



**Universidade do Minho**  
Instituto de Educação

Ana Luísa Pereira Pires

**A exploração das representações semióticas  
na aprendizagem dos números racionais  
de alunos do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico**



**Universidade do Minho**  
Instituto de Educação

Ana Luísa Pereira Pires

**A exploração das representações semióticas  
na aprendizagem dos números racionais  
de alunos do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico**

Relatório de Estágio

Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico  
e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo  
do Ensino Básico

Trabalho efetuado sob a orientação do

**Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu**

## **DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS**

Este é um trabalho académico que pode ser utilizado por terceiros desde que respeitadas as regras e boas práticas internacionalmente aceites, no que concerne aos direitos de autor e direitos conexos.

Assim, o presente trabalho pode ser utilizado nos termos previstos na licença abaixo indicada.

Caso o utilizador necessite de permissão para poder fazer um uso do trabalho em condições não previstas no licenciamento indicado, deverá contactar o autor, através do RepositóriUM da Universidade do Minho.

### ***Licença concedida aos utilizadores deste trabalho***



### **Atribuição-NãoComercial-SemDerivações CC BY-NC-ND**

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Professor Floriano Viseu por toda a paciência, dedicação, disponibilidade e por todos os conselhos e apoio, em todas as horas. Esteve sempre disponível para me ajudar. Nada disto seria possível sem a sua ajuda.

À Professora Ema Mamede pela disponibilidade, pela paciência, pela ajuda e pela compreensão.

À Professora Ana Dulce Pereira por todas as palavras de incentivo, pelos momentos de partilha, pelo carinho, pela sabedoria e pela felicidade que me transmitiu.

À Professora Conceição Lagoa pelas palavras, pela ajuda, pela disponibilidade e pelos ensinamentos que partilhou.

Ao Professor Alfredo Silva por acreditar em mim, pelas palavras de incentivo, pela preocupação e pela ajuda preciosa que sempre me deu.

À Professora Carina Gonçalves pela imprescindível ajuda e pela preocupação.

Aos meus pais, aos meus avós e aos meus padrinhos pelo apoio incondicional e incentivo, por acreditarem sempre em mim.

Ao meu irmão pelos mimos, pelas gargalhadas e pelo amor.

À minha família pela preocupação, pelo incentivo e por me transmitirem a força necessária.

Às minhas amigas desta caminhada (e para o resto da vida), Cátia, Sónia, Mariana, Rosário e Ana Lúcia, pelo apoio nas horas difíceis, pela preocupação, pela ajuda e pelo companheirismo.

À Filipa, à Maria, à Raquel, ao Tiago e à Vanessa pelo apoio, pela amizade e pela força nos momentos mais difíceis.

**A todos que me fizeram acreditar que eu era capaz, muito obrigada!**

## **DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE**

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

## A EXPLORAÇÃO DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NA APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS DE ALUNOS DO 1.º E 2.º CICLOS DO ENSINO BÁSICO

### RESUMO

A Matemática é uma disciplina que se caracteriza pela natureza abstrata dos seus conceitos, que na sua aprendizagem muito contribui a utilização de diversos registos de representação. Tais representações desafiam os alunos a assumir um papel ativo na construção do seu saber, a organizar e a comunicar as suas formas de pensar, o que tende a influenciar o processo de aprendizagem de conceitos matemáticos. Considerando tais pressupostos, este estudo procura averiguar o contributo das representações semióticas na aprendizagem dos números racionais de alunos do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Na concretização deste objetivo, pretende-se responder às seguintes questões de investigação: Que registos de representação semiótica são mais utilizados pelos alunos na aprendizagem de tópicos dos números racionais? Que dificuldades e erros revelam os alunos na aprendizagem dos números racionais? Que perceções têm os alunos sobre o recurso aos registos de representação semiótica na aprendizagem dos números racionais? Com o intuito de dar resposta às questões delineadas procedeu-se à recolha de informação através dos seguintes métodos de recolha de dados: produções dos alunos; gravações-áudio de aulas; questões-aula; e questionários.

A análise dos dados possibilitou a determinação de diversas conclusões. No que se refere aos registos de representação semiótica mais utilizados pelos alunos, evidencia-se uma distinção consoante o nível de escolaridade. Na turma de 1.º Ciclo do Ensino Básico o registo pictórico destaca-se em relação aos outros registos, enquanto na turma de 2.º Ciclo do Ensino Básico prevalece a utilização do registo simbólico. No entanto, verifica-se que há uma utilização diversificada, por parte dos alunos, consoante o tipo de tarefa que é considerada. As principais dificuldades dos alunos na aprendizagem dos números racionais prendem-se com a representação através do registo pictórico de frações unitárias, a compreensão do conceito de fração, a representação de números racionais na reta numérica, a ordenação de números racionais e a adição e subtração de frações com diferentes denominadores. Algumas dessas dificuldades emergem dos erros apresentados pelos alunos, tais como a incorreta representação de frações unitárias através do registo pictórico, a associação do conceito 'metade' de várias frações unitárias, a ausência do traço de fração no registo simbólico, a utilização de termos do quotidiano para representar frações através do registo em linguagem natural, a representação incorreta de números racionais no registo gráfico e a adição inadequada de frações. Os alunos indicam diversas vantagens inerentes à utilização dos diversos registos de representação semiótica das quais se destacam o favorecimento da compreensão dos tópicos estudados, a clarificação de algumas dificuldades e a expansão de escolhas para representar números racionais. Em termos de desvantagens, os alunos indicam que a utilização de vários registos de representação acaba por confundi-los nas suas atividades.

**Palavras-chave:** Alunos do 1.º e 2.º Ciclos; Ensino e aprendizagem de números racionais; Erros e dificuldades; Frações unitárias; Registos de representação semiótica.

# EXPLORATION OF SEMIOTIC REPRESENTATIONS IN LEARNING RATIONAL NUMBERS OF 1<sup>ST</sup> AND 2<sup>ND</sup> CYCLES OF BASIC EDUCATION

## ABSTRACT

Mathematics is a discipline that is characterized by the abstract nature of its concepts, which in its learning greatly contributes the use of various representation registers. Such representations challenge students to take an active role in building their knowledge, organizing and communicating their ways of thinking, which tends to influence the learning process of mathematical concepts. Considering these assumptions, this study seeks to investigate the contribution of semiotic representations in the learning of rational numbers of students in the 1<sup>st</sup> and 2<sup>nd</sup> cycles of basic education. In order to achieve this goal, it's intend to answer the following research questions: Which semiotic representation registers are most used by students in the learning of rational numbers topics? What difficulties and errors do students reveal in learning rational numbers? What perceptions do students have about the use of semiotic representation registers in the learning of rational numbers? In order to answer the questions outlined, all the information was gathered through the following data collection methods: student productions; audio recordings of classes; class questions; and questionnaires.

Data analysis enable to determine several conclusions. Regarding the semiotic representation records most used by the students, a distinction is evident according to the level of education. In the 1<sup>st</sup> Cycle class of Basic Education, the pictorial register stands out in relation to the other registers, while in the 2<sup>nd</sup> Cycle class of Basic Education the use of the symbolic register prevails. However, there is a diversified use by students, depending on the type of task that is considered. Students' main difficulties in learning rational numbers relate to the representation through the pictorial register of unit fractions, the understanding of the concept of fraction, the representation of rational numbers in the numerical line, the ordering of rational numbers and the addition and subtraction of fractions with different denominators. Some of these difficulties arise from the errors presented by the students, such as the incorrect representation of unit fractions through the pictorial register, the association of the 'half' concept of several unit fractions, the absence of the fraction trace in the symbolic register, the use everyday terms to represent fractions by logging in natural language, misrepresenting rational numbers in the graphic register, and improperly adding fractions. Students indicate several advantages inherent to the use of the various registers of semiotic representation, of which we highlight the favoring of understanding of the topics studied, the clarification of some difficulties and the expansion of choices to represent rational numbers. In terms of disadvantages, students point out that the use of various representation records tends to confuse them in their activities.

**Keywords:** Students of the 1<sup>st</sup> and 2<sup>nd</sup> cycles; Teaching and learning of rational numbers; Errors and difficulties; Unit fractions; Records of semiotic representation.

## ÍNDICE

DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS.....	ii
AGRADECIMENTOS.....	iii
DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE.....	iv
RESUMO .....	v
ABSTRACT .....	vi
ÍNDICE DE FIGURAS .....	ix
ÍNDICE DE TABELAS.....	xiv
ÍNDICE DE QUADROS .....	xvi
CAPÍTULO 1 .....	1
INTRODUÇÃO .....	1
1.1. Objetivo e questões do estudo.....	1
1.2. Pertinência do tema .....	2
1.3. Organização do relatório.....	3
CAPÍTULO 2.....	5
ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO.....	5
2.1. Enquadramento contextual.....	5
2.1.1. Turma do 1º Ciclo do Ensino Básico .....	6
2.1.2. Turma do 2º Ciclo do Ensino Básico .....	8
2.2. Enquadramento teórico .....	11
2.2.1. Os números racionais nos programas de matemática do 1º e do 2º Ciclos .....	11
2.2.2. Noção de representação.....	13
2.2.3. Teoria dos registos de representação semiótica .....	16
2.2.4. As representações dos números racionais.....	21
2.2.5. Erros e dificuldades na aprendizagem dos números racionais .....	24
2.2.6. Análise de estudos empíricos sobre a utilização das representações semióticas na aprendizagem dos números racionais .....	25
2.3. Estratégias de intervenção.....	29
2.3.1. Metodologias de ensino e de aprendizagem .....	29
2.3.2. Estratégias de avaliação do ensino ministrado .....	34
CAPÍTULO 3.....	37
DESENVOLVIMENTO E AVALIAÇÃO DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA.....	37
3.1. Intervenção pedagógica no 1º ciclo do Ensino Básico .....	38
3.1.1. Frações unitárias: Introdução .....	38
3.1.2. Frações unitárias: parte-todo .....	47
3.1.3. Frações unitárias: parte-todo na reta numérica e em figuras .....	60

3.1.4.	Síntese .....	67
3.2.	Intervenção pedagógica no 2º Ciclo do Ensino Básico.....	69
3.2.1.	Ordenação e comparação de números racionais: frações .....	69
3.2.2.	Adição de números racionais: com o mesmo sinal.....	80
3.2.3.	Subtração de números racionais .....	90
3.2.4.	Síntese .....	97
3.3.	Avaliação do ensino ministrado pelos alunos do 1º Ciclo .....	98
3.4.	Avaliação do ensino ministrado pelos alunos do 2º Ciclo .....	102
CAPÍTULO 4.....		108
CONCLUSÕES, IMPLICAÇÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES.....		108
4.1.	Conclusões.....	108
4.1.1.	Que registos de representação semiótica são mais utilizados pelos alunos na aprendizagem de tópicos dos números racionais?.....	108
4.1.2.	Que dificuldades e erros revelam os alunos na aprendizagem dos números racionais?.....	111
4.1.3.	Que perceções têm os alunos sobre o recurso aos registos de representação semiótica na aprendizagem dos números racionais?.....	114
4.2.	Reflexão final.....	115
4.3.	Limitações e recomendações do estudo.....	116
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....		118
ANEXOS .....		122
Anexo A –	Questionário inicial (1.º Ciclo).....	123
Anexo B –	Questionário final (1.º Ciclo) .....	124
Anexo C –	Questionário inicial (2.º Ciclo).....	125
Anexo D –	Questionário final (2.º Ciclo).....	127
Anexo E –	Planificação 1.ª Aula (1.º Ciclo) .....	129
Anexo F –	Planificação 2.ª Aula (1.ºCiclo) .....	131
Anexo G –	Planificação 4.ª Aula (1.º Ciclo).....	133
Anexo H –	Planificação 2.ª Aula (2.ºCiclo).....	135
Anexo I –	Planificação 3.ª Aula (2.º Ciclo) .....	136
Anexo J –	Planificação 5.ª Aula (2.º Ciclo).....	138

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Níveis de avaliação dos alunos do 2.º ano de escolaridade na disciplina de matemática durante o ano letivo.....	7
Figura 2. Níveis de avaliação dos alunos do 6.º ano de escolaridade na disciplina de matemática durante o ano letivo.....	8
Figura 3. Representação em linguagem natural, simbólico-numérica, pictórica e gráfica de um número racional.....	18
Figura 4. Enunciado e resolução do exemplo 1.....	19
Figura 5. Enunciado e resolução do exemplo 2.....	19
Figura 6. Registos de representação e números racionais (Machado, 2003, p.59).....	23
Figura 7. Resposta parcialmente correta do par P8 à Questão 1 da Tarefa1.....	39
Figura 8. Respostas corretas, respetivamente, dos pares P5 e P7 à Questão 1 da Tarefa1.....	39
Figura 9. Resposta correta do par P8 à Questão 2 da Tarefa1.....	40
Figura 10. Resposta correta do par P5 à Questão 3 da Tarefa1.....	40
Figura 11. Resposta parcialmente correta do par P1 à Questão 3 da Tarefa1.....	40
Figura 12. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P4, P3 e P7 à Questão 3 da Tarefa1.....	41
Figura 13. Resposta incorreta do par P8 à Questão 3 da Tarefa1.....	41
Figura 14. Resposta correta do aluno A20 à Questão 1 da Tarefa2.....	42
Figura 15. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos alunos A8, A26 e A11 à Questão 1 da Tarefa2.....	43
Figura 16. Respostas incorretas, respetivamente, dos alunos A25 e A16 à Questão 1 da Tarefa2.....	43
Figura 17. Resposta correta do aluno A18 à Questão 2 da Tarefa2.....	43
Figura 18. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos alunos A10 e A3 à Questão 2 da Tarefa2.....	44
Figura 19. Resposta parcialmente correta do aluno A20 à Questão 2 da Tarefa2.....	44
Figura 20. Respostas corretas, respetivamente, dos alunos A18, A4 e A11 à Questão 3 da Tarefa2.....	44
Figura 21. Resposta parcialmente correta do aluno A5 à Questão 3 da Tarefa2.....	44
Figura 22. Resposta incorreta do aluno A16 à Questão 3 da Tarefa2.....	45
Figura 23. Respostas corretas, respetivamente, dos alunos A5 e A20 à Tarefa3.....	46
Figura 24. Resposta parcialmente correta do aluno A7 à Tarefa3.....	46

Figura 25. Resposta incorreta do aluno A4 à Tarefa3.....	47
Figura 26. Respostas corretas, respetivamente, dos pares P3, P11, P12 e P5 à Questão 1 da Tarefa1...48	48
Figura 27. Resposta correta do par P1 à Questão 2 da Tarefa1.....	48
Figura 28. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P10, P2 e P3 à Questão 2 da Tarefa1.....	49
Figura 29. Resposta parcialmente correta do par P12 à Questão 2 da Tarefa1.....	49
Figura 30. Resposta incorreta do par P6 à Questão 2 da Tarefa1.....	49
Figura 31. Resposta correta do aluno A20 à Questão 1 da Tarefa2.....	51
Figura 32. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos alunos A13, A4 e A15 à Questão 1 da Tarefa2.....	51
Figura 33. Resposta parcialmente correta do aluno A10 à Questão 2 da Tarefa2.....	52
Figura 34. Resposta parcialmente correta do aluno A26 à Questão 2 da Tarefa2.....	52
Figura 35. Resposta parcialmente correta do aluno A6 à Questão 2 da Tarefa2.....	53
Figura 36. Resposta parcialmente correta do alunos A1 à Questão 2 da Tarefa2.....	53
Figura 37. Respostas incorretas, respetivamente, dos alunos A8, A4 e A5 à Questão 2 da Tarefa2.....	54
Figura 38. Resposta parcialmente correta do aluno A23 à Questão 3 da Tarefa2.....	55
Figura 39. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos alunos A21, A20, A6, A26, A1 e A17 à Questão 3 da Tarefa2.....	55
Figura 40. Resposta correta do aluno A6 à Questão 1 na Tarefa3.....	57
Figura 41. Resposta incorreta do aluno A2 à Questão 1 da Tarefa3.....	57
Figura 42. Resposta correta do aluno A3 à Questão 2 da Tarefa3.....	57
Figura 43. Resposta correta do aluno A1 à Questão 3 da Tarefa3.....	58
Figura 44. Resposta parcialmente correta do aluno A19 à Questão 3 da Tarefa3.....	58
Figura 45. Resposta correta do aluno A15 à Questão 4 da Tarefa3.....	58
Figura 46. Resposta correta parcialmente correta do aluno A19 à Questão 4 da Tarefa3.....	59
Figura 47. Resposta parcialmente correta do par P11 à Questão 1 da Tarefa1.....	61
Figura 48. Respostas corretas, respetivamente, dos pares P1 e P6 à Questão 1 da Tarefa1.....	61
Figura 49. Resposta correta do par P1 à Questão 2 da Tarefa1.....	61
Figura 50. Resposta parcialmente correta do par P5 à Questão 2 da Tarefa1.....	61
Figura 51. Resposta incorreta do par P2 à Questão 2 da Tarefa1.....	62
Figura 52. Resposta correta do par P11 à Questão 3 Tarefa1.....	62
Figura 53. Resposta incorreta do par P4 à Questão 3 da Tarefa1.....	62

Figura 54. Resposta correta do aluno A7 à Questão 1 da Tarefa2.....	64
Figura 55. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos alunos A11, A15 e A26 à Questão 1 da Tarefa2.....	64
Figura 56. Respostas incorretas, respetivamente, dos alunos A6 e A17 à Questão 1 da Tarefa2.....	65
Figura 57. Resposta parcialmente correta do par P9 à Tarefa3.....	66
Figura 58. Resposta correta do par P1 à Tarefa3.....	66
Figura 59. Resposta incorreta do par P8 à Tarefa3.....	66
Figura 60. Resposta correta do par P3 à Questão 1 da Tarefa1.....	69
Figura 61. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P5, P6 e P1 à Questão 1 da Tarefa1.....	70
Figura 62. Resposta incorreta do par P4 à Questão 1 da Tarefa1.....	71
Figura 63. Resposta correta do par P7 à Questão 2 da Tarefa1.....	71
Figura 64. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P1, P3 e P9 à Questão 2 da Tarefa1.....	72
Figura 65. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P6, P8, P2 e P4 à Questão 2 da Tarefa1.....	72
Figura 66. Resposta incorreta do par P5 à Questão 2 da Tarefa1.....	72
Figura 67. Respostas corretas, respetivamente, dos pares P1, P7, P10, P9 e P3 à Questão 3 da Tarefa1.....	73
Figura 68. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P8, P2 e P5 à Questão 3 da Tarefa1.....	73
Figura 69. Respostas incorretas, respetivamente, dos pares P6 e P4 à Questão 3 da Tarefa1.....	73
Figura 70. Respostas corretas, respetivamente, dos pares P2 e P6 à Questão 1 da Tarefa2.....	75
Figura 71. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P10, P1, P7, P5 e P4 à Questão 1 da Tarefa2.....	75
Figura 72. Respostas incorretas, respetivamente, dos pares P8, P9 e P3 à Questão 1 da Tarefa2.....	76
Figura 73. Respostas corretas, respetivamente, dos pares P2 e P5 à Questão 2 da Tarefa2.....	76
Figura 74. Resposta parcialmente correta do par P9 à Questão 2 da Tarefa2.....	76
Figura 75. Respostas incorretas, respetivamente, dos pares P6, P8 e P4 à Questão 2 da Tarefa2.....	76
Figura 76. Resposta correta do par P5 à Questão 3 da Tarefa2.....	77
Figura 77. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P2, P3 e P1 à Questão 3 da Tarefa1.....	77

Figura 78. Resposta incorreta do par P9 à Questão 3 da Tarefa2.....	78
Figura 79. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P3, P7 e P9 à Tarefa3.....	79
Figura 80. Respostas incorretas, respetivamente, dos pares P2, P10 e P8 à Tarefa3.....	79
Figura 81. Resposta correta do par P5 à Questão 1 da Tarefa1.....	81
Figura 82. Resposta correta do par P8 à Questão 2 da Tarefa1.....	81
Figura 83. Resposta parcialmente correta do par P2 à Questão 2 da Tarefa1.....	82
Figura 84. Respostas incorretas, respetivamente, dos pares P10, P1, P9 e P4 à Questão 2 da Tarefa1.....	82
Figura 85. Resposta correta do par P6 à Questão 1.1 da Tarefa2.....	84
Figura 86. Resposta correta do par P2 à Questão 1.2 da Tarefa2.....	84
Figura 87. Resposta incorreta do par P9 à Questão 1.2 da Tarefa2.....	84
Figura 88. Resposta correta do par P6 à Questão 1.3 da Tarefa2.....	84
Figura 89. Resposta correta do par P5 à Questão 1.4 da Tarefa2.....	84
Figura 90. Resposta parcialmente correta do par P1 à Questão 1.4 da Tarefa2.....	85
Figura 91. Respostas incorretas, respetivamente, dos pares P9 e P7 à Questão 1.4 da Tarefa2.....	85
Figura 92. Resposta correta do par P3 à Questão 1.5 da Tarefa2.....	85
Figura 93. Resposta incorreta do par P8 à Questão 1.5 da Tarefa2.....	85
Figura 94. Resposta correta do par P7 à Questão 1.6 da Tarefa2.....	86
Figura 95. Resposta parcialmente correta do par P2 à Questão 1.6 da Tarefa2.....	86
Figura 96. Resposta incorreta do par P3 à Questão 1.6 da Tarefa2.....	86
Figura 97. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P3 e P5 à Questão 2 da Tarefa2.....	86
Figura 98. Resposta correta do par P7 à Tarefa3.....	88
Figura 99. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P5 e P9 à Tarefa3.....	88
Figura 100. Resposta parcialmente correta do par P6 à Tarefa3.....	88
Figura 101. Respostas incorretas, respetivamente, dos pares P1 e P3 à Tarefa3.....	89
Figura 102. Resposta correta do par P7 à Questão 1 da Tarefa1.....	90
Figura 103. Respostas corretas, respetivamente, dos pares P3 e P5 à Questão 2 da Tarefa2.....	91
Figura 104. Resposta parcialmente correta do par P2 à Questão 2 da Tarefa2.....	91
Figura 105. Respostas corretas, respetivamente, dos pares P1, P2 e P10 à Questão 3 da Tarefa1.....	91
Figura 106. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P3, P5 e P6 à Questão 3 da Tarefa1.....	92

Figura 107. Resposta correta do par P10 à Questão 4 da Tarefa1.....	92
Figura 108. Resposta parcialmente correta do par P1 à Questão 4 da Tarefa1.....	92
Figura 109. Resposta parcialmente correta do par P2 à Questão 4 da Tarefa1.....	92
Figura 110. Resposta parcialmente correta do par P5 à Questão 4 da Tarefa1.....	93
Figura 111. Resposta correta do par P3 à Questão 5 da Tarefa1.....	93
Figura 112. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P3, P5 e P8 à Tarefa2.....	94
Figura 113. Respostas corretas, respetivamente, dos alunos A9, A13 e A14 à Tarefa3.....	96
Figura 114. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos alunos A3 e A12 à Tarefa3.....	96
Figura 115. Respostas incorretas, respetivamente, dos alunos A11 e A19 à Tarefa3.....	96
Figura 116. Tabuleiro de jogo do dominó do par P6 realizado na 5.ª aula.....	98
Figura 117. Retângulo das frações.....	99
Figura 118. Resposta do aluno A2 relativamente às vantagens da utilização de diferentes registos de representação.....	105
Figura 119. Resposta do aluno A17 relativamente às vantagens da utilização de diferentes registos de representação.....	105
Figura 120. Resposta do aluno A2 relativamente às desvantagens da utilização de diferentes registos de representação.....	106
Figura 121. Resposta do aluno A4 relativamente ao registo de representação que facilitou a aprendizagem dos números racionais.....	106

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1: Frequência dos tipos de resposta às questões da Tarefa 1 ( $n = 16$ ).....	38
Tabela 2: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 1.....	41
Tabela 3: Frequência dos tipos de resposta às questões da Tarefa 2 ( $n = 16$ ).....	42
Tabela 4: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 2.....	45
Tabela 5: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 3 ( $n = 16$ ).....	46
Tabela 6: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 3.....	47
Tabela 7: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 1 ( $n = 24$ ).....	48
Tabela 8: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 1.....	49
Tabela 9: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 2 ( $n = 24$ ).....	51
Tabela 10: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 2.....	55
Tabela 11: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 3 ( $n = 24$ ).....	56
Tabela 12: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 3.....	59
Tabela 13: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 1 ( $n = 24$ ).....	60
Tabela 14: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 1.....	63
Tabela 15: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 2 ( $n = 24$ ).....	63
Tabela 16: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 2.....	65
Tabela 17: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 3 ( $n = 24$ ).....	65
Tabela 18: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 3.....	67
Tabela 19: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na aprendizagem dos números racionais não negativos.....	67
Tabela 20: Frequência dos tipos de resposta às questões da Tarefa 1 ( $n = 20$ ).....	69
Tabela 21: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 1.....	74
Tabela 22: Frequência dos tipos de resposta às questões da Tarefa 2 ( $n = 20$ ).....	74
Tabela 23: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 2.....	78
Tabela 24: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 3 ( $n = 20$ ).....	79
Tabela 25: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 3.....	80
Tabela 26: Frequência dos tipos de resposta às questões da Tarefa 1 ( $n = 20$ ).....	81
Tabela 27: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 1.....	82
Tabela 28: Frequência dos tipos de resposta às questões da Tarefa 2 ( $n = 20$ ).....	83
Tabela 29: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 2.....	87
Tabela 30: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 3 ( $n = 20$ ).....	88

Tabela 31: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 3.....	89
Tabela 32: Frequência dos tipos de resposta às questões da Tarefa 1 ( $n = 20$ ).....	90
Tabela 33: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 1.....	93
Tabela 34: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 2 ( $n = 20$ ).....	94
Tabela 35: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 2.....	95
Tabela 36: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 3 ( $n = 20$ ).....	95
Tabela 37: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 3.....	96
Tabela 38: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na aprendizagem dos números racionais.....	97
Tabela 39: Frequência das atividades que os alunos mais gostaram de realizar.....	98
Tabela 40: Frequência das atividades que os alunos menos gostaram de realizar.....	99
Tabela 41: Frequência das dificuldades sentidas pelos alunos nas atividades realizadas.....	100
Tabela 42: Grau de concordância (%) sobre a aprendizagem dos números racionais.....	103
Tabela 43: Grau de concordância (%) sobre a utilização dos diferentes registos de representação semiótica.....	103
Tabela 44: Grau de concordância (%) sobre a utilização dos diferentes registos de representação semiótica na aprendizagem dos números racionais.....	104
Tabela 45: Grau de concordância (%) sobre o trabalho em pares.....	107

## ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1: Tipo de função das representações (Duval, 1995, p.27).....	15
Quadro 2: Classificação dos registos de representação semiótica em matemática (Machado, 2003).....	17
Quadro 3: Síntese da intervenção pedagógica no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.....	37

# **CAPÍTULO 1**

## **INTRODUÇÃO**

Neste primeiro capítulo introduz-se o Relatório de Estágio desenvolvido no 2.º ano do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico. A intervenção pedagógica subjacente a este Relatório de Estágio foi desenvolvida em duas turmas distintas, uma do 2.º ano de escolaridade e outra do 6.º ano de escolaridade, pertencentes ao mesmo Agrupamento de escolas. Neste sentido, considerando o tema que guiou a Intervenção Pedagógica, na primeira parte deste capítulo explicitam-se as questões de estudo, bem como o objetivo do mesmo, na segunda parte apresenta-se a pertinência do estudo e na terceira parte revela-se a organização do Relatório desenvolvido.

### **1.1. Objetivo e questões do estudo**

O tema do estudo em questão prende-se com a exploração das representações semióticas na aprendizagem dos números racionais de alunos do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. A razão da escolha deste tema teve por base características subjacentes aos alunos da turma do 1.º Ciclo, onde a Intervenção Pedagógica foi concretizada. Estes alunos apresentavam dificuldades em exteriorizar os seus pensamentos, condicionando a sua aprendizagem de tal forma que denotei a extrema importância de trabalhar as representações em matemática. Para além disto, como se tratava de uma turma do 2.º ano de escolaridade, seria a primeira vez que estes alunos iriam contactar formalmente com o conteúdo dos números racionais e, nesse sentido, era determinante a forma como estes se envolveriam nessa aprendizagem, tal como afirma Ministério da Educação e Ciência (2013), “a iniciação ao estudo das frações constitui um tema chave do presente ciclo, devendo procurar-se que os alunos assimilem os diferentes aspetos relacionados com esta temática” (p. 6). Assim, aliar os números racionais às diferentes representações seria benéfico para os alunos em ambos os sentidos, permitindo que estes contactassem com as diferentes representações dos números racionais, consolidando os conhecimentos acerca deste conteúdo.

Com base em tais pressupostos, o projeto teve como objetivo averiguar o contributo das representações semióticas na aprendizagem dos números racionais de alunos do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Na concretização deste objetivo, pretendia dar resposta às seguintes questões de investigação:

Q1: Que registos de representação semiótica são mais utilizados pelos alunos na aprendizagem de tópicos dos números racionais?

Q2: Que dificuldades e erros revelam os alunos na aprendizagem dos números racionais?

Q3: Que perceções têm os alunos sobre o recurso aos registos de representação semiótica na aprendizagem dos números racionais?

Neste trabalho, por uma questão de linguagem, quando se faz referência a números racionais significa que se está a contemplar no 1.º Ciclo do Ensino Básico somente os números racionais não negativos, enquanto que no 2.º Ciclo do Ensino Básico se contempla os números racionais não negativos e negativos (Ministério da Educação e Ciência, 2013).

## **1.2. Pertinência do tema**

A integração da disciplina de matemática no currículo escolar tem várias finalidades, com especial destaque para a formativa, social e cultural (Ponte et al., 1997). No desenvolvimento destas finalidades, esta disciplina contempla uma linguagem que nem sempre é assimilada e compreendida por muitos alunos, o que se traduz num obstáculo à aprendizagem dos seus conteúdos. Caracteriza-se, assim, por ser uma disciplina com muitos desafios, mas a sua elevada importância na formação das pessoas é perceptível, tal como enuncia o NCTM (2007): “a necessidade de compreender e de ser capaz de usar a matemática na vida quotidiana, e no local de trabalho, nunca foi tão premente” (p. 4). Porém, a compreensão matemática tende a estar ligada ao desenvolvimento cognitivo do aluno, no sentido de conseguir percorrer um caminho a fim de atingir um nível que lhe permita ter sucesso na disciplina. Os fracos resultados de muitos alunos fazem com que se sintam desmotivados para aprender matemática, o que remete para o professor perceber e ajudar a superar os obstáculos com que se deparam na aprendizagem desta disciplina. Importa elaborar formas de motivar os alunos e dispor de diversas estratégias no ensino dos conteúdos matemáticos de modo a envolver os alunos na construção do conhecimento matemático (NCTM, 2007).

A ação educativa deve proporcionar aos alunos a perceção da relevância de tudo aquilo que aprendem, para que percebam a utilidade dos conteúdos que estudam. Nesta ação, a autonomia dada aos alunos incute-lhes a perceção que a sua ação tem no desenvolvimento do seu pensamento, bem como da sua compreensão, mesmo que seja através de erros cometidos, tal como afirma Ianhes (s.d.):

“percorrer o caminho por meios próprios, com tentativas e erros e com uma orientação sem dogmatismos, constitui um meio tão valioso como insubstituível para desenvolver no

aluno o pensamento crítico, a confiança no seu potencial mental e o hábito de utilizar as suas competências autonomamente” (p. 14).

As dificuldades que os alunos apresentam deverão ser colmatadas pelo professor, arranjando estratégias e adequando a complexidade dos desafios consoante os níveis de insucesso dos alunos, de forma a facilitar a aprendizagem dos conteúdos mais complicados. Dentro destes conteúdos, os números racionais destacam-se pela sua complexidade, tal como afirmam Silva, Santiago e Santos (2014): “esses números são de difícil compreensão para os alunos, devido à variedade de registos de representações e de significados envolvidos” (p. 1487). Tendo conhecimento de que estas dificuldades se alargam desde o 1.º Ciclo do Ensino Básico a todos os ciclos seguintes, julguei pertinente elaborar um projeto com base no pressuposto de que a exploração das diferentes representações semióticas favorece, como defende Duval (2012), a aprendizagem dos tópicos abordados no subdomínio ‘Números racionais não negativos’ numa turma do 2.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico e numa turma do 6.º ano do 2.º Ciclo do Ensino Básico. A representação é uma ação importante em todo o processo de aprendizagem dos alunos, tal como advoga o NCTM (2007): “os alunos deverão compreender que as representações escritas das ideias matemáticas constituem uma componente essencial da aprendizagem e da produção matemática” (p. 75). Os alunos podem recorrer e conectar as diferentes representações de um dado conceito matemático para exteriorizar os seus pensamentos. Segundo o NCTM (2007), “é importante encorajar os alunos a representar as suas ideias sob formas que, para eles, façam sentido, mesmo que as suas primeiras representações não sejam as convencionais” (p. 75). Recorrendo a estratégias de ensino que promovam a conexão entre as diferentes representações, paulatinamente, “os alunos aprendem formas de representação convencionais, de modo a facilitar quer a sua aprendizagem da matemática, quer a comunicação com terceiros das suas ideias matemáticas” (p. 75).

### **1.3. Organização do relatório**

Este Relatório de Estágio, sob a perspetiva da estrutura de organização, encontra-se dividido em quatro capítulos. O primeiro capítulo, *Introdução*, corresponde ao capítulo em exposição que integra os objetivos e as questões de investigação, a pertinência do estudo e a estrutura de organização do relatório.

No segundo capítulo, *Enquadramento Contextual e Teórico*, numa primeira secção apresenta-se a contextualização do agrupamento e das escolas e, posteriormente, caracterizam-se as turmas do 1.º Ciclo do Ensino Básico e do 2.º Ciclo do Ensino Básico onde a intervenção pedagógica se realizou. Na segunda secção apresenta-se uma fundamentação teórica adequada às questões de investigação que regem o relatório. Encontra-se dividido em seis secções: i) Os números racionais nos programas de

matemática do 1.º e do 2.º Ciclos; ii) Noção de representação; iii) Teoria dos registos de representação semiótica; iv) As representações dos números racionais; v) Erros e dificuldades na aprendizagem dos números racionais; e vi) Análise de estudos empíricos sobre a utilização das representações semióticas na aprendizagem dos números racionais. Na terceira secção deste capítulo menciona-se a metodologia de ensino e de aprendizagem e, por último, referem-se as estratégias de avaliação do ensino ministrado.

No terceiro capítulo, *Desenvolvimento e avaliação da intervenção pedagógica*, evidencia-se a análise e discussão de dados relativos a todo o processo de intervenção, sendo feita uma avaliação. Este capítulo divide-se em quatro secções: as duas primeiras secções referem-se, respetivamente, à implementação da Intervenção Pedagógica no 1.º Ciclo do Ensino Básico e no 2.º Ciclo do Ensino Básico. As duas últimas secções contemplam a avaliação do ensino ministrado dos alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico e dos alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico.

No quarto capítulo, *Conclusão*, expõem-se as principais conclusões do estudo, tendo por base o objetivo e as questões de investigação delineadas, as limitações e as recomendações para futuras investigações.

Por fim, apresentam-se as Referências Bibliográficas consultadas e mencionadas no decorrer do relatório e, nos anexos, apresentam-se documentos que acrescentam a leitura do relatório.

## **CAPÍTULO 2**

### **ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO**

Na procura de descrever e interpretar momentos da minha intervenção pedagógica, este capítulo tem por finalidade dar a conhecer características dos contextos onde se realizou tal intervenção, sob a designação de Enquadramento Contextual, e sustentar teoricamente o objetivo e as questões de investigação delineadas, em torno do Enquadramento Teórico.

