Lutete Lenda Sistemas Bonus-Malus na atividade seguradora

UMinho | 2019

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Lutete Lenda

Sistemas Bonus-Malus na atividade seguradora

abril de 2019

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Lutete Lenda

Sistemas Bonus-Malus na atividade seguradora

Dissertação de Mestrado
Mestrado em Estatistica

Trabalho efetuado sob a orientação de
Irene Brito: Universidade do Minho
Patrícia Gonçalves: Instituto Superior Técnico

abril de 2019

Direitos de autor e condições de utilização do trabalho por terceiros

Epígrafe

Os erros causados por dados inadequados são muito menores
do que aqueles devido à falta total de dados.

Charles Babbage (1791-1871), matemático inglês

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.
Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

Dedicatória

Dedico este trabalho à nova etapa da minha vida, cheia de sonhos
e objetivos, dos quais farei o possível de alcança-los
ao lado de todos aqueles que me amam.

Agradecimentos

Começo primeiramente a agradecer à DEUS, o dono de tudo e de todos. Este trabalho só foi possível graças à colaboração de forma direta e indiretamente de certas das quais quero deixar palavras de reconhecimento e gratidão:

À Doutora Patrícia Gonçalves e à Doutora Irene Brito pela disponibilidade incondicional e interesse na elaboração deste trabalho e também pela motivação na escrita em LaTeX.

Aos meus pais pelo encorajamento e a indispensável ajuda moral durante o percurso académico. Ao meu irmão MSc. Nsiku Lutete que sempre me apoiou financeiramente.

Por fim, uma palavra de amor à minha noiva, que sempre esteve comigo nos bons e maus momentos e que brevemente estaremos casados.

Sistemas Bonus-Malus na atividade seguradora

Resumo

Os sistemas Bonus-Malus são sistemas utilizados pelas seguradoras que têm como objetivo premiar os condutores que não têm sinistros e agravar as condições dos que apresentam sinistralidade. O sistema Bonus-Malus existe em todas as seguradoras embora cada uma tenha os seus critérios. É difícil encontrar dois sistemas de Bonus-Malus iguais no mercado. Há seguradoras que podem agravar os seguros até aos 300% ou 400% e outras que podem bonificar até aos 50% ou 60%. Se um segurado tiver bónus e depois for responsável por um sinistro, podem existir sistemas que lhe retirem a totalidade de bónus de uma vez só e outros que o façam de forma gradual.
O objetivo deste trabalho consiste em estudar o antigo sistema português de tarifação *a posteriori* e determinar os prémios nesse sistema usando técnicas da análise de cadeias de Markov, que permitem codificar a evolução temporal dos clientes na escala Bonus-Malus.
Com este propósito, foram descritas metodologias utilizando os seguintes conceitos de processos estocásticos: cadeias de Markov a tempo discreto, distribuições estacionárias, prémios médios estacionários e processos de contagem.
Por fim, efetuou-se uma análise do antigo sistema Português associada em diferentes valores da frequência de sinistralidade.

Palavras-chave: Cadeias de Markov, Processos estocásticos, Sistemas Bonus-Malus.

Bonus-Malus systems in insurance business

Abstract

The Bonus-Malus systems are systems used by insurance companies that aim to reward drivers who have no claims and aggravate the conditions of those who have claims. The Bonus-Malus system exists in all insurance companies although each has its own criteria. It is difficult to find two equal Bonus-Malus systems on the market. There are insurance companies that can aggravate insurance up to 300% or 400% and others that can qualify up to 50% or 60%. If you have bonus and then you are responsible for a claim, there may be systems that remove all bonus at once and others that do so gradually.

The objective of this work is to study the old Portuguese charging system and to determine the premiums in this system using Markov chain analysis techniques, which allow coding the time evolution of customers on the Bonus-Malus scale.

For this purpose, methodologies were described using the following stochastic process concepts: discrete-time Markov chains, stationary distributions, stationary mean prizes and counting processes. Finally, an analysis of the old associated Portuguese system was carried out in different values of the accident frequency.

Keywords: Markov chains, Stochastic processes, Bonus-Malus systems.

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Pagar seguros não é certamente um exercício de agrado de ninguém. Com alguma frequência, existe o preconceito de que as seguradoras existem somente para receber contribuições (prémios) e não para pagar sinistros. Além disso, quando o cliente necessita da sua seguradora, é porque algo de negativo aconteceu: acidente automóvel até à perda de vidas humanas, Gilberto (2012).
O seguro de responsabilidade civil automóvel é, sem dúvidas, o mais popular de todos os seguros e o mais representado na estrutura das carteiras de qualquer seguradora em Portugal, no que respeita a seguros do ramo não vida. Em simultâneo, é também um dos seguros com maior taxa de sinistralidade, Gilberto (2012).

No seguro de responsabilidade civil automóvel, a quantidade das apólices é, geralmente, elevada e a seguradora tem foco principal que consiste na dispersão do risco, onde, os segurados são agrupados consoante a semelhança de riscos associados na tarifação *a priori*. Mas nem sempre os agrupados na mesma classe apresentam o mesmo risco. Após uma anuidade de experiência, o prémio é corrigido tendo em conta a sinistralidade ocorrida. Assim sendo, tem-se uma tarifação *a posteriori*.

Existem vários sistemas de tarifação *a posteriori* dos quais os mais comuns são: sistemas Bonus-Malus, NCD (*No Claim Discount*) e *Experience Rating*. Mas todos estes sistemas têm o mesmo foco de bonificar os segurados que não apresentam sinistros e penalizar os que originam sinistralidade. Os sistemas Bonus-Malus são sistemas de tarifação usados em seguros de responsabilidade civil do ramo automóvel, um tipo de seguros não vida, em que para cada segurado, além deste ser tarifado de acordo com um certo número de variáveis *a priori* que traduzem determinadas características, é feita a revisão do prémio *a posteriori* tendo em conta a sinistralidade

observada do segurado. Segundo estes sistemas, um segurado que originou sinistros é penalizado através de um agravamento do prémio (malus) e um segurado que não declarou sinistros é bonificado (bónus).
O sistema Bonus-Malus genérico assenta no seguinte: o prémio básico, que tem de ser pago por clientes que não possuem um histórico de indemnizações passadas, é determinado tendo em conta as características do automóvel, bem como o tipo de cobertura associada. Os Bonus e Malus para as respetivas indemnizações são implementados a partir de uma escala Bonus-Malus. A posição dos clientes na escala Bonus-Malus depende do número de indemnizações ocorridas durante um ano civil.

Com o objetivo de estudar o antigo sistema Bonus-Malus aplicando técnicas de cadeias de Markov, este trabalho encontra-se dividido em quatro capítulos:

* No capítulo 1 faz-se uma breve introdução aos seguros de responsabilidade civil automóvel focando-se no funcionamento dos sistemas de tarifação *a posteriori*, nomeadamente, sistema Bonus-Malus.

* No capítulo 2 são abordados os conceitos do processo Markoviano. Para melhor interpretação desse processo, foram ainda abordadas: a teoria da probabilidade, o processo estocástico (em geral) e o caso específico de cadeias de Markov em tempo discreto.

* No capítulo 3 estuda-se o sistema Bonus-Malus, começando com um exemplo de aplicação desse sistema. Foi ainda estudada a definição do sistema Bonus-Malus sugerida por Centeno (2003), seus elementos que o constituem e a matriz de probabilidades de transição.

* O capítulo 4 destina-se à análise do antigo sistema português com aplicação dos conceitos apresentados nos capítulos anteriores. Considerou-se diferentes valores da frequência da sinistralidade e foram determinadas as matrizes de probabilidades de transição até à sua estacionaridade. Por outro lado, achou-se interessante determinar os prémios médios estacionários desse sistema comparando as diferentes evoluções deste prémios.

* No último capítulo foram apresentados alguns comentários e conclusões.

Capítulo 2

Processo Markoviano

2.1 Teoria da probabilidade

Na formalização matemática, a probabilidade não é nada mais do que um termo para a medida do grau de possibilidade de um acontecimento incerto se realizar. Vai-se definir alguns conceitos que têm preenchido as noções primitivas de probabilidade e sobretudo porque permitem cristalizar ideias a quem pela primeira vez aborda o estudo da teoria da probabilidade.
A teoria da probabilidade tem as suas raízes em situações reais, nas quais, ao realizar uma experiência, o resultado não é previsto com certeza. Existe uma variedade de experiências, como por exemplo o jogo de azar, no qual, o seu resultado, à partida, não é conhecido com certeza antes da sua realização. No que segue, relembra-se alguns conceitos e propriedades de teoria da probabilidade.

Definição 2.1.1 Experiência aleatória
Uma experiência aleatória é definida como sendo uma experiência na qual:

1. Todos os resultados possíveis da experiência são conhecidos previamente;

2. O resultado de qualquer realização da experiência não é previamente conhecido, sendo portanto, incerto;

3. A experiência pode ser repetida sob condições idênticas.

Imagine agora numa experiência aleatória qualquer, que em cada realização se obtém um conjunto de resultados elementares (ou individuais) pertencente a um determinado conjunto denotado por $P(\Omega)$, sendo Ω um conjunto formado por todos os resultados elementares possíveis da experiência.

Uma vez encontrado o espaço de resultados Ω da experiência aleatória, temos que encontrar $\mathscr{F}$, uma σ-álgebra (conceito que será introduzido abaixo) de subconjuntos de Ω que contenha todos os acontecimentos decorrentes da experiência que se quer probabilizar.

Definição 2.1.2 Espaço amostral
Em teoria da probabilidade, um espaço amostral, denotado por Ω, de uma experiência aleatória é o conjunto de todos os resultados possíveis da experiência.

Por exemplo, se a experiência é lançar uma moeda ao ar e verificar a face voltada para cima, o espaço amostral é o conjunto $\{cara, coroa\}$; para o lançamento de um dado de seis faces o espaço amostral é $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Definição 2.1.3 σ-álgebra
Seja $E \in \Omega$ um conjunto não vazio e $\mathscr{F}$ uma família de subconjuntos de Ω. $\mathscr{F}$ diz-se uma σ-álgebra sobre Ω se satisfaz as seguintes condições:

1. $\Omega \in \mathscr{F}$;
2. Se $E \in \mathscr{F}$, então $E^c \in \mathscr{F}$;
3. Se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de elementos de $\mathscr{F}$ então $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{F}$.

Exemplo 2.1.1 No espaço amostral $\Omega = \{a, b\}, \mathscr{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ é uma σ-álgebra.

Propriedades de uma σ-álgebra
Se $\mathscr{F}$ é uma σ-álgebra sobre Ω, ao par $(\Omega, \mathscr{F})$ chamamos espaço mensurável e satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\emptyset \in \mathscr{F}$;
2. Se $E_1, E_2, \cdots, E_k$ são k elementos de $\mathscr{F}$ com k fixo e $k \in \mathbb{N}$ então $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} E_i \in \mathscr{F}$;
3. Se $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de elementos de $\mathscr{F}$ então $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \mathscr{F}$.

Definição 2.1.4 Medida de probabilidade
Seja $(\Omega, \mathscr{F})$ um espaço mensurável associado a uma experiência aleatória. A função $P(.)$ definida em $\mathscr{F}$ e tendo como contradomínio o intervalo $[0, 1]$, é chamada medida de probabilidade se satisfaz os seguintes axiomas:

1. $P(E) > 0$, $\forall E \in \mathscr{F}$;

2. $P(\Omega) = 1$;

3. Se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de elementos de E disjuntos dois a dois ($E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$) então $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(E_n)$. A esta propriedade chamamos de **σ-aditividade**.

Definição 2.1.5 Espaço de probabilidade
Um espaço de probabilidade é um trio $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ no qual:

1. Ω é um espaço amostral (conjunto não vazio);

2. $\mathscr{F}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω;

3. $P(.)$ é uma medida de probabilidade em $\mathscr{F}$.

Observação
Se Ω for finito ou infinito numerável (exemplo do lançamento do dado), a σ-álgebra que se pode tomar é $P(\Omega)$. Quando Ω for infinito não numerável (exemplo do espaço amostral $\Omega =]0, \infty[$), a σ-álgebra $\mathscr{F}$ não pode ser $P(\Omega)$ e terá que ser uma parte própria de $P(\Omega)$, isto é, $\mathscr{F} \subsetneq P(\Omega)$. O modelo matemático fica completo com a indicação de P, a medida de probabilidade sobre $(\Omega, \mathscr{F})$ e a experiência aleatória é então modelada por um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Quando Ω é finito e os acontecimentos elementares são equiprováveis, o espaço de probabilidade associado à experiência aleatória é $(\Omega, P(\Omega), P)$ em que P é a medida de Laplace, isto é:

$$\begin{aligned} P : P(\Omega) &\to [0, 1] \\ E \to P(E) &= \frac{\text{Número de casos favoráveis ao acontecimento de E}}{\text{Número de casos possíveis}}. \end{aligned}$$

Propriedades de uma medida de probabilidade
Seja $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ um espaço de probabilidade. A medida de probabilidade P satisfaz as seguintes propriedades:

1. Se A é um conjunto de $\mathscr{F}$ então:
   $P(A) \leqslant 1$ e $P(A^c) = 1 - P(A)$ para todo $A \in \mathscr{F}$.
   Demonstração
   $A \cup A^c = \Omega$ e $A \cap A^c = \emptyset$

do axioma 3 da medida da probabilidade vem,
$P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$
através do axioma 2, $P(\Omega) = 1$, tem-se,

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

2. Se A e B são conjuntos de $\mathscr{F}$ tais que $A \subseteq B$ então $P(B) \geqslant P(A)$.
   Demonstração
   Observe que $B = A \cup (B \cap A^c)$ e que A e $(B \cap A^c)$ são dois conjuntos disjuntos de $\mathscr{F}$. Pela definição da medida da probabilidade temos:
   $P(B) = P(A) + P(B - A) \Leftrightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$, temos ainda que $P(B) - P(A) \geqslant 0$, logo $P(B) \geqslant P(A)$.

   Nota: $A - B$ é a diferença do conjunto A pelo conjunto B, matematicamente tem-se, $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

3. Sejam A e B quaisquer conjuntos de $\mathscr{F}$, então $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$.
   Demonstração
   Observe que $B = (B - A) \cup (B \cap A)$, onde $(B - A)$ e $(B \cap A)$ são conjuntos disjuntos de F, logo $P(B) = P(B - A) + P(B \cap A) \Leftrightarrow P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)$.

4. Sejam A e B quaisquer conjuntos de $\mathscr{F}$, então $P(B \cup A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
   Demonstração
   Observe que $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$, onde $(A - B), (B - A)$ e $(A \cap B)$ são conjuntos disjuntos de $\mathscr{F}$. Pela definição de medida de probabilidade temos:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

5. Sejam $E_1, E_2, \cdots, E_k$ quaisquer k elementos de $\mathscr{F}$ com $k \in \mathbb{N}$ e $k \geqslant 2$, tem-se que $P\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(E_i) - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} P(E_i \cap E_j) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} \sum_{l=j+1}^{k} P(E_i \cap E_j \cap E_l) - \cdots + (-1)^{k+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i\right)$. Esta propriedade é conhecida como a fórmula de POINCARÉ (**Regra da inclusão-exclusão**).

Demonstração
ver Pestana e Velosa [12].

