é o intervalo de variação da temperatura na qual as bactérias sobrevivem?

3.Qual é a temperatura no qual essas bactérias apresentam maior crescimento? Qual é o crescimento máximo?

4.Qual é o intervalo de variação da temperatura na qual existe crescimento populacional? Qual é o intervalo do crescimento?

5.Qual é o domínio e a Imagem da função?

Figura 145 - Problema formulado por G3 para atender à primeira situação.
Fonte: Dados da pesquisadora.

6.2.2. Situação 2

A segunda situação problema (Figura 146) proposta solicitava para elaborar um problema que relacionasse três funções cujos gráficos estavam ilustrados na figura dada. Ao elaborar essa situação, a professora pesquisadora pensou no conteúdo de derivadas e/ou antiderivadas, pois as funções ilustradas eram de uma função cúbica, uma quadrática e uma linear. Nessa ordem, poderiam ser vistas como uma função cúbica e, respectivamente, sua primeira e segunda derivada. Ou, na ordem inversa, uma função linear, sua primitiva e antiderivada da primitiva.

2ª Situação: Proponha um problema cuja solução relacione as funções f, g e h cujos gráficos estão ilustrados na Figura 1.

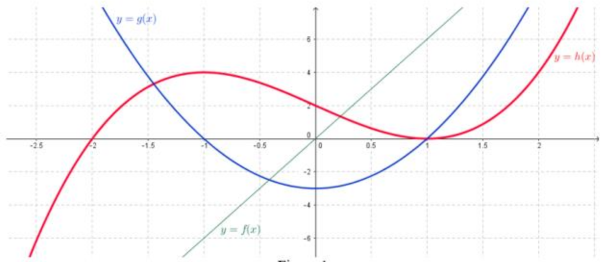


Figura 1

Figura 146 - Segunda situação problema.
Fonte: Produção da autora.

O assunto predominante identificado nos problemas elaborados foi funções, com ênfase nas funções polinomiais, função composta e análise gráfica, como pode ser observado na Tabela 62. Dos 20 problemas elaborados, respectivamente, 17, 9 e 7 abordaram esses assuntos. Todos os problemas propostos para atender à segunda situação problema foram de cunho matemático. Somente uma equipe (de vinte) pensou de forma similar à professora, relacionando uma função com derivadas primeiras.

Tabela 62
Assuntos envolvidos nos problemas formulados referentes a primeira situação

Assuntos		Número de problemas	Total de problemas
Funções	Polinomiais	17	41
	Análise gráfica	7	
	Função composta	9	
	Função inversa	2	
	Paridade de uma função	4	
	Função definida por partes	1	
	Função potencial	1	

Teoria de derivadas	Derivadas de primeira e segunda ordem	2	6
	Pontos críticos	2	
	Pontos extremos	1	
	Concavidade do gráfico de uma função	1	
Limite	Limite bilateral	1	2
	Função contínua	1	
Outro	Progressão aritmética	1	1

Um exemplo de problema não clássico matemático que atende essa situação está ilustrado na Figura 147.

Sabendo que $g(x)$ e $f(x)$, são, respectivamente, a primeira e a segunda derivada de $h(x)$ e estão representadas na figura abaixo:

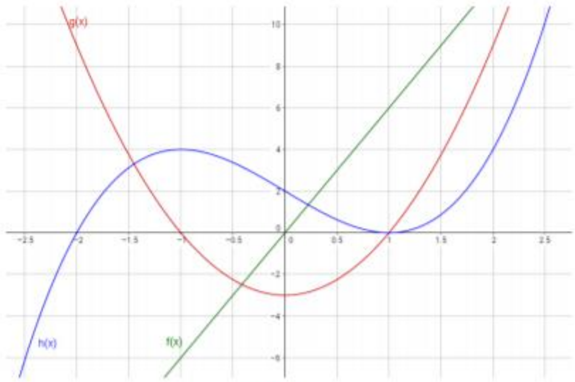


Figura 1

a) Oque se pode dizer a respeito de $h(x)$ quando $g(x) = 0$?

R.: Pelo gráfico temos que $g(x) = 0$ quando x=±1 e estes serão os pontos de máximo ou mínimo local de $h(x)$. Como $f(x)$= $h''(x)$ temos que:

✓ Quando x=-1, $f(x)$ tem coordenada negativa, portanto, este será o ponto de máximo local.

✓ Quando x=1, $f(x)$ tem coordenada positiva, portanto, este será o ponto de mínimo local.

b) Oque se pode dizer a respeito de $h(x)$ com relação a $f(x)$?

R.: Para os pontos onde $x < 0$, temos que $f(x) < 0$ portanto a concavidade de $h(x)$ será voltada para baixo.

Para os pontos onde $x > 0$, temos que $f(x) > 0$ portanto a concavidade de $h(x)$ será voltada para cima.

Portanto, quando x=0 ocorre mudança de concavidade de $h(x)$

Figura 147 - Problema formulado por G4 para atender à segunda situação.
Fonte: Dados de pesquisa.

Pela Figura 147, percebemos que essa equipe identificou as funções f e g dadas na situação problema, como sendo, respectivamente, a primeira e segunda derivada da função e fez dois questionamentos, um sobre o que se pode dizer a respeito da função h e sobre $g(x) = 0$; e, outro similar, questionando a respeito do que se poderia dizer de h com relação a f. Para responder às relações observadas, os elaboradores usaram a teoria de derivadas explorando pontos críticos, pontos de máximo/mínimos e concavidade do gráfico de uma função. As argumentações usadas estão corretas, mas tal como fora proposto, se fosse outro respondente, a argumentação poderia ser diferente, por terem indagações muito abertas, ou seja, não estarem perguntando nada em específico.

Um exemplo de problema clássico matemático relacionado com a determinação de função composta foi feito de forma mecânica, ou seja, sem analisar as relações entre domínio e imagem para verificar se, de fato, a composta das funções poderia ser determinada para qualquer valor das abscissas e está ilustrado na Figura 148. Com o intuito de que o rigor matemático fosse considerado, no fórum, a professora pesquisadora apontou um erro detectado por meio de questionamento e indagou se para o conjunto imagem da função g a composta da função existiria para todo número real ou seria necessária alguma restrição (Figura 149). Com essa intervenção, um outro acadêmico se juntou ao grupo para reestruturar o problema proposto, visando atender o comentário da professora (Figura 150). A nova versão de resolução apresentou o rigor matemático necessário ao analisar a possibilidade de existir a função composta. Observando as propostas da Figura 149 e da Figura 150 nota-se que o enunciado de ambos é a mesmo. A diferença é que na proposta inicial foram analisados domínio e imagem da função resultante da composição solicitada. E, na reformulação, a função composta solicitada é a mesma, mas na resolução apresentada pela equipe foi considerada a análise rigorosa sobre domínios e imagens das funções envolvidas, de forma a verificar para que abscissas existe a função composta e corrigindo um erro de matemática básica que existia na resolução da primeira proposição.

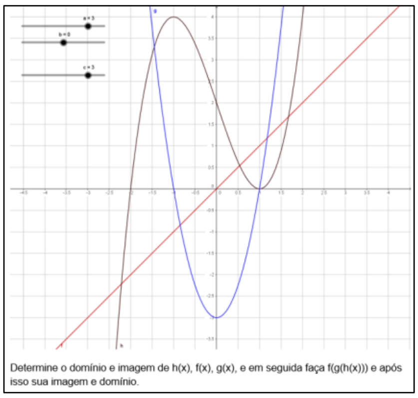


Figura 148 - Problema formulado por G5 para atender à segunda situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

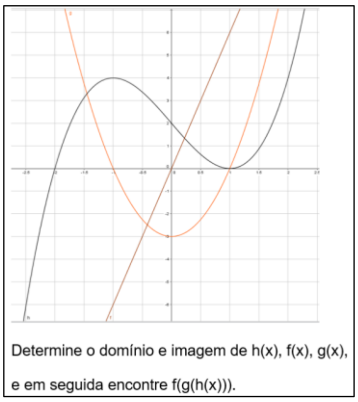
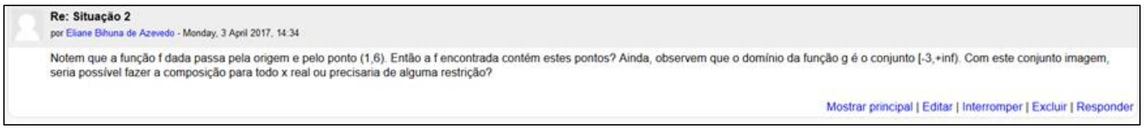


Figura 149 - Problema formulado por G6 para atender à segunda situação.
Fonte: Dados da pesquisa.



Re: Situação 2
por Eliane Bihuna de Azevedo - Monday, 3 April 2017, 14:34

Notem que a função f dada passa pela origem e pelo ponto (1,6). Então a f encontrada contém estes pontos? Ainda, observem que o domínio da função g é o conjunto [-3,+inf). Com este conjunto imagem, seria possível fazer a composição para todo x real ou precisaria de alguma restrição?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder

Figura 150 - Intervenção da professora-pesquisadora no fórum referente à segunda situação problema proposta pelo grupo G5.
Fonte: Print do Moodle

Ao todo 9 (45%) dos problemas elaborados não atenderam à segunda situação problema. Um exemplo disso pode ser observado na Figura 151. Essa equipe pediu para construir o gráfico de uma função definida por partes, sendo que cada uma das sentenças dessa função correspondia a uma parte do gráfico fornecido na figura dada da segunda situação. Para tal construção os estudantes usaram o software *GeoGebra*, mas não delimitaram os intervalos estipulados na função definida por partes. Outro equívoco cometido nessa resolução foi que o problema pedia para usar translação de eixos na construção do gráfico e, no momento de resolverem evidenciaram seu uso somente no estudo da função. Observe ainda que o problema não estabeleceu algum tipo de relação entre as funções polinomiais fornecidas. E, nesse exemplo, a função cúbica estava com um dos coeficientes errados.

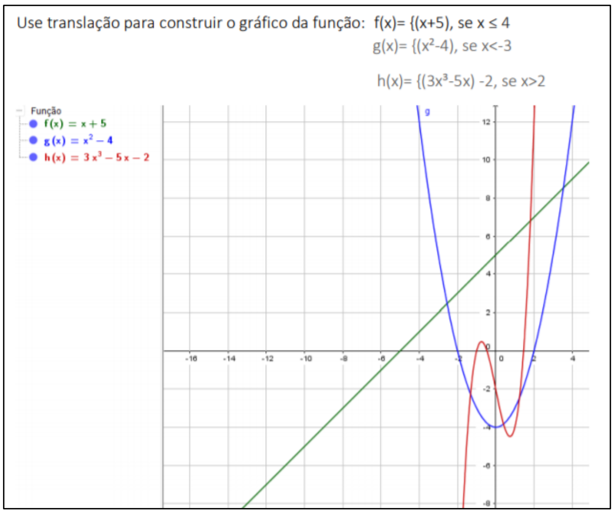


Figura 151 - Problema formulado por G8 para atender à segunda situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Os motivos pelos quais outras elaborações não atenderam à situação proposta, foram porque o grupo: não formulou o problema, mas apresentou algum tipo de resolução; usou funções erradas e provou analiticamente que uma das funções era par, outra ímpar e a terceira nem par nem ímpar, usou argumentos gráficos para classificar as funções quanto à sua paridade; graficamente, usou limites para provar que as funções eram contínuas em um ponto específico; ou, usou funções que preservavam a estrutura das funções dadas e usava o conteúdo de função composta. Um exemplo dessa última situação apontada pode ser observada na Figura 152. O estudante considerou uma função f como sendo uma função do primeiro grau, g uma função quadrática (a determinar) e o resultado da função hof.

Considere f(x) = 6x, $g^{-1}(x) = \sqrt[2]{\frac{x+3}{3}}$, e (h○f) = $6x^3 - 18x + 12$, defina (g○h)(x) e verifique se $(f \circ h^{-1})(x)$ é simétrico em relação ao eixo dos y.

Figura 152 - Problema formulado por G9 para atender à segunda situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Acreditamos que na maioria dos demais problemas contendo três funções uma do primeiro, outra do segundo e outra do terceiro grau e em que foi solicitada uma composição, essa composição de funções mostrava uma relação de dependência entre essas três funções. Entretanto, entendemos que nessas situações os estudantes acreditavam que satisfaziam a situação problema, mas apenas criaram um problema sobre os assuntos envolvidos.

6.2.3. Situação 3

A terceira situação problema foi: *"Elabore um problema que envolva a interpretação geométrica da derivada de uma função de tal forma que a solução seja a reta* $y = (2x_0 - 4)x - x_0^2 + 2$*, em que* x_0 *é uma constante real"*. Ao elaborar essa situação problema a professora pesquisadora optou por fornecer a equação da reta tangente, que deveria ser a solução, em um ponto de coordenadas genéricas com a intenção de que os estudantes pudessem trabalhar com os termos que contêm x_0 e x, pois ambos possuem significados diferentes. Por experiência docente, muitas vezes ao determinar o coeficiente angular da reta tangente, que é a derivada da função aplicada no ponto de tangência, o estudante erroneamente não substituiu o valor da abscissa na função derivada determinada. Nessa situação se não trocasse x por x_0 na derivada obteria como coeficiente angular (m_t) a expressão $m_t = 2x - 4$ e ao substituir na equação geral da reta essa equação teria um termo x^2. Ou seja, a resposta seria de uma função quadrática e não a equação geral de uma reta. Um exemplo detalhado sobre esse assunto é abordado em Azevedo, Figueiredo e Palhares (2016).

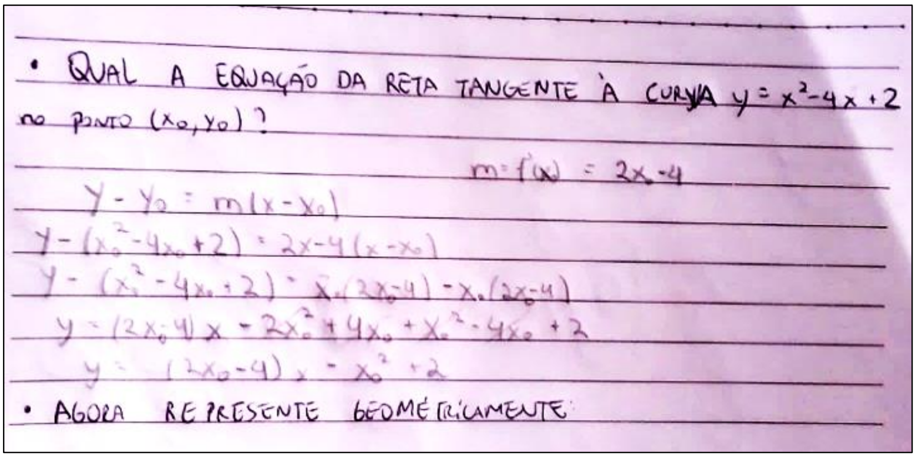
Como pode ser observado na Tabela 63, apenas dois assuntos foram abordados nos problemas elaborados pelos estudantes, sendo que todos, exceto um estudante, fizeram a proposição de um problema envolvendo a interpretação geométrica da derivada. Por essa quase unanimidade de conteúdo de *Cálculo* abordado nos problemas elaborados, entendemos que essa situação problema se trata de um problema fechado, pois não permitiu aos estudantes usarem muito a sua criatividade nas elaborações.

Tabela 63

Assuntos envolvidos nos problemas formulados referentes à terceira situação

	Número de problemas	Total
Interpretação geométrica da derivada	12	13
Interpretação cinemática da derivada	1	

Apesar de 12 (de 13) trabalhos terem elaborado um problema que abordasse a interpretação geométrica da derivada, desses, apenas quatro (aproximadamente 31%) dos problemas elaborados atendem totalmente à situação proposta. Sendo que, três criaram um problema em que deveria ser encontrada a equação da reta tangente a uma função quadrática em um ponto de coordenadas genéricas (Figura 153); dentre eles, um grupo, além da equação genérica, encontrou a equação da reta tangente em um ponto específico; e, um problema elaborado considerou uma função cúbica e pediu para encontrar a equação da reta tangente ao gráfica da primeira derivada de f (Figura 154). Esse problema foi categorizado como sendo não clássico matemático. Outras 3 formulações, consideramos que atenderam parcialmente à referida situação, pois solicitavam que fosse encontrada a equação da reta tangente em um ponto específico (Figura 155).



• QUAL A EQUAÇÃO DA RETA TANGENTE À CURVA $y = x^2 - 4x + 2$ no ponto (x_0, y_0)?

$m = f'(x) = 2x_0 - 4$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - (x_0^2 - 4x_0 + 2) = 2x - 4(x - x_0)$

$y - (x_0^2 - 4x_0 + 2) = x(2x_0 - 4) - x_0(2x_0 - 4)$

$y = (2x_0 - 4)x - 2x_0^2 + 4x_0 + x_0^2 - 4x_0 + 2$

$y = (2x_0 - 4)x - x_0^2 + 2$

• AGORA REPRESENTE GEOMETRICAMENTE.

Figura 153 - Problema formulado por G10 para atender à terceira situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

1) Encontre a reta tangente da deriva da função $f(x) = \frac{3}{9}x^3 - 2x^2 + 2x$ no ponto (x_0, y_0), em seguida trace $f(x). f'(x)$ $e\ a\ tangente\ considerando\ xo = 0, no\ grafico.$

Por regra de derivação: $\frac{d}{dx}\ x^n = nx^{n-1}$

$$f'(x) = 3.\left(\frac{3}{9}\right)x^{3-1} - 2.(2)x^{2-1} + 1.(2)x^{1-1}$$
$$f'(x) = x^2 - 4x + 2$$

Calculando a tangente de $f'(x)$ passando pelo ponto (x_0, y_0):

$$y - f(xo) = f''(xo)(x - xo)$$

$$y - xo^2 + 4xo - 2 = (2xo - 4)(x - xo)$$

$$y - xo^2 + 4xo - 2 = (2xo - 4)x - (2xo - 4)xo$$

$$y = (2xo - 4)x - 2xo^2 + 4xo + xo^2 - 4xo + 2$$

$$y = (2xo - 4)x - xo^2 + 2$$

Construindo o gráfico com xo=0

Figura 154 - Problema formulado por G11 para atender à terceira situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Considerando a função f(x) = x^2-6, calcule a reta tangente desta curva no ponto P(1,-5).

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(xo + \Delta x)^2 - 6 - (xo^2 - 6)}{\Delta x}$$

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{xo^2 + 2xo\Delta x + (\Delta x)^2 - xo^2}{\Delta x}$$

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2xo + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\boldsymbol{m_t = 2xo}$$

Substituindo o coeficiente angular para descobrir a equação da reta tangente:

$$y - yo = m(x - xo)$$

$$y - yo = 2xo(x - xo)$$

$$y - yo = 2.xo.x - 2xo^2$$

$$\boldsymbol{y = 2.xo.x - 2xo^2 + yo}$$

Substituindo o ponto P(1,-5) na equação da reta:

$$y = 2.1.x - 2.(1)^2 + (-5)$$

$$\boldsymbol{y = 2x - 7}$$

y = 2x-7 é a equação da reta tangente da função f(x) = x^2-6 no ponto P(1,-5).

Este resultado atende a proposta pois, considerando xo = 3 na equação y = (2.xo - 4)x - xo^2 + 2 temos que y = 2x - 7, que foi o resultado encontrado no problema descrito acima.

Figura 155 - Problema formulado por G12 para atender à terceira situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Os demais problemas (6 de 13), não atenderam à situação proposta, pois dois deles apresentaram uma possível resolução, mas nenhum enunciado formulado; um grupo formulou um problema que solicitava a equação da reta normal em um ponto genérico; um estudante associou com a interpretação cinemática da derivada, mas não apresentou formulação de problema, apenas respondeu uma das aplicações de derivada (Figura 156); uma equipe buscou trabalhar com a ideia geométrica de como se obtém a reta tangente, ou seja, que ela é a posição limite da reta secante (Figura 157); e, um problema elaborado foi muito criativo, porém partiu da resposta desejada. Essa última equipe usou antiderivadas para encontrar a função cuja reta tangente fora dada na terceira situação. Esse procedimento poderia ter sido utilizado para encontrar a função solicitada para encontrar a reta tangente num ponto genérico. Na resolução apresentada por G15, (Figura 158) percebe-se a existência de muitos erros de notação matemática ao manipular os símbolos de integrais bem como as suas propriedades.

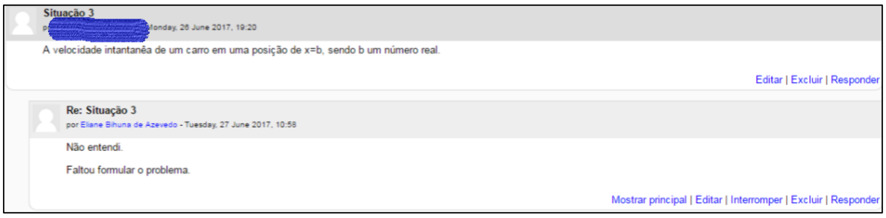
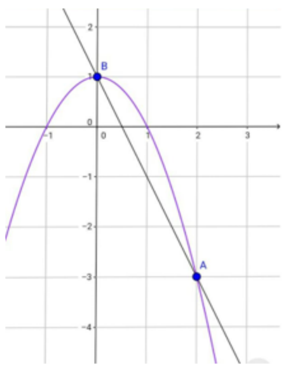


Figura 156 - Problema formulado por G13 para atender à terceira situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Com base no gráfico da função abaixo e nos pontos A e B, o que deve acontecer para que a reta tangente passe pelo ponto B? Justifique.



A têm que tender a B, pois dada a reta secante com pontos de intersecção A e B, quanto mais, de forma geral, A tende à B, mais eles tendem a ficar sobrepostos, e quando isso ocorre, temos a reta tangente ao gráfico.

Figura 157 - Problema formulado por G14 para atender à terceira situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Dada a equação: $y = (2x0 - 4)x - x0^2 + 2$, encontre o coeficiente angular e a sua anti-derivada.

$\underline{y = (2x0 - 4)\ x - x^2 + 2}$

➔ $y - y0 = m(\ x - x0)$

➔ $y - 2 = (2x0 - 4)(\ x - x^2)$

➔ $m = 2x0 - 4$

➔ $\int 2x - 4 = m$

➔ $\int 2X - \int 4$

➔ $2 \int x - \int 4$

➔ $2\frac{x^2}{2} - 4x$

➔ $\underline{\boldsymbol{f(x)\ =\ x^2 - 4x}}$

Figura 158 - Problema formulado por G15 para atender à terceira situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

6.2.4. Situação 4

A quarta situação problema (Figura 159) fornecia dois gráficos sobrepostos e indicava que devia ser formulado um problema que usasse o conteúdo de taxa relacionada e relacionasse de alguma forma os gráficos dados.

<u>4ª Situação</u>: Formule um problema que relacione os gráficos apresentados na Figura 2 que aborde o conteúdo de taxa de variação.

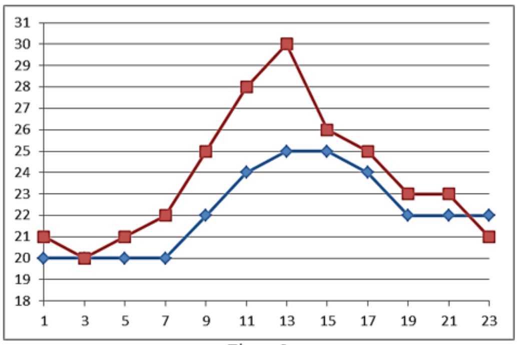


Figura 2

Figura 159 - Previsão da temperatura de Joinville para o dia 24 out 2016.
Fonte: http://www.accuweather.com/pt/br/joinville/35958/hourly-weatherforecast/35958?hour=38.
Acesso em: 23 out 2016

No momento da elaboração dessa situação a professora pesquisadora usou os dados da variação das temperaturas máximas e mínimas previstas para o dia 23 de outubro de 2016 para a cidade de Joinville, Santa Catarina, Brasil. Apenas uma equipe formulou um problema que considerasse os gráficos como sendo variação de temperatura, mas em outro contexto. Considerou que os gráficos fornecidos se tratavam da variação de temperatura de duas substâncias distintas (Figura 160).

A Tabela 64 apresenta os assuntos identificados nos problemas propostos visando atender à terceira situação problema.

Tabela 64
Assuntos envolvidos nos problemas formulados referentes à *quarta situação*

Assunto		Número de problemas	Total de problemas formulados
Função	Diferentes formas de representação	2	3
	Função quadrática	1	
Limite	Cálculo de limites geometricamente	1	1
Taxa de variação	Velocidade média	6	10
	Variação média	4	

Problema: Preencha a tabela abaixo utilizando os dados fornecidos sobre a curva de aquecimento e resfriamento de duas substâncias.

	Temperatura (°C)		Variação da temperatura entre as duas substâncias pelo tempo		
Tempo (s)	Substância 1	Substância 2	$\Delta T = T2-T1$	$\Delta t = t - to$	$T(t) = \Delta T/\Delta t$
1	20	21	1		
3	20	20	0	2	0
5	20	21	1	4	0,25
7	20	22	2	6	0,33
9	22	25	3	8	0,375
11	24	28	4	10	0,4
13	25	30	5	12	0,4167
15	25	26	1	14	0,0714
17	24	25	1	16	0,0625
19	22	23	1	18	0,0556
21	22	23	1	20	0,05
23	22	21	-1	22	0,04545

a) Faça o gráfico de ambas as substâncias (este gráfico pode ser feito em um único), na sequência faça separado o gráfico da variação da temperatura pelo tempo. (Usar para os gráficos: Eixo X – tempo; Eixo y – temperatura.)

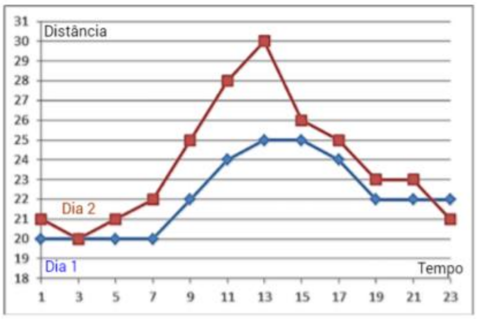
b) O que você pode dizer da sobre a taxa de variação da temperatura de uma substância em relação a outra?

c) O que você pode dizer que acontece com a variação da temperatura quando t -> 1?

Figura 160 - Problema formulado por G16 para atender à quarta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Pelos dados apresentados na Tabela 64, pode-se observar que dos 13 problemas formulados, 11 foram classificados como não clássicos contextualizados. Essa situação problema, considerada mais aberta que a anteriormente relatada, permitiu aos estudantes exercerem mais a sua criatividade, pois propuseram interessantes problemas contextualizados. Salienta-se que os problemas aqui considerados contextualizados são aqueles que os alunos tentaram relacionar os gráficos fornecidos com possíveis situações reais. Entretanto, não necessariamente o contexto criado teria sentido na vida real se o mesmo fosse confrontado com as informações apresentadas no gráfico da Figura 159, pois apresentaram contextos que poderiam ser desde o cotidiano das pessoas à ficção. Como exemplos desses contextos, respectivamente, temos o monitoramento de caminhada (Figura 161) e percurso a nado de dois marcianos (Figura 162). Observe que ambos os problemas versaram sobre taxa variação média e não taxa de variação instantânea. Isso ocorreu com todos os problemas propostos pelos estudantes.

Um atleta principiante resolveu monitorar suas caminhadas para analisar seu desenvolvimento. Sabendo que o primeiro e o segundo dia estão representados no gráfico abaixo responda:



Qual é a média de velocidade alcançada em cada dia?

Dia 1:

Sabendo que $dy = 30 - 20 = 10$ e $dx = 23 - 1 = 22$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11} \cong 0{,}45\ m/min$$

Dia 2:

Sabendo que $dy = 25 - 20 = 5$ e $dx = 23 - 1 = 22$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{22} = \frac{5}{22} \cong 0{,}22\ m/min$$

Figura 161 - Problema formulado por G4 para atender à quarta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Dois irmãos marcianos azul e vermelho decidiram atravessar um rio, porém por caminhos diferentes, o azul optou por um percurso mais rápido, já o vermelhou decidiu nadar por um caminho mais complicado. Sabendo que: o eixo das ordenadas corresponde à distância entre uma borda e outra do rio(Metros), e o eixo das abcissas corresponde ao tempo (Segundos). Entre 7 e 9 minutos quant distância percorrida por ambos aumentou em média, quanto metros por segundo?

Azul: Dist percorrida em 9 – dist perc em 7 = 22-20= 2m/2seg= 2m/s

Vermelho: 25-22=3m/2 seg= 1.5 m/s

Figura 162 - Problema formulado por G17 para atender à quarta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Nota-se que ambos problemas, ilustrados na Figura 161 e na Figura 162, atenderam à situação proposta no quesito de associar a formulação com o conteúdo de taxa de variação, pois estão tratando de variações médias. Porém, ambas apresentam problemas de escrita matemática. Na resolução da Figura 161, o único equívoco foi denotar as variações de y e x por dy e dx, ao invés de denotarem por Δy e Δx, respectivamente. Apesar disso, essa resolução foi considerada correta. E, na resolução da Figura 162, os erros de escrita são mais graves. O estudante inicia descrevendo em palavras a variação das distâncias, substituiu os valores e, esse valor obtido por resposta divide pelo valor numérico da variação do tempo. Apesar da resposta final estar correta, a resolução foi considerada parcialmente correta pela incoerência na forma de fazer a transposição da linguagem escrita para a linguagem matemática.

Com relação à categorização dos problemas formulados, somente duas proposições não foram de cunho matemático. Uma delas tratou de coeficientes angulares (Figura 163), cuja definição é uma taxa de variação média e, o outro problema estava relacionado com a determinação de velocidade média a partir dos gráficos dados (Figura 164). O primeiro desses foi classificado como não clássico matemático e o segundo como clássico matemático, apesar de falar em velocidade média, pois para resolvê-lo, basta aplicar a definição de "forma mecânica". O problema da Figura 163 atendeu parcialmente à quarta situação problema, porque a definição de coeficiente angular é uma taxa de variação média, porém precisaria de melhorias na forma como é posto na resolução, mas no fórum, não houve qualquer interação tentando aprimorar a proposta inicial da equipe.

Lendo os dois gráficos da imagem, se somarmos todos os coeficientes angulares que compõem as duas
linhas, qual será a maior soma? A vermelha ou a azul? Em que momentos os coeficientes angulares se igualam? E em quais momentos eles ficam com o sinal igual?

Figura 163 - Problema formulado por G18 para atender à quarta situação.
Fonte: Dados da pesquisa

Supondo que o eixo x é (t) e o eixo y é (S), encontre a velocidade média nos intervalos [7 , 17] para o carro A(Azul) e o carro B(Vermelho).

Figura 164 - Problema formulado por G15 para atender à quarta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Com o intuito de mostrar como uma situação problema com poucas informações a serem satisfeitas pode favorecer a criatividade dos estudantes, considere o problema ilustrado na Figura 165. A partir do gráfico fornecido na quarta situação, esse grupo teve a ideia de trabalhar com precipitação de chuvas. Para contextualizar, pesquisaram na *web* sobre os lugares mais chuvosos do mundo e iniciaram o problema com uma breve descrição explicativa sobre o Monte Emei (China) e sobre a cidade de Maysynram (Índia). Em seguida, foram fornecidas informações sobre quantidade de chuva (em milímetros) e tempo (em meses) e solicitado que encontrassem as precipitações médias nos intervalos de tempo apresentados em tabelas em cada uma das localidades anteriormente mencionadas. A seguir, pedia-se para construir os respectivos gráficos. Entendemos que essa equipe compreendeu o espírito do que vem a ser a formulação de problemas. Entretanto, para o contexto escolhido, as unidades de tempo e milímetros adotadas pela equipe, não foram condizentes com as explicações de que esses dois lugares citados estavam entre os dez mais chuvosos do mundo.

O monte Emei é o mais alto das Quatro Montanhas Sagradas do Budismo e tem a mais alta taxa de precipitação da China. Um fenômeno chamado "mar de nuvens" provoca uma camada dupla de nuvens, que resulta em quedas d'água imensas, mas o lugar em que mais chove no mundo é a cidade de Maysynram, localizado no estado indiano de Meghalaya. Os moradores costumam colocar isolamento acústico em suas residências para se proteger das ensurdecedoras chuvas. Com base nisso, observe os dados já propostos, considerando $\Delta t = mês$.

a) Complete as tabelas que se referem a uma aproximação da quantidade de milímetros de dois em dois meses começando no mês um com 20 mm de precipitação na 1° tabela e na 2° tabela começa no mês um com 21 mm de precipitação, até um total de 23 meses.

Emei:

Tempo (mês)	Precipitação (mm)
3	20
5	20
7	20
9	22
11	24
13	25
15	25
17	24
19	22
21	22
23	22

Intervalo (mês)	Δm (mm)	Média de precipitação
[1,3]	0	0
[3,5]	0	0
[5,7]	0	0
[7,9]	2	1
[9,11]	2	1
[11,13]	1	0,5
[13,15]	0	0
[15,17]	-1	-0,5
[17,19]	-2	-1
[19,21]	0	0
[21,23]	0	0

Maysynram:

Tempo (mês)	Precipitação (mm)
3	20
5	21
7	22
9	25
11	28
13	30
15	26
17	25
19	23
21	23
23	21

Intervalo (mês)	Δm (mm)	Média de precipitação
[1,3]	-1	-0,5
[3,5]	1	0,5
[5,7]	1	0,5
[7,9]	3	1,5
[9,11]	3	1,5
[11,13]	2	1
[13,15]	-4	-2
[15,17]	-1	-0,5
[17,19]	-2	-1
[19,21]	0	0
[21,23]	-2	-1

b) Esboce o gráfico que representa a precipitação da chuva em relação aos meses do ano.

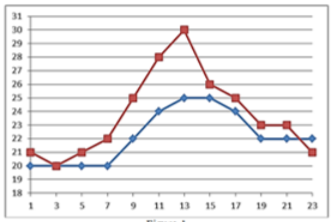


Figura 1

Obs: os dados em negrito são os já fornecidos na questao que formulamos.

https://minilua.com/lugares-chuvosos-mundo/

Figura 165 - Problema formulado por G19 para atender à quarta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

A professora pesquisadora fez uma intervenção no fórum, como pode ser observado no Figura 166, com a finalidade de que os elaboradores percebessem que as unidades de medida usadas em sua formulação não faziam sentido para os sítios mais chuvosos do mundo, pois com uma precipitação anual que ultrapassa oito mil milímetros, considerar que em algum mês a precipitação média foi vinte milímetros, não se tem uma proximidade da realidade.

Re: Situação 4
por Eliane Bihuna de Azevedo - Saturday, 6 May 2017, 22:49

Olhem que imagem mais linda de Emei!

Fonte: https://www.google.com.br/imgres?imgurl=https%3A%2F%2Ftripandtravelnews.files.wordpress.com%2F2013%2F09%2Fmount-emei-view.jpg&imgrefurl=https%3A%2F%
Acesso: 06/05/2017

Nessa proposta de solução, vocês conseguiram entender o "espírito" deste trabalho de formulação de problemas, pois a resposta final deve ser o que foi proposto.

As informações dadas no "enunciado" são verdadeiras. Por isso, minha sugestão seria repensarem um pouquinho as unidades de medida da precipitação e/ou tempo, pois quando vi por ex 20mm de chuva em um mês achei pouco, pois Joinville já tem precipitação mensal muito maior que isso. Ao pesquisar um pouquinho encontrei que Emei está entre os 10 lugares que mais chove no mundo (ganhou de Joinville..hehe). Anualmente a precipitação passa dos 8000 mm (um dos sites com esta infomação: https://minilua.com/lugares-chuvosos-mundo/; acesso: 06/05/2017).

Acho que poderíamos alterar um pouquinho a escala usada no problema e/ou a unidade de tempo.

Assim sendo, como poderíamos preservar a essência da problema elaborado e torná-lo mais real?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder

Figura 166 - Intervenção no fórum do problema proposto por G19 para à quarta situação.
Fonte: *Print* do Moodle.

Após essa intervenção, a mesma equipe passou a considerar "dias" como unidade de medida de tempo e continuou considerando "milímetros" como precipitação. Ou seja, o problema formulado continuou não coerente com a situação real. Além disso, outro problema que não fora apontado pela professora pesquisadora nem por outros colegas foi o fato de apresentar uma taxa de variação negativa, que não tem sentido visto que o sinal negativo ocorreu no intervalo que representam os dias de um mês que se considerou em ordem crescente (de 1 a 23).

Dois dos problemas formulados não atenderam à quarta situação problema (Figura 167 e Figura 168). Ambas as equipes elaboraram problemas que versaram sobre o conteúdo de funções. No problema apresentado na Figura 167, o estudante considerou que os gráficos dados representam a comissão recebida por dois funcionários de uma empresa e indagou quando um dos vendedores obteve maior lucro com a comissão. Essa interpretação é adequada para os gráficos propostos, porém na formulação apresentada não há menção sobre o conteúdo de taxa de variação. Essa formulação considerou apenas o conteúdo de funções. O problema da Figura 168 considerou uma função quadrática para representar o teor alcóolico na corrente sanguínea, porém essa função não atende às informações gráficas fornecidas no gráfico da quarta situação problema.

Situação 4
po[redacted] Monday, 26 June 2017, 19:27

Sendo funções de porcentagem de comissão por mês de uma empresa de vendas, em vermelho o vendedor A e azul o vendedor B. Em que mês o vendedor A obteve maior lucro com comissão?

Editar | Excluir | Responder

Figura 167 - Problema formulado por G13 para atender à quarta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

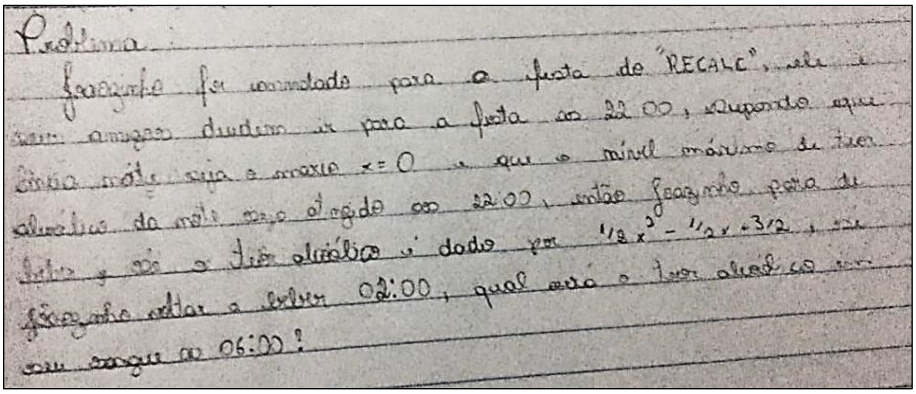

Problema
Joãozinho foi convidado para a festa de "RECALC", ele e seus amigos decidiram ir para a festa às 22:00, supondo que [illegible] noite seja o máximo $x=0$ e que o nível máximo de teor alcoólico da noite seja atingido às 22:00, então Joãozinho para de beber e [illegible] o teor alcoólico é dado por $1/2\,x^3 - 1/2\,x + 3/2$, se Joãozinho voltar a beber 02:00, qual será o teor alcoólico em seu sangue às 06:00?

Figura 168 - Problema formulado por G20 para atender à quarta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

6.2.5. Situação 5

A quinta situação problema (Figura 169) fornecia o gráfico da função f e desejava-se que fosse formulado um problema cuja solução era aquele gráfico ilustrado. Outra informação dada é que o gráfico da função derivada primeira de f possuía uma assíntota horizontal.

5ª Situação: Sabendo que o gráfico de uma função f' possui uma assíntota horizontal, elabore um problema que use essa informação e que tenha por solução o gráfico da função f, ilustrado na Figura 3.

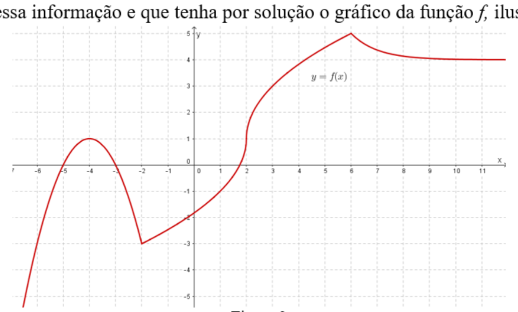


Figura 3

Figura 169 - Quinta situação problema proposta.
Fonte: Produção da autora.

Nessa situação a professora pesquisadora imaginava que os estudantes formulariam problemas matemáticos em que o gráfico da primeira derivada era dado e pedia-se para construir o gráfico da função, pois exercícios desse estilo foram propostos tanto em sala de aula como no material didático recomendado. Entretanto, somente a equipe cuja solução está na Figura 170 usou essa estratégia de solução. As outras três (de treze) equipes que elaboraram problemas que atenderam a essa situação, forneceram condições sobre a derivada primeira e/ou segunda, um dos limites no infinito (que representam a assíntota horizontal), com variações nas demais informações fornecidas na formulação (Figura 171).

Sabendo que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$ e o gráfico de $f'(x)$ está representado abaixo, esboce o gráfico de $f(x)$

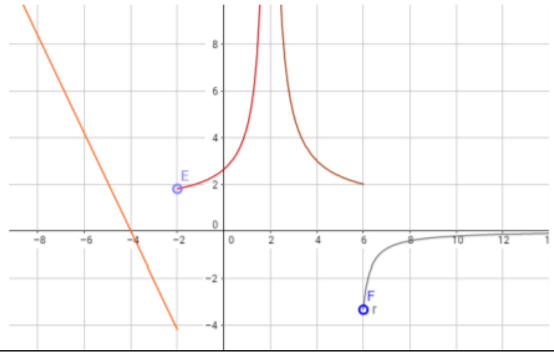


Figura 170 - Problema formulado por G4 para atender à quinta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

1) Esboce o gráfico da função f, definida em Df = ℝ e Imf = (-∞, 5], que satisfaz as seguintes condições:
   i. f '(-4) = 0 e f ' (-2), f ' (6) não existem (há picos);
   ii. f ' (x) > 0 para todo x ∈ (-∞, -4] U [-2, 6];
   iii. P(-4,1) é máximo local e Q(6,5) é máximo local e máximo absoluto;
   iv. f '' (x) > 0 para todo x ∈ [-2,2] U [6, +∞);
   v. S(-2,3) e T(2,1) são pontos de inflexão;
   vi. x = -5, x = -2 e x = 1,8 são raízes da função;
   vii. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$;
   viii. O ponto A(3,3) faz parte da função.

Figura 171 - Problema formulado por G21 para atender à quinta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Dos quatro problemas elaborados classificados como parcialmente corretos, três estão associados com problemas em que os estudantes escolheram uma função e solicitaram para que fosse calculado o limite no infinito. Em outras palavras, desejavam que fosse provada a existência de uma assíntota horizontal. Um exemplo dessa situação está representado na Figura 172. O outro problema dessa mesma categoria solicitava para que fosse construído o gráfico de uma função que satisfizesse alguma condição estipulada e que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$, como pode ser observado na Figura 173.

5) SABENDO QUE A FUNÇÃO QUE DESCREVE O GRÁFICO NO INTERVALO $[6, +\infty)$ É $f(x) = \frac{6}{x} + 4$, CALCULE O LIMITE QUANDO X TENDE A $+\infty$

R: $\lim_{x \to +\infty} \frac{6}{x} + 4 = 4$

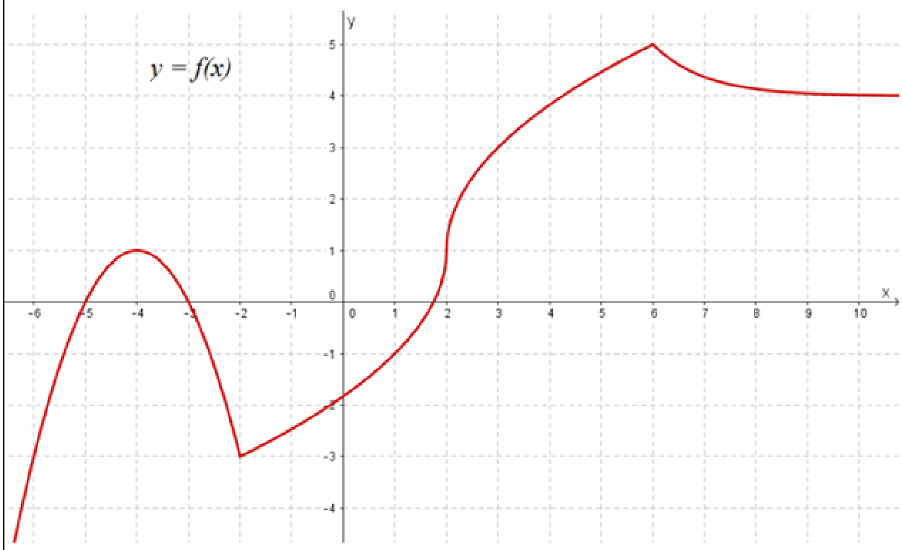
Figura 172 - Problema formulado por G22 para atender à quinta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Esboce um gráfico que esteja dentro do intervalo Imf = (-∞, 5] e que tenha como seu domínio todos os reais e que $lim\ x \to +\infty\ f(x) = 4$.

Figura 173 - Problema formulado por G17 para atender à quinta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Dos problemas elaborados que não atenderam à situação problema proposta, temos dois que partiram do gráfico dado para criar alguma situação a ser respondida, por exemplo, identificar os pontos em que a função ilustrada não era diferenciável (Figura 174); um grupo provou que existe assíntota horizontal (Figura 175); um estudante não deixou claro o que desejava a quem o estivesse resolvendo (Figura 176); um estudante forneceu algumas informações a serem consideradas para construir o gráfico da função, mas os dados não estavam coerentes com o gráfico que deveria ser solução do problema formulado; e, um estudante não formulou problema, apenas argumentou teoricamente como se determinaria assíntota horizontal e, em seguida, aplicou essa teoria. Entretanto, para encontrar assíntota horizontal usou a definição de assíntota vertical. Parte dessa resposta pode ser observada na Figura 177.

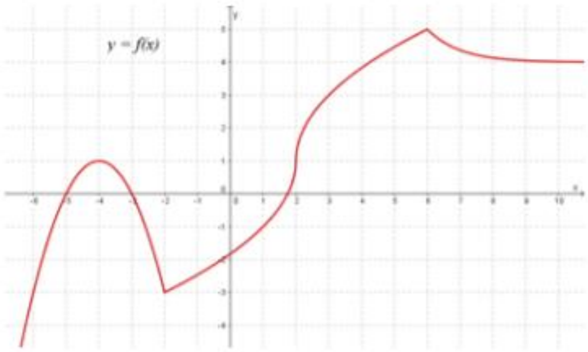
Determine os pontos onde à função não é derivável e comente:



Não é derivável em x= -4 x= -2, x=6, pois, a presença de pico, onde as derivadas laterais serão diferentes. No intervalo de [9, + ∞) onde as derivadas laterais serão diferentes a presença de uma reta tangente horizontal com derivada nula.

Figura 174 - Problema formulado por G23 para atender à quinta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Segue abaixo o gráfico da função f(x):



a) Prove por meio de limites que está função tem uma assíntota horizontal em y=4.

RESPOSTA

a) Pelo gráfico, vemos que a assíntota está na exponencial, então precisamos analisar somente a parte exponencial da função f(x) que é de (6,+∞). Sendo e^x a função básica exponencial com base e, analisando o gráfico, vemos que está transladada 6 unidades em x, 5 unidades em y e está com sinal contrário, então pressupõe-se que a função no intervalo (6,+∞) é dada por $e^{-x+5} + 4$.
Para provarmos que a assíntota é y=4. Temos que a assíntota é horizontal, ou seja, o x deverá tender ao infinito, neste caso, positivo.

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x+5} + 4$$
$$e^{-\infty+5} + 4$$
$$e^{-\infty} + 4$$
$$\frac{1}{e^{\infty}} + 4$$
$$0 + 4$$
$$4$$

$$\frac{1}{e^{\infty}}$$

e^{∞} é um número muito grande e 1 dividido por um número muito grande tende a zero.

Logo, provamos que a uma assíntota horizontal em y=4.

Figura 175 - Problema formulado por G24 para atender à quinta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

O que acontece com uma função quando sua primeira derivada tende a 0 quando x tende a um certo número ou
ao infinito? O que podemos dizer sobre uma situação física que é descrita num gráfico quando isso acontece?
Mostre um gráfico que descreve o movimento de um objeto qualquer e que para quando o tempo tende
ao infinito.

R: Isso indica uma assíntota, quando a taxa de variação de y por x se torna nula e
sua aparência se aproxima
de uma linha reta. Isso se reflete numa situação física que descreve um corpo em movimento, quando
sua velocidade se torna nula, por exemplo, ou seja, ele para.

Figura 176 - Problema formulado por G18 para atender à quinta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Desta forma, investigando o gráfico e então analisando um ponto subjetivo a ser uma assíntota temos que:

$$\lim_{x \to 6+} f(x) = +\infty$$

Assim, podemos observar que no ponto x = 6 do gráfico apresentado na proposta existe uma assíntota horizontal

Figura 177 - Problema formulado por G15 para atender à quinta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Os assuntos identificados nos problemas elaborados já foram todos discutidos nesse texto e estão apontados na Tabela 65.

Tabela 65
Assuntos envolvidos nos problemas formulados referentes à quinta situação

Assunto		Número de respostas	Total de respostas
Construção do gráfico de uma função	A partir da análise do gráfico da primeira derivada	4	8
	A partir de informações dadas	4	
Assíntota horizontal	Forneceu uma função e provou a existência da assíntota usando a definição	5	5
Outras	Identificação gráfica de pontos de não diferenciabilidade	2	3
	Interpretação gráfica em termos de velocidade	1	

6.2.6. Situação 6

A sexta situação problema proposta foi adaptada de Anton, Bivens e Davis (2014), e estava associada com a interpretação cinemática da derivada e está ilustrada na Figura 178. A expectativa da professora-pesquisadora era que os estudantes usassem a teoria de derivadas para interpretar o gráfico da função posição que fora fornecido nessa situação, visto que a primeira derivada da função posição com relação ao tempo é a velocidade e, a segunda derivada da função posição é a aceleração. Para tanto, por meio do gráfico da função posição, os estudantes poderiam extrair as informações sobre (de)crescimento da velocidade através do sinal da primeira derivada; e, informações sobre a aceleração por meio do (de)crescimento da primeira derivada ou ainda pelo sinal da segunda derivada, possível de se obter pelo estudo da concavidade do gráfico da função posição.

6ª Situação: A partir da teoria de derivadas, formule um problema que aborde a aceleração e a velocidade de uma partícula, sabendo que a curva posição está ilustrada na Figura 6.

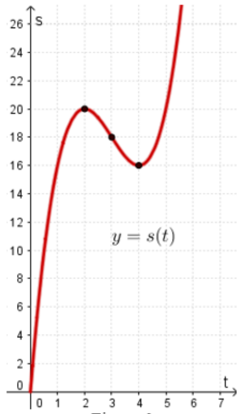
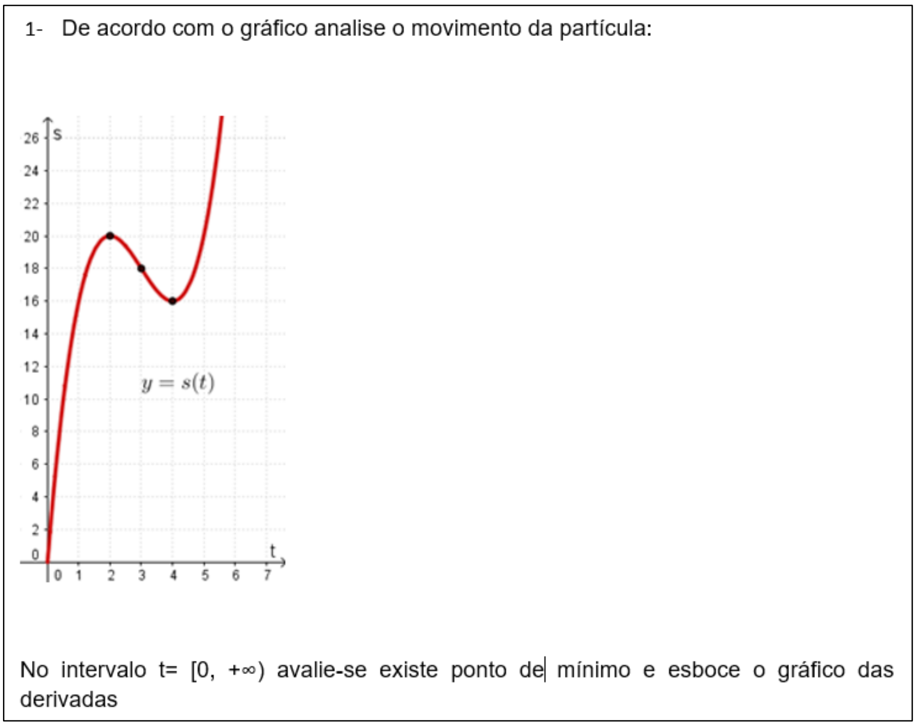


Figura 6

Figura 178 - Sexta situação problema.
Fonte: Produção da autora.

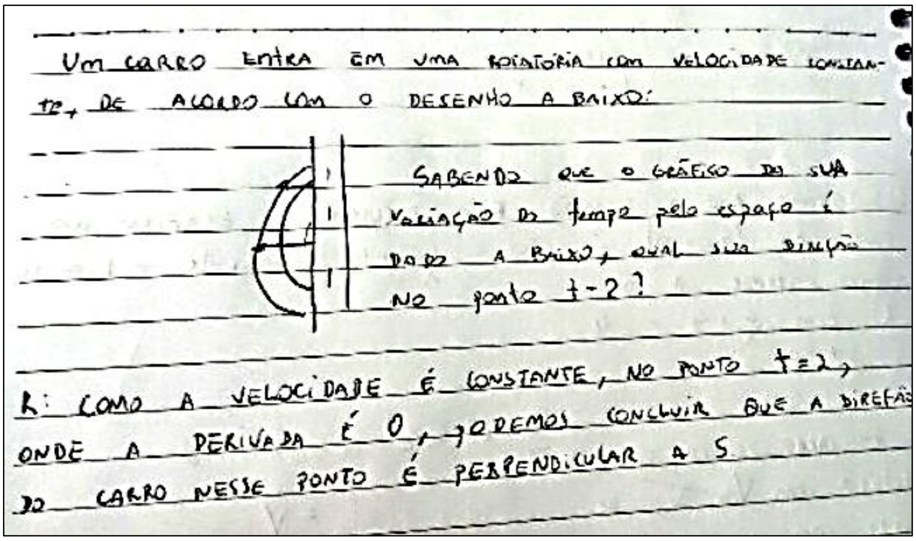
Ao todo houve oito proposições de problemas para atender a essa sexta situação problema. Com relação aos assuntos abordados nas formulações, todos os problemas versaram sobre a interpretação cinemática da derivada, como solicitado. Somente um dos problemas iniciou a análise por meio da expressão analítica que definia a função posição, que nesse caso, era uma função cúbica. As demais formulações, todas partiram da interpretação do gráfico da função posição. Dos trabalhos entregues, dois apresentaram apenas uma possível solução (de um problema não formulado) envolvendo os assuntos de velocidade e aceleração, a partir da análise gráfica. Esses trabalhos foram classificados na categoria de que não atenderam à situação problema, pois não deixaram de forma explícita qual seria o problema que estava sendo resolvido. Um terceiro problema pertencente a essa categoria foi um problema de caráter matemático que usou a teoria de derivadas para justificar a existência de um ponto de mínimo relativo no gráfico da função posição e construir os gráficos das derivadas de primeira e segunda ordem (Figura 179). E, o quarto trabalho dessa categoria, apesar de ser um interessante problema não clássico matemático, não foi bem posto, pois no enunciado falava em velocidade constante e, analisando o gráfico da posição fornecido na sexta situação, não faz sentido se falar em velocidade constante, pois se fosse, ao menos em alguns intervalo, o gráfico da função posição deveria ser uma função do primeiro grau para que ao derivar a primeira vez se obtivesse uma função constante (Figura 180).



1- De acordo com o gráfico analise o movimento da partícula:

No intervalo t= [0, +∞) avalie-se existe ponto de mínimo e esboce o gráfico das derivadas

Figura 179 - Problema formulado por G23 para atender à sexta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.



UM CARRO ENTRA EM UMA TRAJETÓRIA COM VELOCIDADE CONSTANTE, DE ACORDO COM O DESENHO A BAIXO:

SABENDO QUE O GRÁFICO DA SUA VARIAÇÃO DO TEMPO PELO ESPAÇO É DADO A BAIXO, QUAL SUA DIREÇÃO NO PONTO t=2?

NO PONTO t=2,
R: COMO A VELOCIDADE É CONSTANTE, PODEMOS CONCLUIR QUE A DIREÇÃO
ONDE A DERIVADA É 0,
DO CARRO NESSE PONTO É PERPENDICULAR A S

Figura 180 - Problema formulado por G25 para atender à sexta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação às duas propostas consideradas parcialmente corretas, ambas usaram velocidade no enunciado do problema formulado e suas respostas foram por meio da análise gráfica do função posição. Um dos grupos respondeu o que indagou em sua formulação e, o outro, falou também sobre aceleração, que não fora feita menção explícita sobre o assunto no enunciado do mesmo, como pode ser observado na Figura 181. O problema dessa imagem é um problema aberto, pois permitiria outra interpretação.

Dado o gráfico que descreve a posição de uma partícula, o que acontece com a velocidade quando t tende a 2? Qual é o significado físico disso e o que poderia ter acontecido?
E quando o tempo tende de 2 a 4, sabe-se que a posicão s diminui com o tempo, dê uma situacão que poderia ter desencadeado isso.

R: A velocidade é a primeira derivada da posicão, e nota-se que ela tende a 0 quando t tende a 2. Nota-se que isso descreve um objeto parando seu movimento, como um carro freiando.
Quando o tempo tende de 2 a 4, a velocidade se torna negativa, já que a linha tangente fica com sinal negativo. Isso é causado pela aceleracão negativa (segunda derivada), que pode ter sido, por exemplo, um carro dando ré. Analisando o gráfico inteiro, pode-se dizer que o mesmo pode descrever um carro acelerando, depois dando ré, mudando o sentido de sua velocidade e aceleracão, e depois retornando a acelerar e ganhar velocidade.

Figura 181 - Problema formulado por G18 para atender à sexta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Somente dois problemas formulados atenderam totalmente à sexta situação problema. Um deles foi classificado como clássico matemático, forneceu a expressão analítica da função cúbica associada com a posição de um objeto e solicitava que a velocidade e a aceleração fossem determinadas em um instante específico (Figura 182). O outro problema foi categorizado como não clássico contextualizado, pois a partir do gráfico fornecido o estudante deveria encontrar a expressão analítica que representava a função posição, representar os gráficos de velocidade e aceleração, e ainda, dar uma possível interpretação física (Figura 183).

Sabendo que a equação que representa a posição de um corpo em relação ao tempo é dado por? $y = t^3 - 9t^2 + 24t$, responda:

a) Qual é a posição quando sua velocidade é nula?
b) Considerando a aceleração de objeto, o que ocorre em $t = 3$? Por que ela é negativa até este instante?

Figura 182 - Problema formulado por G4 para atender à sexta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

O gráfico acima (figura 6) representa a posição de uma partícula em função do tempo, sabe-se que a função é cubica, com isso, determine a função que descreve a posição em função do tempo $s(t)$, assim como a taxa de variação da posição em função do tempo (velocidade), e a taxa de variação da velocidade em função do tempo (aceleração). A partir disso esboce o gráfico da posição em função o tempo, os gráficos da velocidade e da aceleração, e comente sobre os efeitos físicos dos resultados encontrados nos pontos $x = 2, x = 3\ e\ x = 4$, assim como nos intervalos de $[0,3]\ e\ [3,+\infty]$

Figura 183 - Problema formulado por G3 para atender à sexta situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

6.2.7. Situação 7

A sétima situação problema foi adaptada de uma atividade desenvolvida por Cunha, Martins e Viseu (2014), que fora desenvolvida em turma de Matemática B do $11^{\underline{o}}$ ano do Ensino Secundário e está relacionada com as aplicações de derivadas, mais especificamente, com o conteúdo de otimização.

Essa situação problema (Figura 184) apresentava dois gráficos, no primeiro havia um retângulo com um dos vértices na origem do sistema cartesiano, outros dois vértices sobre os eixos cartesianos e o quarto vértice estava sobre o gráfico de uma função $y = f(x)$. Em outras palavras, no primeiro gráfico, o retângulo estava inscrito numa curva; e, no segundo, havia sido fornecida a expressão analítica de uma função $A(x)$. Nessa situação, os estudantes deveriam usar a criatividade para elaborar um problema que abordasse o conteúdo de pontos extremos e conseguisse relacionar os dois gráficos dados.

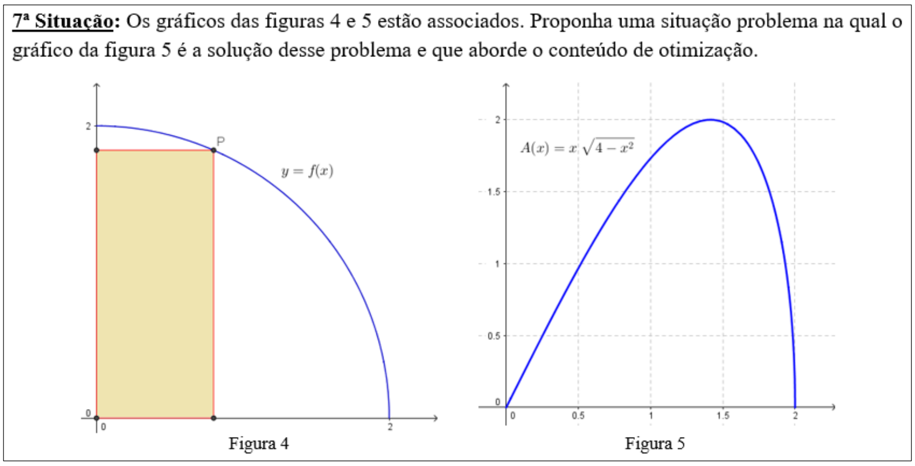


Figura 184 - Sétima situação problema proposta.
Fonte: Produção da autora.

Ao elaborar essa situação problema a professora-pesquisadora pensou no problema de encontrar as dimensões de um retângulo de área máxima que pode ser inscrito em um semicírculo, em que um de seus lados está sobre o diâmetro da circunferência e os outros dois vértices estavam sobre a circunferência. Nessas condições, o segundo gráfico representaria a função área do retângulo. Como na lista de exercícios recomendada aos estudantes existia esse problema, com uma figura ilustrativa dessa situação, a professora pesquisadora optou por fazer uma modificação com o intuito de alterar a figura ilustrativa, considerou apenas meio semicírculo e representou os eixos coordenados. Dessa forma, esperava-se que a imagem dada não remetesse diretamente a um problema específico já conhecido, pois poderia inibir o uso da criatividade dos estudantes. Apesar desse cuidado, das quatro proposições de problemas elaborados pelos estudantes, todas versaram sobre o assunto de maximização, sendo que três estavam relacionadas com área máxima de um retângulo inscrito num semicírculo (Figura 185, Figura 186 e Figura 187) e um problema, ligeiramente modificado, sobre a medida da base do retângulo (Figura 188).