#### **2.1. Enquadramento contextual**

O projeto de intervenção pedagógica foi desenvolvido numa escola de 1.º Ciclo do Ensino Básico e numa escola de 2.º Ciclo do Ensino Básico, integradas no mesmo agrupamento de escolas. Este agrupamento contemplava um Projeto Educativo, a vigorar entre 2017 e 2021, que tem como tema *Uma Escola Promotora de Sucesso para Todos com a colaboração, cooperação e envolvimento de Todos*, tendo como linhas orientadoras a diminuição da indisciplina na sala de aula, o insucesso escolar e a promoção da cidadania e da sustentabilidade.

Por forma a diminuir condutas impróprias na sala de aula, estabeleci com os alunos um conjunto de normas de estar e de ser na sala de aula, como, por exemplo, o cumprimento da pontualidade e o respeito das opiniões dos outros, favorecendo a diminuição da indisciplina na sala de aula e a promoção da cidadania. Em termos de diminuição do insucesso escolar, tentei valorizar todas as iniciativas dos alunos, para estes se motivarem e sentirem que são capazes de realizar as atividades que são propostas, cada um com o seu ritmo.

O agrupamento integrava escolas com diferentes níveis – Educação Pré-escolar, Ensino Básico e Ensino Secundário – caracterizando-se, assim, como um agrupamento vertical, constituído por cinco estabelecimentos de ensino: quatro estabelecimentos que abrangem jardim-de-infância e 1.º Ciclo do Ensino Básico e um estabelecimento de ensino do 2.º Ciclo do Ensino Básico, 3.º Ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário, sendo esta a escola sede do agrupamento.

A escola do 1.º Ciclo do Ensino Básico onde implementei o meu projeto de intervenção pedagógica agregava 325 alunos que frequentavam o jardim de infância e o 1.º Ciclo do Ensino Básico, 19 docentes e 14 salas que se encontravam em funcionamento. Neste estabelecimento, para além dos professores titulares de turma, trabalhavam Professores de Educação Especial, Professores de Apoio Educativo, Professores do Projeto de Ciências Experimentais e Professores de Programação no 1.º Ciclo.

O estabelecimento do 1.º Ciclo do Ensino Básico estava equipado com o material escolar necessário para a concretização das atividades nas aulas de matemática, com computadores com acesso à internet, com jogos lúdico/pedagógicos, com uma biblioteca, com espaços exteriores e com um pavilhão de vasta dimensão, que permitia, em dias de chuva, que os alunos o pudessem usufruir durante os intervalos. A biblioteca escolar proporcionava um vasto conjunto de livros e atividades ao longo do ano, que permitia aos alunos o contacto com o 'mundo' da literacia. Em relação ao espaço exterior apresentava um terreno vasto, com uma parte coberta e outra descoberta, integrando no chão jogos desenhados, tais como o jogo tradicional da macaca, que os alunos podiam utilizar durante os intervalos.

A escola do 2.º Ciclo do Ensino Básico abarcava cerca de 850 alunos, desde o 2.º Ciclo do Ensino Básico até ao Ensino Secundário, integrando alunos que frequentavam cursos profissionais e cerca de 140 docentes. Este estabelecimento possuía laboratórios de Biologia/Geologia, laboratórios de Física e Química, salas de informática, sala do secretariado de exames, biblioteca, sala de estudo, sala multimédia, sala de professores, sala dos diretores de turma, sala da Associação de Pais, sala dos funcionários, polivalente, ginásio, papelaria, cantina, reprografia, entre outros. O acesso à internet e a projetores era favorável, contudo a projeção não era feita da melhor forma. As telas utilizadas teriam de ser colocadas sobre o quadro, o que restringia a utilização simultânea do quadro e do projetor. Em algumas salas existiam quadros interativos, mas a utilização destes não era possível, devido a falhas que por mais que fossem corrigidas, voltavam a aparecer. Em relação aos espaços exteriores da escola apresentavam uma vasta dimensão, disponibilizando três campos desportivos direcionados para atividades físicas como futebol e basquetebol.

O estabelecimento, sendo a sede do agrupamento, disponibilizava aos alunos atividades complementares, tais como a recuperação e preparação para os exames nacionais, o Clube de Artes, o Desporto Escolar e outros Clubes.

### **2.1.1. Turma do 1ª Ciclo do Ensino Básico**

No contexto educativo do 1.º Ciclo do Ensino Básico, o projeto de intervenção pedagógica foi implementado numa turma do 2.º ano de escolaridade composta por 26 alunos, dos quais 12 eram raparigas e 14 eram rapazes, com idades compreendidas entre os sete e os oito anos. Esta turma não integrava alunos com Necessidades Educativas Especiais, contudo dois alunos usufruíam de apoio pedagógico por se encontrarem ao nível do 1.º ano de escolaridade, estando sob a avaliação dos docentes da escola inclusiva. Em termos gerais, a turma caracterizava-se por ser heterogénea, com

ritmos de aprendizagem diferenciados, havendo alunos com mais dificuldades, comparativamente a outros que apresentavam uma maior destreza de aprendizagem. No que diz respeito ao desempenho dos alunos na disciplina de matemática, durante o ano letivo a maior parte dos alunos obteve o nível de 'Satisfaz' no final de cada um dos períodos de avaliação que organiza o ano escolar (Figura 1).



Figura 1. Níveis de avaliação dos alunos do 2.º ano de escolaridade na disciplina de matemática durante o ano letivo

Os níveis de avaliação dos alunos, em geral, foram maioritariamente o Bom e o Muito Bom, como se pode constatar pela análise da Figura 1. O nível de 'Não satisfaz' foi obtido por dois alunos no 1.º período, diminuindo no 2.º período para um aluno, voltando no 3.º período a registar dois alunos. No que respeita ao nível de 'Satisfaz', o número de aluno foi aumentando ao longo do ano letivo, mais significativa na passagem do 1.º período para o 2.º período. A frequência do nível 'Bom' aumentou de nove alunos no 1.º período para onze alunos no 2.º período, retomando no 3.º período os nove alunos. O número de alunos a obter o nível 'Muito Bom' no 1.º período foi de 13 alunos, reduzindo para oito alunos no 2.º período, frequência esta que se manteve no final do ano letivo.

No início da intervenção pedagógica implementei um questionário com o intuito de recolher informação que me permitisse conhecer características dos alunos, tais como as dificuldades na aprendizagem de matemática e as suas preferências relativamente às diferentes áreas disciplinares. Constatei, assim, que a matemática é a área disciplinar que 11 dos alunos (42,31%) mais gostam e a disciplina de Português, para 13 alunos (50%), é a área disciplinar que menos gostam. Dos 26 alunos, 21 (80,77%) afirmou gostar de matemática, usando como justificação o 'gosto de fazer contas', o 'gosto de resolver problemas' e, em outra perspetiva, porque 'desenvolve a minha mente'; quatro alunos (15,38%) revelaram gostar mais ou menos e apenas um aluno (3,85%) revelou não gostar de matemática, porque 'não gosto de fazer contas'.

Relativamente às dificuldades em matemática, 15 alunos (57,69%) afirmaram não terem dificuldades nesta disciplina e os restantes 11 alunos (42,31%) revelaram ter dificuldades, por considerarem que 'as contas são difíceis' ou 'os problemas são difíceis'. As atividades que os alunos

manifestaram que mais gostavam de fazer em matemática foi, na maioria, ‘fazer contas’, ‘realizar jogos’ e ‘resolver problemas’.

Relativamente ao formato de trabalho em sala de aula, os alunos (65,38%) manifestaram um maior interesse em trabalhar em grupo essencialmente porque ‘ajudamo-nos uns aos outros’, ‘é mais fácil’ e ‘damos opiniões’. O trabalho em pares também foi escolhido por seis (23,08%) dos 26 alunos, por considerarem que ‘com companhia é mais fácil’. Os restantes alunos (11,54%) que preferiam trabalhar individualmente justificaram tal opção referindo que ‘é difícil trabalhar em grupo’.

A turma, de uma forma geral, teve um comportamento satisfatório, contudo, em certos momentos encontravam-se mais agitados, acabando por dificultar o desenvolvimento das aulas. Como se tratava de uma turma numerosa, havia uma tendência de alguns alunos falarem uns com os outros e, por vezes, o controlo da turma nem sempre era fácil de gerir. No entanto, as crianças eram curiosas e empenhadas, o que facilitou o desenrolar da intervenção pedagógica, mesmo quando existiam momentos de distração.

### 2.1.2. Turma do 2<sup>a</sup> Ciclo do Ensino Básico

No 2.º Ciclo do Ensino Básico, o projeto de intervenção foi implementado numa turma do 6.º ano de escolaridade, constituída por 21 alunos, dos quais oito eram raparigas e 13 eram rapazes, com idades compreendidas entre os dez e os catorze anos. A turma incluía um aluno com Necessidades Educativas Especiais – o aluno possuía incapacidade intelectual. No 2.º período, a turma ficou reduzida a 20 alunos, devido a uma desistência por parte de uma aluna, tendo esta sido classificada apenas no 1.º período.

Os alunos desta turma revelaram ritmos de aprendizagem diferenciados, tal como aconteceu com a turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico onde o projeto de intervenção foi implementando, caracterizando-se, assim, como uma turma heterogénea. O desempenho dos alunos, na disciplina de matemática, ao longo do ano letivo foi-se modificando, tal como se pode observar na Figura 2.

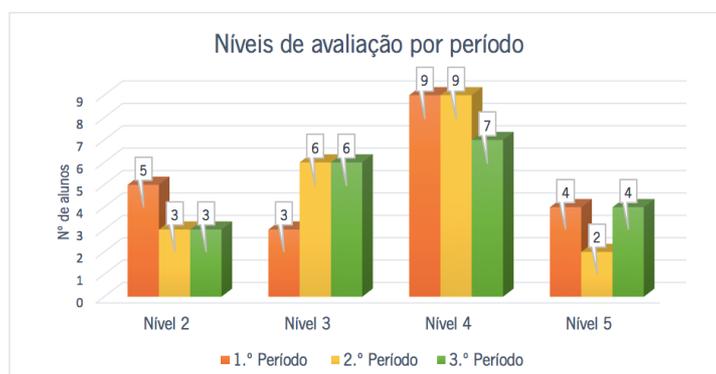


Figura 2. Níveis de avaliação dos alunos do 6.º ano de escolaridade na disciplina de matemática durante o ano letivo

Os níveis de avaliação, na disciplina de matemática, dos alunos da turma do 6.º ano de escolaridade eram satisfatórios, havendo uma evolução ao longo do ano letivo. No 1.º período, dos cinco alunos a obter o nível 2, apenas três obtiveram esta classificação no 2.º período, mantendo-se inalterado até ao 3.º período. O nível 3 aumentou de três alunos no 1.º período para seis alunos no 2.º período, mantendo-se estável no 3.º período. Em relação ao nível 4, foi atingido por nove alunos no 1.º período e no 2.º período, diminuindo para sete alunos no 3.º período. O número de alunos a obter o nível 5 no 1.º período foi de quatro, diminuindo para dois alunos no 2.º período e, no final do ano letivo, voltou a aumentar para quatro alunos.

A implementação de um questionário, no início da intervenção pedagógica, permitiu conhecer os gostos dos alunos em relação à disciplina de matemática e ao contacto que estes possuem com os números racionais e as suas representações. O gosto pela área disciplinar de matemática foi manifestado positivamente por 15 alunos (75%), por considerarem que 'gosto de fazer cálculos', 'é importante' e 'gosto de números e no emprego podemos precisar de matemática'. Em contrapartida, três alunos (15%) manifestaram não gostar de matemática, justificando esta escolha referindo que 'é muito difícil' e 'tenho muitas dificuldades'. Não sendo opção de resposta, dois alunos (10%) referiram gostarem mais ou menos da disciplina de matemática, indicando que 'depende da matéria que esteja a dar'. Em suma, o gosto pela disciplina de matemática é em geral positivo, o que favorece o envolvimento dos alunos nas atividades propostas.

No que concerne à indicação de que a disciplina de matemática proporciona mais dificuldades, sete dos 20 alunos (35%) escolheram esta disciplina, apresentando justificações, tais como 'não sei interpretar muito bem as perguntas', 'não percebo bem', 'não percebo bem a matéria', 'é um bocado difícil' e 'tenho dificuldades em aprender'.

Relativamente ao formato de trabalho em sala de aula, cinco alunos (25%) preferem trabalhar individualmente, justificando que 'há muita confusão em trabalho de grupos ou a pares' e 'é só a minha opinião que conta'. O trabalho em pares foi escolhido por cinco (25%) dos 20 alunos, por considerarem que 'se não souber alguma pergunta ele ajuda-me'. O trabalho de grupo foi escolhido por metade da turma (50%), referindo como justificação de escolha 'porque se alguém tiver errado consegue-se corrigir e ver maneiras diferentes de trabalho' e 'porque são mais cabeças a pensar'.

Os tipos de atividades implementadas na sala de aula, na disciplina de matemática, tendem a influenciar o envolvimento e o empenho dos alunos e, nesse sentido, é importante perceber quais as atividades que estes mais gostam e menos gostam de fazer na aula de matemática. Os alunos da turma do 6.º ano de escolaridade indicaram, na maioria, que a atividade que gostavam de realizar na aula de

matemática era 'resolver exercícios', mas, para além desta, alguns alunos referiram que gostavam de 'fazer contas', 'trabalhar com os sólidos geométricos', 'realizar jogos', entre outras atividades. No entanto, atividades como 'fazer contas', 'resolver testes', 'ouvir a explicação' e 'trabalhar com frações' foram mencionadas pelos alunos como atividades que não gostavam de realizar na aula de matemática.

O conteúdo dos números racionais, nomeadamente as frações, abordado em anos transatos, voltou a ser lecionado na implementação do projeto de intervenção, sendo importante, inicialmente, clarificar o ponto de situação em que os alunos se encontravam em relação a este conteúdo. Assim, oito (40%) dos 20 alunos referiram que não sentiram dificuldades na aprendizagem das frações em anos transatos, enquanto alguns alunos (40%) referiram sentir dificuldades no cálculo de frações e na representação de frações.

Relativamente ao conteúdo das frações, 13 alunos (65%) classificaram-no como fácil, apresentando justificações como 'é só saber como se representam' e 'é mais fácil que os polígonos', enquanto para seis alunos (30%) é um conteúdo difícil, por considerarem que 'as contas são difíceis de fazer e dizer como se chama a fração' ou 'as frações têm muitos números'. Um aluno (5%) referiu um meio termo, afirmando que é mais ou menos fácil, justificando que 'depende dos números'.

No que respeita às representações das frações, os alunos, na maioria, referiram que a representação pictórica facilitou nos anos escolares anteriores a sua aprendizagem das frações, considerando que 'com as figuras acho que é mais fácil', e a representação em linguagem natural, por considerarem que 'há muita confusão', acabou por dificultar a aprendizagem das frações, em anos transatos.

O comportamento dos alunos revelou-se favorável, em geral, havendo alguns alunos que se distraíam facilmente, destabilizando os outros colegas. No entanto, os alunos eram interessados e manifestavam aptidões para aprender, o que facilitou a implementação do projeto de intervenção.

## 2.2. Enquadramento teórico

### 2.2.1. Os números racionais nos programas de matemática do 1º e do 2º Ciclos

No currículo de matemática, o desenvolvimento do conceito de número, do seu significado e das suas operações e propriedades num dado universo numérico apresenta-se como o foco central do processo de ensino aprendizagem. Ao longo dos anos escolares, desde o pré-escolar até ao 12.º ano de escolaridade, os alunos deparam-se com números, de forma a desenvolver conhecimentos acerca destes, tais como:

o que são; de que forma são representados através de objectos, numerais ou em retas numéricas; como se relacionam uns com os outros; como estão profundamente integrados em sistemas com determinadas estruturas e propriedades; e como devem ser utilizados para resolver problemas. (NCTM, 2007, p. 34)

Nos primeiros anos de escolaridade, os alunos aprendem diferentes tipos de números, com determinadas características, que lhes permitem distinguir os números. Essas características permitem, por exemplo, identificar que números são pares, ímpares, primos, compostos, entre outros (NCTM, 2007).

No Programa e Metas Curriculares Matemática (Ministério da Educação e Ciência, 2013), mais especificamente no domínio de *Números e Operações*, constata-se a evolução do conceito de número que os alunos vão desenvolvendo ao longo do percurso escolar. No 1.º ano de escolaridade, os primeiros números com que os alunos têm contacto são os números naturais, albergando como subtópicos “correspondências um a um e comparação do número de elementos de dois conjuntos; contagens de até vinte objetos; o conjunto vazio e o número zero; números naturais até 100, e, contagens progressivas e regressivas” (Ministério da Educação e Ciência, 2013, p. 7). Os números naturais, apesar de já terem sido abordados no pré-escolar através de contagens informais, necessitam de um trabalho mais árduo, com a finalidade de dar sentido a esses números, para que os alunos consigam, por exemplo, ter destreza na resolução de cálculos.

No 2.º ano de escolaridade, o alargamento do conceito de número é propiciado, entre outros novos conteúdos, com a introdução dos números racionais não negativos, tendo como subtópicos “frações  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{100}$  e  $\frac{1}{1000}$  como medidas de comprimentos e de outras grandezas; e, representação dos números naturais e das frações  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{5}$  numa reta numérica” (Ministério da Educação e Ciência, 2013, p. 9).

Para a introdução dos números racionais não negativos, as recomendações atuais para o ensino de matemática (por exemplo, NCTM, 2007), sugerem que seja feita através de situações do cotidiano, utilizando frações comuns que os alunos utilizam na sua linguagem como, por exemplo, 'metade'. No 2.º ano de escolaridade, os alunos devem conseguir identificar quando é possível dividir um objeto em partes iguais, sendo isto mais importante do que se centrarem na forma como as frações se representam (NCTM, 2007). Os alunos, para além do referido anteriormente, também “deverão ser capazes de identificar três partes de um conjunto de quatro partes iguais – ou três quartos de um papel dobrado, previamente sombreado – e de compreender que ‘quartos’ significa quatro partes iguais de uma unidade” (NCTM, 2007, p. 95).

A divisão inteira também é introduzida no 2.º ano de escolaridade, tendo que os professores ajudar os alunos a compreenderem que as frações estão associadas à divisão, associando os termos 'metade', 'terça parte', 'quarta parte' e 'quinta parte' com as respetivas frações.

No 3.º ano de escolaridade, o conjunto dos números racionais não negativos alarga-se em três conteúdos: números racionais não negativos; adição e subtração de números racionais não negativos representados por frações; e representação decimal de números racionais não negativos. O conteúdo dos números racionais negativos integra a representação de diversas frações como medida de comprimento e de outras grandezas, a representação de frações na reta numérica, as frações equivalentes, a ordenação de frações com o mesmo numerador ou o mesmo denominador, entre outros subtópicos, alargando o que foi aprendido no ano transato (Ministério da Educação e da Ciência, 2013). Paulatinamente, a componente concetual relativa aos números racionais interliga-se com a componente processual através da introdução das operações com os números racionais não negativos, nomeadamente a adição e a subtração, tendo as frações o mesmo denominador.

No 4.º ano de escolaridade, amplia-se a noção de número racional não negativo através da obtenção de frações equivalentes por multiplicação dos termos por um mesmo fator e a simplificação de frações (Ministério da Educação e Ciência, 2003). As operações alargam-se, sendo abordadas a multiplicação e a divisão de números racionais não negativos.

No 5.º ano de escolaridade, os números racionais não negativos são abordados, sendo feita uma espécie de revisão do que foi abordado no 1.º ciclo, desde a simplificação de frações até às quatro operações com os números racionais não negativos. Posteriormente, faz-se a introdução de novos conteúdos, como a resolução de problemas envolvendo números racionais, representados na forma de frações, dízimas, percentagens e numerais mistos (Ministério da Educação e Ciência, 2003). No final do

5.º ano, os alunos “deverão compreender a equivalência entre frações, decimais e percentagens e a informação que cada uma destas formas de representação transmite” (NCTM, 2007, p. 173).

No 6.º ano de escolaridade, o conteúdo dos números racionais subdivide-se em dois tópicos: números racionais positivos e negativos; e adição e subtração. Os números racionais negativos são introduzidos neste ciclo através do simétrico e do valor absoluto, ou seja, há um relacionamento dos números racionais positivos com os números racionais negativos. Relativamente à adição e subtração, os números racionais positivos e negativos são utilizados para adicionar ou subtrair e não apenas os números racionais não negativos como em anos anteriores. Os segmentos de reta orientados e a orientação positiva e negativa de segmentos orientados da reta numérica são conteúdos abordados através da utilização da reta numérica.

A forma como os números racionais são organizados no currículo escolar faz com que adquiram vários significados, tais como: parte-todo/medida, quociente, operador e razão/taxa (Oliveira, 2014). A parte-todo/medida refere-se à divisão de um todo em partes iguais ou a uma divisão de uma medida na reta numérica. O quociente é baseado na divisão de dois números naturais, como, por exemplo, dividir 10 pães por duas pessoas ( $10 \div 2$ ). O operador é quando há uma transformação, algo que atua sobre uma coisa e a modifica, como, por exemplo, ao multiplicar  $\frac{2}{3}$  por algo, podemos primeiro multiplicar por 2 e depois dividir por 3. A razão é usada para comparar duas grandezas semelhantes, mas “quando uma razão representa a comparação entre grandezas de naturezas diferentes e, além disso, pode ser concebida como a descrição de um fenómeno comum a outras situação, essa comparação é considerada uma taxa” (Oliveira, 2014, p. 70).

Os números racionais, em termos curriculares, são introduzidos através de frações e, embora estas não sejam um conteúdo influente para os alunos do pré-escolar ao 2.º ano, as experiências informais, nestes níveis, vão auxiliar o desenvolvimento de bases escolares para uma aprendizagem futura e mais aprofundada (NCTM, 2007). O contacto inicial com as frações mais comuns, como um meio e um terço, permite uma melhor compreensão dos alunos em relação ao significado das frações o que, posteriormente, facilitará a utilização das frações na resolução de problemas. Já o desenvolvimento dos diversos significados das frações, ao longo dos anos de escolaridade, proporciona que os alunos ganhem agilidade para trabalhar com as frações.

### **2.2.2. Noção de representação**

Na disciplina de matemática, as representações têm um papel fundamental no processo de aprendizagem dos alunos, sendo estas um auxílio no apoio à compreensão dos conceitos matemáticos,

devendo, assim, serem tratadas como elementos essenciais no processo de ensino e de aprendizagem (NCTM, 2007). O termo representação não evoca apenas o resultado de uma ação, mas também o processo que permite a aquisição de um conceito, sendo expressa numa determinada forma (NCTM, 2007). As representações permitem que os alunos registem os passos intermédios, abrangendo parte das ideias que vão tendo ao longo do processo (NCTM, 2007). Assim, constata-se que “as representações não se tratam de produtos estáticos, permitindo capturar o processo de construção de um conceito matemático ou de relações matemáticas” (Woleck, 2001, p. 215).

A representação é uma configuração que pode, por exemplo, “agir no lugar de, ser interpretada como, conectar a, corresponder a, denotar, representar, incorporar, codificar, evocar, rotular, vincular, significar, produzir, referir, assemelhar-se, servir como um representado, sendo, no geral, uma configuração que pode representar algo de alguma maneira” (Goldin, 2002, p. 208). Com base nestes pressupostos, os alunos devem ser incentivados a representar as suas ideias, mesmo que estas não sejam as convencionais, e a entender outras representações, acabando por aumentar a sua capacidade de pensar matematicamente, ficando com um conjunto de ferramentas que lhes permitem aceder a novas ideias (NCTM, 2007). Importa, assim, que o professor dê a conhecer aos alunos formas de representação convencionais, facilitando a comunicação entre os alunos e a aprendizagem da matemática em geral (NCTM, 2007). A partilha da utilização das diferentes representações entre os alunos, nas tarefas matemáticas, deverá ser incentivada pelo professor, resultando na consideração de outras perspetivas e diferentes formas de os alunos explicarem o seu raciocínio aos colegas (NCTM, 2007).

Na educação matemática, o uso das múltiplas representações é de extrema importância e, nesse sentido, deverá ser privilegiada ao longo do percurso escolar dos alunos. Os alunos ao contactarem com as diferentes representações conseguem refletir acerca da prática que fazem com as representações, desenvolvendo uma compreensão acerca dos pontos positivos e negativos dessas representações (NCTM, 2007). O registo e a reflexão sobre as representações tendem a promover a recuperação dos processos de pensamento que os alunos utilizam nas atividades que realizam, o que lhes permite “articular, esclarecer, justificar e comunicar o seu raciocínio aos outros” (Woleck, 2001, p. 215).

Goldin e Stheingol (2001) consideram dois grupos distintos de representações: representações externas e representações internas; enquanto Duval (1995) distingue as representações em quatro grupos diferenciados: representações externas, representações internas, representações conscientes e representações não conscientes.

Goldin e Stheingol (2001) referem que uma representação externa varia desde um sistema representacional de símbolos matemáticos, como numeração de base dez ou notação algébrica formal, até ambientes de aprendizagem estruturados, como aqueles que envolvem materiais manipulativos concretos. Duval (1995) considera que “as representações externas estão intimamente ligadas a um estado de desenvolvimento e controle de um sistema semiótico” (p. 25), sendo produzidas na procura de traduzir ideias ou conceitos, como, por exemplo, através de tabelas, diagramas, gráficos, modelos e símbolos. Com este tipo de representações, Dreyfus (2002) considera que, através da escrita ou da oralidade, a comunicação matemática se torna mais acessível entre as pessoas. Para Friedlander e Tabach (2001), existem quatro tipos de representações externas: a representação verbal; a representação numérica; a representação gráfica; e a representação simbólica.

As representações internas, para Goldin e Stheingol (2001), “incluem construções de simbolização pessoal e atribuições de significado a notações matemáticas, bem com a linguagem natural dos alunos, as suas imagens visuais e, muito importante, a relação destes com a matemática” (p. 2). Duval (1995) define representações internas como “pertencentes a um sujeito, não sendo divulgadas a outro pela produção de uma representação externa” (p. 26).

Para além das representações externas e internas, Duval (1995) ainda classifica as representações em conscientes e não conscientes, definindo as primeiras como “aquelas que têm um carácter intencional e que cumprem uma função de objetivação” (p. 24). Por objetivação o autor entende que “corresponde à descoberta, pelo próprio sujeito, daquilo que até então ele não suspeitava, mesmo que os outros lhe tivessem explicado” (p. 24).

As representações internas e externas e as representações conscientes e não conscientes intercalam-se, resultando diferentes tipos de funções de representações (Quadro 1).

Quadro 1: Tipo de função das representações (Duval, 1995, p. 27)

	Interna	Externa
Consciente	<b>Mental</b> Função de objetivação	<b>Semiótica</b> Função de objetivação Função de expressão Função de tratamento intencional
Não consciente	<b>Computacional</b> Função de tratamento automático ou quase automático	

As representações mentais, caracterizadas por serem representações internas e conscientes, “são todas aquelas que permitem uma visão do objeto na ausência de todo o significado perceptível” (Duval,

1995, p. 28), ou seja, acarretam uma função de objetivação. Estas são “geralmente identificáveis como ‘imagens mentais’ como entidades psicológicas relacionadas à percepção” (Duval, 1995, p. 28).

A conjugação das representações internas e não conscientes resulta nas representações computacionais, que têm como função o tratamento automático ou quase automático. Estas são todas aquelas,

cujos significantes, de natureza homogênea, não requerem a visão do objeto e permitem uma transformação algorítmica de uma sequência de significantes em outra. Essas representações traduzem informações externas num sistema de forma a torná-las endereçáveis, recuperáveis e combináveis dentro desse sistema. (Duval, 1995, p. 30)

As representações semióticas são representações externas e conscientes, que “permitem uma ‘visão do objeto’ através da percepção de estímulos (pontos, linhas, caracteres, sons...) tendo valor de significante” (Duval, 1995, p. 27). As figuras, os esquemas, os gráficos e as expressões simbólicas são exemplos de representações semióticas possíveis de serem utilizadas.

A combinação das representações externas e das representações não conscientes não se efetua, devido à impossibilidade de se exteriorizar algo inconscientemente. A consciência é caracterizada pela visão de qualquer coisa que conseqüentemente assume o estatuto de objeto para o sujeito que efetuou essa visão e, dessa forma, o aluno não tendo consciência do objeto não consegue exteriorizar o seu pensamento (Duval, 1995).

Em suma, as representações permitem que os alunos registem o seu raciocínio, apresentando quer o produto, quer o processo utilizado. Estas servem de orientação para a prática do professor, não só para este ter acesso aos processos e resultados do raciocínio dos alunos, mas também para desenvolver a sua prática em termos de conhecimentos de conceitos e procedimentos (NCTM, 2007). As representações utilizadas pelos alunos podem ser exteriorizadas, tornando-se visíveis e observáveis o que, ao contrário, não acontece com as representações internas que também podem ser utilizadas pelos alunos, mas que, no entanto, não se tornam visíveis para o professor (Duval, 1995). A multiplicidade de fontes que o professor tem acesso para recolher informações acerca da compreensão e das noções matemáticas dos alunos, permite que seja feita uma melhor avaliação daquilo que os alunos aprenderam e daquilo que ainda deve ser trabalhado (NCTM, 2007).

### **2.2.3. Teoria dos registos de representação semiótica**

A Teoria dos Registos de Representação Semiótica foi desenvolvida por Duval, na procura de compreender como se dá a aquisição de conhecimento em matemática, através das especificidades das

representações. A semiótica caracteriza-se pelo estudo dos signos, portadores de significado e sentido que o ser humano entende. Para Duval (1995) “a noção de representação semiótica pressupõe (...) a consideração de diferentes sistemas semióticos e de uma operação cognitiva de conversão de representações de um sistema semiótico para outro” (p. 17). Os objetos matemáticos, segundo esta teoria, podem ser representados através do registo de representações semióticas, que são definidos por “produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem restrições próprias de significação e de funcionamento” (Duval, 1993, p. 39). Depreende-se que por sistema semiótico se entende como uma possibilidade de exteriorização e interpretação de signos, dotados de significados, tal como assevera Queiroz (2010) “um sistema semiótico é um sistema que produz, transmite e interpreta signos de diferentes tipos” (p. 8).

O raciocínio matemático está intrinsecamente ligado à utilização das representações semióticas, bem como a comunicação matemática que é estabelecida entre os alunos, através da utilização dessas representações (Machado, 2003). A utilização das representações semióticas é elucidada por Duval (1993) como “um simples meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, quer dizer para torná-las visíveis ou acessíveis a outrem” (p. 39) e ainda “as representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento” (p. 39).

Na sua teoria, Duval (1993) distingue dois conceitos importantes e inseparáveis: *semiose* e *noese*. *Semiose* é definida como a “apreensão ou a produção de uma representação semiótica” (Duval, 1993, p. 39) ou ainda como “a mobilização, implícita ou explícita, de pelo menos dois registos para produzir, externamente ou mentalmente, representações semióticas de um objeto e ser capaz de transformá-las” (Duval, 2010, p. 130). Por *noese* o autor considera que se trata da “apreensão conceitual de um objeto” (Duval, 1993, pp. 39-40).

Em matemática, há uma variedade de registos de representação semiótica, estando divididos, por Duval, em quatro tipos: a linguagem natural, os sistemas de escrita algébrica e formal, as figuras geométricas e os gráficos (Quadro 2).

Quadro 2: Classificação dos registos de representação semiótica em matemática (Machado, 2003)

	Representação discursiva	Representação não discursiva
Registros Multifuncionais: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural. Associações verbais (conceituais). Formas de raciocinar: Argumentação a partir de observações, de crenças...	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3) • apreensão operatória e não somente perceptiva.
Registros Monofuncionais: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escrita: Numéricas (binária, decimal, fracionária...); algébricas; simbólicas (figuras formais).	Gráficos cartesianos • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Os registos discursivos permitem, segundo Silva, Santiago e Santos (2014), “o desenvolvimento linear do pensamento, fundamentado na sucessão, para produzir, apreender ou organizar expressões, como na língua natural, que se constitui o primeiro registo de representação semiótica para o funcionamento do pensamento” (p. 1488), ao contrário dos registos não discursivos, que apenas interferem na organização dimensional. Duval (2017) assume que a linguagem natural é o primeiro sistema semiótico, dentro das representações semióticas, que é produzido intencionalmente.

Os registos monofuncionais são específicos da matemática e caracterizam-se pelos tratamentos serem principalmente algoritmos, enquanto que nos registos multifuncionais, utilizados em outras áreas do conhecimento, os tratamentos não serem algoritmizáveis.

Na atividade matemática, o mesmo objeto pode ser representado em diferentes registos de representação semiótica, como se pode verificar nos seguintes exemplos (Figura 3).

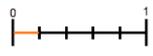
Exemplo	Um quinto	$\frac{1}{5}$		
Objeto matemático	Número racional			
Registo de representação semiótica	Linguagem natural	Simbólico - numérico	Pictórico	Gráfico

Figura 3. Representação em linguagem natural, simbólico-numérico, pictórica e gráfica de um número racional

As representações apresentadas anteriormente permitem constatar que um mesmo objeto matemático pode ser representado através de uma diversidade de registo de representações semióticas, averiguando que o objeto não é o mesmo que a sua representação. Cada representação fornece diferentes informações acerca do objeto representado, daí a importância da utilização de diversos registos de representação.

A diversidade de registos de representação é importante na medida em que se torna “uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma das suas representações” (Duval, 1993, p. 40), permitindo ter um leque alargado de escolhas quando se trata de efetuar certas transformações, tendo registos que permitem realizar esse feito de uma forma mais eficiente do que com outro registo (Silva, Santiago & Santos, 2014).

O potencial das representações semióticas está intrínseco, dado que há possibilidade de ocorrerem transformações entre representações novas e equivalentes. Essas transformações permitem que a destreza dos alunos em representar um mesmo objeto em diferentes representações se desenvolva, potenciando a sua aprendizagem e compreensão desse objeto.

Para Duval (1993), um sistema semiótico pode ser um registo de representação semiótica se permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose: a formação de uma representação identificável; o tratamento; e a conversão.

O tratamento de uma representação “é a transformação desta representação no mesmo registo onde ela foi formada” (Duval, 1993, p. 41), sendo esta uma transformação interna a um registo. Esta transformação mobiliza apenas um registo de representação, que possui regras de operação para a sua efetuação (Duval, 1995).

O cálculo possibilita o tratamento de representações, no sentido de ser necessário substituir as expressões por outras, dentro do mesmo registo de representação, para se conseguir encontrar o resultado final (Exemplo 1, Figura 4).

Exemplo 1

Calcula: $\frac{1}{3} + \frac{4}{3}$ .
Resolução: $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$

Figura 4. Enunciado e resolução do exemplo 1

A conversão de uma representação “é a transformação desta representação numa representação de outro registo, conservando a totalidade ou somente uma parte do conteúdo da representação inicial” (Duval, 1993, p. 42), sendo esta uma transformação externa ao registo de partida. Esta transformação requer a coordenação dos diferentes registos em que se realiza, dado que há uma mobilização entre estes (Duval, 1995).

A resolução de problemas requer, normalmente, a utilização de diversos registos de representação, de modo a proporcionar aos alunos uma melhor compreensão do que deve fazer para conseguir resolver a questão problema. Neste seguimento, os alunos terão que converter as diferentes representações até conseguirem chegar à solução (Exemplo 2, Figura 5).

Exemplo 2

O João comeu um quarto de uma pizza ao almoço e dois quartos da mesma pizza ao jantar. Que fração da pizza comeu o João no total?
Resolução: $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$ . O João comeu três quartos da pizza.