6. Seja $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $\mathscr{F}$, tem-se,
$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} P(E_n)$.
Demonstração
Considere a seguinte sucessão $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathscr{F}$:
$B_1 = A_1$
$B_2 = A_2 \cap A_1^c$
$B_3 = A_3 \cap A_2^c \cap A_1^c$
$\vdots$
$B_n = A_n \cap A_{n-1}^c \cap \cdots \cap A_1^c$
A sucessão $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de elementos de $\mathscr{F}$ disjuntos dois a dois tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ então $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$. Usando a propriedade σ-aditividade (axioma 3) tem-se $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(B_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.

Definição 2.1.6 σ-álgebra de Borel
Considere $\Omega = \mathbb{R}$. A σ-álgebra mais importante em probabilidade é a chamada σ-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$, denotada por $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Definição 2.1.7 Variável aleatória
Diz-se que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória se, e só se, for uma função Borel-mensurável, isto é, se a imagem inversa de todo Boreliano $B \in \mathscr{B}$ for um acontecimento em $\mathscr{F}$, isto é:

$$\forall B \in \mathscr{B}, X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathscr{F}.$$

Esta propriedade é usualmente denotada por $X \in \mathscr{F}$.

Definição 2.1.8 Probabilidade condicional
Sejam dois acontecimentos A e $B \in \mathscr{F}$. A probabilidade condicional dos acontecimentos A e B é definida por:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ se } P(B) > 0. \tag{2.1.1}$$

Teorema 2.1.1
Seja $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $B \in \mathscr{F}$, com $P(B) > 0$. Então

$(\Omega, \mathscr{F}, P(. \mid B))$ é um espaço de probabilidade.

Demonstração

A prova deste teorema necessita destacar que $P(A \mid B)$ verifica:

1. Da expressão (2.1.1);
2. $P(\Omega \mid B) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1;$
3. Sendo $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, uma sequência de acontecimentos incompatíveis, dois a dois, em $\mathscr{F}$, então:
$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathscr{F}$$

e

$$P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_K \mid B\right) = \frac{P\left[\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_K\right) \cap B\right]}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_K \cap B)\right)}{P(B)}$$
$$= \frac{\sum_{k\in\mathbb{N}} P(A_k \cap B)}{P(B)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} P(A_k \mid B).$$

Nota: A e B são acontecimentos incompatíveis se $P(A \cap B) = 0$.

Assim fica provado que $P(. \mid B)$, com $P(B) > 0$, é uma função de probabilidade em $\mathscr{F}$, gozando das propriedades inerentes e, consequentemente $(\Omega, \mathscr{F}, P(. \mid B))$ é um espaço de probabilidade.

Definição 2.1.9 Partição de Ω

Diz-se que a família de acontecimentos $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}$ é uma partição de Ω se satisfaz as seguintes condições:

1. $A_i \cap A_j = 0 \ \forall i \neq j;$
2. $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \Omega.$

Teorema 2.1.2 Probabilidade total

No espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, se $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, é uma partição de Ω, então, $\forall B \in \mathscr{F}$,

$$P(B) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P(A_k)P(B \mid A_k). \tag{2.1.2}$$

Demonstração

Como B é um subconjunto de Ω, podemos escrevê-lo como $B \cap \Omega$, expressando Ω como união dos A_k, ou seja, $B = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} (B \cap A_k)$ sendo que $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \emptyset$, $\forall i \neq j$.

Assim:

$$\begin{aligned} P(B) = P(B \cap \Omega) = P\left[B \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right)\right] &= P\left[\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (B \cap A_k)\right] \\ = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(B \cap A_k) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} P(A_k) P(B \mid A_k). \end{aligned}$$

Teorema 2.1.3 Teorema de Bayes

Se $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma partição de Ω, então, $\forall B \in \mathscr{F}$, para o qual $P(B) > 0$, ter-se-á:

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j) P(B \mid A_j)}{\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} P(A_k) P(B \mid A_k)}. \tag{2.1.3}$$

Demonstração

Por definição,

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} \tag{2.1.4}$$

e

$$P(B \mid A_j) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(A_j)}. \tag{2.1.5}$$

Através da expressão (2.1.2) da probabilidade total,

$$P(B) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(A_k) P(B \mid A_k). \tag{2.1.6}$$

De (2.1.5) tem-se

$$P(A_j \cap B) = P(A_j) P(B \mid A_j). \tag{2.1.7}$$

Substituindo (2.1.6) e (2.1.7) em (2.1.4) tem-se

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j) P(B \mid A_j)}{\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} P(A_k) P(B \mid A_k)}.$$

Definição 2.1.10 Independência

Seja $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ um espaço de probabilidade. Considere dois acontecimentos A e $B \in \mathscr{F}$. Os acontecimentos A e B dizem-se independentes se e só se:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B). \tag{2.1.8}$$

Teorema 2.1.4
Se A e $B \in \mathscr{F}$ são independentes num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, então:
$P(B \mid A) = P(B)$, se $P(A) > 0$;
$P(A \mid B) = P(A)$, se $P(B) > 0$.
Demonstração
A demonstração é imediata, usando as equações (2.1.1) e (2.1.6).

2.2 Processos estocásticos

Cada um de nós já se deparou com situações em que o acontecimento é imprevisível, por exemplo, no caso do tempo que demora até encontrar um emprego, o número de pessoas numa fila de espera de uma seguradora, número de acidentes de viação ocorridos, etc. Todas essas situações manifestam a imprevisibilidade que correspondem aos fenómenos que são influenciados pelo acaso. Por esta razão, fenómenos esses são considerados como fenómenos aleatórios com uma forte característica de que, mesmo sendo observado o atual não se consegue conhecer de forma exata os fenómenos futuros.
Foi introduzida a teoria da probabilidade com foco no estudo da teoria matemática que descreve o comportamento dos fenómenos realizados com base nos conceitos da experiência aleatória. Com isso, pode-se dizer que quando se trata de um estudo que requer a evolução da variável aleatória $S(n)$ ao longo do tempo, trata-se do processo estocástico, ou seja, existem modelos de probabilidade para processos que evoluem no tempo de maneira probabilística, a esses processos denominamos por processos estocásticos.

Definição 2.2.1 Processo estocástico
Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias $\{S(n), n \in T\}$ que representam a evolução de um sistema de valores em função do tempo n, onde T é designado por conjunto de índices do processo.

Nota-se que a definição do processo estocástico refere na realidade, uma família de funções de dois argumentos $\{S(n, \omega), n \in T, \omega \in \Omega\}$. Neste caso, para cada valor fixo de $n \in T, S(n, .)$ é uma variável aleatória definida em Ω. Por outro lado, para cada valor fixo de $\omega \in \Omega$, $S(., \omega)$ representa uma possível observação do processo estocástico e a esta observação chamamos de **realização ou trajetória do processo**.

Se $T = \{0, 1, 2, \cdots\}$ então $\{S(n),\ n \in T\}$ diz-se um processo estocástico em tempo discreto. Se $T = \mathbb{R}_0^+$, então diz-se um processo em tempo contínuo. O espaço de estados de um processo é o espaço no qual os possíveis valores de cada $S(n)$ residem. A figura 2.1 ilustra uma trajetória ou realização de um processo estocástico que representa número de passageiros de companhias aéreas internacionais no período 1949−1961 (Figura gerada no *software R* da *library(datasets), data(AirPassengers)*).

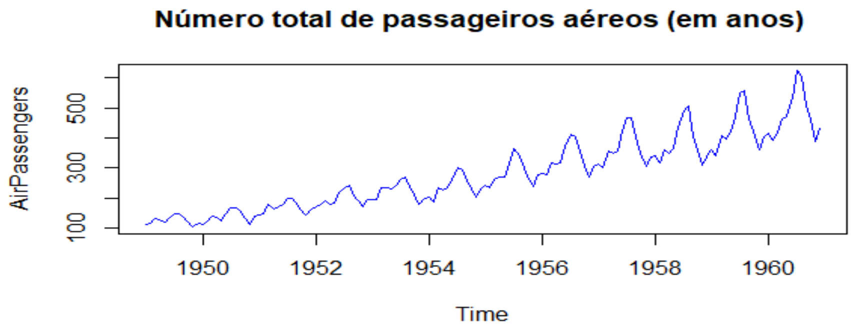

Figura 2.1: Trajetória do número de passageiros aéreos (1949 − 1961)

.

Exemplo 2.2.1
Considere os seguintes exemplos de processos estocásticos:

1. $S(n)$ representa o número de clientes atendidos numa seguradora no dia n;

2. $S(n)$ representa o valor da taxa de desemprego num determinado período n;

3. $S(n)$ representa um sinal elétrico no instante n;

4. $S(n)$ representa o número de máquinas avariadas ao fim do dia n.

Nos exemplos apresentados acima, nota-se que existem casos onde o tempo é considerado discreto (1 e 4) e contínuo (2 e 3). Neste trabalho foram considerados processos estocásticos em tempo discreto porque será tratado o sistema de tarifação *a posteriori* que envolve o número de sinistros.

Definição 2.2.3 Processo Markoviano
Um processo estocástico é um processo Markoviano se a ocorrência do estado futuro, condicionando ao passado, depender somente do estado atual, ou seja, dados os tempos $n = \{0, 1, 2, \cdots\}$, diz-se que a família de variáveis aleatórias $\{S(n) =$

$s(0), s(1), \cdots\}$ é um processo Markoviano se possuir a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} &P\{S(n+1) = s(n+1) \mid S(n) = s(n), \cdots, S(0) = s(0)\} \\ &= P\{S(n+1) = s(n+1) \mid S(n) = s(n)\}. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Os processos de Markov podem ser classificados de acordo com a natureza do seu parâmetro (discreto ou contínuo) e de acordo com a natureza do seu espaço de estados (discreto ou contínuo), logo o processo Markoviano pode ser classificado da seguinte maneira:

		Espaço de estados	
		discreto	contínuo
Natureza do parâmetro	discreto	cadeia de Markov a tempo discreto	processo de Markov a tempo discreto
	contínuo	cadeia de Markov a tempo contínuo	processo de Markov a tempo contínuo ou processo de difusão

Tabela 2.1: Classificação do processo Markoviano

Neste contexto, nos capítulos seguintes vai-se estudar com maior incidência o processo de Markov cujo espaço de estados e a natureza do parâmetro são ambos discretos.

2.3 Cadeias de Markov a tempo discreto

Definição 2.3.1 Cadeia de Markov a tempo discreto
Um processo Markoviano (como definido, do modo geral, no processo estocástico) é dito ser uma cadeia de Markov a tempo discreto quando as variáveis aleatórias $S(n)$ estiverem definidas no espaço de estado discretos e com o tempo discreto.

A probabilidade $P_{ij}^{(n,n+1)}$ é designada por probabilidade de transição num passo, ou seja, corresponde à probabilidade da cadeia estar no estado j no tempo $n+1$, sabendo que esteve no estado i no tempo n.

Definição 2.3.2 Cadeia de Markov homogénea
Uma cadeia de Markov diz-se homogénea quando a probabilidade de transição é independente da variável tempo. Neste caso, $P_{ij}^{(n,n+1)} = P_{ij}$, sabendo que P_{ij} é a

probabilidade da cadeia estar no estado i e passar para o estado j num passo.

Assumindo a homogeneidade, a probabilidade de estar no estado i e passar para o estado j num passo, no tempo n, é escrita na forma:

$$P_{ij} = P\{S(n+1) = j \mid S(n) = i\}. \tag{2.3.1}$$

A expressão (2.3.1) é conhecida como probabilidade de transitar do estado i para o estado j independentemente do tempo n (homogeneidade) e obedece às seguintes condições:

1. $P_{ij} \geqslant 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, m.$
2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1, \;\; i = 1, 2, \cdots, m.$

Nota: Considera-se a cadeia com m estados.

Existem três principais formas de representar a probabilidade de transição: pelo grafo, diagrama de árvore e pela matriz de probabilidade de transição P_{ij} como ilustrados no exemplo abaixo.

Exemplo 2.3.1
Considere uma cadeia em que dois estados discretos A e B estão identificados, assim como as probabilidades de transição num passo. A probabilidade de transitar do estado A para o estado B é $\frac{1}{2}$ e com a mesma probabilidade de permanecer em A. Estando em B, a probabilidade de transitar em A é $\frac{1}{4}$ e de permanecer em B é $\frac{3}{4}$.

Figura 2.2: Esquema de uma cadeia com dois estados

A Figura 2.2 representa uma cadeia com dois estados em apenas um passo. Se houverem mais estados, será difícil representar um grafo das transições com respetivas probabilidades. Para melhor visualização destas probabilidades em m estados é conveniente resumi-las usando a notação matricial (matriz de probabilidades de transição). De uma forma geral, a matriz de probabilidade de transição de ordem $m \times m$ é representada da seguinte maneira:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m1} & P_{m2} & \cdots & P_{mm} \end{bmatrix}$$

Cada elemento desta matriz representa a probabilidade de transição P definida em (2.3.1). A representação matricial dos estados A e B é ilustrada pela seguinte matriz:

$$P = \begin{bmatrix} P_{AA} & P_{AB} \\ P_{BA} & P_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}. \end{bmatrix}$$

Pode-se interpretar cada probabilidade desta matriz como sendo por exemplo P_{AB} a probabilidade de transitar do estado A para o estado B num passo. Como os elementos de uma linha representam as probabilidades do sistema permanecer ou transitar de um estado para o outro, então, a soma dessas probabilidades deve ser igual à unidade.

2.3.1 Equação de Chapman-Kolmogorov

A transição de um estado para o outro fica completamente especificada quando se conhece a matriz P e a distribuição de probabilidade inicial de $S(0)$, $p^{(0)} = P\{S(0) = i\},\ i = 1, 2, \cdots, m$. Conhecendo esta distribuição, de inicialmente, estar no estado i e a matriz de transição P, a probabilidade $p^{(n)}$ de estar no estado i após n transições, pode ser calculada desta forma:

$$\begin{aligned}
&p^{(1)} = p^{(0)}P \\
&p^{(2)} = p^{(1)}P = p^{(0)}PP = p^{(0)}P^2 \\
&p^{(3)} = p^{(2)}P = p^{(0)}P^2P = p^{(0)}P^3 \\
&\vdots \\
&p^{(n)} = p^{(n-r)}P^r = p^{(0)}P^n,\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 < r < n
\end{aligned}$$

Conforme referido na secção anterior, a probabilidade de transição faz parte da definição da cadeia de Markov, mas agora pretende-se determinar a mesma probabilidade de transição em n períodos de tempo, $P_{ij}^{(n)}$. Ou seja, a probabilidade de estar no estado i e passar para o estado j após n períodos que é definida por:

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(n)} &= P\{S(t+n) = j \mid S(t) = i\} \\ &= P\{S(n) = j \mid S(0) = i\},\ \ i, j = 1, 2, \cdots, m. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Por sua vez, a matriz de probabilidades de transição de ordem $m \times m$ após n passos fica:

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} P_{11}^{(n)} & P_{12}^{(n)} & \cdots & P_{1m}^{(n)} \\ P_{21}^{(n)} & P_{22}^{(n)} & \cdots & P_{2m}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m1}^{(n)} & P_{m2}^{(n)} & \cdots & P_{mm}^{(n)} \end{bmatrix}$$

e obedece às seguintes condições:

$$P_{ij}^{(n)} \geqslant 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.3.3}$$

$$\sum_{j=1}^{m} P_{ij}^{(n)} = 1, \;\; i = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.3.4}$$

Um dos métodos para obter o valor da probabilidade de transição ao fim de n períodos, $P_{ij}^{(n)}$, consiste em somar a probabilidade de cada uma das trajetórias que, partindo do estado i, conduz ao estado j após n transições. Apesar da aparente simplicidade destes cálculos, à medida que n aumenta também aumenta o número de trajetórias e o cálculo dessa probabilidade torna-se mais complexo. Esta forma de cálculo bastante eficiente é designada por *Equação de Chapman-Kolmogorov.*

Teorema 2.3.1

Seja $\{S(n)\}_n$ uma cadeia de Markov com probabilidade de transição P_{ij}. Para qualquer período de tempo em n e r, tal que $0 < r < n$, a equação de Chapman-Kolmogorov é:

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} P_{ik}^{(r)} P_{kj}^{(n-r)}. \tag{2.3.5}$$

A Figura 2.3 exibe os vários caminhos que a cadeia pode fazer, passando pelos vários pontos intermédios k no tempo r.