Calcule a área máxima que o retângulo pode ocupar tendo base nos dois gráficos que estão relacionados tendo P o ponto de variação da área do retângulo. Dados:

- $x^2 + y^2 = 4$
- $g(x) = x.\sqrt{4 - x^2}$

Figura 185 - Problema formulado por G22 para atender à sétima situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Considere um retangulo inscrito numa circunferência como abaixo:

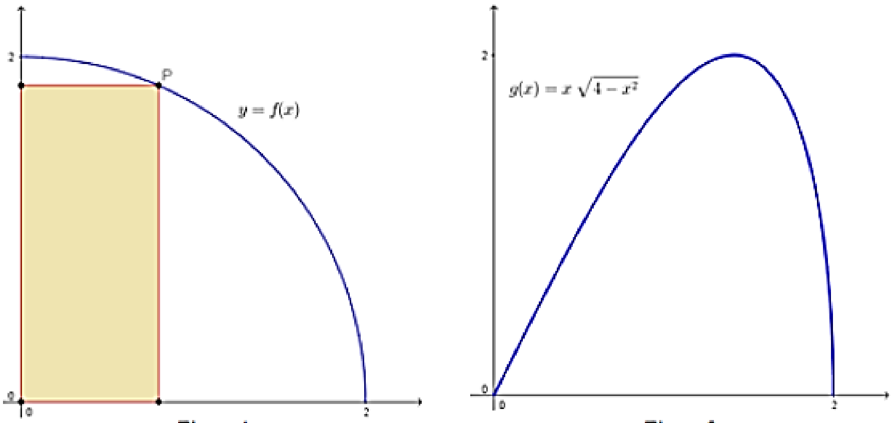


Figura 4 Figura 5

Figura 1: Caption

Sabendo que o raio da circunferência é de 2 unidades, que $g(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ representa a area do retângulo inscrito, determine as coordenadas do ponto P para que a área do retângulo seja máxima, em seguida calcule a área do retângulo formado considerando um arco de 180º.

Figura 186 - Problema formulado por G4 para atender à sétima situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Um arquiteto projetou um edifício na qual a planta baixa do barrilete (último pavimento do edifício antes da caixa d'água) é dada pela forma de um quarto de circunferência, conforme a figura 4, dada pela função $x^2 + y^2 = 4$. Com base neste projeto o Engenheiro deverá projetar a caixa d'água; pelas facilidades construtivas a caixa d'água deve ser no formato retangular, e para distribuir da maneira mais homogênea possível as tensões na laje provocadas pelo peso da água deve-se ocupar a maior área possível.
Sabendo-se que a figura 5 representa a área da caixa d'água de acordo com a coordenada x, determine usando o princípio de derivada os valores de x e de y para a área máxima da caixa d'água.

Figura 187 - Problema formulado por G3 para atender à sétima situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Esboce o gráfico da f'(x) que relaciona base máxima que o retângulo inscrito pode ter para estar contido na curva da figura 5 e comente

Figura 188 - Problema formulado por G23 para atender à sétima situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Os problemas apresentados na Figura 186 e Figura 187 foram as proposições que atenderam totalmente à situação problema. O primeiro foi categorizado como adaptado de clássico matemático e, o segundo, como não clássico matemático contextualizado. Os problemas ilustrados na Figura 185 e na Figura 188 são exemplos de problemas que estão mal estruturados. O primeiro desses foi categorizado como parcialmente correto, pois não destacou o fato do retângulo ter de ser um retângulo inscrito, e adaptado de clássico matemático. O problema da Figura 188 não atende à sétima situação problema, pois faltam informações no enunciado. Ele deseja a representação do gráfico de f', mas não explicita o significado de f. Quanto às resoluções, todos elaboradores dos problemas apresentaram resolução incompleta (exceto o problema da Figura 188), pois após encontrarem o ponto crítico cuja primeira derivada é nula, assumiram que esse valor corresponde à dimensão que maximizará a área do retângulo inscrito. Porém, para chegarem a tal conclusão deveriam aplicar algum tipo de teste para determinação de extremos, por exemplo, o teste da segunda derivada.

6.2.8. Situação 8

A oitava situação (Figura 189) problema foi inspirada num clássico problema de otimização encontrado em livros didáticos (Anton, Bivens & Davis, 2014; Stewart, 2013) relacionado com a necessidade de encontrar as dimensões de uma caixa com base quadrada que minimizam a quantidade de material a ser utilizado na confecção dessa caixa que deve ter um volume especificado. A oitava situação problema também foi adaptada do artigo de Cunha, Martins e Viseu (2014) e, assim como a sétima situação (seção 6.2.7), abarca o conteúdo de otimização. Uma análise comparativa dos problemas propostos pelos participantes dessa pesquisa e pelos monitores de CDI, relativos a sétimo e a oitava situação problema, está descrita em Azevedo, Figueiredo e Palhares (2017c).

8ª Situação: Formule um problema que minimize a função $2x^2 + 4xy$ sabendo que $x^2y = 1000$.

Figura 189 - Oitava situação problema.
Fonte: Produção da autora.

Essa ideia clássica foi utilizada somente por dois grupos. Quanto à resolução, ambas equipes acertaram parcialmente, pois não provaram que o valor crítico encontrado era de facto o valor procurado. Além disso, um desses grupos propôs uma caixa com base e tampa quadradas, mas com um formato um pouco diferente do que geralmente é utilizado nos exemplos de CDI ao considerar que haveria sobreposição de material na tampa, como pode ser observado na Figura 190. Essa equipe esboçou uma caixa com formato facilmente encontrado no mundo real. Entretanto, na resolução do problema proposto ignoraram essa informação. Resolveram o problema como se a tampa não existisse. Uma possível hipótese é que o erro ocorreu apenas na ilustração da caixa e que a equipe desejava trabalhar com a caixa sem tampa.

Tendo uma caixa de base e tampa quadradas, sendo seus lados retangulares calcule o menor valor das dimensões que essa caixa possa ter com o volume de 1000 cm³.

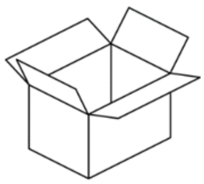


Figura 190 - Problema formulado por G26 para atender à oitava situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Ao todo foram oito problemas elaborados pelos estudantes. Desses, três proposições atenderam parcialmente à oitava situação problema. Além do problema mencionado no parágrafo anterior, o outro dessa categoria está ilustrado na Figura 191. Este problema foi classificado como clássico contextualizado, porque entendemos que pode ser visto como uma variação do clássico problema matemático de minimizar uma função satisfazendo determinada condição, como exemplificado na Figura 192. Entretanto, o problema da Figura 191 apresenta erro de notação matemática na formulação, porque considera uma função que depende de duas variáveis e ao representar analiticamente a função volume de uma peça, o grupo denotou por $f(x)$ em vez de $f(x, y)$, ou seja, usou a notação como se a função dependesse de apenas uma variável. Além disso, ele pede para encontrar o valor de x para que o volume seja máximo. Ao resolver o problema, esse grupo encontrou o ponto crítico e não aplicou critérios para determinação dos pontos extremos. Se o tivesse feito, teria percebido que o valor encontrado corresponderia a um ponto de mínimo, não de máximo como almejava e poderia ter reformulado o problema proposto. Esse problema foi classificado como parcialmente correto, porque abordou o assunto e relações apontadas na oitava situação. Outro motivo para tal consideração é que o problema poderia ser posto dessa forma, mas na sua resolução poder-se-ia discutir que não haveria solução para tal problema. Essa seria uma discussão interessante, pois no ensino tradicional os estudantes são acostumados a sempre resolverem exercícios/problemas que tenham solução e que ela seja única.

O volume de uma peça que está em fabricação é dado por $f(x) = 2x^2 + 4xy$ sendo que $x^2y = 1000$. Qual será o valor de x para que a peça tenha um volume máximo.

Figura 191 - Problema formulado por G26 para atender à oitava situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Minimize a equação $f(x, y) = 2x^2 + 4xy$ sendo que → $x^2y = 1000$.

Figura 192 - Problema formulado por G15 para atender à oitava situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Dos problemas elaborados somente duas proposições atenderam à oitava situação problema, sendo que um deles foi categorizado como adaptado de um problema clássico matemático (Figura 193) e outro como não clássico contextualizado (Figura 194). Na Figura 193 percebemos que o grupo G4 contextualizou o clássico problema matemático que consiste em encontrar as dimensões de uma caixa com base quadrada que deve satisfazer um volume dado. Como variação desse clássico matemático, foi solicitado para determinar o custo na construção do reservatório de água (caixa) conhecendo o custo do material por metro quadrado. Na resolução desse problema os estudantes provaram que o valor de x encontrado corresponde a um ponto de mínimo local, mas não provaram que este valor corresponde ao mínimo absoluto.

Precisamos construir um reservatório que armazene 1000 litros de água. Sabendo que sua base precisa ser quadrada, qual deve ser a altura para que seu custo de construção seja o mínimo possível? Sabendo que são gastos R$1,50/ m². Qual será o custo total da caixa?

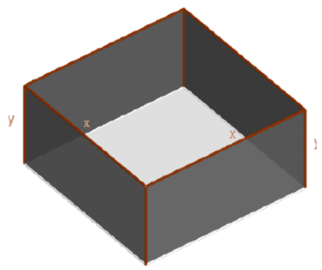


Figura 193 - Problema formulado por G4 para atender à oitava situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Na imagem apresentada na Figura 194 , pode ser observado que o estudante teve uma ideia original associando a função dada como sendo o gasto de um consumidor ao adquirir algum produto e que o mesmo poderia usufruir de descontos levando produtos usados, mas limitando o número de produtos que poderiam ser considerados. Quanto à resolução desse problema, o estudante usou o teorema de Weierstrass para garantir que o valor máximo encontrado correspondia ao máximo absoluto do problema, porém não provou que o valor crítico determinado, de facto, era o ponto de mínimo local.

Na compra de produtos novos em uma empresa de produtos eletrônicos, o cliente pode levar até 5 produtos usados para trocar por um desconto, onde o custo que será pago é descrito pela função $f(x) = 2x^2 + 4xy$, sabendo que $x^2y = 1000$. Determine o preço mínimo que será pago pelo consumidor na compra de um produto novo.

Resposta:

Ao determinar o domínio, tem-se que $1 \leq x \leq 5$, com x ∈ IN.

Sabendo que $x^2y = 1000$, deve-se isolar uma das variáveis:

$$y = \frac{1000}{x^2}$$

Substituindo o valor de x na função do preço do produto:

$$f(x) = 2x^2 + 4x\left(\frac{1000}{x^2}\right) = 2x^2 + \frac{4000x}{x^2} = 2x^2 + \frac{4000}{x}$$

Derivando $f(x)$:

$$f'(x) = (2x^2)' + 4000.(x^{-1})' + (4000)'.x^{-1}$$

$$f'(x) = 4x + 4000.(-x^{-2}) + 0$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 4x - \frac{4000}{x^2}}$$

Encontrando $f'(x) = 0$

$$4x - \frac{4000}{x^2} = 0$$

$$\frac{4x^3 - 4000}{x^2} = 0$$

$$4x^3 = 4000$$

$$x^3 = \frac{4000}{4}$$

$$\boldsymbol{x = 10}$$

Sendo assim, o preço mínimo a ser pago seria ao trocar 10 produtos, porém o domínio determinado é $1 \leq x \leq 5$, com x ∈ IN. Deve-se então analisar os extremos do intervalo, pois $f(x)$ é uma função contínua nesse intervalo, e segundo o teorema de Weierstrass, os pontos de máximo e mínimo são os extremos do intervalo.

$$\boldsymbol{f(1)} = 2.1^2 + \frac{4000}{1} = \boldsymbol{4002}$$

$$\boldsymbol{f(5)} = 2.5^2 + \frac{4000}{5} = \boldsymbol{850}$$

Sendo assim, o consumidor pagará menos ao trocar 5 produtos, com um custo de R$850,00.

Figura 194 - Problema formulado por G12 para atender à oitava situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Três problemas não atenderam à situação problema proposta. Desses, um dos estudantes apresentou uma proposta de resolução de um problema, entretanto, não apresentou enunciado; um estudante relacionou as duas funções fornecidas nessa situação problema, elaborou um problema não clássico contextualizado aplicado à Física, mas não usou o conteúdo de otimização como era indicado (Figura 195); e, em outro problema dessa categoria, aparentemente, o estudante estaria propondo um problema como ilustrado na Figura 196, mas em vez de apontar que desejava minimizar a função f foi solicitado para "reduzir a função". Inicialmente, ao ler o problema a investigadora achava que o estudante desejava minimizar a função e se expressou mal, mas ao analisar a resolução foi observado que para "reduzir" a função, o estudante isolou x da expressão $x^2y = 1000$ e substituiu na equação $f(x, y) = 0$. Depois disso, apresentou uma série de erros conceituais. Infelizmente, não houve tempo para a professora conversar de forma individual com o estudante afim de lhe dar o *feedback* antes da avaliação, pois o problema foi postado na plataforma Moodle na data limite de entrega dos trabalhos e essa era após[118] a data da avaliação escrita.

[118] A pedido dos estudantes a data de entrega foi alterada.

Tendo uma partícula que libela energia de forma continua para outras duas outras partículas. Analisou-se que seu movimento pode ser representado pela equação $f(x) = 2x^2 + 4xy$ $(\frac{J}{m}/s)$, tal que x representa sua velocidade e y energia recebida, todavia esta partícula se locomove conforme outra partícula $x^2y = 1000 \left(\frac{\frac{J}{m}}{s}\right)$. Determine se no instante onde a velocidade for de 0,00000008 m/s, será crescente ou decrescente, a relação de velocidade entre elas.

Figura 195 - Problema formulado por G23 para atender à oitava situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Dada a função $f(x, y) = 2x^2 + 4xy$, reduza ela Sabendo que $x^2y = 1000$.

Figura 196 - Problema formulado por G27 para atender à oitava situação.
Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação aos erros encontrados nas resoluções dos problemas elaborados, das três que foram consideradas parcialmente corretas, duas não provaram que o ponto crítico encontrado era o ponto de máximo desejado e uma das resoluções que fez análise, cometeu erro de matemática básica no início da resolução.

Para finalizar essa seção, apresentamos a Tabela 66 a fim de ilustrar os conteúdos que foram abordados nos problemas criados para atender à oitava situação.

Tabela 66
Assuntos envolvidos nos problemas formulados referentes à oitava situação

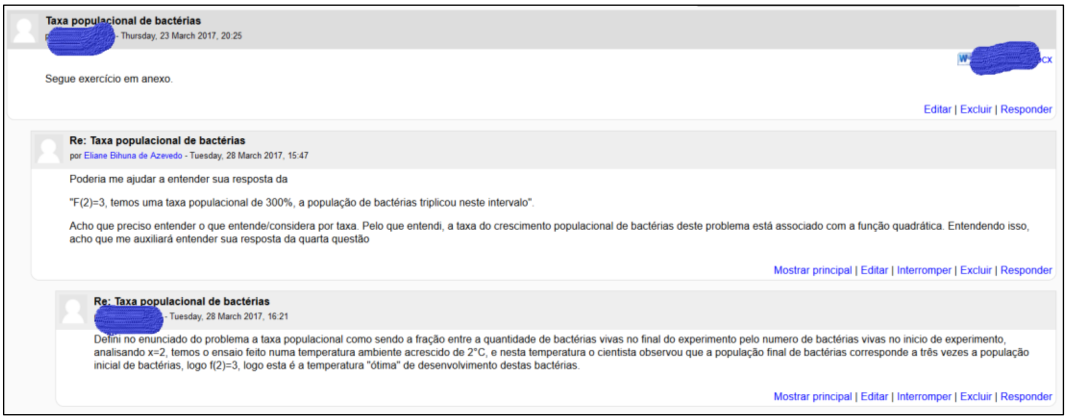
	Assunto	Número de respostas	Total de respostas
Minimização	Do volume de uma caixa	2	6
	De função	3	
	De custo	1	
Outros	Volume máximo de uma caixa	1	2
	(De)crescimento de velocidade	1	

6.9. Reflexões

A ideia inicial do fórum idealizado pela professora pesquisadora era de que os colegas dessem contribuições de forma a melhorar a proposta de algum estudante, corrigir erros e até mesmo usar a ideia inicial e propor reformulações. Ou seja, desejávamos que houvesse uma interação construtiva entre os participantes, porém em poucos trabalhos postados na plataforma houve alguma interação. Para ilustrar essa constatação, observe a conversa no fórum referente à primeira situação problema que está ilustrada na Figura 197. O trabalho de G1 foi postado na plataforma Moodle no dia 24 de março. Como não houve nenhuma manifestação de estudante por aqueles dias, a investigadora fez uma tentativa de instigar a participação dos demais colegas no dia 28 de março. Entretanto, somente no dia 26 de junho, que foi o último dia que a professora pesquisadora estava aceitando participações no fórum e proposta de problemas (re)formulados, foi dada uma resposta superficial a essa intervenção. O colega respondeu que não concordava e que a solução de G1 não atendia todos os valores da função, mas não explicou de que função estava falando, não percebeu que a resolução continha erros e nem propôs reformulação. A investigadora entende que interações como essa ocorreram apenas porque, dias antes dessa participação no fórum, ela enviou por e-mail aos estudantes todos os critérios que usaria para atribuir a nota referente aos trabalhos de formulação de problemas e, um deles estava relacionado com o número de participações no fórum. Nesse caso, o estudante que fez o comentário apresentado na Figura 197, até àquele momento, não havia elaborado nenhum problema nem participado no fórum. E, no dia 26 de junho, fez algum tipo de comentário em vários trabalhos dos colegas e postou seus problemas formulados. Acreditamos que esse tipo de atitude ocorreu porque a investigadora falhou por não ter deixado claro, desde o início do semestre letivo, quais seriam os critérios de avalição. Essa falha da professora pesquisadora ocorreu pela inexperiência em avaliar trabalhos desse estilo, pois ela não tinha clareza de como faria tal avaliação. A professora pesquisadora aprendeu com esse erro. Para evitar constrangimentos como esses, no segundo semestre de 2017, a professora reaplicou essa atividade que poderia ser feita em grupo de até cinco estudantes e as respostas deveriam ser entregues no ambiente apropriado criado na plataforma Moodle apenas para postagens das soluções. Assim sendo, apesar de usar um ambiente virtual para entrega das tarefas não houve oportunidade dos estudantes interagirem como no semestre anterior que exisitia um fórum para cada situação problema. No momento que propôs o trabalho já explicou todos os critérios que seriam considerados na sua avaliação.

Figura 197 - Interação no fórum sobre o problema formulado por G1, primeira situação.
Fonte: Dados da pesquisadora.

Outro tipo de interação que houve no fórum foi o diálogo estabelecido entre investigadora e elaborador, como segue nas Figura 198 e Figura 200 Nesse caso, a professora estava tentando compreender a resolução apresentada e esclarecendo as dúvidas do problema elaborado. No meio desse diálogo, um estudante apresentou a resolução desse mesmo problema, sem modificações no enunciado (Figura 199). Ou seja, esse estudante não entendeu que poderia reformular o problema proposto ou simplesmente esclarecer as dúvidas levantadas.



Taxa populacional de bactérias
[redacted] - Thursday, 23 March 2017, 20:25

W[redacted]cx

Segue exercício em anexo.

Editar | Excluir | Responder

Re: Taxa populacional de bactérias
por Eliane Bihuna de Azevedo - Tuesday, 28 March 2017, 15:47

Poderia me ajudar a entender sua resposta da

"F(2)=3, temos uma taxa populacional de 300%, a população de bactérias triplicou neste intervalo".

Acho que preciso entender o que entende/considera por taxa. Pelo que entendi, a taxa do crescimento populacional de bactérias deste problema está associado com a função quadrática. Entendendo isso, acho que me auxiliará entender sua resposta da quarta questão

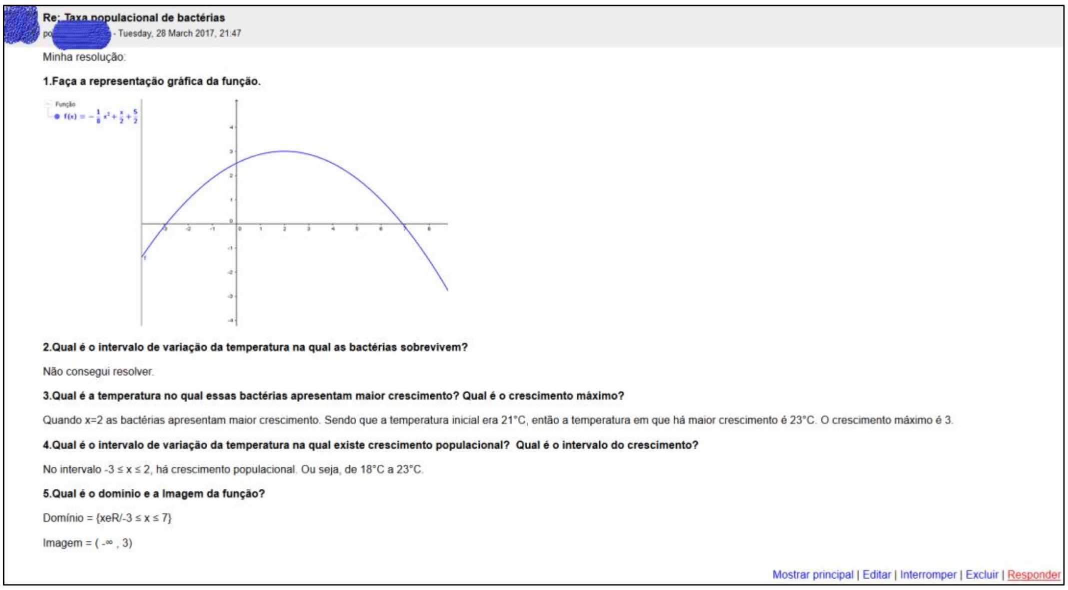
Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder

Re: Taxa populacional de bactérias
[redacted] - Tuesday, 28 March 2017, 16:21

Defini no enunciado do problema a taxa populacional como sendo a fração entre a quantidade de bactérias vivas no final do experimento pelo numero de bactérias vivas no inicio de experimento, analisando x=2, temos o ensaio feito numa temperatura ambiente acrescido de 2°C, e nesta temperatura o cientista observou que a população final de bactérias corresponde a três vezes a população inicial de bactérias, logo f(2)=3, logo esta é a temperatura "ótima" de desenvolvimento destas bactérias.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder

Figura 198 - Interação no fórum sobre o problema formulado por G3, primeira situação, parte I.
Fonte: Dados da pesquisadora.



Re: Taxa populacional de bactérias
[redacted] - Tuesday, 28 March 2017, 21:47

Minha resolução:

1.Faça a representação gráfica da função.

2.Qual é o intervalo de variação da temperatura na qual as bactérias sobrevivem?

Não consegui resolver.

3.Qual é a temperatura no qual essas bactérias apresentam maior crescimento? Qual é o crescimento máximo?

Quando x=2 as bactérias apresentam maior crescimento. Sendo que a temperatura inicial era 21°C, então a temperatura em que há maior crescimento é 23°C. O crescimento máximo é 3.

4.Qual é o intervalo de variação da temperatura na qual existe crescimento populacional? Qual é o intervalo do crescimento?

No intervalo -3 ≤ x ≤ 2, há crescimento populacional. Ou seja, de 18°C a 23°C.

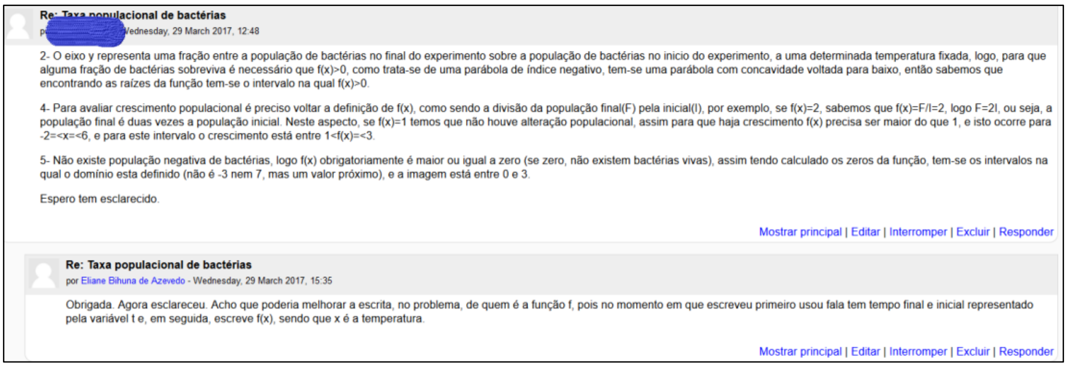
5.Qual é o domínio e a Imagem da função?

Domínio = {xeR/-3 ≤ x ≤ 7}

Imagem = (-∞ , 3)

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder

Figura 199 - Interação no fórum sobre o problema formulado por G3, primeira situação, parte II.
Fonte: Dados da pesquisadora.



Re: Taxa populacional de bactérias
[redacted] Wednesday, 29 March 2017, 12:48

2- O eixo y representa uma fração entre a população de bactérias no final do experimento sobre a população de bactérias no inicio do experimento, a uma determinada temperatura fixada, logo, para que alguma fração de bactérias sobreviva é necessário que f(x)>0, como trata-se de uma parábola de índice negativo, tem-se uma parábola com concavidade voltada para baixo, então sabemos que encontrando as raízes da função tem-se o intervalo na qual f(x)>0.

4- Para avaliar crescimento populacional é preciso voltar a definição de f(x), como sendo a divisão da população final(F) pela inicial(I), por exemplo, se f(x)=2, sabemos que f(x)=F/I=2, logo F=2I, ou seja, a população final é duas vezes a população inicial. Neste aspecto, se f(x)=1 temos que não houve alteração populacional, assim para que haja crescimento f(x) precisa ser maior do que 1, e isto ocorre para -2=<x=<6, e para este intervalo o crescimento está entre 1<f(x)=<3.

5- Não existe população negativa de bactérias, logo f(x) obrigatoriamente é maior ou igual a zero (se zero, não existem bactérias vivas), assim tendo calculado os zeros da função, tem-se os intervalos na qual o domínio esta definido (não é -3 nem 7, mas um valor próximo), e a imagem está entre 0 e 3.

Espero tem esclarecido.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder

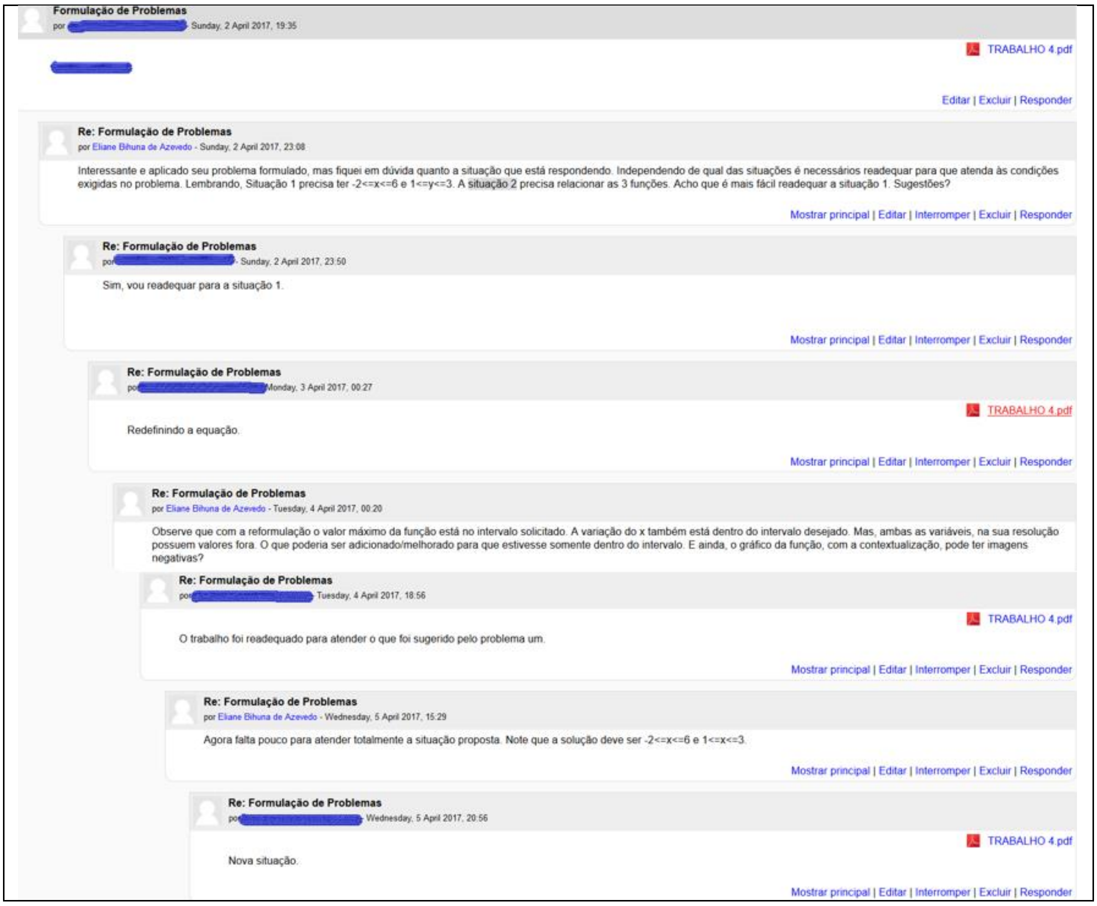
Re: Taxa populacional de bactérias
por Eliane Bihuna de Azevedo - Wednesday, 29 March 2017, 15:35

Obrigada. Agora esclareceu. Acho que poderia melhorar a escrita, no problema, de quem é a função f, pois no momento em que escreveu primeiro usou fala tem tempo final e inicial representado pela variável t e, em seguida, escreve f(x), sendo que x é a temperatura.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder

Figura 200 - Interação no fórum sobre o problema formulado por G3, primeira situação, parte III.
Fonte: Print do Moodle.

Em outros casos, o diálogo estabelecido entre professora e aluno foi para que o estudante pudesse entender que sua formulação não estava satisfazendo o que fora proposto, como pode ser observado na Figura 201. O aluno fez algumas reformulações, conforme auxílio recebido da professora. Pode-se observar que nenhum colega participou do diálogo.



Formulação de Problemas
por [redacted] Sunday, 2 April 2017, 19:35

TRABALHO 4.pdf

[redacted]

Editar | Excluir | Responder

Re: Formulação de Problemas
por Eliane Bihuna de Azevedo - Sunday, 2 April 2017, 23:08

Interessante e aplicado seu problema formulado, mas fiquei em dúvida quanto a situação que está respondendo. Independendo de qual das situações é necessários readequar para que atenda às condições exigidas no problema. Lembrando, Situação 1 precisa ter -2<=x<=6 e 1<=y<=3. A situação 2 precisa relacionar as 3 funções. Acho que é mais fácil readequar a situação 1. Sugestões?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder

Re: Formulação de Problemas
por [redacted] - Sunday, 2 April 2017, 23:50

Sim, vou readequar para a situação 1.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder

Re: Formulação de Problemas
po[redacted]Monday, 3 April 2017, 00:27

TRABALHO 4.pdf

Redefinindo a equação.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder

Re: Formulação de Problemas
por Eliane Bihuna de Azevedo - Tuesday, 4 April 2017, 00:20

Observe que com a reformulação o valor máximo da função está no intervalo solicitado. A variação do x também está dentro do intervalo desejado. Mas, ambas as variáveis, na sua resolução possuem valores fora. O que poderia ser adicionado/melhorado para que estivesse somente dentro do intervalo. E ainda, o gráfico da função, com a contextualização, pode ter imagens negativas?

Re: Formulação de Problemas
por [redacted] Tuesday, 4 April 2017, 18:56

TRABALHO 4.pdf

O trabalho foi readequado para atender o que foi sugerido pelo problema um.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder

Re: Formulação de Problemas
por Eliane Bihuna de Azevedo - Wednesday, 5 April 2017, 15:29

Agora falta pouco para atender totalmente a situação proposta. Note que a solução deve ser -2<=x<=6 e 1<=x<=3.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder

Re: Formulação de Problemas
por [redacted] Wednesday, 5 April 2017, 20:56

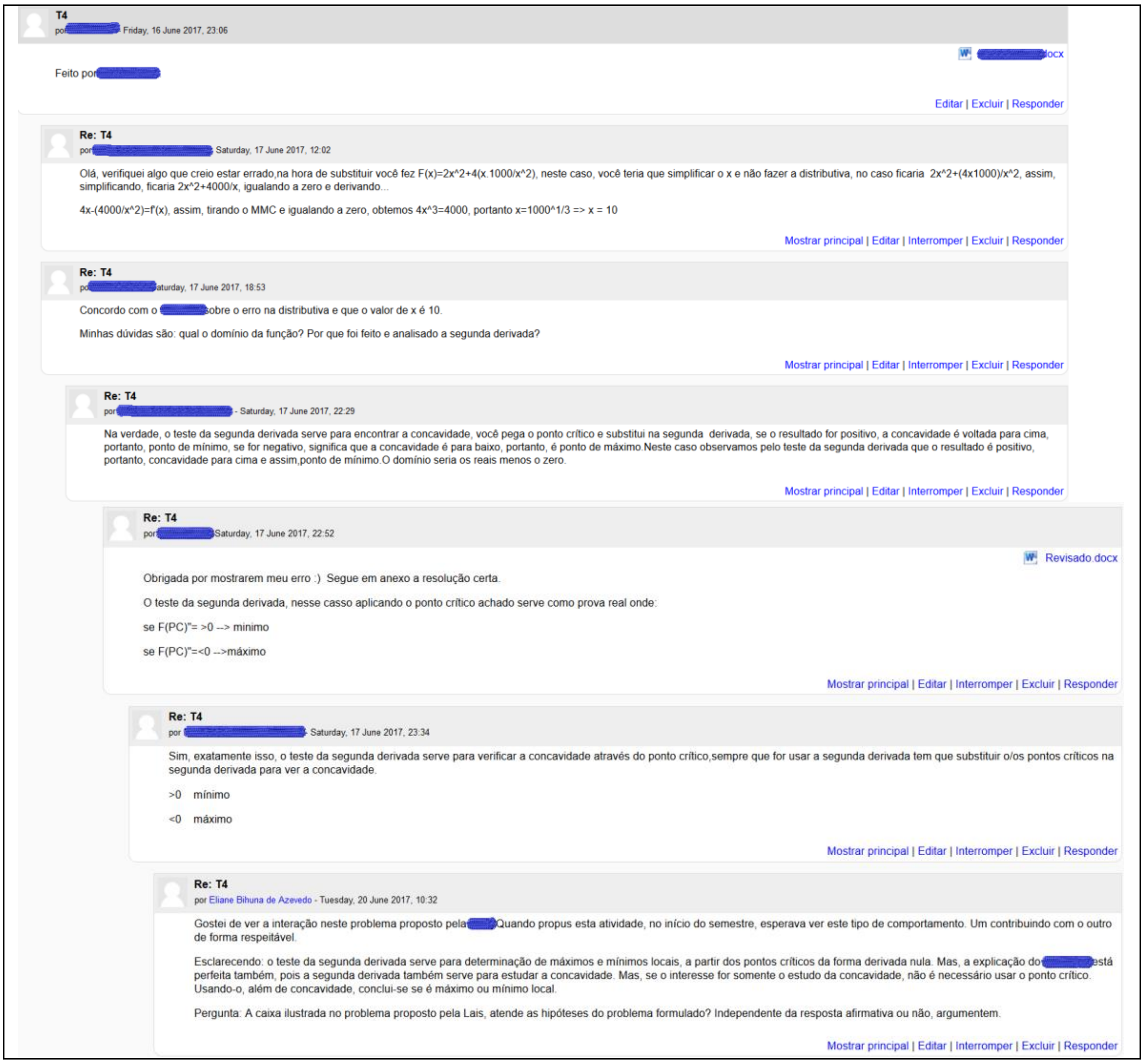
TRABALHO 4.pdf

Nova situação.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder

Figura 201 - Interação no fórum sobre o problema formulado por G28, primeira situação.
Fonte: Print do Moodle.

Ocorreram poucas interações construtivas no fórum da forma como a professora pesquisadora almejava. Um exemplo desse tipo de situação está ilustrado na Figura 202.



T4
po[redacted] Friday, 16 June 2017, 23:06

[redacted]docx

Feito por[redacted]

Editar | Excluir | Responder

Re: T4
por[redacted] Saturday, 17 June 2017, 12:02

Olá, verifiquei algo que creio estar errado,na hora de substituir você fez F(x)=2x^2+4(x.1000/x^2), neste caso, você teria que simplificar o x e não fazer a distributiva, no caso ficaria 2x^2+(4x1000)/x^2, assim, simplificando, ficaria 2x^2+4000/x, igualando a zero e derivando...

4x-(4000/x^2)=f'(x), assim, tirando o MMC e igualando a zero, obtemos 4x^3=4000, portanto x=1000^1/3 => x = 10

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder

Re: T4
po[redacted]aturday, 17 June 2017, 18:53

Concordo com o [redacted]sobre o erro na distributiva e que o valor de x é 10.

Minhas dúvidas são: qual o domínio da função? Por que foi feito e analisado a segunda derivada?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder

Re: T4
por[redacted] - Saturday, 17 June 2017, 22:29

Na verdade, o teste da segunda derivada serve para encontrar a concavidade, você pega o ponto crítico e substitui na segunda derivada, se o resultado for positivo, a concavidade é voltada para cima, portanto, ponto de mínimo, se for negativo, significa que a concavidade é para baixo, portanto, é ponto de máximo.Neste caso observamos pelo teste da segunda derivada que o resultado é positivo, portanto, concavidade para cima e assim,ponto de mínimo.O domínio seria os reais menos o zero.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder

Re: T4
por[redacted]Saturday, 17 June 2017, 22:52

Revisado.docx

Obrigada por mostrarem meu erro :) Segue em anexo a resolução certa.

O teste da segunda derivada, nesse casso aplicando o ponto crítico achado serve como prova real onde:

se F(PC)"= >0 --> minimo

se F(PC)"=<0 -->máximo

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder

Re: T4
por [redacted] Saturday, 17 June 2017, 23:34

Sim, exatamente isso, o teste da segunda derivada serve para verificar a concavidade através do ponto crítico,sempre que for usar a segunda derivada tem que substituir o/os pontos críticos na segunda derivada para ver a concavidade.

>0 mínimo

<0 máximo

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder

Re: T4
por Eliane Bihuna de Azevedo - Tuesday, 20 June 2017, 10:32

Gostei de ver a interação neste problema proposto pela[redacted]Quando propus esta atividade, no início do semestre, esperava ver este tipo de comportamento. Um contribuindo com o outro de forma respeitável.

Esclarecendo: o teste da segunda derivada serve para determinação de máximos e mínimos locais, a partir dos pontos críticos da forma derivada nula. Mas, a explicação do[redacted]está perfeita também, pois a segunda derivada também serve para estudar a concavidade. Mas, se o interesse for somente o estudo da concavidade, não é necessário usar o ponto crítico. Usando-o, além de concavidade, conclui-se se é máximo ou mínimo local.

Pergunta: A caixa ilustrada no problema proposto pela Lais, atende as hipóteses do problema formulado? Independente da resposta afirmativa ou não, argumentem.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder

Figura 202 - Interação no fórum sobre o problema formulado por G26, primeira situação.
Fonte: Print do Moodle.

Na Figura 202, notamos que o estudante G26 propôs o problema ilustrado na Figura 200 e, na resolução desse problema, cometeu um erro de matemática básica ao usar a relação $x^2y = 1000$ na função $f(x,y)$. Um dia após essa postagem, o estudante G15 identificou o erro e corrigiu; o estudante G29 concordou com a correção e fez dois questionamentos, um sobre o domínio da função e outro sobre o teste da segunda derivada, a fim de saber o motivo de tê-lo usado. G15 respondeu G29. Em seguida, G26 agradece a identificação do erro, respondeu aos questionamentos e apresentou o problema reformulado. Para finalizar, a investigadora comenta sobre a produtiva interação ocorrida nessa postagem e concluiu fazendo mais uma indagação a respeito do formato da caixa proposta por G26. Entretanto, depois do elogio da professora, não houve mais participações no fórum. Pelas datas das postagens, pode-se observar que tanto a proposta inicial quanto as interações ocorridas no fórum ocorreram após a professora ter divulgado que a participação nos fóruns de discussão era um item de avaliação. Apesar da professora pesquisadora ter ficado satisfeita com a participação dos estudantes nessa postagem, pois houve interação entre turmas diferentes, como educadora, esperava que seus alunos participassem de forma espontânea, sem a necessidade de vincular nota à participação, mas isso não ocorreu.

Pelos problemas formulados que foram discutidos na seção anterior, pode-se perceber como os estudantes podem ser criativos. E ainda, com as situações problemas aqui propostas, observamos que a quarta situação problema, que apresentou poucos dados, apenas dois gráficos no mesmo plano cartesiano e um assunto que deveria ser abordado, foi a questão que despertou maior criatividade nos estudantes. Outra constatação foi que os estudantes, nas situações que propuseram problemas relacionados com situações do mundo real, muitas vezes, apenas versaram sobre temas reais, mas eram fictícias. Como exemplo dessa colocação, temos o problema proposto na Figura 165, a respeito da precipitação de chuvas no Monte Emei e em Maysynram. O contexto apresentado pela equipe foi muito interessante, mas apresentaram precipitações com valores muito abaixo do valor real. Ou seja, a solução do problema matemático contextualizado não atendeu à situação real à qual o enunciado fazia menção. Por outro lado, problemas com mais informações a serem satisfeitas, como na terceira situação, não propiciaram muito a criatividade dos estudantes. As elaborações versaram sobre problemas clássicos relacionados aos assuntos indicados na referida situação.

6.10. Síntese

Nesse capítulo apresentamos a forma como a investigadora aliou as atividades de formulação de problemas à resolução de problemas nas aulas de *Cálculo*. Após essa primeira experiência, a pesquisadora pôde perceber a importância do professor deixar sempre muito claro aos seus estudantes os critérios de avaliação de qualquer atividade avaliativa que proponha a seus estudantes, pois pela experiência que tivemos mais a experiência docente anterior dessa professora investigadora, apontam que a maioria dos estudantes universitários brasileiros não tem a cultura de estudar para aprender, costumam estudar e fazer tarefas matemáticas apenas quando essas são instrumentos avaliativos, ou seja, quando receberão nota em "troca". Nesse capítulo ficou evidente que, mesmo a tarefa proposta sendo avaliativa, sem estarem claras as regras de avaliação, os estudantes não se envolveram ativamente na atividade. E, após divulgar os itens a serem considerados na atribuição de nota, houve alunos que interagiram no fórum de discussão apenas para satisfazer o critério estabelecido, como observado na

Figura 197, na Figura 198 e na Figura 201. Apesar dessas observações, por meio dos questionários, constatamos que a opinião dos estudantes converge com a nossa de que é mais difícil formular do que resolver problemas e que esta atividade permite que a criatividade seja exercida. Particularmente, acreditamos que esse procedimento de ter que elaborar seus próprios problemas, tendo que atender certas condições relacionadas com os conteúdos matemáticos, exige conhecimento e um bom domínio sobre o conteúdo.

No próximo capítulo apresentaremos análise qualitativa e interpretativa dos dados oriundos de dois inquéritos e de uma entrevista semiestruturada. Ambas técnicas de recolha de dados se referem à opinião dos estudantes a respeito da metodologia de RP inserida nas aulas de *Cálculo* e das atividades de FP.

CAPÍTULO 7

CONCEPÇÕES DOS ESTUDANTES ACERCA DA RESOLUÇÃO E FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS

Nos capítulos 5 e 6 foi abordado como a investigadora fez a inserção da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP e as atividades de FP, em suas aulas de *Cálculo*, além de se apresentar uma análise qualitativa das respostas dos estudantes quanto às atividades desenvolvidas em sala de aula e em horários extraclasse. Ambos os capítulos são fruto da análise interpretativa dos dados do ponto de vista da pesquisadora a partir da análise das respostas dos estudantes e das suas percepções como professora. Nesse capítulo, iremos apresentar e analisar de forma qualitativa e interpretativa os dados coletados a partir de dois inquéritos e de uma entrevista semiestrutura. Ambas as técnicas de recolha de dados almejaram delinear o ponto de vista dos estudantes a respeito da RP e da FP.

7.1. Inquérito sobre a metodologia de Resolução de Problemas

Esse inquérito (Anexo 2) teve por objetivo identificar as percepções dos estudantes acerca da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP e foi elaborado no primeiro semestre de 2016. Os cuidados tomados para a construção desse instrumento de avaliação foram descritos na seção 4.9.2.2. Esse questionário foi composto por oito itens, sendo duas questões abertas e seis fechadas para serem respondidas de acordo com a escala Likert de cinco pontos. Os níveis dessa escala variaram de “discordo totalmente” até “concordo totalmente”, conforme ilustrado no Quadro 7. Ele foi fornecido aos respondentes em impresso e foi aplicado no final de uma aula de *Cálculo* da última semana de aula do semestre letivo. No mesmo dia e nas mesmas condições foi aplicado o questionário que visava avaliar as atividades de formulação de problemas, que será descrito na próxima seção.

Quadro 7 - Apresentação da escala Likert adotada para o inquérito sobre a RP

Nas afirmações seguintes, assinale com (X) no quadrado que se adequa mais à tua opinião, considerando a seguinte escala: DT – Discordo Totalmente; D – Discordo; I – Indiferente; C – Concordo; CT – Concordo Totalmente.

Fonte: Inquérito do Anexo 2.

A primeira questão aberta do inquérito era destinada a identificar o Curso ao qual o estudante estava vinculado, se era a primeira vez que fazia a disciplina e, caso não fosse, qual o número de vezes que já a havia cursado. A Tabela 67 apresenta o número de estudantes por Curso e o percentual, considerando apenas os que responderam. Ao todo, 36 (de 84) estudantes responderam aos questionários. Esse número corresponde a 42,8% do total de alunos matriculados na disciplina. Apesar desse número ser inferior a metade dos estudantes matriculados, ele é condizente com o número de estudantes que frequentou assiduamente as aulas até ao final do semestre letivo.

Tabela 67
Cursos pertencentes aos respondentes

Curso	N	%
Licenciatura em Química	15	44,1
Licenciatura em Física	3	8,8
Licenciatura em Matemática	7	20,6
Engenharia Civil	3	8,8
Engenharia Elétrica	3	8,8
Engenharia de Produção e Sistemas	1	2,9
Engenharia Mecânica	2	5,9
Não informou	2	5,9

Com relação ao número de vezes que cursou a disciplina, o número de estudantes que estava cursando pela primeira vez a disciplina coincidiu com o número de estudantes que estava repetindo ao menos uma vez. Dos 18 respondentes, doze, quatro, um e um, respectivamente, já haviam cursado, uma, duas, três ou cinco vezes a disciplina. A ilustração, em termos percentuais desses números de vezes que já cursou *Cálculo*, está apresentada na Figura 203.

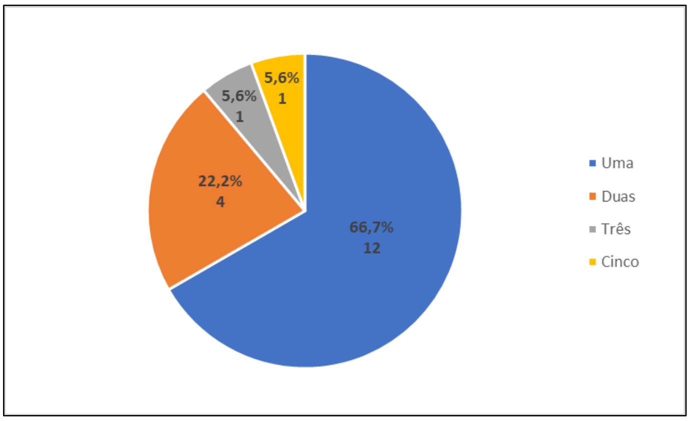


Figura 203 - Número de vezes que já cursou *Cálculo*.
Fonte: Produção da autora.

A segunda questão desejava identificar as percepções dos estudantes acerca de como as aulas foram conduzidas pela professora investigadora. A Tabela 68 apresenta essas impressões dos estudantes.

Tabela 68
Respostas com relação às percepções de como as aulas de Cálculo foram ministradas

	DT		D		I		C		CT	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
O professor formulava questões de matemática que envolviam situações do quotidiano.	0	0,0	2	5,6	3	8,3	18	50,0	13	36,1
O professor apresentava fatos históricos relacionados com os conteúdos que estavam sendo trabalhados.	1	2,8	6	16,7	14	38,9	7	19,4	8	22,2
O professor fazia uso de softwares gráficos durante as aulas para explicar o conteúdo.	0	0,0	0	0,0	0	0,0	5	13,9	31	86,1
O professor primeiro explicava o conteúdo, dava exemplos e, a seguir, exercícios e/ou problemas para serem feitos em sala de aula de forma individual ou em grupo.	1	2,8	6	16,7	3	8,3	5	13,9	21	58,3
O professor primeiro deixava os alunos trabalharem em grupo para depois corrigir as questões e fazer a formalização do conteúdo.	0	0,0	0	0,0	0	0,0	9	25,0	27	75,0

Fonte: Dados da pesquisa

Pelos dados apresentados na Tabela 68, percebemos que: 86% (31 de 36) dos estudantes concordam que a professora propunha questões que envolviam os conteúdos da disciplina com situações do cotidiano; todos os estudantes concordam que a professora fazia uso de softwares gráficos como uma ferramenta para explicar conteúdos da disciplina e que a professora permitia que os estudantes primeiro trabalhassem em grupo para depois "corrigir[119]" as questões e formalizar o conteúdo, ou seja, a professora usava a concepção de ensinar através da RP; 72% (26 de 36) dos estudantes concordam que a professora primeiro explicava o conteúdo e depois propunha atividades para serem desenvolvidas em sala de aula de forma individual ou em grupo. Note que por essa última informação, os estudantes estão concordando que as aulas foram de estilo mais tradicional, entretanto, pela informação anterior, foi unânime a concordância de que a professora ensinava através da RP. Em outras palavras, as informações parecem divergir. Inferimos que essa discrepância de informações ocorreu porque os estudantes

[119] A expressão que melhor se adequaria à experiência vivenciada era "discutir".

avaliaram a disciplina como um todo e a professora não trabalhou 100% das aulas por meio da RP. Com relação à inserção de factos históricos a respeito dos conteúdos abordados, a opinião dos participantes não foi convergente, pois em torno de 42% (15 de 36) concorda que houve a inserção de aspectos históricos, 19% (7 de 36) discorda dessa opinião e 39% (14 de 36) não se posicionou sobre o assunto.

O terceiro item desse questionário versava sobre as impressões pessoais acerca da metodologia de RP inserida nas aulas. Os dados obtidos podem ser observados na Tabela 69. A partir do terceiro item dessa questão, um estudante não respondeu mais ao questionário, por isso, foi incluída mais uma coluna nas tabelas em que denotamos por NR o item cujo estudante não apresentou opinião.

Tabela 69
Respostas com relação à RP inserida nas aulas

	DT		D		I		C		CT		NR	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Você considera que a metodologia de RP foi adequada para se trabalhar com os conteúdos da disciplina de CDI 1.	0	0,0	1	2,8	2	5,6	18	50,0	15	41,7	0	0,0
Julga que as aulas em que a metodologia de RP foi inserida permitiram que você participasse mais ativamente das aulas e, consequentemente, se tonasse mais comprometido com a sua aprendizagem.	0	0,0	1	2,8	4	11,1	21	58,3	10	27,8	0	0,0
A sua compreensão dos conteúdos envolvidos na disciplina permitiu que você resolvesse exercícios de forma mais crítica e não apenas por aplicação mecânica de regras/fórmulas.	0	0,0	0	0,0	4	11,1	17	47,2	14	38,9	1	2,8
Você teve mais oportunidade de construir estratégias, replanejar e, com isso, construir conhecimentos importantes por si mesmo.	0	0,0	1	2,8	5	13,9	21	58,3	8	22,2	1	2,8

Fonte: Dados da pesquisa.

Os dados apresentados na Tabela 69, nos revelam que: em torno de 92% (33 de 36) consideram que a RP se mostrou uma abordagem metodológica adequada à disciplina de *Cálculo*; 86% (31 de 36) dos estudantes consideram que a metodologia de RP possibilitou que participassem de forma mais ativa nas aulas, os tornando mais comprometidos com a aprendizagem, além de torná-los mais críticos ao desenvolver uma atividade; cerca de 80% (29 de 36) estudantes concordam que tiveram mais oportunidades de desenvolverem suas próprias estratégias de resolução e, consequentemente, puderam construir seu próprio conhecimento.

A quarta questão desse inquérito abordava assuntos relativos aos trabalhos em grupo e as respostas dos estudantes estão apresentadas na Tabela 70.

Tabela 70
Opinião dos estudantes sobre os trabalhos em grupo durante as aulas de Cálculo

	DT		D		I		C		CT		NR	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Elas permitiram que você expusesse suas ideias e as compartilhasse com os seus colegas.	0	0,0	2	5,6	1	2,8	14	38,9	18	50,0	1	2,8
Você teve oportunidade de aprender com seus colegas durante as discussões em grupos.	0	0,0	1	2,8	3	8,3	12	33,3	19	52,8	1	2,8
O tempo reservado para a realização das atividades em grupo foi suficiente.	0	0,0	1	2,8	5	13,9	16	44,4	13	36,1	1	2,8

Fonte: Dados da pesquisa.

Os dados da Tabela 70 nos revelam que 89% (32 de 36), 86% (31 de 36) e 80% (29 de 36) dos estudantes corroboram que os trabalhos em grupo permitiram, respectivamente, compartilhar ideias com os colegas, aprender com os colegas e que o tempo reservado para essas atividades foi o suficiente.

A quinta questão do inquérito esteve relacionada com os recursos utilizados no desenvolvimento da disciplina. Pelos dados apresentados na Tabela 71, constatamos que cerca de 88% (28 de 36) dos estudantes ratificam que os trabalhos desenvolvidos na plataforma Moodle exigiu um maior comprometimento com a disciplina e, aproximadamente 97% (35 de 36) dos estudantes corroboram que os recursos didáticos, utilizados pela professora investigadora, no momento da formalização do conteúdo foram adequados.

Tabela 71
Opinião dos estudantes sobre os recursos utilizados pela professora na disciplina

	DT		D		I		C		CT		NR	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Os trabalhos mediados pela plataforma Moodle exigiram de você um maior comprometimento com atividades extraclasse.	0	0,0	2	5,6	5	13,9	10	27,8	18	50,0	1	2,8

	DT		D		I		C		CT		NR	
Os recursos didáticos (tais como, quadro e giz, datashow, softwares gráficos, materiais manipuláveis...) utilizados pela professora-pesquisadora para a formalização dos conteúdos foram adequados.	0	0,0	0	0,0	0	0,0	10	27,8	25	69,4	1	2,8

Fonte: Dados da pesquisa.

O sexto item do questionário almejava investigar como fora a adaptação dos estudantes com a metodologia de RP. Incialmente, foi questionado se o aluno sentiu dificuldade(s) para se adaptar com a realização dos trabalhos em grupo. Os dados da Tabela 72 nos permitem constatar que não houve consenso acerca desse assunto, pois em torno de 39% (13 de 36) concorda que sentiu dificuldades com essa forma de trabalho, 33% (12 de 36) não concorda com essa afirmativa e, 25% (9 de 36) dos estudantes não se posicionaram sobre o assunto.

Tabela 72
Opinião sobre a adaptação do aluno com a metodologia de RP

	DT		D		I		C		CT		NR	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Você sentiu dificuldade(s) para se adaptar a realizar as atividades em grupo.	4	11,1	8	22,2	9	25,0	9	25,0	5	13,9	1	2,8

Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência desse item, buscou-se identificar possíveis dificuldades sentidas pelos estudantes ao trabalharem em grupos. As conjecturas elencadas imaginadas como possíveis causas de dificuldades foram: a preferência por trabalhar de forma individual; falta de afinidade com os integrantes do grupo; necessidade de silêncio para estudar/se concentrar; e, o facto de estar acostumado com aulas tradicionais em que trabalhos em grupo, quando existem, são realizados em horários extraclasse. Pelos dados apresentados na Tabela 73, constatamos que a opinião sobre o assunto é bastante variada. A conjectura de que há preferência por trabalhar de forma individual foi confirmada por 25% (8 de 36) dos estudantes, rejeitada por 44% (16 de 36) dos estudantes e cerca de 28% (10 de 36) participantes não apontaram concordância nem discordância. A hipótese de que falta de afinidade com membros do grupo tenha gerado dificuldade de adaptação com a metodologia foi rejeitada por 64% (23 de 36) dos estudantes e confirmada por cerca de 20% (7 de 36). A dificuldade associada com a necessidade de silenciar para desenvolver as atividades é indiferente para aproximadamente 31% (11 de 36 estudantes), é aceita por cerca de 28% (10 de 36) e rejeitada por quase 40% (14 de 36) dos participantes. E ainda, as dificuldades oriundas pelos facto do estudante estar acostumado com a abordagem tradicional de ensino foi confirmada por 47% (17 de 36) dos alunos, negada por 22% (8 de 36) dos estudantes e indiferente para 28% (10 de 36) dos participantes.

Tabela 73

Opinião dos estudantes sobre possíveis dificuldades para trabalhar em grupo com a RP

	DT		D		I		C		CT		NR	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Você prefere trabalhar sozinho.	8	22,2	8	22,2	10	27,8	6	16,7	3	8,3	1	2,8
Você não tinha muita afinidade com os demais colegas para desenvolver trabalhos em grupos.	12	33,3	11	30,6	5	13,9	5	13,9	2	5,6	1	2,8
Você precisa de silencio para pensar sobre as atividades propostas.	7	19,4	7	19,4	11	30,6	6	16,7	4	11,1	1	2,8
Você sempre esteve acostumado com aulas tradicionais em que os trabalhos (quando têm) são realizados em horários extraclasse sem haver a discussão das atividades propostas em sala.	5	13,9	3	8,3	10	27,8	13	36,1	4	11,1	1	2,8

Fonte: Dados da pesquisa.

A sétima questão desse inquérito visava identificar a opinião dos estudantes a respeito da metodologia de RP inserida nas aulas de *Cálculo*. Nesse item foram elencados nove aspectos para que os estudantes pudessem expressar sua opinião. Dentre esses, apontamos três aspectos negativos que poderiam estar associados ao uso da metodologia e seis aspectos positivos. Pelos dados da Tabela 74 percebemos que os tópicos que consideramos negativos foram rejeitados por maioria pelos participantes, pois cerca de 70% (25 de 36) dos estudantes discordam que preferem aulas tradicionais; 75% (27 de 36) discordam que o metodologia de RP não fora adequada para a disciplina, visto que a quantidade de atividades realizadas em sala de aula foi menor; e, 72% (26 de 36) discordam que o professor não deve propor atividades a serem desenvolvidas sem que antes tenha explicado o conteúdo. Com relação a esses três itens, respectivamente, aproximadamente 11%, 6% e 14% dos estudantes estavam de acordo com esses aspectos desfavoráveis ao uso da RP como metodologia de ensino. Com relação aos aspectos positivos associados à inserção da RP nas aulas de *Cálculo*, os dados revelam que: 86% (31 de 36) dos estudantes ratificam que a essa metodologia deveria ser adotada por mais professores de *Cálculo* e que essa metodologia possibilita aulas mais dinâmicas; 89% (32 de 36) dos participantes corroboram que a metodologia de RP permitiu que os estudantes se tornassem mais questionadores; 78% (28 de 36) dos estudantes concordam que a metodologia contribuiu para se tornarem mais autônomos em seus estudos; 94% (34 de 36) alunos entendem que com essa metodologia o professor permite que sejam mais participativos durante as aulas; e, 72% (26 de 36) dos participantes concordam que a postura do professor de não responder diretamente (sim/não) aos questionamentos do aluno, oportuniza aos estudantes sentirem o "prazer da descoberta".

Tabela 74

Opinião dos estudantes com relação à metodologia de RP inserida nas aulas de Cálculo

	DT		D		I		C		CT		NR	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
A metodologia de RP deveria ser utilizada por mais professores de CDI 1.	1	2,8	1	2,8	2	5,6	18	50,0	13	36,1	1	2,8
Não gostei da metodologia de RP porque prefiro aulas tradicionais em que o professor explica o conteúdo e resolve exercícios no quadro.	16	44,4	9	25,0	6	16,7	4	11,1	0	0,0	1	2,8
Acho que essa metodologia não foi adequada para a disciplina de CDI 1, pois o número de atividades realizadas em sala de aula foi menor do que se as aulas fossem tradicionais.	12	33,3	15	41,7	5	13,9	1	2,8	1	2,8	2	5,6
Acho que o professor não deve propor exercícios para que o aluno tente resolver sem que ele tenha explicado o conteúdo antes.	13	36,1	13	36,1	4	11,1	2	5,6	3	8,3	1	2,8
Gosto da metodologia de RP porque as aulas são mais dinâmicas.	0	0,0	0	0,0	4	11,1	20	55,6	11	30,6	1	2,8
O aluno passa a ser mais questionador em aulas.	0	0,0	0	0,0	3	8,3	18	50,0	14	38,9	1	2,8
O aluno passa a ter mais autonomia em seus estudos.	0	0,0	1	2,8	6	16,7	16	44,4	12	33,3	1	2,8
O professor permite que o aluno seja mais participativo em sala de aula.	0	0,0	0	0,0	1	2,8	17	47,2	17	47,2	1	2,8
Como o professor não dá respostas diretas (sim/não) aos questionamentos dos alunos durante a resolução das atividades, então o professor permite ao aluno sentir o prazer da descoberta.	0	0,0	1	2,8	8	22,2	13	36,1	13	36,1	1	2,8

Fonte: Dados da pesquisa.

O oitavo item do inquérito foi uma questão aberta em que o estudante poderia manifestar sua opinião, fazer críticas, sugestões ou comentários sobre a metodologia de RP, que fora inserida nas aulas de *Cálculo*, além de poder apresentar as dificuldades sentidas e discorrer livremente sobre assuntos que julgasse relevante. Dos 36 respondentes, 15 deixaram registrado algum tipo de comentário, alguns apontados como aspectos positivos e negativos na mesma resposta. A análise qualitativa desses dados nos revelou aspectos positivos e negativos do uso da metodologia de RP em sala de aula, sendo que identificamos, respectivamente, dez comentários na primeira dessas categorias e onze na segunda. Com relação aos aspectos positivos: dois estudantes citam o trabalho em grupo, um apontando como vantajoso esse tipo de trabalho para os que têm mais dificuldades, pelo facto de aprenderem com o colega (Figura 204), e, outro aluno, argumenta que o trabalho desenvolvido no grupo propicia mais autonomia para realizar os trabalhos extraclasse (Figura 205); dois estudantes mencionam a atuação da professora, um com relação à sua didática, e outro, com o quesito do respeito da relação professor-aluno (Figura 206); e outros cinco estudantes teceram elogios acerca da metodologia de RP inserida em sala, sendo que desses, um apontou como vantagem em se trabalhar essa metodologia o facto das aulas serem "mais dinâmicas e menos maçantes" e que os estudantes ganham "voz perante o grupo" (Figura 207); um estudante de licenciatura afirma que essa experiência permitiu "entender além das fórmulas", e ainda, identificou uma possibilidade de adotar essa abordagem metodológica em futura carreira profissional (Figura 208); um aluno considera que essa metodologia poderia ser inserida também em outras disciplinas (Figura 205); e outros dois alunos, apontam satisfação com a metodologia, mas não explicitam os motivos (Figura 204).