Figura 5. Enunciado e resolução do Exemplo 2

A atividade cognitiva que dificulta a aprendizagem dos alunos, descoberta por diversas observações e avaliações em sala de aula, prende-se com a conversão das representações semióticas,

sendo caracterizada pela atividade cognitiva menos voluntária e a mais difícil de adquirir pela grande maioria dos alunos (Duval, 1995). Segundo este autor, “a conversão é uma transformação complexa, mais do que o tratamento, porque qualquer mudança de registo requer primeiro o reconhecimento do objeto representado entre duas representações cujo conteúdo, muitas vezes, não tem nada em comum” (p. 112). Caso o aluno não seja capaz de antecipar uma conversão a ser feita, ou de conhecer um objeto em duas representações distintas, terá dificuldades em resolver a tarefa proposta.

A direção da conversão também causa dificuldades aos alunos na aprendizagem matemática, ou seja,

quando os papéis do registo de origem e do registo de chegada são invertidos dentro de uma tarefa de conversão de representação semiótica, o problema é radicalmente alterado para os alunos. Pode ser óbvio em um caso, enquanto na tarefa invertida a maioria dos alunos falha sistemática. (Duval, 2006, p. 122)

Assim, esta atividade deve ser trabalhada na sala de aula, de modo a facilitar a aquisição de conhecimentos por parte dos alunos.

O fenómeno de conversão, para ser analisado, de modo a perceber a razão pela qual dificulta a compreensão matemática dos alunos, deverá ter-se em conta a representação no registo de partida e a representação no registo de chegada. Duval (1993) aponta que quando há congruência entre a representação de partida e a representação de chegada, ou seja, quando a mudança de um registo de partida para um registo de chegada é clara, a conversão é facilmente realizada. Quando não há congruência, quando a mudança de um registo de partida para um registo de chegada é complexa, a conversão torna-se difícil, podendo resultar num outro problema, em que o sujeito não necessite de utilizar a conversão.

Para Duval, a apreensão conceitual só é possível quando ocorre a coordenação de pelo menos dois registos de representação. Esta coordenação entre representações deverá ser gerida pelo aluno, devendo este escolher a representação que favorece a resolução do que pretende fazer, de uma forma mais económica possível. Neste seguimento, “para interpretar os processos cognitivos de compreensão do aluno e o seu desenvolvimento, não se trata de privilegiar, *à priori*, um ou outro tipo de representação, mas de olhar para a maneira pela qual o usado está a ser articulado com outros tipos de representações” (Duval, 2010, p. 132).

O processamento matemático, para Duval (2006), não pode ser realizado sem o uso de um sistema semiótico de representação, dado que o processamento matemático envolve sempre a substituição de alguma representação por outra. Este facto verifica-se quando se refere que a linguagem natural é o primeiro sistema semiótico utilizado na resolução de tarefas matemáticas tendo que,

posteriormente, utilizar-se outro registo de representação, de modo a representar os dados que o enunciado contempla, para chegar à solução pretendida.

Em suma, Duval (2006) advoga que “o papel das representações semióticas não se limita a designar objetos ou a representar algo, mas sim possibilitar o processamento matemático através da transformação de umas representações em outras, sem o apoio de novos dados ou observações empíricas” (p. 109). A construção dos conceitos matemáticos depende estritamente da capacidade de utilizar diversos registos de representações semióticas dos mesmos conceitos: conseguir representá-los num determinado registo; conseguir tratar essas representações dentro do mesmo registo; e conseguir converter essas representações de um determinado registo em outro (D’Amore, 1999).

#### **2.2.4. As representações dos números racionais**

A representação de um número permite “atribuir-lhe uma designação, devendo os alunos compreender que um número pode ter várias designações” (Ponte & Quaresma, 2012, p. 40). Essas designações são atribuídas através das diferentes representações possíveis de um mesmo número. Os números racionais podem ser representados através de fração, número decimal, percentagem, diagrama, entre outras, sendo que estas devem ser trabalhadas na sala de aula (Morais, Cerca, Quaresma & Ponte, 2014). A compreensão dos alunos acerca das diferentes representações dos números racionais permitirá um desenvolvimento da capacidade de raciocínio dos mesmos (Ponte & Quaresma, 2012).

O contacto com as diversas representações dos números racionais deverá ser proporcionado aos alunos, para que estes consigam ter um leque alargado de escolhas que lhes facilitará a resolução de situação problemáticas, tal como afirma NCTM (2007):

os alunos necessitam de desenvolver e utilizar uma variedade de representações de ideias matemáticas para modelar situações problemáticas, para investigar relações matemáticas, e justificar ou refutar conjecturas. [...] Estas representações funcionam como ferramentas para raciocinar e resolver problemas, ajudando, igualmente, os alunos a comunicarem o seu raciocínio a terceiros. (p. 240)

A aprendizagem em matemática depende de vários fatores (por exemplo, cognitivos, sociais, culturais, contextuais) e dos vários intervenientes no processo educativo, em que emerge o trabalho do professor. Atualmente, as recomendações para o ensino de matemática apontam que o docente deve ajudar os alunos a gerir a utilização das diversas representações dos números racionais e não apenas a automatizar conceitos (Duval, 1993). As representações são a base da matemática, contrariamente a outras áreas de conhecimento em que é possível observar factos sem representar. Para termos

conhecimento acerca dos números racionais é necessário representá-los, caso contrário os outros não têm conhecimento daquilo que estamos a tratar. Os números racionais podem ser representados através da representação simbólica, por exemplo  $\frac{2}{5}$ , na representação decimal 0,4 ou em percentagem 40%, para além de outros tipos de registo de representações possíveis, como em linguagem natural ou em representação pictórica (Brandl, Poff & Silva, 2016).

O contacto com a representação fracionária é muito vulgar, podendo tornar-se um equívoco na aprendizagem dos números racionais, na medida em que os alunos podem compreender que esses são os números racionais e não uma forma de representação dos mesmos.

As frações, sendo o primeiro registo de representação dos números racionais com que os alunos têm contacto, podem ser definidas como “símbolos bipartidos, uma certa forma para escrever números:  $\frac{a}{b}$ . Este sentido da palavra fração refere-se a um sistema notacional, um símbolo, dois inteiros escritos com uma barra entre eles” (Lamon, 2007, p. 635). O conceito de fração é entendido desta forma, não sendo, muitas vezes, explicado da melhor forma aos alunos, acabando estes por reter apenas a forma de escrever frações e não o que estas significam. A compreensão dos números racionais é importante, bem como os aspetos que Lamon (2007) indica:

todos os números racionais podem ser escritos com forma de fração; todos os números escritos em forma de fração não são racionais, por exemplo,  $\frac{x}{2}$ ; e, cada fração não corresponde a um número racional diferente, por exemplo,  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{6}{9}$ . (p. 635)

Os registos de representação dos números racionais variam na literatura, sendo categorizados tendo em conta características específicas de cada representação. Para Maranhão e Iglioni (Machado, 2003), os registos de representação podem ser classificar-se em: registo figural; registo simbólico; e registo na língua natural (Figura 6).

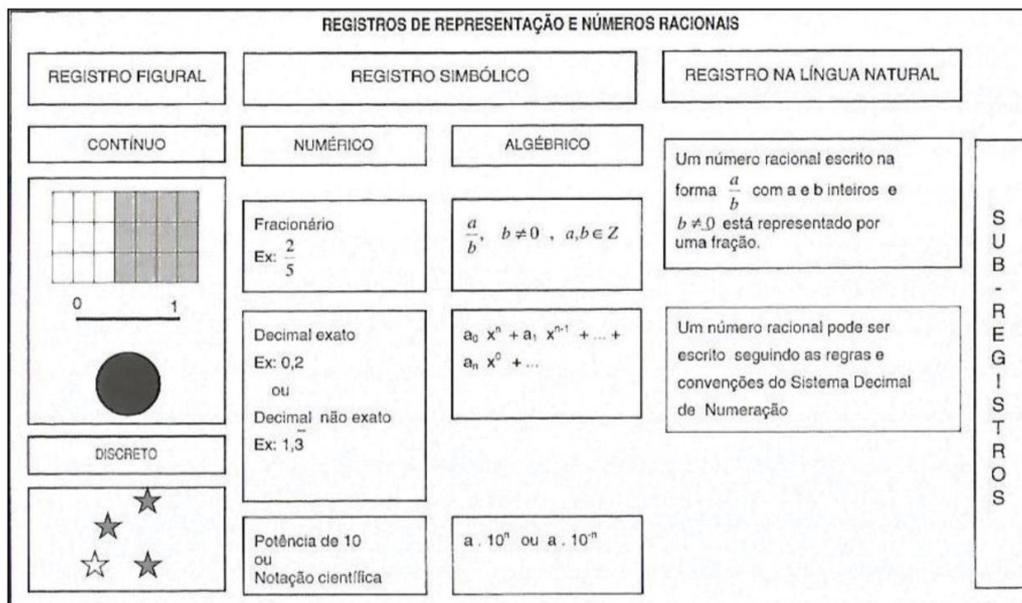


Figura 6. Registos de representação e números racionais (Machado, 2003, p. 59)

No registo figural distinguem-se dois tipos de registos: o registo contínuo e o registo discreto. O registo contínuo caracteriza-se pela infinidade de valores possíveis de serem tomados, enquanto o registo discreto caracteriza-se pela quantificação exata de valores. O registo simbólico, subdividido em registo simbólico numérico e registo simbólico algébrico, caracteriza-se pela representação de símbolos, tais como, por exemplo,  $\frac{2}{5}$  (registo simbólico numérico) e  $\frac{a}{b}$  (registo simbólico algébrico). O registo na língua natural torna-se comum a outras classificações de registos de representação, tal como a estruturada por Duval (Machado, 2003). Há evidências que demonstram a distinção feita nas classificações de registo de representação, como é o caso da classificação da reta numérica. Para Maranhão e Iglioni (Machado, 2003) a reta numérica classifica-se como um registo figural contínuo, enquanto que para Silva, Santiago e Santos (2014), ao analisarem a classificação dos registos de representação semiótica elaborada por Duval, integram a reta numérica nos registos monofuncionais não discursivos, evidenciando que estes registos “compreendem os registos gráficos em que os números racionais correspondem a pontos na reta numérica” (p. 1489).

Assim, os estudantes que conseguem resolver problemas usando diversas representações dos números racionais, denotam uma aquisição do conceito de número racional, não tendo apenas retido uma forma de representar os números racionais. O professor deve incentivar os alunos a utilizarem flexivelmente as representações dos números racionais, favorecendo a aquisição e o desenvolvimento de conhecimentos.

### **2.2.5. Erros e dificuldades na aprendizagem dos números racionais**

O ensino dos números racionais é tido como um dos tópicos mais demorado, em termos de desenvolvimento, mais difícil de ensinar, mais complexo e mais cognitivamente desafiador do currículo, sendo essencial para o sucesso escolar dos alunos na disciplina de matemática (Lamon, 2007). As dificuldades que surgem ao longo da aprendizagem dos números racionais podem ser: dificuldades na resolução de situações envolvendo os números racionais não negativos, representados sob a forma de fração e decimal; dificuldades na compreensão dos diferentes significados dos números racionais; e dificuldades na resolução de cálculos envolvendo números racionais (Brandl, Poff & Silva, 2016).

As diversas representações dos números racionais podem, por vezes, constituir uma dificuldade para os alunos, quando estes associam, apenas, as frações aos números racionais, excluindo as outras formas de representações destes números.

A utilização da reta numérica potencia a aprendizagem dos alunos, contudo pode acabar por trazer dificuldades, quando não aprendem a utilizá-la devidamente. Aliustaoğlua, Tunab e Biberç (2018) consideram que a reta numérica é útil para auxiliar os alunos na comparação de frações, permitindo que estes percebam qual fração é maior ou menor do que outra e que entre duas frações existe sempre uma fração. Em termos de representação na reta numérica “existem equívocos sobre como dividir o todo em pedaços, quantos deles serão tomados” (Aliustaoğlua, Tunab & Biberç, 2018, p. 592), apresentando dificuldades para os alunos na utilização da mesma. De modo a ultrapassar estas dificuldades, estes autores consideram importante determinar bem a unidade da fração, antes de ser feita a representação das frações na reta numérica.

As dificuldades que os alunos possuem na aprendizagem dos números racionais podem dever-se ao tempo que os programas dedicam para ensinar e ‘manipular’ os números racionais e não para explicar os seus significados (Moss & Case, 1999). Muitas vezes as crianças são desencorajadas a explorarem os números racionais, de modo a compreenderem sozinhas o seu significado, incentivando-as a adotar uma aplicação de regras ensinadas pelo professor (Moss & Case, 1999). A dificuldade em diferenciar os números racionais e os números inteiros e o tratamento dos números racionais como algo transparente, dando um conceito específico na introdução destes, também levam a que os alunos sintam dificuldades na aprendizagem deste conteúdo (Moss & Case, 1999).

A natureza abstrata da construção do número racional faz com que muitos alunos tenham dificuldades na aprendizagem deste tipo de número, o que tende a traduzir-se nos erros que cometem quando lidam com situações que contemplam números racionais. Tais dificuldades e erros despertam o interesse de estudos de investigação em compreender o que lhes está subjacente, como é exemplo o

estudo realizado por Moreira (2014) na procura de perceber os erros mais cometidos pelos alunos, tendo chegado à conclusão de que a inversão do numerador pelo denominador, a utilização da subtração e a troca do traço da fração pela vírgula foram os erros que se destacaram, quando os alunos se depararam com os números racionais escritos sob a forma de fração.

Na introdução dos números racionais, o significado parte-todo que é, geralmente, dado aos números fracionários, prolonga-se ao longo do tempo, na aprendizagem dos alunos. Como a comparação parte-todo “foi o único significado usado na instrução, é compreensível que a fração e a fração parte-todo se tornassem sinónimos” (Lamon, 2007, p. 635), tornando-se um erro na conceptualização dos números racionais. Importa salientar que os números racionais são representados sob a forma de fração, o que tanto pode traduzir um número inteiro como um número fracionário, o que nem sempre é compreendido pelos alunos (Kieren, 1976).

A utilização das frações no ensino dos números racionais não negativos, acabam por ser confundidos com os números naturais, ou seja,

com base no conhecimento dos números naturais, os alunos pensam que numerador e denominador são valores separados, não conseguem imaginar que as partes da fração devam ser iguais umas às outras, classificam as frações observando os números no numerador e no denominador, em vez de considerar o todo fração, eles usam as regras de operações, que eles usaram nos números naturais, nas frações (Aliustaoğlular, Tunab & Biberç, 2018).

Os erros, sendo bastante diversos, “revelam uma profunda falta de compreensão conceitual, que se estende a todas as representações simbólicas de números racionais e coloca em questão seriamente os nossos métodos existentes de ensinar essas representações” (Moss & Case, 1999, p. 123).

O conhecimento, por parte dos professores, dos erros e dificuldades que os alunos cometem na aprendizagem dos números racionais torna-se relevante, na medida em que favorece o trabalho do professor, podendo este ter em consideração esses erros e dificuldades, usando materiais concretos e diferentes métodos no processo de ensino, que ajudarão a minimizar esses obstáculos de aprendizagem.

### **2.2.6. Análise de estudos empíricos sobre a utilização das representações semióticas na aprendizagem dos números racionais**

O estudo sobre a utilização das representações semióticas na aprendizagem dos números racionais é o foco de vários estudos no âmbito da educação matemática, tais como, por exemplo, os realizados por Alves (2012); Feteira (2012); Santana, Lima, Silva e Oliveira (2013); Morais, Cerca, Quaresma e Ponte (2014); e Cardoso e Mamede (2017).

O trabalho realizado por Alves (2012) sobre os números racionais incidiu sobre 'A construção do conceito de número racional no sexto ano do ensino fundamental', com o objetivo de responder à questão: como realizar uma abordagem dos números racionais de modo que um aluno do sexto ano do Ensino Fundamental consiga compreender seu conceito e estabelecer relações entre suas diversas formas de representações? O estudo teve por base a implementação de uma sequência didática de ensino do conceito de números racionais:

a sequência didática desenvolvida no presente trabalho, a partir da teoria dos registros de representações semióticas e da criação de zonas de desenvolvimento proximal, será capaz de propiciar ao aluno a conceituação dos números racionais, a partir da realização dos tratamentos e das conversões entre os sistemas de representações figural, decimal, fracionário e língua natural. (Alves, 2012, p. 18)

Neste trabalho foi desenvolvida uma sequência composta por cinco oficinas: na Oficina I, os alunos contactaram pela primeira vez com o número racional, através das representações figural, fracionária e língua natural; na Oficina II, os alunos verificaram que um número racional pode ser representado de várias formas, utilizando a representação fracionária; na Oficina III, trabalharam a adição e a subtração de números racionais, através de tratamentos na representação fracionária; na Oficina IV, os alunos contactaram com a representação decimal e realizaram conversões entre as diferentes representações e trabalharam a adição e a subtração de números racionais, através de tratamentos na representação decimal; e, na Oficina V, os alunos trabalharam situações-problema, tendo por base as representações dos números racionais, para resolver problemas de percentagem. A sequência didática apresentada propiciou aos alunos a aprendizagem do conceito de número racional, através da realização de tratamentos e de conversões entre os sistemas de representação. Contudo, no início do trabalho, os autores depararam-se com a inapropriação do conceito de número racional, por parte dos alunos, e a falta de conhecimento em realizar tratamentos com esses números. A multiplicação e a divisão tornaram-se obstáculos neste trabalho, tendo os autores que arranjar métodos que permitissem aos alunos a compreensão destas operações com os números racionais. Os autores, no final do estudo, sugeriram a realização de pesquisas em relação à conceptualização do número racional, não esquecendo a abordagem à multiplicação e divisão.

O estudo de Feteira (2012), cognominado 'Os números racionais, na sua representação por frações, nos primeiros anos de escolaridade', teve como objetivo averiguar como os alunos, do 1.º ano de escolaridade, desenvolvem o sentido de número racional. A investigação, de natureza qualitativa, realizou-se numa turma de 1.º ano de escolaridade, proporcionando "experiências de aprendizagens diversificadas e devidamente contextualizadas, com as quais se pretende promover o desenvolvimento

do sentido de número racional e sempre que possível estabelecer conexões com os vários temas matemáticos” (p. 3). A recolha de dados foi feita através das produções dos alunos, de diários de pesquisa e do registo de áudio e/ou vídeo.

Feteira (2012) concluiu que os processos que os alunos usaram na resolução de tarefas conducentes ao desenvolvimento do sentido de número racional, foram, muitas vezes, tentativa e erro ou adições sucessivas. Os conhecimentos prévios que os alunos possuíam acerca dos números racionais levou a que o desempenho e a participação nas tarefas fosse elevado, resultando em aprendizagens significativas.

Relativamente às estratégias de ensino, os dados obtidos revelaram que a contextualização das tarefas foi fundamental, para que os alunos se conseguissem envolver profundamente na resolução da tarefa. Para além disto, a exploração ao longo das tarefas também foi essencial, para que os alunos conseguissem organizar as ideias e utilizar conhecimento anteriormente adquirido. A utilização de materiais manipulativos foi outra das estratégias de ensino que facilitou a resolução das tarefas, na medida em que os alunos, quando sentiram dificuldades conseguiam visualizar concretamente as situações. Outra estratégia de ensino que facilitou o desenvolvimento do sentido de número racional foi a elaboração das representações esquemáticas e a sua interpretação, o que contribuíram para a visualização e perceção das frações, ajudando a exteriorizar as imagens mentais dos alunos. A última estratégia de ensino apresentada foi a organização em pares e em grupo, que acabou por promover a discussão e partilha de ideias entre os alunos, facilitando a aquisição de conhecimentos, dado que estes utilizam uma linguagem comum e mais acessível do que entre o professor e os alunos.

Em termos de dificuldades manifestadas pelos alunos, os alunos tiveram dificuldade em trabalhar com unidades discretas, pois “não entendiam que estas unidades eram compostas por vários elementos, tomando cada elemento como uma unidade independente, mas esta ideia foi sendo desfeita para dar lugar à noção correta” (p. 64). A utilização de linguagem correta também se tornou uma dificuldade, pois os alunos utilizavam termos que para eles possuíam sentido, como “partimos aos meios” (p. 64). A última dificuldade apresentada foi o uso e a leitura da representação simbólica das frações que, por vezes, não era lembrada pelos alunos, quanto à forma de como o deveriam realizar.

O estudo de Santana, Lima, Silva e Oliveira (2013) teve como objetivo “avaliar os conhecimentos dos sujeitos em relação à diversificação de registros de representação de frações, bem como seu conhecimento em relação às regras de conformidade quando da formação das diferentes representações semióticas” (p. 6). O conceito de fração é conhecido pelas dificuldades que alberga no processo de ensino e aprendizagem, justificando a relevância do estudo apresentado pelos autores. Este estudo

utilizou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, que tem por base as funções e atividades cognitivas executadas pelas representações semióticas na educação matemática. A entrevista foi o método de recolha de dados adotado neste trabalho, inquirindo dez pedagogos a responderem a questões sobre as frações. Os resultados obtidos denotaram que existia uma confusão entre o conceito de fração e as diversas representações, que havia dificuldades na articulação da fração com mais de três representações da mesma e que existia uma limitação na compreensão do conceito de fração. Os autores concluíram que existe uma “necessidade da continuidade de estudos e ações que visem a compreensão e alteração deste quadro” (Santana, Lima, Silva & Oliveira, 2013, p. 1).

No estudo realizado por Morais, Cerca, Quaresma e Ponte (2014), com o objetivo de identificar os conhecimentos de alunos do 2.º ano sobre números racionais em diferentes representações, seguindo uma metodologia qualitativa de carácter interpretativo, através de tarefas que contemplavam diferentes representações dos números racionais, os autores incidiram sobre o significado parte-todo. As tarefas foram propostas a duas turmas de duas escolas distintas, ambas do 2.º ano de escolaridade, mas uma de ensino privado, constituída por 25 alunos, e outra de ensino público, constituída por 15 alunos.

Os resultados obtidos pelo estudo mostraram que os alunos privilegiavam a representação em forma de fração, visto que era o formato de representação que estes já conheciam de aulas anteriores. Em termos de conversão, os alunos revelaram serem capazes de converter corretamente entre representações pictóricas, fracionárias, dízimas e percentagens. A interpretação e o registo de diferentes representações dos números racionais revelaram-se dificuldades para bastantes alunos, bem como o trabalho com grandezas discretas e o reconhecimento da unidade.

O estudo de Cardoso e Mamede (2017) intitulado por “Dificuldades em ensinar frações no 1.º Ciclo do Ensino Básico”, pretendeu analisar práticas de ensino de professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico relativamente ao conceito de fração e às suas diferentes interpretações, nomeadamente quociente, parte-todo, medida e operador. Para este feito, observaram aulas de quatro professores a lecionar 2.º e 3.º anos de escolaridade, com vários tempos de serviço. Ao longo da análise dos dados, as representações dos números racionais são examinadas, de modo a extrair ideias acerca do pensamento dos alunos.

Neste estudo, os alunos foram incentivados a associar a representação pictórica de uma fração à representação simbólica dessa mesma fração. Constatou-se que, em termos de representações pictóricas, “não podem aceitar-se como válidas representações pictóricas em que a unidade está dividida em partes desiguais. Ignorar este ponto é condicionar o trabalho com frações” (Costa & Mamede, 2017, p. 2). Torna-se evidente que o trabalho com as representações é fundamental, não só para facilitar a

aprendizagem dos alunos, como também para que estes sejam rigorosos na sua exteriorização de pensamentos. Em termos de marcação de frações na reta numérica, observaram uma associação da fração à representação da mesma na forma de dízima.

Os resultados obtidos permitiram a Costa e Mamede (2017) concluir que “o domínio do conceito de fração passa pela articulação de todas as interpretações deste” (p. 4), sendo importante não realizar uma “abordagem estanque de cada uma das interpretações [pois] não favorece tal articulação” (p.4).

Conclui-se assim, que a aprendizagem dos números racionais é o foco de estudos de investigação devido ao seu grau de complexidade. As representações, como são a essência da atividade matemática, justificam e possibilitam a compreensão de muitos fatores associados à aprendizagem e, desta forma, são alvo de análise. O conhecimento das dificuldades e erros permite a planificação de processos de ensino e de aprendizagem mais especificada para ser implementada na sala de aula, permitindo uma aprendizagem mais eficaz dos números racionais.

### **2.3. Estratégias de intervenção**

Com o intuito de explicitar as estratégias de ensino que adotei na lecionação do conteúdo dos números racionais, numa turma do 2.º ano e noutra do 6.º ano, destaco, na secção Metodologias de ensino e de aprendizagem, o formato de ensino, as características das tarefas e a organização dos alunos, aspetos que nortearam os planos de aula que elaborei durante a minha intervenção pedagógica. Consequentemente, explicito as estratégias de avaliação a que recorri para recolher informação que me possibilita ilustrar momentos do ensino ministrado.

#### **2.3.1. Metodologias de ensino e de aprendizagem**

As metodologias de ensino e de aprendizagem que ‘guiaram’ a implementação do projeto de intervenção tiveram como base a dinâmica que pretendia estabelecer na sala de aula, tendo como preocupação envolver os alunos na construção do seu saber, sendo como professora uma mediadora do processo ensino e aprendizagem. Neste sentido, torna-se importante esclarecer os aspetos mais importantes, que foram tidos em conta durante a intervenção pedagógica, sendo estes: o formato de ensino, as tarefas e a organização da turma.

*Formato de ensino.* O formato de ensino que adotei assumiu características do ensino exploratório, que tem como foco a forma como se explora a atividade que resulta da resolução das tarefas adotadas em cada aula. Segundo Canavarro (2011), “o ensino exploratório da Matemática defende que os alunos

aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva” (p. 11). Na concretização deste tipo de formato de ensino, importa selecionar tarefas que proporcionem aos alunos o desenvolvimento de ideias matemáticas através da discussão e da mediação do professor. O papel do professor no ensino exploratório é fundamental para guiar as discussões dos alunos, ajudá-los a compreender as tarefas e a reunirem as ideias principais, para chegarem ao que é pretendido com a tarefa, tal como refere Canavarro (2011):

é crucial o papel e a acção do professor, que começa com a escolha criteriosa da tarefa e o delineamento da respectiva exploração matemática com vista ao cumprimento do seu propósito matemático, orientado pelas indicações programáticas. Em aula, para além de gerir o trabalho dos alunos, o professor precisa de interpretar e compreender como eles resolvem a tarefa e de explorar as suas respostas de modo a aproximar e articular as suas ideias com aquilo que é esperado que aprendam. (p. 11)

Inicialmente, torna-se importante perceber os conhecimentos prévios que os alunos possuem acerca do conteúdo que se vai lecionar, através da implementação de um teste diagnóstico que, neste caso específico, teve como objetivo perceber os conhecimentos que os alunos possuíam em relação aos números racionais, mas também as representações que estes naturalmente utilizavam na resolução de tarefas com números racionais. Para Pacheco (1994), a avaliação diagnóstica

corresponde quer ao momento de avaliação inicial (início do ano letivo, trimestre, unidades letivas...) quer ao momento de avaliação pontual, consistindo no levantamento de conhecimentos dos alunos considerados pré-requisitos, para abordar determinados conteúdos (...) Pela sua natureza, os dados assim recolhidos não devem nunca contar para a progressão dos alunos, mas apenas servir de indicador para o professor. (p. 75)

A recolha de dados através do teste diagnóstico permite planificar aulas consoante os conhecimentos que os alunos possuem acerca de determinado conteúdo, o que permite verificar se “o aluno está ou não na posse das aprendizagens necessárias para que as novas tenham lugar” (Martins, 2012, p. 13).

O teste diagnóstico tem como vantagem a recolha de informação acerca do que os alunos já sabem, contudo, também tem desvantagens, tal como a apresentação de respostas que podem não corresponder aos conhecimentos dos alunos. Como se trata de um teste, os alunos tendem a sentir a pressão que a avaliação exerce sobre cada um deles, tentando, se não souberem responder a alguma questão, recorrer aos colegas para não deixar a questão por resolver.

A concretização de um formato de ensino exploratório é pautada por três fases distintas: a fase de lançamento da tarefa, a fase de exploração e a fase de discussão (Stein et al., 2008).

Na fase de lançamento da tarefa, o professor apresenta a tarefa aos alunos, as ferramentas que estão disponíveis para trabalharem e os produtos que são esperados que estes consigam atingir. Depois da entrega e da compreensão da tarefa, vem a fase de exploração, onde os alunos trabalham a tarefa, em pares, em grupo ou em grande grupo, discutindo e partilhando ideias. O caminho que seguem para a resolução da tarefa é escolhido pelos próprios alunos, devendo ser o mais compreensível para, posteriormente, se sentirem à vontade para partilhar com a turma as suas ideias. Com isto, a abordagem de uma mesma tarefa é feita de diversas formas, o que enriquece o conhecimento dos alunos, quando estes partilham as suas ideias, na fase da discussão da tarefa. Termina-se a resolução da tarefa com diversas ideias e perspetivas que levam à mesma conclusão (Stein et al., 2008). Na fase final, a discussão, o professor desempenha um papel importante, tal como afirmam Canavarro, Oliveira e Menezes (2012): “o professor tem de orquestrar essa discussão, não apenas gerindo as intervenções e interações dos diferentes alunos, mas também promovendo a qualidade matemática das suas explicações e argumentações” (pp. 256-257). Este papel do professor reflete-se em toda a prática desenvolvida em sala de aula, tendo este que “assumir um papel de moderador, gerindo a sequência de intervenções e orientando, se necessário o respetivo conteúdo” (Ponte, 2005, p. 16).

Ponte (2005) assume que o professor adota um papel de mediador, procurando ajudar os alunos a serem autónomos, enveredando estes por caminhos que lhes permitem a descoberta e a construção de conhecimentos, transformando a atividade de ensino aprendizagem numa atividade construtiva e complexa.

A estrutura dos planos de aula seguiu um modelo específico, dividido em quatro momentos: atividade motivacional; prática; desafio; e, síntese. Na atividade motivacional, os alunos trabalham uma tarefa, em pares, de forma a discutir a resolução da mesma e a conseguirem trocar ideias que favoreçam a sua compreensão. Pretende-se, com a conclusão desta tarefa e com a ajuda do professor, que os alunos alcancem o objetivo que era esperado sendo, neste caso, o aluno um agente ativo no processo de ensino aprendizagem. Este papel ativo é importante na aprendizagem do aluno, tal como afirma Ianhes (s.d.):

as actividades lúdicas, que requerem a entajuda dos alunos, têm como objectivo tornar as aulas dinâmicas e agradáveis, facilitando assim o ensino-aprendizagem e levando o aluno a apropriar-se do conhecimento, vivenciando, experimentando e tornando-se uma pessoa autónoma para poder aplicar os seus conhecimentos na vida. (p. 11)

O segundo momento da aula prende-se com a prática, ou seja, os alunos praticam o que aprenderam na tarefa anterior, de modo a consolidarem melhor os conhecimentos.

No terceiro momento da aula, os alunos serão desafiados a resolver uma tarefa, que tem por base o conteúdo aprendido anteriormente, mas que possui um grau de complexidade superior ao das atividades anteriores.

No final da aula, os alunos resolvem uma síntese, onde explicitam o que aprenderam na aula, que dificuldades sentiram, as representações que facilitaram e as que dificultaram a aprendizagem dos números racionais, fazendo um resumo geral da aula.

A metodologia de ensino com base no ensino exploratório incide numa perspectiva de ser o aluno a descobrir o conhecimento, tentando combater o ensino transmissivo que, por vezes, é utilizado na sala de aula. Contudo, torna-se importante antes de qualquer intervenção, o professor ter conhecimento do ponto de situação em que os alunos se encontram, em relação ao conteúdo que se pretende lecionar.

*Tarefas.* As tarefas escolhidas para implementar na sala de aula, devem ter por base as características dos alunos e o conteúdo a ser lecionado. Neste seguimento, a minha intervenção pedagógica baseou-se em tarefas de exploração e em problemas, que levavam os alunos a percorrerem um caminho para conseguir atingir o que se pretendia.

As tarefas de exploração requerem “do aluno um esforço de compreensão aprofundado, a formulação de uma estratégia de resolução, a concretização desta estratégia e uma reflexão sobre os resultados obtidos” (Ponte, Quaresma & Branco, 2011, p. 1). Constata-se, assim, que não são tarefas que se resolvem diretamente, no entanto é a partir de tarefas como estas, em que os alunos fazem uma reflexão acerca dos resultados obtidos, que os alunos aprendem e compreendem melhor (Ponte, 2005).

Outro tipo de tarefa matemática que utilizei na minha intervenção pedagógica foram os problemas que se caracterizam por exigirem aos alunos a conceção de um caminho a percorrer para conseguirem chegar ao objetivo final, no sentido de desafiar os alunos. A tipologia de tarefas pode distinguir-se de aluno para aluno, dado que o que para um aluno pode ser um exercício, em que este facilmente acede ao resultado final, para outro aluno poderá ser um problema, que exige uma maior dedicação para conseguir chegar ao resultado final (Ponte, 2005).

Na escolha criteriosa das tarefas, a duração e o contexto guiaram a realização e implementação das tarefas (Ponte, 2005). A duração teve que ser ajustada ao contexto, para que as tarefas conseguissem ser realizadas nos tempos estipulados para tal. Relativamente ao contexto, as tarefas retratavam situações do quotidiano, ajudando os alunos a compreenderem e a envolverem-se nas situações retratadas, facilitando a aprendizagem e dando significado à utilização dos números racionais na sua vida diária.

Na resolução das tarefas, a liberdade de resolução foi tida em conta, no sentido de serem os alunos a escolher o caminho que lhes era preferível. Este feito é importante, tal como afirma Ponte (2005):

é muitas vezes mais eficaz, em termos de aprendizagem, que eles descubram um método próprio para resolver uma questão do que esperar que eles aprendam o método do professor e sejam capazes de reconhecer, perante uma dada situação, como o aplicar. (p. 9)

Outro aspeto que tive em consideração na planificação das tarefas foi a articulação dos diferentes registos de representação, com a finalidade de proporcionar aos alunos o contacto com os diversos registos de representação dos números racionais. A importância da utilização das múltiplas representações deve ser privilegiada pelo professor. Tal como evoca o NCTM (2007), “uma das principais responsabilidades do professor consiste em criar um ambiente de aprendizagem no qual a utilização, por parte dos alunos, de diversas representações seja encorajada, apoiada e aceite pelos seus colegas e pelos adultos” (p. 163). Os alunos precisam de contactar com as diferentes representações, de modo a compreenderem como podem utilizar cada uma delas e quais delas facilitam a sua aprendizagem em diversos contextos (NCTM, 2007). Nas tarefas propostas aos alunos, existiram momentos em que os alunos escolheram a representação que lhes era conveniente e outros em que tiveram que utilizar tipos de representações específicas e de, em certos momentos, realizar o tratamento e a conversão entre as diferentes representações.

*Organização da turma.* A organização dos alunos na sala de aula de matemática deve variar ao longo das tarefas propostas (Ministério da Educação, 2007) e daí advém a mudança nessa organização da turma do 1.º ciclo para a turma do 2.º ciclo onde a intervenção foi realizada.

No início das aulas, os alunos de ambos os ciclos resolveram as tarefas propostas em pares, que, tal como defende o Ministério da Educação (2007), “é um modo de organização particularmente adequado, permitindo que os alunos troquem impressões entre si, esclareçam dúvidas e partilhem informações” (p. 11). O sentido do trabalho em pares na atividade motivacional não acabou por descorar um trabalho individual por parte dos alunos, no sentido de estes terem que ler e interpretar os enunciados para, posteriormente, conseguirem resolver o que era pretendido.