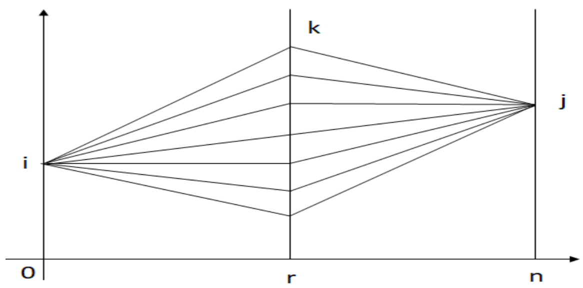

Figura 2.3: Representação do Teorema 2.3.1.

Existe um estado intermédio k no tempo r em que a probabilidade de estar no estado i e passar para o estado j em n transições é igual à soma da probabilidade de todos caminhos que levam ao estado k na r-ésima transição. Ou seja, a cadeia transita do estado i para o estado j em transições realizadas por trajetórias mutuamente exclusivas passando pelo estado intermédio $k, (k = 1, 2, \cdots, m)$.

Voltando ao Exemplo 2.3.1 pretende-se determinar na forma matricial, a probabilidade de permanecer no estado A após 3 períodos de tempo, ou seja, P^3_{AA}.

$$P^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{32} & \frac{21}{32} \\ \frac{21}{64} & \frac{43}{64} \end{bmatrix}.$$

Logo $P^3_{AA} = \dfrac{11}{32} \approx 0,344$. Pode-se determinar outra probabilidade, como por exemplo, $P^3_{BA} = \dfrac{21}{64} \approx 0,328$ em que P^3_{BA} é a probabilidade de estar no estado B e passar para o estado A em 3 passos.

E como diagrama de árvore temos:

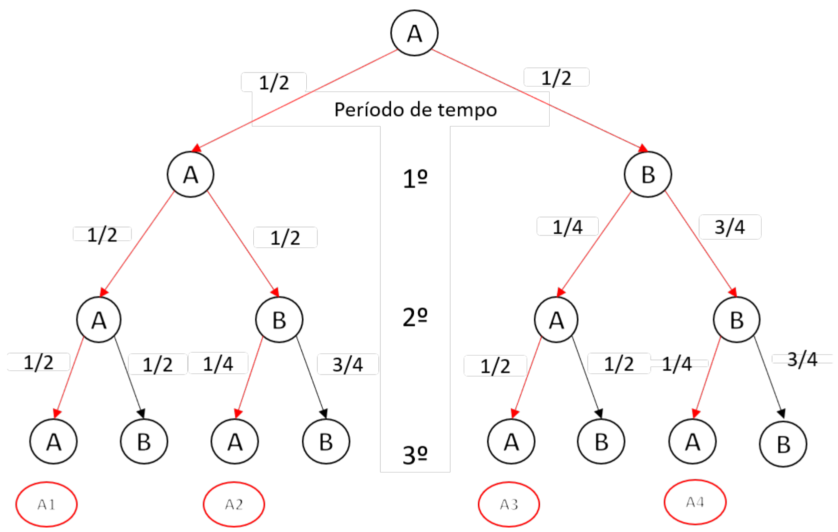

Figura 2.4: Diagrama de árvore em três passos

Suponha-se que se quer determinar a seguinte probabilidade da cadeia: estando no estado A, qual é a probabilidade de permanecer no mesmo estado ao fim de 3 passos ($n = 3$). Esta probabilidade é calculada da seguinte forma:

1. Multiplicam-se as probabilidades de todos as trajetórias possíveis até ao tempo

$n = 3$. Ou seja, calculam-se primeiramente as probabilidades de estar em A_1, A_2, A_3 e A_4 quando $n = 3$ (Ver a Figura 2.4).

* $A_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
* $A_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
* $A_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
* $A_4 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$

2. somam-se os produtos calculados em (1).

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{3}{32} = \frac{11}{32} \approx 0,344.$$

Sendo assim, a probabilidade P^3_{AA} de estar no estado A e permanecer no mesmo estado quando $n = 3$ é aproximadamente $34,4\%$.

2.3.2 Classificação dos estados

Os estados de uma cadeia de Markov a tempo discreto podem ser classificados com base na probabilidade de transição P_{ij}, onde a transição de um estado i para um estado j constitui a cadeia com probabilidade não negativa.

Definição 2.3.2.1 Estado acessível (alcançável)
Um estado j é dito acessível a partir do estado i, denotado por $i \to j$, se $\exists n \geqslant 0$, tal que $P_{ij}^{(n)} > 0$, ou seja, j é acessível (alcançável) quando j pode ser atingido a partir de i num número finito de passos n.

Definição 2.3.2.2 Estados comunicantes
Dois estados i e j são ditos comunicantes $i \rightleftarrows j$ se j é acessível a partir de i e vice-versa, quer dizer:

$$\exists n, m : P_{ij}^{(n)} > 0 \quad \text{e} \quad P_{ji}^{(m)} > 0. \tag{2.3.6}$$

Teorema 2.3.2
A relação de comunicação $\leftrightarrows$ entre os estados é uma relação de equivalência que satisfaz as seguintes propriedades. Sejam i, j, k estados de uma cadeia de Markov. Então:

1. $i \rightleftarrows i$ (Reflexividade);

2. $i \rightleftarrows j \Rightarrow j \rightleftarrows i$ (Simetria);

3. Se $i \leftrightarrows j$ e $j \leftrightarrows k$ então $i \leftrightarrows k$ (Transitividade).

Demonstração

Ver Centeno [1]

Definição 2.3.2.3 Cadeia irredutível

Uma cadeia de Markov é dita irredutível se, e só se, qualquer estado j for acessível a partir de qualquer estado i, o que significa que todos os estados são comunicantes.

Definição 2.3.2.4 Probabilidade do primeiro retorno

Considere um estado i de uma cadeia de Markov homogénea. Representa-se por $f_{ii}^{(n)}$, $n \geqslant 1$, a probabilidade da cadeia, tendo ocupado um determinado estado num determinado período, voltar pela primeira vez ao mesmo estado após n passos:

$$f_{ii}^{(n)} = P\{S(n) = i,\ S(v) \neq i, v = 1, 2, \cdots, n-1 \mid S(0) = i\}. \tag{2.3.7}$$

Definição 2.3.2.5 Estado recorrente

Um estado i diz-se recorrente se o retorno ao mesmo estado é garantido. Se $f_{ii}^{(n)}$ é a probabilidade do primeiro retorno ao mesmo estado feito em n passos, então, a soma dessas probabilidades é igual a 1. Isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1.$$

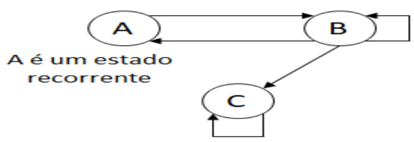

Figura 2.5: Estado recorrente.

O estado A é chamado de estado recorrente porque existe a possibilidade de retornar ao mesmo estado e que a soma dessas probabilidades é unidade.

Claramente, $f_{ii}^{(1)} = P_{ii}$ e $P_{ii}^{(n)}$ pode ser calculado recursivamente pela seguinte expressão:

$$P_{ii}^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} f_{ii}^{(r)} P_{ii}^{(n-r)}, \quad n \geqslant 1.$$

Teorema 2.3.3
O estado i é recorrente se, e somente se, $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$.

Demontração
Ver Karlin and Taylor [8].

Lema 2.3.1
Se $i \rightleftarrows j$ e i é recorrente então j também é recorrente.

Demonstração
Se $i \rightleftarrows j$, então $\exists n,\ m \geqslant 1\ :\ P_{ij}^{(n)} > 0\ \ e\ \ P_{ji}^{(m)} > 0$. Seja $\upsilon > 0$

$$P_{jj}^{(m+\upsilon+n)} \geqslant P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(\upsilon)} P_{ij}^{(n)}.$$

O que implica que:

$$\sum_{\upsilon=0}^{\infty} P_{jj}^{(m+\upsilon+n)} \geqslant \sum_{\upsilon=0}^{\infty} P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(\upsilon)} P_{ij}^{(n)} = P_{ji}^{(m)} P_{ij}^{(n)} \sum_{\upsilon=0}^{\infty} P_{ii}^{(\upsilon)}.$$

Se $\sum_{\upsilon=0}^{\infty} P_{ii}^{(\upsilon)}$ diverge, então $\sum_{\upsilon=0}^{\infty} P_{jj}^{(\upsilon)}$ também diverge.

Definição 2.3.2.6 Classe de estados
Um conjunto A de estados é chamado de classe:
a) fechada se $P_{ij} = 0,\ \forall i \in A,\ j \notin A$
b) irredutível se $i \rightleftarrows j,\ \forall i, j \in A$.

Definição 2.3.2.7 Estado transiente
Um estado i diz-se transiente, se e só se, existe um estado $j, i \neq j$ que é alcançável a partir do estado $i, i \to j$, mas o contrário não se verifica, i não é alcançável a partir do estado $j, j \nrightarrow i$, isto é, $\sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1$, para todo i como mostra a Figura 2.6.

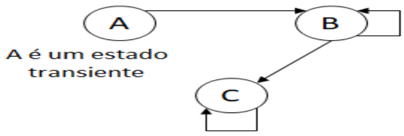

Figura 2.6: Estado transiente.

O estado A é considerado como um estado transiente, simplesmente por ser um estado que permite a transição para um qualquer outro estado mas nunca o retorno.

Definição 2.3.2.8 Estado absorvente
Um estado i é dito absorvente se é impossível sair deste estado, $P_{ij} = 0,\ \forall j \neq i$. A probabilidade de permanecer neste estado é unitária, ou seja, $P_{ii} = 1$. Com isto diz-se que um estado absorvente é um caso especial do estado recorrente (ver a Figura 2.7).

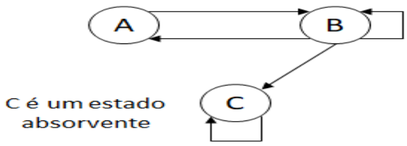

Figura 2.7: Estado absorvente.

O estado C é chamado absorvente porque uma vez transitado para esse estado, não há possibilidade de saída e que a probabilidade de permanecer ao mesmo estado C seja unidade.

2.3.2.1 Periodicidade de uma cadeia de Markov

Definição 2.3.2.1.1 Período do estado
Designa-se por período do estado i, $d(i)$, o máximo divisor comum de números inteiros positivos $n \geqslant 1$ tais que $P_{ii}^{(n)} > 0$. Se $P_{ii}^{(n)} = 0,\ \forall_n \geqslant 1$, então $d(i) = 0$.

Figura 2.8: Estados periódicos.

A Figura 2.8 mostra-nos os estados periódicos com períodos 2 e 3. Nota-se que a probabilidade do retorno ao estado i é maior que zero e o máximo divisor dos estados, para o primeiro caso, é 2. Por outro lado, o máximo divisor dos três estados é 3.

Definição 2.3.2.1.2 Cadeia aperiódica
Uma cadeia de Markov é chamada aperiódica se cada um dos seus estados tiver período 1, ou seja, se um estado i tem probabilidade $P_{ii} > 0$.

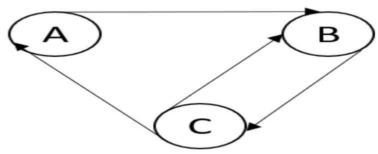

Figura 2.9: Cadeia aperiódica.

A Figura 2.9 mostra-nos que a probabilidade do retorno ao estado i é maior que zero mas que este retorno ocorre em períodos irregulares.

Teorema 2.3.4
Um período de um estado verifica:

1. Se $i \rightleftarrows j$ então $d(i) = d(j)$.

2. Se um estado i tem período $d(i)$, então existe um inteiro $K = K(i)$, onde para todos os inteiros $n \geqslant K$ vale:
$$P_{ii}^{(nd(i))} > 0,$$
onde $P_{ii}^{(nd(i))}$ significa que o retorno ao estado i pode ocorrer em todos os múltiplos suficientemente grandes do período $d(i)$.

3. Se $P_{ji}^{(m)} > 0$, então $P_{ji}^{(m+nd(i))} > 0$, $\forall_n > 0$ suficientemente grande.

Demonstração
Ver Karlin and Taylor [8].

Definição 2.3.2.9 Cadeia ergódica
Uma cadeia de Markov é dita ergódica se os seus estados forem recorrentes e aperiódicos. A probabilidade após n transições $p^{(n)} = p^{(0)}P^n$ sempre coincide com a probabilidade no estado do equilíbrio à medida que n aumenta e é independente da probabilidade inicial $p^{(0)}$.

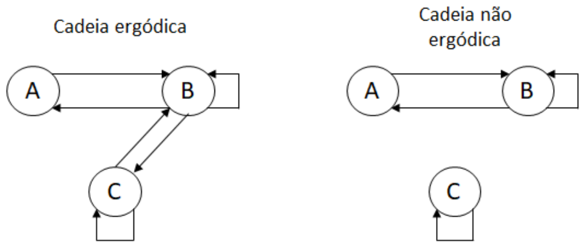

Figura 2.10: Cadeia ergódica e não ergódica.

A Figura 2.10 mostra-nos uma cadeia ergódica onde todos estados são comunicáveis garantindo a transição de um estado para qualquer outro. Enquanto que numa cadeia não ergódica nem todos estados são comunicáveis.

2.3.3 Distribuição estacionária e Teoremas Limite

Uma cadeia irredutível tem uma distribuição estacionária, se e somente se, todos os seus estados são recorrentes positivos. Nesse caso, π é único e está relacionado com o tempo médio de recorrência (ver a secção 2.3.4).

O vetor linha π é definido como a distribuição estacionária de uma cadeia de Markov se:

$$\pi_i \geqslant 0, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1. \tag{2.3.8}$$

Uma distribuição é chamada de estacionária porque π não se altera ao longo do tempo, isto é:

$$\begin{aligned}
\pi P^2 &= (\pi P)P = \pi P = \pi \\
&\vdots \\
\pi P^n &= (\pi P^{(n-1)})P = \pi P = \pi \text{ (condição de estacionaridade).}
\end{aligned}$$

A cadeia de Markov torna-se independente da distribuição inicial $p^{(0)}$ quando $n \to \infty$, quer dizer, a matriz da probabilidade de transição ficará inalterada ao longo do tempo e isso implica que $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ não depende de i.

Se uma cadeia recorrente positiva é irredutível e aperiódica, diz-se que tem uma distribuição limite, para qualquer i e j. Logo:

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j.$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$, a probabilidade de estar em cada estado j dependendo de π_i e P_{ij} é escrita da seguinte forma:

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{m} \pi_i P_{ij}, \ \forall j = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.3.9}$$

O vetor linha da distribuição estacionária, composta pelas probabilidades da expressão (2.3.9) é escrita da seguinte forma matricial:

$$\pi = \pi P. \tag{2.3.10}$$

Note-se que não existe qualquer hipótese da distribuição inicial, a distribuição limite converge com a distribuição estacionária independentemente da sua classe inicial. Se uma cadeia tem mais de uma classe comunicante fechada (não ergódica), suas distribuições estacionárias não serão únicas, cada uma terá a sua própria distribuição estacionária única π_i.