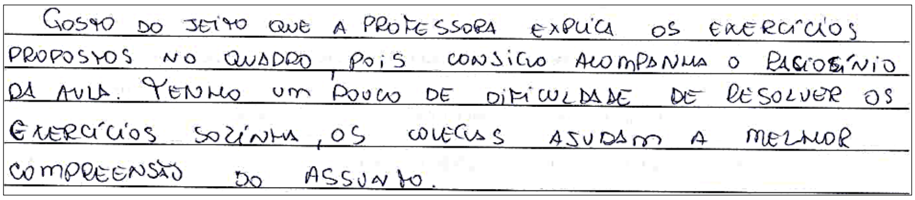

GOSTO DO JEITO QUE A PROFESSORA EXPLICA OS EXERCÍCIOS PROPOSTOS NO QUADRO, POIS CONSIGO ACOMPANHA O RACIOCÍNIO DA AULA. TENHO UM POUCO DE DIFICULDADE DE RESOLVER OS EXERCÍCIOS SOZINHA, OS COLEGAS AJUDAM A MELHOR COMPREENSÃO DO ASSUNTO.

Figura 204 - Opinião sobre RP de um estudante da Licenciatura em Química.
Fonte: Dados da pesquisa.

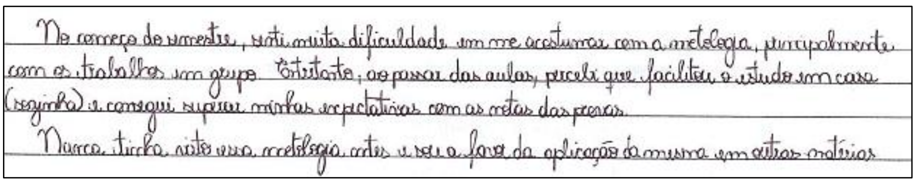
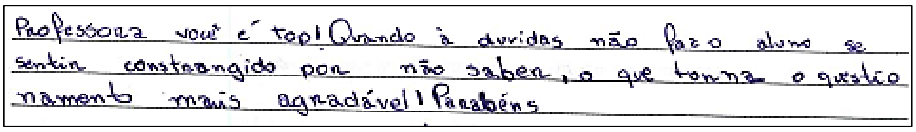
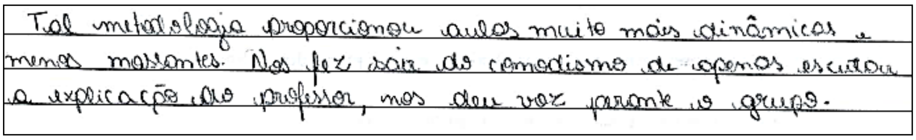

No começo do semestre, senti muita dificuldade em me acostumar com a metologia, principalmente com os trabalhos em grupo. Entretanto, ao passar das aulas, percebi que facilitou o estudo em casa (sozinha) e consegui superar minhas expectativas com as notas das provas.
Nunca tinha visto essa metologia antes e sou a favor da aplicação da mesma em outras matérias.

Figura 205 - Opinião sobre RP de um estudante da Licenciatura em Química.
Fonte: Dados da pesquisa.



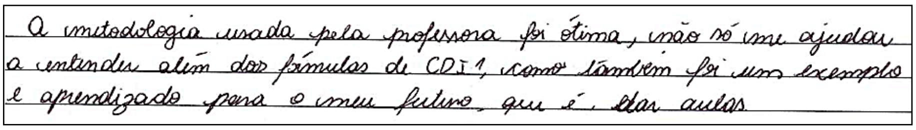
Professora você é top! Quando à duvidas não faz o aluno se sentir constrangido por não saber, o que torna o questio namento mais agradável! Parabéns

Figura 206 - Comentário de um estudante da Engenharia.
Fonte: Dados da pesquisa.



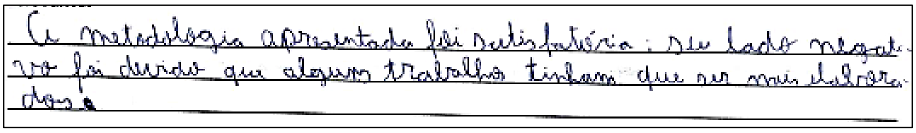
Tal metodologia proporcionou aulas muito mais dinâmicas e menos massantes. Nos fez sair do comodismo de apenas escutar a explicação do professor, mas deu voz perante o grupo.

Figura 207 - Opinião sobre RP de um estudante da Engenharia.
Fonte: Dados da pesquisa.



A metodologia usada pela professora foi ótima, não só me ajudou a entender além das fórmulas de CDI 1, como também foi um exemplo e aprendizado para o meu futuro que é dar aulas

Figura 208 - Opinião sobre RP de um estudante da Licenciatura em Física.
Fonte: Dados da pesquisa.



A metodologia apresentada foi satisfatória: seu lado negati vo foi devido que alguns trabalhos tinham que ser mais elabora dos.

Figura 209 - Opinião sobre RP de um estudante da Engenharia.
Fonte: Dados da pesquisa.

Dos onze comentários que apontam aspectos negativos, dois estudantes criticaram o tempo gasto com as atividades que foram desenvolvidas sob a concepção de ensinar através da RP e, destes, um considera que essas aulas se tornam cansativas (Figura 210); seis criticam a quantidade de atividades extraclasse, sendo que cinco destes estudantes se referem especificamente às atividades de FP (Figura 211) e um estudante mostra descontentamento pelos trabalhos extraclasse por serem mais “elaborados” (Figura 204); um estudante julga a plataforma Moodle pouco adequada, ou seja, também faz referências às atividades de FP que deviam ser postadas neste ambiente virtual (Figura 212); um estudante apontou dificuldades para se adaptar aos trabalhos em grupo (Figura 205); e, um estudante fez um comentário que, por experiência docente, entende-se ser senso comum entre muitos ingressantes nos cursos superiores da área de Exatas, que é “normal reprovar em *Cálculo*”. Como a resposta manuscrita desse estudante era de difícil leitura, optamos por apresentar por escrito o comentário da Figura 213: *“O aprendizado de Cálculo Diferencial e Integral dificilmente acontece em um primeiro contato acadêmico, preciso ser paciente e determinado para se apropriar dos conceitos que envolve toda a disciplina”.*


O tempo da RP deveria ser menor, muitos antes da RP foram cansativos por demais para corrigir a discutir.

Figura 210 - Opinião de um estudante sobre a metodologia de RP.
Fonte: Dados da pesquisa.

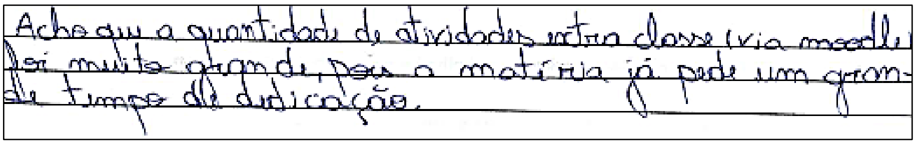

Acho que a quantidade de atividades extra classe (via moodle) foi muito grande, pois a matéria já pede um grande tempo de dedicação.

Figura 211 - Opinião de um estudante sobre as atividades extraclasse.
Fonte: Dados da pesquisa.

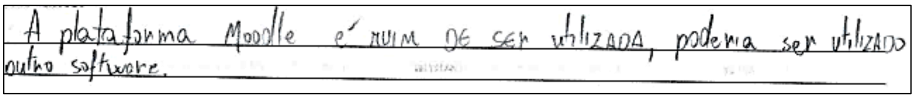

A plataforma Moodle é ruim de ser utilizada, poderia ser utilizado outro software.

Figura 212 - Opinião de um estudante sobre a plataforma Moodle.
Fonte: Dados da pesquisa.

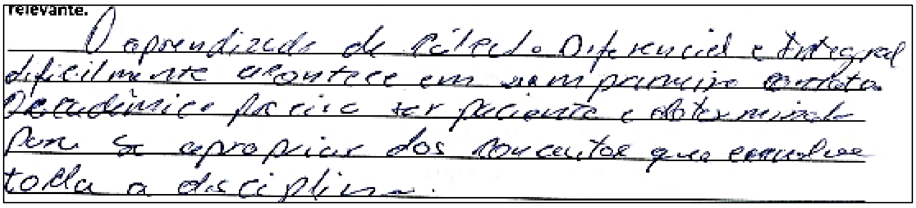

relevante. O aprendizado de Cálculo Diferencial e Integral dificilmente acontece em um primeiro contato. O acadêmico precisa ser paciente e determinado para se apropriar dos conceitos que envolvem toda a disciplina.

Figura 213 - Opinião de um estudante sobre (não) aprovação em *Cálculo.*
Fonte: Dados da pesquisa.

Ao analisarmos os comentários deixados pelos estudantes na oitava questão do inquérito se tornou evidente a insatisfação com as atividades extraclasse. Apesar de poucos estudantes terem feito menção à FP, entendemos que se referem a ela, pois citavam atividades extraclasse do Moodle, como ilustrado na Figura 211, e, nesse ambiente virtual essas foram as únicas atividades desenvolvidas. Questões relacionadas com a (in)satisfação com a quantidade de atividades extraclasse relacionadas com a FP também foram abordadas nas entrevistas realizadas e que serão abordadas na seção 7.3. Esse inquérito era específico sobre a metodologia de RP, então, pode ser que ao tecerem comentários a respeito da FP tenham o(s) feito (s) porque a compreendem como uma extensão da RP. Outra hipótese é que essas opiniões sobre FP tenham surgido nesse questionário, porque confundiram esse questionário de RP com o de FP, visto que ambos foram aplicados no mesmo dia.

7.2. Inquérito sobre as atividades de Formulação de Problemas

A fim de coletar informações a respeito da opinião dos estudantes sobre a formulação de problemas foram elaborados dois inquéritos. Um para ser aplicado antes da realização das atividades de formulação e outro depois. O primeiro inquérito (Anexo 13) era composto por cinco questões abertas que visavam conhecer a diferenciação entre exercício e problema feita pelo estudante; que estratégias ele utilizava para resolver problemas; sua opinião sobre a importância da resolução de problemas no cotidiano; seu entendimento sobre formulação de problemas; e, sua opinião sobre a importância do aluno formular problemas. O segundo inquérito era formado por três questões fechadas, que utilizavam a escala Likert de cinco pontos variando de "discordo totalmente" à "concordo totalmente", e de uma questão aberta em que os estudantes poderiam deixar registrada sua opinião sobre a FP, dar sugestões de melhorias, apresentar críticas, dentre outros (Anexo 3). As questões de resposta fechada versavam sobre as perspectivas da experiência desenvolvida, as perspectivas sobre a importância da formulação de problemas e um comparativo entre as atividades de formulação de problemas e de resolução de problemas. Esses dois instrumentos de avaliação foram adaptados do artigo de Cunha, Martins e Viseu (2014). Como todos os itens desses dois inquéritos foram adaptados do referido artigo, não achamos necessário submetê-los ao processo de validação.

No segundo semestre de 2016, na fase final do processo de validação dos oito situações problemas, ambos os inquéritos foram aplicados aos monitores de CDI, todos no mesmo dia. Um antes de vivenciarem a FP e outro após terem experienciado "o que" e "como é" elaborar problemas. Mais detalhes desse experimento de ensino estão descritos no artigo de Azevedo, Figueiredo e Palhares (2017b).

Após o primeiro contato da professora-pesquisadora com a elaboração de problemas em sala de aula, no primeiro semestre de 2017, optamos por mudar a estratégia de realização dessa tarefa. Relembrando o que já fora descrito no Capítulo 6, nesse semestre letivo as oito atividades foram diluídas ao longo do semestre, realizadas na modalidade de fórum de discussão e em horário extraclasse. Como desde as primeiras aulas a professora pesquisadora introduziu atividades mediadas pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de RP com o objetivo de ensinar através da RP, ela se envolveu com a coleta dos dados da tese e esqueceu-se de aplicar o primeiro inquérito antes dos alunos terem iniciado as atividades de FP. Sendo assim, nesse texto podemos analisar somente o inquérito após os alunos terem experenciado na prática o significado de formular problemas. O questionário foi aplicado em meio impresso na última semana letiva a todos os estudantes presentes na sala de aula no mesmo dia em que fora aplicado o questionário para captar as percepções dos estudantes sobre a metodologia de RP (descrito na seção 7.1). Portanto, os 36 alunos que responderam ao inquérito que consta no Anexo 3 foram os mesmos que responderam ao inquérito sobre a metodologia de RP. Como os questionários eram anônimos, não podemos garantir que todos os respondentes desse questionário, de facto, participaram ativamente no processo de elaboração de problemas. Entretanto, o número de questionários respondido coincide com o maior número de estudantes que estiveram envolvidos na proposição de problemas, como pode ser observado na Tabela 58. Acreditamos que a maioria dos elaboradores tenham respondido esse questionário, porque, além de serem os estudantes que frequentavam assiduamente as aulas, a primeira afirmativa do questionário era: *"Participei na formulação de problemas"* e, ao todo, 4 (de 36) estudantes discordaram e 4 não se posicionaram sobre a sentença, os demais todos concordaram que participaram no processo de formulação de problemas, como pode ser observado no gráfico da Figura 214.

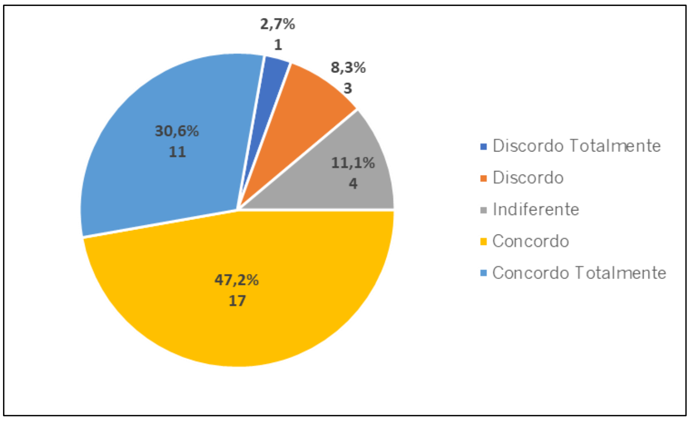


Figura 214 - Respostas sobre a participação na elaboração dos problemas.
Fonte: Produção da autora.

O primeiro questionamento desejava conhecer as perspectivas dos estudantes sobre a experiência de formulação de problemas que fora desenvolvida ao longo do semestre letivo. Para tanto, foram apontados seis subitens que estão apresentados na Tabela 75. Convencionamos que DT, D, I, C e CT significam, respectivamente, discordo totalmente, discordo, indiferente, concordo e concordo totalmente. E ainda, denotaremos por N o número de respostas e % o valor de N em percentual.

Os dados da Tabela 75 nos permitem constatar que: 78% dos estudantes concordaram que se envolveram na atividade de formulação de problemas; 86% acreditaram que a formulação de problemas desafiou a criatividade; 53% dos estudantes concordaram que usaram exemplos de materiais de apoio para elaborarem seus problemas; 56% concordaram que as atividades de FP favoreceram maior interação entre os pares para troca de ideias; 69% dos estudantes concordaram que a FP permitiu maior percepção sobre a utilidade dos conteúdos aprendidos; e, 81% dos estudantes concordaram que tiveram dificuldades em formular problemas. Por essas informações, podemos inferir que apesar dos estudantes sentirem dificuldades em elaborar problemas, essa atividade proporcionou oportunidade para que o potencial criativo do aluno fosse aproveitado, além de permitir ao estudante ver aplicações das teorias estudadas e interação entre os colegas. E, para elaboração, muitos acadêmicos buscaram apoio em materiais didáticos.

Tabela 75

Respostas com relação às perspectivas sobre a experiência desenvolvida de FP

	DT		D		I		C		CT	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Participei na formulação de problemas	1	3	3	8	4	11	17	47	11	31
A formulação de problemas desafiou a minha criatividade	0	0	2	6	3	8	13	36	18	50
Na formulação de problemas segui exemplos de problemas da apostila/livros	4	11	2	6	11	30	14	39	5	14
A formulação de problemas incentivou a troca de ideias com meu(s) colega(s)	3	8	2	6	11	30	9	25	11	31
A formulação de problemas ajudou a perceber a utilidade dos conteúdos que aprendi	0	0	1	3	10	28	11	30	14	39
Tive dificuldades em formular problemas	0	0	4	11	3	8	15	42	14	39

Fonte: Dados da pesquisa.

A segunda indagação do questionário foi referente às perspectivas dos estudantes sobre a importância de vivenciarem a FP. As respostas referentes a esse item podem ser observadas na Tabela 76.

Tabela 76

Respostas com relação às perspectivas sobre a importância da FP

	DT		D		I		C		CT	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
A formulação de problemas desafia a pensar	0	0	0	0	1	3	11	30	24	67
A formulação de problemas obriga a saber os conteúdos contemplados	0	0	2	6	1	3	17	47	16	44
A formulação de problemas deve fazer parte da aprendizagem de todos os temas matemáticos	0	0	6	17	5	14	14	39	11	30
A formulação de problemas prepara-me para responder a situações do quotidiano	0	0	3	8	7	19	14	40	12	33

Fonte: Dados da pesquisa.

Pelos dados da Tabela 76 podemos perceber que é consenso entre os estudantes que a formulação de problemas desafia o estudante a pensar, pois 97% dos respondentes concordaram com essa afirmativa e apenas um estudante, que corresponde aos 3%, se mostrou indiferente a essa colocação; e, 91% dos estudantes concordaram que para elaborar problemas é necessário ter domínio sobre os conteúdos contemplados. Além disso, 73% dos respondentes concordaram que a atividade de formulação de problemas proporciona melhor preparo para responder as situações rotineiras; e, 69% concordava que as atividades de FP deveriam ser estendidas aos demais temas matemáticos.

O terceiro item do questionário buscava coletar a opinião dos estudantes fazendo um comparativo entre a resolução de problemas e a formulação de problemas. Pelas respostas apresentadas na Tabela 77, observamos que 72% dos respondentes prefere resolver problemas que formular problemas e 78% concordaram que formular problemas ajudou a compreender a resolução de problemas. Com relação a julgar seformular problemas é mais importante que resolver problemas, não houve consenso, pois mais da metade dos respondentes não se posicionou sobre o assunto, 27% concordou com a afirmativa e 20% discordou.

Tabela 77
Respostas com relação ao FP versus RP

	DT		D		I		C		CT	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Prefiro resolver a formular problemas.	1	3	1	3	8	22	11	30	15	42
A formulação de problemas ajudou a perceber a resolução de problemas.	0	0	0	0	8	22	18	50	10	28
É mais importante saber formular problemas do que saber resolver problemas.	2	6	5	14	19	53	7	19	3	8

Fonte: Dados da pesquisa.

O quarto item do questionário era uma questão aberta em que o aluno poderia deixar sugestões, críticas ou comentários sobre a metodologia utilizada, as atividades realizadas, a(s) dificuldade(s) e/ou outras questões que julgasse relevante. Onze dos trinta e seis estudantes deixaram algum tipo de comentário nos quais identificamos aspectos positivos/negativos na visão do estudante. Convém destacar que alguns comentários abordaram mais de um aspecto.

Como aspectos positivos consideramos as respostas que apontaram o fato da FP auxiliar no desenvolvimento da criatividade (2 respostas), propiciar a compreensão do conteúdo (1 resposta) e despertar o interesse de um estudante de licenciatura utilizar essa estratégia metodológica no futuro (1 resposta). Nessa última resposta (Figura 215), como o estudante usou o termo “metodologia incrível” pode ser que esteja se referindo a todo o contexto vivenciado ao longo do semestre letivo, que consistia do uso da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP compreendendo que a FP faz parte da metodologia.

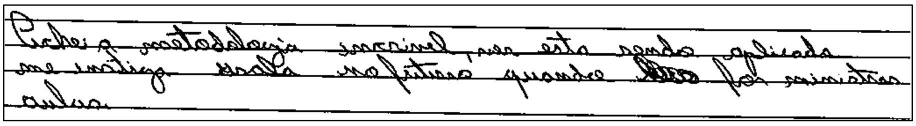

Achei a metodologia incrível, vou estar sendo aplicada em minha escola no futuro quando ~~[illegible]~~ for ministrar aulas.

Figura 215 - Opinião sobre a FP do aluno da MAT.
Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação aos aspectos negativos, quatro estudantes apontaram as dificuldades sentidas para formularem os problemas e, dois estudantes, o tempo gasto com a elaboração de problemas (Figura 216). Dois acadêmicos apresentaram como sugestão inserir a formulação de problemas nos horários regulares de aula devido às dificuldades sentidas na elaboração de problemas (Figura 216). Além disso, houve uma reclamação sobre a plataforma Moodle, por achá-la pouco apropriada para tal atividade (Figura 217), um comentário afirmando que formular problemas é mais difícil que resolver problemas (Figura 218). E ainda, um estudante dizendo que “não sabia como fazer”, entretanto, ao longo de todo o semestre letivo, nenhum estudante procurou auxílio da professora afim de sanar essa dificuldade.

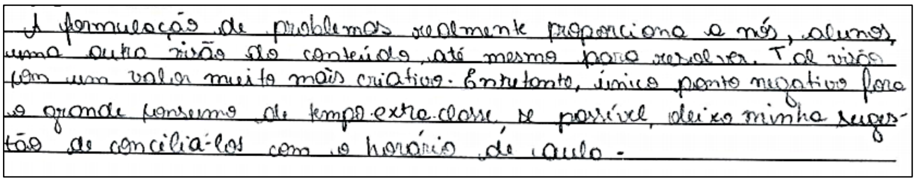

A formulação de problemas realmente proporciona a nós, alunos, uma outra visão do conteúdo, até mesmo para resolver. Tal visão tem um valor muito mais criativo. Entretanto, único ponto negativo fora o grande consumo de tempo extra-classe, se possível, deixo minha sugestão de conciliá-los com o horário de aula.

Figura 216 - Opinião sobre a FP do aluno da Engenharia Mecânica da MAT.
Fonte: Dados da pesquisa.

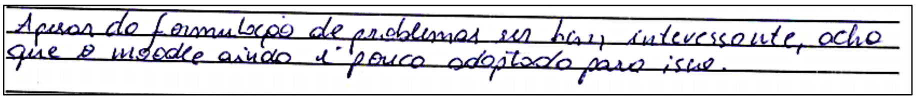

Apesar da formulação de problemas ser bem interessante, acho que o moodle ainda é pouco adaptado para isso.

Figura 217 - Opinião sobre a FP do aluno da Licenciatura em Física da MAT.
Fonte: Dados da pesquisa.

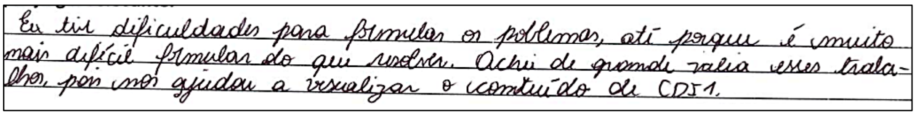

Eu tive dificuldades para formular os problemas, até porque é muito mais difícil formular do que resolver. Achei de grande valia esses trabalhos, pois nos ajudou a visualizar o conteúdo de CDI1.

Figura 218 - Opinião sobre a FP do aluno da Licenciatura em Química da QUI.
Fonte: Dados da pesquisa.

Por fim, ao analisar as respostas dos estudantes a esse questionário, podemos perceber que apesar dos estudantes terem preferência por resolver problemas em vez de formular problemas, cujo tempo dispensado com a elaboração é maior, reconhecem que essa atividade exercita a criatividade dos mesmos e permite dar sentido aos conhecimentos adquiridos. Além disso, aos futuros professores é dada a oportunidade de conhecerem na prática o que significa resolver problemas. E, tendo essa vivência durante sua formação acadêmica, como a julgaram importante para sua aprendizagem, é possível que futuramente algum(ns) desse(s) estudantes possa(m) inserir essa estratégia em sua prática docente.

Além dos dois questionários que recém apresentamos, nessa pesquisa também foram realizadas entrevistas semiestruturadas afim de conhecer melhor a opinião dos estudantes tanto sobre a metodologia de RP quanto sobre as atividades de FP que foram agregadas a essa pesquisa. Na próxima seção versaremos sobre informações provenientes dessas entrevistas.

7.3. Opinião de estudantes acerca da RP e FP a partir de entrevistas

Ao final do semestre letivo a professora convidou 15 estudantes para participar de uma entrevista semiestruturada almejando ouvir a opinião dos estudantes a respeito tanto da metodologia de RP que fora inserida nas aulas de *Cálculo* como das atividades de FP, inseridas em horário extraclasse na modalidade de um fórum de discussão. Dois critérios foram estabelecidos para selecionar os estudantes que participariam das entrevistas, um deles foi a assiduidade ao longo do semestre e, o outro, convidar alunos que participassem de grupos distintos. Apesar da professora não ter estabelecido como regra no início do semestre que os grupos formados deveriam permanecer fixos, após as primeiras aulas, assim que os laços de amizade e afinidades foram sendo estabelecidos entre os estudantes, a maioria dos grupos manteve-se invariante. Por esses motivos, escolher alunos integrantes de grupos variados foi uma tarefa fácil para a professora. Após terem sidos definidos esses critérios, a professora entrou em contacto via e-mail com os estudantes e assim que obtinha o aceite para participar, foi organizada uma agenda de entrevistas conforme disponibilidade de horário dos envolvidos. As entrevistas foram realizadas entre os dias 23 de junho de 2017 e 06 de julho de 2017, na sala da investigadora no DMAT, com exceção de uma, que por motivos pessoais do estudante não foi possível realizar de forma presencial a entrevista nem via *Skype*. Por isso, a professora lhe deu a oportunidade de gravar um áudio e lhe enviar pelo *WhatsApp*. Para tanto a professora forneceu o roteiro de entrevista. Em média, as entrevistas tiveram 15 minutos de duração. Ressaltamos ainda que nove dos entrevistados eram da MAT e seis da QUI. O maior número de integrantes da MAT se deve ao facto de que essa turma permaneceu com mais estudantes participando assiduamente das aulas de *Cálculo* até ao final do semestre letivo.

Acreditamos que por se tratar de entrevistas semiestruturadas aliado ao facto da entrevistadora ser a própria professora, elas ocorreram em caráter de conversa e de forma muito descontraída, com exceção das entrevistas a dois estudantes que eram tímidos e de poucas palavras. O roteiro de entrevistas que norteou esses trabalhos consistiu de oito questões, sendo que destas as duas primeiras eram para caracterizar os participantes quanto ao Curso e identificar se estava cursando a disciplina pela primeira vez. Caso não fosse calouro na disciplina, identificava-se o número de vezes anteriores que a cursou. O último item de interesse era saber se havia alguma sugestão de melhoria, tendo em vista a continuidade dos trabalhos desenvolvidos pela professora, bem como para ouvir críticas e/ou comentários gerais que julgassem pertinentes. As questões intermediárias do roteiro se referia às atividades de RP e FP. O guião de entrevista está ilustrado no Quadro 8. Convém ainda destacar que todas as entrevistas foram áudio gravadas, com autorização dos participantes, via software *Audacity*, no notebook, e via aplicativo *VoiceX*, no telemóvel.Todas as entrevistas foram transcritas pela própria investigadora no mês de julho de 2017.

Quadro 8 - Guião da entrevista semiestruturada

1. Curso?
2. Já fez *Cálculo* 1? Se sim, quantas vezes?
3. Você conhecia a metodologia de RP antes das aulas de Cálculo?
4. Qual a sua opinião sobre as aulas em que a metodologia de RP foi utilizada? Julga que facilitou a aprendizagem?
5. Qual a sua opinião quanto aos trabalhos em grupo realizados em sala de aula?
6. Qual a sua opinião sobre a formulação de problemas?
7. Achas que eu deveria continuar usando esta abordagem nas aulas?
8. Sugestões de melhoria? Críticas? Comentários gerais?

Fonte: Produção da Autora.

Pelo guião da entrevista apresentado no Quadro 8, pode-se observar que os itens de nosso interesse na entrevista estão em consonância com os itens avaliados nos inquéritos. Entretanto, eles apresentavam afirmativas cujas respostas eram “fechadas” e de acordo com a escala Likert. Com as entrevistas buscamos verificar se a opinião dos estudantes, dada de forma livre, convergia com as informações obtidas por meio dos questionários.

7.3.1. Análise das entrevistas

As duas primeiras questões da entrevista tiveram por objetivo caracterizar o público participante. Dos 15 entrevistados, onze estudantes eram licenciandos, sendo que três, dois e seis, respectivamente, estavam vinculados com os cursos de Licenciatura em Matemática, Física e Química; e, os restantes, quatro estudantes cursavam Engenharia, dois da Civil e dois da Mecânica. Além disso, oito dos entrevistados eram calouros na disciplina, cinco alunos estavam a fazer pela segunda vez a disciplina e dois estudantes a cursavam pela terceira vez.

Com relação ao conhecimento que os estudantes tinham da RP, anterior às aulas de *Cálculo* com a professora pesquisadora, doze responderam que não conheciam essa abordagem metodológica e três estudantes indicaram conhecimento sobre a resolução de problemas como uma atividade de ensino. Destes, dois estudantes já haviam tido um contato com a RP como metodologia de ensino, entretanto, esse contato ocorreu porque foram alunos de *Cálculo* dessa investigadora no ano de 2016 (Quadro 9), um deles, no primeiro semestre letivo, e outro, no segundo. Ressaltamos que neste período ocorreram as primeiras experiências de ensino, nas quais essa professora pesquisadora estava a aprender como ministrar uma aula cujo objetivo fosse ensinar um novo conteúdo através da RP, como relatado na seção 4.9.2. Na sequência deste texto, por convenção, ao citarmos parte das transcrições das entrevistas, denotaremos por P as falas da professora e por Mn as falas do aluno entrevistado, sendo que n, variando de 1 a 15, representa a ordem cronológica das entrevistas.

Quadro 9 - Transcrição da resposta do estudante M5 acerca da RP da questão 2 da entrevista

P: E com relação à metodologia de RP, você já a conhecia antes das aulas de Cálculo? *M5: Na primeira vez que fiz Cálculo, lembro que a professora passava algumas atividades assim para fazer.* *P: No caso, a sua professora era eu mesma!* *M5: Sim. Achei bem interessante.* *P: Você teve contato com essa metodologia no Ensino Médio ou em alguma outra disciplina da Universidade?* *M5: Não! Não do professor passar um conteúdo assim, em que o aluno primeiro tenta desenvolver e depois formalizar aquilo ali. Nunca foi me passado. Sempre foi do tipo, primeiro o professor dá uma introdução do assunto e depois até dava uns exercícios em grupo.*

Fonte: Dados da pesquisa.

O quarto item de interesse das entrevistas almejava identificar a opinião dos estudantes acerca da metodologia de RP que foi inserida nas aulas e ainda perceber se julgavam que ela facilitou a aprendizagem. As respostas relacionadas a essa questão nos revelaram mais aspectos positivos do que negativos. Apresentaremos trechos das transcrições que permitiram essa constatação. Considere incialmente parte da entrevista do licenciando em Matemática M13 apresentada no Quadro 10.

Quadro 10 - Transcrição da resposta do estudante M13 acerca da RP da questão 4 da entrevista

P: Achas que foi bom trabalhar com a metodologia de RP? *M13: Então! No começo das aulas, meu grupo não gostou, porque éramos acostumados com aula tradicional e, a professora entregava aqueles trabalhos [tarefas introdutórias do conteúdo]. É difícil ter que pensar sobre o assunto sem o professor explicar. No começo do semestre a gente ficava pensado: "Meu! Quando que a professora vai formalizar? O quê que é derivada? Qual é a definição? A gente ficava ansioso esperando.*

P: Penso que se criava essa expectativa porque vocês já fizeram a disciplina de Matemática Básica [na primeira fase do Curso] e, no primeiro mês de aula de Cálculo, estudamos somente funções [conteúdo abordado com bastante ênfase em Matemática Básica]. Será que isso pode ter afetado vocês, aquela ansiedade de ver limite e derivada?   *M13: Não, eu acho que não. Mais interessante é que a gente não gostou no começo, só que, com o trabalhar na sala de aula acho foi muito interessante.*   *P: O que foi mudando ao longo do semestre?*   *M13: Eu não sei. É que a gente criando [conjecturas], como naquela atividade dos gráficos [Tarefa 18], lembro que eu falei para a professora: "Meu Deus, tudo se encaixa!". Assim é legal, porque não é simplesmente ter que lembrar algo que o professor apresentou em sala. Quando você tem que fazer é mais fácil de você lembrar. Durante a prova, quando eu estava fazendo, eu lembrava do que fizemos na atividade.*   *P: Ah, que legal! Aquela atividade que você está falando é sobre a análise da variação das funções que tinha muitos gráficos?*   *M13: Sim, aquela dos gráficos, que falava da concavidade, quando é negativa ... Então, no começo do semestre, acho que foi ruim porque a gente não estava acostumado. Foi um choque! Se os outros professores começassem a trabalhar desde o início com resolução de problemas seria muito melhor.*   */.../*   *M13: No começo eu sentia falta [das aulas tradicionais], porque a gente ficava naqueles trabalhinhos, e pra ser sincero, eu falava: "Meu Deus do céu, que perca de tempo." A gente fazia aqueles trabalhos, geralmente dava um dia de aula. Pensávamos, a professora podia ter passado já quase o conteúdo todo.*   *P: E ela diz que vai vencer o conteúdo! Como?*   *M13: Nosso grupo pensava, como é que a gente vai terminar esse conteúdo, com esses trabalhinhos que a professora dá?*   *P: Vocês não acreditavam que daria certo?*   *M13: Não. Com o tempo fomos percebendo que com aqueles trabalhos que você dava, quando formalizava o conteúdo, não precisava ser toda aquela coisa descritiva, porque já tínhamos uma base daquilo. Então, tendo uma base se tornava mais fácil a descrição depois. Como posso dizer? Se tornava mais fácil porque não precisava fazer várias aulas para explicar.*

Fonte: Dados da pesquisa.

A fala do aluno M13, revela inicialmente um aspecto negativo, pois afirma que no início do semestre letivo seu grupo não gostou de trabalhar com a metodologia de RP. Ao longo da entrevista foram sendo explicitados os motivos. No início do semestre sentiram a mudança de metodologia, pois no sistema de ensino brasileiro no Ensino Superior são essencialmente tradicionais (Silva Filho; Montejunas; Hipólito, & Lobo, 2007). Outros dois estudantes revelaram essa mesma dificuldade de adaptação no início do semestre letivo. No trecho da entrevista apresentada no Quadro 10 também se percebe a ansiedade gerada nos estudantes por estarem trabalhando de uma forma diferente da tradicional e que propicia maior tempo para realização das atividades em grupos para que os estudantes usem de seu conhecimento e de sua criatividade para resolverem as tarefas propostas, antes do professor explicar o conteúdo em sala de aula. Essa ansiedade é identificada quando estudante M13 fala: "*como é que a gente vai terminar esse conteúdo, com esses trabalhinhos que a professora dá?*" No transcorrer do semestre letivo, esse grupo passou a ver benefícios de se trabalhar com essa abordagem metodológica, pois como eles mesmo elaboravam suas estratégias de solução e conjecturas, quando necessário, puderam sentir o "prazer da descoberta" (Polya, 2006) que era notória com a empolgação que usavam para se expressar. Afirmação pautada na expressão usada pelo aluno: *"tudo se encaixa!"*. M13 usou esses termos ao se referir à Tarefa 18, que consistiu, a partir da interpretação gráfica, elaborarem conjecturas relacionando o "comportamento" de uma função com o (de)crescimento ou sinal da primeira ou segunda derivada. Essa Tarefa 18, que foi relatada na seção 5.4 também foi apontada por outros cinco alunos entrevistados como tendo sido uma atividade em que "tudo se encaixa!". E, a mesma expressão foi usada pela estudante M11 para explicar os motivos pelos quais gostava da metodologia de RP, apesar de também ter sentido dificuldades de adaptação no início do semestre, como pode ser observado no Quadro 11.

Quadro 11 - Transcrição da resposta do estudante M11 acerca da RP da questão 4 da entrevista

M11: E eu gostava muito disso [da metodologia de RP], porque a hora que você explicava no quadro [na formalização], pensava: "Meu! Aquele pensamento, não é que encaixa mesmo!". Foi muito bom. Depois que a gente sofreu o impacto inicial [inserção da metodologia], a gente percebe, olhando a atividade, que [algumas] trazem coisas do dia a dia.

Fonte: Dados da pesquisa.

Três estudantes apontam, como sendo um ponto positivo de usar a metodologia de RP, a possibilidade de saber o que deve estudar com antecedência para melhor compreender o assunto abordado em sala de aula, como evidenciado na fala da aluna M12 apresentada no Quadro 12.

Quadro 12 - Transcrição da resposta do estudante M12 acerca da RP da questão 4 da entrevista

P: E apesar dessa dificuldade [de adaptação com a metodologia], você gostou de trabalhar dessa forma? *M12: Sim! Gostei, porque era muito melhor. Os professores [anteriores] sempre falavam que eu tinha que estudar em casa o que eu veria na aula, mas nunca consegui fazer isso. Só que com a professora eu fui obrigada, pois o que a gente via em sala em uma aula, era o assunto da próxima aula. E isso [as atividades], introduzia o assunto. Então, quando a professora explicava na formalização, eu conseguia ter uma ideia do que era e de onde chegaria.* *P: Então, nesse sentido foi bom, às vezes, não conseguir finalizar [das dez etapas do roteiro do GTERP] na mesma aula?* *M12: Sim. Eu achei melhor, achei melhor não terminar na mesma aula.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Pela fala apresentada no Quadro 12, percebemos que a adaptação que a professora teve de fazer no roteiro de Allevato e Onuchic (2014), que dá orientação ao professor de como pode conduzir uma aula cujo objetivo seja ensinar através da RP, foi uma boa estratégia adotada pela investigadora na visão desse estudante. Geralmente, a resolução de um problema era efectuada em uma aula e, a plenária e formalização do conteúdo, ocorria na aula subsequente. Pela colocação da estudante M12, entendemos que essa abordagem contribuiu positivamente para seus estudos. Outros dois estudantes indicaram como sendo positivo o facto de se trabalhar num ritmo "mais lento" o início do conteúdo, no entanto, no horário extraclasse não se dedicavam ao estudo dessa disciplina porque ainda a professora não havia formalizado um conteúdo novo, conforme apresentado no Quadro 13.

Quadro 13 - Transcrição da resposta do estudante M8 acerca da RP da questão 4 da entrevista

M8: Como a gente não tinha aprendido um conteúdo novo, só tinha sido uma introdução, a gente podia estudar para as outras matérias. */../* *M8: Mas também era muito bom [trabalhar com a metodologia de RP], porque a gente conseguia visualizar o que estava acontecendo. A gente conseguia resolver [as tarefas propostas] com o conteúdo que a gente sabia e depois via que tinha uma forma diferente de resolver.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Na fala do estudante M8 identificamos também que uma vantagem de se ensinar através da resolução de problemas é que o estudante usa seus conhecimentos prévios e, no momento da discussão com os pares (plenária) tem a oportunidade de conhecer outras estratégias de solução, ou seja, o estudante tem consciência de que não existe uma única maneira correta de se chegar à solução. Outros quatro estudantes fizeram comentários similares a este relacionados com a flexibilidade na forma de obter a solução. Além desse aspecto positivo, dois estudantes indicaram como algo bom a possibilidade de aprender com os erros, como afirmado pelo estudante M5 e que está apresentado no Quadro 14. Nesta fala, percebemos que esse estudante aponta como aspecto negativo a quantidade de atividades no Moodle. Entretanto, estas não estão relacionadas diretamente com a metodologia adotada na condução das aulas, mas com as tarefas de formulação de problemas.

Quadro 14 - Transcrição da resposta do estudante M5 acerca da RP da questão 4 da entrevista

P: E você acha que o uso da metodologia de RP foi bom para sua aprendizagem? *M5: Eu acho que foi bem interessante e que contribuiu bastante, porque força tu a criar um caminho lógico. Para chegar na solução as vezes, quando tu estás desenvolvendo, não percebe os erros que está cometendo. E depois que tu fazes, na formalização, tu percebes que por causa disso aqui, não podia fazer assim e faz mais sentido.*

P: E, você percebe algum ponto negativo? *M5: Um ponto negativo, é com relação quantidade de atividades no Moodle. Para mim, ter que elaborar os problemas e mexer no Moodle foi difícil.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Outro aspecto positivo que fora levantado pelo estudante M9 é que o uso da metodologia de RP proporciona aulas mais dinâmicas e que "*M9: É bom trabalhar em grupo, porque o semestre é meio maçante*". Por essa fala de M9 entendemos que o aluno está vendo o trabalho em grupo como uma maneira das aulas serem mais agradáveis. As opiniões sobre trabalhos em grupo e a formulação de problemas serão abordadas posteriormente nessa seção. Ainda, com relação às percepções de aspectos positivos do uso da RP em sala de aula, um estudante da licenciatura percebe que a dinâmica vivenciada por ele como aluno serve como um exemplo que poderá vir a ser adotado em sua (futura) carreira profissional (Formosinho, 2001[120], citado por Figueiroa, 2017). Além disso, esse estudante conseguiu transpor essa experiência para melhor compreender o significado da teoria de aprendizagem significativa, que estudou teoricamente em outra disciplina, como apontado no Quadro 15.

Quadro 15 - Transcrição da resposta do estudante M7 acerca da RP da questão 4 da entrevista

M7: A única coisa que tenho a acrescentar é que, para mim, que faço um curso de ensino e que quero dar aulas, foi importante entender como se aplica [essa metodologia]. */../* *M7: Quando estava precisando fazer um artigo para um congresso que era sobre aprendizagem significativa, chegava a falar um pouquinho [da abordagem em sala de aula parecida com a RP], mas não chegava a exemplificar tão bem quanto a professora fez.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Por fim, a Tabela 78 apresenta as categorias que emergiram, a partir das entrevistas realizadas com os estudantes, indicando os aspectos positivos e negativos do uso da metodologia de RP para ensinar novos conteúdos de *Cálculo* e que foram anteriormente explicitados.

Tabela 78
Categorização das respostas dos entrevistados acerca da metodologia de RP

Aspecto	Categoria	Número de respostas
Positivo	Tudo se encaixa	7
	Conteúdos a serem abordados na aula subsequente	3
	Aprender com o erro	2
	Usar conhecimentos anteriores	5
	A estratégia de solução não é única	4
	Exemplo para usar na futura carreira profissional	1

[120] Formosinho, J. (2001). A formação prática de professores. Da prática docente na instituição de formação a prática pedagógica nas escolas. In: Campos, B. (org.). *Formação profissional de professores no ensino superior.* (pp. 46-64) Porto: Porto Editora.

	Aulas mais dinâmicas	1
	Relações com o cotidiano	1
Negativo	Dificuldade na adaptação à metodologia	3
	Quantidade de atividades no Moodle	1
	Conteúdos a serem abordados na aula subsequente	2

Na Tabela 78 a categoria "conteúdos a serem abordados na aula subsequente" foi considerada tanto como aspecto positivo quanto negativo. O entendimento de que é um aspecto positivo está associado com os estudantes que, como M12, identificavam o conteúdo que a professora desejava abordar e usavam essa constatação para se orientar sobre o que deveriam estudar. O aspecto negativo que relacionamos com essa categoria entendemos como a visão do estudante M8, que considerava bom não "ter conteúdo novo" nas aulas em que as atividades preparadas para usar a abordagem de RP eram desenvolvidas porque não "tinham" assunto para estudar em horário extraclasse e poderiam usufruir desse tempo livre para estudar outras disciplinas.

Apesar de todos os entrevistados terem revelado algum aspecto positivo do uso da metodologia de RP, teve um aluno que deixou clara a sua preferência por aulas tradicionais, como pode ser observado no Quadro 16.

Quadro 16 - Transcrição da resposta do estudante M10 acerca da RP da questão 4 da entrevista

P: Tenho dúvidas se você gostou de trabalhar com essa metodologia. Lembro que trabalhava em dupla e que vocês eram bem quietinhos. Parece-me que depois que esse seu colega parou de vir às aulas, você acabou ficando um pouco deslocado [para realizar os trabalhos em grupo].
M10: É, eu tinha preguiça.
P: Apesar disso, você gostava de trabalhar assim ou preferia as aulas que em que a professora explicava diretamente o conteúdo?
M10: Preferia [a professora] lá na frente.
P: Então, preferia uma aula mais tradicional?
M10: Sim.

Fonte: Dados da pesquisa.

Pela fala do estudante no Quadro 16 percebe-se que o aluno assumiu ter preguiça de realizar os trabalhos em grupo. A partir da desistência de seu colega de dupla, M10 continuou trabalhando em dupla até o final do semestre letivo. Entretanto, não ficou evidente na entrevista se M10 gostou de trabalhar em grupo.

As entrevistas nos revelaram que, exceto o estudante M10, os demais estudantes deixaram claro que julgam ter sido uma experiência positiva e que contribuiu para a sua aprendizagem o facto das atividades em sala de aula terem sido desenvolvidas em grupos. A argumentação identificada em oito entrevistas sobre o aspecto que contribuiu para a aprendizagem dos estudantes foi de que as ideias de um estudante eram complementadas pela de outro, como pode ser observado na fala do estudante M15, no Quadro 17.

Quadro 17 - Transcrição da resposta do estudante M15 acerca da RP da questão 5 da entrevista

M15: Eu gostei de trabalhar em grupo, porque além da oportunidade de conhecermos novas pessoas – eu que estou no início da faculdade – conseguimos juntar as ideias diferentes de cada integrante para resolver o mesmo problema. Assim, conhecemos caminhos diferentes para chegar em uma mesma resposta de diversas formas, o que amplia o nosso conhecimento.

Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar do gosto por trabalhar em grupo ter sido quase unânime, duas entrevistadas revelaram dificuldades relacionadas com esse tipo de atividade. A primeira estudante (M11), por ter consciência das limitações que possui acerca de conhecimentos de matemática básica. Pela fala dela, apresentada no Quadro 18, entendemos que não conseguiu se integrar ao grupo de trabalho devido à heterogeneidade dos integrantes da equipe, que poderia ser vista como algo positivo, no sentido de que os estudantes com mais domínio de conteúdo poderiam ensinar quem tem mais dificuldade. Essa estudante sentiu que estava atrapalhando o bom andamento da equipe e preferiu se isolar inicialmente, mas depois trocou de equipe. A segunda estudante (M12), como apresentado no Quadro 19, expressou o seu gosto em trabalhar em grupo, mas devido à afinidade gerada entre as integrantes, pois reconhece que tem dificuldades em trabalhar em grupo e preferência por trabalhar sozinha.

Quadro 18 - Transcrição da resposta do estudante M11 acerca da RP da questão 5 da entrevista

M11: Sim, os trabalhos [em grupo] foram interessantes. *P: Vocês discutiam bastante no grupo?* *M11: Sim* *P: Percebi que em uma época você ficou mais isolada, parecia estar um pouco desanimada.* *M11: Isso, na verdade assim, eu vi todo mundo evoluindo, e eu não estava acompanhando. Então, achei que se pensasse sozinha talvez eu conseguisse. Enquanto eu estava na primeira [questão da atividade], as outras do meu grupo já tinham acabado a segunda. Aí, resolvi ficar sozinha para não ficar as atrasando.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Quadro 19 - Transcrição da resposta do estudante M11 acerca da RP da questão 5 da entrevista

P: E, quanto aos trabalhos em grupos, como foi para você, foi bom? Gostou? *M12: Não! Eu nunca gostei de trabalhar em grupo, nunca! Sempre gostei de trabalhar sozinha, pois acabava fazendo sozinha. Mas ali [em Cálculo], como peguei um grupo bom, então o grupo facilitou, pois, o grupo fazia junto. Então, assim foi indo, mas sei que tenho um pouco de dificuldade*

em aceitar a opinião dos outros. Só que ali [no nosso grupo], a gente pensava muito igual, então facilitou para mim. *P: Era um grupo que tinha afinidade.* *M12: Então, por isso, facilitou o trabalho o grupo. Mas agora, se fosse trabalhar com um outro grupo, eu não iria gostar. Então, eu gostei.* *P: Gostei, com restrição?* *M12: Com restrições (risos), exatamente!*

Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante M6, de um curso de Engenharia, consegue identificar aspectos positivos que o trabalho em grupo pode contribuir no âmbito profissional tanto do futuro Engenheiro como do futuro professor. Quanto ao primeiro destes profissionais a importância está relacionada ao facto que o trabalho em equipes proporciona a oportunidade de aprender a lidar com pessoas e que de acordo com M6, geralmente os engenheiros possuem problemas de relacionamento interpessoais no trabalho. Com relação ao futuro professor, M6 entende que o trabalho em grupo para os licenciandos tímidos é um espaço ideal para atenuar esse acanhamento. Os trechos das entrevistas que evidenciam estas opiniões de M6 estão ilustrados no Quadro 20.

Quadro 20 - Transcrição da resposta do estudante M6 acerca da RP da questão 5 da entrevista

P: Mesmo para vocês da Engenharia julga que foi bom trabalhar em grupos? *M6: Para a gente, muito mais, pois vamos lidar com pessoas e não sabemos trabalhar em grupo.* */../* *M6: Apesar de ter tido um grupo fixo, acho que seria legal se o grupo não fosse.* *P: Mesmo sabendo que tem algumas pessoas não gostariam dessa mudança, provavelmente, as mais tímidas?* *M6: Pois é, mas se quiser ser professor (se referindo aos licenciados, visto que a turma era de Licenciatura) e é tímido, tem que quebrar essa barreira. Acho importante começar quebrando-a desde o início do curso, visto que terão disciplinas em que são feitas mesas redondas e terão que discutir com as pessoas. Imagino que seja algo assim. Então, se começar agora [primeiro ano do Curso], aos poucos fazer a troca de grupos, que teoricamente as pessoas não se conhecessem direito no grupo, um respeitará a opinião do outro e um deixará o outro falar. É algo muito legal.*

Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante M14 revelou gostar dos trabalhos desenvolvidos em grupos por medo de questionar o professor. Essa investigadora se surpreendeu com essa resposta, pois mesmo quando suas aulas eram somente do estilo expositivas dialogadas, acreditava que sempre propiciou um ambiente de respeito entre professor e aluno. Além disso, esse estudante já conhecia a pesquisadora como professora há, no mínimo, um ano. Por outro lado, entendemos que esse receio de questionar o professor pode ser por questão de respeito e resultante das experiências anteriores no ensino estarem relacionadas em grande parte com o ensino tradicional. Apesar desse estranhamento da pesquisadora pela resposta, na fala apresentada no Quadro 21, inferimos que os trabalhos em equipe favoreceram a aprendizagem de M14.

Quadro 21 - Transcrição da resposta do estudante M14 acerca da RP da questão 5 da entrevista

P: E com relação aos trabalhos em grupo, o que você acha? *M14: Eu acho bom, por deixar os alunos conversarem entre si. E, a gente sabe que aluno tem medo de perguntar para professor.* *P: Mesmo o professor sorrindo em aula (no caso da professora investigadora que, em aula, é extrovertida)?* *M14: Mesmo que o professor diga: olhem! perguntem! Agora, perguntem! Mesmo fazendo isso, às vezes, fico meio preso.* *P: Mesmo eu nunca tendo dado uma resposta do tipo "isso é óbvio!"?* *M14: Efeito passivo. As minhas dúvidas na maioria das vezes são do tipo: "Eu não entendo exatamente aquilo". Então, penso um pouquinho e chego diretamente a conclusão do que é. O meu problema é que quando eu não chego à conclusão do que era, e aí, o professor já está muito na frente do que estava explicando.* *P: Aí já perdeu o raciocínio.* *M14: Sim. Aí, voltando a questão dos trabalhos em grupos, acho eles bom por você estar ali com pessoas que você supostamente tem, ao menos é para ter, o mesmo entendimento que você sobre o assunto. Então, fica mais fácil perguntar para os colegas.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Dois estudantes apontaram como vantajoso o trabalho em grupo porque, dessa forma, as aulas são "menos maçantes". Um destes, foi o estudante M9, dizendo: *"é bom trabalhar em grupo assim, até porque o semestre é meio maçante assim sabe".* Entendemos que esses alunos estavam se referindo ao facto de que a metodologia de RP permitiu que tivessem aulas mais dinâmicas. E ainda, quatro estudantes deixaram claro seu gosto pelo trabalho em grupo, entretanto, dois desses desviaram o assunto e outros dois foram muito sucintos em toda a entrevistas. Destes últimos, M2 respondeu ao questionamento sobre o trabalho em grupo: *"Foi bom. Foi proveitoso."* Nessa situação a investigadora poderia ter questionado mais o estudante para saber de que forma considerava que foi proveitoso, mas essa falha foi devido a pouca experiência da pesquisadora em ocupar o papel de entrevistadora foi percebida no momento da análise dos dados.

A Tabela 79 apresenta de forma resumida as categorias que identificamos no quinto item da entrevista, relacionado ao trabalho em grupo, o qual foi comentado e exemplificado nos parágrafos supracitados. Algumas respostas foram enquadradas em mais de uma categoria e, como quatro estudantes não discorreram sobre o assunto, ao analisar essa Tabela pode-se interpretar equivocadamente que cada entrevistado apontou uma única justificativa pelo gosto do trabalho em grupo, pela soma de diferentes respostas coincidir com o número de entrevistados.

Tabela 79

Categorização das respostas dos entrevistados acerca do trabalho em grupo

Categoria	Número de respostas
Um complementa o outro	8
Dificuldade associada a grupos heterogêneos	2
Medo do professor	1
Com restrições	1
Aulas menos maçantes	2
Aprender a lidar com pessoas	1

O sexto item de interesse da entrevista se referia à opinião dos estudantes sobre as atividades de FP, que foram inseridas em horário extraclasse na modalidade de fórum de discussão. Ao todo eram oito situações problemas propostas para que os estudantes exercessem a criatividade e buscassem criar um problema que viesse a atender à solução ou às condições fornecidas acerca da solução. Além desse trabalho, a professora propôs um trabalho de FP livre, que devia ser realizado em grupo, com a recomendação de que os estudantes deveriam formular um problema que estivesse relacionado com aplicações do *Cálculo* em seus respectivos cursos de graduação. Entretanto, poucos estudantes o elaboraram e, nessas entrevistas, apenas o estudante M5 o mencionou. Por sua fala, percebemos que este trabalho contribuiu para a sua aprendizagem: *"M5: A parte de elaborar o T3 [trabalho de FP com tema livre], a gente tentou fazer sobre o lançamento de foguetes. Esse tema foi muito importante para aprender os conceitos de derivada."* Dois dos alunos entrevistados não apresentaram a proposição de nenhum problema. Apesar disso, como pode ser observado no Quadro 22, um destes estudantes (M14) demonstrou entender que formular problemas é mais difícil que resolver problemas e que a FP exige um bom domínio do conteúdo. Acreditamos que essa maturidade sobre o assunto esteja vinculada ao facto de que M14 ter tido contato com a atividade de FP durante o Ensino Fundamental. Além desse estudante, mais um entrevistado (M12) apontou que teve contato com a FP nesse mesmo nível de ensino e sua opinião acerca dessas atividades corroboram com M14.

Quadro 22 - Transcrição da resposta do estudante M14 acerca da RP da questão 6 da entrevista

P: E, apesar de não ter feito os trabalhos de FP, você acha que formular problemas é uma atividade importante? Pense que você vai ser professor. *M14: Então, vendo dessa maneira, eu gosto dessa ideia de formular os "probleminhas". No Fundamental, quando a professora dava "exerciciozinho" do tipo: faça ou formule um problema* *P: Você já fazia isso?* *M14: Sim, sim. Não com tanta frequência, mas já teve alguns assim. Eu gostava desse [tipo de tarefa], também, nessa época era mais fácil. Não era Cálculo! Penso que para você formular um*

problema, você tem que entender bem o assunto e saber mais do assunto do que se fosse só resolver um problema. Essa lógica em si, é boa.

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao todo, oito dos entrevistados ratificam que "formular problemas é mais difícil que resolver problemas" e, apesar das dificuldades sentidas e do tempo gasto com a elaboração de problemas, jugam importante essa atividade de formulação. Um relato que revelam essas constatações é apresentado no Quadro 23.

Quadro 23 - Transcrição da resposta do estudante M12 acerca da RP da questão 6 da entrevista

P: E, com relação à formulação de problemas? *M12: O T4 [trabalho de FP] ocupou muito o meu tempo. Muito mesmo. Olha só, o que aconteceu comigo. No início do semestre, eu estudava o que via no Cálculo de manhã [nas aulas] e, ao chegar em casa, estudava cada coisa abordada. Só que teve uma hora que os trabalhos ocuparam tanto o meu tempo que bagunçou toda a minha organização. O quê que eu senti assim? Que os trabalhos eram muito difíceis e que não conseguia fazer sozinha. Acontecia muito de eu ter que recorrer a monitoria. Ficava aqui [nas monitorias] a tarde inteira fazendo um problema. Eu senti muita dificuldade, que era muito pesado e ocupava muito o meu tempo.* *P: Mas, apesar de ser difícil, você acha que foi importante ter trabalhado [com a FP]?* *M12: Acho que foi importante ter outra visão. De ter a resposta e chegar na pergunta. Eu já fiz isso aí no meu Ensino Fundamental.* *P: Olha, que isso é raro.* *M12: Olha que minha escola não era muito boa, mas eles se preocupavam, eles falavam para fazer isso. Não lembro se tinha dificuldade, mas assim, aqui eu senti bastante, mas foi muito importante, porque, normalmente, a gente fica com a ideia de que a apostila responde e ali tem que pesquisar.* *P: Mas você acha que aprendeu com isso?* *M12: Aprendi.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Na explanação da estudante M12, percebemos que teve de recorrer ao atendimento extraclasse dos monitores da disciplina de *Cálculo* para atenuar suas dificuldades relacionadas com as atividades de FP. Outros dois estudantes afirmaram que sentiram a necessidade de buscar ajuda extraclasse, do(s) monitor(es), para a concretização das situações problemas propostas e avaliaram que essas atividades contribuíram pouco para sua aprendizagem. Entendemos que essa percepção dos estudantes acerca de sua aprendizagem esteja relacionada com um ponto negativo revelado por estes estudantes, pois, diante das dificuldades que possuíam para compreender o que era lhes apresentado, muitas vezes, o(s) monitor(es) acabava(m) elaborando o problema, como apontado pela estudante M9, no Quadro 24.

Quadro 24 - Transcrição da resposta do estudante M9 acerca da RP da questão 6 da entrevista

P: E com relação à questão de formulação de problemas, o que tem para me falar? *M9: Eu não curti muito. Na maioria dos problemas a gente tinha que pegar ajuda nas monitorias, ou em algum livro, em alguma coisa, e a gente não conseguia, então, praticamente o monitor fazia para gente. Ele dava uma explicação, mas a gente não conseguia entender muito.* *P: Então, você achou difícil?* *M9: Difícil.*

Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante M6, também considerou que o tempo extraclasse dispendido com as atividades de FP foi muito grande. Esse estudante sugeriu inserir nas aulas atividades de FP ou diluir ao longo do semestre. A primeira sugestão é uma ideia que poderá ser implementada em trabalhos a serem desenvolvidos posteriormente. A segunda sugestão já fora implementada no semestre letivo em que essa pesquisa foi desenvolvida, entretanto, a falha da investigadora (como abordado na seção 6.9) foi não ter deixado claro aos estudantes os critérios de avaliação. Por isso, apesar de ter proposto as atividades de FP de problemas nos primeiros dias de aula, muitos dos estudantes que elaboraram seus problemas, os fizeram nos últimos dias do semestre, conforme estipulado pela professora como sendo o prazo final. Esse entrevistado considera que a inserção da FP é mais adequada aos licenciandos, porque exercitariam esse tipo de atividade na sua futura carreira profissional, como pode ser observado no Quadro 25.

Quadro 25 - Transcrição da resposta do estudante M6 acerca da RP da questão 6 da entrevista

P: E com relação ao trabalho de formulação de problemas, o que você me diz? *M6: Então, eu fiz mais ou menos, aos trancos e barrancos. Mas, na minha opinião, a formulação de problemas, eu acho que é muito importante para licenciatura, né, porque vocês têm que aprender a trabalhar com isso quando tiver a tua vida como professor. E [a formulação de problemas] desenvolve muito mais o raciocínio e te instiga a criatividade. Achei isso muito legal. Mas, para mim, foi algo que não deu certo, porque a criatividade, você desenvolver, era uma coisa assim muito "padronizada".* */../* *M6: E, o que eu achei mais complicado mesmo, foi esse tempo extraclasse. Minha sugestão seria trazer isso um pouco para sala de aula ou diluir mais ao longo do semestre.*

Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante M6 ao se referir a sua criatividade como muito "padronizada" justificou que usou essa expressão porque julgava pouco criativos os problemas que elaborou, pois usou ideias similares as encontradas em materiais didáticos e, ao observar os problemas criados por seus colegas, acredita que as proposições deles foram mais originais que as suas. E ainda, se refere a uma das situações problemas propostas como a elaboração tendo sido "engessada", visto que quase todas as propostas elaboradas foram similares a problemas encontrados em materiais didáticos. A esse respeito discutimos na seção 6.2.5, pois a referida situação problema proposta pela professora era mais fechada e não permitiu que os estudantes se desvinculassem de problemas tradicionais.

Com relação a sugestões de modificações nas atividades de FP, além de M6, o estudante M4 aconselhou reduzir o número dessas atividades de oito para seis, e ainda, como pode ser observado no Quadro 26, indicou quais seriam as situações problemas mais recomendadas a permanecerem.

Quadro 26 - Transcrição da resposta do estudante M4 acerca da RP da questão 6 da entrevista

P: Julga que a FP contribuiu para a tua aprendizagem? *M4: Sim, com certeza. Esse é um detalhe concreto. Mas era muito trabalho. Eu achei que foi muito extenso. Mas, apesar de não ter feito todos, eu gostei mesmo.* *P: Mas você está pensando nos trabalhos gerais da disciplina ou só na formulação?* *M4: Na formulação. Dá primeira situação até a oitava.* *P: Acha que gasta mais tempo para formular que resolver problemas?* *M4: Sim. Mas a ideia de pensar um problema é melhor do que resolver o problema, porque para resolver o problema, tu já tens a questão, já tem o que fazer. Na formulação, tu tens que imaginar o problema e executar.* *P: É a criatividade, né.* *M4: É, é estimula a criatividade. Este é um intuito que eu imagino* *P: Sim* *M4: Então, talvez se fosse umas seis situações, eu creio que seria melhor. Teria que ter: duas de funções; duas de limites; derivada, creio que uma; e, taxa relacionada, uma também. Só que nessa da derivada poderia ampliar, ser uma questão um pouco mais envolvente. Não dar algo muito vago. Seriam seis, só que a penúltima e a última podem ser mais elaboradas.*

Fonte: Dados da pesquisa.

As entrevistas também permitiram-nos identificar estudantes que reconhecem os aspectos positivos de se trabalhar com a proposição de seus próprios problemas. Dentre eles destacam-se o melhor entendimento dos conceitos envolvidos tanto em aspectos teóricos (Quadro 27) quanto em práticos (Quadro 28).

Quadro 27 - Transcrição da resposta do estudante M5 acerca da RP da questão 6 da entrevista

M5: Eu acho que isso [formular problemas] é bem importante, porque além de você estar resolvendo os exercícios, quando tu explicas para alguém, tu aprendes muito mais. *P: Exatamente.* *M5: E quando tu elaboras um problema, tu fortaleces o seu conhecimento.* *P: Acho que tem que saber mais do que para resolver problemas?* *M5: Sim, exige bastante. Tem que estar bem firme no conteúdo. A não ser que você faça um problema, assim, meia boca.* *P: Satisfazendo parcialmente condições estabelecidas?* *M5: Sim.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Quadro 28 - Transcrição da resposta do estudante M6 acerca da RP da questão 6 da entrevista

P: Você acha que foi importante trabalha com a FP? *M7: Foi, porque pude tirar muitas dúvidas e vi aplicações. Digamos que entendi a parte conceitual de várias questões.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Diante do exposto, na Tabela 80 apresentamos as categorias identificadas a partir das respostas dos entrevistados relacionadas com as atividades de FP. Por meio dessas entrevistas pudemos perceber que a maioria dos estudantes elencaram aspectos positivos relacionados com essa proposta de trabalho. E, apenas dois estudantes julgaram que a FP pouco contribuiu para seu aprendizado.