Posteriormente ao trabalho realizado em pares, os alunos apresentavam à turma as suas resoluções, proporcionando momentos de discussão sobre as estratégias delineadas e os resultados obtidos por cada par de alunos. No programa que se encontra em vigor (Ministério da Educação, 2013) a comunicação matemática integra os objetivos que deverão ser promovidos em matemática,

evidenciando que “os alunos devem ser incentivados a expor as suas ideias, a comentar as afirmações dos seus colegas e do professor e a colocar as suas dúvidas” (p. 5).

O trabalho em turma “é de importância primordial nos momentos de partilha, reflexão, argumentação e institucionalização de conhecimentos e ideias matemáticas, devendo o professor garantir uma efectiva participação da generalidade dos alunos nestes momentos de trabalho” (Ministério da Educação, 2007, p. 11).

O trabalho individual realizado pelos alunos do 1.º ciclo, nas restantes tarefas das planificações, é defendido pelo Ministério da Educação (2007) afirmando que “o aluno deve procurar ler, interpretar e resolver tarefas matemáticas sozinho, bem como ler, interpretar e redigir textos matemáticos” (p. 11).

Na turma do 2.º ciclo, os alunos resolveram todas as tarefas propostas em pares, possibilitando a troca de ideias e a entajuda, aspetos importantes não só para os alunos enquanto membros de uma comunidade escolar, mas também enquanto membros de uma sociedade ativa.

### **2.3.2. Estratégias de avaliação do ensino ministrado**

Na implementação do projeto de intervenção, no sentido de recolher dados que permitissem dar resposta às questões de investigação delineadas, foram utilizados diversos métodos de recolha de dados: (i) Produções dos alunos; (ii) Gravações-áudio de aulas; (iii) Questões aula; (iv) Questionários (um no início da intervenção pedagógica e outro no final). Os dados recolhidos por estes métodos referem-se a “materiais em bruto que os investigadores recolhem do mundo que se encontram a estudar” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 149), enfatizando evidências das atividades realizadas pelos alunos e de conhecimentos adquiridos.

As *produções dos alunos* são fundamentais no estudo de qualquer problemática. Tal como refere Sousa, Cebolo, Alves e Mamede (2009), os professores devem valorizar as produções dos alunos tendo por base alguns aspetos a promover na sala de aula, tais como: “1) conhecer e entender as produções dos alunos; 2) dar oportunidade à partilha de resoluções e argumentação sobre processos de resolução entre os alunos e alunos-professor; e 3) valorizar processos e não apenas produtos” (p. 7). A recolha das produções dos alunos na minha intervenção pedagógica foi feita antes da discussão da resolução das tarefas no grupo turma, o que lhes permitiu resolver livremente a tarefa, revelando aquilo que já sabiam ou até mesmo o que não sabiam. A dificuldade que os alunos possuem em, por vezes, exteriorizar aquilo que pensam pode acabar por ser uma desvantagem da utilização das produções dos alunos para a recolha de dados.

As representações que os alunos mais utilizaram e as dificuldades que estes sentiram na aprendizagem nos números racionais são perceptíveis na análise das produções dos alunos e, dessa forma, este foi um instrumento essencial para conseguir, por um lado, ilustrar as atividades de aprendizagem de números racionais dos alunos e, por outro lado, responder às questões de investigação delineadas.

As *gravações-áudio* de aulas permitiram recolher informação que traduz o discurso dos alunos nas interações que se realizaram entre os intervenientes na sala de aula aquando a discussão da resolução das tarefas propostas. Tal informação, ao ser integrada em alguns momentos das aulas que ilustro no capítulo seguinte, complementa a que é proveniente das produções dos alunos. Contudo, este instrumento de recolha de dados nem sempre favorece a recolha de dados como, por exemplo, quando existe muito ruído na sala de aula, a perceção do que os alunos dizem que seja pertinente vai ser escassa. Assim, estas gravações permitem, em condições favoráveis de audição, a recolha de informações importantes para responder às questões de investigação.

As *questões-aula*, neste caso específico, serviram para, em cada aula, os alunos registarem o que aprenderam, as representações que facilitaram e as que dificultaram a aprendizagem dos números racionais. Com isto, consegui perceber se os alunos atingiram os objetivos pretendidos para cada aula que lecionei e se houve uma evolução no que se refere às facilidades ou dificuldades em trabalhar com as diferentes representações. Estas questões-aula têm como desvantagem a dificuldade que os alunos têm em expressar-se, não justificando as suas escolhas para as representações que facilitaram e dificultaram a aprendizagem dos números racionais.

O *questionário inicial* e o *questionário final* foram utilizados com finalidades distintas. Com o questionário inicial recolhi informações que me permitiram conhecer características dos alunos. No caso da turma do 2.º ciclo, também me permitiu perceber que experiências tiveram os alunos em anos transatos com os números racionais e com as diferentes representações dos mesmos. O questionário final possibilitou a recolha das perceções dos alunos acerca das representações semióticas na aprendizagem dos números racionais. Também me permitiu perceber se as aulas que lecionei foram um incentivo para uma aprendizagem mais eficaz, se permitiram o desenvolvimento de conhecimentos, se dificultaram ou facilitaram a aprendizagem dos números racionais, entre outros aspetos, conseguindo através desses pormenores avaliar o ensino ministrado. Na turma do 1.º ciclo, o questionário final abrangeu perguntas de resposta mais aberta, ao contrário do questionário final implementado na turma do 2.º ciclo, que apresenta questões de resposta múltipla com base na escala tipo Likert (DT: Discordo totalmente; D: Discordo; I: Indiferente; C: Concordo; e CT: Concordo Totalmente).

O questionário final tem como vantagem a recolha das percepções acerca do que foi feito no âmbito da intervenção pedagógica, percebendo o que surtiu efeito nos alunos e a opinião deles em relação às práticas implementadas na sala de aula. Contudo, também possui desvantagens nas perguntas em que os alunos têm de opinar e justificar as suas respostas. Ao exigirem um desenvolvimento linguístico, os alunos deste nível tendem a ser pouco explícitos naquilo que querem referir.

Paralelamente a estes métodos de recolha de dados, a análise de documentos foi igualmente fundamental devido à necessidade de existir um conhecimento que servisse de base a tudo o que foi realizado. Os documentos oficiais consultados foram muito diversificados, destacando-se o Programa e Metas Curriculares Matemática (Ministério da Educação e Ciência, 2013); os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007); as Aprendizagens Essenciais (Ministério da Educação, 2018); e os manuais escolares.

## CAPÍTULO 3

### DESENVOLVIMENTO E AVALIAÇÃO DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Na concretização da minha intervenção pedagógica procurei averiguar o contributo das representações semióticas na aprendizagem dos números racionais de alunos do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Com esse intuito, as aulas que me foram atribuídas incidiram sobre os tópicos apresentados no Quadro 3, tendo como referência os conteúdos do domínio 'Números e Operações' emanados dos programas curriculares do 2.º e 6.º anos de escolaridade.

Quadro 3: Síntese da intervenção pedagógica no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.

	<b>Aulas</b>	<b>Tópicos</b>	<b>Objetivos</b>
<b>1º Ciclo do Ensino Básico</b>	1. <sup>a</sup>	Frações unitárias: Introdução.	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Introduzir a noção de fração.</li><li>▪ Utilizar as frações unitárias para relacionar as partes de um todo.</li></ul>
	2. <sup>a</sup>	Frações unitárias: Parte-todo.	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Utilizar frações unitárias para referir cada uma das partes de um todo.</li></ul>
	3. <sup>a</sup>	Dividir a unidade: Reta numérica.	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Identificar frações unitárias num segmento de reta.</li></ul>
	4. <sup>a</sup>	Frações unitárias: Parte-todo na reta numérica e em figuras.	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Identificar frações unitárias num segmento de reta.</li><li>▪ Utilizar as frações unitárias para relacionar as partes de um todo.</li></ul>
	5. <sup>a</sup>	Frações unitárias: Síntese.	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Consolidar o estudo dos tópicos abordados.</li></ul>
<b>2º Ciclo do Ensino Básico</b>	1. <sup>a</sup>	Ordenação e comparação de números racionais.	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Representar e comparar números racionais.</li></ul>
	2. <sup>a</sup>	Ordenação e comparação de números racionais: frações.	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Representar e comparar frações.</li></ul>
	3. <sup>a</sup>	Adição de números racionais: com o mesmo sinal.	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Adicionar números racionais com o mesmo sinal.</li></ul>
	4. <sup>a</sup>	Adição de números racionais: com sinais contrários.	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Adicionar números racionais com sinais contrários.</li></ul>
	5. <sup>a</sup>	Subtração de números racionais.	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Subtrair números racionais.</li></ul>

De modo a explicitar a minha ação pedagógica, descrevo e interpreto momentos que dinamizei nas aulas 1, 2 e 4, numa turma do 2.º ano de escolaridade, e nas aulas 2, 3 e 5, numa turma do 6.º ano de escolaridade. Posteriormente, apresentam-se as perceções dos alunos de ambas as turmas sobre o ensino ministrado.

### 3.1. Intervenção pedagógica no 1º ciclo do Ensino Básico

#### 3.1.1. Frações unitárias: Introdução

Na introdução das 'Frações unitárias' os alunos exploraram a divisão, tópico já abordado entre números naturais, da unidade em partes iguais, através da representação das situações contempladas nas tarefas que adotei para o estudo deste tópico. A primeira tarefa que os alunos realizaram, em pares, foi a seguinte:

**Tarefa 1:** Na aula de Matemática do 2.º ano, o João aprendeu algumas formas geométricas e, quando chegou a casa, decidiu fazer as mesmas em cartolina de diferentes cores. Entretanto, chegou o seu amigo Rui que acabou por destruir as figuras geométricas, cortando-as aos pedacinhos. O João muito chateado atirou as figuras para o chão e acabou por espalhá-las. O Rui disse-lhe que tinha dividido as figuras em partes iguais para lhe mostrar o que tinha aprendido hoje na escola.

1. Que figuras geométricas terá o João desenhado?
2. Depois de compostas as figuras geométricas, o Rui disse “dividi o triângulo e o quadrado em duas partes iguais”. Como representar cada uma dessas partes?
3. Depois de explicar ao João o que fez ao triângulo e ao quadrado, o Rui explicou ao amigo que dividiu o retângulo em três partes iguais, o círculo em quatro partes iguais e o pentágono em cinco partes iguais para lhe mostrar os números que aprendeu na aula de matemática. Que números são esses?

Na resolução da primeira questão da tarefa, os alunos foram interpelados sobre as figuras geométricas que conheciam. Da análise das suas respostas, constata-se que a maior parte identificou as figuras geométricas que eram esperadas que referissem, o que já não aconteceu com a divisão dessas figuras em partes geometricamente iguais (Tabela 1).

Tabela 1: Frequência dos tipos de resposta às questões da Tarefa 1 ( $n = 16$ ).

Questão	Tipos de resposta			
	C	PC	I	NR
1.	6	2	0	0
2.	4	0	0	4
3.	2	5	1	0

Nota: C – correta; PC – parcialmente correta; I – incorreta; NR – não responde.

Relativamente à Questão 1, seis pares de alunos responderam corretamente indicando as figuras geométricas abordadas em aulas anteriores (quadrado, retângulo, triângulo e círculo), enquanto que dois pares de alunos responderam parcialmente correto, num registo em linguagem natural e pictórico, por indicarem figuras que não contemplam as que são estudadas no domínio 'Geometria e Medida', como exemplifica a resposta dada pelo par P8 (Figura 7).

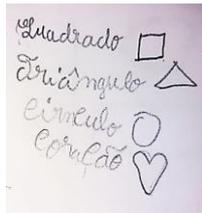


Figura 7. Resposta parcialmente correta do par P8 à Questão 1 da Tarefa1.

O registo pictórico e o registo em linguagem natural foram utilizados por quatro pares de alunos que responderam corretamente à Questão 1, como expressa a resposta do par P5 (Figura 8). Os outros dois pares de alunos utilizaram o registo pictórico, no entanto não evidenciam a representação das figuras geométricas em linguagem natural, como exemplifica a resposta do par P7 (Figura 8).

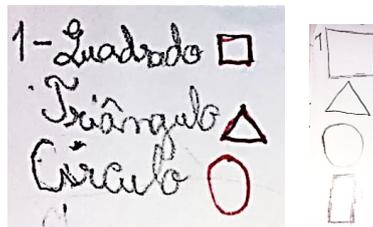


Figura 8. Respostas corretas, respetivamente, dos pares P5 e P7 à Questão 1 da Tarefa1.

A divisão do triângulo e do quadrado em duas partes geometricamente iguais, Questão 2, fez emergir a representação simbólica desta operação. Na discussão desta representação, os alunos constataram que nem sempre os resultados obtidos são exatos e, nesses casos, a divisão pode ser representada através de uma fração. Entre as partes das figuras com que os alunos se depararam, a metade foi a que revelaram compreender melhor, possivelmente por associarem esta parte a situações análogas no seu quotidiano.

Professora: O que aconteceu aqui? Eu tinha o quê?

Alunos: Um quadrado.

Professora: E dividi-o em quantas partes?

Alunos: Duas.

Professora: Duas. É possível fazer isso?

Alunos: Sim.

Professora: Como é que eu tenho o desenho de um quadrado e vou conseguir dividi-lo por duas pessoas?

Aluno: Partes a meio.

Professora: Como se chama isso?

Alunos: Dividir.

Professora: Com que parte deste quadrado vai ficar cada menino?

Aluno: Um menino com meia parte.

Professora: Meia parte chama-se o quê?

Aluno: Metade.

A clarificação da noção de metade de uma figura geométrica serviu de pretexto para institucionalizar a sua representação nos diferentes registos. A representação de cada uma das partes

das figuras (quadrado e triângulo) foi efetuada corretamente por quatro pares de alunos, o que se expressa nos seus registos pictórico, linguagem natural e simbólico, como ilustra a resposta do par P8 (Figura 9).

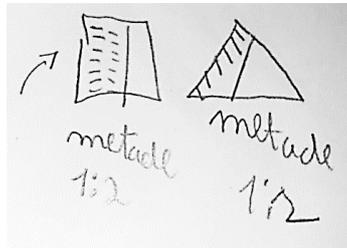


Figura 9. Resposta correta do par P8 à Questão 2 da Tarefa1

Já os outros quatro pares de alunos não respondem à questão em análise, Questão 2, o que indicia que não compreenderam o que deviam fazer.

A última questão da Tarefa 1 revelou-se fundamental para perceber se os alunos compreenderam o conceito das frações unitárias. Dois pares de alunos acertaram corretamente na identificação dos números que representam as partes iguais de um retângulo, de um círculo e de um pentágono, através do registo simbólico e do registo pictórico, como ilustra a resolução do par P5 (Figura 10).

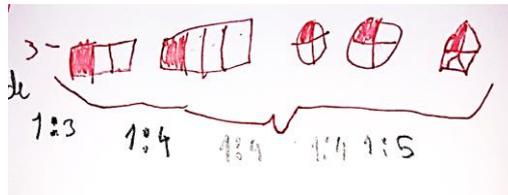


Figura 10. Resposta correta do par P5 à Questão 3 da Tarefa1.

Quanto às respostas consideradas parcialmente corretas, dois pares de alunos efetuaram corretamente a representação pictórica e a representação simbólica de cada uma das situações consideradas, mas não estabeleceram uma conexão adequada entre estas representações e a da linguagem natural da parte correspondente aos números que identificam, como mostra a resolução do par P1 (Figura 11).

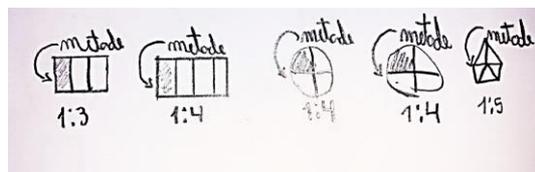


Figura 11. Resposta parcialmente correta do par P1 à Questão 3 da Tarefa1.

Os outros três pares de alunos que respondem parcialmente correto apresentaram a divisão correta das figuras, mas, um dos pares não representou simbolicamente nenhum dos números que traduzem a divisão; o outro par apenas exibiu parte desses números ( $1/2$  e  $1/3$ ) e não representou o

pentágono dividido em cinco partes geometricamente iguais; e o terceiro par não representou simbolicamente de forma adequada a divisão de algumas das figuras (Figura 12).

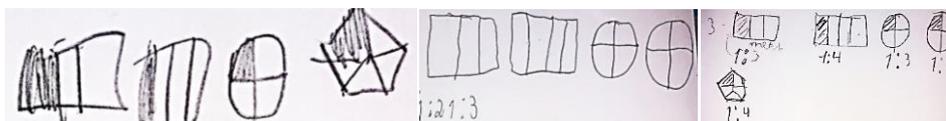


Figura 12. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P4, P3 e P7 à Questão 3 da Tarefa1.

Na resposta considerada incorreta à Questão 3, o par de alunos P8 representou incorretamente a divisão das figuras e não indicou os números correspondentes a essa divisão (Figura 13).

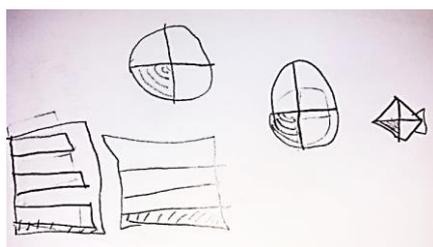


Figura 13. Resposta incorreta do par P8 à Questão 3 da Tarefa1

A divisão das figuras geométricas, neste ano de escolaridade, tende a não ser efetuada com rigor de construção, principalmente no que se refere a figuras com vários lados como o pentágono. Assim, os alunos ao serem desafiados a dividirem figuras geométricas acabam por comprometer o significado inerente a cada uma das partes que dividem a unidade.

A par da análise das respostas que os alunos deram às questões da Tarefa 1, importa identificar o tipo de registos a que recorreram em cada uma dessas questões (Tabela 2).

Tabela 2: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 1

Questão	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
1.	0	0	4	6	0	0	2	2	0	0	0	0
2.	0	4	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0
3.	0	2	0	2	0	4	0	5	0	0	0	1
<b>Total</b>	<b>0</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>12</b>	<b>0</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>7</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>

Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

Constata-se que o registo pictórico foi o mais utilizado na resolução das questões da Tarefa 1, sendo usado 12 vezes pelos pares de alunos que responderam corretamente, 7 vezes pelos pares de alunos que obtiveram respostas parcialmente corretas e uma vez por um par de alunos que respondeu incorretamente. Tais resultados revelam que os alunos têm uma maior facilidade em exprimirem as suas ideias através de desenhos do que através dos outros registos, o que se pode dever ao maior desenvolvimento dessa capacidade desde o pré-escolar.

Após a resolução da Tarefa 1 pelos alunos, seguiu-se a sua discussão no grupo turma, que serviu para institucionalizar o conceito de frações unitárias. Posteriormente, os alunos resolveram a Tarefa 2 com o intuito de sistematizar as aprendizagens adquiridas.

**Tarefa 2**

1. Escreve as frações que correspondem à parte pintada em cada uma das situações.



2. Pinta as figuras de acordo com as frações indicadas.



$\frac{1}{2}$     $\frac{1}{4}$     $\frac{1}{6}$     $\frac{1}{8}$     $\frac{1}{10}$

3. Indica, em cada situação, a parte pintada utilizando duas representações diferentes.



Os alunos realizaram esta tarefa individualmente, para que fosse possível compreender melhor o seu entendimento do tópico 'Frações unitárias', cujos resultados se apresentam na Tabela 3.

Tabela 3: Frequência dos tipos de resposta às questões da Tarefa 2 ( $n = 16$ ).

Questão	Tipos de resposta			
	C	PC	I	NR
1.	7	3	2	4
2.	8	7	0	1
3.	6	3	3	4

Nota: C – correta; PC – parcialmente correta; I – incorreta; NR – não responde.

Na primeira questão, sete alunos (43,75%) indicaram corretamente a fração correspondente à parte pintada de cada uma das figuras que a compõem, através do registo simbólico. Porém, um destes alunos respondeu utilizando dois tipos de registo de representação, o registo simbólico e o registo em linguagem natural, como ilustra a resposta do aluno A20 (Figura 14).

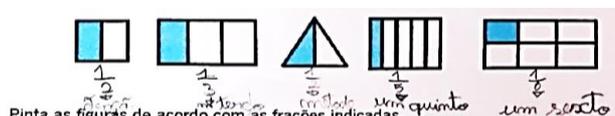


Figura 14. Resposta correta do aluno A20 à Questão 1 da Tarefa 2.

A utilização simultânea de dois registos revela que o aluno não só entendeu o que foi abordado acerca das frações unitárias, como também se sente à vontade para utilizar os diversos registos, mostrando que um mesmo 'objeto' matemático se pode representar de várias formas. Na conversão do registo simbólico para o registo em linguagem natural, o aluno apresenta na primeira figura o termo 'fração' referindo-se a  $\frac{1}{2}$ , mas no caso da terceira figura redige o termo correto referente a essa mesma

fração, o que indicia falta de poder crítico do que faz.

No que se refere às respostas parcialmente corretas, dadas por três alunos (18,75%), tais devem-se pelo facto do aluno A8 não indicar todas as frações correspondentes, de o aluno A26 responder corretamente a três das cinco frações, falhando na colocação do traço de fração entre o numerador e o denominador, e de o aluno A11 representar simbolicamente e em linguagem natural as partes pintadas das figuras por frações, que em certas figuras não lhes correspondem (Figura 15).

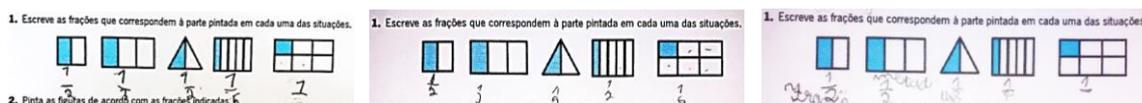


Figura 15. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos alunos A8, A26 e A11 à Questão 1 da Tarefa2.

Na análise da resposta parcialmente correta do aluno A26 observa-se que na primeira figura representa corretamente a fração, mas nas restantes omite a representação do traço que separa o numerador do denominador.

A apresentação de frações incorretas pelo aluno A11 permite concluir que não compreendeu o tópico abordado, dado que apenas acertou corretamente a fração que corresponde à primeira figura. A representação da fração  $\frac{1}{2}$  em linguagem natural apenas se encontra correta no caso da segunda figura, em que o aluno refere que a fração correspondente se trata de  $\frac{1}{2}$ , o que, no registo em linguagem natural, se representa por ‘metade’.

As respostas incorretas, dadas por dois alunos (12,5%), devem-se à falta de indicação da fração correspondente – os alunos pintaram nas figuras uma das partes em vez de representarem a fração correspondente, dando a entender que não compreenderam o que era pedido no enunciado (Figura 16).

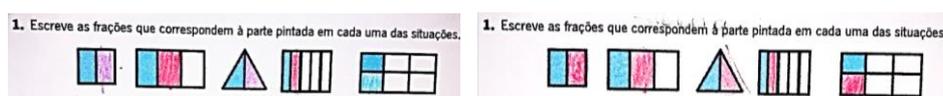


Figura 16. Respostas incorretas, respetivamente, dos alunos A25 e A16 à Questão 1 da Tarefa2

Na Questão 2 da tarefa em análise, oito alunos (50%) respondem corretamente pintando apenas uma das partes de cada figura, tal como registou o aluno A18 (Figura 17). No entanto, sete alunos (43,75%) indicaram respostas parcialmente corretas, não respondendo totalmente à questão, visto que apenas pintaram corretamente uma parte de algumas das figuras, tal como expressam as respostas dos alunos A10 e A3 (Figura 18).

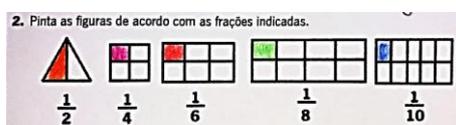


Figura 17. Resposta correta do aluno A18 à Questão 2 da Tarefa2

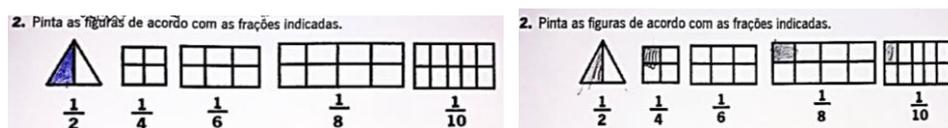


Figura 18. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos alunos A10 e A3 à Questão 2 da Tarefa2

Os restantes cinco alunos que responderam parcialmente correto, pintaram duas partes de cada figura exceto na primeira (Figura 19).

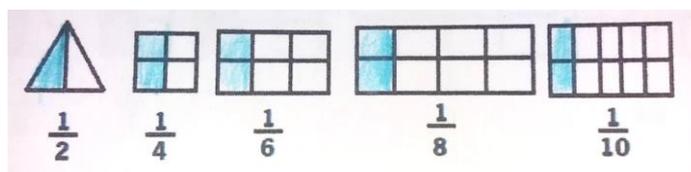


Figura 19. Resposta parcialmente correta do aluno A20 à Questão 2 da Tarefa2

Analisando a resposta parcialmente correta do aluno A20, entende-se que existiu uma associação da quantidade pintada na primeira figura para as restantes, não tendo em atenção o numerador de cada fração apresentada. Assim, os alunos que respondem desta forma revelam que não compreenderam o que representa cada fração unitária, não conseguindo realizar a conversão do registo simbólico para o registo pictórico de cada uma das frações.

Na Questão 3 da Tarefa 2, seis alunos (37,5%) responderam corretamente, mas apenas um deles utilizou dois registos de representação distintos, o registo simbólico e o registo em linguagem natural. O registo em linguagem natural foi utilizado por apenas um dos seis alunos e o registo simbólico foi utilizado por quatro dos seis alunos, como expressam as respostas apresentadas pelos alunos A8, A4 e A11 (Figura 20).

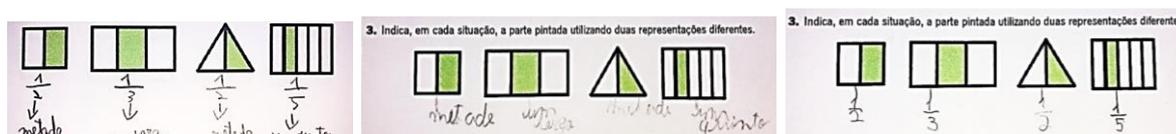


Figura 20. Respostas corretas, respetivamente, dos alunos A18, A4 e A11 à Questão 3 da Tarefa2

As respostas parcialmente corretas foram dadas por três alunos (18,75%), considerando que apenas representaram corretamente duas frações, como revela a resposta do aluno A5 (Figura 21).

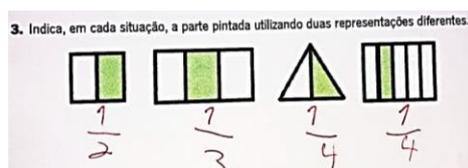


Figura 21. Resposta parcialmente correta do aluno A5 à Questão 3 da Tarefa2

As respostas incorretas dadas por três alunos (18,75%) devem-se, mais uma vez, à incompreensão do que era pedido, como mostra a resposta do aluno A16 (Figura 22).

3. Indica, em cada situação, a parte pintada utilizando duas representações diferentes.

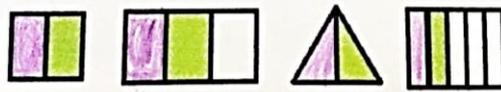


Figura 22. Resposta incorreta do aluno A16 à Questão 3 da Tarefa2

Quanto ao tipo de registos que os alunos expressam nas suas respostas às questões da Tarefa 2, destaca-se o registo simbólico nas respostas corretas, enquanto que nas respostas parcialmente corretas e incorretas é o registo pictórico que recolhe maior número de utilizações (Tabela 4).

Tabela 4: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 2

Questão	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
1.	0	7	1	0	0	3	1	0	0	0	0	2
2.	0	0	0	8	0	0	0	7	0	0	0	0
3.	0	5	2	0	0	3	0	0	0	0	0	3
<b>Total</b>	0	<b>12</b>	3	8	0	6	1	<b>7</b>	0	0	0	<b>5</b>

Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

O registo simbólico utilizado na maioria das respostas corretas possibilitou a aquisição de competências em relação ao conteúdo dos números racionais, mais especificamente das frações unitárias. Através da representação simbólica da operação da divisão, a maior parte dos alunos compreenderam o que representava cada fração, nas diversas situações, levando os alunos a obterem respostas corretas, utilizando este tipo de registo.

O registo pictórico utilizado pelos alunos para dar resposta à Questão 1, levou a que estes obtivessem respostas incorretas, não realizando o que era pedido – que era escrever as frações que correspondiam à parte pintada em cada figura –, transparecendo a falta de compreensão do enunciado. Este tipo de registo, mais utilizado na Questão 2, possibilitou aos alunos a obtenção de respostas parcialmente corretas, pelo facto de responderem corretamente a uma parte das situações apresentadas.

Os registos de representação que integram as questões das tarefas podem influenciar a resolução dos alunos, retirando a possibilidade de escolha para utilizar diferentes representações, como acontecia na tarefa anterior. Para perceber essa relação, propus aos alunos a resolução da Tarefa 3 que apresenta somente o registo em linguagem natural. Assim, os alunos poderiam utilizar o registo de representação que desejassem para responder ao que era pedido na tarefa.

**Tarefa 3:** A Professora de Matemática deu aos alunos um chocolate retangular e pediu que em casa o dividissem em quantas partes quisessem. A Maria decidiu dividir o chocolate em duas partes, o João em três partes, a Rita em quatro partes e o Rui em cinco partes. Se cada um comer uma das partes do chocolate, quem vai comer mais? Mostra como chegaste à tua resposta.

Da análise das respostas dos alunos a esta tarefa, que a resolveram individualmente, verifica-se que metade da turma não esboçou qualquer resposta, enquanto na outra metade seis alunos (37,5%) responderam corretamente, um aluno (6,25%) apresentou uma resposta parcialmente correta e outro aluno (6,25%) uma resposta incorreta (Tabela 5).

Tabela 5: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 3 ( $n = 16$ ).

Tarefa 3	Tipos de resposta			
	C	PC	I	NR
	6	1	1	8

Nota: C – correta; PC – parcialmente correta; I – incorreta; NR – não responde.

Nas suas resoluções, seis alunos (37,5%) registaram pictoricamente o seu raciocínio, indicando que foi a Maria quem comeu mais chocolate, obtendo, assim, uma resposta correta. O registo em linguagem natural foi utilizado por quatro desses alunos para justificarem as suas respostas, evidenciando aquilo que pensaram para a resolução desta tarefa, tal como revelam as respostas dos alunos A5 e A20 (Figura 23).

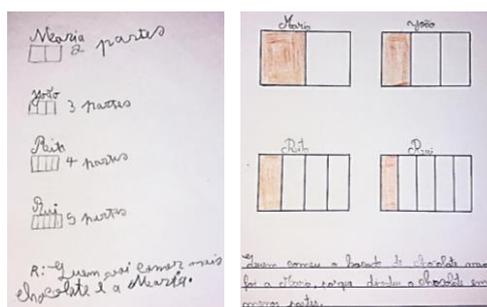


Figura 23. Respostas corretas, respetivamente, dos alunos A5 e A20 à Tarefa3

O registo pictórico da divisão de cada chocolate permitiu aos alunos a perceção da quantidade que cada pessoa iria comer, facilitando a resolução da tarefa. O registo em linguagem natural completou o registo pictórico, comprovando qual das pessoas comeria mais chocolate.

Relativamente à resposta parcialmente correta, um aluno (6,25%) representou pictoricamente a situação descrita no enunciado, mas acabou por não dar resposta à pergunta formulada na tarefa (Figura 24).

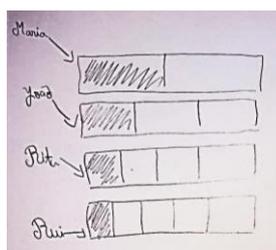


Figura 24. Resposta parcialmente correta do aluno A7 à Tarefa3

O aluno A7 respondeu à questão formulada através do registo pictórico, que lhe permitiu a

visualização da quantidade que cada pessoa comeria. A resposta final não foi apresentada, o que indicia de que, no entendimento do aluno, está subjacente à representação feita através do registo pictórico.

A resposta incorreta dada por um aluno (6,25%) seguiu o registo pictórico, tendo o aluno considerado o número de pedaços que cada pessoa obteve na divisão, mas revelou dificuldades em comparar frações com o mesmo numerador e diferentes denominadores neste registo (Figura 25).

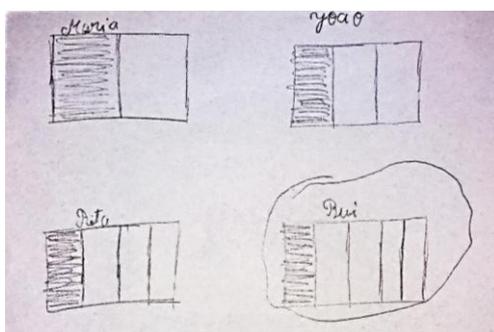


Figura 25. Resposta incorreta do aluno A4 à Tarefa3

Tal dificuldade, que levou o aluno A4 a responder incorretamente, indicia dever-se à quantidade de pedaços que cada pessoa obteve na divisão do chocolate, não tendo em conta que a área de cada um desses pedaços diminui à medida que aumenta a divisão do chocolate em partes iguais.

Analisando as respostas dos alunos em termos de registo, verifica-se que o registo pictórico é o mais utilizado pelos alunos independentemente do tipo de resposta que apresentam (Tabela 6).

Tabela 6: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 3.

	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
Tarefa 3	0	0	4	6	0	0	0	1	0	0	0	1
<b>Total</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>

Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

A utilização do registo pictórico permitiu aos alunos a visualização concreta da divisão de uma figura retangular, tornando mais eficaz a compreensão da quantidade que cada pessoa comeria de um chocolate. A resposta incorreta que recorre ao registo pictórico deveu-se ao número de pedaços em que a figura ficou dividida, não considerando que a pessoa iria apenas comer um pedaço, independentemente da divisão do chocolate.

### 3.1.2. Frações unitárias: parte-todo

No seguimento da aprendizagem do tópico 'Números e Operações', mais especificamente do conteúdo dos 'Números racionais não negativos', os alunos foram desafiados a resolver uma tarefa, em

pares, que tinha como objetivo a utilização das frações unitárias para referir cada uma das partes de um todo.

**Tarefa 1:** No dia do aniversário do João, a avó fez um bolo retangular para lanchar com três amigos. Quando o bolo foi dividido, a avó teve em conta que todos deveriam comer a mesma quantidade de bolo.

1. De que forma a avó pode dividir o bolo?
2. Que quantidade de bolo comeu cada criança?

Após a análise das respostas dos alunos à Tarefa 1, constata-se que os alunos representaram corretamente a divisão em partes iguais de um bolo com a forma retangular, o que já não se verifica com a identificação da quantidade que cada criança comeu (Tabela 7).

Tabela 7: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 1 ( $n = 24$ )

Questão	Tipos de resposta			
	C	PC	I	NR
1.	12	0	0	0
2.	1	5	1	5

Nota: C – correta; PC – parcialmente correta; I – incorreta; NR – não responde.

Na representação do bolo com a forma retangular, todos os pares de alunos recorreram ao registo pictórico para apresentarem diferentes formas de repartir o bolo, tal como evidenciam as respostas dos pares P3, P11, P12 e P5 (Figura 26).

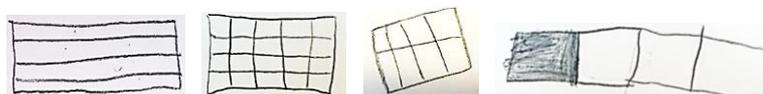


Figura 26. Respostas corretas, respetivamente, dos pares P3, P11, P12 e P5 à Questão 1 da Tarefa1

As diferentes divisões representadas pelos alunos carecem de rigor, no entanto exibem a compreensão que os alunos possuem em relação à divisão de um retângulo por quatro partes iguais.