Continuando com o Exemplo 2.3.1, pretende-se agora determinar a distribuição estacionária onde a probabilidade de transição não se altera ao longo do tempo, independentemente do seu estado inicial. A Tabela 2.2 mostra-nos a distribuição de probabilidades de transição até à distribuição estacionária. Nota-se que a partir do 5º passo, a probabilidade de alcançar um estado é a mesma partindo de qualquer estado.

Passos (n)	**Iniciar em A**		**Iniciar em B**	
	P(A)	P(B)	P(A)	P(B)
1º	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{3}{4} = 0,75$
2º	$\frac{3}{8} = 0,375$	$\frac{5}{8} = 0,625$	$\frac{5}{16} \approx 0,313$	$\frac{11}{16} \approx 0,688$
3º	$\frac{11}{32} \approx 0,344$	$\frac{21}{32} \approx 0,656$	$\frac{21}{64} \approx 0,328$	$\frac{43}{64} \approx 0,672$
4º	$\frac{43}{128} \approx 0,336$	$\frac{85}{128} \approx 0,664$	$\frac{85}{256} \approx 0,332$	$\frac{171}{256} \approx 0,668$
5º	$\frac{171}{512} \approx 0,333$	$\frac{342}{512} \approx 0,667$	$\frac{171}{512} \approx 0,333$	$\frac{342}{512} \approx 0,667$

Tabela 2.2: Distribuição estacionária

A distribuição estacionária é atingida quando $n = 5$, onde as probabilidades limite dos estados A e B são: $\pi_A \approx 0,333$ e $\pi_B \approx 0,667$, respetivamente. A obtenção da probabilidade limite dos estados nem sempre ocorre tão cedo quanto parece, quando se refere ao número de passos suficientemente grandes, o cálculo da probabilidade limite torna-se mais complexo. Para este caso a expressão (2.3.10) é a mais adequada.

A distribuição estacionária dos estados A e B pode ser calculada usando a expressão (2.3.10):

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\pi_A & \pi_B\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\pi_A & \pi_B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\pi_A + \frac{1}{4}\pi_B & \frac{1}{2}\pi_A + \frac{3}{4}\pi_B\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Igualando os termos das matrizes obtém-se o seguinte sistema de duas equações a duas incógnitas:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\pi_A + \frac{1}{4}\pi_B = \pi_A\\ \frac{1}{2}\pi_A + \frac{3}{4}\pi_B = \pi_B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{1}{2}\pi_A + \frac{1}{4}\pi_B = 0 \ \ (1)\\ \ \ \frac{1}{2}\pi_A - \frac{1}{4}\pi_B = 0 \ \ (2)\end{cases}$$

Nota-se que estamos perante um sistema de equações lineares homogéneos, que tem como soluções triviais $\pi_A = 0$ e $\pi_B = 0$. Mas existe uma restrição linear $\sum_{i=1}^{2} \pi_i = 1$ onde, para o caso dos estados A e B, uma das equações será substituída por $\pi_A + \pi_B = 1$.

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}\pi_A + \frac{1}{4}\pi_B = 0\\ \ \ \pi_A + \ \ \pi_B = 1\end{cases}$$

Resolvendo este sistema, tem-se os seguintes resultados: $\pi_A = \dfrac{2}{6} \approx 0,333$ e $\pi_B = \dfrac{4}{6} \approx 0,667$.

2.3.4 Tempo médio de recorrência

O tempo médio de recorrência, que se representa por μ_i, é o valor esperado da probabilidade do primeiro retorno após n passos $f_{ii}^{(n)}$. É determinado a partir da probabilidade limite e matematicamente pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mu_i = \sum_n n f_{ii}^{(n)}, \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.3.11}$$

Teorema 2.3.6

Se uma cadeia de markov é irredutível, recorrente e aperiódica, então:

$$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\sum_n n f_{ii}^{(n)}} = \frac{1}{\mu_i}. \tag{2.3.12}$$

Se $\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} > 0$ para um estado i recorrente e aperiódico, então $\pi_i > 0$ e se $\mu_i < \infty$ diz-se o estado i é recorrente positivo. Se $\pi_i = 0$ e $\mu_i = \infty$, então, o estado i é considerado recorrente nulo (transiente). Logo, o tempo médio de recorrência μ_i, do estado i é:

$$\mu_i = \begin{cases} \sum_n n f_{ii}^{(n)} < \infty, & \text{se } i \text{ é recorrente positivo} \\ \sum_n n f_{ii}^{(n)} = \infty, & \text{se } i \text{ é recorrente nulo (transiente)} \end{cases}$$

Para qualquer estado i aperiódico de uma cadeia de Markov vale:

$$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} = \pi_i. \tag{2.3.13}$$

Se i for um outro estado qualquer, então:

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} f_{ij},$$

com $f_{ij} = \sum_n f_{ij}^{(n)}$ a probabilidade da cadeia estar no estado j dado que esteve no estado i.

NOTA: Se $S(n)$ for simplesmente uma cadeia irredutível, com período d, então:

$$\text{quando } n \to \infty, \quad P_{ii}^{(nd)} = P\{S(nd) = i \mid S(0) = i\} \to \frac{d}{\mu_i}$$

Capítulo 3

Sistemas Bonus-Malus

Para o desenvolvimento deste capítulo foram apresentados alguns termos técnicos utilizados no ramo de seguros de modo a facilitar a compreensão e a perceção do leitor durante a leitura deste trabalho. Para efeito de um determinado contrato de seguro automóvel, entende-se por:

Seguradora: Entidade legalmente autorizada para a exploração de seguro obrigatório de responsabilidade civil automóvel que subscreve um dado contrato.
Tomador de seguro: Pessoa ou entidade que contrata com a seguradora sendo responsável pelo pagamento de um prémio.
Segurado: Pessoa ou entidade titular do interesse do seguro.
Apólice: Documentos que titulam o contrato de seguro celebrado entre o tomador de seguro e a seguradora. Fazem parte integrante desta apólice um conjunto de condições, no qual é formalizado um contrato de seguro celebrado.
Prémio: Prestação paga pelo segurado para contratação de seguro que se efetiva com a emissão da apólice por parte das seguradoras.
Sinistro: A verificação, total ou parcial, do evento que desencadeia o acionamento da cobertura do risco prevista no contrato, considerando-se como um único sinistro o evento ou série de eventos resultante de uma mesma causa.
Indemnização: Refere-se à compensação devida, atribuída pela seguradora ao segurado, em caso de sinistro.
Cobertura: É uma garantia de proteção contra o risco de uma situação prevista na apólice.

Um contrato de seguro como qualquer outro contrato reflete uma realidade económico-social. É um acordo celebrado, no qual a seguradora assume a cobertura de um

determinado risco, comprometendo-se à indemnização no caso de ocorrência de sinistro, em troca de um prémio correspondente, pago pelo segurado (considera-se o tomador de seguro como segurado até o fim do trabalho).
No contrato de seguro de responsabilidade civil automóvel (obrigatório) em Portugal, o segurado é tarifado de acordo com algumas variáveis consideradas relevantes (observáveis) a priori relativamente ao veículo: o ano de registo, o peso do carro, a capacidade do cilindro, a potência do cavalo do motor, o preço, o uso (particular e profissional) e o tipo de cobertura (abrangente, apenas de terceiros ou uma mistura), etc. Relativamente ao segurado: a sua idade, o seu sexo, a zona de residência, a carta de condução, etc. Mas também existem outras variáveis consideradas não observáveis na determinação do prémio como, por exemplo, a nacionalidade, o estado de saúde do segurado, a capacidade de conduzir, a agressividade ao volante, o conhecimento do código da estrada, entre outros.

KAAS, R., et al. (2008) afirma que, numa investigação de grande escala realizada na Holanda em 1982, por motivo do mercado de seguros estar em risco de entrar em crise, as conclusões tiradas foram:

* A idade do segurado é muito importante para o seu histórico de sinistros, quer dizer, a frequência de sinistros aos 18 anos é cerca de quatro vezes maior do que dos 30 aos 70 anos. Parte desse mau histórico pode ser atribuída à falta de experiência, mas após alguns anos o efeito desaparece lentamente depois de muita prática.

* Os carros mais pesados tendem a ser usados com maior frequência e também tendem a produzir mais danos quando envolvidos em acidentes.

* Os condutores com mau histórico de sinistro são piores do que os iniciantes. Sendo assim, estes condutores terão que pagar um prémio agravado.

* Em regiões menos densamente povoadas, ocorrem menos sinistros. Neste caso, os condutores sem sinistros serão bonificados no prémio a pagar.

Depois de um período de tempo de contrato, normalmente um ano, o segurado volta a ser tarifado a um prémio *a posteriori* onde é considerado, para além das variáveis citadas acima, a experiência vivida no passado. Logo, para continuidade deste processo de tarifação, existe o chamado sistemas Bonus-Malus. Este é um sistema de tarifação *a posteriori*, no qual o segurado, depois de ser observado durante um período de tempo, se não teve ocorrência de sinistro é bonificado (Bonus) de acordo

com a política da seguradora, mas é agravado se verificar alguma ocorrência de sinistro (Malus).
Este sistema tem o principal objetivo de incentivar a boa condução, de modo a minimizar o número de ocorrências de sinistro existentes no país.

3.1 Exemplo de aplicação

O sistema Bonus-Malus é analisado aplicando a propriedade Markoviana, se a distribuição de probabilidade condicional de estados futuros do processo (condicional tanto em estados passados, como presentes) depender apenas do estado presente, não da sequência de eventos que o precedeu. Por isso, esta propriedade é conhecida como uma "propriedade sem memória" pois a probabilidade de transição não depende de como um indivíduo chega a um estado particular. Vamos analisar um exemplo, em que se pretende determinar a proporção de condutores que, eventualmente, estará em cada etapa da escala de Bónus-Malus, além disso, fornecer um meio de descobrir como o sistema Bonus-Malus é efetivo na determinação de prémios ajustados que representem os seus riscos reais.

Suponha-se que um condutor, ao renovar o seu contrato em 2018, paga um prémio "c" se apresentar um ou mais sinistros nos dois últimos anos $(2016, 2017)$, caso contrário, paga um prémio "a" com $a < c$ se não apresentar nenhum sinistro. Note-se que, para descrever esse sistema por uma escala de Bonus-Malus, existem três tipos de condutor. Dois que pagam o prémio alto "c": os que apresentam pelo menos um sinistro no ano 2017 e os que apresentam sinistros em 2016. Por outro lado, temos condutores que não apresentam nenhum sinistro nos dois anos anteriores. Portanto, temos três estados que indicam o tipo de condutor a considerar:

1. Condutor que pagou c ao renovar o contrato em 2018, sabendo que foi indemnizado em 2017;

2. Condutor que pagou c ao renovar o contrato em 2018, sabendo que não foi indemnizado em 2017, mas foi indemnizado em 2016;

3. Condutor que pagou a ao renovar o contrato em 2018, sabendo que não foi indemnizado nos dois últimos anos.

Seja N o número de indemnizações de cada condutor e seja $p = P(N \geqslant 1)$. A tabela 3.1 resume o pagamento da renovação de contrato em 2018 dos três tipos de condutor tendo em conta o seu comportamento nos últimos anos :

Condutor	2016	2017	prémio em 2018
1	?	$N \geqslant 1$	c
2	$N \geqslant 1$	N=0	c
3	N=0	N=0	a

Tabela 3.1: Comportamento de condutores.

Os estados $1, 2$ e 3 representam os tipos de condutor na renovação do contrato em 2018 com probabilidade p de ter uma ou mais indemnizações no período de um ano. Considere a variável aleatória $S(n)$ que representa o estado de um condutor no tempo n. Usando a expressão (2.3.1) da cadeia de Markov tem-se:

$$P_{ij} = P\{S(2018) = j \mid S(2017) = i\}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Neste caso P_{ij} representa a probabilidade de um condutor estar em 2018 no estado j sabendo que esteve em 2017 no estado i. Vejamos a figura 3.1 que nos facilita a compreensão de como obter a matriz de probabilidade de transição P dos tipos de condutor a considerar.

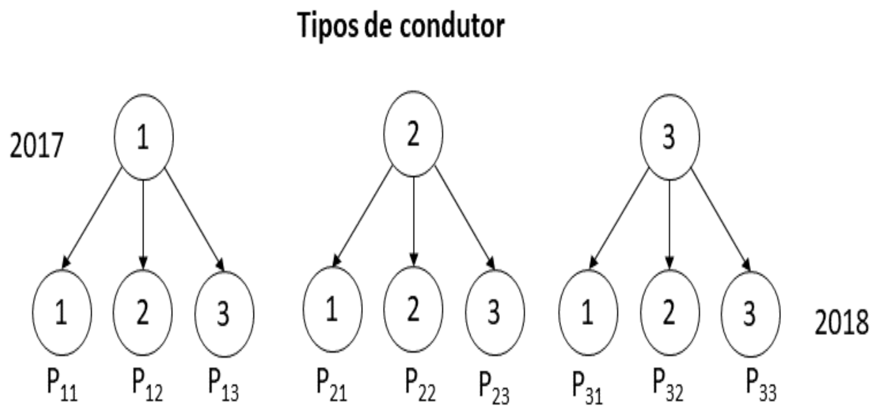

Figura 3.1: Construção da matriz de probabilidade de transição

A matriz de probabilidade de transição P fica:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ p_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ p & 0 & q \\ p & 0 & q \end{bmatrix}.$$

Percebe-se que, por exemplo, P_{11} é a probabilidade de um condutor que esteve em 2017 no estado 1 permanecer em 2018 no mesmo estado. Como este condutor teve pelo menos uma indemnização em 2017, se tiver pelo menos uma indemnização em 2018 então mantém-se no mesmo estado com probabilidade p. Também pode-se analisar P_{12} que é a probabilidade de um condutor que esteve em 2017 no estado 1 transitar em 2018 para o estado 2. Para que seja possível esta transição, o condutor não deverá apresentar indemnizações em 2018, pois a probabilidade de não haver sinistros é $1 - p = q$.

Notamos que nem sempre é possível a transição de qualquer estado para outro. Por exemplo isso acontece com P_{13} que é a probabilidade do condutor que esteve em 2017 no estado 1 transitar em 2018 para o estado 3. Percebe-se que é um acontecimento impossível, visto que, o condutor no estado 1 já teve pelo menos uma indemnização em 2017 e não pode passar para o estado 3 porque este estado diz que o condutor não teve nenhuma indemnização nos dois últimos anos. A probabilidade para este acontecimento é nula.