Tabela 80

Categorização das respostas dos entrevistados acerca da FP

Categoria	Número de respostas
FP é mais difícil que RP	8
Julga importante formular problemas	8
Dispende muito tempo	8
Propõe alterações na forma como foi posta a FP	2
Conhecia atividades de FP	2
Auxílio de monitores	3
RP contribuiu para a FP	1

A sétima questão da entrevista tinha por finalidade saber se os estudantes recomendariam que a professora continuasse adotando a metodologia de RP em outros semestres letivos. Dos 15 entrevistados, somente dois não recomendariam, por diferentes motivos: o estudante M10, porque prefere aulas tradicionais, mas mesmo assim reconhece que o uso da metodologia trouxe contribuição positiva para sua aprendizagem, ele afirma que “perdeu o medo de resolver problemas” (Quadro 29); o estudante M12 por identificar que é individualista nos estudos, por isso sentia dificuldade em se relacionar com novos integrantes que se juntavam ao grupo já existente e que os membros possuíam bastante afinidade (Quadro 30).

Quadro 29 - Transcrição da resposta do estudante M10 acerca da RP da questão 7 da entrevista

P: Já percebi que gosta mais de aula tradicional, mesmo assim, você julga que aprendeu ao longo do semestre com essas atividades ou acha que se não tivesse aplicado seria indiferente? *M10: Acho que perdi mais o medo de resolver problemas.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Quadro 30 - Transcrição da resposta do estudante M12 acerca da RP da questão 7 da entrevista

P: O que você me diria, eu deveria continuar com o uso da metodologia em um outro semestre? *M12: Eu falaria que não, porque assim, eu acho que seria legal, só que eu vejo pelo meu lado. Nesse semestre, por exemplo, às vezes vinha pessoa que não fazia [as atividades em grupo] com a gente e, do nada, aparecia no grupo. Eu não conseguia incluir a pessoa no nosso grupo, discutia sempre com as mesmas pessoas.* */../* *M12: Por quê? Não sei. Sei que sou meio muito individualista nos meus estudos. Eu sempre fui assim.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Os outros 13 entrevistados recomendam que a professora continue adotando em suas aulas a metodologia de RP. Destes, somente três estudantes argumentaram os motivos pelos quais acreditam que seria bom continuar com essa abordagem metodológica. O primeiro destes estudantes recomendaria por se sentir mais preparado para trabalhar com a RP (Quadro 31), após ter vivenciado um semestre letivo em que fora dada essa ênfase na disciplina de *Cálculo*. O segundo, recomendaria continuidade dessa abordagem porque permite estabelecer uma relação mais próxima entre professor e aluno além do estudante perceber que o professor está preocupado com a sua aprendizagem (Quadro 32). E, o terceiro por identificar que aprendeu bastante com essa abordagem que prioriza que os estudante resolvam por seus meios as tarefas propostas e depois aprimora-se o conhecimento (Quadro 33).

Quadro 31 - Transcrição da resposta do estudante M1 acerca da RP da questão 7 da entrevista

P: Você recomendaria que no próximo semestre continuasse usando a metodologia de RP? *M1: Eu recomendaria, porque agora que eu já conheço, eu estaria mais preparada se eu fosse pegar o curso de novo, ou Cálculo 2. Agora eu já sei como funciona e acho que seria muito bom.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Quadro 32 - Transcrição da resposta do estudante M6 acerca da RP da questão 7 da entrevista

P: E você acha que eu deveria continuar usando essa metodologia em sala de aula? *M6: A de resolução, eu acho 100%! Assim, eu gostei muito. É que eu achei muito diferente. Assim, até há um melhor relacionamento com o professor, porque o professor demonstra está mais interessado no aluno, entende. Geralmente, a distância [entre professor e aluno] é muito grande. Assim, uma impressão que eu acho muito boa é que o professor se importa com o aluno, se preocupa se ele está entendendo. Isso é um motivo que as vezes você pega meio que ranço do professor se acha que ele não está nem aí para você. Ele não se importa se você entendeu. Isso acaba desestimulando. Tem muito caso assim de aluno que se desestimulam porque o professor não estimula.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Quadro 33 - Transcrição da resposta do estudante M15 acerca da RP da questão 7 da entrevista

M15: Eu acho que a professora deveria continuar aplicando a metodologia, porque eu realmente, aprendi muito dessa forma, que o conteúdo foi passado. A professora soube contextualizar bem os assuntos, conseguiu fazer com que tratássemos sozinhos e depois nos ajudou complementando, o que a gente já tinha tentado fazer.

Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante M5, além achar que a professora deve continuar com o uso da metodologia de RP, afirma que *"outros professores deveriam fazer [uso desta metodologia]".* Os outros oito estudantes que ratificam que a abordagem metodológica deve ter seguimento nas aulas da professora, não apresentam justificativas para tal opinião. Dentre estes, três enfatizam que poderia haver uma redução nas atividades extraclasse e dois estudantes afirmam que "os trabalhinhos" desenvolvidos em sala de aula devem ser mantidos (Quadro 34).

Quadro 34 - Transcrição da resposta do estudante M11 acerca da RP da questão 7 da entrevista

P: E você acha que eu devia continuar usando essa abordagem? *M11: Pela minha experiência e pelo que ouço, acho dá para diminuir, mas não dava para parar.* *P: O diminuir [se refere a] trabalho [extraclasse] ou em sala de aula?* *M11: Diminuir trabalho. Em sala de aula, acho que está bom.* */../* *M11: Dentro da sala, teve bastante atividade gostosa para a gente. Claro que algumas são realmente grandes.*

Fonte: Dados da pesquisa.

O último item da entrevista era destinado a ouvir tanto sugestões de melhoria quanto críticas, além de comentários gerais que desejassem fazer. Nessa questão foram apresentadas quatro sugestões. Seis estudantes sugeriram uma redução nas atividades de formulação de problemas (Quadro 15, Quadro 26 e Quadro 34). Um estudante sugeriu que a professora poderia criar um *chat* para discutir as atividades de FP, cuja ideia seria a professora propor uma situação, estipular horário e delimitar um tempo de discussão (Quadro 35). E, um estudante que, apesar de ter afirmado que gostou da abordagem metodológica dada, sugere que a professora deveria explicar um pouco mais da teoria no quadro antes das atividades propostas serem resolvidas pelos estudantes e depois, no momento da formalização, concluir a explicação (Quadro 36). Entendemos que por essa colocação, apesar das dificuldades de adaptação com a metodologia terem sido superadas e do estudante ter revelado gosto pela metodologia, predomina a preferência pelos métodos tradicionais de ensino.

Quadro 35 - Transcrição da resposta do estudante M5 acerca da RP da questão 8 da entrevista

M5: Acho que plataforma do Moodle atrapalhou um pouco. A forma que o fórum é feito. Eu acho que talvez fosse melhor propor os trabalhos como um chat. A professora poderia propor a atividade lá e daí avisar, por exemplo, "hoje à tarde colocarei uma atividade no chat e gostaria que vocês passassem uma "horinha" discutindo aquilo lá".   *P: É uma boa sugestão. Obrigada.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Quadro 36 - Transcrição da resposta do estudante M1 acerca da RP da questão 8 da entrevista

P: Tens alguma sugestão, crítica, comentário adicional?   *M1: Eu acho só que seria bom um pouquinho mais da explicitação da teoria no quadro, e aí depois de formalizar a teoria um pouquinho mais de explicação, mas na verdade acho que penso assim porque é como estou acostumada.*

Fonte: Dados da pesquisa.

7.4. Síntese

Nesse capítulo analisamos as opiniões dos estudantes acerca da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP usada nas aulas para ensinar novos conteúdos de *Cálculo* e das atividades de FP. Para tanto, investigamos as respostadas dadas aos dois inquéritos aplicados e às entrevistas.

As entrevistas revelam que a metodologia de RP foi bem aceita pela maioria dos estudantes e que estes se beneficiaram pelas atividades em grupo realizadas, tanto em nível de argumentações matemáticas quanto com relações interpessoais. E ainda, constatamos que os estudantes, apesar de julgarem difícil formular problemas e que dispende muito tempo, reconhecem sua importância em termos de conhecimento, pois é necessário conhecer muito bem o conteúdo para que o mesmo consiga elaborar problemas de forma que satisfaçam as condições dadas (consideramos situações semiestruturadas e aceitando os dados, como definidos no Capítulo 5), e ainda, relacionem com os conteúdos de *Cálculo*.

Ao analisar a opinião dos estudantes no inquérito acerca da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP nas aulas de *Cálculo* podemos inferir que os estudantes a consideram adequada, pois, pelos dados da seção 7.1, no mínimo, 78% dos participantes corroboraram com as afirmações positivas vinculadas ao uso da metodologia de RP e, ao menos, 70% dos estudantes discordaram dos aspectos que poderiam ser considerados negativos.

Por meio do inquérito sobre a FP, constatamos que a opinião dos estudantes converge com a nossa de que é mais difícil formular que resolver problemas e que esta atividade permite que a criatividade seja exercida. Particularmente, acreditamos que esse procedimento de ter que elaborar seus próprios problemas, tendo que atender certas condições relacionadas com os conteúdos matemáticos, exige conhecimento e um bom domínio sobre o conteúdo. Nessa investigação a forma como conseguimos agregar a atividade de FP foi usando um ambiente virtual e em horário extraclasse. Na Figura 216 observamos que o estudante sugeriu inserir a FP no cotidiano da sala de aula. Acreditamos que essa inserção pode ser interessante e ter-se-ia oportunidade de discutir diversas ideias com a turma, além de propiciar um rico momento de aprendizado a todos os envolvidos, pode "ensinar" estudantes com mais dificuldades como exercitar tal atividade. Essa abordagem de FP nos horários regulares de *Cálculo* é uma sugestão de continuidade de pesquisas relacionadas com essa temática.

A análise das entrevistas permitiu-nos concluir que, por unanimidade, a experiência de ensino vinculada a essa pesquisa, trouxe contributos positivos para a aprendizagem desses estudantes, pois a partir do conhecimento que possuíam foram capazes de desenvolver as tarefas propostas e em diversas situações puderam perceber por si próprios que, em suas conjecturas, "tudo se encaixa". Essa pesquisa também contribuiu para desenvolverem o espírito de trabalho em equipe, em que é necessário aprender a ouvir o colega, expor suas ideias e opiniões sempre com respeito ao próximo. Estas atitudes desenvolvidas são importantes e necessárias na futura carreira profissional independentemente se estamos falando de Engenheiros ou Professores. As entrevistas também nos revelaram que, apesar de reconhecerem benefícios do uso de uma abordagem em que o aluno é mais participativo e comprometido com sua aprendizagem, há alunos que preferem o ensino tradicional.

Com relação às atividades de formulação de problemas constatamos que, tanto pelas entrevistas quanto pelo inquérito de FP, os estudantes entendem que formular problemas é mais difícil do que resolver problemas, que essa atividade permite ao estudante fazer uso de sua criatividade e que é necessário ter domínio do conteúdo para obter sucesso nas elaborações de problemas. Entretanto, foi perceptível que o fórum de discussão criado para trabalhar com as atividades de FP não foi bem sucedido nem aprovado pelos estudantes. Estes também julgam que a quantidade de atividades desenvolvidas foi muito numerosa. No entanto, a investigadora acredita que essa impressão que os estudantes tiveram se deve ao facto de que muitos deles deixaram para realizar o trabalho proposto nos últimos dias estabelecidos para tal atividade. Como explicado nesse capítulo e no anterior, a professora cometeu a falha de não deixar claro desde o início do semestre letivo quais seriam os critérios de avaliação, todavia, os estudantes estavam cientes da existência desta atividade e que ela tinha caráter avaliativo desde a primeira semana de aula. Essa atividade deve ser repensada "em como" e "em que" quantidade deve ser proposta. Acreditamos que uma ideia promissora para tal atividade pode ser propor as situações problemas na forma de *chat*, como fora sugerido por um estudante.

Por fim, por meio da análise qualitativa e interpretativa dos dados apresentada nesse capítulo pudemos constatar que as opiniões dos estudantes tanto sobre a inserção da metodologia de RP nas aulas de *Cálculo* quanto sobre as atividades de FP nos questionários e nas entrevistas são convergentes e em consonância com a literatura a respeito dos benefícios dessa metodologia e da atividade de formulação de problemas. Até esse capítulo tratamos assuntos relacionados com a análise qualitativa dos dados coletadas com viés interpretativo focado muito nas percepções dessa investigadora. Com a finalidade de tornar essa análise mais robusta, no próximo capítulo abordaremos a análise estatística realizada a partir dos testes aplicados no primeiro semestre de 2017. Dessa forma, complementaremos nossa análise a partir do que os dados quantitativos têm a nos revelar.

CAPÍTULO 8

ANÁLISE QUANTITATIVA DOS TESTES

Esse capítulo tem por finalidade apresentar a análise estatística dos dados oriundos da aplicação de um pré-teste e pós-teste (Anexo 9) às turmas participantes da pesquisa e suas respectivas turmas de controle. A análise estatística foi realizada com auxílio do software IBM SPSS Statistic 25. Um histórico sobre a escolha da turma para realizar pilotagem do teste e das turmas de controle, quando e em que condições foram desenvolvidos os referidos testes foi apresentado na seção 4.9.3.2. Ao final deste capítulo faremos uma reflexão sobre os resultados revelados pelos dados. Iniciaremos esse capítulo abordando questões referentes à análise quantitativa dos testes e iremos, na próxima seção, explanar sobre o estudo da consistência interna (fiabilidade) dos mesmos.

8.1. Fiabilidade dos testes

Para a medir consistência interna desses testes foi usado o coeficiente Alpha (α) de Cronbach que varia de 0 até 1. De acordo com Nunnaly (1978[121]) referido por Maroco e Garcia-Marques (2006), numa investigação preliminar, o valor do coeficiente α considerado aceitável é de 0,7). Nesse caso, o coeficiente α de Cronbach foi de 0,718 (Tabela 81). Portanto, valor aceitável para uma investigação preliminar.

Tabela 81. *Fiabilidade do teste aplicado em 2016/2*

Alfa de Cronbach	Alfa de Cronbach com base em itens padronizados	N de itens
0,718	0,796	19

Fonte: IBM SPSS Statistic 25

Para determinar o α de Cronbach foram consideradas as notas atribuídas a cada um dos vinte e um itens do teste distribuídos em seis tarefas. A avaliação das respostas foi efetuada através de uma *escala holística focada* que foi adaptada ao conteúdo do teste. Conforme Charles, Lester e O'Daffer (1992), essa escala é *holística* porque considera o processo da obtenção da solução, não apenas a resposta; e, é *focada* por atribuir um escore de acordo com as estratégias utilizadas na resolução do problema. A pontuação atribuída a cada um dos itens dos problemas variou de 0 até 4 (Anexo 4). Para

[121] Nunnally, J. C. (1978). *Psychometric theory.* New York: McGraw-Hill Inc.

inserir os dados no SPSS a fim de que fosse efetuada a análise do coeficiente α de Cronbach o escore atribuído conforme a escala holística focada adotada foi convertido para uma escala de 0 a 100 pontos. Pela Tabela 81observa-se que o número de itens considerados no cálculo do α de Cronbach foi igual a dezenove. Dois (dos 21) itens foram desconsiderados automaticamente pelo SPSS porque nenhum dos estudantes apresentou uma resolução coerente com o que fora proposto ou não apresentou qualquer tipo de registro, dessa forma, a pontuação atribuída foi zero pontos. Todas as pontuações nulas de um (item do) problema geram uma matriz de covariâncias cujo determinante é zero ou aproximadamente zero. Com isso, as estatísticas baseadas em sua matriz inversa não podem ser calculadas e são exibidas como valores omissos do sistema[122]. Um desses itens desconsiderados se refere à quarta tarefa do teste relacionado com a definição formal de limite. A maioria dos respondentes deixou em branco esse item e, um deles, deixou registrada a informação de que esse assunto não fora trabalhado em sala de aula (Figura 219). Essa informação fora confirmada pela professora da turma.

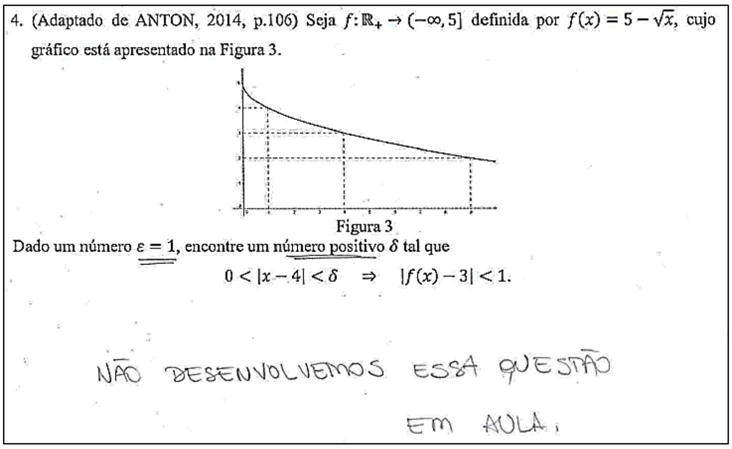

4. (Adaptado de ANTON, 2014, p.106) Seja $f: \mathbb{R}_+ \to (-\infty, 5]$ definida por $f(x) = 5 - \sqrt{x}$, cujo gráfico está apresentado na Figura 3.

Figura 3

Dado um número $\varepsilon = 1$, encontre um número positivo δ tal que

$$0 < |x - 4| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 3| < 1.$$

NÃO DESENVOLVEMOS ESSA QUESTÃO EM AULA.

Figura 219 - Resposta da tarefa 4 do processo de validação dos testes.
Fonte: Dados da pesquisa.

O outro item que todos os estudantes zeraram foi o "d" da tarefa 6 que estava relacionado ao conceito de interpretação cinemática da derivada. Nos itens anteriores dessa tarefa os estudantes deveriam calcular a velocidade média para intervalos de tempo cada vez menores e, no último item, esperava-se que intuíssem que a velocidade instantânea era o limite da velocidade média. Porém, mesmo os estudantes que responderam corretamente sobre as velocidades médias, não argumentaram sobre o valor da velocidade instantânea. Como acreditamos que os estudantes tinham condições de intuir o que lhes era questionado, pois trabalharam com a ideia intuitiva de limites nesse item "d" da tarefa 6 e, na

[122] Essas justificativas são dadas pelo próprio software ao efetuar os cálculos e eliminar alguma dos itens.

tarefa 4, entendemos que não responderam por não terem estudado o assunto, o teste foi mantido como proposto inicialmente.

Na Figura 220 está ilustrada a distribuição das pontuações dos estudantes da MAT e QUI nos testes. Esses diagramas foram construídos com base nas pontuações finais de cada teste. Convém destacar que a amplitude amostral em ambos os testes foi a mesma, porque não foram considerados os estudantes que fizeram apenas o pré-teste, visto que não teríamos como acompanhar a evolução do desempenho dos mesmos do pré-teste para o pós-teste.

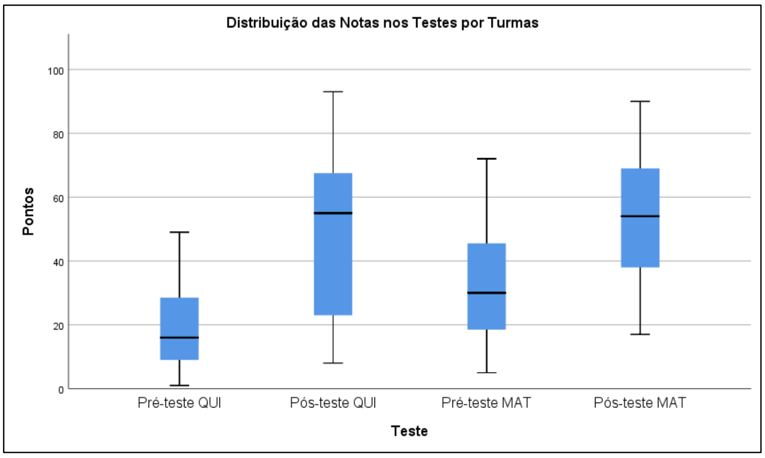


Figura 220 - Distribuição das pontuações nos testes por turmas.
Fonte: IBM SPSS Statistic 25.

Para interpretar o gráfico da Figura 220, usaremos o significado da representação das variáveis (os testes) por meio do diagrama de extremos e quartis que, de forma geral, ilustram o primeiro, o segundo (corresponde à mediana) e o terceiro quartil, além de eventuais *outliers* e extremos, como mostra a Figura 221.

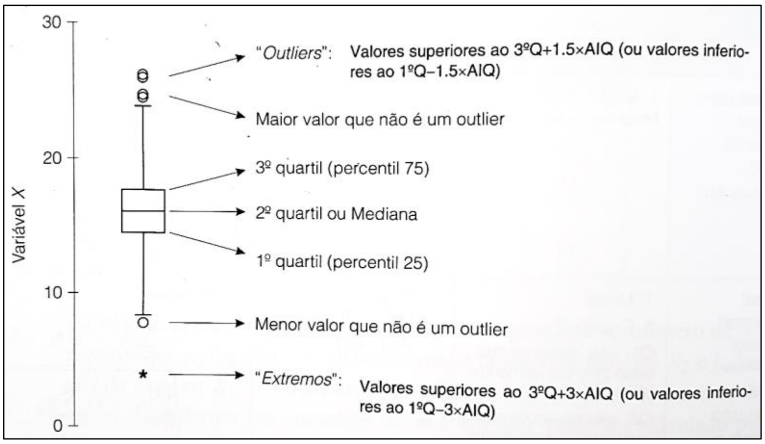


Figura 221 - Diagrama de extremos e quartis.
Fonte: Marôco, 2010, p. 44.

Por meio da interpretação dos diagramas de extremos e quartis, representados na Figura 220, percebemos que em ambas as turmas a mediana das pontuações obtidas no pós-teste é maior do que a pontuação do terceiro quartil do pré-teste; e ainda, o primeiro quartil do pós-teste é maior do que a mediana do pré-teste. Portanto, por essas observações concluímos que ambas as turmas tiveram melhor desempenho no pós-teste. Além disso, ao compararmos o desempenho das turmas no pré-teste percebemos que a pontuação que representa o primeiro quartil da MAT é maior do que a mediana do pré-teste da QUI. Acreditamos que o melhor desempenho dos estudantes da MAT, no pré-teste, esteja associado ao facto de que os integrantes dessa turma que eram licenciandos em Matemática já tinham cursado a disciplina de Matemática Básica (na primeira fase do Curso) e, pelos estudantes oriundos de outros Cursos possuírem algum conhecimento de *Cálculo*, visto que não era a primeira vez que estavam matriculados na disciplina.

Ao analisar separadamente as turmas, percebemos que na QUI, em ambos os testes as menores pontuações foram parecidas e próximas de zero pontos. E ainda, comparando as medianas, percebemos que a mediana do pós-teste da QUI é maior do que a pontuação mais alta que essa turma obteve no pré-teste. Isso indica que, em termos de pontuações finais, que ao menos metade desses estudantes tiveram um significativo aumento de pontuação de um teste para outro. Analisando os resultados da MAT, observamos que tanto as menores como as maiores pontuações obtidas em ambos os testes parecem ter aumentado de forma proporcional. Nessa turma, observamos também que a variação das pontuações máximas e mínimas, com relação às respectivas medianas no pós-teste, aparenta uma simetria no intervalo de distribuição de pontuações.

Para complementar a análise gráfica usaremos as medidas de tendência central apresentadas na Tabela 82 e na Tabela 83. De acordo com Marôco (2010), os dados nos revelam que, em ambas as turmas, a dispersão dos dados foi maior no pós-teste, sendo mais evidente esta discrepância na QUI. Na MAT, os intervalos de variação (a diferença entre a pontuação máxima e mínima) foi de 67 e 73 pontos, respectivamente, no pré-teste e no pós-teste. Na QUI, os intervalos de variação foram, respectivamente, de 48 e 85 pontos. Apesar da grande dispersão de valores na pontuação do pós-teste da QUI, a mediana foi uma unidade a mais do que da MAT. Na QUI, 50% dos estudantes obtiveram pontuação igual ou superior a 55 pontos no pós-teste e essas pontuações variaram de 55 a 93 pontos. Na MAT, 50% das pontuações do pós-teste variaram de 54 a 90 pontos. Esses dados tabelados ainda nos permitem observar que as pontuações mínimas da QUI foram menores do que as pontuações mínimas da MAT, porém, a mediana e a pontuação máxima foram maiores do que as da MAT. Com relação às amplitudes interquartis (AIQ), que correspondem a diferença entre o terceiro e o primeiro quartis, na MAT foram iguais a 29 pontos no pré-teste e 31 no pós-teste. E, na QUI, as AIQ foi de 23 pontos no pré-teste e de 49 pontos no pós-teste. Observamos que em ambas as turmas a amplitude foi maior no pós-teste. Entretanto, na MAT a variação das AIQ foi pouco significativa (apenas 2 pontos) e, na QUI, essas variações foram mais expressivas (26 pontos).

Tabela 82.
Medidas de localização relativas aos resultados do pré-teste e do pós-teste – MAT

		Pré-teste	Pós-teste
N	Válido	35	35
	Omisso	0	0
Média		32,17	52,63
Mediana		30,00	54,00
Mínimo		5	17
Máximo		72	90
Quartis	Q_1	18,00	38,00
	Q_3	47,00	69,00

Fonte: IBM SPSS Statistic 25

Tabela 83.
Medidas de localização relativas aos resultados do pré-teste e do pós-teste – QUI

		Pré-teste	Pós-teste
N	Válido	19	19
	Omisso	0	0
Média		19,21	49,42
Mediana		16,00	55,00
Mínimo		1	8
Máximo		49	93
Quartis	Q_1	9,00	19,00
	Q_3	32,00	68,00

Fonte: IBM SPSS Statistic 25

Pelo histograma de frequência e pela curva normal das distribuições de cada um dos testes apresentados na Figura 222, Figura 223, Figura 224 e Figura 225, observamos que a distribuição é enviesada para a esquerda no pré-teste e aproximadamente simétrica no pós-teste para ambas as turmas. A primeira dessas situações ocorre devido à presença de muitas pontuações muito menores do que a média.

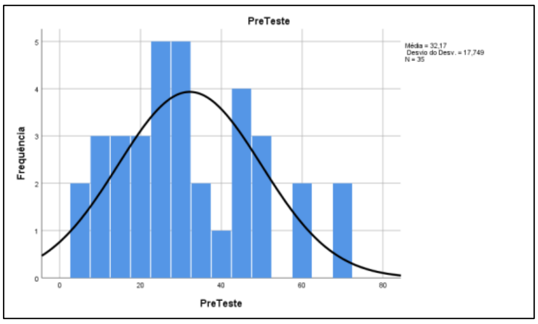


Figura 222 - Histograma e curva de distribuição normal do pré-teste da MAT.
Fonte: IBM SPSS Statistic 25.

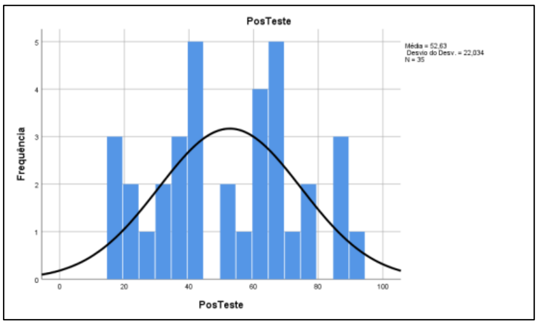


Figura 223 - Histograma e curva de distribuição normal do pós-teste da MAT.
Fonte: IBM SPSS Statistic 25.

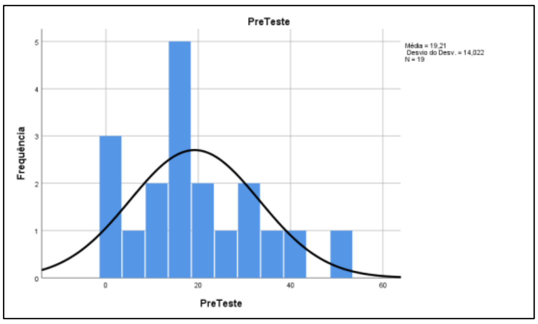


Figura 224 - Histograma e curva de distribuição normal do pré-teste da QUI.
Fonte: IBM SPSS Statistic 25.

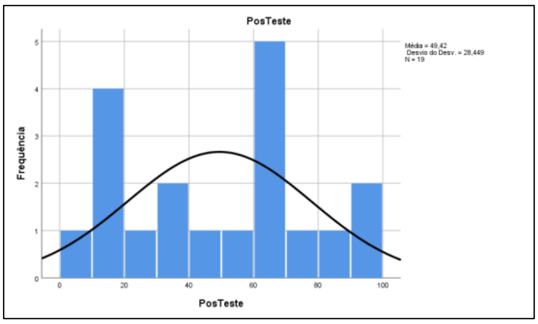


Figura 225 - Histograma e curva de distribuição normal do pós-teste da QUI
Fonte: IBM SPSS Statistic 25.

Essa análise nos permite identificar diferenças no desempenho dos estudantes de ambas as turmas do pré-teste para o pós-teste. Para sabermos se essas diferenças aparentes foram significativas e compreender se a experiência de ensino desenvolvida teve influência no desempenho do público participante no pós-teste, procedeu-se a uma análise comparativa dos resultados dessas turmas com suas respectivas turmas de controle. Para tanto foi realizada a Análise de Covariância também denominada ANCOVA, que será explanada na próxima seção.

8.2. Análise da Covariância

A ANCOVA é um método de análise estatística desenvolvido por Fischer em 1932 e pode ser entendido com uma combinação entre as análises de variância e de regressão (Glass & Hopkins, 1995; Marôco, 2010). Ao realizar uma ANCOVA testa-se simultaneamente o efeito das interações do grupo/turma (factor principal) e os resultados do pré-teste (covariável/variável independente) sobre as pontuações do pós-teste (variável dependente). Vieira (2013) afirma que antes de se efetuar uma ANCOVA é necessária a verificação dos seguintes pressupostos: normalidade das distribuições, homogeneidade das variâncias, homogeneidade das retas de regressão, existência de uma relação linear entre a covariante e a variável independente; e, fiabilidade da medição da covariante. O pressuposto da fiabilidade já foi discutido no início dessa seção. Nos demais parágrafos iremos discutir os demais pressupostos.

A normalidade das distribuições pode ser verificada por meio dos testes conhecidos como Shapiro-Wilk e Kolmogorov-Smirnov. Conforme Marôco (2010), o primeiro desses testes é adequado para amostras com até $N = 30$ elementos. Entretanto, o software SPSS efetua os cálculos adequados para o teste de Shapiro-Wilk com amostras de até 50 elementos (SPSS, 2016). Os resultados obtidos dos testes de normalidade estão apresentados na Tabela 84.

Na Tabela 84 percebemos que considerando uma probabilidade de erro de 5%, por meio do valor de p[123] (Sig) do teste de Shapiro-Wilk pode-se observar que as amostras não são significativamente diferentes, pois $p > 0{,}05$ tanto no pré-teste como no pós-teste, com exceção da turma de controle da QUI no pós-teste. Nessa turma, o $p = 0{,}032 < 0{,}05$, ou seja, estaria sendo violado o pressuposto da normalidade. Entretanto, Marôco (2010) afirma que há demonstrações matemáticas em Scheffé (1959[124]) e estudos envolvendo simulações em Harwell, Rubinstein, Hayes e Olds (1992[125]) e Refinetti (1996[126]) que demostram que os testes paramétricos continuam produzindo resultados confiáveis mesmo quando são aplicados a situações diferentes daquelas condições consideradas quando foram deduzidos "desde que as distribuições das amostras não sejam extremamente enviesadas ou achatadas e que as dimensões das amostras não sejam extremamente pequenas" (Marôco, 2010, p. 203). Esse mesmo autor faz ainda referência à pesquisa de Kline (1998[127]), que por meio de simulações, garante a robustez dos métodos paramétricos para valores absolutos de assimetria menores do que 3 e de achatamento menores do que 10. Com relação a alternativas não paramétricas à ANCOVA paramétrica, Vieira (2013, p.176), tendo como referência o trabalho de Olejnik e Algina (1984[128]), afirma que "em termos de poder estatístico, apenas proporcionam uma assinalável vantagem em casos de violações extremas das premissas e em que a relação linear entre as medidas é fraca". Diante do exposto aliado ao facto de que para aplicar testes paramétricos, além da variável dependente possuir distribuição normal também é necessário que as variâncias populacionais sejam homogêneas (Marôco, 2010), mantemos a opção por aplicar testes paramétricos.

---

[123] Por p denotaremos $p - value$. Nas tabelas oriundas do IBM SPSS Statistic 25, o valor de Sig. equivale a p.

[124] Scheffé, H. (1959). *The Analysis of Variance*. John Wiley & Sons, New York, 1959.

[125] Harwel, M. R.; Rubinstein, E. N.; Hayes, W. S.; & Olds, C. C. (1992). Summarizing Monte Carlo results in methodological research: The one- and two-factor fixed effects ANOVA cases. *Journal of Educational Statistics.* 17 (4), 315 – 339, 1992.

[126] Refinetti, R. Demonstrating the consequences of violations of assumptions in analysis of variance. *Theaching of Psychology.* 23, p. 415 – 439, 1996.

[127] Kline, R. B. (1998). *Principles and Practice of Strucutural Equation Modeling.* Guilford Press, New York, 1998.

[128] Olejnik, S; Algina, J. A review of nonparametric alternatives to analysis of covariance.(1984). *Paper presented at the Annual Metting of the American Educational Research Association.* New Orleans, April, 1971, 46 p, 1984.

Tabela 84
Testes de Normalidade

		Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Turma	Estatística	df	Sig.	Estatística	df	Sig.
PreTeste	MAT	0,130	35	0,145	0,949	35	0,103
	QUI	0,170	19	0,153	0,920	19	0,112
	Controle MAT	0,129	20	0,200*	0,952	20	0,402
	Controle QUI	0,110	22	0,200*	0,965	22	0,587
PosTeste	MAT	0,104	35	0,200*	0,956	35	0,173
	QUI	0,142	19	0,200*	0,944	19	0,308
	Controle MAT	0,213	20	0,018	0,914	20	0,077
	Controle QUI	0,133	22	0,200*	0,902	22	0,032

*. Este é um limite inferior da significância verdadeira.
a. Correlação de Significância de Lilliefors
Fonte: IBM SPSS Statistic 25

Para estudar a homogeneidade das variâncias foi usado o teste de Levene que consiste em averiguar a possibilidade de aplicar as hipóteses de testes paramétricos que se referem à comparação de médias populacionais determinadas a partir do mesmo número de amostras representativas (Marôco, 2010). A Tabela 85 e Tabela 86 apresentam os resultados do teste aplicado a cada uma das turmas envolvidas na pesquisa considerando suas respectivas turmas de controle.

Tabela 85
Teste de homogeneidade das variâncias para a variável pós-teste da MAT e da turma de controle

		Estatística de Levene	df1	df2	Sig.
PosTeste	Com base em média	3,407	1	53	0,070
	Com base em mediana	3,360	1	53	0,072
	Com base em mediana e com df ajustado	3,360	1	50,918	0,073
	Com base em média aparada	3,364	1	53	0,072

Fonte: IBM SPSS Statistic 25

Tabela 86
Teste de homogeneidade das variâncias para a variável pós-teste da QUI e da turma de controle

		Estatística de Levene	df1	df2	Sig.
PosTeste	Com base em média	8,061	1	39	0,007
	Com base em mediana	6,449	1	39	0,015
	Com base em mediana e com df ajustado	6,449	1	37,895	0,015
	Com base em média aparada	8,085	1	39	0,007

Fonte: IBM SPSS Statistic 25

Os dados da Tabela 85 nos revelam que as variâncias não são significativamente diferentes entre a MAT e sua turma de controle, pois considerando o teste de Levene com base na média foi obtido que $p = 0{,}070 > 0{,}05$. Portanto, o critério da homogeneidade das variâncias é atendido nesses grupos. Entretanto, ao observar $p - value$ obtido com o teste de Levene (Tabela 86) percebemos que o pressuposto da homogeneidade das variâncias para a QUI e sua turma de controle não é satisfeito, pois $p = 0{,}007 < 0{,}05$. De acordo com Marôco (2010) é preferível utilizar o recurso de transformações matemáticas para averiguar se dessa forma os critérios exigidos para adotar uma análise paramétrica são garantidos. Por isso, antes de concluir que havia diferenças significativas optamos por realizar uma transformação desses dados. A observação da mediana ilustrada no gráfico da Figura 226 (linha em destaque no interior da caixa que representa a distribuição das pontuações) permite-nos constatar que a maioria das pontuações da QUI foram maiores do que da turma de controle. Por isso, inspirado na sugestão de Marôco (2010, p. 348), que usasse a transformação $\sqrt{y}$ quando "y_i forem contagens de números pequenos" a professora pesquisadora adotou-a erroneamente, pois inicialmente não percebeu a expressão "contagem". A simulação para essa transformação foi feita e obteve-se os resultados da Tabela 87. Ao redigir esse texto, a investigadora identificou sua leitura equivocada. Entretanto, esse engano não foi um problema, pois uma outra possível transformação indicada por Marôco (2010) é $y^{1-\frac{k}{2}}$ se $y \geq 0$, sendo que o valor da constante k é determinada por tentativas. Nesse caso, assumindo $k = 1$ ter-se-ia obtido a expressão $\sqrt{y}$, que é igual à transformação que foi utilizada.

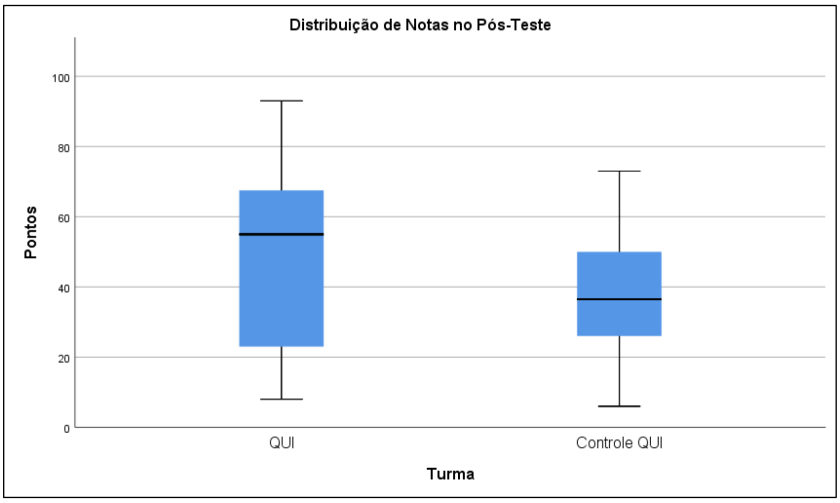


Figura 226 - Distribuição das pontuações da QUI e sua turma de controle no pós-teste.
Fonte: IBM SPSS Statistic 25.

Tabela 87

Teste de homogeneidade das variâncias para a variável pós-teste após ajuste dos dados

		Estatística de Levene	df1	df2	Sig.
PosTeste	Com base em média	8,061	1	39	0,007
	Com base em mediana	6,449	1	39	0,015
	Com base em mediana e com df ajustado	6,449	1	37,895	0,015
	Com base em média aparada	8,085	1	39	0,007
NewPosTeste	Com base em média	5,141	1	39	0,029
	Com base em mediana	3,389	1	39	0,073
	Com base em mediana e com df ajustado	3,389	1	36,539	0,074
	Com base em média aparada	5,058	1	39	0,030

Nota: New Pós-teste é a variável Pós-teste transformada.
Fonte: IBM SPSS Statistic 25

Pelos dados ajustados apresentados na Tabela 87, observamos que a variável dependente *New Pós-teste*, com base na mediana, possui $p = 0{,}073 > 0{,}05$. Sendo assim, a homogeneidade das variâncias nos dois grupos em estudo está garantida. Ressaltamos que foi considerado o teste de Levene com base na mediana porque um dos grupos envolvido no estudo não satisfazia a distribuição de normalidade (Vieira, 2013).

Diante do exposto, percebemos que apesar do pressuposto de homogeneidade não ter sido satisfeito em uma das amostras da pesquisa, os testes paramétricos ainda assim podem ser considerados nessa análise estatística, visto que a homogeneidade é satisfeita nas demais amostras e que o pressuposto da normalidade é atendido em todo espaço amostral. Para dar sequência a esse estudo, precisamos analisar se existe a linearidade dos resultados do pré-teste com os resultados do pós-teste. Em outras palavras, devemos medir a intensidade de associação linear existente entre a covariável (pré-teste) e a variável dependente (pós-teste). Para tanto, determinamos o coeficiente de Pearson (r) a MAT e QUI e suas respectivas turmas de controle. Pelos resultados apresentados na Tabela 88, na Tabela 89, na Tabela 90 e na Tabela 91 constatamos que os coeficientes de correlação obtidos foram $r = 0{,}817$, $r = 0{,}651$, $r = 0{,}760$ e $r = 0{,}753$, respectivamente, para MAT, controle da MAT, QUI e controle da QUI. Em todos os casos a correlação é significante ao nível de 1%, pois $p < 0{,}01$. Sendo assim, concluímos que existe uma relação linear que é estatisticamente significativa entre as duas variáveis em todos os grupos.

Tabela 88

Correlação entre os testes da MAT

		Pré-teste	Pós-teste
PreTeste	Correlação de Pearson	1	0,817**
	Sig. (2 extremidades)		0,000
	N	35	35
PosTeste	Correlação de Pearson	0,817**	1
	Sig. (2 extremidades)	0,000	
	N	35	35

**. A correlação é significativa no nível 0,01 (2 extremidades).
Fonte: IBM SPSS Statistic 25

Tabela 89

Correlação entre os testes da turma de Controle da MAT

		Pré-teste	Pós-teste
PreTeste	Correlação de Pearson	1	0,651**
	Sig. (2 extremidades)		0,002
	N	20	20
PosTeste	Correlação de Pearson	0,651**	1
	Sig. (2 extremidades)	0,002	
	N	20	20

**. A correlação é significativa no nível 0,01 (2 extremidades).
Fonte: IBM SPSS Statistic 25

Tabela 90

Correlação entre os testes da QUI

		Pré-teste	Pós-teste
PreTeste	Correlação de Pearson	1	0,760**
	Sig. (2 extremidades)		0,000
	N	19	19
PosTeste	Correlação de Pearson	0,760**	1
	Sig. (2 extremidades)	0,000	
	N	19	19

**. A correlação é significativa no nível 0,01 (2 extremidades).
Fonte: IBM SPSS Statistic 25

Tabela 91

Correlação entre os testes da turma de Controle da QUI

		Pré-teste	Pós-teste
PreTeste	Correlação de Pearson	1	0,753**
	Sig. (2 extremidades)		0,000
	N	22	22
PosTeste	Correlação de Pearson	0,753**	1
	Sig. (2 extremidades)	0,000	
	N	22	22

**. A correlação é significativa no nível 0,01 (2 extremidades).

Fonte: IBM SPSS Statistic 25

A fim de verificar se a interação entre a covariável (pré-teste) e o factor (grupo) é significativa faz-se o estudo da homogeneidade das retas de regressão. Para tanto, pode-se recorrer a análise das variâncias (ANOVA) visto que as condições para aplicação de uma ANOVA (distribuição Normal e homogeneidade das variâncias populacionais) são atendidos. Marôco (2010) diz que pode parecer estranho analisar variâncias para testar igualdade de médias, mas argumenta que esse procedimento é realizado devido

> ao facto da ANOVA comparar a variância dentro das amostras ou grupos (também designada por variância residual, dos erros ou dentro dos grupos) com a variância entre as amostras ou grupos (também designada por variância do factor ou entre os grupos) (...). Se a variância residual (aquela associada à variabilidade natural entre os sujeitos, os erros de media, registros, etc...) for significativamente inferior à variância entre os grupos ou amostras (que seria devida ao efeito do factor sob estudo), então o efeito do factor sobre a variância da variável dependente será significativamente superior à variância natural entre os sujeitos. Neste cenário podemos afirmar que o factor tem um efeito significativo sobre a variação da variável dependente." (Marôco, 2010, pp. 219 – 220).

De acordo com Marôco (2010), uma ANOVA pode ser designada por ANOVA *one-way* ou ANOVA factorial, depende se o factor em estudo é único ou se a mais de uma variável independente, respectivamente. ANOVA factorial é classificada conforme os níveis dos factores. Pode ser uma ANOVA de:

i. efeitos fixos ou tipo I, quando os factores são fixados de partida pelo investigador;
ii. efeitos aleatórios ou tipo II, quando os factores não são fixados de partida e são selecionados de forma aleatório pelo investigador;
iii. efeitos mistos ou tipo III, quando há mais de um factor para o qual um dos factor(es) é(são) fixo(s) e o(s) outro(s) é(são) aleatório(s).

Nessa pesquisa, temos que o factor fixo considerado é o grupo (turma), a covariável é o pré-teste e a variável dependente é o pós-teste. Ainda, nessa análise foram considerados os efeitos principais entre grupo e pré-teste e a interação entre os mesmos. Por isso, temos uma ANOVA de efeitos mistos cujos resultados estão apresentados na Tabela 92 e Tabela 93.

Tabela 92

Homogeneidade das retas de regressão na interação grupo (MAT e Controle MAT) – pré-teste

Origem	Tipo III Soma dos Quadrados	gl	Quadrado Médio	F	Sig.
Modelo corrigido	17772,027[a]	3	5924,009	35,651	0,000
Intercepto	5027,014	1	5027,014	30,253	0,000
Grupo	13,894	1	13,894	0,084	0,774
PreTeste	8324,098	1	8324,098	50,095	0,000
Grupo * PreTeste	78,247	1	78,247	0,471	0,496
Erro	8474,409	51	166,165		
Total	141342,000	55			
Total corrigido	26246,436	54			

a. R Quadrado = ,677 (R Quadrado Ajustado = ,658)

Fonte: IBM SPSS Statistic 25

Tabela 93

Homogeneidade das retas de regressão na interação grupo (QUI e Controle QUI) – pré-teste

Origem	Tipo III Soma dos Quadrados	gl	Quadrado Médio	F	Sig.
Modelo corrigido	13892,875[a]	3	4630,958	18,136	0,000
Intercepto	4387,239	1	4387,239	17,181	0,000
Grupo	23,531	1	23,531	0,092	0,763
PreTeste	12341,495	1	12341,495	48,331	0,000
Grupo * PreTeste	292,964	1	292,964	1,147	0,291
Erro	9448,004	37	255,351		
Total	101577,000	41			
Total corrigido	23340,878	40			

Fonte: IBM SPSS Statistic 25

Os dados apresentados na Tabela 92 e na Tabela 93 nos revelam que não existe interações significativas entre os resultados do pré-teste e pós-teste nos grupos estudados, pois em ambas situações consideradas foi obtido $p > 0{,}05$. Essa conclusão foi possível pela interpretação do termo interação Grupo*PreTeste pois observamos que $F(1{,}51) = 0{,}471$ com $p = 0{,}496$ para interação entre MAT e sua turma de controle e, $F(1{,}37) = 1{,}147$ com $p = 0{,}291$ para interação entre QUI e sua turma de controle.

Ao longo dessa seção verificamos que todos os seus pressupostos da realização de uma ANCOVA foram satisfeitos. Logo, essa análise estatística pode ser aplicada para auxiliar na interpretação dos resultados obtidos nesse experimento de ensino. A Tabela 94 e a
Tabela 95 apresentam os resultados obtidos por intermédio dessa análise.

Tabela 94
Análise da covariância – MAT e Controle MAT

Origem	Tipo III Soma dos Quadrados	gl	Quadrado Médio	F	Sig.
Modelo corrigido	17693,78[a]	2	8846,890	53,789	0,000
Intercepto	5067,605	1	5067,605	30,811	0,000
PreTeste	13133,716	1	13133,716	79,853	0,000
Grupo	382,271	1	382,271	2,324	0,133
Erro	8552,656	52	164,474		
Total	141342,000	55			
Total corrigido	26246,436	54			

a. R Quadrado = ,674 (R Quadrado Ajustado = ,662)
Fonte: IBM SPSS Statistic 25

Tabela 95
Análise da covariância – QUI e Controle QUI

Origem	Tipo III Soma dos Quadrados	gl	Quadrado Médio	F	Sig.
Modelo corrigido	13599,910[a]	2	6799,955	26,527	0,000
Intercepto	4349,799	1	4349,799	16,969	0,000
PreTeste	12434,027	1	12434,027	48,506	0,000
Grupo	1144,300	1	1144,300	4,464	0,041
Erro	9740,968	38	256,341		
Total	101577,000	41			
Total corrigido	23340,878	40			

a. R Quadrado = ,583 (R Quadrado Ajustado = ,561)
Fonte: IBM SPSS Statistic 25

Os dados da Tabela 94 e

Tabela 95 nos revelam que há efeito de interação da covariável (pré-teste) sobre o pós-teste tanto na MAT quanto na QUI com relação às suas turmas de controle, pois, respectivamente, $F(1{,}52) = 79{,}853$ com $p < 0{,}01$ e $F(1{,}38) = 48{,}506, p < 0{,}01$. E ainda, esses dados nos permitem concluir que os resultados obtidos no pós-teste da MAT não se diferem significativamente dos resultados de sua turma de controle, pois $F(1{,}52) = 2{,}324$ com $p = 0{,}133 > 0{,}05$; e, que há diferenças significativas estatisticamente nos resultados obtidos no pós-teste da QUI e de sua turma de controle, pois $F(1{,}38) = 4{,}464$ com $p = 0{,}041 < 0{,}05$.

8.3. Reflexões e Síntese

A análise estatística nos revelou resultados distintos para as turmas participantes dessa pesquisa. Para a MAT não houve diferenças significativas estatisticamente, enquanto que para a QUI foram estatisticamente significativas. Nesse momento, para melhor compreendermos esses resultamos, acreditamos ser importante destacar algumas características das turmas participantes dessa pesquisa a fim de que possamos inferir sobre os tipos de turmas para as quais o trabalho aqui desenvolvido pode ser apontado como uma alternativa para melhorias no desempenho dos estudantes de *Cálculo*.

A QUI é uma turma essencialmente formada por estudantes ingressantes na Universidade e, muitos deles, provenientes de escolas públicas brasileiras. Por experiência docente, na UDESC/Joinville, a maioria dos estudantes dos cursos de Licenciatura chegam no Ensino Superior com uma deficiência em muitos conceitos de matemática elementar trabalhada no Ensino Básico (Moro & Siple, 2010). Acreditamos que esse é um dos motivos pelos quais o número de não aprovados e de desistentes na disciplina de CDI seja elevado, pois muitos estudantes sentem um grande distanciamento entre o que é aprendido no Ensino Básico e o que é ensinado na primeira fase do Ensino Superior (Menestrina & Goudard, 2003). Essa dificuldade também é identificada por estudantes de outros cursos de graduação da área de Ciências Exatas. Entretanto, como a concorrência para ingressar nos cursos de Licenciaturas é menor[129], encontram-se mais facilmente estudantes com grandes dificuldades nas Licenciaturas do que nas Engenharias, pois nessa última, diversos estudantes fizeram algum curso preparatório para o vestibular[130] e, nesse momento, recuperam algumas das deficiências matemáticas que tenham ficado ao longo do Ensino Básico. A análise quantitativa dos dados coletados permite-nos inferir que a metodologia de ensino de aprendizagem e de avaliação de Resolução de Problemas aliada às atividades de Formulação de Problemas pode propiciar melhorias no ensino e na aprendizagem desses estudantes. Acreditamos que um desses motivos esteja relacionado com os trabalhos realizados em grupos, pois os estudantes têm oportunidade de interagirem mais com os colegas em sala de aula, e, além disso, nas plenárias, cria-se ambiente propício para discutir/esclarecer/corrigir conceitos errados que sejam identificados nas resoluções apresentadas.

A mesma discussão do parágrafo anterior também poderia ser estendida para a MAT, pois os ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática da UDESC/Joinville possuem características similares aos da QUI. No entanto, não podemos olhar para a MAT da mesma forma, pois quando o projeto do curso de Licenciatura em Matemática foi elaborado, para amenizar as dificuldades dos

[129] Relação candidato/vaga na UDESC/Joinville disponível em http://www.udesc.br/vestibular
[130] Uma das formas de seleção de estudantes para o Ensino Superior.

estudantes em CDI oriundas de deficiência da formação inicial e afim de minimizar a reprovação/evasão no curso (Moro & Siple, 2010), a disciplina de CDI foi planeada para integrar o currículo da segunda fase do curso. Na primeira fase, existe a disciplina de Matemática Básica, cujos conteúdos da ementa correspondem a aproximadamente ao primeiro mês das aulas de CDI da UDESC/Joinville, pois o foco principal dessa disciplina é trabalhar de forma mais detalhada com o conteúdo de funções. Com a inserção dessa disciplina no currículo esperava-se que os estudantes obtivessem melhores resultados de aprovação no *Cálculo*. Com o decorrer do tempo, o número de alunos calouros do Licenciatura em Matemática da MAT vem sendo menor do que o número de alunos da Engenharia. Dois motivos que contribuem a essa realidade são: conteúdos programáticos iguais, exceto em um dos cursos de graduação da UDESC/Joinville; e, devido à necessidade de reduzir o número de turmas oferecidas devido a recursos financeiros envolvidos. Por esses motivos a MAT não foi formada exclusivamente por licenciandos em Matemática, nem por alunos que desconheciam totalmente o conteúdo. Pelo exposto, entendemos que os estudantes dessa turma já possuíam uma base matemática melhor (alguns por terem cursado a disciplina de Matemática Básica, outros por serem alunos repetentes com algum conhecimento prévio de *Cálculo*) a metodologia de RP e a FP adotada não gerou resultados estatisticamente significativos. Mesmo assim, independentemente, do curso a que o estudante pertencia, qualitativamente, por experiência docente da investigadora, acreditamos que houve ganhos no ensino e na aprendizagem desses estudantes. Essa afirmação é fundamentada com base nas opiniões dos estudantes que foram expressas nos questionários de avaliação da metodologia e atividades desenvolvidas além de expressas nas entrevistas, como discutimos no Capítulo 7, simplesmente não podemos afirmar que sejam melhores do que os obtidos com outra metodologia de tipo mais tradicional (turma de controle).

CAPÍTULO 9

DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse capítulo final tem por objetivo apresentar nossas percepções acerca de como a pesquisa desenvolvida contribuiu para responder à questão norteadora da pesquisa, o objetivo geral e as questões de investigação. Iniciaremos o capítulo fazendo um breve retrospecto de que tratou esta pesquisa. Na sequência, responderemos às questões de investigação e encerramos com comentários finais e sugestões de trabalhos futuros.

9.1. Retrospectos dos interesses e da metodologia da pesquisa

Por meio do estudo realizado no banco de dados da CAPES, identificamos que há diversas pesquisas brasileiras envolvendo o ensino e/ou aprendizagem de *Cálculo* (Capítulo 1), no entanto, poucas dessas investigações foram realizadas nos horários regulares de aula das turmas participantes e aliaram a metodologia de RP ao ensino e à aprendizagem dos conteúdos dessa disciplina (Capítulo 2). Dessa forma, constatamos que desenvolver uma pesquisa que atuasse diretamente na prática de sala de aula incorporando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP ao ensino de conteúdos de *Cálculo* poderia trazer contribuições para a área de Educação Matemática, pois foi identificada a existência dessa lacuna de pesquisa. Nesse contexto, o trabalho desenvolvido por essa investigadora teve por objetivo geral desenvolver estratégias para utilizar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática para ensinar conteúdos de CDI através da RP durante os horários regulares de aula. Tendo este objetivo geral definido estabelecemos que a pergunta norteadora da pesquisa seria

> **Como utilizar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática para ensinar conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral através da RP de forma a cumprir o plano de ensino?**

Para auxiliar na obtenção de respostas à questão norteadora da pesquisa, consideramos as seguintes questões de investigação:

I. Como é que a metodologia de resolução de problemas pode contribuir para a aprendizagem?
II. Quais as dificuldades sentidas pelos alunos durante a realização de atividades usando RP?

III. Quais as dificuldades sentidas pelo professor ao inserir a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP nas aulas de Cálculo e como superá-las?

Esta pesquisa se tratou de uma pesquisa mista com design concorrente integrado cuja metodologia foi a investigação-ação prática apoiada em Latorre (2003). Para coletar os dados foi adotada a observação participante e análise documental (protocolos de respostas dos estudantes, plano de ensino, PPC's, testes, inquéritos) além de entrevistas e uso de recursos tecnológicos (*GeoGebra*, *PowerPoint*, áudio gravações, IBM SPSS Statistic 25). Para análise dos dados qualitativos foi usado o paradigma interpretativo e, para os dados quantitativos foi realizada a análise estatística no software IBM SPSS Statistic 25. Além disso, para organizar os aspectos metodológicos deste trabalho a professora pesquisadora usou a método de Romberg (Romberg, 2007) que consiste em um esquema composto por dez atividades que são comuns a todas as pesquisas e que tem por finalidade auxiliar pesquisadores iniciantes (Capítulo 4). Nas próximas seções, buscaremos evidenciar as respostas às questões de investigação levantadas no início da pesquisa.

9.2. Questão I: Como é que a metodologia de resolução de problemas pode contribuir para a aprendizagem?

A pesquisa desenvolvida nos permite resposta a esta questão de investigação tanto do ponto de vista qualitativo quanto do quantitativo. Qualitativamente podemos inferir que a RP contribuiu para a aprendizagem por meio das observações da professora acerca do comportamento dos estudantes comparado com outros semestres em que lecionou a disciplina, mas para essa percepção que vem da prática docente não há evidências para fazer um comparativo de comportamentos, pois aquela época foi anterior a essa pesquisa. As evidências para as turmas participantes dessa pesquisa foram obtidas pelas respostas aos questionários e à entrevista semiestruturada. Estas técnicas de recolha de dados permitiram-nos identificar as seguintes contribuições positivas que a pesquisa propiciou aos participantes: participar ativamente das aulas (Figura 207); oportunizar o uso de seus conhecimentos anteriores (Quadro 10, Quadro 13); desenvolver autonomia nos estudos (Quadro 12); vivenciar aulas mais dinâmicas (Figura 207); aprender com o erro que, por vezes, não percebiam que cometiam (Quadro 14); conjecturar suas próprias conclusões facilitou a compreensão dos conceitos e permitiu que os estudantes relembrassem como elaboraram suas conjecturas nas atividades feitas em grupo até no momento das avaliações escritas (Quadro 10); trabalhar em grupo permitiu ampliar o conhecimento e "aprender com o outro" além de aprenderem a fazer negociações entre os pares, ou seja, aprenderem a “lidar com o outro” para manter saudáveis relações humanas (Quadro 25, Quadro 20, Quadro 21); vivenciar o uso de uma abordagem metodológica que poderá ser adotada na futura carreira profissional (Figura 208, Figura 215, Quadro 15); aproximar a relação entre professor e aluno (Quadro 32). A maioria desses dados foram extraídos das entrevistas e estão em consonância com as respostas dadas aos questionários, pois nestes, 86% dos estudantes ratificam que essa metodologia possibilita aulas mais dinâmicas; 89% dos participantes corroboram que o metodologia de RP permitiu que eles se tornassem mais questionadores; 78% concordam que a metodologia contribuiu para eles se tornarem mais autônomos em seus estudos; e, 94% alunos entendem que com essa metodologia o professor permite que eles sejam mais participativos durante as aulas.

Portanto, do ponto de vista qualitativo, a análise das entrevistas e inquéritos apresentada no Capítulo 7, além da análise dos protocolos das respostas dos alunos às tarefas propostas, permitiram-nos concluir que, para a maioria dos estudantes a experiência de ensino que lhes foi propiciada por essa pesquisa, trouxe contributos positivos para a sua aprendizagem. Temos essa convicção de que está afirmação é verídica, pois a partir do conhecimento que possuíam foram capazes de desenvolver as tarefas propostas e em diversas situações puderam perceber por si próprios que, em suas conjecturas, “tudo se encaixa”. Além de benefícios relacionados com a aprendizagem do conteúdo de *Cálculo* que se almejava ensinar, cremos que essa pesquisa também trouxe contributos à formação dos estudantes no que diz respeito ao desenvolvimento do espírito de trabalho em grupos, pois nesses, é imprescindível aprender a ouvir o colega, expor suas ideias e opiniões sempre com respeito ao próximo para o bom andamento das atividades. Estas são atitudes importantes e necessárias de serem desenvolvidas em estudantes, pois precisarão delas em sua futura carreira profissional independentemente da sua área de formação. Apesar destes benefícios para o aprendizado do aluno de uma metodologia que permite ao aluno participar mais ativiamente nas aulas e ser mais comprometido com sua aprendizagem, as entrevistas revelaram que ainda assim há alguns discentes que preferem o ensino tradicional.

Diante dessas percepções apoiadas na análise qualitativa e interpretativa dos dados acerca das contribuições positivas do uso da metodologia de RP nas aulas de Matemática, ratificamos que alguns dos motivos para usar essa abordagem metodológica que foram apontados por Onuchic e Allevato (2011) com base nos trabalhos de Allevato (2005), Van de Walle (2001[131]) e outros[132] estão relacionados ao facto de que

- Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias

[131] Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and Middle School Mathematics*. 4. ed. New York: Longman, 2001.
[132] Não explicitados no texto original.

matemáticas e sobre o dar sentido.

- Resolução de problemas desenvolve [o] poder matemático nos alunos, ou seja, [a] capacidade de pensar matematicamente, [de] utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e [dos] conceitos matemáticos.
- Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam.
- Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática.
- Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.
- A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos. (p. 82)

Nos parágrafos supracitados apontamos os aspectos positivos da pesquisa relacionados com a metodologia de RP que emergiram das entrevistas e inquérito e podemos perceber que estão em consonância com a literatura. No entanto, como nessa pesquisa também agregamos as atividades de formulação de problemas em simultâneo com as aulas mediadas pela metodologia de RP, nas entrevistas os estudantes também puderam expressar-se sobre o assunto a partir da experiência vivenciada. No momento de análise dos dados, percebemos que o inquérito que visava coletar opiniões acerca da formulação de problemas foi elaborado com o intuito de coletar informações mais gerais sobre esta atividade, por isso, este instrumento de avaliação nos forneceu poucas informações relevantes relativas à aprendizagem dos conteúdos de *Cálculo.* Apesar deste constrangimento e da modalidade de fórum de discussão para se abarcar a formulação de problemas não ter sido uma estratégia que obteve o êxito almejado pela investigadora, como relatado no Capítulo 6, destacamos os seguintes aspectos positivos, do ponto de vista dos discentes, identificados por estes meios de coleta de dados: desenvolver a criatividade (Figura 216, Quadro 26); para formular problemas é necessário saber mais conteúdos do que para resolver problemas (Quadro 22); permitir outra visão do conteúdo (Quadro 23); desenvolver o raciocínio e instigar a criatividade (Quadro 25); elaborar problemas fortalece o conhecimento (Quadro 27); possibilitar o esclarecimento de dúvidas, ver aplicações e melhor entender os conceitos (Quadro 28). Esses aspectos positivos relacionados com a aprendizagem foram identificados, por sua maioria, nas entrevistas. Pelos dados da Tabela 76, constatamos que estas opiniões estão em consonância com as opiniões expressas no inquérito relativo a formulação de problemas, pois 97% dos respondentes concordam que a FP desafia o estudante a pensar e 91% dos estudantes corroboram que para elaborar problemas é necessário ter domínio sobre os conteúdos contemplados.