A utilização do registo pictórico para responder à Questão 1 acabou por ser imposta, não havendo possibilidade de representar a forma como um retângulo poderia ser dividido em partes iguais num registo de representação diferente.

Na Questão 2, apenas um par de alunos respondeu corretamente indicando que cada criança comeu  $\frac{1}{4}$  do bolo. Para dar resposta a esta questão, esse par de alunos teve em consideração a representação feita na Questão 1 (Figura 27).

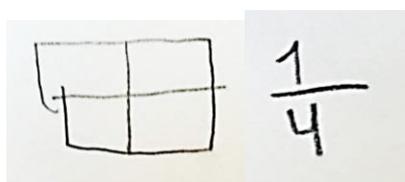


Figura 27. Resposta correta do par P1 à Questão 2 da Tarefa1

As respostas parcialmente corretas dadas por quatro pares de alunos contêm respostas ambíguas, que não evidenciam a quantidade específica que cada pessoa iria comer, tal como expressam as respostas dos pares P10, P2 e P3 (Figura 28).



Figura 28. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P10, P2 e P3 à Questão 2 da Tarefa 1

Ainda em termos de respostas parcialmente corretas, um par de alunos indicou que cada pessoa iria comer duas fatias de bolo, considerando a representação feita na Questão 1, não tendo em atenção que existiam diversas formas de dividir essa mesma figura (Figura 29).

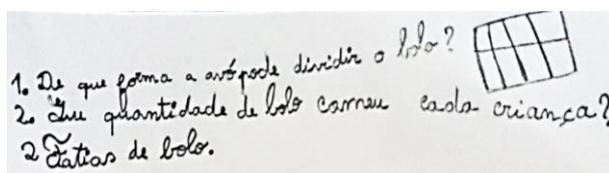


Figura 29. Resposta parcialmente correta do par P12 à Questão 2 da Tarefa 1

A resposta incorreta dada por um par de alunos evidencia que, apesar de terem respondido corretamente à Questão 1, não tiveram em atenção a representação feita para responderem corretamente à Questão 2 (Figura 30).

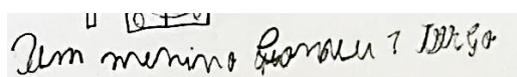


Figura 30. Resposta incorreta do par P6 à Questão 2 da Tarefa 1

Da análise da resposta do par P6, depreende-se que os alunos tiveram em atenção a informação referente ao enunciado, que indica a existência de três amigos, sem considerarem que a divisão do bolo seria feita pelos três amigos e pelo aniversariante.

Os registos de representação utilizados pelos alunos nas respostas às Questões 1 e 2 da Tarefa 1 foram diversificados, variando no tipo de respostas dado pelos alunos (Tabela 8).

Tabela 8: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 1

Questão	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
1.	0	0	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0
2.	0	1	0	0	0	0	5	0	0	0	1	0
Total	0	1	0	<b>12</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	0	<b>1</b>	0

Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

O registo pictórico utilizado na Questão 1 excedeu os outros registos, não existindo outra forma dos alunos exteriorizarem o seu pensamento. Assim, em geral, o registo pictórico proporcionou aos alunos a obtenção de respostas corretas, o que não aconteceu quando utilizaram outros registos.

O registo em linguagem natural utilizado nas respostas parcialmente corretas e incorretas, no primeiro caso não favoreceu a percepção das respostas que os alunos queriam transmitir, tornando-se ambíguas e não especificando a resolução pretendida. No segundo caso levou o aluno a responder incorretamente, não pela utilização específica deste registo, mas pela incorreta extração de informação do enunciado.

O registo gráfico obteve uma frequência absoluta nula, pelo facto de os alunos não serem influenciados a utilizar este tipo de registo e também pela inexperiência que estes possuem na representação de números racionais na reta numérica.

A utilização dos diferentes registos de representação nesta tarefa não era feita livremente, sendo que as questões levavam os alunos a utilizar um registo de representação específico, como, por exemplo, na divisão do bolo retangular, que indiciava a representação dessa divisão através do registo pictórico.

Por forma a dar continuidade ao trabalho explanado na Tarefa 1, os alunos foram incentivados a resolverem individualmente outra tarefa, onde trabalhavam com números racionais e com as suas diferentes representações. Neste seguimento, os alunos converteram números racionais representados em diversos registos, existindo a evidência de que um mesmo 'objeto' matemático pode ser representado de várias formas (Tarefa 2).

**Tarefa 2:**

**1. Completa o quadro de modo a traduzir a parte pintada em cada uma das figuras:**

Figuras				
Representações				
Representação numérica				
Linguagem natural				

**2. Completa o quadro de modo a representar as frações:**

Representação numérica	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
Representações				
Desenho				
Linguagem natural				

**3. Completa o quadro de modo a apresentar as diferentes frações:**

Linguagem natural	Um quarto	Um sétimo	Um oitavo	Um décimo
Representações				
Desenho				
Representação numérica				

A análise das respostas dos alunos informa que mais de metade conseguiu obter respostas corretas na Questão 1, não acontecendo o mesmo na Questão 2 e na Questão 3 (Tabela 9).

Tabela 9: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 2 ( $n = 24$ )

Questão	Tipos de resposta			
	C	PC	I	NR
1.	16	6	0	2
2.	0	15	7	2
3.	0	19	0	5

Nota: C – correta; PC – parcialmente correta; I – incorreta; NR – não responde.

Na Questão 1, as respostas corretas dadas por 16 alunos (66,67%) apresentam a conversão entre o registo pictórico e o registo simbólico e entre o registo pictórico e o registo em linguagem natural realizada corretamente, como ilustra a resposta do aluno A20 (Figura 31).

1. Completa o quadro de modo a traduzir a parte pintada em cada uma das figuras:

Representações \ Figuras				
Representação numérica	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
Linguagem natural	metade! um meio	um terço	um quarto	um quinto

Figura 31. Resposta correta do aluno A20 à Questão 1 da Tarefa2

A identificação dos alunos em relação às frações unitárias apresentadas na Questão 1 levou a que conseguissem realizar a conversão entre os diversos registos. No que se refere à fração  $\frac{1}{2}$ , alguns alunos identificaram que, no registo em linguagem natural, pode representar-se por ‘metade’ ou por ‘um meio’.

As respostas parcialmente corretas foram dadas por seis alunos (25%), em que: dois deles trocaram a fração  $\frac{1}{6}$  (incorreta) por  $\frac{1}{3}$  (correta); três alunos representaram todas as frações em linguagem natural por ‘um meio’; e o outro aluno representou em linguagem natural a fração  $\frac{1}{2}$  por ‘segundo’, como ilustram as respostas dos alunos A13, A4 e A15 (Figura 32).

1. Completa o quadro de modo a traduzir a parte pintada em cada uma das figuras:

Representações \ Figuras				
Representação numérica	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
Linguagem natural	um meio	um meio	um meio	um meio

1. Completa o quadro de modo a traduzir a parte pintada em cada uma das figuras:

Representações \ Figuras				
Representação numérica	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
Linguagem natural	um meio	um meio	um meio	um meio

1. Completa o quadro de modo a traduzir a parte pintada em cada uma das figuras:

Representações \ Figuras				
Representação numérica	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
Linguagem natural	segundo	um meio	um meio	um meio

Figura 32. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos alunos A13, A4 e A15 à Questão 1 da Tarefa2

Da análise da resposta parcialmente correta do aluno A13 à Questão 1 da Tarefa 2 depreende-se que, apesar da falta do termo ‘um’ no registo em linguagem natural, o aluno manifesta compreender que faz parte desse registo, no entanto revela que está subjacente quando se apresentam simultaneamente outros registos.

A atribuição de ‘um meio’ a todas as frações unitárias evidencia que os alunos confundem o registo em linguagem natural quando se trata de realizar uma conversão do registo pictórico para o registo em

linguagem natural. A primeira fração com que os alunos contactaram quando as frações unitárias foram introduzidas foi  $\frac{1}{2}$  o que os poderá levar a associar essa fração a outras frações diferentes, no que respeita ao registo em linguagem natural.

A conversão da fração  $\frac{1}{2}$  do registo pictórico para o registo em linguagem natural feita pelo aluno A15 na Questão 1 mostra que o aluno utilizou um termo análogo ao que costuma usar na vida quotidiana para se referir a 'um meio'. Como o aluno ainda não se encontra familiarizado com as frações unitárias e os termos referentes às mesmas, utiliza termos conhecidos e que fazem sentido no seu pensamento.

A conversão do registo simbólico para o registo pictórico e para o registo em linguagem natural, que os alunos efetuaram na Questão 2, não foi realizada corretamente por qualquer aluno. A maioria das respostas traduziu-se em parcialmente corretas (62,5%), derivado a erros cometidos pelos alunos, como, por exemplo, à incompleta conversão entre o registo simbólico e o registo pictórico, em que os alunos não pintavam a parte correspondente à fração unitária, como revela a resolução do aluno A10 (Figura 33).

2. Completa o quadro de modo a representar as frações:

Representação numérica	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
Representações				
Desenho				
Linguagem natural	um sexto	um sétimo	um oitavo	um nono

Figura 33. Resposta parcialmente correta do aluno A10 à Questão 2 da Tarefa2

No registo pictórico, alguns alunos cometem falhas, como é o caso da resposta do aluno A10 à Questão 2. A representação de frações unitárias desenvolve-se em torno de uma figura dividida em partes, tendo o aluno a perceção de que cada fração unitária se refere a uma das partes da figura, acabando por se esquecer de pintar uma dessas partes.

A representação de figuras levou alguns alunos a obterem respostas parcialmente corretas, pelo facto de falharem na sua divisão ou de nem sequer as representarem, como exemplifica a resposta do aluno A26 (Figura 34).

2. Completa o quadro de modo a representar as frações:

Representação numérica	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
Representações				
Desenho				
Linguagem natural	um sexto	um sétimo	um oitavo	um nono

Figura 34. Resposta parcialmente correta do aluno A26 à Questão 2 da Tarefa2

O formato utilizado nas questões da Tarefa 2 indicia que influenciou os alunos na resolução das diversas conversões. Na conversão dos diversos registos para o registo pictórico, vários alunos utilizaram o retângulo do quadro do enunciado para representar cada uma das frações unitárias. Contudo, o rigor não esteve presente no registo pictórico, o que leva os alunos a não responderem corretamente, dividindo as figuras em mais partes do que era esperado.

Em termos da conversão do registo simbólico para o registo em linguagem natural, os alunos que têm respostas parcialmente corretas ocultam o termo 'um' referente ao numerador de todas as frações unitárias apresentadas, tal como revela a resolução do aluno A6 (Figura 35).

2. Completa o quadro de modo a representar as frações:

Representação numérica	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
Representações				
Desenho				
Linguagem natural	sextos	setimos	oitos	nove

Figura 35. Resposta parcialmente correta do aluno A6 à Questão 2 da Tarefa2

Os alunos que realizam a conversão do registo pictórico para o registo em linguagem natural e ocultam o termo 'um' de todas as frações unitárias têm a percepção de que, por exemplo, na leitura da fração  $\frac{1}{6}$  se lê 'um sexto'. Como se trata de um termo comum a todas as frações unitárias, os alunos representam apenas o termo que distingue cada uma das frações.

A representação pictórica de frações unitárias, em outras respostas consideradas parcialmente corretas, apresenta-se corretamente feita, no entanto a consideração das partes de uma figura referente a uma dada fração unitária não se apresenta corretamente expressa, como se observa na resposta do aluno A1 (Figura 36).

2. Completa o quadro de modo a representar as frações:

Representação numérica	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
Representações				
Desenho				
Linguagem natural	sextos	setimos	oitos	nove

Figura 36. Resposta parcialmente correta do aluno A1 à Questão 2 da Tarefa2

O registo pictórico de frações unitárias com denominador superior a cinco torna-se difícil para os alunos deste nível de escolaridade, o que indicia ser a causa de erros que cometem. Esses erros caracterizam-se pela incorreta divisão de figuras, pela escolha errada das figuras que podem utilizar para representar as frações e, noutras situações, pela pintura de partes erradas nas figuras que representam

as frações. Na resposta parcialmente correta do aluno A1 à Questão 2 da Tarefa 2 denota-se que, à parte do rigor, o aluno representou três figuras divididas corretamente, mas apenas considerou uma parte em duas delas, acabando por representar incorretamente a fração  $\frac{1}{6}$ , por ter considerado duas partes de seis, em vez de uma parte de seis. No que se refere à fração  $\frac{1}{8}$ , o aluno não só representou incorretamente uma figura dividida em 16 partes, como também considerou quatro partes de 16 existentes na divisão da figura.

As respostas incorretas, dadas por sete alunos (29,17%), caracterizam-se pela indevida representação pictórica e pela confusão entre o registo simbólico e o registo em linguagem natural, como exemplificam as respostas dadas pelos alunos A8, A4 e A5 (Figura 37).

Figura 37. Respostas incorretas, respetivamente, dos alunos A8, A4 e A5 à Questão 2 da Tarefa2

A representação incorreta de figuras, quando se trata de frações unitárias com um denominador elevado, torna-se complexa para os alunos devido ao número significativo de partes que a figura deve possuir. Assim, a resposta incorreta do aluno A8 à Questão 2 da Tarefa 2 evidencia que não conseguiu realizar a conversão entre o registo simbólico de frações unitárias e o registo pictórico, pela dificuldade em dividir figuras em tantas partes iguais. Já o aluno A4, no que se refere ao registo pictórico, ainda tentou considerar o retângulo do quadro para dividir em partes iguais, no entanto a divisão foi incorretamente feita, tendo colocado mais partes do que era esperado.

O registo em linguagem natural, convertido do registo simbólico, levou a existir uma errada associação entre esses registos, tendo os alunos representado frações unitárias com o algoritmo da divisão, em vez de representarem em linguagem natural, levando-os a obterem respostas incorretas.

Na última questão, os alunos cometeram alguns erros na conversão das diferentes frações nos registos apresentados. Assim, 19 alunos (79,17%) responderam parcialmente correto por cometerem alguns erros, tais como: confundir o registo pictórico com o registo em linguagem natural; representar incorretamente frações; e não terem apresentado a conversão do registo em linguagem natural para o registo pictórico.

A errada conexão entre o registo pictórico e o registo em linguagem natural mostra que os alunos não compreenderam o que era pedido no enunciado, no que respeita ao registo de chegada em que o aluno deveria realizar a conversão, tal como explicita a resposta do aluno A23 (Figura 38).

3. Completa o quadro de modo a apresentar as diferentes frações:					
Linguagem natural		Um quarto	Um sétimo	Um oitavo	Um décimo
Representações					
Desenho					
Representação numérica		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$

Figura 38. Resposta parcialmente correta do aluno A23 à Questão 3 da Tarefa2

Os erros cometidos na conversão da linguagem natural para a representação pictórica prendem-se com as representações pictóricas incorretas, tanto a nível da construção de figuras geométricas como da incompleta representação das frações unitárias em figuras geométricas, tal como expressam as respostas dos alunos A21, A20, A6, A26, A1 e A17 (Figura 39).

3. Completa o quadro de modo a apresentar as diferentes frações:					
Linguagem natural		Um quarto	Um sétimo	Um oitavo	Um décimo
Representações					
Desenho					
Representação numérica		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$

Figura 39. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos alunos A21, A20, A6, A26, A1 e A17 à Questão 3 da Tarefa2

Na representação de frações no registo pictórico, os alunos acabam por cometer erros que influenciam a sua aprendizagem. Na divisão de frações com um denominador elevado, os alunos apresentam erros, mesmo utilizando figuras com apenas quatro lados, como o retângulo. No entanto, alguns alunos acabam por utilizar figuras como o triângulo e o círculo que dificultam a sua destreza na divisão de figuras com o objetivo de representar frações.

Os registos utilizados pelos alunos nesta tarefa possibilitam compreender com quais os alunos se sentem mais à vontade na aprendizagem das frações. Os registos utilizados variam consoante os tipos de resposta, embora a utilização do registo pictórico se evidencie relativamente aos outros registos (Tabela 10).

Tabela 10: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 2

Questão	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
1.	0	16	16	0	0	6	6	0	0	0	0	0
2.	0	0	0	0	0	0	15	14	0	3	0	7
3.	0	0	0	0	0	18	0	19	0	0	0	0
<b>Total</b>	<b>0</b>	<b>16</b>	<b>16</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>24</b>	<b>21</b>	<b>33</b>	<b>0</b>	<b>3</b>	<b>0</b>	<b>7</b>

Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

O registo simbólico e o registo em linguagem natural, em termos de respostas corretas, foram

utilizados de igual forma, evidenciando que não existiu mais nenhuma questão em que os alunos acertaram totalmente a conversão entre dois registos distintos.

Nas respostas parcialmente corretas, o registo pictórico elevou-se relativamente ao registo simbólico e ao registo em linguagem natural, o que sugere uma maior utilização do registo pictórico na conversão dos diferentes registos. No último tipo de resposta, as respostas incorretas, o registo que predominou foi o registo pictórico, embora o registo simbólico também seja utilizado. Assim, depreende-se que o registo pictórico se tornou, para os alunos, o registo que facilitou a conversão entre registos.

Nesta tarefa, os alunos não puderam utilizar livremente os registos de representação que lhes convinha, todavia permitiu perceber em que registos os alunos sentem mais dificuldades em trabalhar.

O registo gráfico não foi utilizado pelos alunos, pelo facto de ainda não existir, nesta fase, um contacto que lhes permita realizar a conversão entre este registo e os restantes apresentados.

Por forma a proporcionar aos alunos a conversão do registo em linguagem natural para o registo pictórico, apresentou-se a Tarefa 3.

**Tarefa 3:** A Joana tem um conjunto de tapetes quadrados de várias cores: amarelo, branco, verde e laranja. Sabe-se que a cor branca é o fundo de um tapete retangular e que este se encontra dividido em 8 quadrados iguais. Com base nestas referências, representa o tapete retangular sobreposto com os tapetes de várias cores, através das seguintes situações:

1. Metade verde e metade laranja.
2.  $\frac{1}{8}$  laranja,  $\frac{1}{8}$  verde e  $\frac{1}{8}$  amarelo.
3. Um quarto laranja.
4.  $\frac{1}{4}$  laranja,  $\frac{1}{4}$  verde e  $\frac{1}{4}$  amarelo.

Da análise das respostas dos alunos à Tarefa 3, depreende-se que a maioria conseguiu realizar a conversão dos registos apresentados (Tabela 11).

Tabela 11: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 3 ( $n = 24$ )

Questão	Tipos de resposta			
	C	PC	I	NR
1.	13	0	4	7
2.	13	0	4	7
3.	13	1	3	7
4.	12	1	4	7

Nota: C – correta; PC – parcialmente correta; I – incorreta; NR – não responde.

Na Questão 1, perante a indicação de que um tapete retangular seria sobreposto por metade de verde e metade de laranja, 13 alunos (54,17%) responderam corretamente, representando pictoricamente um retângulo com metade pintado de laranja e metade pintado de verde, como mostra a resposta do aluno A6 (Figura 40).



Figura 40. Resposta correta do aluno A6 à Questão 1 da Tarefa3

Em termos de respostas incorretas, quatro alunos (16,67%) revelam que não perceberam o que o enunciado pedia, apresentando uma representação que não se adequa ao que é pedido, como expressa a resposta do aluno A2 (Figura 41).

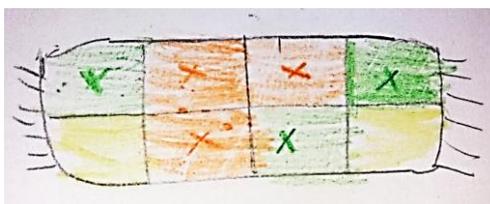


Figura 41. Resposta incorreta do aluno A2 à Questão 1 da Tarefa3

O conjunto das respostas incorretas dos alunos mostra a sua incompreensão e a dificuldade que revelam na interpretação de enunciados. Entende-se, pela análise das respostas incorretas dos alunos, que existiu uma interligação de todas as questões como se de apenas uma questão se tratasse.

Na Questão 2, 13 alunos (54,17%) representaram corretamente o que era pedido, apresentando um retângulo, dividido em 8 partes iguais, pintando  $\frac{1}{8}$  de laranja,  $\frac{1}{8}$  de verde e  $\frac{1}{8}$  de amarelo, como expressa a resposta do aluno A3 (Figura 42).

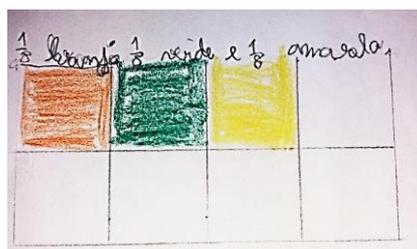


Figura 42. Resposta correta do aluno A3 à Questão 2 da Tarefa3

Na conversão do registo em linguagem natural para o registo pictórico, os alunos conseguiram representar corretamente o que era pretendido, mostrando estarem mais familiarizados com a representação de frações no registo pictórico.

As respostas incorretas, dadas por quatro alunos (16,67%), prendem-se, mais uma vez, com a representação incorreta do que era pretendido, tal como aconteceu nas restantes questões da Tarefa 3.

Na Questão 3, 13 alunos (54,17%) responderam corretamente, pintando  $\frac{1}{4}$  do retângulo de laranja, o que corresponde a dois quadrados num total de oito partes, como mostra a resposta do aluno A1 (Figura 43).

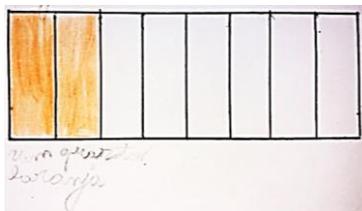


Figura 43. Resposta correta do aluno A1 à Questão 3 da Tarefa3

Relativamente às repostas parcialmente corretas, o aluno A19 representou parte do retângulo dividido em quatro partes, isto é, apresentou metade do retângulo e pintou um quadrado apenas, representando  $\frac{1}{4}$  de laranja da parte que considerou da figura (Figura 44).

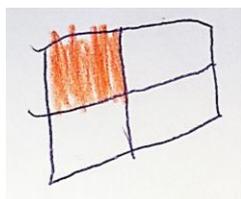


Figura 44. Resposta parcialmente correta do aluno A19 à Questão 3 da Tarefa3

Na representação pictórica de uma fração, os alunos tendem a observar o numerador e o denominador para identificar em quantas partes devem dividir uma determinada figura e quantas devem pintar. No caso da resposta parcialmente correta do aluno A19 à Questão 3 da Tarefa 3, como o enunciado se referia à fração  $\frac{1}{4}$ , o aluno representou uma figura dividida em quatro partes pintando apenas uma, não tendo em atenção que a base de todo o enunciado se referia a um tapete retangular dividido em oito quadrados iguais.

Na Questão 4, 12 alunos (50%) representaram corretamente o tapete retangular pintado com  $\frac{1}{4}$  de laranja,  $\frac{1}{4}$  de verde e  $\frac{1}{4}$  de amarelo, como expressa a resposta do aluno A15 (Figura 45).



Figura 45. Resposta correta do aluno A15 à Questão 4 da Tarefa3

Em termos de respostas parcialmente corretas, um aluno (4,17%) representou metade do tapete pintado com  $\frac{1}{4}$  de laranja,  $\frac{1}{4}$  de verde e  $\frac{1}{4}$  de amarelo (Figura 46), não sendo considerada uma resposta totalmente correta, devido à incompleta representação do tapete retangular.

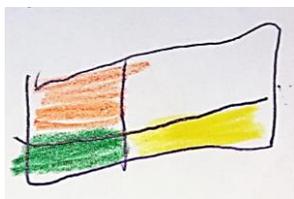


Figura 46. Resposta parcialmente correta do aluno A19 à Questão 4 da Tarefa3

Em todas as questões incorretas da Tarefa 3, evidencia-se a falta de entendimento dos alunos para o que era pretendido, ao apresentarem apenas uma representação por forma a responder a todas as questões, o que não era suposto.

Através da análise da Tarefa 3, tendo por base a utilização do registo pictórico, os alunos utilizaram outros registos, sendo possível contabilizar a utilização de cada um deles (Tabela 12).

Tabela 12: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 3

Questão	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
1.	0	0	3	13	0	0	0	0	0	2	0	4
2.	0	3	0	13	0	0	0	0	0	2	0	4
3.	0	0	3	13	0	0	0	1	0	2	0	3
4.	0	3	0	12	0	0	0	1	0	2	0	4
<b>Total</b>	<b>0</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>51</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>8</b>	<b>0</b>	<b>15</b>

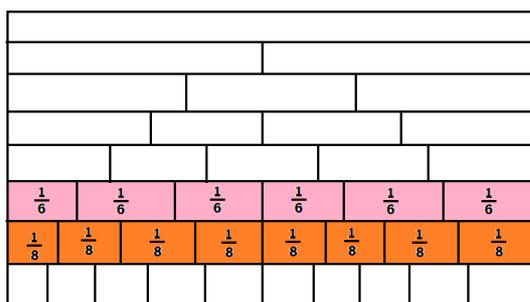
Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

Nesta tarefa, o registo pictórico foi utilizado mais vezes do que os outros registos de representação, em todos os tipos de respostas. Os alunos foram incentivados a resolver as questões utilizando o registo de representação pictórico, não havendo a possibilidade de responderem corretamente utilizando outro tipo de registo. No entanto, os alunos complementaram as suas respostas utilizando o registo simbólico e o registo em linguagem natural, não havendo possibilidade de utilizarem o registo gráfico.

### 3.1.3. Frações unitárias: parte-todo na reta numérica e em figuras

No seguimento da aprendizagem de frações unitárias, os alunos foram desafiados a resolver uma tarefa em pares, que tinha como objetivos identificar frações unitárias num segmento de reta e utilizar frações unitárias para relacionar as partes de um todo.

**Tarefa 1:** A professora da Raquel desafiou os alunos a resolverem um esquema. O esquema estava dividido em partes e a professora deu aos alunos as partes que faltavam, tendo estes que colocar no respetivo local.



1. Como se chamam os números representados nas partes cor de rosa e laranja do esquema?
2. Que números faltam em cada parte?
3. Que parte do esquema se traduz na maior quantidade?

Da análise das respostas dos alunos, constata-se que a compreensão sobre as frações unitárias ainda não estava solidificada para todos eles, pelo facto de existirem respostas incorretas na resolução da Tarefa 1 (Tabela 13).

Tabela 13: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 1 ( $n = 24$ ).

Questão	Tipos de resposta			
	C	PC	I	NR
1.	9	2	0	1
2.	1	8	3	0
3.	8	0	3	1

Nota: C – correta; PC – parcialmente correta; I – incorreta; NR – não responde.

Na Questão 1, através de um diálogo com os alunos antes da resolução das tarefas, com o pretexto de recordar o que fora abordado anteriormente, os alunos conseguiram responder corretamente, com exceção de um par de alunos, afirmando que os números representados se denominavam por frações.

Professora: O que temos falado nas outras aulas?

Aluno: Fração, metade.

Professora: Frações, a metade, muito bem. E mais? O que fizemos na última aula?

Aluno: Frações.

Professora: Frações em quê?

Aluno: Dividir.

Professora: Dividir o quê?

Aluno: Metade.

Professora: Dividir em metade, mas dividimos o quê em metades?  
 Aluno: Era um bolo.  
 Professora: O que é que nós colamos no caderno?  
 Aluno: Fios.  
 Professora: Para representar o quê?  
 Aluno: Uma meta.  
 Aluno: Um concurso.  
 Professora: Os fios representavam o quê do concurso? O que há numa corrida?  
 Alunos: O percurso.

Contudo, dois pares de alunos indicaram que os números se chamavam ‘um sexto e um oitavo’, não referindo que se tratavam de frações, sendo essas respostas classificadas como parcialmente corretas, como mostra a resposta do par P11 (Figura 47).

Figura 47: Resposta parcialmente correta do par P11 à Questão 1 da Tarefa1

Nas respostas parcialmente corretas, um dos pares utilizou o registo de representação simbólica para responder à questão e o outro par utilizou o registo em linguagem natural.

Os alunos que responderam corretamente à Questão 1 utilizaram o registo em linguagem natural e um dos pares utilizou em simultâneo com esse registo de representação o registo simbólico, como ilustram as respostas dos pares P1 e P6 (Figura 48).

Figura 48: Respostas corretas, respetivamente, dos pares P1 e P6 à Questão 1 da Tarefa1

Na Questão 2, apenas o par de alunos P1 respondeu corretamente representando simbolicamente os números que faltam em cada parte, sendo estes:  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$  e  $\frac{1}{10}$  (Figura 49).

Figura 49. Resposta correta do par P1 à Questão 2 da Tarefa1

No que respeita às respostas parcialmente corretas, oito pares de alunos representaram todas as frações que faltavam para completar o esquema, mas não indicaram o número um, como expressa a resposta do par P5 (Figura 50).

Figura 50. Resposta parcialmente correta do par P5 à Questão 2 da Tarefa1

Entre os números apresentados falta no esquema a representação de  $\frac{1}{7}$  e  $\frac{1}{9}$ , tendo alguns alunos identificado esses números para responder à Questão 2, obtendo respostas incorretas, como expressa a resposta do par P2 (Figura 51). A variedade dos registos de representação evidencia-se nas respostas parcialmente corretas, em que o registo em linguagem natural foi utilizado por seis pares de alunos, enquanto os restantes utilizaram o registo simbólico.

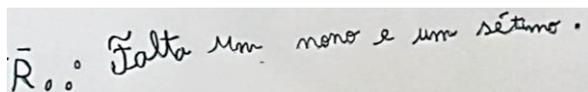


Figura 51. Resposta incorreta do par P2 à Questão 2 da Tarefa1

O esquema da Tarefa 1 incidia sobre a representação das frações unitárias em três registos: registo pictórico, registo simbólico e registo gráfico. A Questão 2 direcionava os alunos a evidenciar os números que faltavam em cada parte. No entanto, alguns alunos perceberam que teriam de indicar os números que não estavam no esquema, o que levou a obter respostas que não eram esperadas.

Na última questão, oito pares de alunos responderam corretamente indicando, através do registo simbólico ou do registo em linguagem natural, que o número um representava a maior quantidade, como ilustra a resposta do par P11 (Figura 52), enquanto que três pares de alunos indicaram que a parte representada pelo número  $\frac{1}{10}$  se traduzia na maior quantidade, como expressa a resposta do par P4 (Figura 53).



Figura 52. Resposta correta do par P11 à Questão 3 da Tarefa1

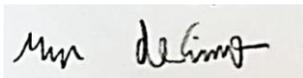


Figura 53. Resposta incorreta do par P4 à Questão 3 da Tarefa1

A identificação da parte que se traduz na maior quantidade do esquema faz com que alguns alunos evidenciem um erro comum que acontece na aprendizagem do conteúdo 'Números racionais não negativos' que se prende com a comparação de números. Os alunos têm em atenção a fração que se divide em mais partes, identificando-a como a que representa uma maior quantidade, quando na realidade é ao contrário: quando duas frações possuem o mesmo numerador, é maior a que tiver menor denominador.

A análise dos registos utilizados pelos alunos na resolução da Tarefa 1 permite constatar que o registo em linguagem natural foi utilizado por maior parte dos alunos (Tabela 14).

Tabela 14: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 1

Questão	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
1.	0	1	9	0	0	1	1	0	0	0	0	0
2.	0	1	0	0	0	2	6	0	0	1	2	0
3.	0	2	6	0	0	0	0	0	0	1	2	0
<b>Total</b>	0	4	<b>15</b>	0	0	3	<b>7</b>	0	0	2	<b>4</b>	0

Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

O registo em linguagem natural foi utilizado mais vezes, pelo facto de as questões levarem a esse feito. O registo simbólico foi utilizado menos vezes que o registo em linguagem natural. Já os registos gráficos e pictóricos não foram utilizados, devido ao tipo de perguntas que integravam a tarefa.

A tarefa apresentada, em termos de registos de representação, não exigia a utilização de nenhuma representação em específico. Os alunos utilizaram frequentemente o registo simbólico e o registo em linguagem natural. Por forma a proporcionar-lhes o contacto com o registo gráfico e a conversão entre os diferentes registos, os alunos resolveram individualmente a seguinte tarefa (Tarefa 2):

**Tarefa 2:**  
Completa o quadro:

Desenho	Linguagem natural	Reta numérica
	Um meio	
		
	Um	
		

A análise das respostas dos alunos permite verificar que a conversão entre os diferentes registos e a inclusão de números diferentes dos que tinham sido abordados nas tarefas os levou a cometer alguns erros, obtendo respostas parcialmente corretas (Tabela 15).

Tabela 15: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 2 ( $n = 24$ )

Tarefa 2	Tipos de resposta			
	C	PC	I	NR
	1	13	9	1

Nota: C – correta; PC – parcialmente correta; I – incorreta; NR – não responde.

A atribuição do tipo de resposta a cada aluno teve por base o número de conversões realizadas. Se os alunos conseguissem realizar seis ou mais conversões ser-lhes-ia atribuída uma resposta parcialmente correta. A resposta correta seria a totalidade de todas as conversões apresentadas, tendo

apenas um aluno (4,17%) conseguindo obter este tipo de resposta, embora falhe em alguns pormenores (Figura 54).

Desenho	Linguagem natural	Reta numérica
	Um meio	
	um terço	
	um oitavo	
	Um	
	dois	
	três	

Figura 54. Resposta correta do aluno A7 à Questão 1 da Tarefa2

Apesar da falha de alguns pormenores em termos de registo gráfico e pictórico, o aluno A17 conseguiu realizar todas as conversões. O contacto com o registo gráfico ainda não permitiu que, nesta fase, os alunos se sentissem à vontade em trabalhar com este tipo de registo, tendo, assim, dificultado a representação dos números apresentados.

As respostas parcialmente corretas dadas por 13 alunos (54,17%) classificam-se, assim, pelo preenchimento incorreto dos números 1, 2 e 3, pela incorreta representação gráfica e por falhas na representação pictórica, como se expressa nas respostas dos alunos A11, A15 e A26 (Figura 55).

Desenho	Linguagem natural	Reta numérica	Desenho	Linguagem natural	Reta numérica	Desenho	Linguagem natural	Reta numérica
	Um meio			Um meio			Um meio	
	Um terço			Um terço			Um terço	
	Um oitavo			Um oitavo			Um oitavo	
	Um			Um			Um	
	Um segundo			Um segundo			dois	
	Um terceiro			Um terceiro			três	

Figura 55. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos alunos A11, A15 e A26 à Questão 1 da Tarefa2

A confusão entre os números constata-se na resolução desta tarefa, pelo facto de ter sido a primeira vez que os alunos trabalharam em simultâneo com as frações  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{8}$  e com os números 1, 2 e 3, acabando por representar os números naturais sob a forma de fração.

As respostas incorretas dadas por nove alunos (37,5%) devem-se pelo facto de não terem conseguido realizar corretamente pelo menos seis conversões, resultando em erros como a representação dos números 1, 2 e 3 sob a forma de fração, como mostram as respostas dos alunos A6 e A17 (Figura 56).

Desenho	Linguagem natural	Reta numérica	Desenho	Linguagem natural	Reta numérica
	Um meio			Um meio	
	Um inteiro			Um inteiro	
	Um quinto			Um quinto	
	Um			Um	
	dois			Um inteiro	
	três			Um inteiro	

Figura 56. Respostas incorretas, respetivamente, dos alunos A6 e A17 à Questão 1 da Tarefa2

Da análise das respostas dos alunos, denota-se que o registo gráfico, o registo em linguagem natural e o registo pictórico permitiram a conversão de vários números apresentados (Tabela 16).