Sejam f_i, $i = 1, 2, 3$, as probabilidades do condutor inicialmente estar no estado i. A probabilidade de transitar do estado i para o estado j após um ano é dada por $f_i P_{ij}$. Considere um condutor que inicia um novo contrato em 2017 com o vetor de probabilidades dado por $p^{(2017)} = (f_1, f_2, f_3)$ com $f_i \geqslant 0$ e $\sum_{i=1}^{3} f_i = 1$. A probabilidade de estar em cada estado j dependendo de f_i e P_{ij} é dada pela fórmula $\sum_i f_i P_{ij}$. O vetor de probabilidades após um ano $p^{(2018)}$ representa a distribuição da probabilidade para cada estado:

$$\begin{aligned} p^{(2018)} = p^{(2017)} P &= \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ p & 0 & q \\ p & 0 & q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p(f_1 + f_2 + f_3) & qf_1 & q(f_2 + f_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p & qf_1 & q(f_2 + f_3) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Percebe-se que o vetor que contém a probabilidade do condutor estar num dos três estados em 2018 é igual a $p^{(2018)} = \begin{bmatrix} p & qf_1 & q(f_2 + f_3) \end{bmatrix}$. Desta forma pode-se interpretar por exemplo $q(f_2 + f_3)$ como sendo a probabilidade do condutor estar no estado 3 em 2018. Por outro lado, qf_1 é a probabilidade do condutor estar no estado 2 em 2018 e a probabilidade do condutor estar no estado 1 em 2018 é igual a p.

Da mesma forma calcula-se o vetor de probabilidades de transição do condutor após dois anos:

$$
\begin{aligned}
p^{(2019)} &= p^{(2018)}P = p^{(2017)}PP \\
&= p^{(2017)}P^2 = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ p & 0 & q \\ p & 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ p & 0 & q \\ p & 0 & q \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & pq & q^2 \\ p & pq & q^2 \\ p & pq & q^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p(f_1+f_2+f_3) & pq(f_1+f_2+f_3) & q^2(f_1+f_2+f_3) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p & pq & q^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Neste caso, o vetor de probabilidades do condutor estar em cada um dos estados em 2019 é dado por $p^{(2019)} = \begin{bmatrix} p & pq & q^2 \end{bmatrix}$, independentemente da distribuição inicial f_i. A probabilidade q^2 é interpretada como a probabilidade do condutor estar em 2019 no estado 3. Observa-se que podemos calcular a matriz de probabilidades de transição para o ano 2019 de forma matricial:

$$
P^{(2019)} = PP = \begin{bmatrix} p & pq & q^2 \\ p & pq & q^2 \\ p & pq & q^2 \end{bmatrix}.
$$

Repetindo o mesmo procedimento de cálculos para os anos seguintes, vê-se que $p^{(2020)} = p^{(2021)} = \cdots = p^{(n)} = p^{(2019)}$. Então, quando $n \to \infty$ temos $\lim_{n\to\infty} p^{(n)} = p^{(2019)}$ e este vetor $p^{(n)}$ é chamado de distribuição estacionária dos estados. A partir desta distribuição pode-se calcular a probabilidade de um condutor estar num estado i e passar para um estado j depois de muitos anos. Se, por exemplo, quisermos determinar a probabilidade de um condutor estar num estado i e passar para um estado j após 512 anos, basta calcular a potência 9 da distribuição estacionária $P^{(2)} = P^{(2019)}$, isto é, $[P^{(2)}]^9 = [P^{(2019)}]^9$ (considerando o ano inicial 2017). Portanto, a probabilidade de estar no estado j após 512 anos (2^9) é certamente igual à distribuição estacionária $p^{(2019)}$ dos estados.

3.2 Definição de um sistema Bonus-Malus

No seguro de responsabilidade civil automóvel, a quantidade de apólices para este ramo é geralmente muito elevada, pelo que um número significativo de segurados contém, em geral, as mesmas características. Após identificadas as características relevantes em termos de mensuração do risco, são agrupados indivíduos que apresentam características semelhantes dando origem a uma tarifa para classes homogéneas de risco e os prémios determinados para estas classes denominam-se por tarifação *a priori*.

O prémio é calculado sem ter em conta o histórico do condutor, e nem sempre todos os segurados colocados numa determinada classe representam o mesmo risco para a seguradora. Portanto, os prémios a pagar por cada segurado devem ser posteriormente corrigidos, de modo a adequar os riscos de acordo com a sinistralidade observada. Com este propósito, é determinado uma tarifação *a posteriori* aos segurados de acordo com o seu histórico de sinistralidade.

Centeno (2003), define sistema Bonus-Malus como sendo um sistema de tarifação *a posteriori* que segue as seguintes caraterísticas:

i) Os períodos de vigência das apólices são de idêntica duração, geralmente considerando um ano;

ii) As apólices são divididas num número finito de classes $C_1, C_2, \cdots, C_m$, designadas por classes da cadeia. Essas classes induzem uma semelhança de riscos no conjunto de apólices na qual cada apólice permanece na mesma classe durante um período de tempo;

iii) A classe do sistema em que um segurado é colocado num determinado período depende unicamente da classe a que pertenceu no período anterior e do número de sinistros declarados durante o mesmo período.

Este sistema, para além das suas características, possui ainda três elementos que fazem com que o mesmo esteja completamente definido:

i) A escala de prémios $b = (b(1), b(2), \cdots, b(m))^t$, onde o valor $b(i), i = 1, 2, \cdots, m$, não representa o prémio a pagar (como designado por prémio da classe C_i do sistema) mas sim, apenas um fator multiplicativo do prémio determinado pelos fatores *a priori*;

ii) As regras de transição entre as diferentes classes do sistema para cada par ordenado (i, j). Seja T_{ij} o conjunto de números inteiros, tais que, uma apólice que pertencente à classe C_i transite para a classe C_j, no fim do período, quando originar r sinistros nesse período. Deste modo, as regras de transição podem ser representadas por uma matriz $T = \left[T_{ij}\right]$ com dimensão $m \times m$. Para que o conjunto de regras de transição seja completo, T deve obedecer às seguintes condições:

   (a) $\bigcup_{j=1}^{m} T_{ij} = \{0, 1, 2, \cdots\}$,

   (b) $T_{ij} \bigcap T_{ij'} \neq \emptyset$ sempre que $j \neq j'$.

iii) C_{i_0} é a classe de entrada no sistema a qual se supõe ser a mesma para todos os segurados novos, mas muitas vezes este elemento *iii*) é violado. A classe de entrada depende do valor assumido por alguns fatores da tarifa *a priori*. Quando não é verificada esta hipótese, este elemento *iii*) não levanta nenhuma dificuldade, do ponto de vista matemático.

Um sistema Bonus-Malus pode ser representado pelo trio $\Delta = (C_{i_0}, b, T)$. Esta definição do sistema tem a vantagem de ser considerada uma cadeia de Markov. Ou seja, um sistema sem memória, no qual, a classe atual do segurado e o número de indemnizações do período vigente são suficientes na determinação da classe futura do segurado para o próximo período, independentemente do seu histórico anterior, isto é, não é necessário descobrir como e de que forma a classe atual foi alcançada.

Antigamente, em Portugal, vigorava um sistema que não satisfazia a condição de ser diretamente uma cadeia de Markov. Isto porque, as suas regras de transição estabeleciam que um segurado só podia ser bonificado quando, durante dois anos seguidos, não declarasse indemnizações e isto invalidava que o sistema fosse considerado uma cadeia de Markov. No entanto, o sistema passou a ser considerado uma cadeia de Markov, desdobrando as classes de modo que, a transição da classe futura dependa simplesmente da atual e do número declarado de indemnizações.

Durante anos, em Portugal, funcionou um sistema único de tarifação *a posteriori*, segundo o qual, se procedia a uma redução de 30% no prémio simples, quando, durante dois períodos seguidos, o segurado não tivesse sinistros (sinistros esses que merecessem uma indemnização). O segurado estaria perante uma bonificação que caducaria quando houvesse qualquer sinistro. Quanto aos agravamentos, 15% agravados no prémio a pagar quando apresentado um sinistro no ano anterior, 30% de agravamento com dois sinistros, 45% com três sinistros e 100% com quatro ou mais sinistros.

O antigo sistema Bonus-Malus português foi definido e caracterizado com as seguintes classes:
C_1: Apólices com 30% de desconto;
C_2: Apólices sem desconto nem agravamento no segundo ano consecutivo;
C_3: Apólices sem desconto nem agravamento durante o primeiro ano;
C_4: Apólices com agravamento de 15% e sem sinistros no último ano;
C_5: Apólices com agravamento de 15% e um sinistro no último ano;
C_6: Apólices com agravamento de 30% e sem sinistros no último ano;
C_7: Apólices com agravamento de 30% e sinistros no último ano;
C_8: Apólices com agravamento de 45% e sem sinistros no último ano;
C_9: Apólices com agravamento de 45% e sinistros no último ano;
C_{10}: Apólices com agravamento de 100% e sem sinistros no último ano;
C_{11}: Apólices com agravamento de 100% e sinistros no último ano.

O vetor dos prémios para as classes acima citadas é:

$$b = \begin{bmatrix} 70 & 100 & 100 & 115 & 115 & 130 & 130 & 145 & 145 & 200 & 200 \end{bmatrix}^t$$

A matriz $T = \begin{bmatrix} T_{ij} \end{bmatrix}$ das regras de transição da classe C_i para a classe C_j, com dimensão 11×11, representa as regras de transição:

$$T = \begin{bmatrix}
\{0\} & - & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4,\cdots\} \\
\{0\} & - & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4,\cdots\} \\
- & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4,\cdots\} \\
\{0\} & - & - & - & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3,\cdots\} \\
- & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3,\cdots\} \\
\{0\} & - & - & - & - & - & - & - & \{1\} & - & \{2,\cdots\} \\
- & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2,\cdots\} \\
\{0\} & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{1,\cdots\} \\
- & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1,\cdots\} \\
\{0\} & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{1,\cdots\} \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & \{1,\cdots\}
\end{bmatrix}.$$

A matriz T mostra-nos como um segurado pode permanecer ou transitar de uma classe C_i para a outra classe C_j dependendo do número de sinistros. Suponha que um segurado assina um contrato de seguro automóvel no ano atual, isto é, na classe de entrada C_3. Se ele tiver $\{1\}$ sinistro, automaticamente transita para a classe C_5 com 15% de agravamento. Se o segurado estiver na classe C_1 com 30% de desconto e tiver pelo menos $\{4\}$ sinistros no ano atual, ele terá um agravamento de 100% no próximo contrato, isto é, passará para a classe C_{11}.

Em conformidade com as regras de transição, verifica-se que a classe C_3 corresponde à classe de entrada. Segundo as classificações dos estados, nota-se que a classe de entrada não é alcançável a partir de qualquer outra classe e a classe C_2 é apenas alcançável a partir da classe C_3, quer dizer, as classes C_2 e C_3 são consideradas classes transientes.

3.3 Matriz de probabilidades de transição

A matriz das regras de transição $T = \left[T_{ij}\right]_{11\times 11}$, para além de ser um dos elementos que completa o sistema Bonus-Malus, ajuda-nos ainda a construir a matriz de probabilidades de transição. Seja λ o parâmetro que representa a frequência de sinistralidade, ou seja, o número médio de sinistros ocorridos em cada unidade de tempo. A probabilidade de transitar da classe C_i para a classe C_j em um passo é dada por:

$$p_{T,\lambda}(i,j) = P(Z_{\Delta,n+1} = j \mid Z_{\Delta,n} = i), \quad i,j = 1,\cdots,11. \tag{3.3.1}$$

A matriz $P_{T,\lambda} = \left[p_{T,\lambda}(i,j)\right]$ é conhecida como a matriz de probabilidades de transição da cadeia de Markov em um passo associada ao sistema Bonus-Malus, onde $Z_{\Delta,n}$ representa a classe do sistema no período atual (n) e $Z_{\Delta,n+1}$ representa a classe do sistema após um ano. A probabilidade de transitar da classe C_i para a classe C_j em um passo obedece às seguintes condições:

$$p_{T,\lambda}(i,j) \geqslant 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{11} p_{T,\lambda}(i,j) = 1. \tag{3.3.2}$$

O processo associado ao número de sinistros que origina a indemnização, é um processo de contagem. Para descrever o número de sinistros ocorridos a um segurado num determinado período de tempo, Centeno (2003) afirma que, para um segurado retirado ao acaso de uma carteira de seguros, a distribuição de Poisson mista (veja para o efeito a monografia de Grandell (1997)) fornece melhores ajustamentos quando se refere ao número de sinistros ocorridos.

Utilizando a distribuição de Poisson com média λ obtém-se, para o antigo sistema

Bonus-Malus Português, a seguinte matriz de probabilidades de transição:

$$\mathbf{P}_{T,\lambda} = \begin{bmatrix} p_0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & 1-p_0-p_1-p_2-p_3 \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & 1-p_0-p_1-p_2-p_3 \\ 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & 1-p_0-p_1-p_2-p_3 \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & 1-p_0-p_1-p_2 \\ 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & 1-p_0-p_1-p_2 \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 1-p_0-p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 1-p_0-p_1 \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 1-p_0 \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 1-p_0 \end{bmatrix}_{11\times 11},$$

onde: $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$p_r = P(N = r) = \frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}, \quad r \geqslant 0.$$

Quando:

$$\begin{aligned} r = 0, &\quad \text{então} \ \ p_0 = e^{-\lambda} \\ r = 1, &\quad \text{então} \ \ p_1 = \lambda e^{-\lambda} \\ r = 2, &\quad \text{então} \ \ p_2 = \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} \\ r = 3, &\quad \text{então} \ \ p_3 = \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

A matriz $P_{T,\lambda}$ do antigo sistema Português pode ser representada pelo esquema da Figura 3.2.

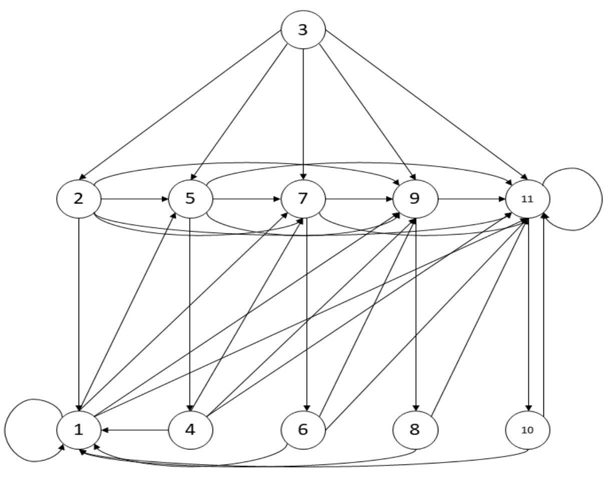

Figura 3.2: Esquema da matriz $P_{T,\lambda}$.

Como foi verificado na matriz das regras de transição e na Figura 3.2, as classe C_2 e C_3 são classes do estado transitório (transiente). A matriz de probabilidades de transição pode ser reorganizada do seguinte modo:

$$P_{T,\lambda} = \begin{bmatrix} P_{2,(T,\lambda)} & P_{3,(T,\lambda)} \\ 0 & P_{1,(T,\lambda)} \end{bmatrix},$$

onde:

* $P_{1,(T,\lambda)}$ é a matriz de probabilidades de transição entre as classes dos estados transientes C_2 e C_3.

* $P_{2,(T,\lambda)}$ é a matriz de probabilidades de transição entre as classes da cadeia irredutível $\{C_1, C_4, \cdots, C_{11}\}$.

* $P_{3,(T,\lambda)}$ é a matriz de probabilidades de transição das classes dos estados transientes para as restantes classes.

A matriz $P_{2,(T,\lambda)}$ pode ser considerada adequada para a análise da cadeia de Markov. Sendo assim, a matriz das classes dos estados recorrentes positivos e aperiódicos é:

$$P_{2,(T,\lambda)} = \begin{bmatrix} p_0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & 1-p_0-p_1-p_2-p_3 \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & 1-p_0-p_1-p_2 \\ 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & 1-p_0-p_1-p_2 \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 1-p_0-p_1 \\ 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 1-p_0-p_1 \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 1-p_0 \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 1-p_0 \end{bmatrix}_{9\times 9}.$$

A matriz $P_{2,(T,\lambda)}$, para o antigo sistema Português, pode ser representada pelo esquema da Figura 3.3.