Os dados aludidos nos revelam que a compreensão dos estudantes acerca da FP converge com o entendimento que se tem na literatura a esse respeito, pois ao criarem seus próprios problemas os estudantes consolidam os conceitos e relações entre as ideias matemáticas básicas envolvidas (Andrade & Onuchic, 2017; Boavida *et al.*, 2008; Barbosa & Vale, 2015), percebem os conteúdos sob outra perspectiva (Brown & Walter, 1990) e desenvolvem a sua criatividade (Boavida *et al.*, 2008; Palhares, 1997; Silver, 1994; Zuya, 2017). Entendemos que todas essas observações se relacionam com a aprendizagem do discente.

Do ponto de vista quantitativo, a análise estatística aplicada nos dados oriundos dos testes nos possibilitou complementar a análise qualitativa e foi usada como um meio de averiguarmos se a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP, juntamente com as atividades de formulação de problemas, favoreceram a aprendizagem dos conteúdos de *Cálculo* por parte dos participantes da pesquisa. A análise da covariância, apresentada no Capítulo 8, revelou-nos que a metodologia de RP resultou em contribuições significativas estatisticamente para a aprendizagem dos estudantes da QUI. O diferencial desta turma, com relação a MAT, está no facto da disciplina de *Cálculo* integrar a primeira fase da grade curricular.

Historicamente, no Brasil, a maioria dos estudantes vinculados aos cursos de Licenciatura são provenientes de classes sociais menos favorecidas (Gatti, 2010) e tiveram sua formação inicial (total ou parcialmente) no ensino público, cujo nível de qualidade de muitas dessas escolas é inferior ao das escolas privadas (Sampaio & Guimarães, 2009). Por experiência docente e como apontado por Moro e Siple (2010), muitos estudantes das Licenciaturas da UDESC/Joinville iniciam o curso superior com deficiências em conceitos supostamente conhecidos da matemática elementar que integra o ensino pré-universitário. Acreditamos que a diferença entre o que é ensinado na graduação e o que se aprende no Ensino Básico (Menestrina & Goudard, 2003) pode contribuir para o caráter de mito (Mello, Mello & Fernandes, 2001), refletindo os elevados índices de reprovação e evasão que estão associados ao *Cálculo*.

Diante desse cenário, no processo de criação do curso de Licenciatura em Matemática da UDESC/Joinville levou-se em consideração esses problemas da realidade brasileira quanto aos cursos de licenciaturas e, com o intuito de amenizar as dificuldades na disciplina de *Cálculo,* relacionadas à formação matemática anterior do aluno e de reduzir os índices de insucesso na disciplina, esta foi prevista compor a segunda fase da grade curricular e, na primeira fase, ofertar uma disciplina de

Matemática Básica, com caráter de nivelamento (Moro & Siple, 2010). Os motivos supracitados aliados ao facto de que os demais integrantes da turma da MAT eram todos estudantes que possuíam algum conteúdo de *Cálculo,* por estarem repetindo a disciplina, são fatores que podem ter contribuído para que os resultados da análise estatística não tenham apontado diferenças significativas nessa turma.

Nos dois últimos parágrafos, buscamos clarificar as características das duas turmas participantes da pesquisa a fim de justificar para qual tipo de público acreditamos que a metodologia de RP pode trazer benefícios à aprendizagem. Como a análise estatística nos revelou que para a QUI a diferença foi significativa, ou seja, que o trabalho desenvolvido favoreceu a aprendizagem mais do que com uma metodologia tradicional, somos induzidos a acreditar que essa abordagem metodológica pode ser mais apropriada para cursos de graduação, como os de Licenciatura, cujo público seja constituído por muitos estudantes oriundos de escolas públicas que ingressam no ensino universitário com uma formação inicial mais precária. Apesar da análise quantitativa não ter evidenciado resultados estatisticamente significativos para a MAT, que era uma turma de composição hetereogênea (em termos de cursos de gradução a que os estudantes estavam vínculados), pelas opiniões dos estudantes dessa turma que foram expressadas durante as entrevistas agregada aos comentários registrados nos inquéritos, acreditamos que estes estudantes também foram beneficiados com a vivência que tiveram em sala de aula. A análise quantitativa apenas nos revelou que não é possível afirmar que para os estudantes desta turma o aprendizado via a metodologia de resolução de problemas foi melhor para a aprendizagem dos conteúdos do que por meio de abordagens mais tradicionais.

9.3. Questão II: Quais as dificuldades sentidas pelos alunos durante a realização de atividades usando RP?

Considerando a FP como uma extensão da RP (Andrade & Onuchic, 2017; Vale, Pimentel & Barbosa, 2015), para responder a esta questão de investigação exibiremos os dados obtidos por meio das respostas encontradas nos dois inquéritos (um de RP e outro de FP) aplicado aos estudantes que compunham o público participante e as informações oriundas das entrevistas realizadas no final do primeiro semestre letivo de 2017. Por estas técnicas de recolha de dados reconhecemos que oito aspectos negativos foram elencados pelos estudantes. Dentre estes, percebemos que há dificuldades relacionadas com *a adaptação com a metodologia de ensino* (Quadro 10, Quadro 31), visto que o sistema de ensino brasileiro é predominante tradicional. Diante dessa dificuldade julgamos natural também terem apresentado *dificuldade para se adaptarem à realização de atividades em equipes* (Figura 205, Quadro 30), pois no ensino tradicional os estudantes geralmente realizam as atividades de forma individual.

Outra dificuldade relacionada com o desenvolvimento de uma aula mediada pela RP apontada pelos estudantes foi o facto de que para a realização de uma tarefa em sala de aula *demora-se muito tempo entre a discussão das atividades e a formalização dos conteúdos* (Figura 211). Em outras palavras, entendemos que o estudante não gostava de ficar com tempo *ocioso* em sala de aula. Isso ocorria com algumas equipes por essas realizarem as atividades mais rapidamente do que outras. Essa pode ter sido uma falha da investigadora como professora por não ter preparado alguma tarefa "extra" para equipes que resolvessem com maior rapidez. Por outro lado, ter dado mais trabalho a quem conseguisse concluir antes as atividades poderia parecer uma "punição". Ao analisar os dados para escrita deste texto, essa investigadora percebe que poderia ter convidado aqueles estudantes a auxiliarem equipes com mais dificuldades. Pode ser que a pesquisadora não tenho pensado nessa possibilidade pelo facto das turmas serem grandes e ela, como professora, mantinha-se ocupada grande parte do tempo de aula acompanhando o desenvolvimento das atividades e não ter percebido que estes poucos estudantes que finalizavam as tarefas antes que os demais estavam a se incomodar com o tempo "ocioso" em sala de aula, pois os discentes que apresentavam esta característica, sempre se mantinham ocupados. Estudantes com essas características, após concluíram a tarefa, costumavam fazer listas de exercícios de alguma disciplina ou mesmo estavam a ler um livro. Outras três dificuldades dos estudantes estiveram relacionadas com o *tempo* dispendido nas atividades de formulação de problemas, pois estas eram as *atividades extraclasse* das quais os estudantes reclamaram da quantidade de atividades nessa modalidade (Figura 204, Figura 211, Quadro 26, Quadro 34); alguns estudantes se referiram, explicitamente, ao *tempo gasto com a formulação de problemas* (Figura 216, Quadro 23, Quadro 25); e ainda, outros estiveram a *comparar o tempo gasto para resolver e para formular problemas*, indicando que esse útimo é maior (Quadro 26 e Figura 218). Além dessas dificuldades, outras duas estão relacionadas com a formulação de problemas. Uma delas diz respeito com as dificuldades em elaborar os problemas, pois assumiram que *não conseguiam desenvolver essa atividade extraclasse sem apoio dos monitores* da disicplina (Quadro 24); e a outra, relaciona-se com dificuldades com o ambiente virtual, pois julgaram a *plataforma Moodle inapropriada para as atividades desenvolvidas* (Figura 212, Figura 217, Quadro 35).

Apesar de termos identificado essas oito dificuldades sentidas pelos estudantes com a vivência da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP nas aulas de *Cálculo,* pela análise da Tabela 74, constatamos que uma minoria dos estudantes elenca aspectos negativos relacionados com a inserção da metodologia de RP nas aulas de *Cálculo*, pois apenas 5,6% (2 de 36) concordam que a metodologia de RP não foi adequada para a disciplina, visto que a quantidade de atividades realizadas em sala de aula foi menor; 13,9% (5 de 36) concordam que o professor não deve propor atividades a serem desenvolvidas sem que antes tenha explicado o conteúdo; 11% (4 de 36) assumem a preferência por aulas tradicionais. Além disso, a análise da Tabela 73 evidencia que a maioria dos estudantes (81% que corresponde a 29 de 36) concorda que tiveram dificuldades em formular problemas. Embora tenham sido dificuldades encontradas nessa experiência que os estudantes tiveram, pelas demais respostas, compreendemos que eles reconhecem que a FP propicia o exercício da criatividade dos mesmos e permite dar sentido aos conhecimentos adquiridos.

Diante do exposto, a partir das entrevistas e análise dos inquéritos, podemos afirmar que foram três as principais dificuldades sentidas pelos discentes participantes dessa pesquisa. A primeira dificuldade esteve relacionada com a adaptação à nova dinâmica adotada em sala de aula, pois, apesar de se ter iniciado o trabalho com o uso da metodologia de Resolução de Problemas no primeiro dia letivo, o percurso anterior da vida estudantil destes alunos foi fortemente marcada pelo ensino tradicional e por trabalhos individualizados. A segunda dificuldade está relacionada com o desenvolvimento das atividades em grupos. Nas primeiras tarefas propostas, a professora sentiu a resistência dos estudantes em trabalhar em grupo, pois mesmo tendo sido formadas as equipes de trabalho, ao receberem folhas individuais com a tarefa impressa, observava-se que algumas equipes tendiam a trabalhar de forma individual. Ao longo do semestre letivo este obstáculo de interação entre os membros das equipes foi sendo superado, como pode ser observado no relato das duas últimas atividades mediadas pela metodologia de resolução de problemas, as Tarefas 18 e 19 que estão descritas nas seções 5.4 e 5.5, respectivamente. A terceira dificuldade está relacionada com a quantidade de tarefas extraclasse que estão, por maioria, associadas às atividades de formulação de problemas que foram explanadas no Capítulo 6. A investigadora concorda que ao longo de todo o semestre letivo, várias atividades extraclasse foram exigidas e que realmente para elaborar problemas dispende-se um tempo maior do que para resolver os problemas. Entretanto, como professora, acredita que muitos estudantes não souberam gerir o tempo destinado à elaboração das atividades, pois essas foram propostas no início do semestre letivo e deveriam ser feitas no transcorrer dele, conforme julgassem ter condições de atender as situações problemas propostas e depois de sinalizados pela professora de que já possuíam embasamento matemático para desenvolvimento da tarefa proposta. Por outro lado, a professora assume parte dessa culpa, pois esperava que seus estudantes espontaneamente se engajassem nessa tarefa e participassem ativamente do fórum de discussão, pois essas atitudes estariam a contribuir para a aprendizagem de todos os envolvidos. No entanto, percebemos que a maioria dos discentes se envolveram com a atividade de FP e interação no fórum de discussão na plataforma Moodle somente após a professora deixar claros todos os critérios de avaliação de tal atividade. Além disso, algumas dificuldades sentidas pelos discentes no momento de elaborar seus problemas, a professora teve conhecimento somente no momento de realização das entrevistas, pois não fora procurada ao longo do semestre letivo, nos seus horários de atendimento extraclasse, para esclarecimentos sobre o trabalho proposto, visto que é nestes momentos de atendimento que o docente tem a possibilidade de melhor compreender quais são as dificuldades e dúvidas de seus estudantes e, após estas percepções, pode tomar ações para amenizar essas dificuldades e até mesmo esclarecer dúvidas de conteúdos que julgava já serem de conhecimento de seus estudantes.

9.4. Questão III: Quais as dificuldades sentidas pelo professor ao inserir a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP nas aulas de *Cálculo* e como superá-las?

Ao iniciar essa pesquisa sobre a metodologia de RP sob a concepção de ensinar através da resolução de problemas estávamos cientes de que a literatura recomendava o seu uso para um público que desconhecesse o conteúdo que se deseja ensinar, para que não se sentisse desmotivado a realizar as tarefas propostas (Andrade & Onuchic, 2017). No entanto, como exposto na seção 4.9.4.2, devido às necessidades internas da UDESC/Joinville, essa recomendação não pôde ser atendida, pois mesmo as turmas de calouros na disciplina podem possuir estudantes repetentes, como foi o caso da QUI. No início da pesquisa a investigadora supôs que, pelos motivos explicitados por Andrade e Onuchic (2017), poderia ter dificuldade em trabalhar com os alunos repetentes de *Cálculo* que constituiriam o público participante. Entretanto, com o transcorrer da pesquisa, como professora, essa pesquisadora não sentiu nenhum constrangimento por ter alunos que já conheciam parte do conteúdo a ser trabalhado, pois eles não fizeram interferências que viessem a "atrapalhar" o bom andamento das aulas. Pelo contrário, pelas aulas estarem sendo muito diferentes das aulas que tiveram anteriormente, julgamos que gostaram da abordagem atendendo aos aspectos positivos aludidos na busca por resposta à segunda questão de investigação. Por esses motivos, acreditamos que a análise qualitativa dos dados nos permite reconhecer que a metodologia de RP, com a FP agregada, também contribuiu para a aprendizagem de estudantes que estavam a cursar *Cálculo*, ao menos, pela segunda vez que era a situação da maioria dos estudantes da MAT (como exposto na seção 7.1). Como revelado nos comentários da Tarefa 14 (a seção 5.3), em uma das atividades propostas no segundo semestre de 2016, ocorreu um constrangimento por parte de alunos calouros na disciplina com relação a alunos repetentes, associado ao facto dos ingressantes na disciplina se sentirem prejudicados por ainda não conhecerem o conteúdo (que a professora desejava trabalhar) que facilitava a resolução do problema proposto. A professora pesquisadora entendeu que este problema pode ter ocorrido porque a atividade proposta não estava bem elaborada e também porque pela forma como fora apresentada, poderia induzir ao estudante que já tivesse algum conhecimento de *Cálculo*, usá-lo na resolução (que era permitido, mas não o almejado pela investigadora). Detectado esse "problema", a investigadora reestruturou a Tarefa e, com a nova versão, não foi detectado que algum estudante fez uso do conhecimento cuja atividade intencionava construir. Essa situação de constrangimento de um estudante deixou claro para a professora a importância de uma atividade estar bem elaborada no sentido de que o problema proposto não possa causar a impressão nos estudantes calouros de que são incapazes de resolverem tal atividade por não possuírem ferramentas matemáticas suficientes. Diante do exposto, uma dificuldade percebida pela investigadora, na função de professora, esteve relacionada com a forma de apresentar as tarefas elaboradas, pois estas deviam proporcionar oportunidades para os estudantes a resolverem sem o novo conteúdo de *Cálculo* que o docente almeja abordar. Essa dificuldade foi superada com a reflexão sobre a tarefa proposta e uso da prática docente para readequar a maneira de propor a atividade.

O roteiro de atividades que o GTERP propõe para o professor conduzir as aulas cujo objetivo é ensinar através da RP, que foi usado nessa pesquisa, é composto por dez etapas: preparação do problema; leitura individual; leitura em conjunto; resolução do problema; observar e incentivar; registro das resoluções na lousa; plenária; busca do consenso; formalização do conteúdo; e, proposta de novos problemas (Allevato e Onuchic, 2014). Algumas das dificuldades sentidas pela investigadora exercendo seu papel de professora foi cumprir a etapa de "registro na lousa" deste roteiro, para na sequência, realizar a "plenária" e a "busca do consenso". Dois motivos estão atrelados a essa dificuldade. No primeiro ano de experimentos, a dificuldade em implementar essa etapa do roteiro era conseguir fazer com que os estudantes se prontificassem em compartilhar suas estratégias de resolução, registrando-as na lousa. No entanto, após ter participado do grupo de trabalhos em RP no XX EBRAPEM, a investigadora compreendeu que deveria deixar muito claro aos seus estudantes todas as fases de uma aula cuja dinâmica fosse diferente da rotina da turma. A partir de então, passou a explicar detalhadamente aos estudantes, no primeiro dia de aula, as etapas que fariam parte das aulas cuja abordagem metodológica considerada fosse a RP, além de explicar como a literatura recomenda que o estudante resolva um problema (Polya, 2006). A professora percebeu que, clarificando o funcionamento de todo o processo a ser adotado, os estudantes aceitaram mais facilmente em corroborar com essa dinâmica.

A professora também sentiu dificuldades em cumprir as dez etapas desse roteiro durante uma aula de *Cálculo*, pois muitas das tarefas (sequências didáticas) desenvolvidas em sala eram extensas e não puderam ser finalizadas no mesmo dia em que foram iniciadas, ou ainda, quando a tarefa era proposta quando restavam entre 30 e 40 minutos de aula. Nestas situações, como exposto na seção 5.2.1, a professora realizava as atividades em dois dias de aula. No primeiro dia, realizava-se até à quinta etapa do roteiro, ou seja, a preocupação da professora era que a atividade proposta fosse completamente resolvida pelas equipes. Para dar continuidade, no segundo dia de aula, a professora recolhia as resoluções ao final do primeiro dia de atividade, digitalizava o material, selecionava as diferentes estratégias adotadas para resolver o problema e preparava uma apresentação no *PowerPoint* com as respostas escolhidas. Com esse procedimento, a etapa de "registro na lousa" foi substituída por um "compartilhamento das estratégias" de resoluções diversificadas, previamente selecionadas pela professora. No momento de apresentar tais soluções a professora sempre solicitava um clima de respeito entre os pares e colocava as resoluções como sendo as respostas da turma, não de um grupo específico. Entretanto, muitas vezes os estudantes responsáveis pela resolução apresentada se manifestavam espontaneamente para prestar esclarecimentos sobre o que a equipe pensou ao propor tal solução. A dinâmica adotada pela professora não era fixa. Se a resolução era extensa, para cada resposta apresentada, discutia-se coletivamente se ela era coerente e estava atendendo o que era exigido. Se a resolução fosse breve, apresentavam-se várias respostas para depois fazer a discussão coletiva delas. Dessa forma, a "plenária" e a "busca do consenso" ocorriam de forma simultânea.

Durante o semestre de coleta de dados para análise e construção desse relatório de pesquisa, a investigadora teve que propor atividade extraclasse com a finalidade de adiantar o trabalho desenvolvido em sala de aula, visto que proporcionar aulas mediadas pela metodologia de RP consome um maior tempo que as aulas tradicionais. Nas atividades em que essa estratégia foi adotada a professora exigiu que todos os estudantes entregassem de forma individual a atividade, via plataforma Moodle, com um dia de antecedência à aula em que seria realizada a plenária, para que ela pudesse organizar o "compartilhamento de estratégias". Particularmente, essa pesquisadora julga que essa forma de trabalho foi satisfatória, pois como relatado na seção 5.3, estudantes calouros na disciplina conseguiram solucionar o que fora proposto. Entendemos que essa dinâmica não deve ser adotada com frequência, pois perder-se-ia a essência da concepção de ensinar através da RP que envolve a dinâmica de trabalhos em grupos que propiciam um estudante aprender com o outro. Porém, eventualmente, essa estratégia se mostrou eficiente. Em algumas aulas o "compartilhamento de estratégias" foi realizado de forma oral, como relatado na Tarefa 19. Entretanto, se tratando de atividades matemáticas nem todo problema proposto permite essa dinâmica.

Portanto, apesar de termos usado como plano de fundo o roteiro de atividades do GTERP, o facto de ter inserido a metodologia de RP em um ambiente real de sala de aula e a necessidade de ter que cumprir todas as exigências inerentes à unidade curricular, tivemos que adequá-lo à nossa realidade. Entendemos que as adaptações feitas na forma de aplicar esse roteiro de atividades manteve a essência do que vem a ser ensinar através da RP, pois Onuchic e Allevato (2011) já alertavam que a forma de abordar a RP nas aulas de Matemática é flexível e que a primeira versão deste roteiro de nove etapas sugerido por Onuchic (1999) constituiu-se para atender à solicitação de professores participantes de uma formação com foco na RP e que não sabiam como incorporar a metodologia na sua prática. Posteriormente, por necessidades apontadas por professores que adotaram este roteiro e por não ter se mostrado eficiente, essa proposta inicial foi modificada e deu origem a segunda versão (apresentado na Tabela 17). Ao fazer um retrospecto da pesquisa desenvolvida, percebemos que o roteiro que traduz a dinâmica das aulas mediadas pela metodologia de RP dessa investigação, resultante da adaptação dos roteiros do GTERP (Allevato & Onuchic, 2014; Andrade & Onuchic, 2017; Onuchic, 1999), é o seguinte:

1. *Preparação do problema* – o professor prepara o problema ou a atividade que servirá para introduzir um novo assunto.
2. *Formar grupos* – o professor solicita que sejam formados grupos de trabalho.
3. *Leitura individual* – uma cópia do problema é entregue ao aluno e faz a sua leitura.
4. *Leitura em conjunto* – o grupo pode reler e interpretar o problema, ou ainda, o professor pode fazer a leitura com a toda a turma e esclarecer dúvidas tanto referentes ao entendimento de palavras não compreendidas como eventuais dúvidas do que se pede no problema.
5. *Resolução do problema* – o grupo usa seus conhecimentos anteriores na busca pela solução.
6. *Observar e incentivar* – o professor monitora os trabalhos sendo desenvolvidos e atua como mediador das dúvidas. Entretanto, deve tomar cuidado para não dar as respostas prontas aos alunos. Por meio de questionamentos o professor deve intervir e/ou estimular o desenvolvimento do trabalho.
7. *Compartilhamento de estratégias* – o compartilhamento das estratégias de resolução bem como a resolução do problema pode ser: pelo registro na lousa da resolução feita por um representante do grupo; um estudante eleito pelo grupo apresenta de forma oral as estratégias de resolução; o professor recolhe as resoluções do problema, digitaliza, seleciona as diferentes estratégias identificadas no material recolhido e prepara uma apresentação para promover a discussão conjunta.
8. *Discussão coletiva* – o professor exerce o papel de mediador e incentivador de uma discussão coletiva sobre a consistência das (estratégias de) resoluções apresentadas, ou seja, busca-se o consenso.

9. *Formalização do conteúdo* – o professor formaliza o conteúdo, apresentando linguagem e notação matemática adequadas.
10. *Proposta de novos problemas* – permite ao professor identificar se os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido foram compreendidos, além de possibilitar um aprofundamento e ampliação acerca do conteúdo abordado.

Com relação à segunda etapa desse esquema, que consiste em "formar grupos", o docente pode estabelecer critérios para a formação dos grupos, como por exemplo, indicar o número de integrantes. Além disso, entendemos que se o docente tem interesse em desenvolver uma pesquisa acadêmica que esteja relacionada com a sua prática, o professor pode recomendar que os grupos de trabalhos sejam constituídos pelos mesmos estudantes em todas as atividades que forem feitas nessa modalidade. Esta exigência pode facilitar a análise de dados no caso do professor realizar uma pesquisa com *design* de estudo de caso. Com relação às etapas de "leitura individual" e "leitura em conjunto", pela experiência que tivemos, entendemos que se o professor preferir, pode distribuir apenas uma cópia do problema a cada equipe. Dessa forma, poderia propiciar maior interação no grupo, pois ao entregar uma cópia impressa da tarefa para cada integrante da equipe pode favorecer que os estudantes, mesmo estando em grupo, trabalhem de forma individual.

Ao comparar essa sugestão de roteiro de como conduzir uma aula cuja intenção seja ensinar através da RP percebe-se que o seu diferencial, com relação à terceira versão do roteiro do GTERP apresentado por Allevato e Onuchic (2014), está nas etapas: "formar grupos", "compartilhamento de estratégias" e "discussão coletiva". A primeira destas, o segundo roteiro do GTERP supõe que os grupos seriam formados após a "leitura individual". Para facilitar a dinâmica de sala de aula, optamos por formar grupos no início da atividade. A segunda modificação (compartilhamento de estratégias) é a modificação da etapa denominada "registro na lousa" e, a terceira (discussão coletiva), pode ser compreendida como a junção das etapas denominadas "plenária" e "busca do consenso". A dinâmica que adotamos, referente a digitalização do material produzido pelos estudantes e preparo de uma apresentação no *PowerPoint*, se mostrou eficiente no Ensino Superior. Entretanto, se fosse aplicada no Ensino Fundamental e Médio, acreditamos que o "registro na lousa" ou alguma adaptação desse registro, como por exemplo, o uso de folha de papel A0 para registro da solução do grupo (Cardoso, 2018) podem ser mais adequadas devido à "maturidade" do estudante. Ainda, comparando a dinâmica adotada com a quarta versão do roteiro do GTERP, divulgada por Andrade e Onuchic (2017), percebemos que a etapa "formar grupos" que adotamos, já se faz presente, mas como sendo a primeira etapa. Ao nosso ver, além das diferenças já apontadas com relação ao terceiro roteiro, outra diferença está na última etapa. Corroboramos com Allevato e Onuchic (2014) que na etapa “proposta de novos problemas” pode-se ampliar o conhecimento acerca do conteúdo desenvolvido com o problema proposto inicialmente. Parece-nos que na quarta versão do roteiro, Andrade e Onuchic (2017) consideram que nessa última etapa deve-se dar a oportunidade dos estudantes formularem seus próprios problemas. Todavia, como esse roteiro ainda é recente, precisamos acompanhar os trabalhos dos membros do GTERP para melhor compreender os entendimentos destes integrantes acerca dessa etapa.

Convém ainda apontar uma dificuldade sentida pela investigadora que está relacionada com a etapa de “compartilhamento de estratégias”. A dinâmica de recolher as resoluções, digitalizar, selecionar e preparar uma apresentação para dar continuidade aos trabalhos que não puderam ser finalizados no mesmo dia de aula é uma etapa que exige tempo extraclasse do docente. O facto da professora ter de realizar uma pré-análise das resoluções propostas, de uma aula para outra, quando não de um dia para outro, de duas turmas, para esta investigadora foi muito difícil, pois precisava, o mais breve possível registrar todas suas observações e reflexões sobre a tarefa proposta em seu diário de bordo, a fim de que não se perdessem muitos detalhes sobre elas, visto que as aulas não estavam sendo gravadas em áudio e/ou vídeo, pois neste tipo de registro podia-se contar apenas com a memória da investigadora. Entendemos que se o professor não estiver coletando dados para uma pesquisa, essa estratégia proposta para o compartilhamento das estratégias pode ser implementada sem exigir tanto tempo do investigador. Se o docente estiver coletando dados para posterior análise, recomendamos que se faça uso de gravações em áudio e/ou vídeo para que possa consultar sempre que sentir necessidade.

Outra dificuldade sentida por esta investigadora foi a de conseguir envolver todos os estudantes nos trabalhos e fazer com que as equipes trabalhassem de facto em grupo, ou seja, que discutissem a resolução das atividades propostas conjuntamente. Assim como a professora pesquisadora tinha fortes traços resultantes de aulas tradicionais, muitos dos estudantes também apresentavam. Alguns destes, mesmo que em minoria, mesmo após terem trabalhado por um semestre letivo de forma diferenciada e tendo identificado contributos positivos dos trabalhos em grupo e/ou do uso da metodologia de RP (Quadro 29), revelam preferência pelo trabalho individualizado (Quadro 30) e aulas tradicionais (Quadro 16 e Quadro 36) A investigadora acredita que, após três semestres letivos tendo desenvolvido suas aulas com foco em ensinar através da RP (os dois primeiros com poucas atividades mediadas pela RP e o terceiro com pelo mesmos 30% das aulas de *Cálculo* desenvolvidas através da RP) e com a dinâmica de trabalhos em grupos, conseguiu atingir maior envolvimento dos estudantes nas duas últimas Tarefas (18 e 19) desenvolvidas no primeiro semestre letivo de 2017. Ambas atividades se referiam a aplicação da teoria de máximos e mínimos. Entretanto, pelas entrevistas percebemos que, das tarefas propostas, a que mais desafiou os estudantes e que deixou contribuições positivas para sua aprendizagem foi a Tarefa 18, cuja sequência didática elaborada foi de cunho totalmente matemático, mas que foi de facto um problema para os estudantes, porque esses se sentiram desafiados a resolverem a atividade e, ao final, com as conjecturas elaboradas percebiam que "tudo se encaixa!". Como abordado na seção 7.3.1, dos 15 entrevistados, sete, fizeram referência a essa Tarefa.

Com relação às atividades de FP que foram agregadas ao trabalho desenvolvido relacionado com a RP, a dificuldade que apontamos foi a de gerir o fórum de discussão proposto através da plataforma Moodle e fazer com que os estudantes participassem do fórum. Apesar das oito situações problemas serem do tipo "semiestruturadas" (Stoyanova, 1997) e "aceitando os dados" (Boavida *et al.*, 2008) terem sido propostas na primeira semana de aula, a maioria dos estudantes que propôs algum problema, o fez nas vésperas de encerrar o prazo para entrega dessa atividade extraclasse e após terem sido divulgados os critérios de avaliação. Nesse contexto, o final de semestre letivo tanto da investigadora quanto dos estudantes ficaram sobrecarregados de atividades. Da professora, no sentido de que precisava analisar/avaliar as situações propostas, e ainda, promover interação no fórum de discussão, pois não estava ocorrendo de forma natural (seção 6.9). Dos estudantes, porque ao final de cada semestre possuem avaliações finais de todas as disciplinas em que estão matriculados e estas ocorreram no mesmo período de entrega desses trabalhos e próximas da data da avalição escrita. Para solucionar este tipo de sobrecarga de atividades discentes e docentes, entendemos que todos os critérios de avaliação devem ser bem definidos e divulgados desde o início do período letivo. A professora cometeu essa falha porque não tinha certeza de como seriam promovidas as discussões no fórum e de como conseguiria gerir a dinâmica do fórum e interação dos estudantes.

9.5. Comentários finais

Com relação à metodologia de resolução de problemas aplicada nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral, baseada na experiência vivenciada ao longo de todo o primeiro semestre letivo de 2017, pudemos verificar que é possível incorporá-la no cotidiano da sala de aula, mas é muito difícil para o professor, que precisa cumprir a ementa de uma disciplina em um determinado período de tempo, conseguir adotar todas as etapas sugeridas no roteiro de Onuchic e Allevato (2014). Como explicado na seção 9.4, entendemos que as adaptações feitas nesse roteiro permitiram que os traços essenciais de uma aula cujo objetivo seja ensinar através da RP foi preservado, pois os estudantes tiveram a oportunidade de trabalharem em grupo, de debaterem suas ideias tanto com os integrantes de sua própria equipe quanto com a turma toda e puderam chegar às suas próprias conclusões. Além disso, Onuchic (2013) deixa bem claro que o roteiro usado por seu grupo de pesquisa (GTERP) é uma orientação ao professor de como ele pode conduzir sua aula, dessa forma, entendemos que se alguma etapa tiver que ser adaptada, poderá ser feita e desde que não se deixe de realizar a formalização do conteúdo[133]. Afinal, numa sala de aula o mais importante é promover o aprendizado e acreditamos que um professor pesquisador não pode ser tão metódico ao se propor a usar um método de forma que se a turma não estiver correspondendo, para não "prejudicar" sua investigação, não aceite modificar sua aula para atender às necessidades da turma. Este comentário se dá por experiência havida em sala de aula. Nem todas as tarefas elaboradas tiveram o desenvolvimento da forma como era esperada pela pesquisadora. Duas tarefas que a investigadora desejava ensinar conteúdos através da RP tiveram de mudar de foco no momento da aplicação (Tarefas 7 e 16 do Anexo 12), ou seja, a professora passou a ensinar sobre RP porque muitas equipes não estavam conseguindo desenvolver a atividade. Destarte, ao respondermos à terceira questão de investigação (seção 9.4), ao mesmo tempo que a investigadora apresenta suas dificuldades relacionadas com a implementação do roteiro do GTERP para conduzir as suas aulas, em simultâneo explanou sobre as modificações que sentiu necessidade de adequar à realidade em que estava inserida a pesquisa e as estratégias de ensino adotadas (tanto para a RP quanto para a FP) ao longo de todo o primeiro semestre letivo de 2017. Desta forma, entendemos que tanto a pergunta norteadora foi respondida como o objetivo geral desta pesquisa (seção 9.1) foi alcançado.

Nessa pesquisa, com as mudanças na prática de ensino proporcionadas por essa investigação-ação, inicialmente essa investigadora almejava, além de contribuir positivamente para o ensino e a aprendizagem de CDI, em longo prazo, reverter a realidade vivida por suas turmas de CDI. Quanto a este último anseio, não podemos afirmar que obtivemos êxito, pois em termos numéricos de aprovação/reprovação e evasão estes dados são parecidos com os de semestres anteriores. Essa conclusão está fundamentada com base nos resultados finais da disciplina de CDI do semestre em que foram coletados os dados para análise (2017/1) comparados com os resultados finais da disciplina nos últimos seis semestres letivos, dos cursos de Licenciatura em Química e de Licenciatura em Matemática que estão apresentados na Tabela 96.

[133] Essa orientação de que o momento da formalização do conteúdo deve ser mantido em uma aula mediada pela RP foi enfatizada pela professora e pesquisadora Allevato em uma sessão de comunicações orais no VII CIEM, cuja investigadora teve a oportunidade de participar.

Tabela 96
Resultados finais de CDI

	Ano/Semestre	APN	APE	AP	RF	RN	R
QUI	2014/1	27,0	16,2	43,2	21,6	35,1	56,8
	2014/2	6,5	12,9	19,4	45,2	35,5	80,6
	2015/1	7,1	14,3	21,4	10,7	67,9	78,6
	2015/2	12,5	4,2	16,7	8,3	75,0	83,3
	2016/1	5,3	10,5	15,8	50,0	34,2	84,2
	2016/2	5,9	11,8	17,6	8,8	73,5	82,4
	2017/1	8,8	14,7	23,5	17,6	58,8	76,5
MAT	2014/1	10,8	0,0	10,8	70,3	18,9	89,2
	2014/2	19,6	2,0	21,6	43,1	35,3	78,4
	2015/1	5,0	22,5	27,5	32,5	40,0	72,5
	2015/2	0,0	19,2	19,2	0,0	80,8	80,8
	2016/1	7,7	17,9	25,6	35,9	38,5	74,4
	2016/2	7,9	36,8	44,7	10,5	44,7	55,3
	2017/1	16,0	24,0	40,0	12,0	48,0	60,0

Legenda: APN – Aprovados por nota; APE – Aprovados em exame; AP – Total de aprovados; RF – reprovados por falta; RN – reprovados por nota; R – Total de reprovados.
* Os valores apresentados na Tabela 12 são porcentagens.
Fonte: Dados do Sistema Acadêmico.

Salientamos que não serão discutidos com profundidade os números apresentados na Tabela 96, porque essa pesquisadora atuou como professora da QUI e da MAT somente no segundo semestre de 2016 e primeiro semestre de 2017. Destarte, optamos por apresentar esses índices a título de curiosidade e inferir que independente do professor que esteja ministrando a disciplina e da metodologia adotada, o índice de reprovação, em ambas as turmas, foi superior a 55%. Mesmo não tendo obtido melhores índices, cremos que, pela análise qualitativa e quantitativa apresentada nesse relatório de pesquisa, em termos de aprendizagem a pesquisa veio a contribuir de forma positiva para os conhecimentos dos estudantes.

Ao fazer uma autorreflexão sobre tudo o que foi desenvolvido ao longo dos três semestres letivos de trabalho de campo, a investigadora percebe que sempre esteve muito preocupada com o conteúdo e o tempo para cumprir o cronograma, pois mesmo ao elaborar as atividades que foram desenvolvidas, as suas preocupações, no papel de professora sempre foram: Como posso ensinar esse conteúdo usando a metodologia de RP? Quanto tempo levarei para desenvolver essa atividade? Quantas aulas tenho para trabalhar com esse assunto? Em outras palavras, as preocupações estiveram relacionadas com a preocupação de cumprir os conteúdos programáticos no tempo disponível e satisfazer as exigências da Instituição. Ao finalizar este trabalho compreendemos que as preocupações da investigadora deveriam ser: Será que dessa forma que estou propondo desenvolver o conteúdo, o estudante compreenderá melhor? O que e por que devo ensinar esse assunto? Espera-se que a resposta a essas indagações não sejam apenas: "devo ensinar ou estou me propondo a ensinar, porque esse conteúdo é pré-requisito para outras disciplinas". No entanto, no momento em que a pesquisa estava sendo realizada, como professora e investigadora acreditava que estava de facto me preocupando com a aprendizagem do aluno. Novamente, o enraizamento ao ensino tradicional com que a "vida toda" a investigadora teve contato durante o tempo de discente e de docente parecem ter prevalecido. Apesar disso, identificamos contribuições positivas proporcionadas aos estudantes, que anteriormente não faziam parte da nossa prática docente. Dentre essas contribuições, destacamos a oportunidade dos estudantes desenvolverem o espírito de trabalho em grupo. No início dos trabalhos, os estudantes buscavam trabalhar de forma mais individual, cada um resolvia "seu problema" e, em caso de dúvidas, um procurava ajuda com o outro. Com o transcorrer do tempo e da experiência da professora em interferir nos grupos, esse tipo de comportamento foi sendo atenuado. Outra contribuição positiva desse trabalho, foi a oportunidade de discutir em sala de aula como determinados conteúdos de *Cálculo* poderiam/podem ser abordados no Ensino Médio. Como exemplo, citamos a discussão ocorrida na Tarefa 19 relacionada com a confecção de uma caixa de volume máximo, pois documentos oficiais brasileiros apontam que alguns conteúdos dessa disciplina devem ser abordados nesse nível de ensino (Brasil, 2006), e, muitas vezes, por experiência docente, esse tipo de discussão não ocorre nas aulas de conteúdos matemáticos. Creio que outro contributo positivo que esta pesquisa propiciou aos estudantes das licenciaturas foi a oportunidade de "experienciar[em] métodos e técnicas diferentes das já observadas e, assim, alargar o reportório de experiências que poderá transferir para o desempenho docente" (Formosinho, 2001, como citado em Figueiroa, 2017, p. 76). Pode ser que esses futuros professores, por terem vivenciado essa experiência em sala de aula, se sintam encorajados a inserirem em suas práticas variadas metodologias, dentre elas a RP. Nesse caso, tiveram a oportunidade de conhecer como pode-se colocar em prática uma aula cujo objetivo é ensinar através da RP, e ainda, conhecerem as (des)vantagens para o aprendizado de um aluno o uso dessa metodologia, visto que tiveram essa vivência com discentes durante sua vida universitária.

Para essa pesquisadora ter desenvolvido este trabalho foi um desafio muito grande, pois sua formação inicial era em Matemática Aplicada. Ao se propor a inserir a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP para ensinar conteúdos de *Cálculo* estava propondo a sair da "zona de conforto" como docente e aprender na prática os benefícios e as limitações dessa abordagem metodológica que pouco conhecia até de forma teórica. Outro desafio, foi adotar a concepção de ensinar através da RP para um público não recomendado pela literatura (Andrade & Onuchic, 2017), pois para os alunos repetentes na disciplina poderia não ser interessante. Apesar das dificuldades que teve como docente (seção 9.4) esta pesquisa trouxe contributos para a sua formação acadêmica bem como para a constituição de uma professora pesquisadora que refletirá na sua prática docente, visto que o doutoramento se encerra, mas o "fazer pesquisa" teve apenas um ponto de partida. Para a prática docente da investigadora, já é possível identificar melhorias, pois no semestre letivo posterior à coleta de dados em que esteve exercendo as atividades de docência[134], como professora manteve a metodologia de RP como uma das abordagens didáticas e, para avaliar o aluno, não conseguiu manter a forma antiga, que era exclusivamente por meio de avaliações escritas. Assim sendo, essa pesquisa permitiu ratificar a seguinte afirmação de Onuchic (2013): "nas aulas de Matemática onde essa metodologia foi adotada, os alunos se sentiram aptos a dar sentido à matemática que constroem. Professor e alunos, depois dessa experiência, não querem voltar a trabalhar com o método tradicional" (p. 103). No momento da escrita do projeto de tese, esta afirmação instigou minha curiosidade no sentido de "descobrir" se realmente era uma sentença verídica. Do ponto de vista do discente, parece que a maioria dos estudantes também corroboram com Onuchic (2013), entretanto, as entrevistas e inquéritos nos revelaram que, apesar de diversos aspectos positivos para a aprendizagem estarem associados ao uso da metodologia de RP, alguns estudantes têm preferência pelo ensino tradicional.

Por fim, do ponto de vista docente, pela experiência vivenciada, cremos que a metodologia de RP favorece a aprendizagem dos alunos, no entanto, dispende muita energia do professor. O docente precisa estar ciente que ao se propor a modificar sua prática, encontrará muitos desafios e precisará ser persistente para não abandonar sua proposta e optar somente por aulas tradicionais, que são muito mais rápidas e fáceis de serem trabalhadas. Nesse contexto, corroboramos com Onuchic e Allevato (2011) que o ato de inserir na sala de aula a metodologia de RP exige "(...) mudanças de atitude e postura [tanto do professor quando dos alunos], o que, nem sempre, é fácil conseguir" (p. 82) e, para que tais mudanças gerem bons frutos é necessário que ambos os agentes envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem estejam dispostos a saírem de sua zona de conforto.

9.6. Recomendações para futuras investigações

O desenvolvimento desta pesquisa permitiu identificar lacunas de pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de *Cálculo,* por isso, na sequência apontamos algumas sugestões de pesquisas futuras:

---

[134] O terceiro ano de doutoramento a investigadora esteve afastada integralmente de suas atividades de docência para finalização de sua tese.

- Inserir a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP para ensinar *Cálculo* em turmas de iniciantes de outros cursos de graduação da área de Ciências Exatas, visto que os PPC's (de todos os cursos da UDESC/Joinville) fazem menção à necessidade de resolver problemas relacionados com a sua respectiva área de atuação e acreditamos que a metodologia de RP pode contribuir para que o egresso adquira as competências e habilidades necessárias esperadas.
- Desenvolver pesquisas que integrem as atividades de formulação de problemas ao cotidiano da sala de aula, pois propiciam ao estudante oportunidade de usar sua criatividade e de estabelecer conexões entre os conteúdos de *Cálculo* já estudados.
- Inserir a metodologia de RP a partir da primeira fase do curso de Licenciatura em Matemática da UDESC/Joinville ou em outras instituições de ensino que tenham em seus currículos alguma disciplina cuja finalidade seja retomar os conceitos de matemática do ensino pré-universitário.
- Trabalhar de forma colaborativa com outros professores que lecionam *Cálculo* visando ampliar discussões acerca do ensino e da aprendizagem dessa disciplina e desenvolver materiais que podem ser utilizados pelo professor que deseje inserir a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP.
- Desenvolver pesquisas cuja abordagem metodológica sejam as Investigações Matemáticas (IM), pois além desta metodologia de ensino ter sido desejada, mas não concretizada por essa investigadora, a pesquisa de estado da arte (no banco de dissertações e teses da CAPES, no período de 2013 e 2017) nos revelou que não há trabalhos que tenham utilizado essa temática relacionada com o ensino e a aprendizagem de *Cálculo.*
- Desenvolver pesquisas que busquem identificar as diferenças e semelhanças entre a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP e as IM bem como evidenciar como é possível praticar as IM nas aulas de *Cálculo.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abdelmalack, A. (2011). *O ensino-aprendizagem-avaliação da derivada para o curso de Engeharia através da Resolução de Problemas*. (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

Abrantes, P. (1989). *Um (bom) problema (não) é (só)...* Educação e Matemática, Lisboa, n. 8, quarto trimestre, 7 – 10. Disponível em: https://goo.gl/cj6YVN

Adami, A. M., Dorneles Filho, A. A., & Lorandi, M. M. (2015). *Pré-Cálculo*. Porto Alegre, Brasil: Bookman.

Aguiar, R., & Moro, G. (2013). Reflexões de derivada e diferencial de funções de duas variáveis nos cursos de Ciências Exatas. *XI Encontro Nacional de Educação Matemática.* Curitiba, Brasil. Disponível em: https://goo.gl/e1mJB7

Allevato, N. S. G. (2005). *Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados: análise de uma experiência.* (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, São Paulo. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/102164

Allevato, N. S. G., & Onuchic, L. R. (2014). Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: L. R. Onuchic, N. S. G. Allevato, F. C. H. Noguti, & A. M. Justulin.*Resolução de Problemas: Teoria e Prática*. (35 – 52). Jundiaí/SP: Paco.

Almeida, E. (2016). *A evasão nos cursos de Engenharia e a sua relação com a Matemática: uma análise a partir do COBENGE.* (Dissertação de Mestrado). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

Almeida, H. M. (2015). A didática no Ensino Superior: práticas e desafios. *Estação Científica*, Juiz de Fora, nº 14, 1 – 8. Disponível em: https://goo.gl/FLSMkK

Almeida, L. M. W., Fatori, L. H., & Souza, L. G. S. (2010). Ensino de cálculo: uma abordagem usando Modelagem Matemática. *Revista Ciência e Tecnologia*, São Paulo, v. 10. Disponível em: http://www.revista.unisal.br/sj/index.php/123/article/view/17

Alonso, E. P. (2017). Aspectos Visuais e Gráficos do Teorema Fundamental do Cálculo. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: https://goo.gl/xuw5dc

Alvarenga, K. B., Dorr, R. C., & Vieira, V. D. (2016). O ensino e a aprendizagem de cálculo diferencial e integral: características e interseções no centro-oeste brasileiro. *REBES*, 2(4): 46-57. Disponível em: https://seer.imed.edu.br/index.php/REBES/article/view/1518/1069

Alves da Silva, V. (2014). Diferentes tipos de problemas no ensino da Matemática*. Investigação em Resolução de Problemas de Matemática*, 1 – 19. Disponível em: https://goo.gl/jj21Bx

Alves, M. J. G. (2014). Uma proposta para o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral com a utilização do software GeoGebra. (Dissertação de Mestrado). Universidade Severino Sombra, Rio de Janeiro.

Alves-Mazzotti, A. J., & Gewandsznajder, F. (1999). *O método nas ciências naturais e sociais: pesquisas quantitativas e qualitativas.* (2ª ed). São Paulo, Brasil: Pioneira.

Anastasiou, L. G. C., & Alves, L. P. Estratégias de ensinagem. In: Anastasiou, L. G. C., & Alves, L. P. (Orgs.) *Processos de ensinagem na Universidade: pressupostos para as estratégias de trabalho em aula*. (67 – 100), 5ª ed. Joinville, Brasil: Univille.

Andrade, C. P., & Onuchic, L. R. (2017). Perspectivas para a Resolução de Problemas no GTERP. In: L. R. Onuchic, L. C. Leal Jr, & M. Pironel (org.). *Perspectivas para a Resolução de Problemas*. (443-466). São Paulo: Livraria da Física.

Andrade, S. (1998). *Ensino-Aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula.* Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual Paulista de Rio Claro.

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2014). *Cálculo.* v. 1, 10ª ed. Porto Alegre, Brasil: Bookman.

Araújo, E. A. (2015). Proposta de Ensino do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio via GeoGebra. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, Bahia. Disponível em: https://goo.gl/ZbZ9fA

Artigue, M. (1995). La ensenañza de los principios del calculo: problemas epistemologicos, cognitivos y didácticos. In: P. Gomez (ed.). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (97-140). Grupo Editorial Iberoamericano, Mexico. Disponível em: https://goo.gl/YStvkU

Ávila, G. (1991). O Ensino de Cálculo no 2 grau. *Revista do Professor de Matemática*, n°18. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/18/1.htm

Ávila, G. (2002). O Ensino de Cálculo e Análise. *Matemática Universitária.* n° 33, 83 – 95.

Azevedo, E. B. (2016). Cálculo Diferencial e Integral sob a perspectiva da Resolução de Problemas. *XX EBRAPEM*, Curitiba-PR. Disponível em: https://goo.gl/czu7Ki

Azevedo, E. B. (2017). Sequência didática para motivar a definição de diferencial e aproximação linear local. *IV SERP e I SIRP*, Rio Claro – SP, 36 – 37. Disponível em: https://goo.gl/ZNXajX

Azevedo, E. B., Figueiredo, E. B., & Palhares, P. M. B. (2016). Aplicações de Derivadas e Resolução de Problemas. *II COLBEDUCA,* Joinville/SC, 165-181. Disponível em: https://goo.gl/FGGFhP

Azevedo, E. B., Figueiredo, E. B., & Palhares, P. M. B. (2017a). A visão do aluno sobre metodologia de Resolução de Problemas aplicadas no Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. *Actas do VIII CIBEM*, Madrid, 4 – 15. Disponível em: https://goo.gl/5ALJcP

Azevedo, E. B., Figueiredo, E. B., & Palhares, P. M. B. (2017b). Desafio aos monitores de Cálculo Diferencial e Integral: Formulação de Problemas. *VII CIEM*, Canoas, Brasil. Disponível em: http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/view/7044

Azevedo, E. B., Figueiredo, E. B., & Palhares, P. M. B. (2017c). Exercitando a criatividade em Cálculo Diferencial e Integral. *III COLBEDUCA*, Florianópolis-SC. Disponível em: http://www.revistas.udesc.br/index.php/colbeduca/article/view/10550

Azevedo, E. B., Figueiredo, E. B., & Palhares, P. M. B. (2019a). Um Panorama sobre as pesquisas brasileiras relacionadas com o ensino e a aprendizagem de Cálculo com ênfase em Resolução de Problemas. *VYDIA*. [no prelo]

Azevedo, E. B., Figueiredo, E. B., & Palhares, P. M. B. (2019a). Aproximação linear local através da Resolução de Problemas. *XIII ENEM.* Cuiabá, Mato Grosso, Brasil. [no prelo]

Azevedo, E. B., Figueiredo, E. B., Siple, I. Z., & Palhares, P. M. B. (2017). Imposto de Renda: função contínua? Uma questão de Cálculo tanto para o Ensino Básico quanto para o Ensino Superior. *BoEM*, Joinville, v.5. n.8, 1-20. Disponível em: https://goo.gl/vLiUrG

Azevedo, E. B., Sabatke, J. M., Figueiredo, E. B., & Siple, I. Z. (2017). Do concreto ao abstrato: Sequência didática para o ensino do conceito de limite no infinito. *VII CIEM*, Canoas, Brasil. Disponível em: http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/view/7596/

Azevedo, E. Q. (2002). Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas. (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual Paulista de Rio Claro.

Azevedo, E. Q. (2014). *O processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolu-ção de Problemas no contexto da Formação inicial do Professor de Matemática.* (Tese de Doutorado). Universidade Estadual Paulista de Rio Claro, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/fHU6NQ

Azevedo, L. L. (1998). *Uma proposta de mudança, na Licenciatura em Matemática do ICLMA, apoiada na metodologia de "ensino de matemática via resolução de problemas".* (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual Paulista de Rio Claro, São Paulo.

Barbosa, A. C. C. (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico*. (Tese de Doutoramento em Estudos da Criança). Instituto de Estudos da Criança, Universidade do Minho, Braga, Portugal. Disponível em: http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/10561

Barbosa, A., & Vale, I. (2015). Trilhos matemáticos e a criação de problemas. *XIV CIAEM*, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. Disponível em: https://goo.gl/yLhHnp

Barbosa, M. A. M. (2016). Proposta do Ensino de Integrais de Funções no Ensino Médio. (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, Paraíba. Disponível em: https://goo.gl/J6znen

Baron, M. E. (1985). Newton e Leibniz. In: *Curso de história da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo*, por Margaret E. Baron e H. J. M. Bos. Trad. José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Mª José M. M. Mendes. 5 v., Brasília, Brasil: Universidade de Brasília.

Barrichello, L. (2008). *Análise de Resoluções de Problema de Cálculo Diferencial em um Ambiente de Interação Escrita.* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista de Rio Claro, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/b4ymkA

Barufi, M. C. B. (1999). *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.* (Tese de Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/HW2rGH

Bastos, A. S. A. M. (2013). *Análise de erros matemáticos na Resolução de Problemas aplicados à Física Elétrica.* (Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/amNUDn

Batista, B. R. S. (2017). Sequências numéricas a partir da geometria fractal para licenciados em Matemática. (Dissertação de Mestrado). Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, Rio Grande do Sul. Disponível em: https://goo.gl/wff1Pz

Benk, P. (2017). *O volume da esfera: de Arquimedes ao Cálculo Diferencial e Integral.* (Trabalho de graduação em Licenciatura em Matemática), Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville. Disponível em: https://goo.gl/9hzmHZ

Benk, P., & Figueiredo, E. B. (2017). Arquimedes e a Esfera. *27º Seminário de Iniciação Científica da Universidade do Estado de Santa Catarina*, Joinville, Brasil. Disponível em: http://www1.udesc.br/arquivos/id_submenu/2551/87.pdf

Bezerra, N. J. F. (2016). *A organização do ensino de Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva da teoria da formação por etapas das ações mentais de Galperin.* (Tese de Doutorado), Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, Mato Grosso. Disponível em: https://goo.gl/NSXJ2a

Bezerra, W. L. (2015). *O uso de ferramentas pedagógicas para o ensino de Cálculo de uma variável em cursos semipresenciais: o caso do Instituto Federal do Ceará.* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará. Disponível em: https://goo.gl/PBztcx

Bisquerra, R. (1989). *Metodos de investigacion educativa: guia practica.* Barcelona, España: CEAC.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência Matemática no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação - Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. Disponível em: https://goo.gl/3jzRVD

Boero, M. L. (1999). *A introdução da disciplina "Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas" no Curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências*

Biológicas, Exatas e Experimentais da Universidade Presbiteriana Mackenzie. (Dissertação de Mestrado). Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* M. J. Alvarez, S. B. Santos, & T. M. Baptista (Trad.). Portugal: Porto Editora.

Bolzan, W. J. (2003). A matemática nos cursos profissionalizantes de Mecânica. (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual Paulista de Rio Claro.

Boni, V., & Quaresma, S. J. (2005). Aprendendo a entrevistar: como fazer entrevistas em Ciências Sociais. *Revista Eletrônica dos Pós-Graduandos em Sociologia Política da UFSC*, 2(1), 68 – 80. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/emtese/article/viewFile/18027/16976

Botta, E. S. (2010). O ensino do conceito de função e conceitos relacionados a partir da resolução de problemas. (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual Paulista de Rio Claro, São Paulo.

Botta, L. S. (1997). Números racionais e raciocínio proporcional: considerações sobre o ensino-aprendizagem. (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual Paulista de Rio Claro, 1997.

Bourbaki, N. (1999). *Elements of the History of Mathematics.* Verlang Berlin Heildelberg New York: Springer.

Boyer, C. B. (1949). *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* New York: Dover Publications.

Boyer, C. B. (2003). *História da Matemática.* Traduzido por Elza F. Gomide. (2ª ed.), São Paulo, Brasil: Edgar Blücher Ltda.

Brasil (2002a). *Diretrizes dos Cursos de Engenharia*. Ministério da Educação, Brasília-DF, Brasil. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES1362.pdf

Brasil (2002b). *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena.* Ministério da Educação, Brasília-DF, Brasil. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/009.pdf

Brasil (2015). *Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada.* Ministério da Educação, Brasília-DF, Brasil. Disponível em: https://goo.gl/Env5n9

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Ensino de 5 a 8 séries.* Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília-DF: MEC. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf

Brasil. (2000). *Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio*. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília-DF: MEC. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf

Brasil. (2006). *Orientações curriculares para o ensino médio.* (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias). Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. v. 2. Brasília-DF: MEC. Disponível em: https://goo.gl/6HK5PA

Brasil. (2017). *Base Nacional Curricular Comum.* Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, Brasília-DF: MEC. Disponível em: https://goo.gl/bEjWMS

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martines-Luaces, V., & Törner, G. (2016). Teaching and Learning of Calculus. In: *ICME-13 Topical Surveys*. Hamburg: Springer-Open.

Brito, A. J., & Cardoso, V. C. (1997). Uma abordagem histórico-pedagógica dos fundamentos do Cálculo Diferencial: reflexões metodológicas. *Zetetiké*, Campinas, 5 (7), 129 – 144. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646764

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1990). *The art of the Problem Posing.* (2ª ed) United States: Lawrence Erlbaum Associates.

Brunheira, L. (2014). A Lua aqui tão perto... Revista Educação e Matemática (Materiais para a aula de Matemática), nº 130, 51 – 52. Disponível em: https://goo.gl/pj7bfh

Burtons, D. M. (1995). *History of Mathematics: An Introduction.* Wm. C. (3ª ed.). United States of America: Brown Publisher.

Campos, M. L. T. (2014). *Discursos sobre continuidade de funções reais de variável real em ambiente virtual colaborativo: uma perspectiva da cognição corporificada.* (Tese de Doutorado). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/m6mdKr

Canturi, A. C. R. (2017). *Ensino de Funções no Primeiro Ano do Ensino Médio: Uma abordagem com ênfase no Comportamento das Funções e sua repercussão no Ensino Superior na disciplina de Cálculo.* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de São João Del-Rei, São João Del-Rei. Disponível em: https://goo.gl/gUkd3b

Cardoso da Silva, J. (2015). *Explorando significados sobre Cálculo de volumes por meio de Formulação e Resolução de Problemas por futuros professores*. (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, Paraíba. Disponível em: https://goo.gl/eSn8kr

Cardoso, D. T. (2018). *Resolução de problemas e o software geogebra no ensino e aprendizagem de otimização de funções.* (Dissertação de Mestrado profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias), Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville. Disponível em: https://goo.gl/kXjjjo

Charles, R. I. (1991). Mathematics Problem Solving: Some Issues Related to Teacher Education, School Curriculum, and Instruction. In: J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, & D. Fernandes (Eds). *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies*. (329-342). Berlin: Springer-Verlag.

Charles, R., Lester, F., & O'Daffer, P. (1992). *How to evaluate progress in problem solving.* National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston, VA.

Cohen, L., & Manion, L. (1991). *Research methods in Education*. (3ª ed.) London and New York: Routledge.

Coimbra, J. M. (2015). *O Ensino de Cálculo na Educação Básica.* (Dissertação de Mestrado). Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. Disponível em: https://goo.gl/eQ46gV

Concordido, C. F. R., & Barbosa, A. C. C. (2015). Uma proposta para o ensino de Cálculo Diferencial no Ensino Médio. *IV Colóquio Internacional Educação, Cidadania e Exclusão: Didática e Avaliação,* Rio de Janeiro. Anais Colóquio Internacional Educação, Cidadania e Exclusão: didática e avaliação. Campina Grane: Editora Realize, 2015. v. 1.

Cooke, R. (1997). *The History of Mathematics: a brief course*. United States of America: John Wiley & Sons.

Costa, J. M. A. (2016). *Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral como ferramenta para cálculos de áreas das figuras planas no Ensino Médio*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2016. Disponível em: https://goo.gl/Pi6DBX

Costa, M. S. (2012). *Ensino-aprendizagem-avaliação de proporcionalidade através da Resolução de Problemas: uma experiência na formação inicial de (futuros) professores de Matemática*. (Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de investigação em Ciências Sociais e Humanas: teoria e prática.* Coimbra, Portugal: Almedina.

Creswell, J. W. (2009). *Research design: qualitative, qauntitative, and mixed methods appoaches*. (3ª ed.). United States of America: SAGE Publications.

Creswell, J., & Plano Clark, V. L. (2013). *Pesquisas de métodos mistos*. (2ª ed.). Porto Alegre: Penso.

Cunha, A. R. (2016). *Algumas contribuições de Newton para o desenvolvimento do Cálculo.* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, Minas Gerais. Disponível em: https://goo.gl/Rhk8LB

Cunha, M. C, Martins, P. M, & Viseu, F. (2014). A formulação de problemas na aprendizagem de derivada de uma função. *ProfMat*. Disponível em: https://goo.gl/TEtgmB

Cury, H. N. (2009). Pesquisas em análise de erros no ensino superior: retrospectiva e novos resultados. In: M. C. R. Frota, & L. Nasser (Org.). *Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates*. (223 – 238). Recife: SBEM.

Dalmolin, B. A. S. (2015). A tricotomização entre Aritmética, Álgebra e Geometria nos erros apresentados por estudantes da disciplina de Cálculo Diferencial Integral I. (Dissertação de Mestrado). Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, Santa Catarina. Disponível em: https://goo.gl/aenoQU

Dante, L. R. (2009) *Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática*. (1ª ed.) São Paulo: Ática.

Dias, A. L. M. (2002). *Engenheiros, mulheres, matemáticos: interesses e disputas na profissionalização da matemática da Bahia (1896 – 1968)*. (Tese de Doutorado em História Social), Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil. Disponível em: https://goo.gl/hVkH4C

Dicionário da Língua Portuguesa Contemporânea. (2001). Academia das Ciências de Lisboa. Verbo. Vol. II.

Diogo, M. G. V. S. (2015). *Uma abordagem didático-pedagógica do Cálculo Diferencial e Integral I na formação de professores de Matemática.* (Tese de Doutorado). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/CgZFqa

Donel, M. L. H. (2015). Dificuldades de aprendizagem em Cálculo e a relação com o raciocínio lógico formal – uma análise no Ensino Superior. (Dissertação de Mestrado). Uni-versidade Estadual Paulista, Marília, São Paulo. Disponícel em: https://goo.gl/RnRAc7

Echeverría, M. D. P. P., & Pozo, J. I. (1998). Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: J. I. Pozo. *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.* (18 – 43). Porto Alegre: Artmed. Disponível em: https://goo.gl/6rXXUS

Edwards Jr, C. H. (1991). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Sping-Verlag.

Eves, H. (2004). *Introdução à História da Matemática.* Tradução de Higyno H. Domingues, Campinas, Brasil: Unicampi.

Farias, M. M. R. (2015). *Introdução a noções de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio no Contexto das TIC: Implicações para Prática do Professor que Ensina Matemática.* (Tese de Doutorado). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/rKYp53

Fauvel, J., & Gray, J. (1987). *The history os Mathematics: a reader.* Hong Kong: The Open University.

Fernandes, J. A. N. (2015). *Ecologia do saber: o ensino de limite em um curso de engenharia.* (Tese de Doutorado). Universidade Federal do Pará, Belém, Pará. Disponível em: https://goo.gl/6Pkpye

Ferreira, C. A., Santos, A. P. C., Silva, M. M., & Nascimento, P. A. S. (2016). O movimento lógico histórico como possibilidade metodológica na formação do conceito de Cálculo Diferencial e Integral. *XII ENEM*, São Paulo, 1 – 13. Disponível em: https://goo.gl/bhvTAQ

Ferreira, N. C. (2017). *Uma proposta de ensino de Álgebra Abstrata Moderna, com a utilização da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas, e suas contribuições para a formação inicial de professores de matemática.* (Tese de Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/5y3G6E

Ferreira, N. C., Silva, L. E., & Martins, E. R. (2017). Resolução de Problemas no Ensino Superior. In: L. R. Onuchic, L. C. Leal Jr, & M. Pironel (orgs.). *Perspectivas para a Resolução de Problemas.* (189 – 219). São Paulo: Livraria da Física.

Ferreira, N. S. A. (2002). As pesquisas denominadas "Estado da Arte". *Educação & Sociedade*, Campinas, ano 23, n. 79, 257-272. Disponível em: https://goo.gl/rfXYir

Figueiredo, C. (1996). *Grande dicionário da língua portuguesa*. 25(1). Lisboa: Bertrand.