Tabela 16: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 2

	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
Tarefa 2	1	0	1	1	13	0	13	13	8	0	9	9
<b>Total</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>13</b>	<b>0</b>	<b>13</b>	<b>13</b>	<b>8</b>	<b>0</b>	<b>9</b>	<b>9</b>

Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

O registo gráfico levou os alunos a revelarem algumas dificuldades, tendo, por exemplo, um aluno não conseguido realizar a conversão do registo pictórico ou em linguagem natural para o registo gráfico, pela falta de contacto que existe com este tipo de registo.

Nesta tarefa, os alunos teriam de utilizar obrigatoriamente o registo pictórico, o registo em linguagem natural e o registo gráfico, de modo a completar o quadro, não havendo a liberdade de utilizar outros registos.

Como na resolução da Tarefa 2 os alunos manifestaram algumas dificuldades, exploraram a Tarefa 3, em pares, com o objetivo de relacionarem os números 1, 2 e 3 com as frações  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{7}$  e  $\frac{1}{9}$  realizando a sua conversão em diferentes registos de representação.

**Tarefa 3:** Representa as frações  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{7}$  e  $\frac{1}{9}$  e os números 1, 2 e 3 na forma de um retângulo, círculo, segmento de reta e linguagem natural.

Na realização desta tarefa, os alunos conseguiram representar os números, tendo cometido algumas lacunas. A maioria das respostas classificam-se em parcialmente corretas, havendo apenas uma resposta correta (Tabela 17).

Tabela 17: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 3 ( $n = 24$ )

Tarefa 3	Tipos de resposta			
	C	PC	I	NR
	1	8	3	0

Nota: C – correta; PC – parcialmente correta; I – incorreta; NR – não responde.

A representação das frações  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{7}$  e  $\frac{1}{9}$  e dos números 1, 2 e 3 na mesma tarefa mostra que os alunos acabam por representar todos de igual forma, tendo oito pares de alunos obtido respostas parcialmente corretas, como expressa a resposta do par P9 (Figura 57).



Figura 57. Resposta parcialmente correta do par P9 à Tarefa3

Em termos de respostas corretas, apenas um par de alunos conseguiu representar corretamente as frações  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{7}$  e  $\frac{1}{9}$  e os números 1, 2 e 3, mas falharam em pormenores, como a indicação da origem e da unidade do segmento de reta, no registo gráfico das frações, como mostra a resposta do par P1 (Figura 58).

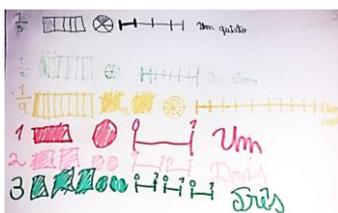


Figura 58. Resposta correta do par P1 à Tarefa3

As respostas incorretas dadas por três pares de alunos devem-se, sobretudo, à representação incorreta ou até mesmo à não representação dos números apresentados, como exemplifica a resposta do par P8 (Figura 59).

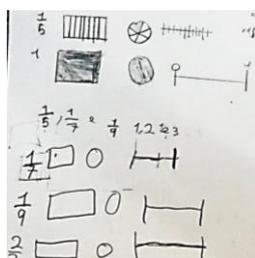


Figura 59. Resposta incorreta do par P8 à Tarefa3

As dificuldades em representar frações denotam-se quando os alunos perante uma fração simples não a conseguem representar, como é o caso da fração  $\frac{1}{5}$ . Apesar de conseguir representar, sem rigor, através do círculo, quando se depara com um retângulo, o par de alunos P8 dividiu incorretamente o mesmo. Em termos de registo gráfico, os alunos apresentaram várias dificuldades, acabando por confundir a representação gráfica das frações  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{7}$  e  $\frac{1}{9}$  e dos números 1, 2 e 3.

A utilização dos registos de representação semiótica vai sendo alargado ao longo do tempo, consoante o contacto que os alunos possuem com cada registo. Na Tarefa 3, os registos impostos acabaram por ser todos utilizados pelos alunos, ainda que alguns levem os alunos a cometer falhas ou a revelar dificuldades (Tabela 18).

Tabela 18: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 3

	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
Tarefa 3	1	1	1	1	8	8	8	8	3	3	3	3
<b>Total</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>

Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

Com esta tarefa, os alunos contactaram com os diversos tipos de registos de representação semiótica, transparecendo os erros e as dificuldades que interpelam a sua aprendizagem dos números racionais.

A conversão que os alunos realizaram, mesmo cometendo alguns erros, levou a que estes tivessem a perceção de que um mesmo ‘objeto’ matemático se pode representar através do registo gráfico, do registo simbólico, do registo em linguagem natural e do registo pictórico.

### 3.1.4. Síntese

A análise e interpretação das respostas dos alunos do 2.º ano impele a sintetizar os tipos de registos de representação semiótica que foram utilizados pelos alunos na aprendizagem das frações unitárias (Tabela 19).

Tabela 19: Frequências dos tipos de registo usados pelos alunos na aprendizagem dos números racionais não negativos

Tópico	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
Frações unitárias: Introdução	0	18	15	26	0	10	3	15	0	0	0	7
Frações unitárias: Parte-todo	0	23	22	63	0	24	26	35	0	11	1	22
Frações unitárias: Parte-todo na reta numérica e em figuras	2	5	17	2	21	11	28	21	11	5	16	12
<b>Total</b>	<b>2</b>	<b>46</b>	<b>54</b>	<b>91</b>	<b>21</b>	<b>45</b>	<b>57</b>	<b>71</b>	<b>11</b>	<b>16</b>	<b>17</b>	<b>41</b>

Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

Pela análise da informação contemplada na Tabela 19 conclui-se que o registo de representação semiótica mais utilizado foi o registo pictórico, em todos os tipos de respostas. Este tipo de registo

acompanha o processo de aprendizagem dos alunos desde o pré-escolar, o que poderá influenciar a sua utilização ao longo dos anos de escolaridade.

O registo simbólico e o registo em linguagem natural foram utilizados sobretudo para complementar as respostas dos alunos, não tendo sido, por isso, utilizados frequentemente na resolução das tarefas, tanto como o registo pictórico.

O registo gráfico apresentou-se como um registo pouco utilizado pelos alunos, transmitindo a insegurança que estes sentem na representação de frações na reta numérica. Quando os alunos utilizavam este registo apresentavam dificuldades, comprometendo a sua aprendizagem dos números racionais e, neste caso, das frações unitárias. A subdivisão da unidade e a falta de indicação da origem e da unidade levaram os alunos a ter dificuldades em representar utilizando este registo.

A utilização dos registos de representação na resolução das tarefas, por vezes era imposto pelo enunciado, mas quando os alunos não eram influenciados pelo enunciado a utilizar um tipo de registo de representação, estes utilizavam o registo pictórico, não descorando o registo simbólico nem o registo em linguagem natural, que eram esporadicamente utilizados.

Os alunos manifestaram algumas dificuldades na realização das tarefas, tais como: representação e divisão de figuras geométricas com muitos lados; conversão do registo simbólico para o registo em linguagem natural, confundindo o termo 'fração' com  $\frac{1}{2}$ ; interpretação dos enunciados das tarefas; apropriação da pintura de figuras geométricas a Números Racionais; e representação de números racionais no registo gráfico. A representação na reta numérica não foi abordada o suficiente para que os alunos conseguissem utilizá-la corretamente, havendo falhas ao longo da realização das tarefas que envolviam o registo gráfico.

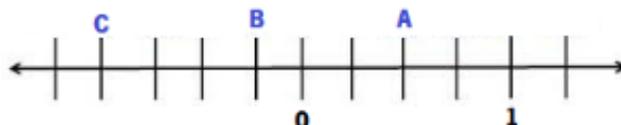
Relativamente aos erros cometidos pelos alunos na realização das tarefas, tais prendem-se com: a identificação da parte pintada numa figura geométrica dividida em partes iguais; a associação do conceito de metade a todas as frações unitárias; a ausência do traço de fração entre os números naturais que compõem a mesma; a utilização de termos do quotidiano para representar as frações em linguagem natural, como, por exemplo, a utilização de termos como 'um segundo' e 'um terceiro' para designar as frações  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{3}$ ; a confusão entre os diversos registos de representação, quando se trata de realizar uma conversão; e a incorreta representação dos números 1, 2 e 3, acabando por representar, por exemplo, no registo em linguagem natural o número 'dois' como 'um meio'.

### 3.2. Intervenção pedagógica no 2º Ciclo do Ensino Básico

#### 3.2.1. Ordenação e comparação de números racionais: frações

No estudo do conteúdo 'Números racionais' do 6.º ano de escolaridade, os alunos foram desafiados a ordenar e a comparar números racionais. A primeira tarefa que os alunos realizaram, em pares, teve como objetivo a exploração da reta numérica.

**Tarefa 1:** Na reta numérica colocaram-se as letras *A*, *B* e *C*, sabendo-se que se encontra dividida em partes iguais e que cada parte se pode traduzir por um ponto.



1. Quais são os números que correspondem aos pontos *A*, *B* e *C*?
2. Qual o maior número representado na reta numérica? E o menor?
3. Representa o ponto *A* em duas representações distintas.

Da análise das respostas dos alunos constata-se que a maior parte indicou e comparou os números representados na reta numérica pelas letras *A*, *B* e *C* (Tabela 20).

Tabela 20: Frequência dos tipos de resposta às questões da Tarefa 1 ( $n = 20$ )

Questão	Tipos de resposta			
	C	PC	I	NR
1.	5	4	1	0
2.	2	7	1	0
3.	5	3	2	0

Nota: C – correta; PC – parcialmente correta; I – incorreta; NR – não responde.

A interpretação dos números representados na reta numérica proporcionou aos alunos a oportunidade de utilizarem os diferentes registos de representação. Na Questão 1, cinco pares de alunos responderam corretamente, utilizando o registo simbólico para indicar que o número representado pelo ponto *A* se refere a 0,5, o número representado pelo ponto *B* se refere a  $-0,25$  e que o número representado pelo ponto *C* se refere a  $-1$ , como ilustra a resposta do par P3 (Figura 60).

C - -1  
B - -0,25  
A - +0,50

Figura 60. Resposta correta do par P3 à Questão 1 da Tarefa 1.

Os alunos iniciam compreender que os números se podem representar através de vários registos, efetuando o tratamento do mesmo número racional.

Professora: No ponto A, o vosso colega colocou 0.5, escreveram desta forma?  
 Alunos: Sim.  
 Professora: Ninguém escreveu de forma diferente?  
 Aluno: Ou um meio.  
 Professora: Muito bem. Ninguém pôs um meio?  
 Aluno: Professora, tanto faz um como o outro.  
 Professora: Exatamente. Tanto faz um como o outro, são a mesma coisa, certo?  
 Alunos: Sim.  
 Professora: No ponto B o vosso colega pôs  $-0.25$ , concordam?  
 Alunos: Sim.  
 Professora: E só puseram  $-0.25$ ? Não puseram mais nada?  
 Alunos: Menos um quarto.  
 Professora: Menos um quarto, muito bem. E porque é que é menos um quarto?  
 Aluno: Porque é uma parte.  
 Professora: Uma parte de quê?  
 Alunos: De quatro.  
 Professora: O que é que nós dividimos em quatro partes?  
 Aluno: A unidade.  
 Professora: Muito bem. No ponto C o vosso colega pôs  $-1$ , toda a gente concorda?  
 Alunos: Sim.

Porém, nem todos os alunos revelaram capacidade para identificar os números racionais representados na reta numérica, tal como se verifica nas respostas consideradas parcialmente corretas de quatro pares de alunos, o que se devem à representação inadequada de pelo menos um dos números ou à omissão da representação de um deles, tal como expressam as respostas dos pares P5, P6 e P1 (Figura 61).

1)  $A = 0,5$   $B = -0,25$   $C = -1$

1)  $A = 0,75$   
 $B = -0,25$   
 $C = 0,75 - 0,125$

$A = \frac{1}{2}$   $B = -0,25$   $C = .$

Figura 61. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P5, P6 e P1 à Questão 1 da Tarefa1

O par P5 traduziu corretamente os números que representam os pontos  $A$  e  $C$ , mas o mesmo já não acontece com a indicação do número representado pelo ponto  $B$ . Estes alunos atendem à localização deste ponto em relação à origem, ao traduzi-lo como um número negativo, mas não respeitaram a divisão da unidade. O mesmo acontece na resposta do par P6, que, embora identifique corretamente a abcissa do ponto  $B$ , indicia que traduzem os números representados pelos pontos  $A$  e  $C$  como se o ponto  $B$  fosse a origem da reta numérica. Já a resposta do par P1 traduz corretamente os números representados pelos pontos  $A$  e  $B$ , mas não indica qualquer número que corresponde ao ponto  $C$ .

A interpretação da informação proveniente do registo gráfico impele os alunos a identificar o significado de cada uma das partes em que a unidade é dividida. Somente um par de alunos, P4, não

foi capaz de efetuar tal interpretação para pelo menos um dos pontos considerados na reta numérica (Figura 62).

$$A = 0,25, B = -1, C = -4$$

Figura 62. Resposta incorreta do par P4 à Questão 1 da Tarefa1.

De facto, a devida interpretação da localização dos pontos no registo gráfico é, por si, um indicador que favorece a comparação dos números representados na reta numérica. Nem todos os alunos perceberam que a ordem de grandeza entre números se revela pela sua localização em relação à origem. Quanto mais à direita da origem estiver maior é o número. Apenas dois pares de alunos mostram que atenderam a este requisito na resposta à Questão 2, tal como mostra a resposta do par P7 (Figura 63).

$$2 - maior = 1; menor = -1$$

Figura 63. Resposta correta do par P7 à Questão 2 da Tarefa1.

A resposta do par P7 indicia a compreensão da ordenação e da comparação de números representados na reta numérica, atendendo à sua posição, não se restringindo somente aos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , como alguns alunos fizeram.

Professora: Qual é o maior número?

Aluno: 0.50.

Professora: E o menor?

Aluno: -1.

Professora: Toda a gente concorda?

Alunos: Não.

Professora: Então, toda a gente concorda que o maior é o 0.5 e o menor é -1?

Aluno: Não, eu acho que o maior é o 1.

Professora: Então, quem acha que o maior é o 1?

(Maior parte dos alunos levanta o dedo)

Professora: E quem acha que o 0.5 ou um meio é o menor?

(Dois alunos levantam o dedo)

Professora: Então, quais são os números que temos representados na reta numérica?

Aluno: Eu pensava que era só  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Professora: E o um não está aqui representado?

Alunos: Sim.

Professora: Então qual é o maior número?

Alunos: É o um.

Professora: E o menor?

Aluno: Menos um.

Por essa razão, prevalece o número de respostas consideradas parcialmente corretas, dadas por sete pares de alunos. Três destes pares indicaram corretamente, no registo simbólico, o maior número

representado na reta numérica, mas não identificaram o menor número ou fizeram-no incorretamente, como exemplificam as respostas dos pares P1, P3 e P9 (Figura 64).

Figura 64. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P1, P3 e P9 à Questão 2 da Tarefa1.

A resposta do par P1 apenas explicita o maior número representado na reta numérica, omitindo a indicação do menor número, enquanto as respostas dos pares P3 e P9 somente consideram a parte não negativa da reta numérica e, no caso do par P3, o menor número traduz a abcissa de um ponto que não está representado na reta numérica.

Dos restantes quatro pares, dois deles indicaram, através do registo simbólico, e os outros dois, através do registo em linguagem natural, que o menor número representado na reta numérica se refere ao ponto *C*, mas erraram na identificação do maior número, como evidenciam as respostas dos pares P6, P8, P2 e P4 (Figura 65).

Figura 65. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P6, P8, P2 e P4 à Questão 2 da Tarefa1.

A referência ao maior número revela, por parte dos alunos, a consideração dos pontos *A*, *B* e *C* menosprezando o número 1. Assim, estes quatro pares de alunos indicaram que o menor número se refere ao ponto *C*, ou no caso do par P8 a 0.50. Na resposta do par P6, considera-se correta a indicação do ponto *C* como o menor número, apesar de o relacionarem ao número  $-0.75$ .

A inadequada interpretação da reta numérica, levou o par P5 a indicar, na Questão 2, que o maior número representado na reta numérica se refere ao número 1.3 e o menor ao número  $-1.3$  (Figura 66).

Figura 66. Resposta incorreta do par P5 à Questão 2 da Tarefa1.

Na exploração da reta numérica, o par P5 indicia que considerou para o ponto *B* a abcissa 1 e, a partir deste valor, contou à sua esquerda e à sua direita três partes iguais para indicar tais números como sendo o maior e o menor dos números representados na reta numérica.

Com o objetivo de representar números através de diferentes registos, os alunos foram interpelados a representar a abcissa do ponto *A* através de diferentes representações. Cinco pares de alunos indicaram corretamente o ponto *A* em duas representações distintas: o registo gráfico, utilizado por dois pares de alunos; o registo simbólico, explicitado por três pares de alunos; o registo em linguagem

natural, efetuado por um par de alunos; e o registo pictórico por quatro pares de alunos, como expressam as respostas dos pares P1, P7, P10, P9 e P3 (Figura 67).

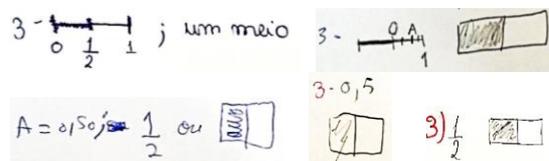


Figura 67. Respostas corretas, respetivamente, dos pares P1, P7, P10, P9 e P3 à Questão 3 da Tarefa1.

Com o intuito de representar a fração  $\frac{1}{2}$ , três pares de alunos representaram a quantidade pretendida, no entanto apresentam falhas na representação gráfica e na representação em linguagem natural, como evidenciam as respostas dos pares P8, P2 e P5 (Figura 68).

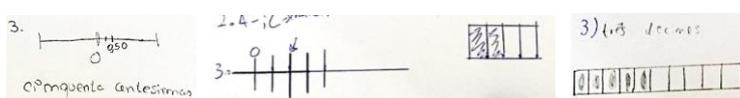


Figura 68. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P8, P2 e P5 à Questão 3 da Tarefa1.

Da análise da resposta do par P8 observa-se que apresenta corretamente a representação do ponto  $A$  no registo em linguagem natural. Mas, no que se refere ao registo gráfico, há a indicação da origem no segmento de reta, o que já não acontece com a unidade. O mesmo se verifica na resposta do par P2, que embora represente a origem não representa a unidade para se considerar correto o ponto a que corresponde a seta. Para além do registo gráfico, este par também representa o número correspondente ao ponto  $A$  no registo pictórico, dividindo a unidade em quatro partes iguais para considerar duas partes como metade da unidade. O mesmo registo é contemplado na resposta do par P5, que considera, corretamente, cinco partes de dez partes em que a unidade se encontra dividida. Contudo, a representação em linguagem natural a que este par recorre está incorreta.

De facto, torna-se importante a representação de um mesmo ‘objeto’ matemático em diversos registos, por forma a compreender que, por mais representações que se façam, o conteúdo e as particularidades mantêm-se. Na representação da fração  $\frac{1}{2}$ , dois pares de alunos registaram-na inadequadamente, através do registo pictórico, par P6, e o par P4 considerou incorretamente o número referente ao ponto  $A$ , o que condiciona as suas representações (Figura 69).

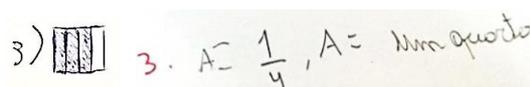


Figura 69. Respostas incorretas, respetivamente, dos pares P6 e P4 à Questão 3 da Tarefa1.

A utilização dos diferentes registos de representação torna-se indispensável na atividade matemática para a resolução de tarefas, não havendo outra forma de os alunos registarem o raciocínio. Assim, por forma a recolher informações acerca da utilização desses registos, para a resolução das

questões da Tarefa 1, constata-se que a utilização do registo simbólico predominou em relação aos outros registos (Tabela 21).

Tabela 21: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 1

Questão	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
1.	0	5	0	0	0	3	0	0	0	1	0	0
2.	0	2	0	0	0	5	2	0	0	1	0	0
3.	2	3	1	4	2	0	2	2	0	1	1	1
<b>Total</b>	<b>2</b>	<b>10</b>	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>8</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>1</b>

Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

Nesta fase escolar, os alunos já possuem um contacto frequente com o registo simbólico, facilitando a sua utilização na resolução das tarefas propostas. Quanto ao registo gráfico, foi utilizado espontaneamente pelos alunos, revelando que se sentem à vontade para o usarem, conseguindo representar os pontos essenciais na representação de um número. O registo pictórico e o registo em linguagem natural, maioritariamente utilizados na Questão 3, acompanham os alunos no seu percurso escolar, levando a que os utilizem sem apresentarem dificuldades.

Por forma a possibilitar o contacto com diferentes registos de representação, os alunos resolveram a Tarefa 2, em pares, com o objetivo de ordenarem e compararem números racionais, efetuando conversões entre os diversos registos de representação.

**Tarefa 2:**

- Representa na reta numérica as frações  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{4}{4}$  e  $\frac{5}{4}$ .
- Representa, por ordem crescente, as frações  $\frac{1}{4}$ ,  $-\frac{1}{2}$  e  $-\frac{1}{4}$ .
- Compara as frações seguintes, utilizando os símbolos  $>$  ou  $<$ .

 $\frac{1}{4}$	 $\frac{7}{8}$	$\frac{6}{12}$ Seis oitavos
Doze quintos $\frac{14}{5}$	$\frac{34}{17}$ $\frac{34}{25}$	$\frac{36}{9}$ $\frac{23}{9}$

Na resolução da Tarefa 2, os alunos revelaram sentir dificuldades na ordenação e comparação de frações na reta numérica em diversos registos (Tabela 22).

Tabela 22: Frequência dos tipos de resposta às questões da Tarefa 2 ( $n = 20$ )

Questão	Tipos de resposta			
	C	PC	I	NR
1.	2	5	3	0
2.	2	4	4	0
3.	2	7	1	0

Nota: C – correta; PC – parcialmente correta; I – incorreta; NR – não responde.

Na representação de frações na reta numérica, Questão 1, dois pares subdividiram corretamente a unidade em quatro partes iguais para localizar e ordenar no registo gráfico as que traduzem as frações  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{4}{4}$  e  $\frac{5}{4}$  (Figura 70).



Figura 70. Respostas corretas, respetivamente, dos pares P2 e P6 à Questão 1 da Tarefa2.

O mesmo já não acontece com os restantes alunos, que na sua maioria apresentam respostas parcialmente corretas, o que se devem à apresentação de erros na representação de tais frações na reta numérica, como apontam as respostas dos pares P10, P1, P7, P5 e P4 (Figura 71).

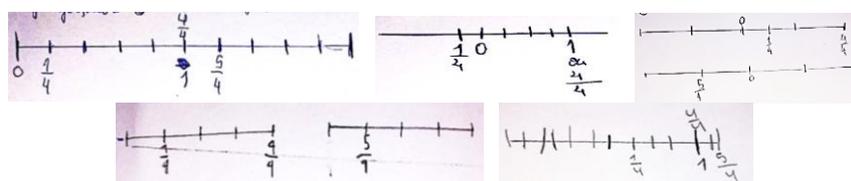


Figura 71. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P10, P1, P7, P5 e P4 à Questão 1 da Tarefa2.

Na divisão da unidade apresentada pelo par P10, em vez de dividir a unidade em quatro partes iguais divide em cinco partes, representando as frações incorretamente. O mesmo não acontece com a representação do par P1, que apresenta a unidade dividida em quatro partes iguais, identificando corretamente a fração  $\frac{4}{4}$ . No entanto, a identificação da fração  $\frac{1}{4}$  apresenta-se na parte negativa da reta numérica, estando incorretamente referenciada. Relativamente à fração  $\frac{5}{4}$ , o par P1, não a representa na reta numérica. Já os pares P7 e P5 representam dois segmentos de reta divididos em quatro partes, considerando no primeiro segmento de reta as frações  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{4}{4}$  e no segundo segmento de reta a fração  $\frac{5}{4}$ . A identificação da origem dos segmentos de reta evidencia-se na resposta do par P7, mas na representação do par P5 não se encontra representada. Em termos de representação das frações, na resposta do par P7 apresentam-se incorretamente registadas, tendo em consideração a origem indicada. Ao contrário deste, o par P5 como não representa a origem dos segmentos de reta, não se torna possível considerar correta a representação das frações, como acontece com a resposta do par P4.

A representação incorreta das frações  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{4}{4}$  e  $\frac{5}{4}$  apresentada por três pares de alunos, evidenciam falhas na divisão da unidade em partes iguais, como expressam as respostas dos pares P8, P9 e P3 (Figura 72).

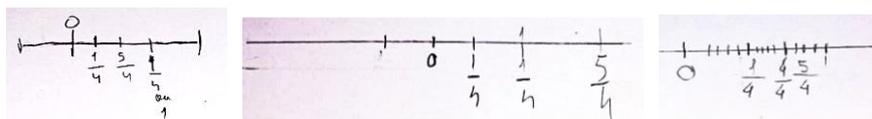


Figura 72. Respostas incorretas, respetivamente, dos pares P8, P9 e P3 à Questão 1 da Tarefa2.

O segmento de reta apresentado pelo par P8 incorpora as frações incorretamente representadas, tendo os alunos considerado a fração  $\frac{5}{4}$  inferior a  $\frac{4}{4}$ , para além da divisão incorreta da unidade. No mesmo seguimento, o par P9 e o par P3 apresentam a unidade dividida incorretamente, tendo como consequência a representação incorreta das frações.

Após a representação das frações na reta numérica, os alunos resolveram a Questão 2, com o objetivo de comparar e ordenar frações, tendo dois pares de alunos ordenado corretamente, através do registo simbólico, as frações  $\frac{1}{4}$ ,  $-\frac{1}{2}$  e  $-\frac{1}{4}$ , como expressam as respostas dos pares P2 e P5 (Figura 73).

$$2) -\frac{1}{2} > -\frac{1}{4} > \frac{1}{4} \quad 2) -\frac{1}{2} < -\frac{1}{4} < \frac{1}{4}$$

Figura 73. Respostas corretas, respetivamente, dos pares P2 e P5 à Questão 2 da Tarefa2.

A ordenação de frações faz emergir dificuldades nos alunos o que dificulta a compreensão dos números racionais. Por exemplo, as respostas apresentadas por quatro pares de alunos, consideradas parcialmente corretas, apresentam a fração  $-\frac{1}{2}$  maior do que a fração  $-\frac{1}{4}$ , o que indicia dever-se à comparação dos seus valores absolutos. Contudo, os mesmos alunos indicam que a fração  $\frac{1}{4}$  é maior do que as anteriores, como aponta a resposta do par P9 (Figura 74).

$$2) -\frac{1}{4} < -\frac{1}{2} < \frac{1}{4}$$

Figura 74. Resposta parcialmente correta do par P9 à Questão 2 da Tarefa2.

Para além das respostas apresentadas, quatro pares de alunos responderam incorretamente. Num dos pares, a representação apresentada encontra-se por ordem decrescente. Nos restantes três pares, surgem frações não indicadas no enunciado da tarefa, como mostram as respostas dos alunos P6, P8 e P4 (Figura 75).

$$\frac{1}{4} > -\frac{1}{4} > -\frac{1}{2} \quad 2) -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \quad 2) -\frac{1}{4} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

Figura 75. Respostas incorretas, respetivamente, dos pares P6, P8 e P4 à Questão 2 da Tarefa2.

Com o intuito de relacionar a comparação de frações e os diferentes registos de representação, os alunos resolveram a Questão 3. No caso de os alunos compararem corretamente pelo menos 3 pares de frações, indicando qual a maior e a menor, as respostas são consideradas parcialmente corretas,

caso contrário são classificadas como incorretas. Neste seguimento, dois pares de alunos compararam corretamente as frações apresentadas, como revela a resposta do par P5 (Figura 76).

$$3 - \begin{matrix} > & & < & & < \\ < & & > & & > \end{matrix}$$

Figura 76. Resposta correta do par P5 à Questão 3 da Tarefa2.

A comparação de frações com o mesmo numerador e diferente denominador, ou vice-versa, traduz-se, para alguns alunos, numa dificuldade na aprendizagem dos números racionais, o que se evidencia nas respostas consideradas parcialmente corretas e incorretas. No caso das respostas parcialmente corretas, seis pares de alunos apresentaram mais de três comparações de frações corretas, como explicitam as respostas dos pares P2, P3 e P1 (Figura 77).

The image shows three pieces of student work. The first piece (P2) shows the fractions  $\frac{12}{5}$  and  $\frac{6}{12}$  with a note '12 = dez e quatro' and a conversion  $\frac{6}{12} = \frac{3}{4}$ . The second piece (P3) shows  $\frac{14}{5}$  and  $\frac{36}{9}$  with a pictorial representation of a bar divided into 5 parts, 3 of which are shaded. The third piece (P1) shows  $\frac{34}{17}$  and  $\frac{34}{25}$  with a pictorial representation of a bar divided into 17 parts, 14 of which are shaded, and a note 'Seis partes'.

Figura 77. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P2, P3 e P1 à Questão 3 da Tarefa2.

A resposta do par P2 evidencia o tratamento e a conversão de frações que os alunos realizaram para compararem as frações apresentadas. Este par de alunos apresenta cinco comparações realizadas corretamente, falhando na comparação entre a fração  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{4}$ . A representação da fração  $\frac{1}{2}$  apresenta-se na tarefa sob o registo pictórico, podendo ter influenciado a resposta dos alunos pelo facto da unidade estar dividida em seis partes.

A comparação errada das frações  $\frac{6}{8}$  e  $\frac{7}{8}$  efetuada pelos pares P3 e P1 indicia que o registo pictórico terá levado os alunos a responderem incorretamente ou o facto de as frações terem numeradores diferentes mas denominadores iguais. O mesmo acontece com a comparação errada das frações  $\frac{12}{5}$  e  $\frac{14}{5}$  apresentadas pelo par P3, e com as frações  $\frac{36}{9}$  e  $\frac{23}{9}$  apresentadas pelo par P1, existindo uma errada compreensão de cada uma das frações apresentadas. Ao contrário desta comparação, as frações  $\frac{34}{17}$  e  $\frac{34}{25}$  e as frações  $\frac{6}{12}$  e  $\frac{6}{8}$  apresentam numeradores iguais mas denominadores diferentes, o que levou, respetivamente, o par P3 e o par P1, a considerar que a fração que tem maior denominador se refere a uma maior quantidade. Assim, o par P3 erra nesta comparação, não tendo em atenção que quanto maior for a divisão da unidade, menor será a quantidade de cada parte.

Como a comparação de frações alega a incompreensão dos alunos, o par P9 expressou as dificuldades que possuem, tendo realizado apenas uma comparação correta no que respeita às frações  $\frac{34}{17}$  e  $\frac{34}{25}$  (Figura 78).

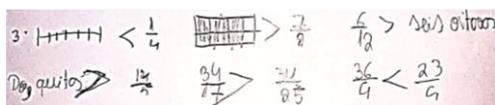


Figura 78. Resposta incorreta do par P9 à Questão 3 da Tarefa2.

A representação de frações em diversos registos pode ter influenciado a comparação das mesmas, levando os alunos a confundirem as que representam uma maior quantidade ou uma menor quantidade. No entanto, para além da representação de frações nos diferentes registos, não se descarta a possibilidade de os alunos não compreenderem quando uma fração é maior ou menor que outra.

Da análise da utilização dos registos de representação conclui-se que o registo gráfico foi, na maioria das vezes, mais utilizado pelos alunos para dar resposta às questões integrantes da Tarefa 2 (Tabela 23).

Tabela 23: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 2

Questão	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
1.	2	0	0	0	5	0	0	0	3	0	0	0
2.	0	2	0	0	0	4	0	0	0	4	0	0
3.	2	2	2	2	7	7	7	7	1	1	1	1
<b>Total</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>12</b>	<b>11</b>	<b>7</b>	<b>7</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>1</b>	<b>1</b>

Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

A utilização dos registos para dar resposta às questões tende a ser influenciada pelos registos contemplados no enunciado, de tal modo que a utilização do registo gráfico e simbólico predominam nos diversos tipos de respostas. Nas respostas corretas, o registo gráfico e o registo simbólico foram os registos mais utilizados, enquanto nas respostas parcialmente corretas predominou o registo gráfico. O registo simbólico foi o mais utilizado nas respostas incorretas, sendo mais utilizado sobretudo nas respostas à Questão 2.

Por forma a enquadrar a comparação de frações em situações do quotidiano, os alunos resolveram a Tarefa 3, em pares, com o objetivo de comparar frações, apresentando a resposta em diferentes registos.

**Tarefa 3:** Numa mesa, onde estavam sentadas cinco pessoas, havia sete pães.  
 Noutra mesa, onde estavam sentadas quatro pessoas, havia cinco pães.  
 Em que mesa há mais pão para cada pessoa?  
**(Sugestão:** Na tua resposta considera mais do que uma representação)

A análise das respostas à Tarefa 3 evidencia que os alunos sentiram dificuldades em representar a informação contida no enunciado, o que se reflete na ausência de respostas corretas a esta tarefa (Tabela 24).

Tabela 24: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 3 ( $n = 20$ )

Tarefa 3	Tipos de resposta			
	C	PC	I	NR
	0	5	4	1

Nota: C – correta; PC – parcialmente correta; I – incorreta; NR – não responde.

As respostas parcialmente corretas, dadas por cinco pares de alunos, prendem-se com a ausência de resposta à questão proposta, a incorreta representação das frações que representam a quantidade de pão para cada pessoa e a falta de justificação para a resposta apresentada, como expressam as respostas dos pares P3, P7 e P9 (Figura 79).

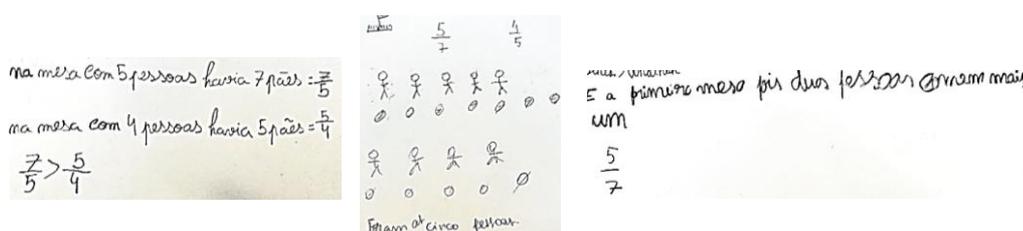


Figura 79. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P3, P7 e P9 à Tarefa3.

A resposta do par P3 explicita a comparação entre as frações que correspondem à quantidade de pão que há em cada mesa para cada pessoa, indicando que a fração  $\frac{7}{5}$  é maior do que a fração  $\frac{5}{4}$ , mas não traduz essa comparação na verbalização da resposta final à questão formulada.

A resposta do par P7 evidencia um esquema pictórico com a divisão do pão pelas pessoas, no entanto na representação através do registo simbólico da quantidade de pão que cada pessoa comerá os alunos trocam os numeradores pelos denominadores, não apresentando corretamente as frações pretendidas.

Em oposição às respostas dos pares P3 e P7, o par P9 não apresenta o raciocínio que justifica a sua resposta final. Para além disso, a representação da fração que corresponde à divisão do pão pelas pessoas da mesa, que os alunos indicam ser onde se come mais, encontra-se registada incorretamente, pelo facto de trocarem o numerador com o denominador.

A representação incorreta das frações que representa a distribuição de pão por cada mesa e a indicação de que a mesa com quatro pessoas possui mais pão para cada pessoa, levou quatro pares de alunos a responderem inadequadamente, como mostram as respostas dos pares P2, P10 e P8 (Figura 80).