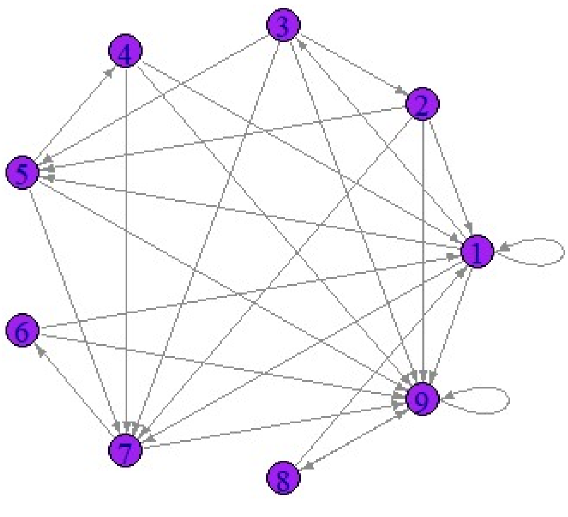

Figura 3.3: Esquema da matriz $P_{2,(T,\lambda)}$.

3.3.1 Matriz de probabilidades de transição em n passos

Como foi visto no capítulo 2, é possível determinar a probabilidade de transitar da classe C_i para a classe C_j após n anuidades. Usando a expressão (2.3.2), essa probabilidade de transição $p^{(n)}_{2,(T,\lambda)}(i,j)$ fica:

$$p^{(n)}_{2,(T,\lambda)}(i,j) = P(Z_{\Delta,k+n} = j \mid Z_{\Delta,k} = i), \quad k > 1, \quad i,j = 1,2,\cdots,9. \tag{3.3.3}$$

$P^{(n)}_{2,(T,\lambda)} = \left[p^{(n)}_{2,(T,\lambda)}(i,j)\right]$ é a matriz de probabilidades de transição da cadeia de Markov em n anuidades associadas ao sistema Bonus-Malus. $Z_{\Delta,k}$ é a classe do sistema no período k e por outro, $Z_{\Delta,k+n}$ é a classe do sistema após n anuidades. A expressão (3.3.2) para este caso passa a ser:

$$p^{(n)}_{2,(T,\lambda)}(i,j) \geqslant 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{9} p^{(n)}_{2,(T,\lambda)}(i,j) = 1, \quad \text{para } n > 1. \tag{3.3.4}$$

3.4 Distribuição estacionária

Numa cadeia irredutível, espaço de estados finito e aperiódico, a influência do estado inicial de um determinado processo vai esmorecer à medida que $n \to \infty$. Sendo assim, a probabilidade limite $\pi_{2,(T,\lambda)}(j)$ pode não depender do estado inicial. Se este for o caso, $\pi_{2,(T,\lambda)}(j)$ pode ser interpretado como da probabilidade limite em n passos,

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)}_{2,(T,\lambda)}(i,j) = \pi_{2,(T,\lambda)}(j), \quad j = 1,2,\cdots,9. \tag{3.4.1}$$

Como se refere à cadeia de espaço de estados finito, os limites que definem a probabilidade $\pi_{2,(T,\lambda)}(j)$ existem e que formam uma distribuição de probabilidade. A equação (2.3.10), para os sistemas Bonus-Malus, passa a ser:

$$\pi_{2,(T,\lambda)}(j) = \sum_{i=0}^{9} \pi_{2,(T,\lambda)}(i)\, p_{2,(T,\lambda)}(i,j), \tag{3.4.2}$$

satisfazendo às seguintes condições:

$$\pi_{2,(T,\lambda)}(j) \geqslant 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{9} \pi_{2,(T,\lambda)}(j) = 1.$$

A equação (2.3.10) na forma matricial fica:

$$\pi_{2,(T,\lambda)} P_{2,(T,\lambda)} = \pi_{2,(T,\lambda)}. \tag{3.4.3}$$

Como referido anteriormente, quando n tender para o infinito, $P^{(n)}_{2,(T,\lambda)}$ tende para uma matriz cujas linhas são todas iguais. Esse vetor linha denomina-se por probabilidade limite da cadeia de Markov.

Após ter obtido a matriz de probabilidades de transição da cadeia irredutível $P_{2,(T,\lambda)}$, foi utilizada a Expressão (3.4.3), baseada nos cálculos dos valores e vetores próprios (ver o Apêndice A) para determinar a distribuição estacionária do antigo sistema português. Então, com base em:

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 & \pi_6 & \pi_7 & \pi_8 & \pi_9 \end{bmatrix}_{1\times 9} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 & \pi_6 & \pi_7 & \pi_8 & \pi_9 \end{bmatrix}_{1\times 9} \begin{bmatrix} p_0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & 1-p_0-p_1-p_2-p_3 \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & 1-p_0-p_1-p_2 \\ 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & 1-p_0-p_1-p_2 \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 1-p_0-p_1 \\ 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 1-p_0-p_1 \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 1-p_0 \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 1-p_0 \end{bmatrix}_{9\times 9},$$

efetuou-se os cálculos de modo a encontrar a matriz linha $\pi_{2,(T,\lambda)} = \left[\pi_{2,(T,\lambda)}(j)\right]$ associada ao valor próprio unitário. Tem-se, com a ajuda do *Software estatístico R*, a distribuição estacionária, que é representada pela transposta da seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} p_0^2. \\ p_0^3 p_1. \\ p_0^2 p_1. \\ p_0^3(p_0p_1^2 + p_1^2 + p_2). \\ p_0^2(p_0p_1^2 + p_1^2 + p_2). \\ p_0^3(2p_0p_1^3 + p_0^2p_1^3 + 2p_0p_1p_2 + 2p_1p_2 + p_1^3 + p_3). \\ p_0^2(2p_0p_1^3 + p_0^2p_1^3 + 2p_0p_1p_2 + 2p_1p_2 + p_1^3 + p_3). \\ p_0(1 - p_0 - p_0^2p_1 - p_0^2p_1^2 - p_0^2p_2 - p_0^3p_1^2 - 2p_0^3p_1^3 - p_0^2p_1^3 - p_0^2p_3 - p_0^2p_1 - 2p_0^2p_1p_2 - 2p_0^3p_1p_2 - p_0^4p_1^3). \\ 1 - p_0 - p_0^2p_1 - p_0^2p_1^2 - p_0^2p_2 - p_0^3p_1^2 - 2p_0^3p_1^3 - p_0^2p_1^3 - p_0^2p_3 - p_0^2p_1 - 2p_0^2p_1p_2 - 2p_0^3p_1p_2 - p_0^4p_1^3. \end{bmatrix}$$

Capítulo 4

Análise de resultados do antigo sistema português

Este capítulo dá sequência aos capítulos anteriores com enfoque à análise prática nas alterações da matriz de probabilidades de transição durante n anuidades. Para o antigo sistema Português, simulou-se diferentes valores da frequência de sinistralidade λ e as suas evoluções durante determinadas anuidades até atingir a distribuição estacionária, como refere Centeno (2003).

4.1 Matriz de probabilidades de transição

Como visto no capítulo 3, a matriz adequada para uma análise da cadeia de Markov, é a matriz $P_{2,(T,\lambda)}$. Para melhor perceção da utilidade desta matriz de transição, vamos supor que para uma dada apólice de um determinado segurado, num determinado período de tempo, a frequência de sinistralidade λ é de 1%. Como visto no Capítulo 3, então:

$$p_r = \frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}, \quad r \geqslant 0 \;\Rightarrow \begin{cases} p_0 = e^{-\lambda} = e^{-0,01} = 0,9900498 \\ p_1 = \lambda e^{-\lambda} = 0,01e^{-0,01} = 0,009900498 \\ p_2 = \dfrac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = \dfrac{0,01^2}{2!}e^{-0,01} = 4,950249 \times 10^{-5} \\ p_3 = \dfrac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = \dfrac{0,01^3}{3!}e^{-0,01} = 1,650083 \times 10^{-7} \\ p_{(r\geqslant 4)} = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 = 4,133471 \times 10^{-10} \end{cases}$$

Assim sendo, tem-se a matriz $P_{2,(T,1\%)}$ com a utilização da distribuição de Poisson:

$$P_{2,(T,1\%)} = \begin{bmatrix} 0{,}9900498 & 0{,}0000000 & 0{,}0099005 & 0{,}0000000 & 4{,}95\times10^{-5} & 0{,}0000000 & 1{,}65\times10^{-7} & 0{,}0000000 & 4{,}13\times10^{-10} \\ 0{,}9900498 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 9{,}90\times10^{-3} & 0{,}0000000 & 4{,}95\times10^{-5} & 0{,}0000000 & 1{,}65\times10^{-7} \\ 0{,}0000000 & 0{,}9900498 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 9{,}90\times10^{-3} & 0{,}0000000 & 4{,}95\times10^{-5} & 0{,}0000000 & 1{,}65\times10^{-7} \\ 0{,}9900498 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 9{,}90\times10^{-3} & 0{,}0000000 & 4{,}97\times10^{-5} \\ 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}9900498 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 9{,}90\times10^{-3} & 0{,}0000000 & 4{,}97\times10^{-5} \\ 0{,}9900498 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 9{,}95\times10^{-3} \\ 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}9900498 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 9{,}95\times10^{-3} \\ 0{,}9900498 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 9{,}95\times10^{-3} \\ 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}9900498 & 9{,}95\times10^{-3} \end{bmatrix}$$

A matriz T das regras de transição mostra-nos em que classe C_j transitará um determinado segurado, estando inicialmente numa classe C_i, de acordo com o número de sinistros ocorridos. Vê-se por exemplo, a probabilidade $p_{2,(T,1\%)}(8,1)$ de estar na classe com maior agravamento, sem sinistros na última anuidade e passar para a única classe com desconto na próxima anuidade é aproximadamente 99%, este fenómeno acontece quando $r = 0$, ou seja, não tendo sinistros na última anuidade, o segurado tem a probabilidade quase 100% de não voltar a ter sinistros na próxima anuidade.
Com a probabilidade $p_{2,(T,1\%)}(1,9)$ aproximadamente nula, o segurado transita da única classe com desconto para a classe com maior agravamento, com sinistros na última anuidade. Esta transição ocorre quando $r \geqslant 4$, isto é, se o segurado tiver pelo menos 4 sinistros na última anuidade, automaticamente é penalizado com o pagamento de 100% do seu prémio na próxima anuidade.

A matriz $P_{2,(T,1\%)}$ contém algumas probabilidades nulas, isto porque na matriz T das regras de transição do antigo sistema existem algumas transições impossíveis. Por exemplo, a probabilidade $p_{2,(T,1\%)}(3,1)$ de estar na classe com 15% de agravamento tendo um sinistro na última anuidade e passar para a única classe com desconto. Esta transição é impossível de acontecer porque, tendo um sinistro no ano anterior, o segurado não tem o direito de ser bonificado no ano seguinte.

Foi ainda visto na expressão (3.4.1), quando n tender ao infinito, a probabilidade $p^{(n)}_{2,(T,\lambda)}(i,j)$ tende a uma matriz linha $\left[\pi_{2,(T,\lambda)}(j)\right]$, ou seja, uma matriz de tem a mesma probabilidade por cada coluna. Procedeu-se aos cálculos para determinar a matriz de probabilidades de transição em n anuidades. Tem-se a matriz $P^{(2)}_{2,(T,1\%)}$

com probabilidades de transição em duas anuidades:

$$P^{(2)}_{2,(T,1\%)} = \begin{bmatrix} 0{,}9801987 & 0{,}0098019 & 0{,}0098019 & 4{,}90\times10^{-5} & 1{,}47\times10^{-4} & 1{,}63\times10^{-7} & 1{,}14\times10^{-6} & 4{,}09\times10^{-10} & 6.15\times10^{-9} \\ 0{,}9801987 & 0{,}0000000 & 0{,}0098019 & 9{,}80\times10^{-3} & 4{,}90\times10^{-5} & 4{,}90\times10^{-5} & 9{,}81\times10^{-5} & 1{,}63\times10^{-7} & 9{,}86\times10^{-7} \\ 0{,}9801987 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 9{,}80\times10^{-3} & 9{,}80\times10^{-3} & 4{,}90\times10^{-5} & 1{,}47\times10^{-4} & 1{,}63\times10^{-7} & 1{,}14\times10^{-6} \\ 0{,}9801987 & 0{,}0000000 & 0{,}0098019 & 0{,}000000 & 4{,}90\times10^{-5} & 9{,}80\times10^{-3} & 1{,}63\times10^{-7} & 4{,}91\times10^{-5} & 9{,}90\times10^{-5} \\ 0{,}9801987 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}000000 & 0{,}000000 & 9{,}80\times10^{-3} & 9{,}80\times10^{-3} & 4{,}91\times10^{-5} & 1{,}48\times10^{-4} \\ 0{,}9801987 & 0{,}0000000 & 0{,}0098019 & 0{,}000000 & 4{,}90\times10^{-5} & 0{,}000000 & 1{,}63\times10^{-7} & 9{,}85\times10^{-3} & 9{,}90\times10^{-5} \\ 0{,}9801987 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}000000 & 0{,}000000 & 0{,}000000 & 0{,}000000 & 9{,}85\times10^{-3} & 9{,}95\times10^{-3} \\ 0{,}9801987 & 0{,}0000000 & 0{,}0098019 & 0{,}000000 & 4{,}90\times10^{-5} & 0{,}000000 & 1{,}63\times10^{-7} & 9{,}85\times10^{-3} & 9{,}90\times10^{-5} \\ 0{,}9801987 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}000000 & 0{,}000000 & 0{,}000000 & 0{,}000000 & 9{,}85\times10^{-3} & 9{,}95\times10^{-3} \end{bmatrix}$$

Nota-se nesta matriz que a probabilidade de estar na 1ª classe permanece inalterada, independentemente da classe inicial. Pode-se dizer que, em média, a probabilidade de transitar para a 1ª classe em duas anuidades é aproximadamente $98,02\%$, independentemente da classe inicial. A partir da 2ª classe, a interpretação passa a ser da seguinte forma: a probabilidade de um determinado segurado estar na única classe com desconto e passar para uma classe com agravamento de 100%, sem sinistros na última anuidade, após duas renovações do contrato é aproximadamente nula. Este facto acontece quando o segurado tiver, pelo menos, 4 sinistros na sua apólice.