Figueiredo, E. B., Siple, I. Z., Azevedo, E. B., & Moro, G. (2014). Uma experiência de trabalho colaborativo nas disciplinas básicas da matemática nos cursos de Engenharia. *Revista de Ensino de Engenharia*, 33(1), 13 – 23. Disponível em: https://goo.gl/FD5WoA

Figueiroa, A. (2017). Trabalho experimental e aprendizagem baseada na resolução de problemas: um estudo desenvolvido com futuros professores de Ciências. *Revista Docência Ensino Superior*, 7(1), 74-93, Belo Horizonte, Brasil. Disponível em: https://goo.gl/8vHVSR

Firmino da Silva, V. (2016). A Resolução de Problemas: concepções evidenciadas na prática e no discurso de professores de matemática do Ensino Fundamental. *X Simpósio Linguagens e Identidades da/na Amazônia Sul-Ocidental*, Acre, Brasil. Disponível em: https://goo.gl/g6kUT3

Fisher, B. T. D. (2009). Docência no ensino superior: questões e alternativas. *Educação*, Porto Alegre, 32(3), 311 – 315. Disponível em: http://www.gpeas.ufc.br/disc/hidr/texto1.pdf

Fleming, D. M., & Gonçalves, M. B. (2006). *Cálculo A.* (6ª ed. rev. e ampl.). São Paulo: Pearson Prentice Hall.

Floret, R. T. S. (2014). Uma proposta para introdução de noções de Cálculo no Ensino Médio. (Dissertação de Mestrado). Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. Disponível em: https://goo.gl/fZJnV7

Fontoura, L. R. (2016). *Uma sequência de ensino para o estudo de integrais duplas*. (Dissertação de Mestrado). Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, Rio Grande do Sul. Disponível em: https://goo.gl/kMz7r1

Gatti, B. A. (2010). Formação de professores no Brasil: características e problemas. Educação & Sociedade, Campinas, 31 (113), 1355 – 1379

Gil, A. C. (2008). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. (6ª ed.). São Paulo: Atlas.

Glass, G. V., & Hopkins, K. D. (1996). *Statistical Methods in Education and Psychology.* Allyn and Bacon, Boston.

Gomes, A., & Viseu, F. (2017). Estratégias de resolução de problemas geométricos por futuros professores dos 1.º/2.º ciclos. *Revista de Estudios e Investigación en Psicolía y Educación*. Vol. Extr., n. 06. Disponível em: https://goo.gl/dzgZTL

Gomes, E. (2012). Ensino e Aprendizagem do Cálculo na Engenharia: um mapeamento das publicações nos COBENGEs. *VI EBRAPEM*, Canoas, Brasil. Disponível em: https://goo.gl/afqJje

Gomes, F. H. (2016). *Uma proposta de exame de proficiência em Cálculo Diferencial e Integral*. (Dissertação de Mestrado). Universidade de Brasília, Brasília. Disponível em: https://goo.gl/6bzKVg

Gomes, K. A. (2015). *Indicadores de permanência na Educação Superior: o caso da disci-plina de Cálculo Diferencial e Integral I.* (Dissertação de Mestrado). Centro Universitário La Salle, Canoas, Rio Grande do Sul. Disponível em: https://goo.gl/7JvGji

Gonçalves, D. C., & Reis, F. S. (2011). Aplicações de derivadas no Cálculo I: uma atividade investigativa aplicada à Engenharia de Produção utilizando o Geogebra. *Revista da Educação Matemática da UFOP*, v. 1. Disponível em: https://goo.gl/uDs5x6

Grattan-Guinnes, I. K. M. (2000). *From the Calculus to Set Theory, 1630 – 1910*. United States of America: Pinceton and Oxford, 10 – 48.

Harel, G., & Trgalová, J. (1996). Higher Mathematics Education. In: A. J. Bishop *et al.*. (eds.). *International Handbook of Mathematics Education* (675-700). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Huanca, R. R. H. (2006). *A resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem-avaliação de matemática na e além da sala de aula.* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/SRLkNk

Ingar, K. V. (2014). *A visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais da função de duas variáveis reais*. (Tese de Doutorado). Pontifícia Universidade Católi-ca de São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/o5RYC8

Junqueira, S. M. (2014). *Experiências de estudantes na construção do conhecimento de derivada em aulas de Cálculo 1.* (Tese de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/vX6JQX

Justulin, A. M., & Noguti, F. C. H. (2017). Formação de professores e Resolução de Problemas: um estudo a partir de teses e dissertações brasileiras. In: L. R. Onuchic, L. C. Leal Jr, & M. Pironel (orgs.). *Perspectivas para a Resolução de Problemas*. (21 – 53). São Paulo: Livraria da Física.

Kaput, J. J. (1994). Democratizing access to Calculus: News Routes to Old Roots. In: A. H. Schoenfeld. *Mathematical Thinking and Problem Solving* (77-192). Hillsdale, New Jersey, Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associates.

Katz, V. J. (2010). *História da Matemática*. Rev. Jorge Nuno Silva. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Kauark, F. S., Manhães, F. C., & Medeiros, C. H. (2010). *Metodologia da pesquisa: um guia prático*. Itabuna, Bahia, Brasil: Via Litterarum.

Kline, M. (1993). The creation of the Calculus. In: Dudley, U. (Ed.) Reading for Calculus. *The Mathematical Association of America*, (49 – 55). United States of America.

Lacaz, T. M. V. S., Fernandes, J. A., & Carvalho, M. T. L. (2009). Contribuições da Educação Matemática para a análise das dificuldades dos alunos na aprendizagem da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I. *XXXII CNMAC*, 1073 – 1079. Disponível em: https://goo.gl/UnCCRB

Ladeira, A. R. (2014). *Uma proposta de atividades didáticas com tópicos de matemática básica preparatórios para o estudo de Cálculo universitário.* (Dissertação de Mestra-do). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, Minas Gerais. Disponível em: https://goo.gl/qt5AhN

Latorre, A. (2003). *La investigación-acción: Conecer y cambiar la práctica educativa*. Barcelona, España: GRAÓ.

Leite de Almeida, H. R. F. (2016*). Polidocentes-com-Mídias e o Ensino de Cálculo I.* (Tese de Doutorado). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/MrDhYo

Leme, J. C. M. (2016). *Aprendizagem da derivada: uma perspectiva de análise pelos fluxos do pensamento*. (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/sR5b9R

Lemke, R. (2017). *Funções reais de duas variáveis e GeoGebra: um livro dinâmico para o ensino de Cálculo.* (Dissertação de Mestrado). Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, Santa Catarina. Disponível em: https://goo.gl/UfXoS1

Lester Junior, F. K. (2013). Thoughts About Research On Mathematical Problem- Solving Instruction. *The Mathematics Enthusiast,* 10(1). Disponível em: https://goo.gl/JXerUj

Lester, F. (1993). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In D. Fernandes, A. Borralho, & G. Amaro (Eds.). *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 13-34). Lisboa: IIE. Trad. Domingos Fernandes e ver. António Borralho. Disponível em: https://goo.gl/gZy4xU

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education*. ICME-13 Topical Surveys, Hamburg: Springer Open. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-40730-2_1

Lima, G. L. (2008). O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil entre 1810 e 1934: os cursos das escolas militares do Rio de Janeiro e da Escola Politécnica de São Paulo. *XII EBRAPEM*, Rio Claro, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/7PKkPK

Lima, G. L. (2012). *A disciplina de Cálculo I do Curso de Matemática da Universidade de São Paulo: um estudo de seu desenvolvimento, de 1934 a 1994.* (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. Disponível em: http://pct.capes.gov.br/teses/2012/33005010005P4/TES.PDF

Lima, G. L. (2013). O ensino do Cálculo no Brasil: breve retrospectiva e perspectivas atuais. *XI ENEM*, Curitiba, 1 – 15. Disponível em: https://goo.gl/z8PSLR

Lima, G. L., & Silva, B. A. (2011). Inicialmente Cálculo ou diretamente Análise? O caso do curso de Matemática da USP. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, 1 – 12. Disponível em: https://goo.gl/SqgHf2

Lima, G. L., & Silva, B. A. (2012). O ensino do Cálculo na graduação em Matemática: considerações baseadas no caso da USP. *V SIPEM*, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil, 1 – 18. Disponível em: https://goo.gl/He6wyY

Lima, J. S. (2016). A utilização do Cálculo Diferencial e Integral para o cálculo de volume de sólidos geométricos. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará. Disponível em: https://goo.gl/ZmyJGR

Lima, S. A., Silva, S. C. R., Santos Jr, G. S., & Almeida, M. F. A. (2014). O ensino de Cálculo Diferencial e Integral em um curso de Administração: principais dificuldades de aprendizagem dos alunos. *IV Sinect,* Ponta Grossa, Brasil. Disponível em: https://goo.gl/g89yWh

Lino, M. A. (2015). *Os registros de representação semiótica na aprendizagem de derivada*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, Bahia.

Lopes, V. R. (2014). *Aprendizagem em um ambiente construcionista: explorando conhecimentos de Cálculo I em espaços virtuais.* (Dissertação de Mestrado). Universidade Fereal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, Mato Grosso do Sul. Disponível em: https://goo.gl/r7EGW4

Macão, D. P. (2014). *Uma proposta de ensino para o conceito de derivada*. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/C2CFMp

Machado, J. T. (2016). *A utilização do GeoGebra no ensino de Cálculo de área no curso de Química: um relato da práxis docente*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

Machado, R. M. (2008). *A visualização na resolução de problemas de cálculo diferencial e integral no ambiente computacional MPP.* (Tese de Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/aoWMxY

Marin, D. (2009). *Professores de Matemática que usam a Tecnologia de Informação e Comunicação no Ensino Superior.* (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual Paulista, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/YWNMYr

Marini, W. (2014). *Um panorama de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: 2003 a 2013*. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/6a5ueu

Maroco, J, & Gracia-Marques, T. (2006). Qual a fiabilidade do de Croncach? Questões antigas e soluções modernas? *Laboratório de Psicologia*, 4 (1): 65-90.

Marôco, J. (2010). *Análise Estatítica com o PASW Statistic (ex-SPSS).* Rolo & Filhos II, SA, Perô Pinheiro.

Masetto, M. T. (2002). Professor universitário: um profissional na atividade docente. In: M. T. Masetto(org.). *Docência na Universidade*. (4ª. Ed.), Papirus Editora, 9 – 26. Disponível em: https://goo.gl/jryYWh

Mattos, W. F. (2015). *Uma contribuição para o ensino de Cálculo no ensino médio, utilizando a classe das cônicas.* (Dissertação de Mestrado). Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto. Disponível em: https://goo.gl/KCCUCE

Máximo-Esteves, L. (2008). *Visão panorâmica da investigação-ação*. Porto, Portugal: Porto Editora.

MEC. (2013). *Programa e metas curriculares – Matemática A*. Ministério da Educação e Ciência, Lisboa, Portugal.

ME-DGIDC. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Melchiors, A., & Soares, M. (2013). História do Cálculo Diferencial e Integral. *Revista Maiêutica – Curso de Matemática,* Uniasselvi, Indaial, Santa Catarina, 1(1), 67-79. Disponível em: https://goo.gl/a9GN7H

Mello, J. C. C. B. S., Mello, M. H. C. S., & Fernandes, A. J. S. (2001). Mudanças no Ensino de Cálculo I: Histórico e Perspectivas*. XXIX COBENGE*. Porto Alegre. Disponível em: https://goo.gl/j2wrF4

Melo, G. M., & Huanca, R. R. H. (2012). Uma avaliação eficiente no processo de ensino-aprendizagem da Matemática: um olhar via resolução de problemas. *VII EPBEM*, João Pessoa, Paraíba, Brasil. Disponível em: https://goo.gl/VYpVVX

Menestrina, T. C., & Goudard, B. (2003). Atualização e revisão pedagógica de cálculo e álgebra: Concepções e atitudes Inovadoras. *XXXI Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia.* Joinville. Disponível em: https://goo.gl/1J6qD5

Minisini, E. G. (2016). *A evolução do sentido para a noção de função afim para um grupo de estudantes de Licenciatura em Matemática.* (Tese de Doutorado). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/wgx1sE

Miranda Rocha, M. (2016). *Releitura do processo de aprendizagem de estudantes repetentes de Cálculo I*. (Tese de Doutorado em Educação). Universidade Federal do Espirito Santo, Vitória. Disponível em: https://goo.gl/DDDEkM

Miranda, A. M. (2017). *A aprendizagem significativa de limites de funções por estudantes universitários.* (Tese de Doutorado em Ciência da Educação), Universidade do Minho, Braga, Portugal. Disponível em: http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/48706

Morais, R. S. (2015). *O processo constitutivo da Resolução de Problemas como uma temática da pesquisa em Educação Matemática – um inventário a partir de documentos dos ICMEs*. (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/z55D11

Morais, R. S., Onuchic, L. R., & Leal Jr, L. C. (2017). Resolução de Problemas, uma matemática para ensinar? In: L. R. Onuchic, L. C. Leal Jr, & M. Pironel (orgs.). *Perspectivas para a Resolução de Problemas*. (397 – 432). São Paulo: Editora Livraria da Física.

Moreira, D. (2005). Profissionalização e continuidade geracional: uma leitura sociológica do prefécio do *Traité du Calcul Differentiel et du Calcul Intégral* ed S. F. Lacroix. In: D. Moreira, & J. M. Matos (Orgs.). *História do Ensino da Matemática em Portugal.* Lisboa: Sociedade Protuguesa de Ciências da Educação.

Moro, G., & Siple, I. Z. (2010). A influência da Matemática Básica no ensino de Cálculo Diferencial e Integral. *X Encontro Nacional de Educação Matemática*, Salvador. Disponível em: http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/RE/T9_RE895.pdf

Morris, R. (1998). *Uma Breve História do Infinito: dos paradoxos de Zenão ao universo quântico*. Trad. Maria Luiza X de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

Muller, T. J. (2015). *Objetos de aprendizagem multimodais e ensino de Cálculo: uma pro-posta baseada em análise de erros.* (Tese de Doutorado). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Rio Grande do Sul. Disponível em: https://goo.gl/SfAUcb

Musser, G. L., & Shaughnessy, J. M. (1980). Problem solving strategies in school mathematics. In S. Krulik (Ed.)*, Problem Solving in School Mathematics* (136-145). Virginia: NCTM.

Nassar, L., Sousa, G. A., & Torraca, M. A. (2012). Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em cálculo? *V SIPEM*, Petrópolis, Rio de Janeiro. Disponível em: https://goo.gl/mdCgko

Nasserala, A. M. (2014). *Elaboração e descrição de situações didáticas com amparo na sequência Fedathi: o caso da integral imprópria.* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/10669

NCTM. (1985). *Uma agenda para a acção.* Lisboa: APM. (Tradução portuguesa do original de 1980).

NCTM. (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: APM e Instituto de Inovação Educacional (Tradução portuguesa do original de 1991).

NEVES, P. T. S. Introdução ao ensino do Cálculo e aplicações da derivada no Ensino Médio. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Amapá, 2016.

Nogueira, L. T. (2016). Aplicação de alguns teoremas na Resolução de Problemas geométricos. (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Amazonas, Manaus, Amazonas. Disponível em: https://goo.gl/MVWFK7

Noguti, F. C. H (2014). *Um curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas para os ingressantes da Universidade Federal do Pampa – Campus Alegrete.* (Tese de Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. Disponível em: https://goo.gl/CyqhJY

Nunes, C. B. (2010). *O Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de* *matemática.* (Tese de Doutorado). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/102122

Nunes, C. B., Noguti, F. C. H., & Allevato, N. G. S. (2014). Espaço e Forma. In: L. R. Onuchic, N. S. G. Allevato, F. C. H. Noguti,& A. M. Justulin (Orgs.). *Resolução de problemas: teoria e prática* (101-126). Jundiaí: Paco Editorial.

Nunnally, J. C. (1978). P*sychometric theory.* New York: McGraw-Hill Inc.

Oliveira Junior, J. A. (2015). Um estudo sobre a implementação do cálculo diferencial e integral no ensino médio. (Dissertação de Mestrado). Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/zSCZrC

Onuchic, L. R, & Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*. 25(41), 73-98. Rio Claro, São Paulo. Disponível em: http://www.redalyc.org/pdf/2912/291223514005.pdf

Onuchic, L. R. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: M. A. V. Bicudo (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática*. (199-220). São Paulo: Editora UNESP. Disponível em: https://goo.gl/pJc1k6

Onuchic, L. R. (2013). A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? Espaço Pedagógico, 20 (1), Passo Fundo, p. 88-104, jan/jun. 2013. Disponível em: http://www.upf.br/seer/index.php/rep/article/view/3509/2294

Onuchic, L. R. (2017). Perspectivas para a Resolução de Problemas. Palestra de encerramento do IV SERP e I SIRP. Disponível em: https://www.youtube.com/channel/UCpxnrzSSgnaeoX7XcyNRMzA

Onuchic, L. R., & Noguti, F. C. H. (2014). A pesquisa científica e a pesquisa pedagógica. In: L. R. Onuchic, N. S. G. Allevato, F. C. H. Noguti, & A. M. Justulin (Orgs.). *Resolução de Problemas: teoria e prática.* (53 – 68). Jundiaí, São Paulo: Paco Editorial.

Pagani, E. M. L. (2016). *O ensino-aprendizagem-avaliação de derivadas no curso técnico integrado ao médio através da resolução de problemas*. (Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

Pagani, E. M. L., & Allevato, N. S. G (2014). Ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: um mapeamento de algumas teses e dissertações produzidas no Brasil. *VIDYA*, 34(2), 61 – 74. Disponível em: https://goo.gl/X2JcEu

Pagani, E. M. L., & Allevato, N. S. G. (2016). O trabalho com derivadas no Ensino Médio através da Resolução de Problemas: aspectos da avaliação. REnCiMa, 7(1), 86 – 101. Disponível em: https://goo.gl/kYszg3

Palhares, P. (1997). Histórias com problemas construídas por futuros professores de matemática. In: D. Fernandes, F. Lester Jr, A. Borralho, & I. Vale (Coord.) *Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática: múltiplos contextos e perspectivas*. (159-188). Aveiro.

Paranhos, R., Figueiredo Filho, D. B., Rocha, E. C., Silva Junior, J. A., & Souza, D. (2016). Uma introdução aos métodos mistos. *Sociologias,* Porto Alegre, ano 18, n° 42, mai/ago. Disponível em: https://goo.gl/SP7vn6

Paulette, W. (2003). *Novo enfoque da disciplina Matemática e suas Aplicações, no Curso de Administração de Empresas da Universidade Paulista*. (Tese de Doutorado). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/oaD8CK

Pederson, K. M. (2000). Techniques of the Calculus, 1630 – 1660. In: H. J. M. Boss, R. Bunn, J. W. Dauben, I. Grattan-Guinnes, T. W. Hawkins, & K. M. Pederson. *From the Calculus to Set Theory, 1630 – 1910*. (10 – 48). Pinceton and Oxford, United States of America.

Pereira, C. C. (2015). *Metodologia da Resolução de Problemas e a construção do conceito de limite em uma turma do 3º ano do Ensino Médio*. (Dissertação de Mestrado). Centro Universitário Franciscano. Disponível em: https://goo.gl/yJi7Fo

Pinto, R. L. (2014). *Definições matemáticas sobre funções e suas derivadas como um eixo de discussão para o ensino e a aprendizagem do Cálculo*. (Dissertação de Mestrado). Uni-versidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Minas Gerais. Disponível em: https://goo.gl/sdHtUV

Pires da Silva, J. (2015). *A relação com o saber: os estudantes de Engenharia e a primeira disci-plina de Cálculo.* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina. Disponível em: https://goo.gl/L5Heav

Pires, M. V. (2011). Tarefas de investigação na sala de aula de Matemática: práticas de uma professora de Matemática. *Quadrante*, XX(1), 31 – 53. Disponível em: https://goo.gl/2pQEhJ

Pironel, M. (2002). *A avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem da matemática.* (Dissertação de Mestrado), Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita, Rio Claro, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/5xs8c1

Pólya, G. (1985). O ensino por meio de problemas. *Revista do Professor de Matemática*, n. 7. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/7/3.htm

Polya, G. (2006). *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM, 11 – 34. Disponível em: https://goo.gl/THTHax

Ponte, J. P. M. (2003). Investigar, ensinar e aprender. *Actas do ProfMat*. Lisboa: APM, 25 – 39. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/Docentes/Jponte/Docs-Pt/03-Ponte(Profmat).pdf

Raad, M. R. (2012). *História do ensino de Cálculo Diferencial e Integral: a existência de uma cultura.* (Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Minas Gerais. Disponível em: https://goo.gl/7NhZYx

Rachelli, J. (2017). *Compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca: aná-lise segundo o modelo cognitivo APOS*. (Tese de Doutorado). Universidade Franciscana, Santa Maria, Rio Grande do Sul. Disponível em: https://goo.gl/PB7oX7

Rafael, R. C. (2017). *Cálculo Diferencial e Integral: um estudo sobre estratégias para re-dução do percentual de não aprovação.* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Minas Gerais. Disponível em: https://goo.gl/KfdnHq

Rafael, R. C., & Escher, M. A. (2015). Evasão, baixo rendimento e reprovações em Cálculo Diferencial e Integral: uma questão a ser discutida*. VII Encontro Mineiro de Educação Matemática*. Juiz de Fora, Minas Gerais. Disponível em: https://goo.gl/GNJDm8

Reis, F. S. (2001). *A tensão entre o rigor e intuição no ensino de cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos*. (Tese de Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação, Campinas, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/JgUdV6

Reis, N. (2015). *Quadratura da parábola: de Arquimedes: de Arquimedes à Integral definida.* (Trabalho de graduação em Licenciatura em Matemática), Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, Santa Catarina. Disponível em: https://goo.gl/Wx3JFu

Resnick, L. B., & Glaser, R. (1975). *Problem Solving and Intelligence*. Pittsburgh Univ., Fa. Learning Researchand Development Center, National Inst. Of Education (DREW), Washington.

Rezende, W. M. (2003). *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.* (Tese de Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/UKD419

Ribeiro, M. V. (2010). *O Ensino do Conceito de Integral, em Sala de Aula, com recursos de História da Matemática e da Resolução de Problemas*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/BwSgZL

Rocha, I. A. (2016). *Evolução do Conceito de Função Integrável*. (Tese de Doutorado). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/11tvDk

Rocha, T. L. (2012). Viabilidade da utilização da pesquisa-ação em situações de ensino-aprendizagem. *Cadernos da FUCAMP*, 11(14), 12 – 21. Disponível em: https://goo.gl/aFVYgC

Romanatto, M. C. (2012). Resolução de problemas nas aulas de Matemática. *Revista Eletrônica de Educação.* São Carlos, SP: UFSCar, 6(1), 299 – 311. Disponível em: https://goo.gl/G5CBgg

Romanowski, J. P., & Ens, R. T. (2006). As pesquisas denominadas do tipo "Estado da Arte" em Educação. *Revista Diálogo Educacional*, 6(19), 37 – 50. Disponível em: https://goo.gl/njxybc

Romberg, T. A. (2007). Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa. Trad. Lourdes de la Rosa Onuchic e Maria Lúcia Boero. *Boletim de Educação Matemática*, 20(27), 1-38. Disponível em: http://www.redalyc.org/pdf/2912/291221869007.pdf

Rossi, M. I. (2012). *A aprendizagem das aplicações das integrais indefinidas em equações diferenciadas através da resolução de problemas*. (Dissertação de Metrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

Sabatke, J. M. (2016). *Construção do conceito de limite: ideias e contextos*. (Trabalho de Graduação em Licenciatura em Matemática). Universidade Estadual de Santa Catarina, Joinville. Disponível em: http://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/000018/0000182a.pdf

Sabatke, J. M., Figueiredo, E. B., Siple, I. Z., & Azevedo, E. B. (2017). Limite no infinito: do contexto ao descontexto. *Actas do VIII CIBEM*, Madrid, 133 – 145. Disponível em: https://goo.gl/3R5hz7

Sampaio, B.; & Guimarães, J. (2009). Diferenças de eficiência entre ensino público e privado no Brasil. Econ. Aplic., São Paulo, v. 13, n. 1, p. 45-68.

Santarosa, M. C., & Moreira, M. A. (2011). O cálculo nas aulas de física da UFRGS: um estudo exploratório. *Investigações em Ensino de Ciências*, 16(2), 317-351. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/141075

Santos, D. M. M., Pinto, G. M. F., Souza, I. A., & Félix, L. V. (2016). Atividades de tutoria: uma alternativa ao fracasso em Cálculo Diferencial e Integral. *XII ENEM*, São Paulo. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7365_3884_ID.pdf

Santos, G. M. T. (2014). *O comprometimento do estudante e a aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral I Canoas*. (Dissertação de Mestrado). Centro Universitário La Salle, Canoas, Rio Grande do Sul. Disponível em: https://goo.gl/GBi24w

Santos, U. G. R. (2017). *O estudo de relações entre os conceitos derivada e declive da reta tangente envolvendo licenciandos em Matemática*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, Bahia. Disponível em: https://goo.gl/fnPesg

Schroeder, T. L., & Lester Jr, F. K. (1989) Developing Understanging in Mathematics via Problem Solving. In: P. R. Trafton (Ed.) *New Directions for Elementar School Mathematics*. National Conuncil of Teachers os Mathematics, Reston, VA:NCTM, 31 – 42.

Serafim Filho, A. F. (2016). *A aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia: Um estudo de caso com uma* *turma do primeiro ano.* (Tese de Doutorado em Ciência da Educação), Universidade do Minho, Braga, Portugal. Disponível em: http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/48708

Serrazina, L. (2017). Resolução de Problemas e Formação de Professores: um olhar sobre a situação de Portugal. In: L. R. Onuchic, L. C. Leal Jr, & M. Pironel (org.). *Perspectivas para a Resolução de Problemas.* (55 – 83) São Paulo: Livraria da Física.

Silva Filho, R. L. L., Montejunas, P. R., Hipólito, O., & Lobo, M. B. C. M. (2007). A Evasão no Ensino Superior Brasileiro. *Cadernos de Pesquisa*, 37(132), 641 – 659. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/cp/v37n132/a0737132.pdf

Silva, A. P. (2017). *A modalidade EaD semipresencial e a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral*. (Tese de Doutorado). Universidade Estadual Paulista, Bauru, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/hWvbYY

Silva, B. A. (2011). Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo. *Educação Matemática e Pesquisa*, São Paulo, 13(3), 393 – 413. Disponível em: https://goo.gl/MDqSa7

Silva, E. P. (2015). *A Trajetória do Cálculo e da Disciplina Matemática do IFSP: das Esco-las de Aprendizes Artífices ao CEFET-SP*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. Disponível em: https://goo.gl/EnBdK7

Silva, J. S. (1999). A análise infinitesimal no ensino secundário. In: *Textos Didáticos, Fundação Calouste Gulbenkian*, Lisboa, v. 3, 377 – 385.

Silva, J. S. (2000). *A Matemática na antiguidade: texto baseado em notas das lições de História do pensamento matemático do professor José Sebastião e Silva*. In: S. M. Nápoles, C. Albuquerque, M. C. Antunes, & M. M. Ferreira (Eds.). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.

Silva, M. M., Figueiredo, E. B., & Azevedo, E. B. (2017). Uma análise das aplicações da teoria de máximos e mínimos em problemas em sala de aula. *27º Seminário de Iniciação Científica da Universidade do Estado de Santa Catarina*, Joinville, Brasil. Disponível em: https://goo.gl/yzN9TM

Silva, M. M., Figueiredo, E. B., & Azevedo, E. B. (2018). A Resolução de Problemas nos Projetos Pedagógicos dos Cursos e nos livros didáticos. *X CIDU*, PUC-RS, Porto Alegre, Brasil. Disponível em: https://goo.gl/4xi3Ft

Silva, S. A. S. (2016). *Prototipagem rápida de PCOC na impressora 3D para o ensino e aprendizagem de integrais duplas e triplas.* (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, Bahia. Disponível em: https://goo.gl/qcZ4zx

Silveira, R. F. (2017). *Dinamicidade no ensino de Cálculo: uma proposta para taxa de va-riação de funções reais de uma variável no GeoGebra*. (Dissertação de Mestrado). Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, Santa Catarina. Disponível em: https://goo.gl/vNRVrs

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. For the Learning of Mathematics, *FLM Publishing Association*, Vancouver. British Columbia, Canada, 14 (1), 19 – 28.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, 29(3), 75-80. Disponível em: https://goo.gl/5jxTdh

Simmons, G. F. (1993). Fermat, 1601 – 1665. In: U. Dudley (Ed.) *Reading for Calculus*. The Mathematical Association of America (31 – 35). United States of America.

Sousa, A. B. (2009). *Investigação em Educação*. Livros Horizonte, 2ª ed., Lisboa, Portugal.

Souza, D. V. (2016). *O ensino de noções de Cálculo Diferencial e Integral por meio da aprendizagem baseada em problemas.* (Dissertação de Mestrado). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo. Disponível em: https://goo.gl/YL5Z35

SPSS (2016). IBM SPSS Statistics Base 24. In: ftp://public.dhe.ibm.com/software/analytics/spss/documentation/statistics/24.0/pt-BR/client/Manuals/IBM_SPSS_Statistics_Base.pdf Acesso em: 24 mar 2018

Stewart, J. (2013). *Cálculo.* São Paulo: Pioneira Thomson Learning, vol. 1, 7ª ed

Stoyanova, E. N. (1997). *Extending and exploring students' problem solving via problem posing: A study of years 8 and 9 students involved in Mathematics challenge and enrichment stages of Euler enrichment progran for Young australians*. (Thesis of Doctor of Philosophy in Education). Edith Cowan UniVersity, Faculty of Education. Disponível em: https://goo.gl/DtyJX8

Tashakkori, A., & Teddlie, C. (2003). The past and future of mixed methods research: From data triangulation to mixed model designs. In: A. Tashakkori, & C. Teddlie (Eds.). *Handbook on mixed methods in the behavioral and social sciences*. (671 – 701). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Tavares, M. (2014). *Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de Cálculo.* (Tese de Doutorado). Universidade Estadual de Londrina, Londrina. Disponível em: https://goo.gl/6tJo3r

Teddlie, C., & Tashakkori, A. (2009). *Foundations of mixed-methods research: Integration quantitative and qualitative approaches in the Social and Behavioral Sciences*. United States of America: SAGE Publications.

Tripp, D. (2005). Pesquisa-ação: uma introdução metodológica. Tradução de Lólio Lourenço de Oliveira. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, 31(3), 443 – 466. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/ep/v31n3/a09v31n3.pdf

Tuckman, B. W. (2000). *Manual de investigação em Educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

UDESC (2002). *Projeto do Curso de Engenharia de Produção e Sistemas*. Centro de Ciências Tecnológicas, Universidade do Estado de Santa Catarina.

UDESC (2005). *Projeto do Curso de Licenciatura em Matemática*. Centro de Ciências Tecnológicas, Universidade do Estado de Santa Catarina.

UDESC (2007a). *Projeto do Curso de Engenharia Civil*. Centro de Ciências Tecnológicas, Universidade do Estado de Santa Catarina.

UDESC (2007b). *Projeto do Curso de Licenciatura em Química.* Centro de Ciências Tecnológicas, Universidade do Estado de Santa Catarina.

Vale, I. (2017). Resolução de Problemas um tema em contínua discussão: vantagens das resoluções visuais. In: L. R. Onuchic, L. C. Leal Jr, & M. Pironel (Org.). *Perspectivas para a Resolução de Problemas*. (131 – 162). São Paulo: Editora Livraria da Física.

Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de Problemas. In: Pedro Palhares e outros (coord.) *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico.* (7-51). Lisboa: LIDEL.

Vale, I., & Pimentel, T. (2012). Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em matemática. In: A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Eds.). *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da matemática* (347-360). Portalegre: SPIEM. Disponível em: https://goo.gl/tEJbRE

Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com Resolução de Problemas. *Quadrante*, Vol. XXIV, n. 2. Disponível em: https://goo.gl/NGd7w8

Valverde, A. J. V. (2011). Entrevista concedida ao pesquisador Marcos Ribeiro Raad, em 05 de junho de 2011, na residência do Professor Aladim. In: M. R. Raad (2012). *História do ensino de Cálculo Diferencial e Integral: a existência de uma cultura* (122-127). (Dissertação de mestrado), Universidade Federal de Juiz de Fora, Minhas Gerais. Disponível em: https://goo.gl/7NhZYx

Vieira, L. V. (2013). *Pensamento Algébrico no 1º Ciclo do Ensino Básico*. (Tese de Doutorado em Estudos da Criança), Instituto de Educação, Universidade do Minho, Braga, Portugal. Disponível em: http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/34477

Vogado, G. E. R. (2014). *O ensino e a aprendizagem das ideias preliminares envolvidas no conceito de integral por meio da Resolução de Problemas*. (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11017

Wrobel, J. S., Zeferino, M. V.C., & Carneiro, T. C. J. (2013). Ensino de Cálculo Diferencial e Integral na última década do ENEM: uma análise usando o Alceste. *XI Encontro Nacional de Educação Matemática*, Curitiba, 1 – 15. Disponível em: https://goo.gl/qyJzmB

Zarpelon, E. (2016). *Análise do desempenho de alunos calouros de Engenharia na disci-plina de Cálculo Diferencial e Integral I: um estudo de caso na UTFPR.* (Dissertação de Mestrado). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, Paraná. Disponível em: https://goo.gl/Xm2jwV

Ziccardi, L. R. N. (2009). *O Curso de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: uma história de sua construção/desenvolvimento/legitimação*. (Tese de Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Zuchi, I. (2005). *A abordagem do conceito de limite via sequência didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional*. (Tese de Doutorado em Engenharia de Produção). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil. Disponível em: https://goo.gl/pocbkj

Zuya, H. A. (2017). The benefits of problem posing in the learning of mathematics: a systematic review*.* *International Journal of Advanced Research*. 5(3), 853 – 860.Disponível em: https://goo.gl/7h8uAP

Anexo 1

Resolução de Problemas nos PPC's da UDESC/Joinville

Tabela A

Menção a resolução de problemas nos PPC's dos cursos da UDESC/Joinville envolvidos na pesquisa

Estrutura dos PPCs	Cursos	Fala a respeito de RP
Objetivo do Curso	Engenharia Elétrica	Capacitar recursos humanos para resolver problemas de tecnologia elétrica e eletrônica lhes proporcionando potencial para atender as necessidades imediatas da indústria, visando o desenvolvimento regional e nacional, além da independência tecnológica.(p. 3)
	Engenharia Civil	formar profissionais capazes de oferecer soluções competentes e eficazes aos problemas identificados em diversas áreas [da Eng. Civil] (p.4)
Objetivos Específicos	Matemática	Contribuir para que o aluno tenha condições de: [...] - Desenvolver sua capacidade de formulação e interpretação de situações matemáticas; [...] - Aperfeiçoar sua capacidade de modelar e resolver problemas. (p.8)
	Engenharia de Produção	Capacitar os alunos para uma abordagem sistêmica dos problemas de engenharia.(p. 7)
	Ciência da Computação	Propiciar aos acadêmicos: [...] - Formação básica em matemática que permita raciocínio abstrato(logico-matemático) capaz de abordar problemas possivelmente complexos e criar uma base teórica para o desenvolvimento de outras disciplinas; - Formação básica em ciência da computação com o objetivo de criar fundamentação teórica para o desenvolvimento de soluções computacionais, assim como, analisar problemas e sintetizar soluções computacionalmente viáveis, integrando conhecimentos multidisciplinares. (p.7)
Perfil Profissional	Física	Diagnosticar, formular e encaminhar a solução de problemas físicos, experimentais e teóricos, práticos ou abstratos, fazendo

		uso dos instrumentos laboratoriais e matemáticos apropriados. [...]. (p.4)
	Engenharia de Produção	Engenheiro com solida formação cientifica e profissional associada a uma visão ética e humanística, capacitado para identificar, formular e solucionar problemas referentes as atividades de [...].(p. 9)
	Ciência da Computação	profissional capaz de exercer sua cidadania de forma ética e de identificar e resolver problemas na área da computação de forma metodológica e pró-ativa.(p.9)
	Engenharia Mecânica	O perfil do egresso é o de um profissional dotado de iniciativa na análise de problemas e na concepção e implementação de soluções em Engenharia Mecânica, [...].(p.7)
	Engenharia Elétrica	Além da formação generalista, também contemplara a formação humanista, critica e formar Engenheiros Eletricistas capazes de analisar e resolver, em âmbito interdisciplinar, problemas de engenharia elétrica, no que tange sua ênfase de formação, [...].(p.3)
Princípios que norteiam a formação Profissional	Química	Este profissional deve ser possibilitado, durante o curso de graduação: [...], exercitar sua criatividade na resolução de problemas; [...].(p.18)
	Engenharia Civil	- capacidade de resolver problemas de Engenharia Civil, o que implica no domínio de conceitos fundamentais para o pleno exercício da profissão.(p.7)
	Engenharia Mecânica	- Capacidade de resolver problemas de Engenharia Mecânica, que implica no domínio de conceitos fundamentais para o pleno exercício da profissão
Campo de Atuação Profissional	Ciência da Computação	O egresso deve ter condições de assumir o papel de agente transformador do mercado de trabalho, sendo capaz de provocar mudanças pela incorporação de novas

		tecnologias e metodologias na solução de problemas [...]. (p. 10)
Competências e habilidades exigidas	Engenharia Elétrica	O curso tem por objetivo capacitar o profissional com os conhecimentos necessários ao exercício pleno de suas atividades, ou seja, provê-lo com as seguintes competências e habilidades: [...] V – identificar, formular e resolver problemas de Engenharia Elétrica.(p.6)
	Engenharia de Produção	Objetiva-se ainda que, além das competências, os egressos do Curso de Engenharia: Habilitação em Produção e Sistemas do CCT/UDESC adquiram/desenvolvam e deem ênfase para as habilidades humanas, conceituais e técnicas que se fazem presentes através: [...] - Da capacidade de identificar, modelar e resolver problemas; [...]. (p. 14)
O curso e suas finalidades	Engenharia de Produção	(...) dotados de instrumental teórico-metodológico, além de uma forte base cientifico-tecnológico, que os capacite a resolver problemas de produção de bens e serviços, nos setores primários, secundários e terciários da economia.(p. 12)
Estrutura Curricular Proposta	Engenharia de Produção	O núcleo de conteúdos profissionalizantes do Curso está estruturado visando uma formação profissional geral, versando sobre um conjunto coerente de tópicos estabelecidos nas diretrizes curriculares e desdobrados numa série de disciplina que buscam estimular uma atuação critica e criativa na identificação e resolução de problemas, considerando aspectos econômicos, sociais, ambientais, políticos e culturais dentro de uma visão ética e humanística.(p. 26)

Anexo 2

Questionário para avaliar a opinião dos estudantes sobre a metodologia de RP.

Prezado(a) Acadêmico(a):

Este questionário tem como objetivo avaliar a sua opinião sobre a inserção da Resolução de Problemas (RP) como metodologia de ensino no curso de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI). Essa metodologia faz parte da pesquisa de doutoramento da professora-pesquisadora e está vinculado ao Projeto de Pesquisa "Ensino de Cálculo Diferencial e Integral: na perspectiva de Resolução de Problemas". Ao responder esse questionário você estará dando a oportunidade da professora-pesquisadora refletir sobre as atividades diferenciadas que foram desenvolvidas em sala de aula mediadas pela metodologia de RP e permitindo que a mesma possa elaborar ações que visem melhorar a qualidade de suas atividades de docência. Consequentemente, por meio dessa mudança de postura da professora-pesquisadora, a mesma poderá contribuir positivamente com o ensino e a aprendizagem de CDI. Não há a necessidade de se identificar.

Agradecemos a colaboração!

Curso: ____

1. Você já cursou a disciplina de CDI 1 nessa ou em outra instituição de Ensino Superior?

( ) Não ( ) Sim.

Se sim, quantas vezes? _____________________

Nas afirmações seguintes, assinale com (X) no quadrado que se adequa mais à tua opinião, considerando a seguinte escala:
DT – Discordo Totalmente; D – Discordo; I – Indiferente; C – Concordo; CT – Concordo Totalmente.

2. Com relação a forma de ensino com que você teve contato na disciplina de CDI 1.

	DT	D	I	C	CT
O professor formulava questões de matemática que envolviam situações do quotidiano.					
O professor apresentava fatos históricos relacionado com os conteúdos que estavam sendo trabalhados.					
O professor fazia uso de softwares gráficos durante as aulas para explicar o conteúdo.					
O professor primeiro explicava o conteúdo, dava exemplos e, a seguir, exercícios e/ou problemas para serem feitos em sala de aula de forma individual ou em grupo.					
O professor primeiro deixava os alunos trabalharem em grupo para depois corrigir as questões e fazer a formalização do conteúdo.					

Outro.
Qual(is)?____

3. Com relação à metodologia de RP utilizada nesse curso.

	DT	D	I	C	CT
Você considera que a metodologia de RP foi adequada para se trabalhar com os conteúdos da disciplina de CDI 1.					
Julga que as aulas em que a metodologia de RP foi inserida permitiram que você participasse mais ativamente das aulas e, consequentemente, se tonasse mais comprometido com a sua aprendizagem.					

A sua compreensão dos conteúdos envolvidos na disciplina permitiu que você resolvesse exercícios de forma mais crítica e não apenas por aplicação mecânica de regras/fórmulas.					
Você teve mais oportunidade de construir estratégias, replanejar e, com isso, construir conhecimentos importantes por si mesmo.					

4. Quanto às atividades propostas para serem trabalhadas em grupo durante as aulas de CDI.

	DT	D	I	C	CT
Elas permitiram que você expusesse suas ideias e as compartilhasse com os seus colegas.					
Você teve oportunidade de aprender com seus colegas durante as discussões em grupos.					
O tempo reservado para a realização das atividades em grupo foi suficiente.					

5. Com relação aos recursos utilizados na disciplina de CDI 1

	DT	D	I	C	CT
Os trabalhos mediados pela plataforma moodle exigiram de você um maior comprometimento com atividades extraclasse.					
Os recursos didáticos (tais como, quadro e giz, datashow, softwares gráficos, materiais manipuláveis...) utilizados pela professora-pesquisadora para a formalização dos conteúdos foram adequados.					

6. Com relação a sua adaptação com a metodologia de RP

	DT	D	I	C	CT
Você sentiu dificuldade(s) para se adaptar a realizar as atividades em grupo.					

6.1. Alguma(s) dificuldade(s) sentida(s) em trabalhar com a metodologia de RP foi(ram) porque:

	DT	D	I	C	CT
Você prefere trabalhar sozinho.					
Você não tinha muita afinidade com os demais colegas para desenvolver trabalhos em grupos.					
Você precisa de silencio para pensar sobre as atividades propostas.					
Você sempre esteve acostumado com aulas tradicionais em que os trabalhos (quando têm) são realizados em horários extraclasse sem haver a discussão das atividades propostas em sala.					

Outro.
Qual(is)?____

7. Sua opinião com relação à metodologia de RP inserida nas aulas de CDI 1

	DT	D	I	C	CT
A metodologia de RP deveria ser utilizada por mais professores de CDI 1.					
Não gostei da metodologia de RP porque prefiro aulas tradicionais em que o professor explica o conteúdo e resolve exercícios no quadro.					
Acho que essa metodologia não foi adequada para a disciplina de CDI 1, pois número de atividades realizadas em sala de aula foi menor do que se as aulas fossem tradicionais.					
Acho que o professor não deve propor exercícios para que o aluno tente resolver sem que ele tenha explicado o conteúdo antes.					
Gosto da metodologia de RP porque as aulas são mais dinâmicas.					
O aluno passa a ser mais questionador em aulas.					
O aluno passa a ter mais autonomia em seus estudos.					
O professor permite que o aluno seja mais participativo em sala de aula.					
Como o professor não dá respostas diretas (sim/não) aos questionamentos dos alunos durante a resolução das atividades, então o professor permite ao aluno sentir o prazer da descoberta.					

Outro.
Qual(is)?____

Nas linhas abaixo você pode deixar sua opinião, fazer sugestões, críticas ou comentários sobre a metodologia utilizada, as atividades realizadas, a(s) dificuldade(s) e/ou outras questões que julgar relevante.

Anexo 3

Inquérito aplicado após a realização das atividades de FP.

Prezado(a) Acadêmico(a):

Este questionário tem como objetivo avaliar a sua opinião sobre a atividade de formulação de problemas e comparar com a Resolução de Problemas (RP). Essa atividade está vinculada ao Projeto de Pesquisa "Ensino de Cálculo Diferencial e Integral: na perspectiva de Resolução de Problemas". Ao responder esse questionário você estará dando a oportunidade das professoras-pesquisadoras refletirem sobre as atividades diferenciadas que poderão serem desenvolvidas em sala de aula mediadas pela metodologia de RP e permitindo que as mesmas possas elaborar ações que visem melhorar a qualidade de suas atividades de docência. Consequentemente, por meio dessa mudança de postura da professora-pesquisadora, as mesmas poderão contribuir positivamente com o ensino e a aprendizagem de CDI. Não há a necessidade de se identificar.   Agradecemos a colaboração!

Este questionário foi extraído do artigo "A formulação de problemas na aprendizagem de derivada de uma função" de Maria do Carmo Cunha, Paula Mendes Martins e Floriano Viseu. ProfMat, 2014.

Curso: ____

Nas afirmações seguintes, assinale com (X) no quadrado que se adequa mais à tua opinião, considerando a seguinte escala: DT – Discordo Totalmente; D – Discordo; I – Indiferente; C – Concordo; CT – Concordo Totalmente.

1. Com relação às perspectivas sobre a experiência desenvolvida.

	DT	D	I	C	CT
Participei na formulação de problemas.					
A formulação de problemas desafiou a minha criatividade.					
Na formulação de problemas segui exemplos de problemas da apostila/livros.					
A formulação de problemas incentivou a troca de ideias com meu(s) colega(s).					
A formulação de problemas ajudou a perceber a utilidade dos conteúdos que aprendi.					
Tive dificuldades em formular problemas.					

Outro.

Qual(is)?____

2. Com relação às perspectivas sobre a importância da formulação de problemas.

	DT	D	I	C	CT
A formulação de problemas desafia a pensar.					
A formulação de problemas obriga a saber os conteúdos contemplados.					
A formulação de problemas deve fazer parte da aprendizagem de todos os temas matemáticos.					
A formulação de problemas prepara-me para responder a situações do quotidiano.					

3. Com relação à formulação de problemas versus resolução de problemas.

	DT	D	I	C	CT
Prefiro resolver a formular problemas.					
A formulação de problemas ajudou a perceber a resolução de problemas.					
É mais importante saber formular problemas do que saber resolver problemas.					

Nas linhas abaixo e/ou no verso desta folha você pode deixar sua opinião, fazer sugestões, críticas ou comentários sobre a metodologia utilizada, as atividades realizadas, a(s) dificuldade(s) e/ou outras questões que julgar relevante.

Anexo 4

Escala de avaliação dos testes

Problema 1

Pontos	Critério
0	– Não respondeu. – Resposta incorreta sem apresentar qualquer justificativa.
1	– Resposta correta sem algum tipo de justificativa ou justificativas erradas.
2	– Raciocínio correto, mas encontrou função que descreve o salário está incorreta. – Resposta errada por cometer algum erro de contas, mas o desenvolvimento todo correto. – Encontrou as funções corretas que descrevem o salário, mas não concluiu nada ou concluiu errado (sem testar vários valores).
3	– Resposta correta, sem encontrar as funções que descrevem o salário, mas encontra o número de softwares que devem ser vendidos para que o salário seja o mesmo e compara o salário para outros números de softwares vendidos. – Encontra as funções que descrevem o salário e resolve graficamente, mas não escreve a interpretação. – Resposta correta obtida ao atribuir possível número de softwares vendidos e calcular o salário que teria em cada uma das empresas sem expressar a função que define o salário. – Resposta parcialmente correta obtida ao atribuir possível número de softwares vendidos e calcular o salário que teria em cada uma das empresas expressando a função que define o salário, mas não encontrou o valor que os salários seriam iguais.
4	– Apresenta as funções que descrevem o salário e atribuiu possível número softwares vendidos e calcular o salário que teria em cada uma das empresas. – Encontra as funções que descrevem o salário e resolve graficamente, escrevendo a interpretação. – Resolve corretamente por inequações e dá a interpretação dos resultados.

Problema 2

Item a

Pontos	Critério
0	– Não respondeu. – Resposta incorreta sem apresentar qualquer justificativa.
1	– Resposta incorreta determinada analiticamente, porque cometeu algum erro de matemática básica. – Resposta próxima da correta, mas interpretou como se fosse uma taxa de variação linear.
2	– Resposta aproximada, extraída da análise gráfica. – Resposta certa sem justificativas. – Resposta correta, mas ao calcular o limite, não escreveu a notação de limite, apenas fez os cálculos.
3	– Resposta correta, extraída da análise gráfica com justificativa. – Resposta não determinada analiticamente, porque houve não souber isolar o tempo.
4	– Resposta correta obtida analiticamente.

Itens b e c

Pontos	Critério
0	– Não respondeu. – Resposta incorreta sem apresentar qualquer justificativa.
1	– Limite errado, extraída da análise gráfica, sem interpretação física. – Limite correto, mas não escreveu limites ao aplicar as propriedades de limite, nem apresentou interpretação física. – Usou notação de limite, mas resposta errada por erro de matemática básica (interpretação do leitor) e sem interpretação física. – Justificativa parcialmente correta, sem calcular os limites.
2	– Interpretação física correta, mas não calculou o limite. – Interpretação física correta, mas calculou errado o limite. – Interpretação física e limite ambos corretos, mas não escreveu limites durante o cálculo do limite. – Cálculo do limite correto, mas intepretação física errada. – Cálculo do limite correto, mas sem intepretação física.
3	– Limite correto, extraída da análise gráfica, com interpretação física adequada. – Cálculo do limite correto, mas intepretação física parcialmente correta.
4	– Resposta correta obtida analiticamente e com interpretação física correta.

Problema 3

Item a

Pontos	Critério
0	– Não respondeu. – Resposta incorreta.
1	– Não é contínua em todo seu domínio, pois tem um pico (ou não derivável) em $x = 4$. – É contínua exceto em $x = 0$, mas não justificar.
2	– Não é contínua em todo seu domínio, pois tem um salto no intervalo $(0,2]$, ou seja, olhou a variação de y.
3	– Não é contínua em todo seu domínio, pois existe um salto em $x = 0$ e não é derivável em $x = 4$.
4	– Não é contínua em todo seu domínio, pois existe um salto em $x = 0$. – Não é contínua em todo seu domínio, pois existe em $x = 0$ os limites laterais existem, mas são diferentes.

Item b.i

Pontos	Critério
0	– Não respondeu. – Resposta totalmente incorreta.
1	– Somente subintervalo(s) correto(s) em que a inclinação é negativa e/ou positiva, sem justificativas.
2	– Subintervalo(s) em que a inclinação é positiva e todos os intervalos em que a inclinação é negativa, sem justificativas. – Subintervalo(s) em que a inclinação é negativa e todos os intervalos em que a inclinação é positiva, sem justificativas.
3	– Todos os intervalos em que a inclinação é positiva e negativa, sem justificativas.
4	– Todos os intervalos em que a inclinação é positiva e negativa, com justificativas.

Item b.ii

Pontos	Critério
0	– Não respondeu. – Resposta totalmente incorreta.
1	– Resposta incorreta com alguma justificativa plausível. – Apresentou o ponto em que $x = -2$ e algum outro ponto que não é o pico, sem justificativas. – Apresentou o ponto em que $x = -2$ e o intervalo $(6, +\infty)$, sem justificativas.

	– Apresentou o ponto em que $x = -2$, o ponto de pico e o intervalo $(6, +\infty)$, sem justificativas. – Apresentou o ponto que $x = -2$ e o intervalo $(8, +\infty)$, sem justificativas.
2	– Apresentou dois pontos que existe reta tangente horizontal ($x = -2$ e $x = 4$ – pico), sem justificativas. – Apresentou dois pontos que existe reta tangente horizontal ($x = -2$ e $x = 4$ – pico) e o intervalo $(8, +\infty)$, sem justificativas.
3	– Apresentou o ponto em que $x = -2$, mas sem justificativas.
4	– Apresentou o ponto em que $x = -2$, com justificativas.

Item b.iii

Pontos	Critério
0	– Não respondeu. – Resposta totalmente incorreta.
1	– Resposta incorreta com alguma justificativa plausível. – Apresentou o ponto em que $x = 0$ e algum ponto errado, sem justificativas. – Apresentou o ponto em que $x = 0$ e algum ponto errado, sem justificativas.
2	– Apresentou somente o ponto em que $x = 0$, sem justificativas. – Apresentou somente o ponto em que $x = 4$, sem justificativas.
3	– Apresentou os pontos em que $x = 0$ e $x = 4$, sem justificativas. – Apresentou somente o ponto em que $x = 0$, com justificativas. – Apresentou somente o ponto em que $x = 4$, com justificativas.
4	– Apresentou os pontos em que $x = 0$ e $x = 4$, com justificativas.

Item b.iv

Pontos	Critério
0	– Não respondeu. – Resposta totalmente incorreta.
1	– Relacionou o sinal do coeficiente angular da reta tangente com o sinal de f'. – Alguma constatação verdadeira sobre a primeira derivada, mas não relacionou o sinal coeficiente angular/existência da reta tangente com a crescimento/decrescimento de f.
2	– Relacionou o sinal positivo/negativo de f' com o crescimento/decrescimento da função f
3	– Relacionou o sinal positivo/negativo de f' com o crescimento/decrescimento da

	função f e f' é nula onde a reta tangente é horizontal. – Relacionou o sinal positivo/negativo de f' com o crescimento/decrescimento da função f e f' não existe onde a f não é contínua; – Relacionou o sinal positivo/negativo de f' com o crescimento/decrescimento da função f; f' não existe onde a f não tem reta tangente horizontal.
4	– Relacionou o sinal positivo/negativo de f' com o crescimento/decrescimento da função f; f' não existe onde a f não é contínua; f' é nula onde a reta tangente é horizontal. – Relacionou o sinal positivo/negativo de f' com o crescimento/decrescimento da função f; f' não existe onde a f não tem reta tangente horizontal; f' é nula onde a reta tangente é horizontal.

Item c

Pontos	Critério
0	– Não respondeu. – Resposta totalmente incorreta.
1	– Apresentou os máximos locais $P(4,6)$ e $Q(-2,4)$, não classificou o ponto P como sendo máximo absoluto nem falou sobre a (não) existência de um mínimo absoluto. – Apresentou apenas o ponto $Q(-2,4)$, sem classificá-lo. – Apresentou o máximo global $P(4,6)$ e apresentou um ponto de mínimo absoluto errado, sem justificativas.
2	– Apresentou o máximo global $P(4,6)$ e não falou nada sobre a (não) existência de um mínimo absoluto. – Apresentou os máximos locais $P(4,6)$ e $Q(-2,4)$, não classificou o ponto P como sendo máximo absoluto e justificou (não) existência de um mínimo absoluto.
3	– Apresentou o máximo global $P(4,6)$ e disse não existe mínimo absoluto, mas não justificou.
4	– Apresentou o máximo global $P(4,6)$ e justificou porque não existe mínimo absoluto.

Item d

Pontos	Critério
0	– Não respondeu. – Resposta totalmente incorreta.
1	– Apresentou subintervalos corretos em que a concavidade é voltada para cima e para baixo e não colocou alguma constatação verdadeira sobre f' e f''. – Não apresentou subintervalos corretos em que a concavidade é voltada para cima e para baixo, mas colocou alguma constatação verdadeira sobre f' e f''. – Apresentou subintervalos corretos em que a concavidade era voltada para cima/baixo, mas não relacionou f' e f''.

2	–	Apresentou todos os intervalos em que a concavidade é voltada para cima; e, relacionou o crescimento/decrescimento de f' com a concavidade voltada para cima/baixo.
	–	Apresentou todos os intervalos em que a concavidade é voltada para baixo; e, relacionou o crescimento/decrescimento de f' com a concavidade voltada para cima/baixo.
	–	Apresentou todos os intervalos em que a concavidade é voltada para cima; e, relacionou o sinal f' com (de)crescimento de f e o sinal de f'' com a concavidade voltada para cima/baixo.
	–	Apresentou todos os intervalos em que a concavidade é voltada para baixo; e, relacionou o sinal f' com (de)crescimento de f e o sinal de f'' com a concavidade voltada para cima/baixo.
	–	Apresentou subintervalos corretos em que a concavidade é voltada para cima e para baixo e colocou alguma constatação verdadeira sobre f' e f''.
	–	Apresentou todos os intervalos corretos em que a concavidade é voltada para cima e para baixo e não colocou alguma constatação verdadeira sobre f' e f''.
	–	Não apresentou subintervalos corretos em que a concavidade é voltada para cima e para baixo, mas relacionou o crescimento/decrescimento de f' com o sinal positivo/negativo de f''.
3	–	Apresentou todos os intervalos em que a concavidade é voltada para cima e para baixo; e, relacionou o crescimento/decrescimento de f' com a concavidade voltada para cima/baixo.
	–	Apresentou todos os intervalos em que a concavidade é voltada para cima e para baixo; e, relacionou o sinal f' com (de)crescimento de f e o sinal de f'' com a concavidade voltada para cima/baixo.
	–	Apresentou todos os intervalos em que a concavidade é voltada para cima; e, relacionou o crescimento/decrescimento de f' com o sinal positivo/negativo de f''.
	–	Apresentou todos os intervalos em que a concavidade é voltada para baixo; e, relacionou o crescimento/decrescimento de f' com o sinal positivo/negativo de f''.
4	–	Apresentou todos os intervalos em que a concavidade é voltada para cima e para baixo; e, relacionou o crescimento/decrescimento de f' com o sinal positivo/negativo de f''.

Item e

Pontos		Critério
0	–	Não respondeu.
1	–	Responder que existe assíntota, mas não identificar o tipo de assíntota nem apresentar a as equações.
2	–	Responder que existe assíntota horizontal, mas não apresentou a equação.
	–	Dizer que existe assíntota horizontal, mas apresentou equação errada.
	–	Responder que não existe assíntota vertical, mas não justificar.

3	– Responder que existe assíntota horizontal e apresentar sua equação. – Responder e justificar porque não existe assíntota vertical.
4	– Responder que existe assíntota horizontal, apresentar sua equação e provar que não existe assíntota vertical. – Responder que existe assíntota horizontal, apresentar sua equação e argumentar porque não existe assíntota vertical.

Problema 4

Pontos	**Critério**
0	– Não respondeu. – Resposta totalmente incorreta.
1	– Identificou que era se tratava da definição de limite, mas não soube responder. – Apenas apresentou algum valor para $\boldsymbol{\delta}$, escolhido arbitrariamente. – Interpretou correto geometricamente, mas não soube identificar o valor de $\boldsymbol{\delta}$. – Interpretou correto geometricamente, mas identificou errado o valor de $\boldsymbol{\delta}$.
2	– Determinou o valor de $\boldsymbol{\delta}$ resolvendo as inequações, mas cometeu algum erro de matemática básica ao aplicar propriedades.
3	– Respondeu corretamente através da interpretação geométrica. – Desenvolveu as inequações correlacionadas corretamente, mas tomou o valor errado de $\boldsymbol{\delta}$. – Desenvolveu as inequações correlacionadas corretamente, mas não finalizou a determinação do valor de $\boldsymbol{\delta}$.
4	– Encontrou corretamente o valor de delta resolvendo analiticamente as inequações.

Problema 5

Item a

Pontos		**Critério**
0	–	Não respondeu.
1	–	Atribuiu uma variável para o lado do quadrado, mas confundiu a função volume com a área da base da caixa.
	–	Identificou que o volume é calculado pelo volume de um paralelepípedo ($V = a.b.c$), mas não aplicou a fórmula às dimensões corretas.
2	–	Atribuiu uma variável para o lado do quadrado, por exemplo, x, mas usou as dimensões da base caixa como sendo $15 - x$ e $8 - x$.
3	–	Identificou corretamente as dimensões da caixa, mas ao aplicar na fórmula de volume cometeu algum erro de matemática básica ao expandir os produtos.
4	–	Encontrou corretamente a função volume.

Item b

Pontos		**Critério**
0	–	Não respondeu.
1	–	Respondeu que o domínio é qualquer número real.
2	–	Respondeu que o domínio é qualquer número real positivo.
	–	Respondeu que o domínio é qualquer número real não-negativo.
3	–	Resolveu a inequação $V \geq 0$ ou $V > 0$, mas não se preocupou com o máximo valor que x pode assumir para que seja possível recortar os quadrados.
	–	Respondeu corretamente, sem justificativas.
4	–	Respondeu corretamente, resolvendo a inequação $V \geq 0$ ou $V > 0$ e se preocupou com o máximo valor que x pode assumir para que seja possível recortar os quadrados.
	–	Respondeu corretamente, argumentando que se $x > 4$ não será possível recortar quatro quadrados dos cantos das folhas devido as suas dimensões.

Item c

Pontos		**Critério**
0	–	Não respondeu.
1	–	Esboçou o gráfico, sem teoria de derivadas, considerando como domínio o conjunto dos números reais.
	–	Aplicou a teoria de derivadas a função volume obtida errada, mas não construiu o gráfico.

2	–	Esboçou o gráfico, sem teoria de derivadas, considerando como domínio o conjunto dos números reais não negativos.
	–	Usou teoria de derivada para construir o gráfico, mas cometeu algum erro ao determinar ponto(s) crítico(s).
3	–	Esboçou o gráfico, sem teoria de derivadas, apenas para $x \in (0,4)$.
	–	Usou teoria de derivadas para construir corretamente o gráfico da função volume, mas não estudou a concavidade.
	–	Usou teoria de derivadas para construir o gráfico, encontrou pontos críticos, mas cometeu algum erro ao analisar os valores extremos da função.
4	–	Usou teoria de derivadas para construir corretamente o gráfico da função volume.

Item d

Pontos		Critério
0	–	Não respondeu.
	–	Resposta incorreta.
1	–	Respondeu que o máximo ocorre no "vértice da parábola".
	–	Encontrou os pontos críticos e, sem argumentar teoricamente, apresentou uma reposta errada.
2	–	Usou análise gráfica do item anterior para apresentar um valor aproximado e/ou intervalo "aproximado" que contém o valor máximo.
3	–	Usou o teste da primeira ou segunda derivada para encontrar o valor extremo relativo, mas afirmar que é absoluto, sem provar.
4	–	Usou o teste da primeira ou segunda derivada para encontrar o valor extremo relativo e o teorema de Weierstrass para determinar o extremo absoluto;
	–	Usou o teste da primeira ou segunda derivada para encontrar o valor extremo relativo e utilizou o cálculo do limite nos extremos do intervalo aberto (0,4) para justificar que o máximo relativo também é absoluto.

Problema 6

Itens “a”, “b” e “c”

Pontos	Critério
0	– Não respondeu.
1	– Errou a definição de velocidade média. Calculou $\frac{\Delta t}{\Delta s}$.
2	– Determinou as variações de tempo e espaço, mas não calculou a velocidade média. – Apresentou a resposta correta, mas não mostrou nenhum cálculo.
3	– Determinou as variações de tempo e espaço, mas errou contas ao determinar a velocidade média.
4	– Determinou corretamente a velocidade média.