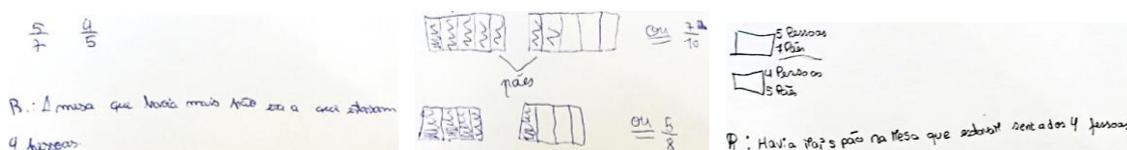


Figura 80. Respostas incorretas, respetivamente, dos pares P2, P10 e P8 à Tarefa3.

A conversão do registo em linguagem natural para o registo simbólico levou o par P2 a referir inadequadamente que a mesa com mais pão para cada pessoa era a de quatro pessoas. Na comparação das frações  $\frac{5}{7}$  e  $\frac{4}{5}$  constata-se que a segunda fração se refere a uma maior quantidade, o que levou os alunos a responderem incorretamente. O mesmo acontece com a resposta do par P10, que apresenta pictoricamente a distribuição dos pães em cada mesa e a fração que corresponde a essa distribuição, não tendo em atenção de que a unidade se mantém, acabando por considerar todas as partes das duas unidades apresentadas. Por outro lado, ao não apresentarem uma resposta final, não é perceptível perceber em qual das mesas consideram que as pessoas comem mais pão. Contrariamente a estas respostas, o par P8 transcreve a informação do enunciado, acabando por responder incorretamente sem apresentar uma justificação para a conclusão a que chega.

A importância da utilização dos diferentes registos de representação para a resolução de tarefas matemáticas é evidente nas respostas dos alunos. Assim, da análise da utilização dos registos dos alunos na resolução da Tarefa 3 conclui-se que o registo simbólico e o registo em linguagem natural foram os mais utilizados (Tabela 25).

Tabela 25: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 3.

	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
Tarefa 3	0	0	0	0	0	3	3	1	0	3	3	1
Total	0	0	0	0	0	<b>3</b>	<b>3</b>	1	0	<b>3</b>	<b>3</b>	1

Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

O registo simbólico possibilitou aos alunos a representação da distribuição de pão em cada mesa, para conseguirem comparar em qual das mesas as pessoas iriam comer mais pão. Já o registo em linguagem natural e o registo pictórico serviram como um complemento para dar resposta à Tarefa 3, enquanto o registo gráfico não foi utilizado pelos alunos.

### 3.2.2. Adição de números racionais: com o mesmo sinal

Na continuidade do estudo do tópico ‘Números racionais’, os alunos foram desafiados a resolver a Tarefa 1, em pares, com o objetivo de explorar a adição de números racionais com o mesmo sinal (Tarefa 1).

**Tarefa 1:** O Ricardo estava de férias num local onde a temperatura variava. No primeiro dia de férias, o termómetro marcava  $2^{\circ}\text{C}$  às 9h da manhã e até à hora de almoço aumentou  $3^{\circ}\text{C}$ . No quinto dia de férias, o termómetro marcava  $-3^{\circ}\text{C}$  às 7h da manhã e diminuiu dois graus até às 10h da manhã.

1. Que temperatura atingiu o termómetro, no primeiro dia de férias do Ricardo, na hora de almoço? Mostra como chegaste à tua resposta.
2. Que temperatura atingiu o termómetro, no quinto dia de férias, às 10h da manhã? Mostra como chegaste à tua resposta.

Da análise das respostas dos alunos, constata-se que na adição de números racionais com o mesmo sinal os alunos revelam melhor desempenho perante números positivos do que perante números negativos (Tabela 26).

Tabela 26: Frequência dos tipos de resposta às questões da Tarefa 1 ( $n = 20$ )

Questão	Tipos de resposta			
	C	PC	I	NR
1.	10	0	0	0
2.	3	1	6	0

Nota: C – correta; PC – parcialmente correta; I – incorreta; NR – não responde.

A adição de números racionais positivos é uma extensão do que os alunos aprenderam anteriormente com a adição de números naturais. Assim, na Questão 1, 10 pares de alunos responderam corretamente, efetuando a conversão entre o registo em linguagem natural e o registo simbólico, utilizando a operação da adição para responder à temperatura atingida no primeiro dia de férias, como expressa a resposta do par P5 (Figura 81).

$$1) 3^{\circ}\text{C} + 2^{\circ}\text{C} = 5^{\circ}\text{C}$$

O termómetro marcava  $5^{\circ}\text{C}$

Figura 81. Resposta correta do par P5 à Questão 1 da Tarefa 1.

Na adição de números racionais negativos, Questão 2, três pares de alunos responderam corretamente, através do registo simbólico, apresentando a expressão que representa a diminuição da temperatura no quinto dia de férias, como ilustra a resposta do par P8 que não atende ao rigor de escrita de expressões numéricas (Figura 82).

$$-3^{\circ}\text{C} + -2^{\circ}\text{C} = -5^{\circ}\text{C}$$

R: Atingiu  $-5^{\circ}\text{C}$

Figura 82. Resposta correta do par P8 à Questão 2 da Tarefa 1.

A indicação de que no quinto dia de férias a temperatura às 7h da manhã marcava  $-3^{\circ}\text{C}$  e que diminuiu dois graus levou os alunos a traduzirem simbolicamente a expressão que representa essa diminuição através da utilização da operação da subtração (Figura 83).

Figura 83. Resposta parcialmente correta do par P2 à Questão 2 da Tarefa 1.

Apesar de o par P2 indicar uma subtração entre números negativos, acaba por obter a soma esperada através da adição desses números, razão pela qual a resposta foi considerada parcialmente correta. A conversão da subtração numa adição, transformando o subtrativo para o seu simétrico, ainda não era do conhecimento dos alunos.

Ainda no mesmo contexto, alguns alunos consideraram que o termómetro desceu de  $3^{\circ}\text{C}$  para  $2^{\circ}\text{C}$  (P10), ou de  $3^{\circ}\text{C}$  para  $1^{\circ}\text{C}$  (P1), ou que atingiu a temperatura de  $-1^{\circ}\text{C}$  (P9) ou que diminuiu de  $-3^{\circ}\text{C}$  para  $-2^{\circ}\text{C}$  (P4), respostas essas que são consideradas incorretas à Questão 2 (Figura 84).

Figura 84. Respostas incorretas, respetivamente, dos pares P10, P1, P9 e P4 à Questão 2 da Tarefa 1.

A consideração da temperatura inicial como  $3^{\circ}\text{C}$  influenciou a resposta dos alunos, levando a uma conclusão errada da temperatura que o termómetro atingiu. A maioria dos alunos que respondeu incorretamente apresenta a informação do enunciado transcrita sob a forma de uma subtração, pelo facto de evidenciar uma diminuição da temperatura, não considerando que se diminuiu dois graus a partir de  $-3^{\circ}\text{C}$  fica ainda mais frio e, conseqüentemente, a temperatura atinge um valor negativo superior a  $-3^{\circ}\text{C}$ , o que resulta da adição de números inteiros negativos.

Como as respostas dos alunos evidenciam a utilização de diferentes registos de representação, procurei averiguar a frequência com que cada registo é utilizado. Da análise das respostas dos alunos constata-se que o registo simbólico prevaleceu nas respostas às questões da Tarefa 1 (Tabela 27).

Tabela 27: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 1

Questão	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
1.	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.	0	3	0	0	0	1	0	0	0	6	0	0
<b>Total</b>	0	<b>13</b>	0	0	0	<b>1</b>	0	0	0	<b>6</b>	0	0

Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

Esta tarefa levava os alunos a utilizar este tipo de registo, pelo facto de ser necessário realizar

cálculos para chegar à temperatura final atingida pelo termómetro nos dois dias. Contudo, a utilização do registo gráfico poderia ter facilitado a resposta à Questão 2, ao proporcionar aos alunos a visualização da descida da temperatura quando se tratam de números negativos.

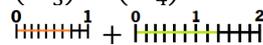
Com o intuito de possibilitar a conversão entre os diferentes registos de representação na adição de números racionais com o mesmo sinal, os alunos resolveram em pares a Tarefa 2.

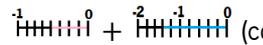
**Tarefa 2:**

1. Calcula:

1.1.  $(-12) + (-8)$

1.2.  $(+\frac{1}{3}) + (+\frac{1}{4})$

1.3.  (considera a parte colorida em relação ao todo).

1.4.  (considera a parte colorida em relação ao todo).

1.5. A soma de menos dez com menos três.

1.6.  $(-\text{cubo}) + (-\text{cubo})$

2. Completa o quadro com as diferentes representações e os respetivos resultados.

Representação numérica	Representação pictórica	Linguagem natural
$(+\frac{9}{12}) + (+\frac{10}{12}) = \underline{\quad}$		
		A soma de mais um quarto com mais dois sextos é igual a _____.
	$(-\text{cubo}) + (-\text{cubo}) =$	
	 =	

As respostas dos alunos evidenciam que a maior parte não teve dificuldades na adição de números racionais com o mesmo sinal apresentados na Questão 1. O mesmo já não se verifica na Questão 2 com a adição das frações com que se deparam (Tabela 28).

Tabela 28: Frequência dos tipos de resposta às questões da Tarefa 2 ( $n = 20$ )

Questão	Tipos de resposta			
	C	PC	I	NR
1.1.	10	0	0	0
1.2.	9	0	1	0
1.3.	7	0	0	3
1.4.	1	2	5	2
1.5.	6	0	1	3
1.6.	2	5	1	2
2.	0	8	0	2

Nota: C – correta; PC – parcialmente correta; I – incorreta; NR – não responde.

A adição de dois números inteiros negativos, representados através do registo simbólico, na Questão 1.1, traduziu-se numa resposta correta de 10 pares de alunos, como evidencia a resposta do par P6 (Figura 85).

$$(-12) + (-8) = -20$$

Figura 85. Resposta correta do par P6 à Questão 1.1 da Tarefa2.

Na procura de diversificar situações que contemplem a adição de números racionais com o mesmo sinal, os alunos adicionaram frações com diferentes denominadores apresentadas num registo simbólico, Questão 1.2. Nove pares de alunos obtiveram a soma correta, como expressa a resposta do par P2 (Figura 86).

$$\left(+\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

Figura 86. Resposta correta do par P2 à Questão 1.2 da Tarefa2.

Na aprendizagem dos números racionais nem todos os alunos se sentem à vontade para trabalhar com estes números, como ilustra a resposta incorreta do par P9, que resulta da adição dos numeradores e dos denominadores (Figura 87).

$$\left(+\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{24}$$

Figura 87. Resposta incorreta do par P9 à Questão 1.2 da Tarefa2.

Na adição de frações representadas através do registo gráfico, na Questão 1.3, sete pares de alunos responderam corretamente, realizando a conversão entre o registo gráfico e o registo simbólico, efetuando a adição entre as frações representadas, como patenteia a resposta do par P6 (Figura 88).

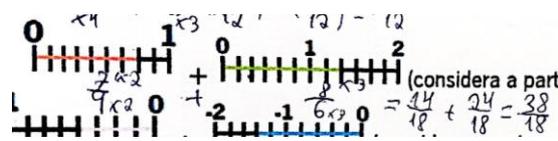


Figura 88. Resposta correta do par P6 à Questão 1.3 da Tarefa2.

Na continuidade da adição de frações negativas, na Questão 1.4, um par de alunos apresentou corretamente a conversão entre o registo gráfico e o registo pictórico e a adição das duas frações representadas no registo gráfico, apesar de, por vezes, não evidenciar o sinal negativo. No resultado final apresenta corretamente a fração resultante da adição (Figura 89).

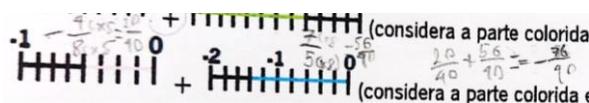


Figura 89. Resposta correta do par P5 à Questão 1.4 da Tarefa2.

No seguimento da adição de duas frações negativas, dois pares de alunos apresentaram a adição das frações corretamente, no entanto trocaram os sinais das mesmas, obtendo respostas parcialmente corretas, como expressa a resposta do par P1 (Figura 90).

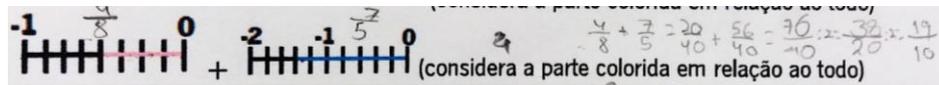


Figura 90. Resposta parcialmente correta do par P1 à Questão 1.4 da Tarefa2.

A conversão do registo gráfico para o registo simbólico indicia ter influenciado as respostas dos alunos, pela inadequada consideração da divisão da unidade, ou seja, quatro pares de alunos que responderam incorretamente consideram a fração  $-\frac{7}{10}$  em vez de  $-\frac{7}{5}$ . O mesmo acontece com a resposta de outro par que respondeu incorretamente, que apresentou a contabilização das quantidades coloridas em vez das frações representadas, como mostram as respostas dos pares P9 e P7 (Figura 91).

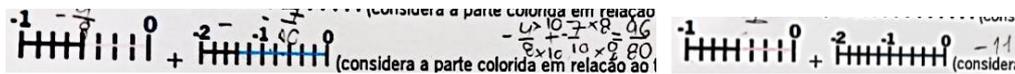


Figura 91. Respostas incorretas, respetivamente, dos pares P9 e P7 à Questão 1.4 da Tarefa2.

Diversificando os diferentes registos de representação, a Questão 1.5 integra a adição de números racionais através da utilização do registo em linguagem natural. A maioria dos alunos converteu a adição representada através do registo em linguagem natural para o registo simbólico, tendo seis pares de alunos respondido corretamente, como explicita a resposta do par P3 (Figura 92).

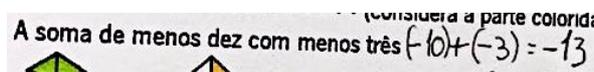


Figura 92. Resposta correta do par P3 à Questão 1.5 da Tarefa2.

A falta de conversão levou o par P8 a responder incorretamente, evidenciando uma errada compreensão dos números referidos no enunciado (Figura 93).

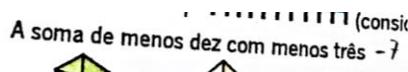


Figura 93. Resposta incorreta do par P8 à Questão 1.5 da Tarefa2.

Se a soma representada através do registo em linguagem natural fosse  $-10$  com  $3$ , o resultado apresentado pelo par P8 estaria correto. Depreende-se que os alunos interpretaram o enunciado desta forma, levando a referir aquele resultado. Se os alunos tivessem convertido o enunciado, teria ajudado a compreender e a ter mais atenção ao que o enunciado referia.

O registo pictórico apresentado na Questão 1.6 esgotou as possibilidades de contacto dos alunos com os diferentes registos. Assim, a adição registada pictoricamente levou dois pares de alunos a

apresentarem corretamente a conversão do registo pictórico para o registo simbólico e a adição das frações representadas, como ilustra a resposta do par P7 (Figura 94).

Figura 94. Resposta correta do par P7 à Questão 1.6 da Tarefa2.

Semelhante à situação anterior, cinco pares de alunos converteram a adição no registo pictórico para o simbólico apresentando a adição de duas frações com sinais contrários, o que os levou a obter o valor absoluto da soma correta. Tais respostas são consideradas parcialmente corretas, como ilustra a do par P2 (Figura 95).

Figura 95. Resposta parcialmente correta do par P2 à Questão 1.6 da Tarefa2.

Tendo por base a conversão entre o registo pictórico e o registo simbólico, o par P3 apresentou incorretamente a conversão da primeira fração, trocando o numerador pelo denominador, acabando por responder incorretamente (Figura 96).

Figura 96. Resposta incorreta do par P3 à Questão 1.6 da Tarefa2.

A consolidação da aprendizagem da adição de números racionais fundamenta as tarefas direcionadas aos alunos. Nesse sentido, aliado aos diferentes registos de representação e, conseqüentemente, à sua conversão, os alunos resolveram a Questão 2. Oito pares de alunos evidenciaram erros como a falta de consideração dos números negativos, a representação simbólica errada de frações e a falta de realização de conversões, obtendo respostas parcialmente corretas, como expressam as respostas dos pares, P3 e P5 (Figura 97).

Representação numérica	Representação pictórica	Linguagem natural	Representação numérica	Representação pictórica	Linguagem natural
$(+\frac{9}{12}) + (+\frac{10}{12}) = \frac{19}{12}$		A soma de mais um quarto com mais dois sextos é igual a mais um quarto e mais dois sextos.	$(+\frac{9}{12}) + (+\frac{10}{12}) = \frac{19}{12}$		A soma de mais um quarto com mais dois sextos é igual a mais um quarto e mais dois sextos.
$\frac{1}{3} + \frac{2}{6} = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$		A soma de mais um quarto com mais dois sextos é igual a mais um quarto e mais dois sextos.	$(+\frac{9}{12}) + (+\frac{10}{12}) = \frac{19}{12}$		A soma de mais um quarto com mais dois sextos é igual a mais um quarto e mais dois sextos.
$(-\frac{3}{6}) + (-\frac{2}{6}) = (-\frac{3}{6}) + (-\frac{2}{6}) = -\frac{5}{6}$		A soma de mais um quarto com mais dois sextos é igual a mais um quarto e mais dois sextos.	$(-\frac{3}{6}) + (-\frac{2}{6}) = -\frac{5}{6}$		A soma de mais um quarto com mais dois sextos é igual a mais um quarto e mais dois sextos.
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$		A soma de mais um quarto com mais dois sextos é igual a mais um quarto e mais dois sextos.	$(-\frac{3}{6}) + (-\frac{2}{6}) = -\frac{5}{6}$		A soma de mais um quarto com mais dois sextos é igual a mais um quarto e mais dois sextos.

Figura 97. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P3 e P5 à Questão 2 da Tarefa2.

Os erros mais comuns expressos nas respostas parcialmente corretas prendem-se com a falta de consideração dos números negativos, resolvendo a adição dos números como sendo números positivos. No registo pictórico, os alunos apresentam os resultados através do registo simbólico, no caso do par P3, por exemplo, ou apresentam falhas ao apresentarem as adições através desse registo.

Em termos das conversões para o registo em linguagem natural, os alunos fazem-no, na sua maioria, de uma forma correta, embora alguns deles omitam o sinal ‘menos’ que caracteriza a posição dos números negativos na reta numérica.

Como em todas as questões da Tarefa 2 os registos de representação são usados, importa analisar a utilização de cada um. Assim, a utilização do registo simbólico evidencia-se em relação aos outros registos de representação (Tabela 29).

Tabela 29: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 2

Questão	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
1.1.	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.2.	0	9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1.3.	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.4.	0	1	0	0	0	2	0	0	0	5	0	0
1.5.	0	6	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1.6.	0	2	0	0	0	5	0	0	0	1	0	0
2.	0	0	0	0	2	8	8	8	0	0	0	0
<b>Total</b>	0	<b>35</b>	0	0	2	<b>15</b>	8	8	0	<b>8</b>	0	0

Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

A utilização do registo simbólico realçou-se em relação à utilização dos registos pictórico, gráfico e em linguagem natural, não tendo sido imposto a utilização deste tipo de registo pelo enunciado da Tarefa 2.

Os registos gráfico, pictórico e em linguagem natural apenas foram utilizados na Questão 2, na conversão das adições de números racionais nos diversos registos. Contudo, nas restantes questões poderiam ter sido utilizados, mas os alunos realizaram a conversão de todos os registos para o registo simbólico, utilizando esse para dar resposta às adições apresentadas.

Como a adição de números racionais ainda não se encontrava totalmente compreendida, os alunos resolveram a Tarefa 3, em pares, com a finalidade de sistematizarem as regras operatórias desta operação entre números racionais através dos diferentes registos de representação.

**Tarefa 3:** O João estava a lançar dois dados, fazendo a adição dos dois números que obteve. Num dado, o João obteve o número  $+\frac{1}{3}$ , e no outro dado o número dois quintos. Que resultado obteve o João?

**Sugestão:** Apresenta a tua resolução em três representações distintas.

A adição dos números referidos no enunciado da Tarefa 3 foi corretamente resolvida por maior parte dos alunos, no entanto, no que se refere à utilização de diversos registos de representação nem todos os pares de alunos apresentaram a sua resolução utilizando três registos de representação

distintos, o que se traduziu em respostas parcialmente corretas (Tabela 30).

Tabela 30: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 3 ( $n = 20$ )

Tarefa 3	Tipos de resposta			
	C	PC	I	NR
	2	5	2	1

Nota: C – correta; PC – parcialmente correta; I – incorreta; NR – não responde.

A realização correta da adição das frações  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{5}$  em três registos de representação distintos é apresentada por dois pares de alunos. Os três registos de representação utilizados são o registo simbólico, o registo pictórico e o registo gráfico, tal como expressa a resposta do par P7 (Figura 98).

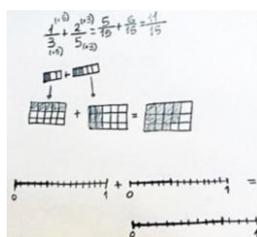


Figura 98. Resposta correta do par P7 à Tarefa3.

Paralelamente às respostas anteriores, cinco pares de alunos apresentaram a representação simbólica corretamente registada, três pares de alunos apenas apresentaram a resolução no registo simbólico, um outro par de alunos utilizou apenas o registo simbólico e o registo pictórico, como mostram as respostas dos pares P5 e P9 (Figura 99).

$$\frac{1(x5)}{3(x5)} + \frac{2(x3)}{5(x3)} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15} + \frac{1 \times 5}{3 \times 5} + \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{11}{15}$$

Figura 99. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P5 e P9 à Tarefa3.

A utilização dos registos simbólico, pictórico e gráfico pelo par P6 faz salientar o erro cometido na representação da adição no registo gráfico, quando este par considera cada parte da unidade como um número natural, e no registo pictórico, quando considera, no resultado final, um número de partes inadequadas (Figura 100).

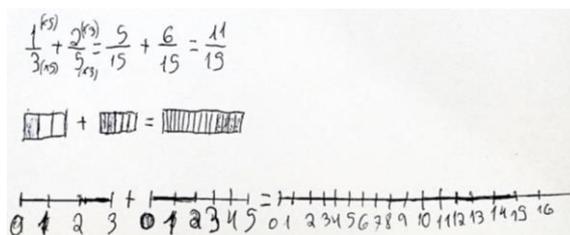


Figura 100. Resposta parcialmente correta do par P6 à Tarefa3.

Na representação através do registo pictórico, no resultado final, os alunos em vez de colorirem 11 partes das 15 em que a unidade se encontrava dividida, coloriram quatro partes que restavam, não representando corretamente a fração  $\frac{11}{15}$ . Na representação através do registo gráfico, os alunos representaram as unidades, em vez de considerarem segmentos que dividem em partes iguais a unidade.

Contrariamente às respostas anteriores, dois pares de alunos apresentaram incorretamente a adição das frações nos diferentes registos, como mostram as respostas dos pares P1 e P3 (Figura 101).

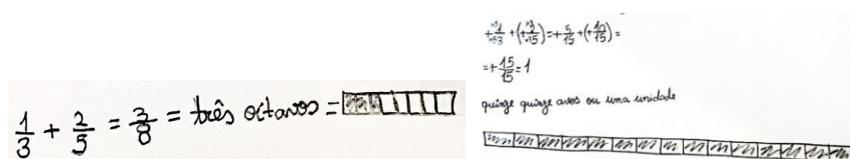


Figura 101. Respostas incorretas, respetivamente, dos pares P1 e P3 à Tarefa3.

A adição de frações revela-se uma dificuldade para alguns alunos, tendo o par P1 adicionado os numeradores e os respetivos denominadores, sem reduzir as frações ao mesmo denominador, obtendo assim um resultado incorreto.

Outro erro cometido na adição de frações na Tarefa 3 surgiu na resposta do par P3, que se caracteriza pela incorreta consideração da fração referida no enunciado, ou seja, os alunos em vez de considerarem a fração  $\frac{2}{5}$  descrita no enunciado consideraram a fração  $\frac{3}{5}$ , resultando na incorreta resolução e representação nos diferentes registos de representação.

Como a utilização dos diferentes registos foi imposta pelo enunciado, torna-se pertinente analisar as respostas dos alunos para compreender qual a frequência da utilização de cada registo. Da análise das respostas dos alunos, conclui-se que a utilização dos registos de representação semiótica foi diversificada, tendo os alunos utilizado os diversos registos (Tabela 31).

Tabela 31: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 3.

	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
Tarefa 3	2	2	0	2	1	5	0	2	0	2	2	2
<b>Total</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>0</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>

Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

O registo gráfico foi utilizado nas respostas corretas e parcialmente corretas, tendo os alunos representado corretamente a adição descrita no enunciado na reta numérica. Nas respostas parcialmente corretas, a representação no registo gráfico apresentou alguns erros. O registo pictórico e

o registo simbólico foram utilizados em todos os tipos de respostas, mostrando que os alunos se sentem familiarizados com estes registos, bem como com o registo em linguagem natural.

### 3.2.3. Subtração de números racionais

Na aprendizagem da subtração de números racionais, os alunos começaram por resolver a Tarefa 1, em pares, incidindo na subtração de números inteiros.

**Tarefa 1:** Três amigos vivem no mesmo prédio em andares diferentes. O prédio tem 6 andares, a entrada no rés-do-chão e no piso menos um tem a garagem. A Rita mora no 2.º andar, o João mora no 6.º andar e o Miguel mora três andares abaixo do João.

1. Em que andar vive o Miguel?
2. Se o pai da Rita tem o carro na garagem, quantos andares terá de descer para ir do seu apartamento até ao carro? Justifica a tua resposta.
3. Se um vizinho do prédio morar no 1.º andar e subir dois andares, a que andar foi? Compara este resultado com o que obtiveste em 2.
4. O Miguel desceu da entrada do prédio para a garagem. Traduz uma expressão que represente esta situação.
5. Quantos andares distam do apartamento do João até ao apartamento da Rita? Justifica a tua resposta.

A subtração de números racionais inteiros revelou-se compreendida pelos alunos, não existindo respostas incorretas às questões da Tarefa 1 (Tabela 32).

Tabela 32: Frequência dos tipos de resposta às questões da Tarefa 1 ( $n = 20$ )

Questão	Tipos de resposta			
	C	PC	I	NR
1.	10	0	0	0
2.	9	1	0	0
3.	3	7	0	0
4.	3	6	0	1
5.	10	0	0	0

Nota: C – correta; PC – parcialmente correta; I – incorreta; NR – não responde.

Na indicação do andar onde o Miguel mora, Questão 1, dez pares de alunos responderam corretamente, indicando que o Miguel mora no 3º andar, representando o seu raciocínio através do registo pictórico, do registo simbólico ou do registo em linguagem natural, como expressa a resposta do par P7 (Figura 102).



Figura 102. Resposta correta do par P7 à Questão 1 da Tarefa 1.

Com a representação da informação referida no enunciado, os alunos apresentam a subtração como forma de representar a descida de uns andares para outros. Quando os alunos são questionados quantos andares terá de descer o pai da Rita para ir de casa até ao carro, Questão 2, nove pares de alunos responderam corretamente indicando que o pai da Rita terá de descer três andares para ir de casa até à garagem, completando o seu raciocínio com a utilização de esquemas ou expressões, como mostram as respostas dos pares P3 e P5 (Figura 103).

Figura 103. Respostas corretas, respetivamente, dos pares P3 e P5 à Questão 2 da Tarefa2.

Ainda no mesmo contexto, o par de alunos P2 apresenta uma resposta em que sugere que o pai terá de subir três andares e representa uma expressão numérica que traduz a sua resposta. No entanto não coincide com o que era esperado, ou seja, em vez de indicar quantos andares terá o pai da Rita de descer, indicam quantos teria que subir se fosse da garagem para casa (Figura 104).

Figura 104. Resposta parcialmente correta do par P2 à Questão 2 da Tarefa2.

A interligação entre a adição e a subtração, mais especificamente entre a transformação de uma operação noutra quando se tratam de números negativos, encontra-se explanada na Questão 3, quando os alunos são levados a comparar esta questão com a Questão 2. Assim, três pares de alunos responderam corretamente indicando que o vizinho foi ao 3º andar e completaram a resposta através da utilização do registo em linguagem natural, com a comparação entre o resultado obtido nesta questão e na Questão 2, como expressam as respostas dos pares P1, P2 e P10 (Figura 105).

Figura 105. Respostas corretas, respetivamente, dos pares P1, P2 e P10 à Questão 3 da Tarefa1.

Enquanto alguns alunos compararam os resultados pedidos, sete pares de alunos consideraram apenas a resposta de que o ‘vizinho’ foi ao 3º andar. Destes alunos, houve quem não comparasse os resultados obtidos ou que os comparassem inadequadamente, obtendo, assim, respostas parcialmente corretas, como expressam as dos pares P3, P5 e P6 (Figura 106).

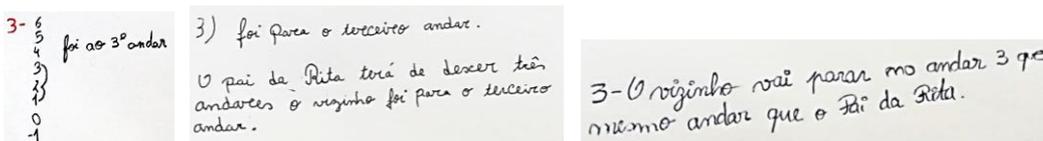


Figura 106. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P3, P5 e P6 à Questão 3 da Tarefa1.

A comparação do par P5 refere-se ao deslocamento que o pai da Rita teve que fazer na Questão 2 e onde o vizinho foi parar com a deslocação referida no enunciado, não percebendo que era esperado que comparassem os resultados em termos de expressões numéricas. Contrariamente a este, o par P6 evidencia a comparação entre o andar em que o vizinho foi ter e onde o pai da Rita estava, não tendo em atenção que na Questão 2 a resposta dada se referia ao número de andares que o pai da Rita teve de descer para ir de casa até à garagem do prédio.

A conversão do registo em linguagem natural para o registo simbólico integra a Questão 4, tendo apenas três pares de alunos apresentado uma expressão que traduz a descida da entrada do prédio para a garagem, tal como mostra a resposta do par P10 (Figura 107).

$$0 - 1 = -1$$

Figura 107. Resposta correta do par P10 à Questão 4 da Tarefa1.

Contudo, seis pares de alunos não apresentaram a expressão que traduz o que é referido no enunciado, obtendo respostas parcialmente corretas. Desses seis pares de alunos, três pares apresentaram apenas a justificação de que o Miguel desceu para o andar  $-1$ , não apresentando uma expressão que traduza essa descida, tal como expressa a resposta do par P1 (Figura 108).

$$R: \text{Foi para } 0 - 1$$

Figura 108. Resposta parcialmente correta do par P1 à Questão 4 da Tarefa1.

O mesmo acontece com as respostas dadas por dois pares desses seis alunos que apresentaram uma expressão que não traduz o que refere o enunciado (Figura 109).

$$0 - -1 = -1.$$

Figura 109. Resposta parcialmente correta do par P2 à Questão 4 da Tarefa1.

O resultado da expressão numérica traduz a resposta que se pretende nesta questão, contudo a tradução de uma subtração com o subtrativo negativo evidencia um erro de escrita, o que resultaria numa resposta incorreta.

Contrariamente às restantes respostas parcialmente corretas, o par P5 apresentou a representação do que é referido no enunciado através do registo gráfico (Figura 110).

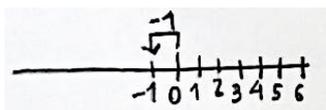


Figura 110. Resposta parcialmente correta do par P5 à Questão 4 da Tarefa1.

A subtração de números positivos, inerente à Questão 5, traduz as respostas corretas de 10 pares de alunos, que apresentaram através do registo simbólico, gráfico ou pictórico a distância do apartamento localizado no 6º andar até ao apartamento localizado no 2º andar, como mostra a resposta do par P3 (Figura 111).

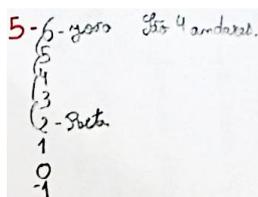


Figura 111. Resposta correta do par P3 à Questão 5 da Tarefa1.

Como em todas as tarefas, sem exceção, a Tarefa 1 incentiva a utilização dos diversos registos de representação, tendo sido utilizado os tipos de registos de uma forma diversificada, consoante a questão em consideração (Tabela 33).

Tabela 33: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 1

Questão	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
1	0	7	7	2	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	6	7	2	0	1	1	0	0	0	0	0
3	0	1	3	0	0	2	6	2	0	0	0	0
4	0	3	0	0	1	3	2	0	0	0	0	0
5	0	8	9	2	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>Total</b>	<b>0</b>	<b>25</b>	<b>26</b>	<b>6</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>9</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

O registo de representação em linguagem natural foi o mais utilizado pelos alunos, tanto nas respostas corretas como nas respostas parcialmente corretas. Contudo, em termos de respostas corretas, o registo simbólico e o registo em linguagem natural foram, por vezes, utilizados em simultâneo, o que indicia a complementaridade da utilização destes dois tipos de registos para dar resposta às questões apresentadas. O registo gráfico foi utilizado por um par de alunos que respondeu parcialmente correto, pelo facto de em vez da representação de uma expressão, como pedia o enunciado da Questão 4, ter representado na reta numérica o que estava referido no enunciado. O registo pictórico serviu de complemento às respostas dos alunos, de modo a mostrar o raciocínio utilizado para dar resposta às questões.

Com a finalidade de dar continuidade à exploração da subtração dos números racionais, os alunos resolveram a Tarefa 2, em pares, com o objetivo de explorarem a subtração através da utilização dos diversos registos de representação.

**Tarefa 2:** Completa o quadro:

-	-7	Menos dois	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{6}$		Zero
Menos sete						
-2						
$-\frac{1}{4}$						
-						
+5						
0						

Neste tipo de tarefa, comparativamente à Tarefa 1, os alunos apresentaram algumas dificuldades, pelo facto de se verificar que nenhum par de alunos resolveu a Tarefa 2 completamente correta, evidenciando erros que se prendem sobretudo com a subtração de frações (Tabela 34).

Tabela 34: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 2 ( $n = 20$ )

Tarefa 2	Tipos de resposta			
	C	PC	I	NR
	0	10	0	0

Nota: C – correta; PC – parcialmente correta; I – incorreta; NR – não responde.

A subtração entre os diversos números levou 10 pares de alunos a cometerem falhas, principalmente no que se refere à consideração da subtração presente no canto superior esquerdo do quadro, influenciando todos os resultados obtidos, como ilustram as respostas dos pares P3, P5 e P8 (Figura 112).

Figura 112. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos pares P3, P5 e P8 à Tarefa2.

A resposta do par P3 apresenta as subtrações entre o zero e os restantes números incorretamente, bem como a subtração entre os números e o zero. Contudo, na subtração entre os números, como  $-7$  e  $-7$ , os alunos apresentam corretamente que o resultado é zero. Nas subtrações que envolvem frações, este par acerta algumas das apresentadas, enquanto noutras responde incorretamente por não considerar o sinal de subtração. Este esquecimento evidencia-se em todas as respostas dos alunos,

incluindo as dos pares P5 e P8. Ao contrário do par P3, o par P8 mostra erros na subtração entre os números e o zero, como, por exemplo, na subtração entre o 5 e o 0, tendo os alunos representado o zero como sendo o resultado.

A influência dos diferentes registos de representação deve ser tida em conta e, dessa forma, importa analisar as respostas dos alunos. Daí, evidencia-se a utilização do registo simbólico para representar os resultados obtidos nas subtrações do quadro da Tarefa 2 (Tabela 35).

Tabela 35: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 2.