Repetiu-se os cálculos para diferentes valores da frequência de sinistralidade λ, de modo a analisar as alterações da matriz de probabilidades de transição. Para uma frequência de 10% por exemplo, tem-se:

$$p_r = \frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}, \quad r \geqslant 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} p_0 = e^{-\lambda} = e^{-0,1} = 0,9048374 \\ p_1 = \lambda e^{-\lambda} = 0,1e^{-0,1} = 0,0904837 \\ p_2 = \dfrac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = \dfrac{0,1^2}{2!}e^{-0,1} = 0,0045242 \\ p_3 = \dfrac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = \dfrac{0,1^3}{3!}e^{-0,1} = 0,0001508 \\ p_{(r\geqslant 4)} = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 = 3,846834 \times 10^{-6} \end{cases}$$

A matriz de probabilidades de transição em uma anuidade é dada por:

$$P_{2,(T,10\%)} = \begin{bmatrix} 0{,}9048374 & 0{,}0000000 & 0{,}0904837 & 0{,}0000000 & 0{,}0045242 & 0{,}0000000 & 0{,}0001508 & 0{,}0000000 & 3{,}85\times10^{-6} \\ 0{,}9048374 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0904837 & 0{,}0000000 & 0{,}0045242 & 0{,}0000000 & 1{,}55\times10^{-4} \\ 0{,}0000000 & 0{,}9048374 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0904837 & 0{,}0000000 & 0{,}0045242 & 0{,}0000000 & 1{,}55\times10^{-4} \\ 0{,}9048374 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0904837 & 0{,}0000000 & 4{,}68\times10^{-3} \\ 0.0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}9048374 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0904837 & 0{,}0000000 & 4{,}68\times10^{-3} \\ 0{,}9048374 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 9{,}51\times10^{-2} \\ 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}9048374 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 9{,}51\times10^{-2} \\ 0{,}9048374 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 9{,}51\times10^{-2} \\ 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}9048374 & 9{,}51\times10^{-2} \end{bmatrix}$$

Houve uma ligeira diminuição nos valores da matriz de probabilidades de transição $P_{2,(T,10\%)}$ comparando com a matriz $P_{2,(T,1\%)}$. Deste modo, com a frequência de sinistralidade de 10%, a probabilidade $p_{2,(T,10\%)}(2,1)$ de estar na classe com 15% de agravamento na apólice sem sinistros na ultima anuidade e passar a beneficiar de um desconto de 30% na primeira renovação do contrato é aproximadamente $90,5\%$, isto é, se o segurado não tiver nenhum sinistro. Se estiver, inicialmente, na única classe com desconto e tiver, pelo menos, 4 sinistros na última anuidade, este segurado transitará para a classe com 100% de agravamento com sinistros na última anuidade. Esse acontecimento tem menor probabilidade de ocorrer nesta matriz.

Da mesma forma, foi calculada a matriz $P^{(n)}_{2,(T,10\%)}$ e quando $n = 4$ nota-se que a probabilidade de estar em cada uma das três primeiras classes é a mesma, independentemente da classe inicial.

$$P^{(4)}_{2,(T,10\%)} = \begin{bmatrix} 0{,}8187308 & 0{,}067032 & 0{,}0740818 & 0{,}0167580 & 0{,}0171105 & 0{,}00212268 & 0{,}00347507 & 0{,}00019398 & 0{,}00049519 \\ 0{,}8187308 & 0{,}067032 & 0{,}0740818 & 0{,}0100548 & 0{,}0171105 & 0{,}00748524 & 0{,}00213443 & 0{,}00153461 & 0{,}00183583 \\ 0{,}8187308 & 0{,}067032 & 0{,}0740818 & 0{,}0033516 & 0{,}0104073 & 0{,}01351812 & 0{,}00749699 & 0{,}00220494 & 0{,}00317647 \\ 0{,}8187308 & 0{,}067032 & 0{,}0740818 & 0{,}0100548 & 0{,}0171105 & 0{,}00078204 & 0{,}00213443 & 0{,}00823782 & 0{,}00183583 \\ 0{,}8187308 & 0{,}067032 & 0{,}0740818 & 0{,}0033516 & 0{,}0104073 & 0{,}00011172 & 0{,}00079379 & 0{,}01561134 & 0{,}00987967 \\ 0{,}8187308 & 0{,}067032 & 0{,}0740818 & 0{,}0100548 & 0{,}0171105 & 0{,}00078204 & 0{,}00213443 & 0{,}00823782 & 0{,}00183583 \\ 0{,}8187308 & 0{,}067032 & 0{,}0740818 & 0{,}0033516 & 0{,}0104073 & 0{,}00011172 & 0{,}00079379 & 0{,}01561134 & 0{,}00987967 \\ 0{,}8187308 & 0{,}067032 & 0{,}0740818 & 0{,}0100548 & 0{,}0171105 & 0{,}00078204 & 0{,}00213443 & 0{,}00823782 & 0{,}00183583 \\ 0{,}8187308 & 0{,}067032 & 0{,}0740818 & 0{,}0033516 & 0{,}0104073 & 0{,}00011172 & 0{,}00079379 & 0{,}01561134 & 0{,}00987967 \end{bmatrix}$$

Na medida em que aumenta a frequência de sinistralidade λ, também aumentam as probabilidades mais baixas e diminuem as mais altas. Comparando com a matriz de probabilidades anterior, a probabilidade de permanecer na única classe de desconto após 4 anuidades diminui aproximadamente para $81,9\%$ e por outro lado, a probabilidade de estar nesta classe de desconto e passar para a classe com 100% de agravamento com sinistros na última anuidade aumenta aproximadamente para $0,05\%$.

Não ficou para trás a curiosidade de aumentar significativamente a frequência de sinistralidade λ para verificar de que forma se altera a matriz de probabilidades $P_{2,(T,\lambda)}$. Para isso, foi propositadamente alterada a frequência para 40%. Então,

$$p_r = \frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}, \quad r \geqslant 0 \ \Rightarrow \begin{cases} p_0 = e^{-\lambda} = e^{-0{,}4} = 0,67032 \\ p_1 = \lambda e^{-\lambda} = 0,4e^{-0{,}4} = 0,268128 \\ p_2 = \dfrac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = \dfrac{0,4^2}{2!}e^{-0{,}4} = 0,0536256 \\ p_3 = \dfrac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = \dfrac{0,4^3}{3!}e^{-0{,}4} = 0,00715008 \\ p_{(r\geqslant 4)} = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 = 0,0007762514 \end{cases}$$

A matriz de probabilidades de transição num passo é dada por:

$$P_{2,(T,40\%)} = \begin{bmatrix} 0{,}67032 & 0{,}00000 & 0{,}268128 & 0{,}00000 & 0{,}0536256 & 0{,}00000 & 0{,}00715008 & 0{,}00000 & 0{,}0007762514 \\ 0{,}67032 & 0{,}00000 & 0{,}000000 & 0{,}00000 & 0{,}2681280 & 0{,}00000 & 0{,}05362560 & 0{,}00000 & 0{,}0079263319 \\ 0{,}00000 & 0{,}67032 & 0{,}000000 & 0{,}00000 & 0{,}2681280 & 0{,}00000 & 0{,}05362560 & 0{,}00000 & 0{,}0079263319 \\ 0{,}67032 & 0{,}00000 & 0{,}000000 & 0{,}00000 & 0{,}0000000 & 0{,}00000 & 0{,}26812802 & 0{,}00000 & 0{,}0615519356 \\ 0{,}00000 & 0{,}00000 & 0{,}000000 & 0{,}67032 & 0{,}0000000 & 0{,}00000 & 0{,}26812802 & 0{,}00000 & 0{,}0615519356 \\ 0{,}67032 & 0{,}00000 & 0{,}000000 & 0{,}00000 & 0{,}0000000 & 0{,}00000 & 0{,}00000000 & 0{,}00000 & 0{,}3296799540 \\ 0{,}00000 & 0{,}00000 & 0{,}000000 & 0{,}00000 & 0{,}0000000 & 0{,}67032 & 0{,}00000000 & 0{,}00000 & 0{,}3296799540 \\ 0{,}67032 & 0{,}00000 & 0{,}000000 & 0{,}00000 & 0{,}0000000 & 0{,}00000 & 0{,}00000000 & 0{,}00000 & 0{,}3296799540 \\ 0{,}00000 & 0{,}00000 & 0{,}000000 & 0{,}00000 & 0{,}0000000 & 0{,}00000 & 0{,}00000000 & 0{,}67032 & 0{,}3296799540 \end{bmatrix}$$

A matriz $P_{2,(T,40\%)}$ mostra-nos uma diminuição das probabilidades mais elevadas e um aumento das mais baixas (quando comparado com as matrizes $P_{2,(T,1\%)}$ e $P_{2,(T,10\%)}$). Estando na única classe com desconto, a probabilidade de permanecer na mesma classe é de $67,03\%$. E estando na classe com maior agravamento e com sinistros na última anuidade, a probabilidade de permanecer na mesma classe é aproximadamente $32,97\%$.

Da mesma forma, como acontece nos casos anteriores, a probabilidade de estar em uma das três primeiras classes em 4 anuidades mantém-se inalterada, independentemente da classe inicial. Mas desta vez alargou-se os cálculos e notou-se que, em 6 anuidades, a probabilidade de estar em uma das cinco primeiras classe é a mesma, qualquer que seja a classe inicial. Em função da disparidade da frequência de sinistralidade (40%, valores considerado exagero), a dispersão dos valores de probabilidades tende a estreitar-se, razão pela qual, as maiores probabilidades tendem a diminuir e as menores a aumentar.

$$P^{(6)}_{2,(T,40\%)} = \begin{bmatrix} 0{,}449329 & 0{,}08075861 & 0{,}1204777 & 0{,}05232024 & 0{,}07805263 & 0{,}03984477 & 0{,}05087488 & 0{,}04806747 & 0{,}08027477 \\ 0{,}449329 & 0{,}08075861 & 0{,}1204777 & 0{,}05232024 & 0{,}07805263 & 0{,}03403882 & 0{,}05087488 & 0{,}05387342 & 0{,}08027477 \\ 0{,}449329 & 0{,}08075861 & 0{,}1204777 & 0{,}05232024 & 0{,}07805263 & 0{,}02242692 & 0{,}04506893 & 0{,}06548532 & 0{,}08608071 \\ 0{,}449329 & 0{,}08075861 & 0{,}1204777 & 0{,}05232024 & 0{,}07805263 & 0{,}03403882 & 0{,}05087488 & 0{,}05387342 & 0{,}08027477 \\ 0{,}449329 & 0{,}08075861 & 0{,}1204777 & 0{,}05232024 & 0{,}07805263 & 0{,}02242692 & 0{,}04506893 & 0{,}06548532 & 0{,}08608071 \\ 0{,}449329 & 0{,}08075861 & 0{,}1204777 & 0{,}05232024 & 0{,}07805263 & 0{,}03403882 & 0{,}05087488 & 0{,}05387342 & 0{,}08027477 \\ 0{,}449329 & 0{,}08075861 & 0{,}1204777 & 0{,}05232024 & 0{,}07805263 & 0{,}02242692 & 0{,}04506893 & 0{,}06548532 & 0{,}08608071 \\ 0{,}449329 & 0{,}08075861 & 0{,}1204777 & 0{,}05232024 & 0{,}07805263 & 0{,}03403882 & 0{,}05087488 & 0{,}05387342 & 0{,}08027477 \\ 0{,}449329 & 0{,}08075861 & 0{,}1204777 & 0{,}05232024 & 0{,}07805263 & 0{,}02242692 & 0{,}04506893 & 0{,}06548532 & 0{,}08608071 \end{bmatrix}$$

A partir da 6ª classe a interpretação passa a ser da seguinte forma: com probabilidade de $5,087\%$ o segurado da única classe com desconto passa para uma classe com agravamento de 45%, isso se o segurado tiver três sinistros da última anuidade.

4.2 Distribuições estacionárias

Vários cálculos foram feitos para atingir o vetor linha $\left[\pi_{2,(T,\lambda)}(j)\right]$ a que chamamos distribuição estacionária (como mostrado na expressão (3.4.2)). A determinação deste vetor linha leva-nos a um sistema de equações lineares homogéneas que foi resolvido com a teoria de valores e vetores próprios.

Foi calculada a matriz $P^{(n)}_{2,(T,1\%)}$ ao longo dos anos onde $n \to \infty$ e conclui-se que a distribuição estacionária é atingida após 8 anos, onde a probabilidade de estar na classe C_j é estabilizada independentemente da classe inicial C_i.

$$P^{(8)}_{2,(T,1\%)} = \begin{bmatrix} 0{,}9801987 & 0{,}0096079 & 0{,}0097045 & 0{,}0002373 & 0{,}0002397 & 5{,}78\times10^{-6} & 5{,}84\times10^{-6} & 1{,}4\times10^{-6} & 1{,}5\times10^{-6} \\ 0{,}9801987 & 0{,}0096079 & 0{,}0097045 & 0{,}0002373 & 0{,}0002397 & 5{,}78\times10^{-6} & 5{,}84\times10^{-6} & 1{,}4\times10^{-6} & 1{,}5\times10^{-6} \\ 0{,}9801987 & 0{,}0096079 & 0{,}0097045 & 0{,}0002373 & 0{,}0002397 & 5{,}78\times10^{-6} & 5{,}84\times10^{-6} & 1{,}4\times10^{-6} & 1{,}5\times10^{-6} \\ 0{,}9801987 & 0{,}0096079 & 0{,}0097045 & 0{,}0002373 & 0{,}0002397 & 5{,}78\times10^{-6} & 5{,}84\times10^{-6} & 1{,}4\times10^{-6} & 1{,}5\times10^{-6} \\ 0{,}9801987 & 0{,}0096079 & 0{,}0097045 & 0{,}0002373 & 0{,}0002397 & 5{,}78\times10^{-6} & 5{,}84\times10^{-6} & 1{,}4\times10^{-6} & 1{,}5\times10^{-6} \\ 0{,}9801987 & 0{,}0096079 & 0{,}0097045 & 0{,}0002373 & 0{,}0002397 & 5{,}78\times10^{-6} & 5{,}84\times10^{-6} & 1{,}4\times10^{-6} & 1{,}5\times10^{-6} \\ 0{,}9801987 & 0{,}0096079 & 0{,}0097045 & 0{,}0002373 & 0{,}0002397 & 5{,}78\times10^{-6} & 5{,}84\times10^{-6} & 1{,}4\times10^{-6} & 1{,}5\times10^{-6} \\ 0{,}9801987 & 0{,}0096079 & 0{,}0097045 & 0{,}0002373 & 0{,}0002397 & 5{,}78\times10^{-6} & 5{,}84\times10^{-6} & 1{,}4\times10^{-6} & 1{,}5\times10^{-6} \\ 0{,}9801987 & 0{,}0096079 & 0{,}0097045 & 0{,}0002373 & 0{,}0002397 & 5{,}78\times10^{-6} & 5{,}84\times10^{-6} & 1{,}4\times10^{-6} & 1{,}5\times10^{-6} \end{bmatrix}$$

Estas probabilidades da matriz $P^{(8)}_{2,(T,1\%)}$ são interpretadas da seguinte forma: "numa apólice com frequência de sinistralidade de 1%, "a probabilidade de um determinado segurado estar na única classe de desconto é aproximadamente $98,02\%$ independentemente da sua classe inicial. Por outro lado, a probabilidade de ter um agravamento de 100% do valor do seu prémio com sinistros na última anuidade, independentemente do estado inicial é aproximadamente $1,5\times10^{-6}\%$". Como visto no Capítulo 2, o vetor linha $\pi_{2,(T,1\%)}$ definido como distribuição estacionária de uma cadeia de Markov ,tal que $\sum_{j=1}^{9} \pi_{2,(T,1\%)}(j) = 1$, é:

$$\begin{aligned} \pi_{2,(T,1\%)} &= \pi_{2,(T,1\%)} P_{2,(T,1\%)} \\ &= \begin{bmatrix} 0{,}9801987 & 0{,}0096079 & 0{,}0097045 & 0{,}0002373 & 0{,}0002397 & 5{,}78\times10^{-6} & 5{,}84\times10^{-6} & 1{,}4\times10^{-6} & 1{,}5\times10^{-6} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Na condição de estacionaridade, a probabilidade de ter 30% de desconto na apólice é aproximadamente 98%.