Item d

Pontos	Critério
0	– Não respondeu. – Resposta totalmente errada.
1	– Respondeu que a velocidade é 192 cm/s (ou valores próximos), mas não apresentou justificativas.
2	– Respondeu que a velocidade instantânea é o limite da velocidade média, mas não apresentou a resposta em $t = 2s$. – Respondeu que a velocidade instantânea é igual a derivada da função posição resposta em $t = 2s$, mas não apresentou a resposta.
3	– Tomou ao menos um valor de t próximo de 2 para concluir que a velocidade é 192 cm/s .
4	– Tomou vários valores de t próximos de 2 de forma que $\Delta t \longrightarrow 0$ intuir que a velocidade instantânea é 192 cm/s . – Respondeu que a velocidade instantânea é o limite da velocidade média e apresentou a resposta correta em $t = 2s$. – Respondeu que a velocidade instantânea é igual a derivada da função posição resposta em $t = 2s$ e apresentou a resposta.

Anexo 5

Termo de Consentimento e Livre Esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa, inserida na pesquisa de doutoramento em Ciência da Educação, especialidade Educação Matemática, do Instituto de Educação da Universidade do Minho (Portugal), intitulada "*Investigações Matemáticas e Resolução de Problemas aplicada ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral*" da professora-pesquisadora Eliane Bihuna de Azevedo, respondendo atividades que serão propostas com o objetivo de desenvolver estratégias para trabalhar com conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral por meio da metodologia de Resolução de Problemas. A sua identidade será preservada, pois cada indivíduo será identificado por um número. Os benefícios e vantagens em participar desta pesquisa serão que os dados oriundos dela poderão substanciar ações de melhorias no processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

As pessoas que estarão acompanhando o desenvolvimento desta pesquisa serão os professores Dr. Pedro Manuel Baptista Palhares (UMinho) e Dra. Elisandra Bar de Figueiredo (UDESC).

Você poderá se retirar do estudo a qualquer momento.

Solicitamos a sua autorização para o uso das respostas das atividades realizadas nessa pesquisa para a produção da tese de doutorado, de relatórios, de artigos técnicos e científicos. A sua privacidade será mantida por meio da não identificação do seu nome.

Agradecemos a sua participação e colaboração.
PESSOA PARA CONTATO:
Profa. Ma Eliane Bihuna de Azevedo
NÚMERO DO TELEFONE: 3481-7956
Profa. Dra Elisandra Bar de Figueiredo
NÚMERO DO TELEFONE: 3481-7665
ENDEREÇO: Centro de Ciências Tecnológicas - CCT / Rua Paulo Malschitzki, 200 - Campus Universitário Prof. Avelino Marcante - Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC - Brasil - CEP: 89.219-710

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto. Declaro que fui informado que posso me retirar do estudo a qualquer momento.

	Nome (em letra de forma)	Assinatura	Curso	Data
1				
2				
3				
4				
5				

Anexo 6

Tarefas de I a IV realizadas no primeiro semestre letivo de 2016

TAREFA I - Parte 1

Acadêmicos: ____Data:___________

1. Liste os elementos dos conjuntos dados que são números: naturais, inteiros, racionais, irracionais.
   (a) $A = \left\{0; -10; 50; \frac{22}{7}; 0{,}538; \sqrt{7}; -\frac{1}{3}; \sqrt[3]{2}\right\}$
   (b) $B = \left\{1{,}001; 0{,}333\ldots; -\pi; -11; 11; \frac{13}{15}; \sqrt{16}; 3{,}14; \frac{15}{3}\right\}$

2. A respeito dos conjuntos numéricos, comente as afirmativas abaixo:
   (a) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Z}$
   (b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_+$
   (c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
   (d) $\mathbb{N}^* \not\subset \mathbb{R}$
   (e) $\mathbb{Z} \supset \mathbb{Q}$
   (f) $\mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}_+$

TAREFA I - Parte 2

Acadêmicos: ____ Data:___________

1. A relação entre temperatura em graus Celsius (°C) e a temperatura em graus Fahrenheit (°F) é dada pela fórmula

$$C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

(a) Se durante o mês de janeiro as temperaturas em Montreal variam entre $-15° < ℃ < -5°$, encontre a variação em graus Farenheit para o mesmo período. Esboce sua solução em um intervalo.

(b) Se durante o mês de junho as temperaturas na cidade de Nova York variam entre $63° < ℉ < 80°$, encontre a variação em graus Celsius para o mesmo período. Esboce sua solução em um intervalo.

2. Expresse o intervalo dado na forma de desigualdades e esboce-o como um subconjunto de $\mathbb{R}$
   (a) $(-3, 3)$
   (b) $[2, 8)$
   (c) $(-3,2]$
   (d) $[2, +\infty)$
   (e) $(-\infty, 1)$

TAREFA I - Parte 3

Acadêmicos: ____ Data:__________

3. Uma companhia telefônica oferece dois planos para ligações de longa distância:

   - Plano A: 25 reais por mês e 5 centavos por minuto;
   - Plano B: 5 reais por mês e 12 centavos por minuto.

   Para quantos minutos de chamadas de longa distância o plano *B* é mais vantajoso financeiramente que o plano *A*? Justifique.

4. Um grupo de estudantes resolveu assistir a um concerto. O custo de contratar um ônibus para levá-los ao concerto é de R$ 450,00 que deverá ser dividido igualmente entre todos os estudantes. Os organizadores darão desconto a grupos que chegarem de ônibus. Os bilhetes custam, em geral, R$ 50,00 para cada um, porém reduz-se R$ 0,10 do preço para cada pessoa que chegar em grupo (até a capacidade máxima do ônibus). Quantos estudantes dever ter o grupo para que o custo total por estudante seja menor do que R$ 54,00?

TAREFA II

Parte 1: Investigação Preliminar

Fonte: Adaptada de *Sequence limits in calculus: using design research and building on intuition to support instruction* (DUCA, HALL, KEENE, 2014).

Nomes:____Turma:________________

1. Quando você ouve a palavra "limite" o que você entende?

2. Escreva duas sentenças diferentes, utilizando a palavra "limite".

3. Você sabe de alguma utilização matemática para a palavra "limite"? Se sim, descreva o que você sabe. Como é semelhante ou diferente do que você respondeu na questão 1?

4. Mesmo se você não estiver familiarizado com a notação, considere a seguinte expressão:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = L$$

Tente descrever o que ela significa.

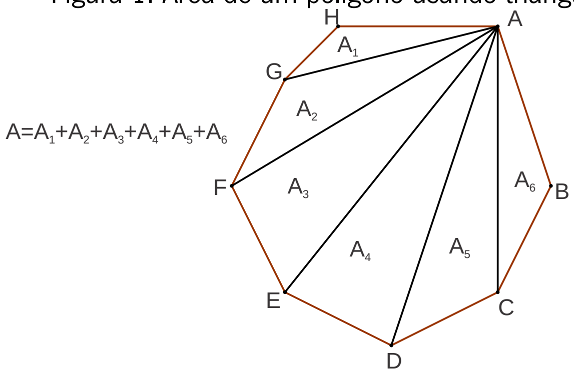
5. Como você poderia resolver a expressão dada na questão 4?

TAREFA II - Parte 2

Nomes:____Turma:___________________

As origens do cálculo remontam à Grécia Antiga, pelo menos 2500 anos atrás. Naquela época, os gregos já sabiam encontrar a área A de qualquer polígono dividindo-o em triângulos, como na Figura 1 abaixo e, em seguida, somando as áreas obtidas.

Figura 1: Área de um polígono usando triângulos

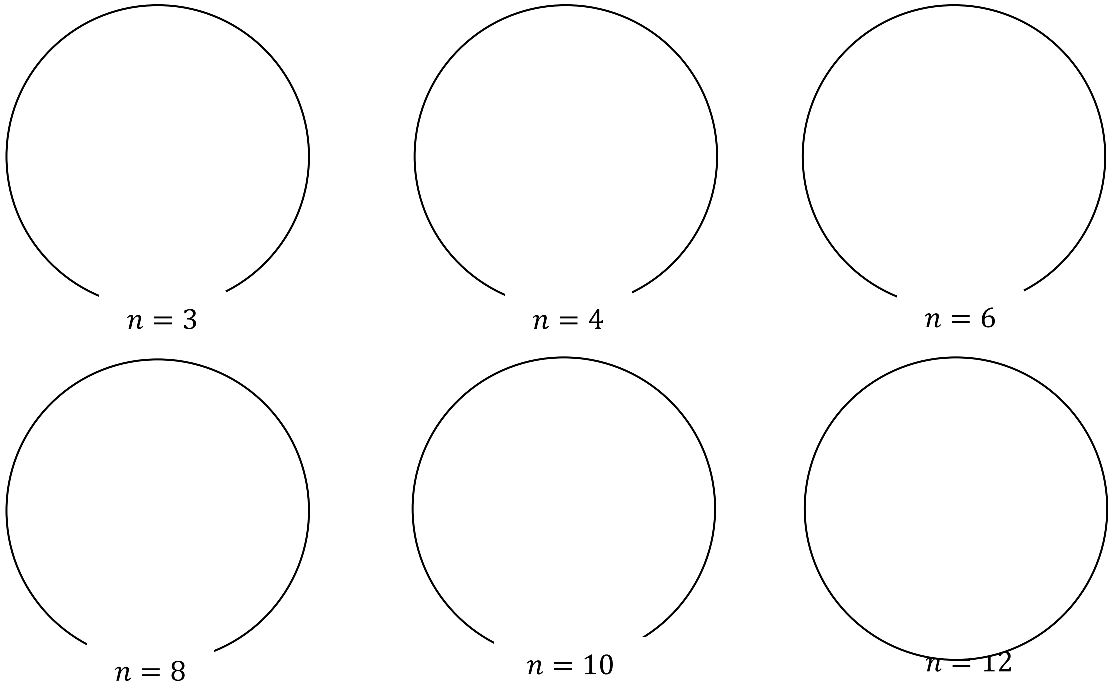


Fonte: Adaptada de Stewart, p. 3, 2009.

Entretanto, é muito mais difícil determinar a área de uma figura curva. O método da exaustão dos antigos gregos consistia em inscrever e circunscrever a figura com uma sequência de polígonos, aumentando-se o número de lados desses polígonos.

Assim, utilizando esse método, inscreva nos círculos abaixo (Figura 2), os polígonos de acordo com o número n solicitado ($n =$ quantidade de lados do polígono):

Figura 2: Circunferências para construção dos polígonos inscritos



Fonte: Própria autora.

Responda:

1. Seja A_n a área do polígono inscrito com n lados, o que acontece com a área à medida que aumentamos n ?

____
____
____

2. Para encontrar a melhor aproximação para a área do círculo é suficiente apenas aumentar a quantidade dos lados do polígono? Justifique.

____
____
____

TAREFA II

Parte 3: Ideia intuitiva de limite

Nomes:____Turma:________________

1. Um projétil é arremessado verticalmente de uma altura s_0, dada em metros, com uma velocidade inicial v_0, dada em m/s, Sabe-se que a trajetória descrita é uma parábola representada pela função $s(t) = -t2 + v_0 t + s_0$

a. Sabendo que um projétil é lançado do solo (e portanto $s_0=0$,) e que leva 6 segundos para voltar a atingir o solo, use a equação acima para determinar sua velocidade inicial.

b. Examine o comportamento da função quando o tempo se aproxima de 3.

c. Desenhe o gráfico da função $\boldsymbol{s(t)}$ (se for necessário utilize o verso desta folha).

2. Considere a função $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. O que acontece com os valores de f quando x está próximo de 2? Desenhe o gráfico da função $f(x)$.

TAREFA II

Parte 4: Perspectiva salarial

Fonte: Adaptada de *A abordagem do conceito de limite via sequência didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional* (ZUCHI, 2005).

Nomes:____Turma:___________

1. O salário dos funcionários de uma empresa é composto de uma parte fixa no valor de R$ 900,00, acrescidos de mais uma parte variável (comissão) de 10% sobre o valor de suas vendas no mês.

Responda:

a. Se um funcionário recebeu o pagamento de R$ 1400,00, qual foi o valor adquirido com as vendas desse empregado?

b. Suponha que esse mesmo funcionário deseja receber no mês seguinte um salário entre R$ 1200,00 e R$ 1600,00, qual será o valor que deverá arrecadar com suas vendas?

c. Refaça a questão (b) supondo que este funcionário planeja receber, no mês seguinte, o pagamento no intervalo de R$ 1300,00 à R$ 1500,00.

d. Represente graficamente as situações dos itens (a, b,c) e responda: O que acontece com a variação do valor arrecadado dos projetos quando o pagamento está numa faixa cada vez mais estreita em torno de R$ 1400,00?

e. Agora, suponha que esse funcionário deseje receber mensalmente, em torno de R$ 1400,00 com um erro muito pequeno, que você pode denotar por $\boldsymbol{\varepsilon}$. Qual a relação entre o erro e a variação em torno da resposta encontrada na letra (a)? Você pode denotar a variação do valor das vendas dos projetos por $\boldsymbol{\delta}$.

TAREFA III – Parte 1

Acadêmico(a)/Grupo:____

Turma: ____

As atividades que serão propostas foram extraídas e/ou adaptadas da dissertação de mestrado de Andrea Abdelmalack (2011) intitulada "O ensino-aprendizagem-avaliação de derivada para o curso de Engenharia através da Resolução de Problemas"

1. Um corpo inicia um movimento em linha reta e sua posição é dada conforme a Tabela 1. Com base nas informações da Tabela 1, preencha a Tabela 2 com o número correspondente a quantos quilômetros o corpo andou, em média, a cada hora.

Tabela 1 - Posição

Tempo (h)	Posição (km)
0	0
1	25
2	60
3	90
4	140
5	165

5. 2 – Deslocamento médio

Tempo (h)	Deslocamento médio por horam (km/h)
1	
2	
3	
4	
5	

2. Ao calcular os valores da 2ª coluna da Tabela 2, foi realizado o quociente entre a distância total percorrida pelo corpo pelo número de horas utilizadas nesse deslocamento. Se S é o espaço percorrido e t é o tempo, então ΔS e Δt representam, respectivamente, a variação do espaço percorrido e do tempo gasto. A esse quociente chamamos de *velocidade média*, que é denotada e definida por $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$. Use a Tabela 1 para calcular a velocidade média entre os instantes:

a. $t = 1$ e $t = 5$;

b. $t = 2$ e $t = 5$;

c. $t = 3$ e $t = 5$;

d. $t = 4$ e $t = 5$.

3. Considere que o instante inicial $t_0 = 5s$ e que o tempo final $t_f = t_0 + \Delta t$ são os valores fornecidos na Tabela 3. Determine a velocidade média para os intervalos de tempo cada vez menores, conforme indicados na Tabela 3.

Tabela 3 – Velocidade média para pequenas variações no tempo

$\boldsymbol{t_f}$	$\boldsymbol{\Delta t}$	$\boldsymbol{\Delta S}$	$\boldsymbol{v_m}$
6		5	
5.5		2.25	
5.1		0.41	
5.05		0.2025	
5.02		0.0804	
5.01		0.0401	

A seguir, responda:

a. O que você pôde observar com relação aos valores $\boldsymbol{\Delta t}$?

b. Qual o valor que você acredita que seja a velocidade no instante $\boldsymbol{t = 5s}$? Por quê?

c. Se quisermos calcular a velocidade do corpo em um determinado instante de tempo t qualquer como você acha que poderíamos fazer?

4. Considere que a posição (em metros) de um corpo em função do tempo (em segundos) é dada por $S(t) = 1 + 5t - 2t^2$.

a. Considerando que $t_0 = 2s$, preencha a Tabela 4 para determinar a velocidade média do corpo no intervalo Δt.

Tabela 4

$\boldsymbol{t_0 + \Delta t}$	$\boldsymbol{\Delta t}$	$\boldsymbol{S(t_0 + \Delta t)}$	$\boldsymbol{\Delta S}$= $\boldsymbol{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}$	$\boldsymbol{v_m}$
2,5				
2,25				
2,12				
2,06				
2,03				
2,01				

b. Qual é o valor que você julga ter a velocidade no instante $\boldsymbol{t = 2s}$? Por quê?

c. E se você utilizasse o processo algébrico, o que encontraria por velocidade em $\boldsymbol{t = t_0}$?

TAREFA III – Parte 2

Acadêmico(a)/Grupo:____

Turma: ____

1. A derivada de uma função $f(x)$ no ponto cuja abscissa é x_0 é definida como o limite da taxa média de variação, ou seja,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Complete a Tabela 5, considerando que $f(x) = x^2$ e que $x_0 = 2$.

$x_0 + \Delta x$	Δx	$f(x_0 + \Delta x)$	$f(x_0)$	Δf	$\Delta f \ / \ \Delta x$
2,5					
2,1					
2,01					
2,001					

a. Observando os valores calculados na Tabela 5, o que você acha que ocorre com a derivada de f quando $x_0 = 2$? Em outras palavras, qual é o valor de $f'(2)$?
b. E se você utilizasse o processo algébrico, o que encontraria por $f'(x_0)$?

2. Seja *C* o gráfico da função $f(x) = x^2$. Determine o coeficiente angular da reta secante a *C* que passa pelos pontos:

a. $P(2,4)$ e $Q(0,0)$;
b. $P(2,4)$ e $Q(1,1)$;
c. $P(2,4)$ e $Q\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$;
d. $P(2,4)$ e $Q(1,9; 3,61)$;
e. $P(2,4)$ e $Q(x_0, x_0^2)$.

A seguir responda: qual é o valor do coeficiente angular da reta tangente a *C* no ponto *P*? Por quê?

TAREFA IV

Roteiro de Aula

Assunto do Cálculo: Otimização.

Assunto: Otimização.

Objetivos da prática: aplicar a teoria de derivadas para a determinação de pontos extremos absolutos.

Conteúdos abordados: pontos críticos, crescimento/decrescimento de uma função, teorema de Weiestrass, critérios da primeira e/ou segunda derivada.

Recursos utilizados: papel, fita adesiva, algum grão (por exemplo: feijão), quadro e giz.

Metodologia: resolução de problemas.

Sequência Didática:

1. Formar grupos de três ou quatro alunos.
2. Entregar aos grupos uma folha retangular de papel, durex e tesoura.
3. Solicitar que seja construído um cilindro circular reto de tal forma que não haja sobreposição de material (de papel) e que não seja recortado nenhum pedaço da folha.
4. Enquanto os grupos discutem como constroem o cilindro solicitado, o professor observará os trabalhos que estão sendo realizados e auxiliará os estudantes, mas não respondendo diretamente dizendo sim/não ao questionando. O professor deve instigar que os integrantes do próprio grupo se ajudem. Se não conseguirem, o professor pode induzir ao caminho "correto" por meio de outros questionamentos aos alunos.
5. Após as equipes terem confeccionados seus cilindros, fazer uma discussão a respeito de qual dos cilindros construídos pelas equipes possui maior volume. Nesse momento espera-se que as equipes tenham construído cilindros de dois tamanhos, pois existem duas possibilidades, como ilustradas nas Figuras 1 e 2.

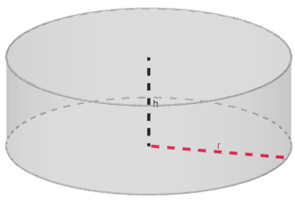


Figura 1

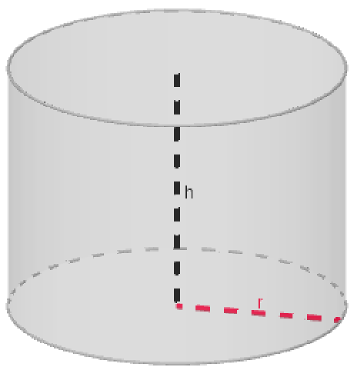


Figura 2

Fonte: http://ggbm.at/UZPqWjRn. Acesso em: 31/05/2016

6. Questionar a turma qual eles julgam possuir maior volume.
7. Para que a turma possa chegar num consenso sobre a resposta correta, solicitar emprestado dois cilindros (um como da Figura 1 outra como da Figura 2). Colocar em um recipiente (caixa de papelão, por exemplo) o cilindro de maior altura dentro de cilindro de menor altura. Em seguida, encher totalmente o cilindro mais alto com o feijão. Depois, retirar o cilindro de maior altura, assim todo o conteúdo dele caíra dentro do outro e ainda não o encherá totalmente. Dessa forma, os alunos concluíram que o cilindro de maior área é o de menor altura.
8. Generalizar, ou seja, considerar que a folha de papel possui dimensões a e b, com 0<a<b e fazer a proporção entre os dois cilindros, como ilustrado na Figura 3.

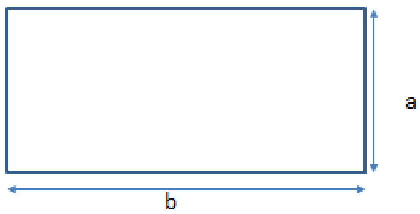


Figura 3
Fonte: Criação própria

Como a base do cilindro é uma circunferência, então $b = 2\pi r$ ou $a = 2\pi r$.
Se $b = 2\pi r$ e a altura é *a* então o volume do cilindro de maior raio é

$$V_A = \pi \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 a = \frac{ab^2}{4}.$$

Se $a = 2\pi r$ e a altura é *b* então o volume do cilindro de maior raio é

$$V_B = \pi \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 a = \frac{a^2 b}{4}.$$

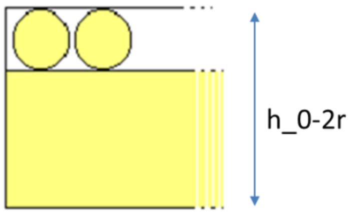
Comparando os volumes, tem-se que:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{ab^2}{4}}{\frac{a^2 b}{4}} = \frac{b}{a} > 1,$$ pois $0<a<b$.

Logo, o cilindro de maior volume é o que possui maior raio. Ao analisar a fórmula do volume do cilindro conclui-se que para $r>1$, o valor do raio afeta diretamente o volume do cilindro, pois ele é elevado ao quadrado.

9. Após toda essa discussão pode ser proposto o seguinte problema: Determine as dimensões do cilindro circular reto de volume máximo que pode ser construído com folha de papel dada (conforme Figura 3).
10. Deixar as equipes tentarem resolver o problema.
11. Corrigir no quadro (representantes das equipes podem colocar as resoluções no quadro)
12. O professor mediar a discussão para saber se houve consenso na resposta.
13. Resolução que pode ser proposta pelo professor, caso não tenham chegando em um consenso da resposta correta.

Interpretação geométrica:



Fonte: Criação própria

Obs: A resolução dada na próxima Figura foi feita no Scientific Work Place, por ser mais rápida a digitação.

O volume de um cilindro é: $V = \pi r^2 h$
Note que: $h = h_0 - 2r$
Substituindo na equação anterior: $V = \pi r^2 (h_0 - 2r)$
Observe que: $r \in \left[0, \frac{h_0}{2}\right]$
Encontrando os pontos críticos: $V'(r) = \frac{d}{dr}\left(\pi r^2 (h_0 - 2r)\right) = 2\pi r (h_0 - 3r)$
$V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 0$ ou $r = \frac{h_0}{3}$
Como $0 \notin \left(0, \frac{h_0}{2}\right)$, então o único ponto crítico é $r = \frac{h_0}{3}$.
Aplicando o teste da segunda derivada:
$V''(r) = \frac{d^2}{dr^2}\left(\pi r^2 (h_0 - 2r)\right) = 2\pi (h_0 - 6r)$
$V''\left(\frac{h_0}{3}\right) = 2\pi \left(h_0 - 6\frac{h_0}{3}\right) = -2\pi h_0 < 0$
Logo, o $r = \frac{h_0}{3}$ é o raio do cilindro de volume máximo.

14. Após a determinação do raio máximo, basta utilizar o conhecimento de que o cilindro de volume máximo confeccionado com uma folha de papel de dimensões como da Figura 3, ou seja, é o que possui maior raio. Logo, basta substituir $\boldsymbol{h_0}$ pelo valor de *b*.

Avaliação: observação da participação dos grupos na interação com os membros da equipe e nas discussões com a classe toda. Ainda, serão propostos como exercícios mais alguns problemas envolvendo otimização. Mas, provavelmente serão resolvidos em horário extraclasse, pois essa atividade deve ocupar 2h/a.

Referênciais:

Apostila de Cálculo Diferencial e Integral I. Disponível em http://www.joinville.udesc.br/portal/professores/eliane/materiais/ApostilaCDI_2015_1.pdf . Departamento de Matemática, CCT/Udesc, Joinville.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Sthephen. Cálculo. Porto Alegre: Bookman, vol. 1, 10ª ed., 2014.

ONUCHIC, Lourde de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Höper; JUSTULIN, Andressa Maria. Resolução de Problemas: teoria e prática. Paco Editorial, Jundiaí/SP, 2014.

Anexo 7

Tarefas de I’ a IV’ realizadas no segundo semestre letivo de 2016

TAREFA I'

Acadêmicos: ____	Data:__________
Obs: Atividades de 1 a 6 extraídas/adaptadas da tese de Noguti (2014).	

1. Liste os elementos dos conjuntos dados quais são números naturais, inteiros, racionais e irracionais.

   (a) $A = \left\{0;\ -10;\ 50;\ \frac{22}{7};\ 0{,}538;\ \sqrt{7};\ -\frac{1}{3};\ \sqrt[3]{2}\right\}$

Naturais:
Inteiros:
Racionais:
Irracionais:

   (b) $B = \left\{1{,}001;\ 0{,}333\ldots;\ -\pi;\ -11;\ 11;\ \frac{13}{15};\ \sqrt{16};\ 3{,}14;\ \frac{15}{3};\ e\right\}$

Naturais:
Inteiros:
Racionais:
Irracionais:

2. Usando seu conhecimento a respeito dos conjuntos numéricos, argumento sobre a veracidade (ou não) das afirmativas abaixo:

   (a) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Z}$
   (b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_+$
   (c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
   (d) $\mathbb{N}^* \not\subset \mathbb{R}$
   (e) $\mathbb{Z} \supset \mathbb{Q}$
   (f) $\mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}_+$

3. Estima-se que o custo anual para manter um certo automóvel novo possa ser obtido pela expressão

$$C(m) = 0{,}35m + 2200,$$

onde m representa a quantidade de milhas percorridas ao ano e C é o custo em dólares. Jane comprou um desses veículos e decidiu poupar para o próximo ano um valor entre $\text{U\$ } 6.400{,}00$ e $\text{U\$ } 7.100{,}00$ para os custos de manutenção, quantas milhas poderá percorrer com seu automóvel?

4. Expresse cada um dos intervalos dados na forma de conjuntos, considerando os números reais como conjunto universo, classifique-os (como finito, infinito, fechado, aberto, fechado...) e represente-os graficamente.
   (a) $(-3, 3)$
   (b) $[2, 8)$
   (c) $(-3{,}2]$
   (d) $[2, +\infty)$
   (e) $(-\infty, 1)$

5. Uma companhia telefônica oferece dois planos para ligações de longa distância:

Plano A: 25 reais por mês e 5 centavos por minuto;
Plano B: 5 reais por mês e 12 centavos por minuto.

Para quantos minutos de chamadas de longa distância o plano *B* é mais vantajoso financeiramente que o plano *A*? Justifique.

6. Um grupo de estudantes resolveu assistir a um jogo de futebol. O custo de contratar um ônibus para levá-los ao estádio em que será realizada a partida de futebol será de R$ 450,00 que deverá ser dividido igualmente entre todos os estudantes. Os organizadores darão desconto a grupos que chegarem de ônibus. Sabendo que as entradas custam, em geral, R$ 50,00 para cada um, porém reduz-se R$ 0,10 do preço para cada pessoa que chegar em grupo (até a capacidade máxima do ônibus), quantos estudantes deverá ter o grupo para que o custo total por estudante seja no máximo R$ 54,00?

TAREFA II’

Acadêmicos: ______________________________	Data:__________

1. Qual a distância entre os números -9 e 5? Qual a distância entre os números -5 e 9? Justifique sua resposta.

2. Obtenha o conjunto solução das seguintes equações:

a. $|3x - 2| + 4x - 3 = 0$

b. $|1 - x| + 2|x + 3| = 8x$

TAREFA III' – Parte 1

Acadêmicos: ______________________________	Data: __________

1. Para você, o que é uma função?

____

____

____

2. Dê ao menos um exemplo prático que envolve função.

____

____

____

3. (ANTON, 2014, p.13) Um bote balança para cima e para baixo sob a ação de ondas fracas. De repente, é atingido por uma onda grande e afunda. Esboce um gráfico aproximado da altura do bote acima do fundo do mar como uma função do tempo.

4. (STEWART, 2009, p.13) Um homem apara seu gramado toda quarta-feira à tarde. Esboce um gráfico da altura da grama como uma função do tempo no decorrer de um período de quatro semanas.

5. A Tabela 1 apresenta o comportamento da chuva e da temperatura ao longo do ano na cidade de Joinville. As médias climatológicas são valores calculados a partir de uma série de dados de 30 anos observados.

Tabela 1 – Temperaturas na cidade de Joinville

Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Mínima (ºC)	20	20	19	17	14	13	12	13	14	12	17	18
Máxima (ºC)	26	26	26	24	20	20	19	20	20	22	23	25
Precipitação (mm)	312	259	225	136	125	100	127	171	171	184	180	198

Fonte: http://www.climatempo.com.br/climatologia/381/joinville-sc. Acesso em: 12/07/2016

a. Construa um gráfico que representa a média aritmética entre as temperaturas máximas e mínimas de Joinville ao longo do ano.

b. Qual a estação do ano mais chuvosa em Joinville? Essa constatação está de acordo com o que você conhece sobre sua experiência de vida em Joinville?

6. A Tabela 2 apresenta a previsão da temperatura para a cidade de Joinville para o dia 12 de julho de 2016.

Tabela 2 – Previsão do tempo

Hora	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Temperatura (ºC)	17	18	17	16	17	19	23	25	23	21	19	18

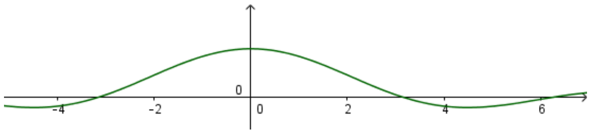
Fonte:http://www.accuweather.com/pt/br/joinville/35958/hourly-weather-forecast/35958?hour=16 Acesso em: 12/07/2016.

a. Construa um gráfico que representa a temperatura em função do horário.

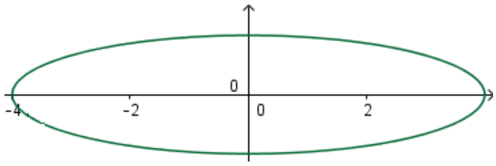
b. Existe alguma diferença com relação ao domínio da função temperatura deste exercício com relação ao exercício anterior? Argumente sua resposta.

7. Quais das imagens (de autoria própria) apresentadas a seguir, você julga que representa(m) o gráfico de uma função de x em função de y, cujos valores são apresentados respectivamente, no eixo horizontal e vertical.

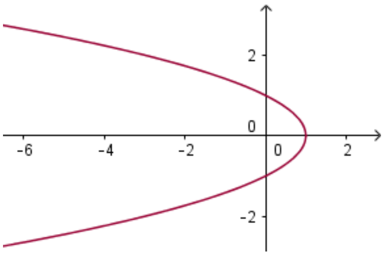
a.



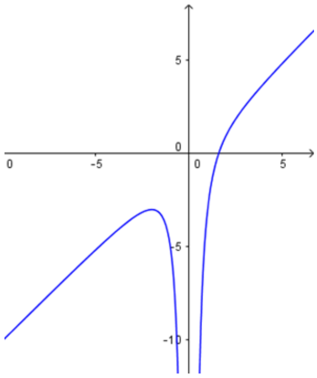
b.



c.

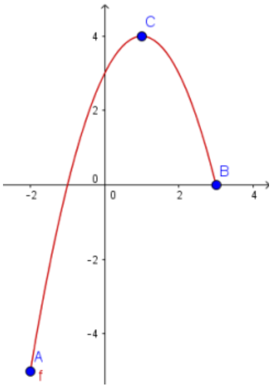


d.

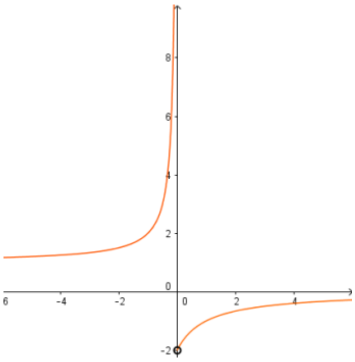


8. Determine o conjunto que representa o domínio e a imagem das funções ilustradas a seguir.

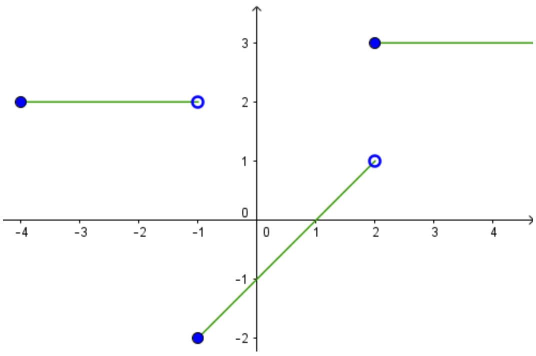
a.



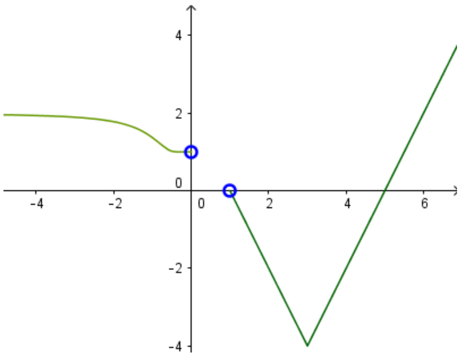
b.



c.



d.



TAREFA III' – Parte 2

1. (Adaptado de ADAMI; DORNELES filho; LORANDI, 2015, p. 53) André é um vendedor e recebe um salário mensal de R$ 1.000,00 mais uma comissão de 8% sobre o valor total de vendas que ele realiza durante o mês.
   a. Determine quanto André deve vender para que receba um salário mensal de pelo menos R$ 1.500,00.

   b. André recebeu a proposta de um novo emprego de vendedor em uma loja concorrente, cujo salário seria R$ 1.150,00 mais 6% de comissão sobre as vendas realizadas. Supondo que André venda mensalmente ao menos R$ 5.000,00 (independentemente da loja que esteja trabalhando), é aconselhável ele mudar de emprego? Justifique.

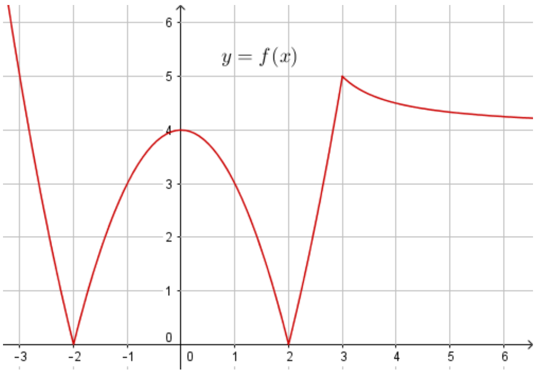
2. (Adaptado de NOGUTI, 2014) Em certo país, as pessoas maiores de 21 anos pagam um imposto progressivo sobre os rendimentos. Esse imposto corresponde a 10% sobre as primeiras 1.000 unidades monetárias recebidas e 20% sobre os ganhos que ultrapassam esse valor. Nessas condições, escreva a forma geral (a função) para o cálculo do imposto. Se um habitante, nesse país, recebe um salário de 2.500 unidades monetárias, quanto esse indivíduo paga de imposto por cada mês de salário recebido?

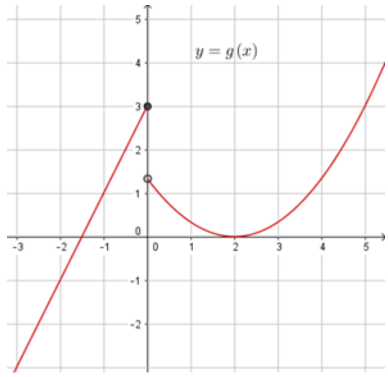
TAREFA III' – Parte 3

1. (ANTON, 2014, p.64) Complete a tabela 3:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	-1	2	1	3	-2	-3	4	-4
$g(x)$	3	2	1	-3	-1	-4	4	-2	0
$(f \circ g)(x)$									
$(g \circ f)(x)$									

2. Considere as funções f e g funções cujos gráficos estão ilustrados abaixo.





Com base nesses gráficos, obtenha:

a. $(f \circ g)(2)$

b. $(g \circ f)(-3)$

c. $(f \circ g \circ f)(-2)$

d. $g\big((f \circ g)(-2) - 6\big)$

3. Na Figura 1 está ilustrado o gráfico da função $y = f(x)$ para todo $x > 0$

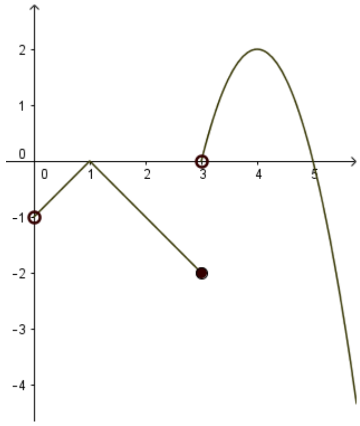


Figura 1
Fonte: Autoria própria

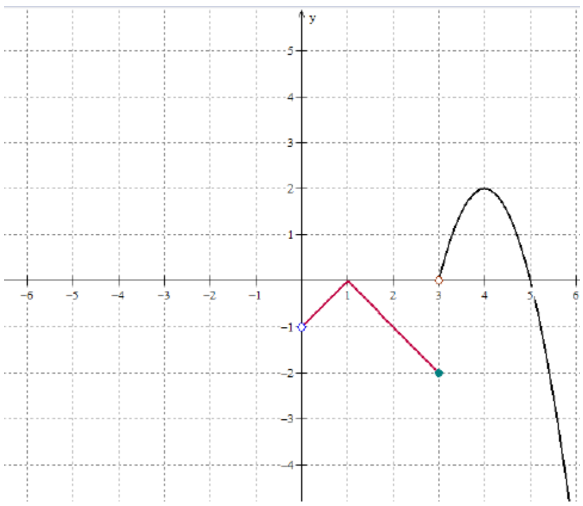
a. Encontre a expressão analítica que define a função $y = f(x)$.

b. Construa, no quadriculado abaixo, o gráfico de $y = f(x)$ para $x \in \mathbb{R}^*$ de forma que:

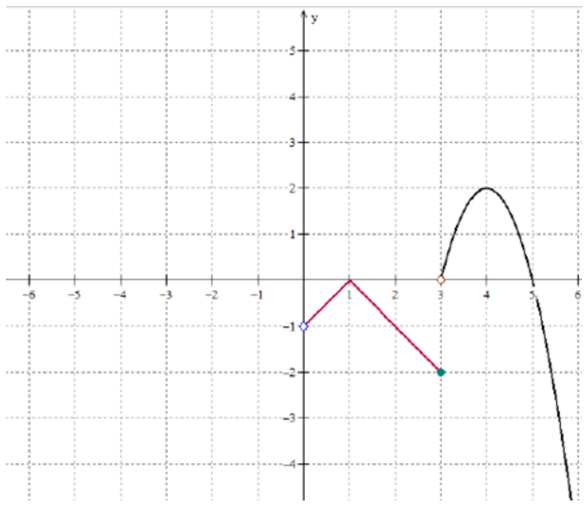
i. f seja uma função par, ou seja, simétrica com relação ao eixo das ordenadas;

ii. f seja uma função ímpar, ou seja, simétrica com relação à origem

Solução do item b. i:



Solução do item b. ii:



4. (Adaptado de ANTON, 2014, p.63) Uma caixa fechada deve ser construída com pedaço de papelão retangular com $180\ cm$ por $300\ cm$, cortando fora quatro quadrados de mesmo tamanho conforme ilustrado na Figura 2, dobrando ao longo das retas tracejadas e encaixando para dentro as duas abas da tampa

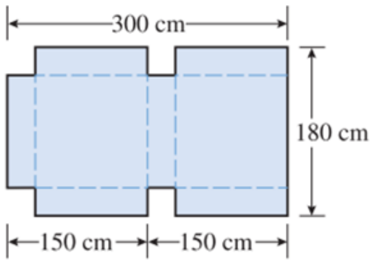


Figura 2
Fonte: ANTON, 2014, p.14

a. Qual é a expressão analítica que representa o volume dessa caixa como função do comprimento dos lados dos quadrados?
b. Qual é o domínio da função obtida no item "a"?
c. Esboce o gráfico da função que representa o volume utilizando algum software gráfico (ex. GeoGebra, Winplot).
d. Descreva em palavras qual deveria ser a medida do lado do quadrado recortado para que o volume da caixa fosse o maior possível?

TAREFA IV' – Parte I

Acadêmicos: ____ Data:___________

Atividades extraídas/adaptadas SABATKE (2016), ANTON (2014) e ABDELMALACK(2011)

1. Quando você ouve a palavra "limite" o que você entende?

____

____

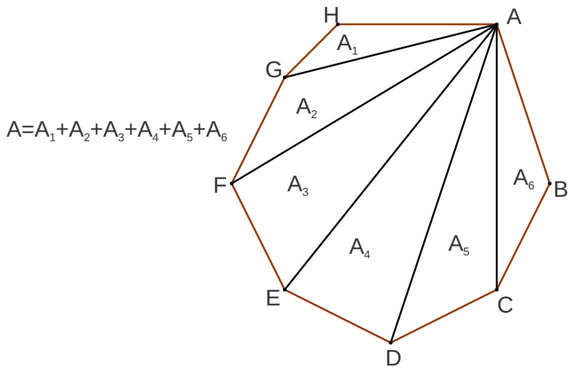
2. Escreva uma ou mais sentenças, utilizando a palavra "limite".

____

____

As origens do cálculo remontam à Grécia Antiga, pelo menos 2500 anos atrás. Naquela época, os gregos já sabiam encontrar a área A de qualquer polígono dividindo-o em triângulos, como na Figura 1 abaixo e, em seguida, somando as áreas obtidas.

Figura 1: Área de um polígono usando triângulos

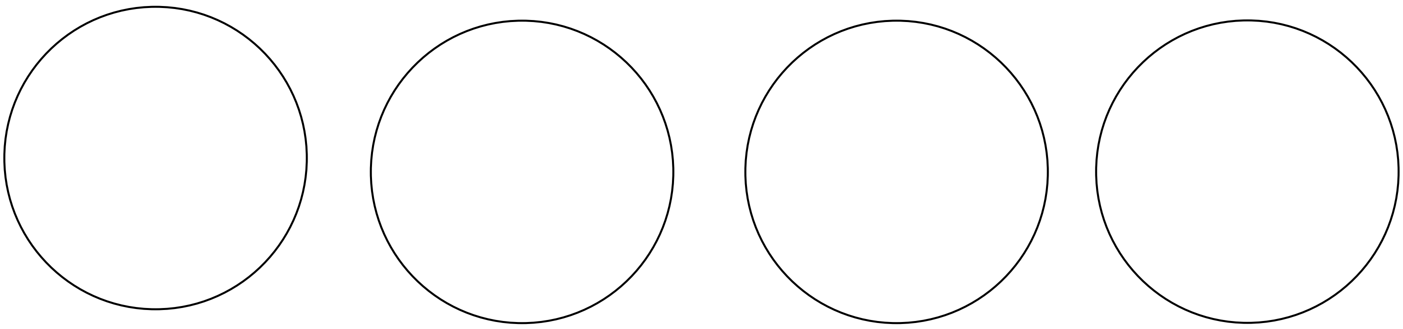


Fonte: Adaptada de Stewart, p. 3, 2009.

Entretanto, é muito mais difícil determinar a área de uma figura curva. O método da exaustão dos antigos gregos consistia em inscrever e circunscrever a figura com uma sequência de polígonos, aumentando-se o número de lados desses polígonos.

Assim, utilizando esse método, inscreva nos círculos abaixo (Figura 2), os polígonos de acordo com o número $\boldsymbol{n}$ solicitado ($\boldsymbol{n} =$ quantidade de lados do polígono):

Figura 2: Circunferências para construção dos polígonos inscritos



$n = 3$ $n = 4$ $n = 6$ $n = 8$

Responda:

1. Seja A_n a área do polígono inscrito com $\boldsymbol{n}$ lados, o que acontece com a área à medida que aumentamos $\boldsymbol{n}$?

____

____

____

2. Para encontrar a melhor aproximação para a área do círculo é suficiente apenas aumentar a quantidade dos lados do polígono? Justifique.

____

____

____

3. Um projétil é arremessado verticalmente de uma altura s_0, dada em metros, com uma velocidade inicial v_0, dada em m/s. Sabe-se que a trajetória descrita é uma parábola representada pela função

$$s(t) = -t^2 + v_0 t + s_0.$$

a. Sabendo que um projétil é lançado do solo (e portanto $s_0 = 0$) e que leva 6 segundos para voltar a atingir o solo, use a equação acima para determinar sua velocidade inicial.

b. Examine o comportamento da função quando o tempo se aproxima de 3.

c. Desenhe o gráfico da função $\boldsymbol{s(t)}$ (se for necessário utilize o verso desta folha).

4. Considere a função $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. O que acontece com os valores de f quando x está próximo de 2? Desenhe o gráfico da função $f(x)$.

5. Em cada item, o que você acha que acontece com os valores de $f(x)$ para valores de x que próximos de 0? Justifique sua resposta.

a. $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$

b. $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$

TAREFA IV' – Parte 2

Acadêmicos: ____________________	Data:__________
Atividades extraídas/adaptadas do TGR de SABATKE (2016)	

1. O salário dos funcionários de uma empresa é composto de uma parte fixa no valor de R$ 900,00, acrescidos de mais uma parte variável (comissão) de 10% sobre o valor de suas vendas no mês.

Responda:

a. Se um funcionário recebeu o pagamento de R$ 1.400,00, qual foi o valor adquirido com as vendas desse empregado?

b. Suponha que esse mesmo funcionário deseja receber no mês seguinte um salário entre R$ 1.200,00 e R$ 1.600,00, qual será o valor que deverá arrecadar com suas vendas?

c. Refaça a questão (b) supondo que este funcionário planeja receber, no mês seguinte, o pagamento no intervalo de R$ 1.300,00 à R$ 1.500,00.

d. Represente graficamente as situações dos itens (a, b,c) e responda: O que acontece com a variação do valor arrecadado dos projetos quando o pagamento está numa faixa cada vez mais estreita em torno de R$ 1.400,00?

e. Agora, suponha que esse funcionário deseje receber mensalmente, em torno de R$ 1.400,00 com um erro muito pequeno, que você pode denotar por $\boldsymbol{\varepsilon}$. Qual a relação entre o erro e a variação em torno da resposta encontrada na letra (a)? Você pode denotar a variação do valor das vendas dos projetos por $\boldsymbol{\delta}$.

Anexo 8

Guião das entrevistas realizadas no segundo semestre letivo de 2016

Guião das Entrevistas (Meio do semestre)

1. Qual a sua opinião sobre a metodologia de RP adota em algumas aulas, pela professora, para introduzir o assunto?

2. Você sabe apontar algum(ns) motivo(s) pelos quais você aprova/desaprova a trabalho realizado em sala de aula?

3. Você tem alguma sugestão de que tipo de atividades a professora poderia/deveria propor em suas aulas para que ajudasse o aluno a aprender?

4. Na sua opinião, seria bom se fosse formado um grupo de estudo em horário extraclasse em que a professora estivesse presente para sanar as dificuldades?

Guião das Entrevistas (Final do Semestre)

1. Qual a sua opinião sobre a metodologia de RP adota em algumas aulas, pela professora, para introduzir o assunto?
2. Você sabe apontar algum(ns) motivo(s) pelos quais você aprova/desaprova a trabalho realizado em sala de aula?
3. Você tem alguma sugestão de que tipo de atividades a professora poderia/deveria propor em suas aulas para que ajudasse o aluno a aprender?

Anexo 9

Testes (pré/pós-teste)

Atividades de Cálculo Diferencial e Integral

Acadêmico(a): ____ Data:__________

<u>Observação</u>: Ao responder estas atividades, você estará contribuindo com a pesquisa de doutorado da Profª. Eliane Bihuna de Azevedo. Agradeço imensamente a sua colaboração.

1. (Adaptado de ADAMI; DORNELES filho; LORANDI, 2015) Alex recebeu duas propostas de salários para trabalhar em empresas de softwares. Na empresa A receberá R$ 900,00 por mês além de uma comissão de R$ 10,00 por software vendido. Na empresa B receberá R$ 440,00 por mês além de uma comissão de R$ 30,00 por software vendido. Qual das duas propostas de salário é mais vantajosa financeiramente? Justifique sua resposta.

2. (Adaptado de UDESC-SC e ANTON, 2014) Suponha que, após ter sido coado, a temperatura do café é de 90°C, após 1 minuto a temperatura do café é de 80°C e que este café será mantido em um ambiente climatizado cuja temperatura é constante e igual a 20°C. Nestas condições, pela lei do resfriamento de Newton, a função que representa o resfriamento do café é

$$T(t) = 20 + 70e^{-0{,}15415t},$$

em que t é o tempo (em minutos) e T é a temperatura (em °C). O gráfico de $T(t)$ está ilustrado na Figura 1.

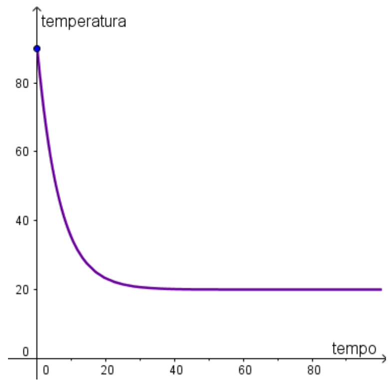


Figura 1

a. Sabe-se que para um café ser ingerido sem queimar a boca de uma pessoa, é necessário que a temperatura do mesmo seja de no máximo 60°C. Quanto tempo levará para que este café possa ser ingerido?

b. Determine $\lim_{t\to 0^+} T(t)$ e explique qual é o seu significado físico.

c. Determine $\lim_{t\to +\infty} T(t)$ e explique qual é o seu significado físico.

3. Na Figura 2 está ilustrada parte do gráfico da função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Suponha que no restante do domínio o gráfico da função mantenha o comportamento das margens dessa figura.

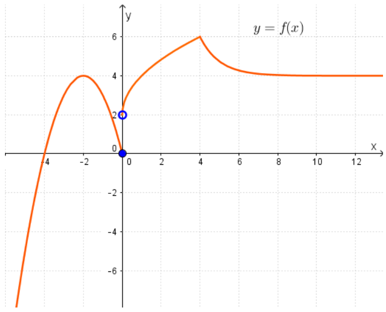


Figura 2

Com base nessas informações, <u>responda e justifique</u> as seguintes questões:

a. A função f é contínua em todo o seu domínio?

b. Sobre as retas tangentes ao gráfico da função f:

i. Em que intervalos elas tem inclinação positiva? E negativa?

ii. Em qual(is) ponto(s) ela(s) tem inclinação nula?

iii. Em qual(is) ponto(s) não existe(m) reta(s) tangente(s)?

iv. A partir de i, ii e iii, o que você pode falar a respeito da derivada primeira de f?

c. A função f possui máximo/mínimo absoluto (ou global)? Se sim, qual(is) é(são) a(s) coordenada(s) deste(s) ponto(s)?

d. Em que intervalos a função f tem concavidade voltada para baixo? E para cima? O que você pode falar a respeito da derivada primeira e da segunda de f?

e. A função f possui assíntota(s)? Se sim, qual(is) é(são) a(s) sua(s) equação(ões)?

4. (Adaptado de ANTON, 2014, p.106) Seja $f: \mathbb{R}_+ \to (-\infty, 5]$ definida por $f(x) = 5 - \sqrt{x}$, cujo gráfico está apresentado na Figura 3.

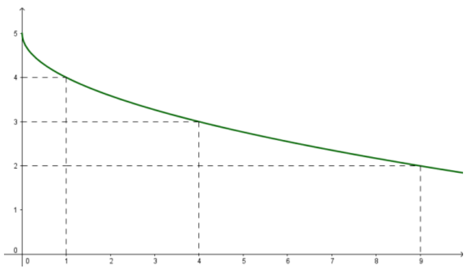


Figura 3

Dado um número $\varepsilon = 1$, encontre um número positivo δ tal que

$$0 < |x - 4| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 3| < 1.$$

5. (Adaptado de ANTON, 2014) Uma caixa aberta deve ser construída com uma folha retangular de metal, com medidas de $8\ cm$ por $15\ cm$, retirando-se um quadrado em cada canto dessa folha, de mesmo tamanho e dobrando ao longo dos segmentos das retas tracejadas (Figura 4) para fazer as laterais da caixa.

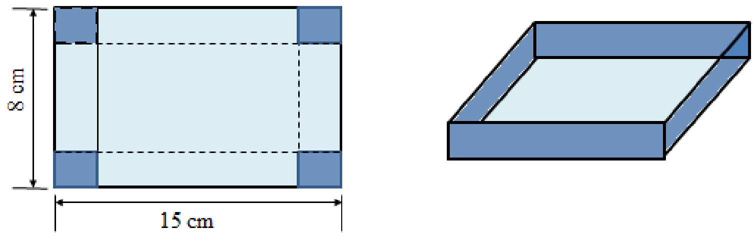


Figura 4
Fonte: Adaptado de ANTON. 2014, p.14.

a. Qual é a expressão analítica que representa o volume dessa caixa como função do comprimento dos lados dos quadrados?

b. Qual é o domínio da função volume da caixa obtida no item “a”?

c. Construa o gráfico da função volume.

d. Qual deveria ser a medida do lado do quadrado recortado para que o volume dessa caixa fosse o maior possível? Justifique sua resposta.

6. (Adaptado de ANTON, 2014, p.153) Um robô move-se no sentido positivo de um eixo de tal forma que, após t segundos, a sua distância S, em centímetros, em relação à origem é dada na Tabela 1.

Tabela 1

t	4	3,5	3	2,5	2,25	2,12	2,06	2,03	2,01	2,001	2,0001
$S(t)$	1536	900,4	486	234,375	153,7734375	121,197788	108,0488456	101,890901	97,934448	96,192144	96,019201

Com base nas informações da tabela 1 e sabendo que $s(2) = 96\ cm$, responda as seguintes questões:

a. Qual é a velocidade média no intervalo [2,4]?

b. Qual é a velocidade média no intervalo [2,3]?

c. Qual é a velocidade média no intervalo $\left[2, \frac{9}{4}\right]$?

d. Qual é a velocidade instantânea em $t = 2s$?

Anexo 10

Atividades de Formulação de Problemas

Atividades de Cálculo Diferencial e Integral

Algumas destas atividades foram extraídas/adaptadas do artigo "A formulação de problemas na aprendizagem de derivada de uma função" de Maria do Carmo Cunha, Paula Mendes Martins e Floriano Viseu. ProfMat, 2014.

Observação: Ao responder estas atividades, você estará contribuindo com a pesquisa dos professores vinculados ao Projeto de Pesquisa "Ensino de Cálculo Diferencial e Integral: na perspectiva de Resolução de Problemas".

Agradecemos imensamente a sua colaboração!

As atividades abaixo se referem à formulação de problemas relacionados com o conteúdo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, cuja solução contenha cada uma das situações abaixo apresentadas. Após formular o problema, apresente a resolução completa. Caso na formulação de algum dos problemas você tenha extraído/adaptado a ideia de algum livro, site, caderno, dentre outros, solicitamos que referencie a fonte consultada.

1ª Situação: Elabore um problema cuja solução apresente a condição de que se as abscissas estejam entre -2 e 6, então as ordenadas entre 1 e 3.

2ª Situação: Proponha um problema cuja solução relacione as funções *f*, *g* e *h* cujos gráficos estão ilustrados na Figura 2.

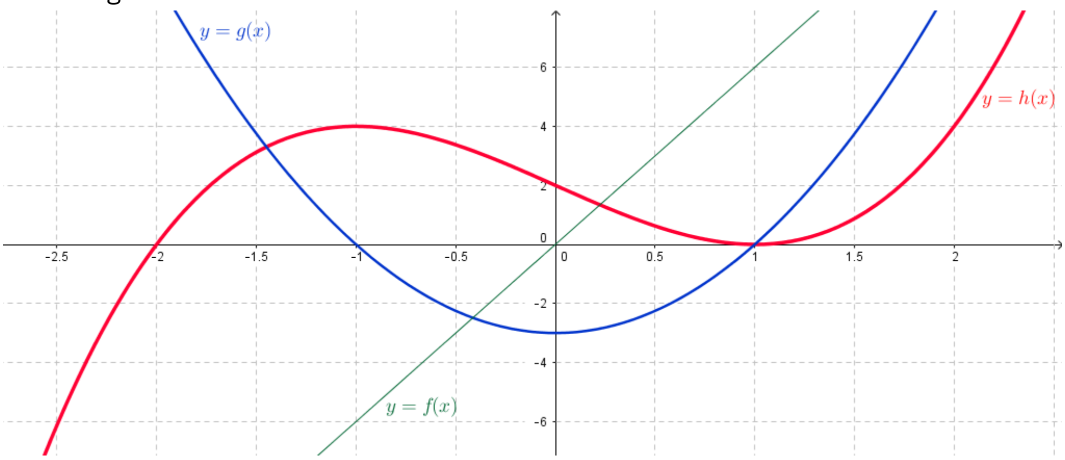


Figura 2

3ª Situação: Elabore um problema que envolva a interpretação geométrica da derivada de uma função de tal forma que a solução seja a reta $y = (2x_0 - 4)x - x_0^2 + 2$, em que x_0 é uma constante real.

4ª Situação: Formule um problema que relacione os gráficos apresentados na Figura 3 que aborde o conteúdo de taxa de variação.

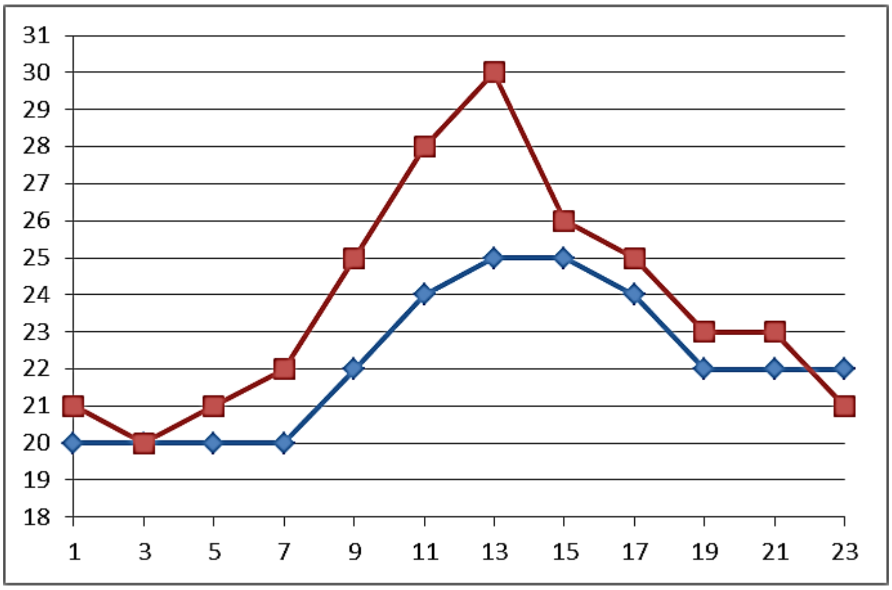


Figura 3

5ª Situação: Sabendo que o gráfico de uma função f' possui uma assíntota horizontal, elabore um problema que contemple essa informação e que tenha por representação geométrica o gráfico da função *f*, ilustrado na Figura 1.

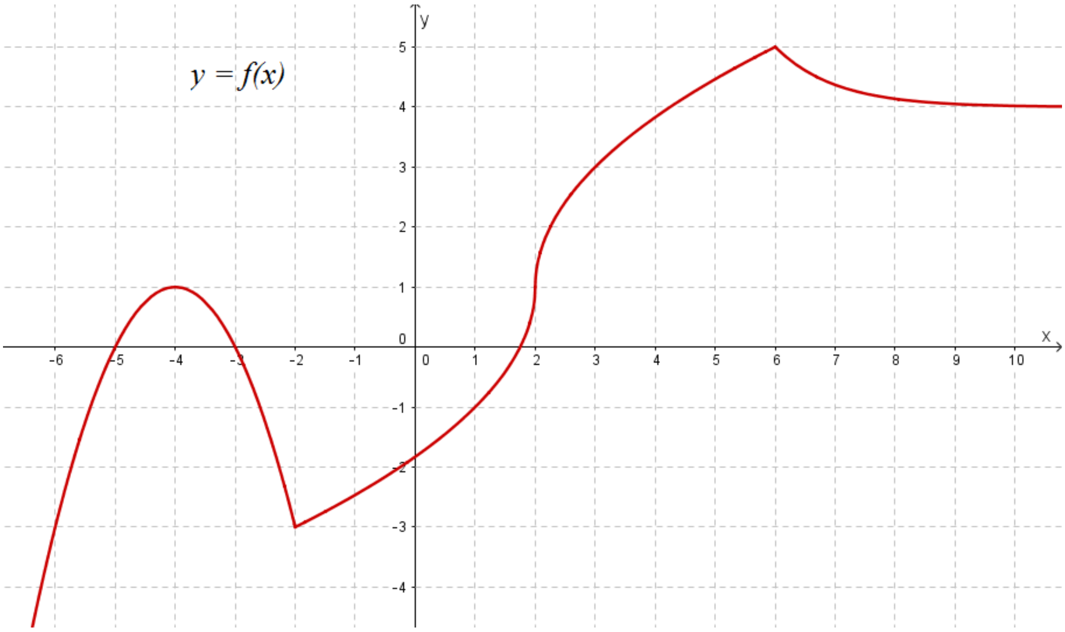


Figura 1

6ª Situação: A partir da teoria de derivadas, formule um problema que aborde a velocidade e a aceleração de uma partícula, sabendo que a curva posição está ilustrada na Figura 6.

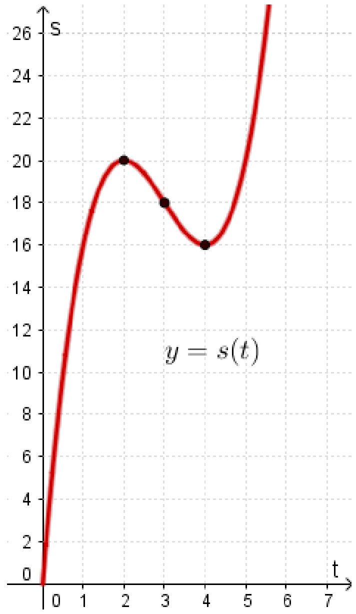


Figura 6

7ª Situação: Os gráficos das figuras 4 e 5 estão associados. Proponha uma situação problema na qual o gráfico da figura 5 é a solução desse problema e que aborde o conteúdo de otimização.