O vetor linha $\pi_{2,(T,10\%)}$ definido como distribuição limite de uma cadeia de Markov fica:

$$\begin{aligned} \pi_{2,(T,10\%)} &= \pi_{2,(T,10\%)} P_{2,(T,10\%)} \\ &= \begin{bmatrix} 0{,}8187308 & 0{,}067032 & 0{,}0740818 & 0{,}0149050 & 0{,}0164726 & 0{,}0032584 & 0{,}0036011 & 0{,}0009113 & 0{,}0010071 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Na condição de estacionaridade, a probabilidade de ter um agravamento de 15% na apólice com um sinistro na ultima anuidade é aproximadamente $7,4\%$.

Prosseguindo com os cálculos para $\lambda = 40\%$, o vetor linha da distribuição estacionário é:

$$\begin{aligned} \pi_{2,(T,40\%)} &= \pi_{2,(T,40\%)} P_{2,(T,40\%)} \\ &= \begin{bmatrix} 0.449329 & 0.08075861 & 0.1204777 & 0.05232024 & 0.07805263 & 0.03281939 & 0.04896077 & 0.05509285 & 0.08218887 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tendo em conta as probabilidades das distribuições estacionárias calculadas para diferentes valores de frequência da sinistralidade λ, em cada classe, achou-se por bem compará-las graficamente de modo a facilitar as suas interpretações, como sugere a Figura 4.1.

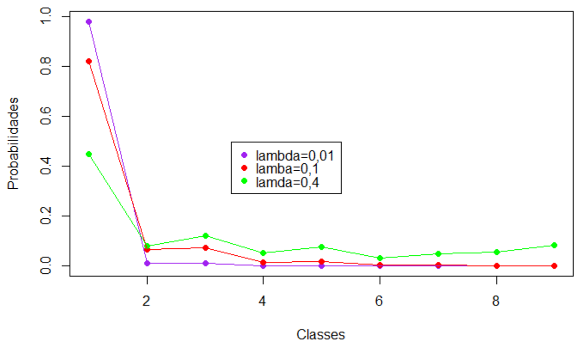

Figura 4.1: Distribuição limite para diferentes valores de λ

Consegue-se notar que, quanto maior for a frequência de sinistralidade λ, menores serão as probabilidades de estar na 1ª classe e este facto acontece por ser a única classe com desconto. Obviamente, se quiséssemos aumentar a frequência de sinistralidade, consequentemente teríamos os mesmos acontecimentos da redução da probabilidade na classe de desconto e aumento das restantes.

4.3 Tempo médio de recorrência

O tempo médio de recorrência ou o tempo médio do primeiro retorno $\mu_{2,(T,\lambda)}(j)$ de um estado j pode ser calculado usando a expressão (2.3.13), que se traduz na inversa de cada probabilidade $\pi_{2,(T,\lambda)}(j)$ da distribuição estacionária e apresenta os seus valores arredondados.

Para $\lambda = 1\%$, tem-se:

$$\mu_{2,(T,1\%)}(j) = \frac{1}{\pi_{2,(T,1\%)}(j)}, \; j = 1, 2, \cdots, 9.$$

Fazendo a divisão por escalar para encontrar o tempo médio de recorrência para cada classe C_j, obtém-se:

$\mu_{2,(T,1\%)}(1) = 1, \;\; \mu_{2,(T,1\%)}(2) = 104, \;\; \mu_{2,(T,1\%)}(3) = 103,$
$\mu_{2,(T,1\%)}(4) = 4213, \;\; \mu_{2,(T,1\%)}(5) = 4171, \;\; \mu_{2,(T,1\%)}(6) = 172927,$
$\mu_{2,(T,1\%)}(7) = 171206, \;\; \mu_{2,(T,1\%)}(8) = 6925732, \;\; \mu_{2,(T,1\%)}(9) = 6856820.$

Isso quer dizer, independentemente da classe atual na qual o segurado se encontra, o retorno à mesma classe é garantido. Como, por exemplo, levará aproximadamente 1 renovação de contrato para que o segurado volte a estar na única classe com 30% de desconto. Aproximadamente 4.171 renovações para que o segurado volte a estar na classe com 30% de agravamento com sinistros na última anuidade. Com 1% da frequência de sinistralidade raramente acontecem sinistros, razão pela qual, existem maiores números de tempo médio para renovações de contratos nas últimas classes em função da baixa probabilidade limite destas classes.

Para $\lambda = 10\%$, tem-se:

$$\mu_{2,(T,10\%)}(j) = \frac{1}{\pi_{2,(T,10\%)}(j)}, \ j = 1, 2, \cdots, 9.$$

Feita a divisão, obtém-se:

$\mu_{2,(T,10\%)}(1) = 1, \ \ \mu_{2,(T,10\%)}(2) = 15, \ \ \mu_{2,(T,10\%)}(3) = 13,$
$\mu_{2,(T,10\%)}(4) = 67, \ \ \mu_{2,(T,10\%)}(5) = 61, \ \ \mu_{2,(T,10\%)}(6) = 307,$
$\mu_{2,(T,10\%)}(7) = 278, \ \ \mu_{2,(T,10\%)}(8) = 1097, \ \ \mu_{2,(T,10\%)}(9) = 993.$

O segurado fará cerca de 15 renovações de contrato para o seu primeiro retorno à classe com 15% de agravamento e sem sinistros na última anuidade. Nota-se que o tempo médio do primeiro retorno para as classes de agravamento reduziu, devido ao aumento da frequência de sinistralidade λ, quando comparado com $\lambda = 1\%$. Com isso, 993 renovações possíveis para que o segurado faça o seu primeiro retorno à classe com 100% de agravamento e sinistros na última anuidade.

E para $\lambda = 40\%$, tem-se:

$$\mu_{2,(T,40\%)}(j) = \frac{1}{\pi_{2,(T,40\%)}(j)}, \ j = 1, 2, \cdots, 9.$$

Após a divisão, obteve-se os seguintes resultados:

$\mu_{2,(T,40\%)}(1) = 2, \ \ \mu_{2,(T,40\%)}(2) = 12, \ \ \mu_{2,(T,40\%)}(3) = 8,$
$\mu_{2,(T,40\%)}(4) = 19, \ \ \mu_{2,(T,40\%)}(5) = 13, \ \ \mu_{2,(T,40\%)}(6) = 30,$
$\mu_{2,(T,40\%)}(7) = 20, \ \ \mu_{2,(T,40\%)}(8) = 18, \ \ \mu_{2,(T,40\%)}(9) = 12.$

Com aumento significativo da frequência λ, há redução nos tempos médios de recorrência nas classes de agravamento e aumento na única classe de desconto, no qual, o segurado tem de renovar o seu contrato duas vezes para voltar a estar na única classe com 30% de desconto. Tendo em conta a alta sinistralidade, o segurado terá que renovar o seu contrato 12 vezes para voltar a estar na classe com 100% de agravamento e sinistros na última anuidade.

4.4 Prémio médio estacionário (PME)

Seja o vetor da escala de prémios b, um fator multiplicativo do prémio a pagar e o vetor linha da distribuição estacionária $\pi_{2,(T,\lambda)}$ da expressão (3.4.3). O prémio médio, em condição de estacionaridade, resulta do somatório do produto interno dos dois vetores, isto é:

$$PME = \sum_{j=1}^{m} \pi_{2,(T,\lambda)}(j)\; b(j). \tag{4.4.1}$$

Considerando o antigo sistema Bonus-Malus português, obtém-se para a frequência de sinistralidade de 1% o prémio médio em condição de estacionaridade de $70,8986\%$ do prémio de entrada, um valor considerado bom em função da baixa frequência de sinistralidade.

Aumentando a frequência para 10%, o prémio médio estacionário fica a $78,9966\%$. Nota-se que houve um aumento de aproximadamente 8% comparando com o valor anterior. Para um aumento significativo de 40% de frequência o prémio aumenta para mais de 100%, facto este que dificilmente acontece na realidade. A Figura 4.2 representa a evolução do prémio médio do antigo sistema português que possui apenas uma classe com desconto de 30% do prémio a pagar.

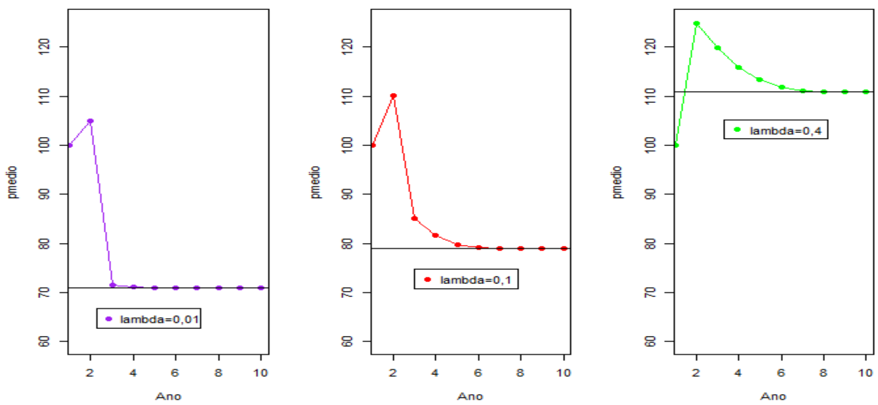

Figura 4.2: Evolução do prémio médio

Das análises feitas, notou-se que, quanto maior for a frequencia de sinistralidade, maior será o prémio médio em condição de estacionaridade. No primeiro ano da apólice, o segurado entra no sistema com 100% do pagamento do prémio em cada um dos casos da frequência λ porque estando na classe de entrada, o segurado não tem nenhum histórico que possa influenciar o prémio a pagar.
A partir da segunda renovação do contrato, nota-se uma descida consideravelmente significativa nos dois primeiros casos (ver a Figura 4.2), o que corresponde a transição da única classe de desconto para as classes de agravamento. Para o último caso, o PME é superior ao prémio de entrada porque, tendo em conta a elevada frequência de sinistralidade, o segurado terá que pagar, em média, um prémio acima do prémio de entrada.

Considerações finais

Conforme referido na introdução, os segurados são agrupados consoante a semelhança de riscos associados na tarifação *a priori*, mas nem sempre os agrupados na mesma classe apresentam o mesmo risco. Existem modelos que permitem ajustar uma distribuição, que seja representativa da frequência de sinistralidade observada em uma determinada seguradora.

Numa análise de uma base de dados real, na maioria dos casos não se verifica a homogeneidade. O segurado tem o seu prémio corrigido após uma anuidade de experiência e necessariamente pode originar um ajuste de um modelo que reflita a heterogeneidade dos riscos inerentes ao comportamento de cada um dos segurados. Durante a elaboração deste trabalho, foi utilizado o processo de Poisson homogéneo, onde se considera que o número de sinistros é proveniente de uma distribuição de Poisson, ou seja, todos segurados apresentam os mesmos riscos.

Capítulo 5

Conclusões

Os riscos não desaparecem com a contratação de seguro, mas o facto desses riscos associados a ocorrência de sinistros serem transferidos para uma seguradora, isso significa ter uma vida tranquila com menos incerteza. Com isso, quer-se dizer que a atividade seguradora exerce um papel fundamental no desenvolvimento económico e social de qualquer país, razão pela qual esteve sempre presente o objetivo de estudar o sistema Bonus-Malus na atividade seguradora.

O antigo sistema Português que funcionou durante muitos anos em Portugal era constituído por 11 classes das quais uma de entrada que não era alcançável a partir de qualquer outra classe. Com a fundamentação teórica da teoria da probabilidade e processos estocásticos (especificamente cadeias de Markov a tempo discreto) foi reestruturado e estudado o funcionamento dos antigos sistemas de tarifação *a posteriori*, nomeadamente sistema Bonus-Malus.

Foi importante considerar alguns valores para a frequência de sinistralidade de modo a comparar as suas probabilidades de transição até que as mesmas se mantivessem inalteradas. Esteve presente a curiosidade de saber qual seria o tempo médio de transição para que um segurado pudesse voltar à sua classe anterior, tendo em conta uma dada frequência de sinistralidade.

Verificou-se que, para o antigo sistema português, quanto maior for a frequência de sinistralidade menor será o tempo médio para que o segurado volte a ter sinistro. Vale relembrar que, não esteve presente o objetivo de criticar o antigo sistema português mas sim, fazer uma análise do seu funcionamento.

Trabalho futuro

Como trabalho futuro, pretende-se dar continuidade do estudo do sistema Bonus-Malus, com o objetivo de comparar o funcionamento do sistema atual Português e o sistema que vigora na ENSA (Empresa Nacional de Seguros de Angola), tendo em conta as medidas de avaliação : o nível médio de estacionaridade, o coeficiente de variação dos prémios e a elasticidade do prémio médio como fatores de comparação.

Bibliografia

[1] CENTENO, L.: Teoria do Risco na Atividade Seguradora. Oeiras, Celta Editora, 2003.

[2] CHUNG, K.: A Course in Probability Theory, 2^{nd} ed. New York, Academic Press, 1974.

[3] DOS ANJOS, A: Aula prática: Planejamento de experimento I, Universidade Federal do Paraná. 2006. Disponível em:
$<$ *https : //docs.ufpr.br/ aanjos/CE213/ce213/node8.html* $>$.

[4] FONSECA, J.: Estatística Matemática, vol 1, 1ª Ed, Edições Sílabo, 2001.

[5] GILBERTO, F.: Manual Prático dos Seguros. 2ª Ed, Banca & Seguros, 2012.

[6] GUERREIRO, G. R.: Uma Abordagem Alternativa para Bonus Malus. Tese do Mestrado, Instituto Superior de Economia e Gestão, Universidade Técnica de Lisboa. 2001.

[7] KAAS, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. and Denuit, R.: Modern Actuarial Risk Theory, 2^{nd} ed, Springer, 2008.

[8] KARLIN, S. and Taylor, H.: A first course in stochastic processes. Academic Press, 1975.

[9] LAUREANO, RAUL M. S.: Testes de hipóteses com o SPSS - O Meu Manual de Consulta Rápida, 2ª Ed, Edições Sílabo, 2013.

[10] MACHADO, L. F.: Testes não paramétricos, Universidade do Minho, 2013.

[11] PEDROSA, ANTÓNIO e GAMA, SÍLVIO: Introdução Computacional à Probabilidade e Estatística, Porto Editora, 2004.

[12] PESTANA, D. e VELOSA, F.: Introdução à Probabilidade e à Estatística, vol 1, 4^{th} ed, Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

[13] SHIRYAYEV, A. N.: Probability. New York, Springer - Verlag, 1984.

[14] TAHA, H. A.: Operations Rechearch: An introduction. 8^{th} ed, Pearson/Prentice Hall, 2008.

Apêndice A

Teorema de Perron-Frobenius (Valores e vetores próprios)

Em álgebra linear, o teorema de Perron-Frobenius, provado por Oskar Perron (1907) e Ferdinand Georg Frobenius (1912), afirma que uma matriz real quadrada com entradas positivas tem um único maior valor próprio e que o correspondente vetor próprio tem componentes estritamente positivas.

Se P é uma matriz de probabilidade de transição de uma cadeia irredutível, espaço de estados finito e com período d, então:

a) $\lambda_1 = 1$ é um valor próprio de P.

b) $\lambda_1 = \omega^0, \lambda_2 = \omega^1, \cdots, \lambda_d = \omega^{d-1}$, com $\omega = exp\left(\dfrac{2\pi}{d}\right)$, são valores próprios de P.

c) Os valores próprios $\lambda_{d+1}, \cdots, \lambda_s$, são tais que $|\lambda_j| < 1$.

d) Existe um vetor x tal que $x > 0$ e $Px = \lambda_j x$.