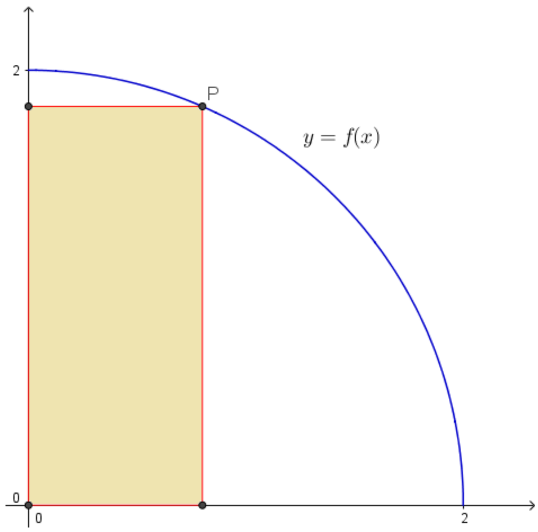


Figura 4

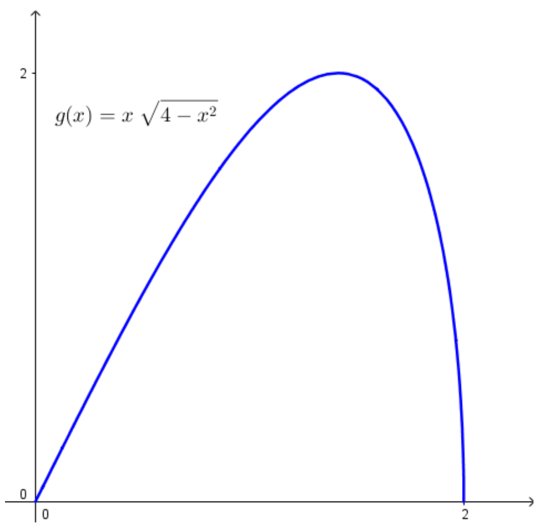


Figura 5

8ª Situação: Formule um problema que minimize a função $f(x, y) = 2x^2 + 4xy$ sabendo que $x^2y = 1000$.

Anexo 11

Plano de Ensino de Cálculo Diferencial e Integral do primeiro semestre de 2017

PLANO DE ENSINO

DEPARTAMENTO: Matemática

PROFESSORA: Eliane Bihuna de Azevedo; eliane.bihuna@gmail.com

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial e Integral **SIGLA:** CDI1001

CARGA HORÁRIA TOTAL: 108h/a **TEORIA:** 108h/a **PRÁTICA:** 0

CURSO: Não exclusivo. **SEMESTRE/ANO:** 01/2017

PRÉ-REQUISITOS: não há, exceto para o curso de Licenciatura em Matemática que tem por requisito Matemática Básica.

EMENTA: Números, variáveis e funções de uma variável real. Limite e continuidade de função. Derivada e diferencial. Teoremas sobre as funções deriváveis. Análise da variação das funções. Integral indefinida.

OBJETIVO GERAL: Desenvolver a capacidade de raciocínio crítico, lógico e dedutivo, utilizado no estudo de limites, derivas e integrais de funções reais de uma variável real.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS: (O aluno deverá ser capaz de:)

- Operar com equações e inequações com e sem valor absoluto.
- Determinar o domínio de uma função.
- Operar com funções.
- Interpretar geometricamente a definição de limite.
- Calcular limites por meio de técnicas, dos limites notáveis e da regra de L'Hôpital.
- Estudar a continuidade de uma função.
- Derivar funções.
- Interpretar geometricamente/fisicamente derivadas e diferenciais.
- Resolver problemas com diferenciais.
- Analisar a variação das funções e construir seus gráficos.
- Resolver problemas de otimização por meio da teoria de derivadas.
- Determinar primitivas de funções através de técnicas de integração.

CRONOGRAMA DE ATIVIDADES:

CARGA HOR.	CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS
28 aulas	**1. Números, variáveis e funções** 1.1. Conjuntos Numéricos 1.2. Desigualdades 1.3. Intervalos 1.4. Inequações 1.5. Valor Absoluto ou módulo 1.6. Equação e inequação modular. 1.7. Funções 1.7.1. Definição. 1.7.2. Formas de representação. 1.7.3. Domínio, contradomínio e imagem. 1.7.4. Função injetora, sobrejetora e bijetora. 1.7.5. Operações com funções 1.7.6. Função par e função ímpar. 1.7.7. Função periódica. 1.7.8. Função composta. 1.7.9. Função inversa. 1.7.10. Função constante; 1.7.11. Função afim e função identidade. 1.7.12. Função quadrática 1.7.13. Translações. 1.7.14. Função polinomial 1.7.15. Função racional. 1.7.16. Função potencial. 1.7.17. Função exponencial. 1.7.18. Função logarítmica. 1.7.19. Funções hiperbólicas. 1.7.20. Funções trigonométricas. 1.7.21. Funções inversas de trigonométricas
16 aulas	2. **Limite e continuidade de uma função**. 2.1 Noção intuitiva de limites. 2.2 Definição formal de limite. 2.3 Propriedades de limites. 2.4 Cálculo de limites. 2.5 Limites notáveis. 2.6 Continuidade de uma função. 2.7 Continuidade em intervalos. 2.8 Propriedades das funções contínuas.

20 aulas	3. Derivada e diferencial. 3.1. Taxa de variação. 3.2. Derivada de uma função num ponto. 3.3. Derivada de uma função. 3.4. Regras de derivação 3.4.1. Derivada de uma função constante. 3.4.2. Derivada da função potencial. 3.4.3. Derivada de uma constante vezes uma função diferenciável. 3.4.4. Derivada da soma. 3.4.5. Regra do produto. 3.4.6. Regra do quociente. 3.5. Derivada de função composta. 3.6. Derivada de função exponencial. 3.7. Derivada de função logaritmo. 3.8. Derivada de funções trigonométrica. 3.9. Derivada de funções hiperbólica 3.10. Derivação implícita. 3.11. Derivada da função inversa. 3.12. Derivadas de ordem superior. 3.13. Diferenciais e aproximação linear local. 3.14. Aplicação da derivada: 3.14.1. Coeficiente angular das retas tangentes. 3.14.2. Interpretação cinemática. 3.14.3. Taxas relacionadas;
4 aulas	**4. Regra de L'Hôpital.** 4.1 Introdução; 4.2 Forma indeterminada $\frac{0}{0}$; 4.3 Forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$; 4.4 Aplicações da regra de L'Hôpital.
20 aulas	**5. Análise da variação das funções.** 5.1 Funções crescente e decrescente. 5.2 Máximos/mínimos local/global 5.3 Ponto crítico. 5.4 Ponto extremo. 5.5 Teoremas sobre funções deriváveis. 5.5.1 Teorema de Weiestrass. 5.5.2 Teorema de Rolle. 5.5.3 Teorema do Valor Médio.

	5.6 Critérios para determinação dos extremos de uma função. 5.6.1 Critério da primeira derivada. 5.6.2 Critério da segunda derivada. 5.7 Concavidade. 5.8 Pontos de inflexão. 5.9 Assíntotas vertical e oblíquas. 5.10 Aplicações da teoria dos máximos e mínimos de funções na solução de problemas de otimização/minimização.
18 aulas	**6. Integral indefinida.** 6.1 Definição de primitiva. 6.2 Definição de integral indefinida. 6.3 Propriedades de integral indefinida; 6.4 Integrais imediatas; 6.5 Integração por substituição; 6.6 Integração por partes; 6.7 Integração de funções trigonométricas; 6.8 Integrais por substituição trigonométrica; 6.9 Integrais elementares que contém um trinômio quadrado; 6.10 Integração de funções racionais por frações parciais.
Carga horária total teórica/prática - 108 aulas	

METODOLOGIA PROPOSTA:

Uma parte das aulas serão expositivas e dialogadas, com resolução de exercícios orientados e atendimento individual ao aluno. A outra parte adotará a metodologia de Resolução de Problemas para introduzir/abordar alguns dos conteúdos da ementa e, nestas aulas, serão realizados trabalhos em grupo. Utilização da plataforma do Moodle para aulas a distância (dentro do limite de 20%).

AVALIAÇÃO:

Quatro provas escritas e individuais durante o semestre letivo $(P_1, P_2, P_3 \text{ e } P_4)$.

Trabalhos individuais e/ou em equipes a serem realizados. T é a média aritmética das notas de trabalhos a serem realizados.

Anota semestral (NS) será dada pela fórmula

$$NS = \frac{3P + T}{4}.$$

com P sendo a média aritmética das quatro avaliações escritas, isto é,

$$N = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{4}.$$

Observação:

Entre a terceira e quarta avaliação escrita será realizada uma prova substitutiva (não obrigatória). Se a nota a prova substitutiva (S) for superior a alguma das notas obtidas nas três primeiras avaliações, então S substituirá a nota mais baixa destas.

Datas/Horários das avaliações escritas:

Prova 1 (P_1): 08 de abril das 8h30 às 11h30 na sala F-101

Prova 2 (P_2): 13 de maio das 8h30 às 11h30 na sala F-101

Prova 3 (P_3): 03 de junho das 8h30 às 11h30 na sala F-101

Substitutiva (S): 10 de junho das 8h30 às 11h30 na sala F-101

Prova 4 (P_4): 03 de julho das 7h30 às 11h. Sala a definir.

EXAME: Conforme resolução em vigor da UDESC. Data: 10 de julho das 8h às 11h. Sala a definir.

SEGUNDA CHAMADA DAS AVALIAÇÕES:

Caso o acadêmico não possa comparecer a qualquer uma das avaliações, deverá entrar com pedido oficial de solicitação de segunda chamada desta prova, no prazo de *cinco dias úteis*, de acordo com a Resolução 018/2004 Consepe.

As provas de segunda chamada, quando deferidas, ocorrerão sempre antes da realização da próxima avaliação programada, em data, horário e local a serem divulgados no mural do DMAT e na página da disciplina.

É de responsabilidade do acadêmico acompanhar os trâmites do seu processo de segunda chamada.

Informações Complementares

- Material e avisos: http://www.joinville.udesc.br/portal/professores/eliane/
- Divulgação Notas/ frequência: SIGA

.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

1. ANTON, H. Cálculo, um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, vol. 1, 6ª ed., 2000.
2. FLEMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. Cálculo A. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 6ª ed. rev. e ampl., 2006.
3. STEWART, J. Cálculo. São Paulo. Cengage Learning, vol. 1, 6ª ed, 2009.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:

1. Apostila de Cálculo Diferencial e Integral I. Disponível em http://www.joinville.udesc.br/portal/professores/eliane/materiais/ApostilaCDI_2015_2.pdf Departamento de Matemática, CCT/Udesc, Joinville.
2. KÜHLKAMP, N. Cálculo 1. Florianópolis. Editora UFSC, 3ª ed. rev. e ampl. 2006.
3. LEITHOLD, L. O Cálculo com Geometria Analítica. São Paulo. Editora HARBRA ltda, 3ª ed., 1994.
4. PISKOUNOV, N. Cálculo Diferencial e Integral. Moscu, Editorial Mir, 4ª ed., 1977.
5. SWOKOWSKI, Earl Willian. Cálculo com geometria analítica. 2. ed. São Paulo: Makron Books, v.1, 1995.
6. WEIR, Maurice D; HASS, Joel; GIORDANO, Frank R; THOMAS, George Brinton; ASANO, Claudio Hirofume. Cálculo: George B. Thomas. 11. ed. São Paulo: Pearson/Addison Wesley, v.1, 2009.

Anexo 12

Tarefas de 1 a 19 realizadas no primeiro semestre letivo de 2017

TAREFA 1 – Funções

Acadêmicos: ______________________________	Data:__________

1. Para você, o que é uma função?

____

____

2. Dê ao menos um exemplo prático que envolve função.

____

____

3. A tabela 1 apresenta o comportamento da chuva e da temperatura ao longo do ano na cidade de Joinville. As médias climatológicas são valores calculados a partir de uma série de dados de 30 anos observados.

Tabela 1 – Temperaturas na cidade de Joinville

Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Mínima (°C)	20	20	19	17	14	13	12	13	14	12	17	18
Máxima (°C)	26	26	26	24	20	20	19	20	20	22	23	25
Precipitação (mm)	312	259	225	136	125	100	127	171	171	184	180	198

Fonte: http://www.climatempo.com.br/climatologia/381/joinville-sc. Acesso em: 12/07/2016

a. Construa um gráfico que representa a média aritmética entre as temperaturas máximas e mínimas de Joinville ao longo do ano.
b. Qual a estação do ano mais chuvosa em Joinville? Essa constatação está de acordo com o que você conhece sobre sua experiência de vida em Joinville?

4. A Tabela 2 apresenta a previsão da temperatura para a cidade de Joinville para o dia 12 de julho de 2016.

Tabela 2 – Previsão do tempo

Hora	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Temperatura (ºC)	17	18	17	16	17	19	23	25	23	21	19	18

Fonte:http://www.accuweather.com/pt/br/joinville/35958/hourly-weather-forecast/35958?hour=16. Acesso em: 12/07/2016.

a. Construa um gráfico que representa a temperatura em função do horário.
b. Existe alguma diferença com relação ao domínio da função temperatura deste exercício com relação ao exercício anterior? Argumente sua resposta.

TAREFA 2

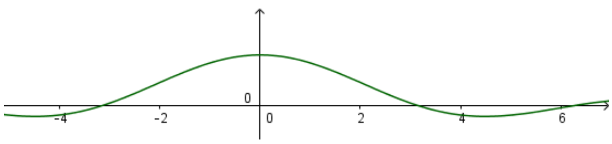
Acadêmicos: ____	Data: __________

1. (ANTON, 2014, p.13) Um bote balança para cima e para baixo sob a ação de ondas fracas. De repente, é atingido por uma onda grande e afunda. Esboce um gráfico aproximado da altura do bote acima do fundo do mar como uma função do tempo.

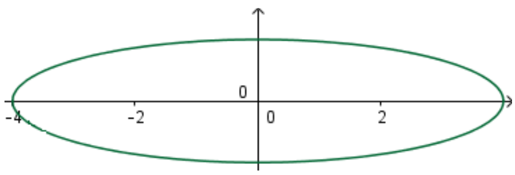
2. (STEWRT, 2009, p.13) Um homem apara seu gramado toda quarta-feira à tarde. Esboce um gráfico da altura da grama como uma função do tempo no decorrer de um período de quatro semanas.

3. Quais das imagens (de autoria própria) apresentadas a seguir, você julga que representa(m) o gráfico de uma função de x em função de y, cujos valores são apresentados, respectivamente, no eixo horizontal e vertical. Por quê?

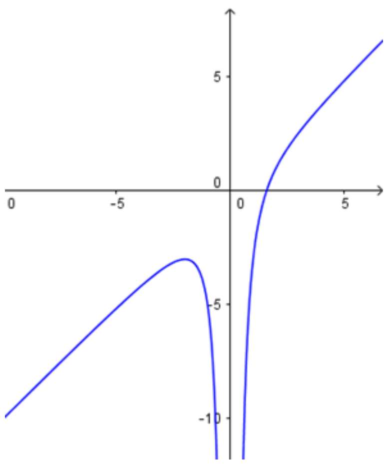
a.



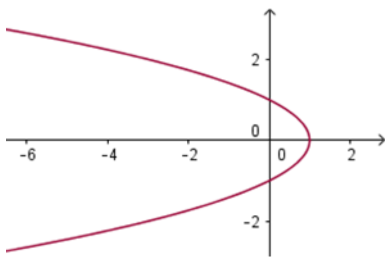
b.



c.

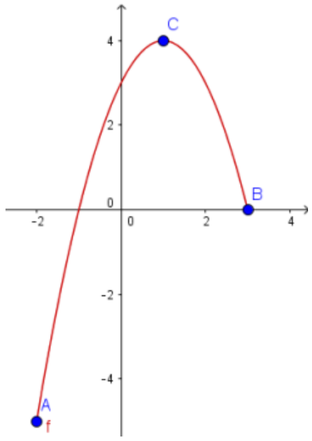


d.

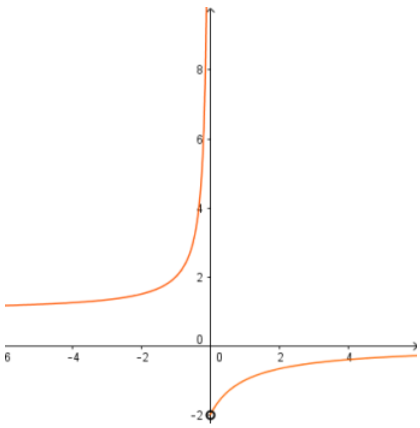


4. Determine o conjunto que representa o domínio e a imagem das funções ilustradas a seguir.

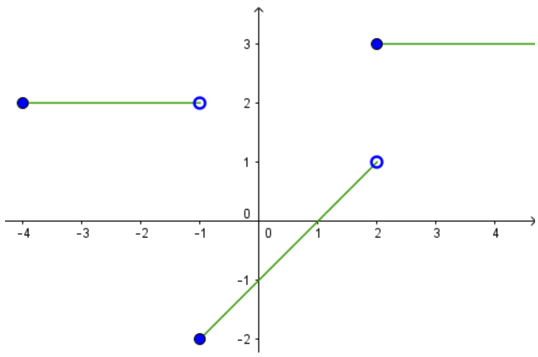
a.



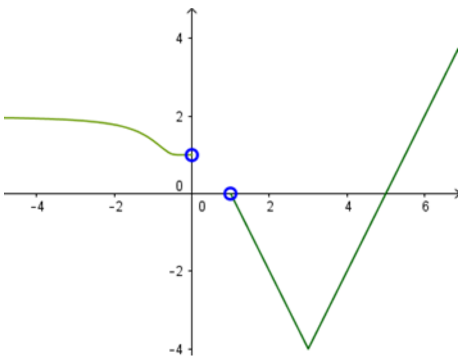
b.



c.



d.



TAREFA 3

Acadêmicos: ____ Data:__________

1. (Adaptado de ADAMI; DORNELES filho; LORANDI, 2015) Ana é uma estudante universitária que precisa imprimir a apostila de *Cálculo* I. Sabendo que dentro do campus universitário existe uma empresa A de fotocópias que cobra 15 centavos por folha (de impressão ou cópia) e que a empresa B, externa ao campus (mas próxima, ou seja, não há gasto com deslocamento), cobra 20 centavos por folha até 100 páginas e 10 centavos o excedente de páginas. Em qual das empresas você recomendaria que Ana imprimisse seu material? Justifique sua resposta.

TAREFA 4

Acadêmicos: ______________________________________	Data: __________

1. Qual a distância entre os números -9 e 5? Qual a distância entre os números -5 e 9? Justifique sua resposta.

2. Obtenha o conjunto solução das seguintes equações:

(a) $|3x - 2| + 4x - 3 = 0$

b. $|1 - x| + 2|x + 3| = 8x$

TAREFA 5

Acadêmicos: ____ Data: __________

1. (Adaptado de UDESC-SC) Seja f a função que descreve a área do quadrado ACEG da Figura 1. O quadrado DEFI possui área igual a 16 cm². A soma do perímetro dos retângulos BCDI e FGHI é igual a $S(x) = (4x + 16)$ cm. Determine todos os valores reais de x que satisfazem a inequação:

$$-1 < f(x) \leq 25.$$

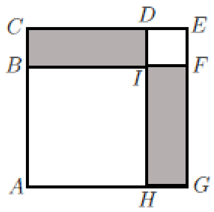


Figura 1
Fonte: Autoria própria

TAREFA 6

Acadêmicos: ____ Data:__________

1. (Adaptado de ANTON, 2014, p.63) Uma caixa fechada deve ser construída com pedaço de papelão retangular com $180\ cm$ por $300\ cm$, cortando fora quatro quadrados de mesmo tamanho conforme ilustrado na Figura 1, dobrando ao longo das retas tracejadas e encaixando para dentro as duas abas da tampa.

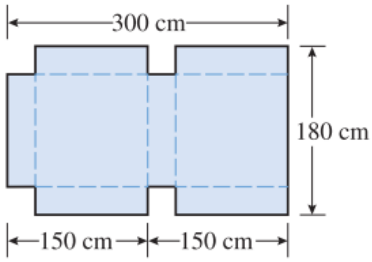


Figura 1

Fonte: ANTON, 2014, p.63

   a. Qual é a expressão analítica que representa o volume dessa caixa como função do comprimento dos lados dos quadrados?
   b. Qual é o domínio da função obtida no item “a”?
   c. Esboce o gráfico da função que representa o volume utilizando algum software gráfico.
   d. Descreva em palavras qual deveria ser a medida do lado do quadrado recortado para que o volume da caixa fosse o maior possível?

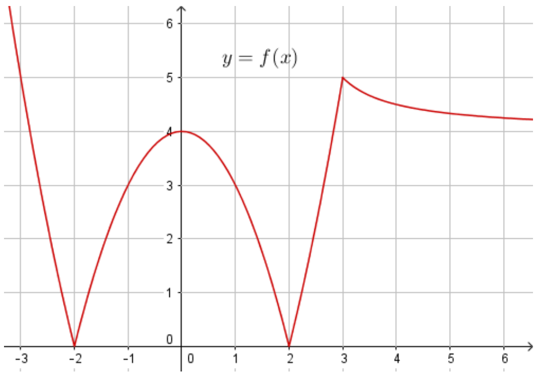
TAREFA 7

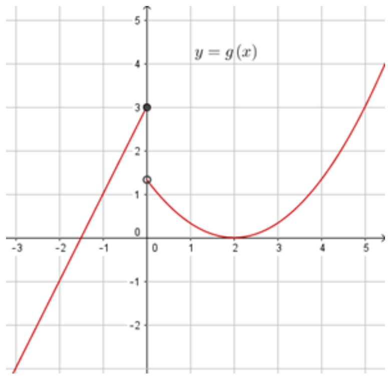
Acadêmicos: ____	Data:__________

1. (Adaptado de ANTON, 2014, p.64) Complete a tabela 3:

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0	1	-2	-1
$g(x)$	1	-2	-1	0
$(f \circ g)(x)$				
$(g \circ f)(x)$				

2. Considere as funções f e g funções cujos gráficos estão ilustrados abaixo.





Com base nesses gráficos, obtenha:

a. $(f \circ g)(2)$

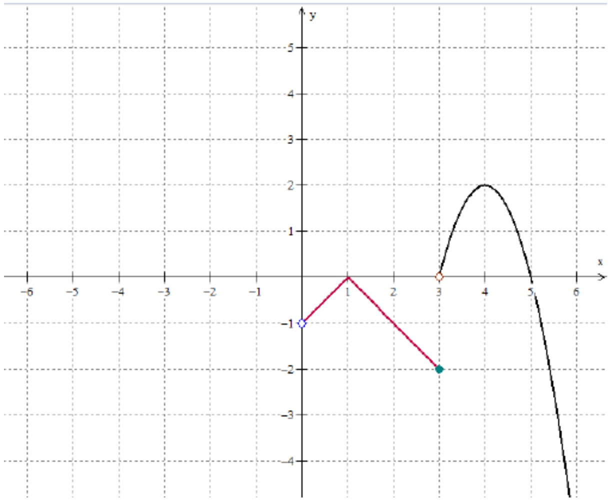
b. $(g \circ f)(-3)$

c. $(f \circ g \circ f)(-2)$

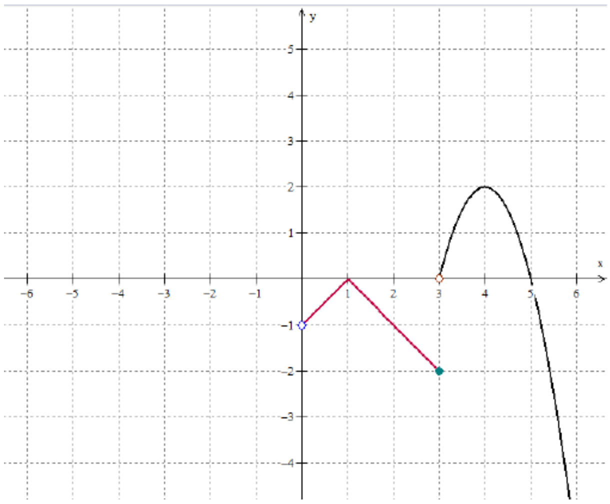
d. $g\big((f \circ g)(-2) - 6\big)$

3. Construa, no quadriculado abaixo, o gráfico de $y = f(x)$ para $x \in \mathbb{R}^*$ de forma que:

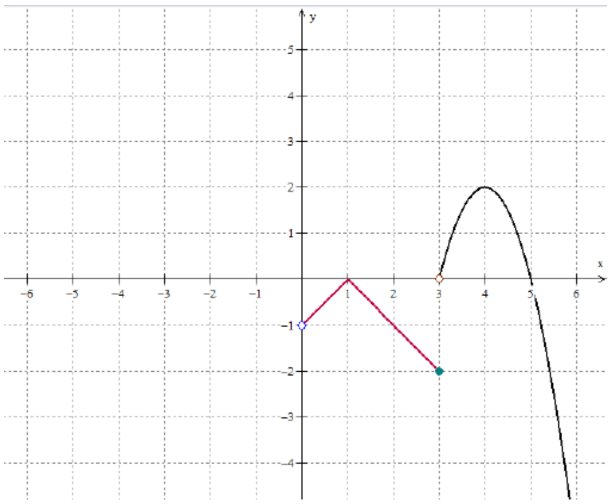
iii. f seja uma função par, ou seja, simétrica com relação ao eixo das ordenadas;



iv. f seja uma função ímpar, ou seja, simétrica com relação à origem.



v. $g(x) = f(x-3) + 1$.



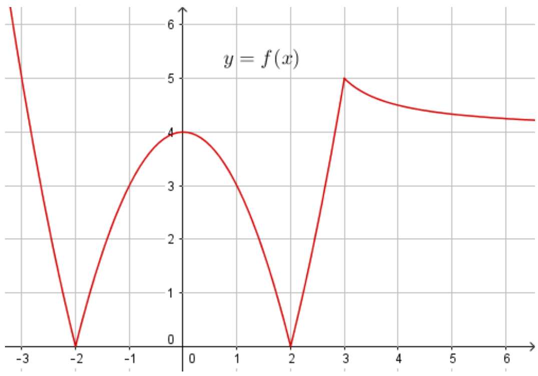
TAREFA 7 (Modificada)

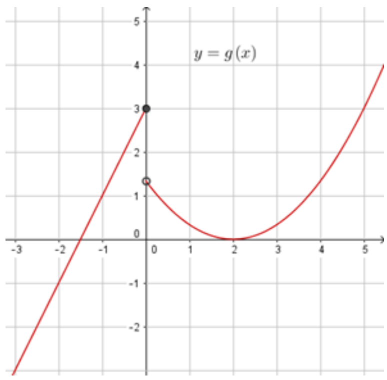
Acadêmicos: ____	Data:__________

1. (Adaptado de ANTON, 2014, p.64) Complete a tabela 3:

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	1	0	-2	-1
$g(x)$	-1	0	1	-2
$(f \circ g)(x)$				
$(g \circ f)(x)$				

2. Considere as funções f e g funções cujos gráficos estão ilustrados abaixo.





Com base nesses gráficos, obtenha:

a. $(f \circ g)(2)$

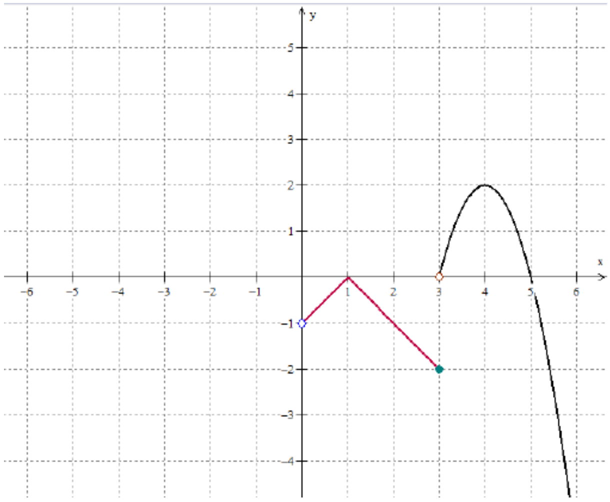
b. $(g \circ f)(-3)$

c. $(f \circ g \circ f)(-2)$

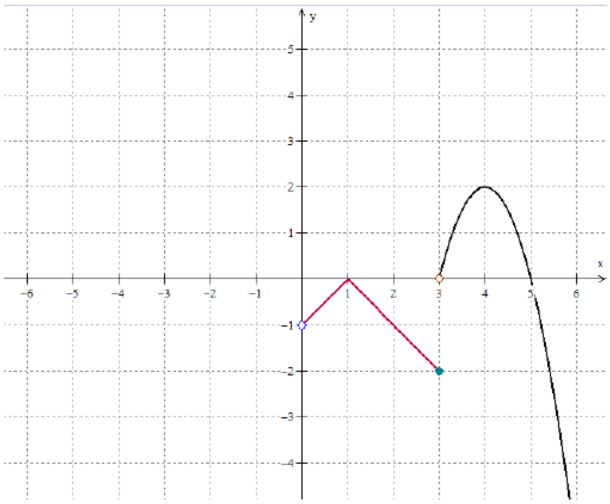
d. $g\big((f \circ g)(-2) - 6\big)$

3. Construa, no quadriculado abaixo, o gráfico de $y = f(x)$ para $x \in \mathbb{R}^*$ de forma que:

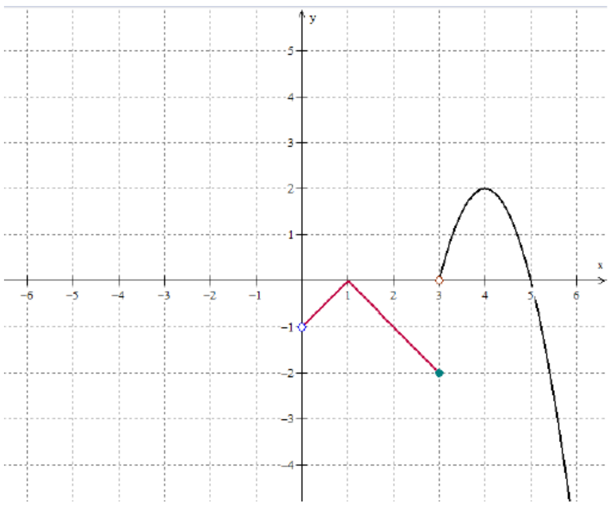
i. f seja uma função par, ou seja, simétrica com relação ao eixo das ordenadas;



ii. f seja uma função ímpar, ou seja, simétrica com relação à origem.



iii. $g(x) = f(x + 3) + 1$.



TAREFA 8

Acadêmicos: ____	Data:__________

(BRUNHEIRA, 2014, p.52) **A Lua aqui tão perto...**

Vamos te propor uma investigação. Para isso terá que usar a matemática e um pouco de imaginação.

<u>Desafio:</u>

Quantas vezes seria necessário dobrar ao meio uma folha de papel para se atingir a distância da Terra à Lua?

Para responder a esta questão, sugere-se seguir os seguintes passos:

1. Admita que uma folha de papel tem 0,1 mm. Se dobrarmos ao meio a folha, a espessura dessa folha será 0,2 mm. Se dobrarmos de novo ao meio, ou seja, com duas dobragens qual a espessura obtida? E com três?
2. A partir de 5 dobragens começa a ser difícil dobrar o papel e o pedaço é cada vez menor. É aqui que entra a imaginação. Vamos abstrairmos dos aspectos práticos e pensar que podemos continuar este processo o número de vez que quisermos. Organize uma tabela que relacione o número de dobragens com a espessura obtida. Quantas dobragens serão necessárias para obter a tua altura?
   Dica: Converta os valores para metros.
3. Considere n a variável correspondente ao número de dobragens. Encontre uma expressão que represente a espessura obtida depois de realizadas n dobragens.
4. E agora, nossa viagem até a Lua. Comece estimando quantas dobragens serão necessárias para que a espessura da folha de papel dobrada atinja a distância desejada. Em seguida, descubra o valor exato tendo em conta que deves atingir pelo menos o valor de 384.403 km, que corresponde a um valor aproximado da distância da Terra à Lua.

Boa viagem!

TAREFA 9

Acadêmicos: ____ Data:__________ *Atividades extraídas/adaptadas de SABATKE (2016)*

1. Quando você ouve a palavra "limite" o que você entende?

____

____

2. Escreva uma ou mais sentenças, utilizando a palavra "limite".

____

____

As origens do cálculo remontam à Grécia Antiga, pelo menos 2500 anos atrás. Naquela época, os gregos já sabiam encontrar a área A de qualquer polígono dividindo-o em triângulos, como na Figura 1 abaixo e, em seguida, somando as áreas obtidas.

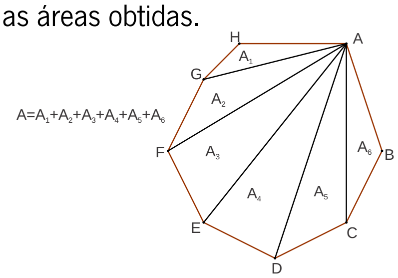


Figura 1: Área de um polígono usando triângulos
Fonte: Adaptada de Stewart, p. 3, 2009.

Entretanto, é muito mais difícil determinar a área de uma figura curva. O método da exaustão dos antigos gregos consistia em inscrever e circunscrever a figura com uma sequência de polígonos, aumentando-se o número de lados desses polígonos.

Assim, utilizando esse método, inscreva nos círculos da Figura 2, os polígonos de acordo com o número $\boldsymbol{n}$ solicitado ($\boldsymbol{n} =$ quantidade de lados do polígono):

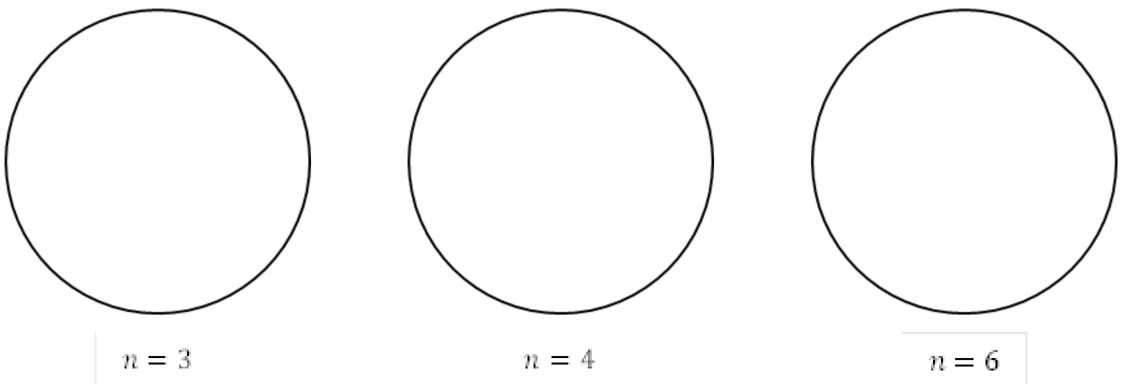


Figura 2: Circunferências para construção dos polígonos inscritos

Responda:

1. Seja A_n a área do polígono inscrito com $\boldsymbol{n}$ lados, o que acontece com a área à medida que aumentamos $\boldsymbol{n}$?

____

____

2. Para encontrar a melhor aproximação para a área do círculo é suficiente apenas aumentar a quantidade dos lados do polígono? Justifique.

____

____

3. Um projétil é arremessado verticalmente de uma altura s_0, dada em metros, com uma velocidade inicial v_0, dada em m/s. Sabe-se que a trajetória descrita por $s(t) = -t^2 + v_0 t + s_0$.

a. Sabendo que um projétil é lançado do solo (e portanto $s_0 = 0$) e que leva 6 segundos para voltar a atingir o solo, use a equação acima para determinar sua velocidade inicial.

b. Examine o comportamento da função quando o tempo se aproxima de 3.

c. Desenhe o gráfico da função $s(t)$.

4. Considere a função $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. O que acontece com os valores de f quando x está próximo de 2? Desenhe o gráfico da função $f(x)$.

Extraclasse:

Em cada item, o que você acha que acontece com os valores de $f(x)$ para valores de x que próximos de 0? Justifique sua resposta.

a. $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$

b. $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$

TAREFA 10

Acadêmicos: ____ Data:__________   *Atividades extraídas/adaptadas de SABATKE (2016).*

1. O salário dos funcionários de uma empresa é composto de uma parte fixa no valor de R$ 900,00, acrescidos de mais uma parte variável (comissão) de 10% sobre o valor de suas vendas no mês.

Responda:

a. Se um funcionário recebeu o pagamento de R$ 1.400,00, qual foi o valor adquirido com as vendas desse empregado?

b. Suponha que esse mesmo funcionário deseja receber no mês seguinte um salário entre R$ 1.200,00 e R$ 1.600,00, qual será o valor que deverá arrecadar com suas vendas?

c. Refaça a questão (b) supondo que este funcionário planeja receber, no mês seguinte, o pagamento no intervalo de R$ 1.300,00 à R$ 1.500,00.

d. Represente graficamente as situações dos itens (a, b,c) e responda: O que acontece com a variação do valor arrecadado dos projetos quando o pagamento está numa faixa cada vez mais estreita em torno de R$ 1.400,00?

e. Agora, suponha que esse funcionário deseje receber mensalmente, em torno de R$ 1.400,00 com um erro muito pequeno, que você pode denotar por $\boldsymbol{\varepsilon}$. Qual a relação entre o erro e a variação em torno da resposta encontrada na letra (a)? Você pode denotar a variação do valor das vendas dos projetos por $\boldsymbol{\delta}$.

TAREFA 11

Acadêmicos: ____ Data:__________

Atividades adaptadas de SABATKE (no prelo) e ABDELMALACK (2010)

1. Um especialista em eficiência, contratado por uma empresa, compilou os seguintes resultados relacionando a produtividade dos seus operários com a sua experiência:

Experiência (meses)	0	6
Produtividade (número de peças por mês)	200	410

Este especialista sabe que a função que descreve o número de peças produzidas mensalmente por um trabalhador é $f(x) = 500 - ce^{kx}$, em que x é o tempo de experiência no serviço, em meses.

a. Determine as constantes c e k que retratam a situação acima descrita.

b. Quanto tempo de experiência deve ter um funcionário para que atinja um nível de produtividade de 350 peças/mês?

c. Quanto tempo de experiência deve ter um funcionário para atinja um nível de produtividade de 600 peças/mês?

d. Use o gráfico da função $f(x)$ para descrever a evolução da produtividade em relação ao tempo de experiência do funcionário. Justifique sua resposta.

e. Chamaremos de tolerância à diferença entre o máximo de peças que um funcionário pode produzir e o número de peças produzidas por um funcionário para que a empresa atinja o mínimo satisfatório economicamente para o desenvolvimento lucrativo da produção. Admitindo uma tolerância de 15% da capacidade de produção da empresa de um funcionário, quanto tempo de experiência ele deve ter para que satisfaça o mínimo de produção almejada pela empresa? E se for 10% de tolerância?

f. Se a tolerância (do item anterior) for chamada de $\boldsymbol{\varepsilon}$ e o tempo mínimo de experiência para que o funcionário esteja satisfazendo essa meta da empresa seja M, encontre a relação entre as constantes M e $\boldsymbol{\varepsilon}$.

g. Admitindo que L é a capacidade de produção de um funcionário, usando as constantes M e $\boldsymbol{\varepsilon}$ do item anterior, como ficaria escrito M em função L e ε? Represente no gráfico da função $f(x)$ essas variáveis.

h. Com relação a definição formal de limite, como ficaria a sentença abaixo? Substitua os espaços em branco pelas informações encontradas nas questões anteriores, utilizando, conforme necessário, M, ε e L.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff \forall \_\_\_ > 0, \exists \_\_\_ > 0 \ tal\ que\ x > \_\_\_ \rightarrow |f(x) - \_\_\_| < \_\_\_$$

TAREFA 12

Acadêmicos: ____Data:__________

1. Quando você ouve a palavra "continuidade" o que você entende?

2. Dê, ao menos, um exemplo prático de função contínua.

3. A Figura 1 modela a concentração C de um medicamento na corrente sanguínea de um paciente ao longo de um período de 48 horas. Discuta o significado das descontinuidades no gráfico.

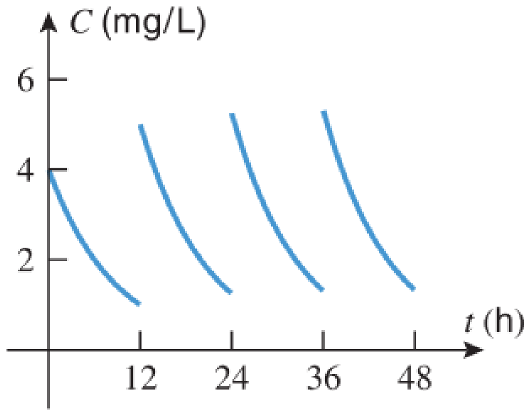


Figura 1 – Concentração de um medicamento na corrente sanguínea
Fonte: ANTON, 2014, p.118

4. Desde 2007 a Receita Federal tem alterado as bases de cálculo para a declaração do imposto de renda de pessoas físicas, aumentando o intervalo das faixas salariais e da parcela a ser deduzida no cálculo do imposto. Além disso, desde 2009 também foram adotadas duas novas alíquotas, de 7,5% e 22,5%, juntamente com as de 15% e 27,5% já existentes. Em 2015, houve uma alteração em todas as faixas salariais. As tabelas 1 e 2 evidenciam estas mudanças, mostrando as faixas do imposto de renda de pessoa física, conforme o nível salarial do contribuinte, para os exercícios de 2015 (ano-calendário de 2014) e de 2016 (ano-calendário de 2015), respectivamente

Tabela 1 - Exercício de 2015, ano-calendário de 2014 até Março de 2015.

Base de cálculo mensal (R$)	Alíquota (%)	Parcela a Deduzir (R$)
Até 1.787,77	-	-
De 1.787,78 até 2.679,29	7,5	134,08
De 2.679,30 até 3.572,43	15	335,03
De 3.572,44 até 4.463,81	22,5	602,96
Acima de 4.463,81	27,5	826,15

Tabela 2 - Exercício de 2016, ano-calendário a partir de Abril de 2015.

Base de cálculo mensal (R$)	Alíquota (%)	Parcela a Deduzir (R$)
Até 1.903,98	-	-
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5	142,80
De 2.826,66 até 3.751,05	15	354,80
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	636,13
Acima de 4.664,68	27,5	869,36

Fonte: http://www.dpc.com.br/pt-br/show/tabela-progressiva-do-imposto-de-renda.
Acesso: 14/04/2016

Um contribuinte decidiu analisar com cuidado as tabelas 1 e 2 e entender melhor como é feito o "acerto de contas com o Leão", como é conhecido o pagamento do imposto de renda à Receita Federal. Para calcular o valor a ser pago basta realizar o produto da alíquota pelo salário recebido e descontar a parcela a deduzir. O determinado contribuinte está se questionando se o valor a ser pago de imposto de renda aumenta continuamente conforme o valor de seu salário. Vamos auxiliar esse contribuinte, da seguinte forma:

a. Encontrando qual é a função que descreve o imposto de renda a partir de Abril de 2015.
b. Estudando a continuidade da função obtida no item "a".

5. Suponha que um contribuinte recebeu durante todo o ano de 2015 um salário mensal fixo de R$3.600,00. Nessas condições, quanto de imposto de renda esse contribuinte deve ter pago em 2016? Analisando as tabelas 1 e 2, você julga que a nova tabela beneficiou ou não o determinado contribuinte? Por quê?

6. A Tabela 3 foi obtida excluindo-se a terceira coluna da Tabela 2.

Tabela 3 - Exercício de 2016, ano-calendário a partir de Abril de 2015.

Base de cálculo mensal (R$)	Alíquota (%)
Até 1.903,98	-
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5
De 2.826,66 até 3.751,05	15
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5
Acima de 4.664,68	27,5

Fonte: Adaptada de http://www.dpc.com.br/pt-br/show/tabela-progressiva-do-imposto-de-renda. Acesso em: 14/04/2016

Use a Tabela 3 para encontrar qual é a função que descreve o imposto de renda a partir de Abril de 2015 e estude a sua continuidade.

TAREFA 13[135]

Acadêmicos: ____	Data:___________

1. Um ciclista fez um pedal no fim de semana e ao retornar para sua casa, o aplicativo usado para medir a altitude em função da distância percorrida indicava o gráfico ilustrado na Figura 1.

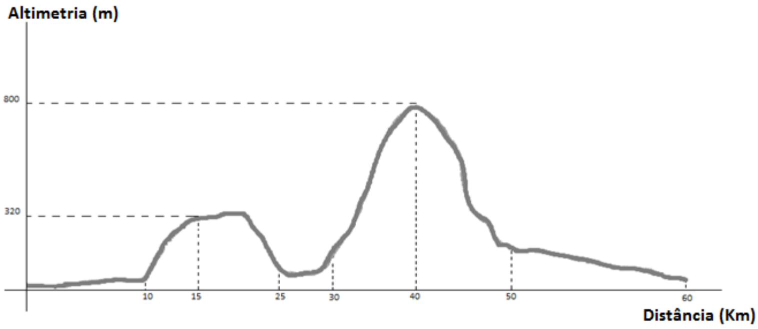


Figura 1 – Altimetria x Distância Percorrida

Ainda com base nas informações do aplicativo foi possível obter as informações apresentadas na Tabela Sabendo que a *velocidade média* é dada por $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$, onde ΔS é a variação do espaço e Δt é a variação do tempo, preencha a Tabela 2, usando a Tabela 1.

Tabela1

Tempo (min)	Posição (km)
25	10
55	15
75	25
90	30
190	40
210	50
235	60

Tabela 2

Intervalo (min)	Δt (min)	Δt (h)	$\Delta S (km)$	Velocidade Média (km/h)
[0,25]				
[25,55]				
[55,75]				
[75,90]				
[90,190]				
[190,210]				
[210,235]				

Qual foi a velocidade média do pedal?

---

135 *A Atividade 1 foi adaptada da dissertação de mestrado de ABDELMALACK (2011). A primeira versão da atividade 1 foi compartilhada com a professora* [redacted]*. O problema 1 desta versão final desta atividade é uma readaptação da atividade reformulada pela* [redacted]*, baseada em sua experiência como ciclista.*

4. Considere agora que temos ainda as seguintes informações fornecidas na Tabela 3, onde $t_0 = 150min$ e que o tempo final $t_f = t_0 + \Delta t$. Determine a velocidade média para os intervalos de tempo cada vez menores, conforme indicados na Tabela 3.

Tabela 3 – Velocidade média para pequenas variações no tempo

$\boldsymbol{t_f}$ (min)	$\boldsymbol{\Delta t}$ (min)	$\boldsymbol{\Delta t}$ (h)	$\boldsymbol{\Delta S}$ (Km)	$\boldsymbol{v_m}$ (km/h)
154			0,43	
152			0,21	
151			0,1	
150,5			0,048	
150,25			0,0235	
150,1			0,0091	
150,01			0,000901	

A seguir, responda:

a. O que você pôde observar com relação aos valores $\boldsymbol{\Delta t}$?

b. Qual o valor que você acredita que seja a velocidade no instante $\boldsymbol{t = 150\ min}$? Por quê?

5. Assumindo que $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ e $x_0 = 1$, calcule a taxa média de variação $\Delta f\ /\ \Delta x$, completando a tabela 4.

Tabela 4

$x_0 + \Delta x$	Δx	$f(x_0 + \Delta x)$	$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$	$\Delta f\ /\ \Delta x$
1,5				
1,2				
1,1				
1,01				
1,001				

a. O que você pôde observar com relação aos valores Δx?

b. O que você acha que ocorre com a taxa de variação no instante em que $x_0 = 1$? Por quê?

Definição: A **derivada de uma função $\boldsymbol{f}$ no ponto** em que $x = x_0$, denotada por $f'(x_0)$, é definida como sendo o limite da taxa média de variação, ou seja,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

c. Considerando a definição acima e os valores obtidos na Tabela 4, o que você acredita que seja a derivada de $f$em $\boldsymbol{x_0 = 1}$? Por quê?

d. Se você considerar um $\boldsymbol{x_0}$ qualquer (genérico), o que encontraria por $\boldsymbol{f'(x_0)}$?

TAREFA 14

Acadêmicos: ____	Data:__________

1. Seja *C* o gráfico da função $f(x) = x^2$.

   a. Sabendo que a *reta secante* ao gráfico de uma função *f* é definida como sendo uma reta que intercepta ao menos em dois pontos o gráfico de *f*, determine o coeficiente angular da reta secante a *C* que passa pelos pontos:

      i. $P(2,4)$ e $Q(0,0)$;

      ii. $P(2,4)$ e $Q(1,1)$;

      iii. $P(2,4)$ e $Q\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$;

      iv. $P(2,4)$ e $Q(1,9; 3,61)$;

      v. $P(2,4)$ e $Q(x_0, x_0^2)$.

   b. Represente geometricamente o gráfico de *f* e, no mesmo plano cartesiano, trace as retas secantes que passam pelos pontos P e Q dados no item a.

   c. O que você pode observar com relação aos valores das abscissas dos pontos *Q* (do item b) com relação ao valor da abscissa de *P*?

   d. O que pode falar a respeito de como se determina o coeficiente angular da reta tangente a C em *P*? Por quê?

TAREFA 15

Acadêmicos: ____	Data:__________

1. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.
   a. Se você considerar um x_0 qualquer (genérico), o que encontraria por $f'(x_0)$? Use a definição de derivada no ponto para responder.
   b. Assumindo que $a = 2$, $b = -8$ e $c = 3$, qual a derivada de f quando $x_0 = 1$.
   c. Qual é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto cuja abscissa é 1?

> <u>Definição 1:</u> O coeficiente angular de uma reta tangente (m_t) ao gráfico de f no ponto $P\big(x_0, f(x_0)\big)$, pertencente ao domínio de f, é definido como
>
> $$m_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

   d. Na Figura 1 está representado o gráfico de $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ (item b), use o quadriculado desta figura para representar graficamente a reta tangente determinada no item c.

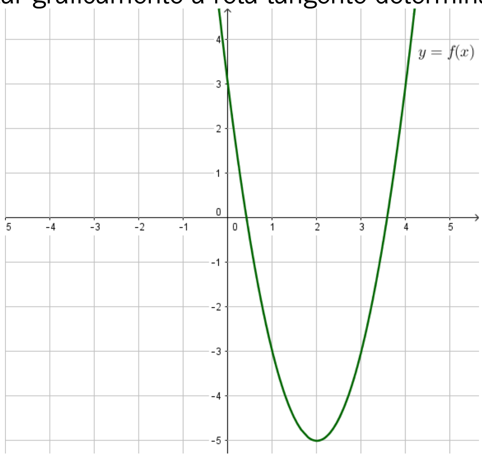


Figura 1

   e. Agora, se ao invés de considerar $\boldsymbol{x = x_0}$, você usasse x na definição de derivada no ponto, como ficaria a resposta $\boldsymbol{f'(x)}$?

> <u>Definição 2:</u> A **derivada de uma função $\boldsymbol{f}$**, denotada por f' é definida como sendo o limite da taxa média de variação, ou seja,
>
> $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (2)$$
>
> O domínio de f' consiste em todos os x do domínio de f com os quais existe o limite (2). Nestes pontos,

   f. Represente no quadriculado da Figura 1, a função $f'(x)$ encontrada no item e.
   g. Se você considerar $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, então o que encontraria por $f'(x)$?

TAREFA 16

Acadêmicos: ______________________________	Data:__________

1. Sejam a e $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Em cada item, obtenha a primeira derivada de y com relação à x, ou seja, determine $\frac{dy}{dx}$, mostrando passo a passo como chegou a conclusão.

   a) $y = (ax + b)^2$ b) $y = (ax + b)^3$ c) $y = (ax + b)^4$

   d) A partir dos resultados encontrados nos itens anteriores, consegue conjecturar qual é a primeira derivada de y com relação a x se $y = (ax + b)^n$, para $n \in \mathbb{N}$? Por quê?

2. Considerando $a \in \mathbb{R}^*$, em cada item, obtenha $\frac{dy}{dx}$, mostrando passo a passo como chegou à conclusão.

   a) $y = ln^2(ax)$ b) $y = ln^3(ax)$ c) $y = ln^4(ax)$

   d) A partir dos resultados encontrados nos itens anteriores, consegue conjecturar qual é a primeira derivada de y com relação a x se $y = ln^n(ax)$, para $n \in \mathbb{N}$?

3. Seja g uma função diferenciável em $\mathbb{R}$. Em cada item, obtenha $\frac{dy}{dx}$, mostrando passo a passo como chegou à conclusão.

   a) $y = \left(g(x)\right)^2$ b) $y = \left(g(x)\right)^3$ c) $y = \left(g(x)\right)^4$

   d) A partir dos resultados encontrados nos itens anteriores, consegue conjecturar qual é a primeira derivada de y com relação a x se $y = \left(g(x)\right)^n$, para $n \in \mathbb{N}$?

TAREFA 17

Acadêmicos: ______________________________________	Data:___________

1. Considere a função $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^3 + 1$ e $g(x) = 3x - 9$, cujos gráficos estão abaixo na Figura 1.

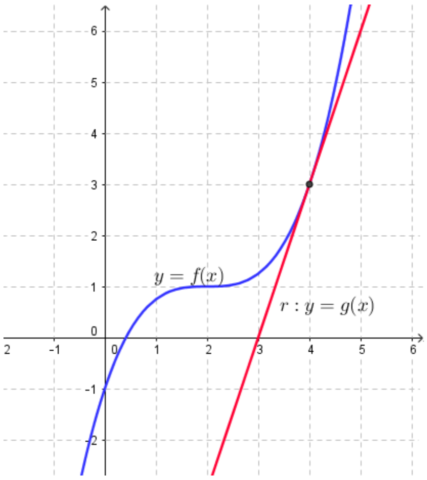


Figura 1

a. Observando os gráficos ilustrados na Figura 1, você acha que existe alguma relação entre as funções f e g? Se a resposta for afirmativa, qual a relação?

b. Determine a função $f'(x)$.

c. Considerando que $x_0 = 4$, preencha os dados solicitados na tabela abaixo.

x_1	4,1	4,05	4,02	4,01	4,005
$\Delta x = x_1 - x_0$					
$f(x_1)$					
$g(x_1)$					
$f(x_1) - g(x_1)$					
$f'(x_0)$					
$dy = f'(x_0).\Delta x$					
$\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$					
$\lvert dy - \Delta y \rvert$					

d. Com base nos valores calculados na tabela acima, o que você pôde observar com relação aos valores do diferencial dy e do incremento Δy?

e. O que você pode conjecturar que ocorre com os valores da função f comparados com os valores da função g próximos (na vizinhança) do ponto $P(4,3)$?

TAREFA 18

Acadêmicos: ______________________________	Data:__________

1. Considere a função f cujo gráfico está ilustrado na Figura 1.

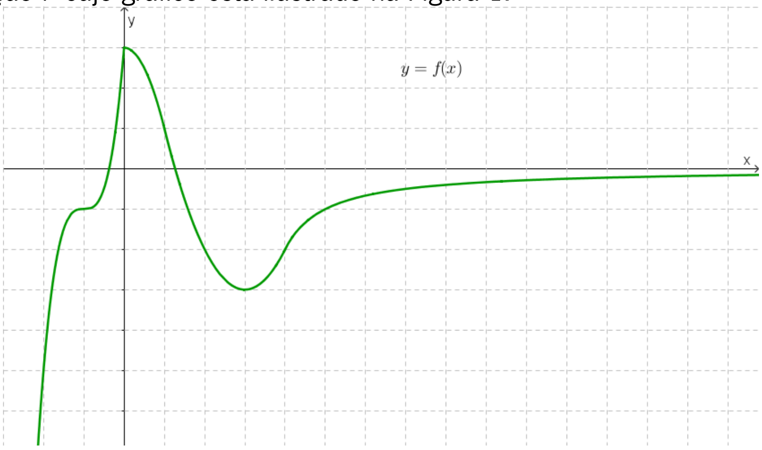


Figura 1

a. Você acredita que f tem um valor máximo? E valor mínimo? Caso afirmativo, em que ponto(s)? Justifique sua resposta.

b. Em que intervalo(s) f é crescente? E decrescente?

c. A função f é contínua em todo seu domínio? Por quê?

d. A função f é diferenciável em todo seu domínio? Por quê?

e. Na Figura 1 represente segmentos de retas tangentes ao longo de todo o domínio de f. A seguir, responda, em que intervalos as retas tangentes tem inclinação positiva? E negativa? E nula?

f. Compare suas respostas dos itens “e” e “b”. Conjecture alguma relação entre o (de)crescimento de uma função e o sinal da primeira derivada?

g. Em que intervalo(s) f tem concavidade voltada para baixo? E para cima?

h. Na Figura 2 encontra-se o gráfico da primeira derivada de f. Use-o para identificar em que intervalos a função f' é (de)crescente?

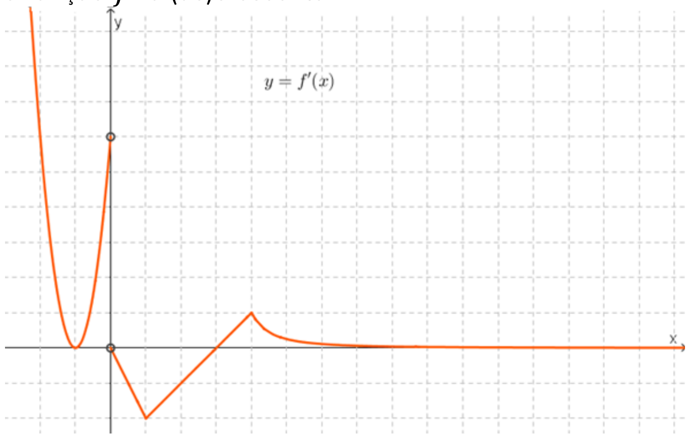


Figura 2

i. A Figura 3 apresenta os gráfico de f e f' sobrepostos. Use os itens "g" e "h" para conjecturar alguma possível relação existente entre a concavidade de uma função e o (de)crescimento da primeira derivada de f.

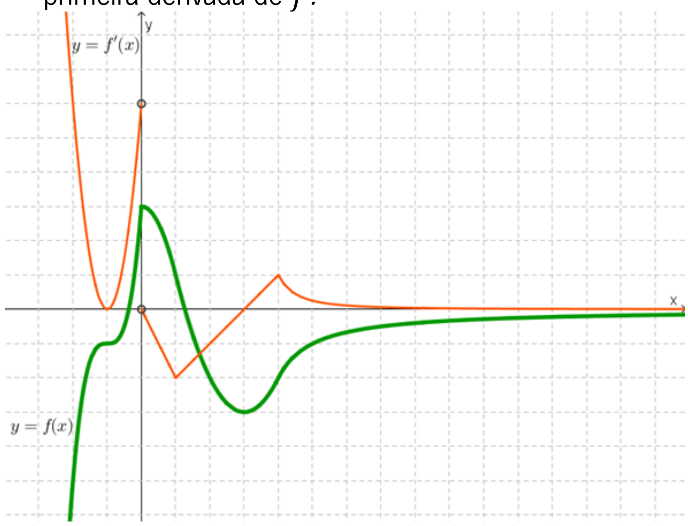


Figura 3

j. A Figura 4 apresenta o gráfico da segunda derivada de f. Em que intervalos f'' é positiva? E negativa? E nula?

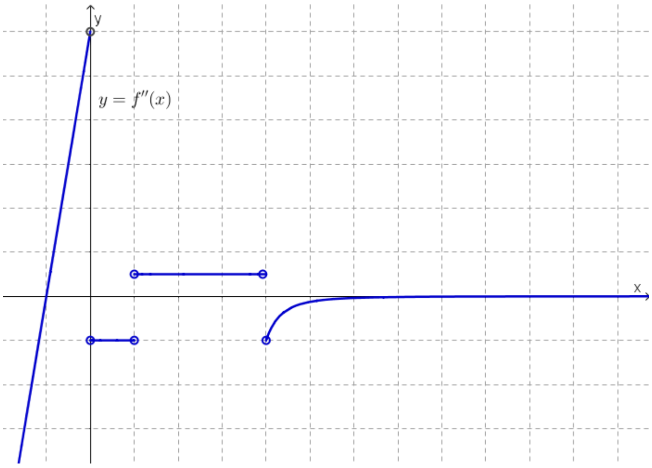


Figura 4

k. A Figura 5 apresenta os gráficos de f' e f'' sobrepostos. Use os itens "h" e "j" para conjecturar alguma possível relação existente entre (de)crescimento de f' com o sinal de f''.

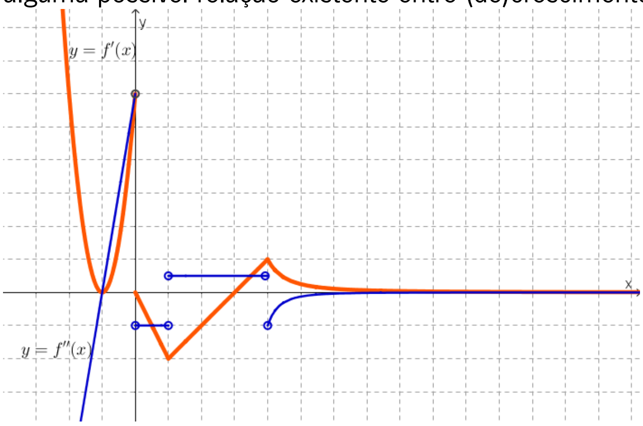


Figura 5

l. A Figura 6 apresenta os gráficos de f e f'' sobrepostos. Use os itens "g" e "j" para conjecturar a relação entre a concavidade de f e o sinal de f''.

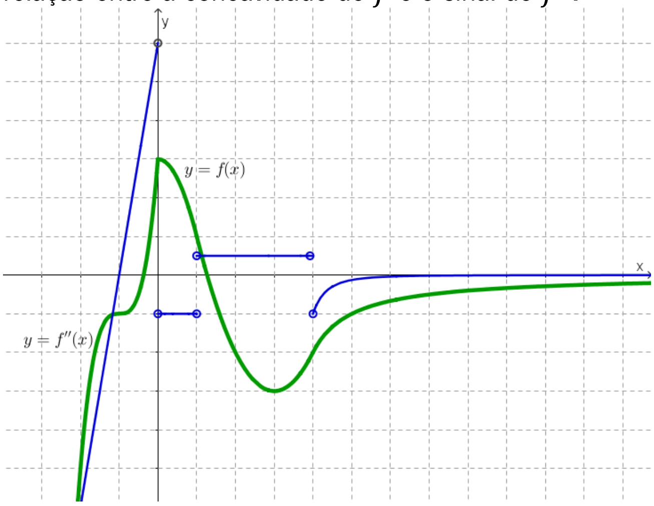


Figura 6

TAREFA 19

Acadêmicos: ______________________________	Data:__________

PROBLEMA (Adaptado de ANTON, 2014)

Uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um pedaço retangular de papelão cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando-se para cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa poderá ter.

Registre/descreva nesta folha o raciocínio utilizado.

Anexo 13

Inquérito aplicado antes da realização das atividades de FP

Prezado(a) Acadêmico(a):

Este questionário tem como objetivo avaliar a sua opinião sobre Resolução de Problemas (RP) e formulação de problemas. Essa atividade está vinculada ao Projeto de Pesquisa “Ensino de Cálculo Diferencial e Integral: na perspectiva de Resolução de Problemas”. Ao responder esse questionário você estará dando a oportunidade das professoras-pesquisadoras refletirem sobre as atividades diferenciadas que poderão serem desenvolvidas em sala de aula mediadas pela metodologia de RP e permitindo que as mesmas possas elaborar ações que visem melhorar a qualidade de suas atividades de docência. Consequentemente, por meio dessa mudança de postura da professora-pesquisadora, as mesmas poderão contribuir positivamente com o ensino e a aprendizagem de CDI. Não há a necessidade de se identificar.

Agradecemos a colaboração!

Este questionário foi extraído do artigo “A formulação de problemas na aprendizagem de derivada de uma função” de Maria do Carmo Cunha, Paula Mendes Martins e Floriano Viseu ProfMat, 2014.

Curso: ____

1. Em sua opinião, qual é a diferença entre exercício e problema?

____
____
____
____

2. Que estratégia(s) você utiliza na resolução de um problema?

____
____
____
____

3. Em sua opinião, qual a importância da resolução de problemas no dia-a-dia?

____
____
____

O que você entende por formulação de um problema?

____
____
____

4. Em sua opinião, qual a importância do aluno ser desafiado a formular problemas?

____
____
____
____