	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
Tarefa 2	0	10	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	0	<b>10</b>	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

O registo simbólico e o registo em linguagem natural foram utilizados pelos alunos para dar resposta à Tarefa 2, no entanto o registo simbólico evidenciou-se, tendo sido utilizado por livre e espontânea vontade dos alunos. O registo gráfico e o registo pictórico não foram utilizados, mas existiu a possibilidade de os alunos os utilizarem. Ainda assim, não foram uma escolha para registar os resultados obtidos nas subtrações apresentadas.

De modo a aprofundar a compreensão acerca da subtração de números racionais, os alunos resolveram a Tarefa 3, individualmente, com o objetivo de completar um esquema através da subtração de números racionais, representados em diferentes registos.

**Tarefa 3:** Completa o esquema, sabendo que o valor de cada quadrado é igual à diferença dos dois quadrados de baixo.

Na resolução desta tarefa, os alunos apresentaram, na sua maioria, respostas incorretas, o que se deveu não à subtração em si, mas ao formato do esquema (Tabela 36).

Tabela 36: Frequência dos tipos de resposta na Tarefa 3 ( $n = 20$ )

Tarefa 3	Tipos de resposta			
	C	PC	I	NR
	3	2	12	3

Nota: C – correta; PC – parcialmente correta; I – incorreta; NR – não responde.

A compreensão da lógica de preenchimento do esquema, tendo por base a subtração, fez com que três alunos apresentassem corretamente os resultados da subtração, como revelam as respostas dos alunos A9, A13 e A14 (Figura 113).

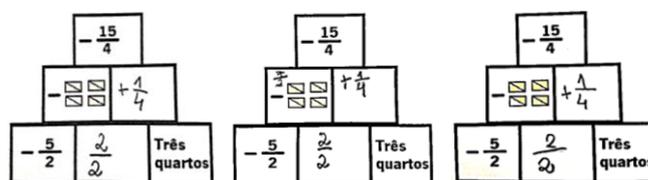


Figura 113. Respostas corretas, respetivamente, dos alunos A9, A13 e A14 à Tarefa3.

Em oposição à compreensão dos alunos anteriormente referidos, dois alunos evidenciam, num dos casos, a indicação de apenas um dos dois resultados e no, outro caso, a representação correta dos resultados, falhando apenas na colocação dos sinais, como expressam as respostas dos alunos A3 e A12 (Figura 114).

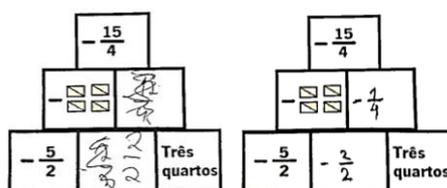


Figura 114. Respostas parcialmente corretas, respetivamente, dos alunos A3 e A12 à Tarefa3.

A incorreta representação dos resultados obtidos por 12 alunos transparece da falta de compreensão do que era pedido no enunciado, como exibem as respostas dos alunos A11 e A19 (Figura 115).

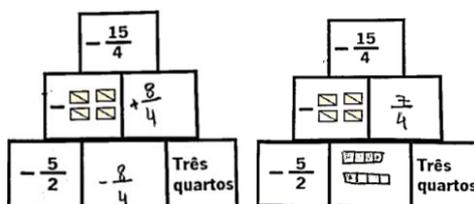


Figura 115. Respostas incorretas, respetivamente, dos alunos A11 e A19 à Tarefa3.

Como a utilização dos registos está intrínseca à resolução da Tarefa 3, verificou-se os registos que os alunos utilizaram para representar os resultados obtidos (Tabela 37).

Tabela 37: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na Tarefa 3.

	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
Tarefa 3	0	3	0	0	0	2	0	0	0	12	0	1
Total	0	<b>3</b>	0	0	0	<b>2</b>	0	0	0	<b>12</b>	0	1

Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

O registo simbólico foi o registo mais utilizado para completar o esquema, não tendo influência do enunciado, mas sim a escolha dos alunos em utilizar o registo que desejassem. A utilização do registo pictórico numa resposta incorreta não teve influência na classificação da resposta, tendo o aluno errado quer com a utilização deste registo, quer com a utilização do registo simbólico. O registo gráfico e o registo em linguagem natural não foram utilizados, mesmo havendo a possibilidade de os alunos representarem os resultados através destes registos.

### 3.2.4. Síntese

As respostas dos alunos do 6.º ano de escolaridade reúnem um conjunto de registos de representação utilizados na aprendizagem dos números racionais (Tabela 38).

Tabela 38: Frequência dos tipos de registo usados pelos alunos na aprendizagem dos números racionais

Tópico	Tipos de resposta											
	C				PC				I			
	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP	RG	RS	RLN	RP
Ordenação e comparação de números racionais: frações.	6	14	3	6	14	22	14	10	4	11	5	3
Adição de números racionais: com o mesmo sinal.	2	50	0	2	3	21	8	10	0	16	2	2
Subtração de números racionais.	0	38	28	6	1	8	9	2	0	12	0	1
<b>Total</b>	<b>8</b>	<b>102</b>	<b>31</b>	<b>14</b>	<b>18</b>	<b>51</b>	<b>31</b>	<b>22</b>	<b>4</b>	<b>39</b>	<b>7</b>	<b>6</b>

Nota: RG – registo gráfico; RS – registo simbólico; RLN – registo em linguagem natural; RP – registo pictórico.

A utilização dos registos de representação na resolução das tarefas foi diversificada, no entanto o registo simbólico foi o registo de representação semiótica mais utilizado pelos alunos na aprendizagem dos números racionais. Nesta fase de escolaridade, os alunos possuem um contacto frequente com os números, o que favorece o recurso ao registo simbólico.

O registo em linguagem natural, registo pictórico e o registo gráfico foram utilizados para complementar as respostas dos alunos, explicitando o raciocínio que os levou às soluções pretendidas.

A influência da utilização de determinados registos variou em conformidade com as tarefas, contudo os alunos, nas tarefas em que podiam utilizar qualquer registo de representação, utilizavam sobretudo o registo simbólico e o registo em linguagem natural.

As dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem dos ‘Números Racionais’ foram: a representação de números na reta numérica; a ordenação de números racionais, principalmente no que se refere aos números fracionários; e, a subtração de números racionais, esquecendo o sinal de subtração quando estavam na presença de números negativos.

Os erros cometidos pelos alunos prendem-se com a representação de frações na reta numérica, a redução ao mesmo denominador na adição de frações e a adição de frações, em que adicionavam os numeradores e os denominadores, sem recorrerem à redução do mesmo denominador.

### 3.3. Avaliação do ensino ministrado pelos alunos do 1º Ciclo

Concluída a intervenção pedagógica no 1.º Ciclo do Ensino Básico, os alunos responderam a um questionário que integra um conjunto de questões de resposta aberta, com a finalidade de efetivar uma apreciação global da aprendizagem dos tópicos de Números Racionais através dos diferentes registos de representação semiótica.

*Perceções dos alunos sobre o conteúdo das frações.* Os alunos, quando questionados sobre o que mais gostaram de fazer nas aulas em que aprenderam frações, evidenciam um pouco de todas as atividades realizadas no âmbito deste conteúdo (Tabela 39).

Tabela 39: Frequência das atividades que os alunos mais gostaram de realizar

<b>Respostas dos alunos</b>	<b>Número de alunos</b>
Dominó das frações	18
Frações	7
Tudo	3
Completar esquemas	3
Trabalhar a pares	2
Reta numérica	1

A atividade mais indicada pelos alunos foi o jogo ‘Dominó das frações’, realizado na última aula da intervenção pedagógica, com vista a sintetizar os conhecimentos adquiridos ao longo das aulas. De modo a incidir nos dois processos ocorridos quando se trabalha com registos de representação, o jogo desafiou os alunos a realizarem tratamentos e conversões entre os diferentes registos de representação semiótica de números racionais não negativos (Figura 116).

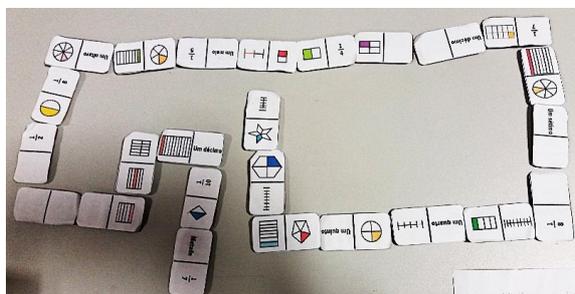


Figura 116. Tabuleiro de jogo do dominó do par P6 realizado na 5.ª aula

Outra das atividades referidas pelos alunos foi ‘completar o esquema/retângulo das frações’, que teve como objetivo visualizar frações, tanto no registo pictórico, como no registo gráfico e simbólico. Os

alunos envolveram-se, na 4.<sup>a</sup> aula, na construção do ‘retângulo das frações’, possibilitando a compreensão das quantidades a que se referia cada fração, bem como a divisão da unidade em partes iguais (Figura 117).

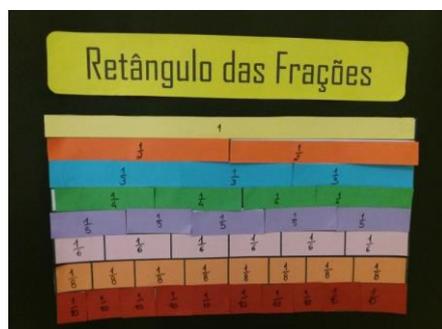


Figura 117. Retângulo das frações

As respostas mais gerais dadas pelos alunos, relativamente ao que mais gostaram de fazer, identificam-se como ‘gostei de aprender coisas novas’, ‘gostei de tudo’, ‘gostei de trabalhar a pares’, ‘gostei de frações’ e ‘gostei da reta numérica’.

Relativamente ao que menos gostaram de fazer nas aulas em que aprenderam frações, os alunos apresentaram respostas como ‘escrever’, ‘fazer frações’, ‘dividir figuras geométricas’ e ‘do dominó’ (Tabela 40).

Tabela 40: Frequência das atividades que os alunos menos gostaram de realizar

<b>Respostas dos alunos</b>	<b>Número de alunos</b>
Gostei de fazer tudo	11
Frações	5
Dominó	2
Não gosto de fazer matemática	1
Dividir figuras geométricas	1
Escrever	1

Em termos da escrita, os alunos no 2.<sup>o</sup> ano de escolaridade ainda sentem dificuldades em conseguir escrever, sendo-lhes mais fácil, em termos de exteriorização do pensamento, desenhar ou fazer esquemas que justifiquem as suas respostas.

A identificação de frações para alguns alunos deteve-se como uma dificuldade, devido à inexperiência que possuem com a utilização de frações, o que causou índices de desmotivação e de pouco apreço em escrever frações. No decurso da intervenção pedagógica, a identificação de frações foi melhorando, mas, por vezes, dependendo das situações, os alunos apresentavam erros, que eram cometidos pelo facto de trabalharem este conteúdo recentemente.

A divisão de figuras geométricas identificou-se com uma das dificuldades dos alunos na aprendizagem das frações e, por consequência, por uma atividade que os alunos não gostaram de realizar. Neste ano de escolaridade, os alunos não representam as figuras geométricas com rigor,

levando a cometer erros e a terem dificuldades em representar as frações através das figuras, principalmente no que se refere à divisão das mesmas em partes iguais.

O jogo 'Dominó das frações', que para os alunos que compreenderam e se sentiram à vontade com o conteúdo das frações gostaram de realizar, proporcionou aos alunos que não compreenderam o conteúdo das frações uma experiência difícil e aborrecida, levando os alunos a desconsiderarem a sua efetivação.

Como nas atividades de aprendizagem alguns alunos revelam dificuldades na compreensão do que se estuda, achei pertinente questioná-los acerca das dificuldades que sentiram ao longo da intervenção pedagógica. As dificuldades apresentadas pelos alunos foram 'os números', 'jogar o dominó', 'escrever', 'as figuras geométricas', 'a reta numérica' e 'perceber as frações'. Contudo, alguns alunos referem que não sentiram dificuldades na aprendizagem das frações, evidenciando que perceberam o que foi abordado (Tabela 41).

Tabela 41: Frequência das dificuldades sentidas pelos alunos nas atividades realizadas

<b>Respostas dos alunos</b>	<b>Número de alunos</b>
Nenhuma	7
Dominó	5
Figuras geométricas	2
Reta numérica	2
Números	1
Escrever	1

Ainda em termos de dificuldades, um aluno referiu que no primeiro dia que aprendeu frações sentiu dificuldades, mas que depois começou a perceber melhor com o decorrer das aulas.

Como no 2.º ano de escolaridade acontece a introdução das frações, os alunos ainda se estão a ambientar ao conceito de fração, cuja natureza abstrata que está subjacente na sua construção faz com que muitos deles sintam dificuldades na sua aprendizagem e, por consequência, gostem mais de umas atividades do que de outras.

*Perceções dos alunos sobre o trabalho em pares.* A organização da turma utilizada na intervenção pedagógico na turma do 2.º ano de escolaridade variou, existindo tarefas em que os alunos resolveram a pares e outras em que resolveram individualmente. Os trabalhos em pares neste ano de escolaridade não são muito frequentes, pelo facto de as atividades serem todas direcionadas a serem resolvidas individualmente. Contudo, os alunos não deixam de partilhar ideias e de se ajudarem, o que beneficia o trabalho nos anos posteriores em que os alunos trabalham em grupo e têm que respeitar as ideias dos outros. A diversificação da organização da turma não só beneficia o trabalho do professor como o do aluno. O trabalho individual do aluno informa o professor dos conhecimentos e ideias que possui sem

ter influência de outra pessoa. No trabalho em pares ou em grupo, os alunos conseguem ajudar-se mutuamente, trocando ideias e discutindo, o que beneficia a sua aprendizagem.

Com o intuito de os alunos exprimirem o seu grau de apreciação sobre o trabalho em pares, a maior parte dos alunos ( $n = 21$ ) manifestaram gostar de trabalhar em pares. Na avaliação da participação dos alunos com o seu par, a maioria refere que foi boa, porque 'partilhei ideias com o meu par', 'o meu par pensava como eu e foi mais fácil', 'fui boa colega', 'trabalhei bem com o meu par' e 'conseguimos ajudar-nos um ao outro'. Os alunos que referiram que não gostaram de trabalhar em pares indicaram que a sua participação com o par não foi muito boa, apresentando como justificação o facto de 'o meu par era chato'. O teor de tais respostas levanta implicações de como o trabalho em pares é promovido na sala de aula, para que os alunos possam aprender a conviver uns com os outros e a aceitarem as perspetivas dos colegas, não só para agir no ambiente escolar, como também na sociedade em que estão inseridos.

*Perceções dos alunos sobre a utilização dos registos de representação semiótica na aprendizagem das frações.* Os registos de representação sustentam o processo de ensino e de aprendizagem de Matemática, dado que permitem aos alunos exteriorizar o seu pensamento, não havendo outra forma de transmitir aos outros as suas ideias. Com base neste pressuposto, durante a intervenção pedagógica procurei questionar os alunos acerca dos registos de representação que os ajudaram a perceber melhor as frações e quais as representações que tiveram mais dificuldade em perceber. Em termos de registos de representação que ajudaram os alunos a perceber melhor as frações, o registo em linguagem natural foi o indicado por 14 alunos, o registo pictórico por 12 alunos e o registo simbólico por dois alunos.

Os alunos que escolheram o registo em linguagem natural justificaram a sua escolha através de afirmações como 'percebo a linguagem natural', 'consegui perceber melhor', 'é mais fácil de perceber' e 'porque leio é mais fácil'. Apesar de os alunos ainda não conseguirem escrever nem ler muito bem neste ano de escolaridade, contactam com este tipo de registo de representação desde o pré-escolar.

A escolha do registo pictórico, por parte dos alunos, justifica-se como 'os desenhos são mais fáceis de perceber', 'gosto de desenhar' e 'os desenhos ajudaram-me a perceber melhor como escrever'. A utilização de desenhos acompanha os alunos desde o pré-escolar, facilitando e auxiliando o seu processo de aprendizagem. Torna-se frequente a utilização de desenhos para justificar as respostas dos alunos, transmitindo informações que de outra forma não estariam tão acessíveis.

O registo simbólico, escolhido por dois alunos, não apresenta uma justificação que acompanhe a sua escolha.

A escolha dos alunos relativamente aos registos de representação que tiveram mais dificuldade em perceber foca-se, sobretudo, no registo simbólico, escolhido por 12 alunos, pelo facto de 'os números serem difíceis', 'não sei o que é a representação simbólica', 'é difícil' e 'não sabia o que queria dizer'. O registo em linguagem natural, escolhido por sete alunos, deve-se à dificuldade que estes apresentam em escrever, ao facto de este registo ser difícil e de os alunos não gostarem de escrever. Em contrapartida, o registo pictórico foi o menos escolhido, mas os alunos que o selecionaram justificaram a sua escolha afirmando que 'tive dificuldade em desenhar' e 'é difícil por ter de contar e confundi-me', referindo-se à representação pictórica das frações em figuras geométricas. Apesar das escolhas apresentadas aos alunos, quatro alunos não selecionaram nenhum tipo de registo, afirmando que nenhum registo de representação foi difícil de perceber.

Por forma a compreender que tipos de registos de representação semiótica facilitaram a aprendizagem das frações, os alunos foram questionados, apresentando as suas opiniões e justificando as suas escolhas, concluindo que o registo em linguagem natural permitiu uma melhor aprendizagem do conteúdo das frações.

### **3.4. Avaliação do ensino ministrado pelos alunos do 2º Ciclo**

No final da intervenção pedagógica tornou-se fundamental conhecer as perceções dos alunos do 6.º ano de escolaridade, através da implementação de um questionário. O questionário, organizado com questões de concordância e com questões de resposta aberta, tinha como finalidade efetuar uma apreciação global sobre a utilização das representações semióticas na aprendizagem dos números racionais. As informações contidas nas questões colocadas aos alunos dividem-se em quatro categorias, sendo estas: as perceções sobre os números racionais; perceções sobre a utilização dos diferentes registos de representação semiótica; perceções sobre a utilização dos diferentes registos de representação semiótica na aprendizagem dos números racionais; e perceções sobre o trabalho em pares. Esta turma integra 20 alunos, mas na aula em que responderam ao questionário faltou um aluno, não sendo possível recolher as suas perceções em relação ao que era pretendido.

*Perceções sobre a aprendizagem dos números racionais.* Por forma a conhecer as perceções dos alunos acerca da aprendizagem dos Números Racionais, questionei-os de modo a recolher informação que me ajudasse a perceber: (i) se gostaram de aprender este conteúdo; (ii) se adquiriram novos conhecimentos; (iii) se sentiram evolução na sua aprendizagem; (iv) se os números racionais estão presentes no dia a dia; (v) se a descoberta dos conceitos matemáticos por eles próprios é mais aliciante

do que ser o professor a apresentá-los; (vi) se compreenderam melhor este conteúdo do que outros conteúdos matemáticos; e (vii) se consideram os números racionais difíceis de aprender.

Tabela 42: Grau de concordância (%) sobre a aprendizagem dos números racionais

<b>Afirmações</b>	<b>DT/D</b>	<b>I</b>	<b>C/CT</b>
Gostei de aprender os números racionais.	0	5	95
Adquiri novos conhecimentos acerca dos números racionais.	5	0	95
Senti uma evolução na aprendizagem dos números racionais.	5	16	79
Os números racionais estão muito presentes no meu dia a dia.	5	32	63
Descobrir por mim os conceitos matemáticos é mais aliciante do que ser o professor a apresentá-los.	26	42	32
A aprendizagem de tópicos dos números racionais é importante para o meu quotidiano.	16	26	58
Compreendi melhor os números racionais do que outros conteúdos matemáticos.	32	16	52
Os Números Racionais são difíceis de aprender.	68	16	16

A maior parte dos alunos (95%) afirma ter gostado de aprender o conteúdo dos números racionais, considerando que adquiriram novos conhecimentos acerca destes números e que sentiram uma evolução na sua aprendizagem. Os alunos afirmam que os números racionais estão muito presentes no dia a dia (63%), o que relevam a sua aprendizagem. Em termos de metodologias de aprendizagem, alguns alunos consideram indiferente o facto de ser os alunos a descobrirem os conceitos matemáticos ou ser o professor a apresentá-los (42%).

A maior parte dos alunos (68%) não considera o conteúdo dos números racionais difícil de aprender, evidenciando que compreenderam melhor este conteúdo do que outros conteúdos matemáticos.

*Percepções sobre a utilização dos diferentes registos de representação semiótica.* A utilização dos diferentes registos de representação semiótica sustenta todo o processo de aprendizagem dos alunos e, nesse sentido, achei pertinente questioná-los os alunos sobre a utilização dos diferentes registos, percebendo se consideram que aprenderam melhor utilizando diversas representações, se preferiram trabalhar com o registo em linguagem natural, com o registo de representação pictórica ou com o registo de representação simbólica e se o facto de terem utilizado diferentes representações facilitou a resolução das tarefas.

Tabela 43: Grau de concordância (%) sobre a utilização dos diferentes registos de representação semiótica

<b>Afirmações</b>	<b>DT/D</b>	<b>I</b>	<b>C/CT</b>
Aprendo melhor quando utilizo diversas representações.	16	16	68
Preferi trabalhar com a linguagem natural do que com a representação simbólica e a representação pictórica.	52	11	37
Preferi trabalhar com a representação pictórica do que com a representação simbólica e a linguagem natural.	32	16	52
Usar diferentes representações facilitou a resolução de tarefas.	11	26	63
Preferi trabalhar com a representação simbólica do que com a representação pictórica e a linguagem natural.	47	16	37

A utilização dos diferentes registos de representação facilita, para maior parte dos alunos (68%), a aprendizagem, considerando que, em específico, a utilização dos diferentes registos de representação facilitou a resolução das tarefas propostas. Relativamente à preferência de utilização dos diferentes registos de representação, metade dos alunos (52%) considera que não prefere trabalhar mais com o registo em linguagem natural do que com o registo simbólico ou o registo pictórico. Contudo, metade dos alunos (52%) aponta que prefere trabalhar mais com o registo de representação pictórica do que com o registo em linguagem natural ou o registo simbólico. Em termos da utilização do registo simbólico, os alunos (37%) preferem trabalhar mais com o registo simbólico do que com o registo pictórico e o registo em linguagem natural.

*Perceções sobre a utilização dos diferentes registos de representação semiótica na aprendizagem dos números racionais.* Após a minha intervenção pedagógica procurei perceber o entendimento que os alunos davam à utilização dos diferentes registos de representação semiótica na aprendizagem dos números racionais. Dessa forma, questionei os alunos de forma a perceber se já utilizavam os diferentes registos de representação dos números racionais, que tipo de registo facilitou a aprendizagem destes números, se a possibilidade de contactar com os diferentes registos ajudou na aprendizagem ou se confundiu, se recorrer os diferentes registos de representação dificultou a aprendizagem, se a discussão sobre a resolução das tarefas ajudou na compreensão do papel dos diferentes registos de representação e se já possuíam conhecimentos acerca dos diversos registos de representação dos Números Racionais.

Tabela 44: Grau de concordância (%) sobre a utilização dos diferentes registos de representação semiótica na aprendizagem dos números racionais

<b>Afirmações</b>	<b>DT/D</b>	<b>I</b>	<b>C/CT</b>
Já utilizava as diferentes representações dos números racionais.	10	32	58
A representação pictórica facilitou a minha aprendizagem dos números racionais.	11	5	84
A linguagem natural facilitou a minha aprendizagem dos números racionais.	26	26	46
A possibilidade de contactar com as diferentes representações de números racionais ajudou-me na aprendizagem.	16	26	58
A utilização das diferentes representações confundiu-me na aprendizagem dos números racionais.	26	21	53
Recorrer a diferentes representações dos números racionais dificultou a minha aprendizagem.	26	42	32
A discussão sobre a resolução das tarefas ajudou a compreender o papel das diferentes representações na aprendizagem dos números racionais.	16	16	68
Já possuía conhecimentos acerca das diferentes representações dos números racionais.	21	11	68
A representação simbólica dificultou a minha aprendizagem dos números racionais.	42	16	42

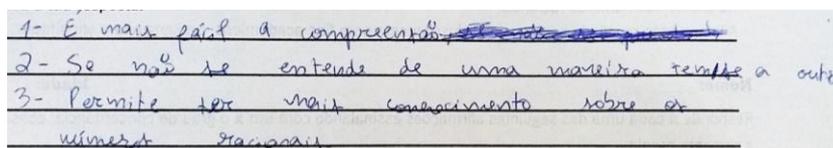
Os diferentes registos de representação dos números racionais já eram utilizados pelos alunos (58%), que já possuíam conhecimentos acerca desses registos (68%), no entanto consideraram que a possibilidade de contactar com os diferentes registos de representação dos números racionais facilitou

a aprendizagem. Porém, a utilização dos diferentes registos também levou a que metade dos alunos (53%) considerasse que acabou por confundi-los na aprendizagem dos números racionais, mas quando questionados em relação a recorrer a esses diferentes registos, os alunos (42%) revelaram indiferença quanto ao facto de dificultarem a aprendizagem, o que indicia que nem dificultaram nem facilitaram a aprendizagem dos números racionais.

A discussão sobre a resolução das tarefas para maior parte dos alunos (68%) ajudou a compreender o papel dos diferentes registos de representação na aprendizagem dos números racionais. Assim, o registo de representação que facilitou a aprendizagem dos números racionais para 16 alunos (84%) foi o registo pictórico, enquanto para nove alunos (46%) foi o registo em linguagem natural e para oito alunos (42%) foi o registo simbólico.

De forma a ter uma perceção mais plausível em relação à utilização dos diferentes registos de representação semiótica na aprendizagem dos números racionais, os alunos foram inquiridos a pronunciarem-se sobre as vantagens e as desvantagens dessa utilização e sobre os registos de representação que facilitaram e dificultaram a aprendizagem dos números racionais.

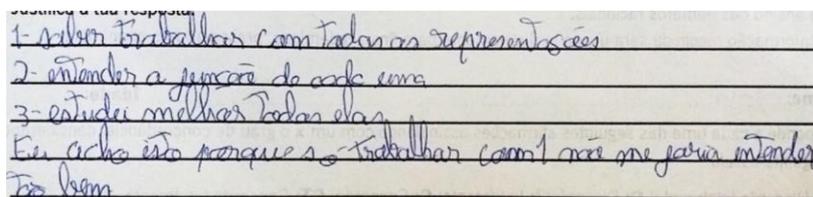
No que se refere às vantagens, de uma forma geral, os alunos indicaram que a utilização de diversos registos de representação facilita a aprendizagem, diminui as dificuldades e possibilita uma variedade de formas para representar os números, como exemplifica a resposta do aluno A2 (Figura 118).



1- É mais fácil a compreensão ~~de~~  
2- Se não se entende de uma maneira tem de a outra  
3- Permite ter mais conhecimento sobre os  
números racionais

Figura 118. Resposta do aluno A2 relativamente às vantagens da utilização de diferentes registos de representação

Ainda relativamente às vantagens, um aluno evidenciou o que se deve fazer para utilizar os diferentes registos de representação (Figura 119).

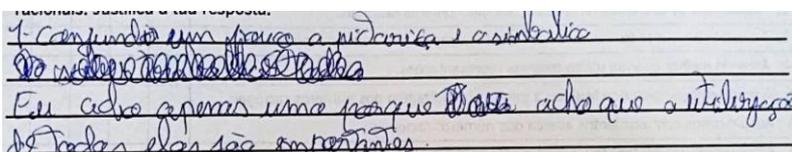


1- saber trabalhar com todas as representações  
2- entender a função de cada uma  
3- estudar melhor todas elas  
Eu acho isto porque se trabalhar com 1 não me já via entender  
Éo bem

Figura 119. Resposta do aluno A17 relativamente às vantagens da utilização de diferentes registos de representação

Apesar da maior parte dos alunos considerar não existir nenhuma desvantagem na utilização dos diferentes registos de representação, alguns consideram que o facto de existirem diversos registos acaba

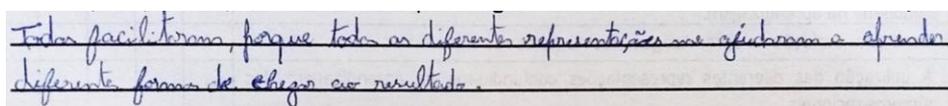
por confundir ou por não saber como os utilizar. Dentro dos diversos registos, os alunos apresentam desvantagens que indiciam a confusão entre o registo pictórico e o registo simbólico, no entanto entendem que a utilização de todos os registos é fundamental, como revela a resposta do aluno A2 (Figura 120).



1- confundir um pouco a pictórica e a simbólica  
Eu acho apenas uma porque acho que a utilização  
de todos elas são importantes.

Figura 120. Resposta do aluno A2 relativamente às desvantagens da utilização de diferentes registos de representação

De entre os vários registos de representação, o registo pictórico foi o mais indicado pelos alunos como o que facilitou a aprendizagem dos Números Racionais, afirmando que era o mais fácil de utilizar e compreender. O registo gráfico foi escolhido por alguns alunos, evidenciando que permite uma melhor visualização da divisão da unidade. O registo simbólico, quando indicado, apresentava justificações como 'já estava habituado aos números' (A3), de modo que facilitava a sua utilização. O registo em linguagem natural foi pouco identificado, no entanto os alunos que referenciaram ter facilitado a aprendizagem, justificam a sua escolha pelo facto de 'já estar habituado' (A19) ou 'consegue-se trabalhar melhor' (A5). Apesar de, em geral, todos os alunos indicarem um tipo de registo específico que facilitou a sua aprendizagem, o aluno A4 considerou a importância da utilização de todos os registos (Figura 121).



Todos facilitaram, porque todos as diferentes representações me ajudaram a aprender  
diferentes formas de chegar ao resultado.

Figura 121. Resposta do aluno A4 relativamente ao registo de representação que facilitou a aprendizagem dos números racionais

Em termos do registo de representação que dificultou a aprendizagem dos Números Racionais, em geral, os alunos indicam que nenhum tipo de registo de representação lhes dificultou a aprendizagem. Contudo, os alunos que evidenciam o registo em linguagem natural justificam a sua escolha com a confusão que este registo os levou a identificar os números. O registo simbólico, referido por alguns alunos, confundiu-os na resolução das tarefas, considerando como sendo o mais difícil e o que não conseguiam perceber tão bem. Os alunos que indicaram o registo pictórico evidenciam a falta de utilização deste registo, levando a que não o conseguissem utilizar muito bem. O registo gráfico também evidenciado nas respostas dos alunos, apresentou-se por, para alguns alunos, dificultar a representação de alguns números.

*Perceções sobre o trabalho em pares.* A organização da turma é determinante para o desenvolvimento das tarefas na sala de aula. Nesse sentido, questionei os alunos em relação à

organização do trabalho na intervenção pedagógica, com o objetivo de perceber se o trabalho em pares favoreceu a aprendizagem, se permitiu a partilha de diferentes registos de representação e se beneficiou a troca de ideias na resolução das tarefas propostas.

Tabela 45: Grau de concordância (%) sobre o trabalho em pares

<b>Afirmações</b>	<b>DT/D</b>	<b>I</b>	<b>C/CT</b>
Trabalhar em pares favoreceu a minha aprendizagem dos números racionais.	16	11	73
Trabalhar em pares permitiu a partilha de diferentes representações de números racionais.	21	16	63
Trabalhar em pares beneficiou a troca de ideias na resolução das tarefas propostas.	16	21	63

O trabalho em pares, na perspetiva de mais de metade dos alunos (73%), favoreceu a aprendizagem do conteúdo dos números racionais. Este trabalho em pares permitiu, na opinião de 12 alunos (63%), a partilha de diferentes registos de representação dos números racionais, bem como beneficiou a troca de ideias na resolução das tarefas propostas. A troca de ideias e a discussão entre os alunos permite uma melhor compreensão dos conteúdos, comparativamente ao trabalho individual que, em certos momentos, também se torna necessário.

## **CAPÍTULO 4**

### **CONCLUSÕES, IMPLICAÇÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES**

Da interpretação dos principais resultados da intervenção pedagógica, formularam-se ideias, sob a forma de conclusões e de uma reflexão final, que se apresentam neste capítulo, atendendo ao objetivo e às questões de investigação delineados. Por fim, apresentam-se as limitações do estudo e as recomendações para futuros estudos sobre a utilização das representações semióticas na aprendizagem de tópicos matemáticos.

#### **4.1. Conclusões**

Na elaboração das conclusões deste estudo reassumem-se as questões de investigação delineadas em torno da utilização das representações semióticas na aprendizagem dos números racionais, para a formulação das conclusões do estudo.

##### **4.1.1. Que registos de representação semiótica são mais utilizados pelos alunos na aprendizagem de tópicos dos números racionais?**

A análise e interpretação da informação recolhida no decorrer da intervenção pedagógica permitiu constatar que registos de representação semiótica são mais utilizados pelos alunos na aprendizagem de tópicos de números racionais. Os alunos realizaram diversas atividades que lhes proporcionaram o contacto com os diferentes registos de representação, que, de um modo geral, favoreceu a sua compreensão, no sentido de não existir uma confusão entre os objetos matemáticos e as suas representações (Duval, 1993). Como defende este autor, a compreensão matemática advém da distinção entre os objetos matemáticos e a sua representação, tornando-se importante o trabalho com os diversos registos de representação. Os registos de representação permitem o trabalho matemático e é através deles que os alunos conseguem construir conhecimentos acerca dos objetos pretendidos, caso contrário não seria possível ter acesso a esses objetos, que não possuem uma existência real (Bonomi, 2015).

Apesar do contacto com os diversos registos de representação semiótica, os alunos acabam por ter preferências na utilização de um ou outro registo de representação, consoante o nível de escolaridade em que se encontram. Na turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico, os alunos utilizaram na resolução das diferentes tarefas os registos de representação propostos pelo enunciado, mas, por vezes, tinham dificuldades em representar objetos matemáticos através de algum registo de representação específico.

O registo de representação gráfica transpareceu pouca utilização, pelo facto de, nesta fase de escolaridade, os alunos ainda não possuírem um contacto alargado com este tipo de registo. Contrariamente a tal registo, os registos simbólico, pictórico e em linguagem natural enaltecem o trabalho dos alunos, permitindo-lhes estruturar as ideias e chegar a uma conclusão. Atendendo que o contacto com estes últimos registos é mais frequente, compreende-se a sua utilização excessiva, em relação ao registo gráfico.

Relativamente à turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico, os alunos já possuíam um contacto mais frequente com todos os tipos de registos de representação, comparativamente à turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Contudo, o registo gráfico deteve-se pela menor utilização em relação aos outros registos. Torna-se evidente que existe um maior contacto com os registos de representação simbólico, pictórico e em linguagem natural, que vêm acompanhando o percurso escolar dos alunos, desde muito cedo. O registo gráfico introduz-se relativamente tarde em relação aos demais registos de representação, o que tem implicações na sua utilização.

De uma forma geral aos dois Ciclos, os alunos utilizaram os diferentes registos de representação, que se traduziu na sua aprendizagem de números racionais, na comunicação dos tópicos em estudo e nas operações a efetuar entre esses números.

Através da análise das atividades realizadas pelos alunos, percebe-se quais os registos de representação mais utilizados na aprendizagem de tópicos dos números racionais. Assim, na turma de 1.º Ciclo do Ensino Básico, nas tarefas em que os alunos podiam utilizar livremente os registos de representação, o registo pictórico evidenciou-se em relação aos outros registos. Justifica-se a utilização deste registo pelo facto de os alunos contactarem desde cedo com desenhos, sentindo-se mais à vontade para utilizar este registo no trabalho escolar diário para apresentar o seu raciocínio.

O registo em linguagem natural e o registo simbólico serviram de complemento às respostas dos alunos. Tratam-se de dois registos que se encontram em fase de desenvolvimento, não estando ainda consolidados para serem utilizados. Como os alunos ainda não sabem muito bem escrever, tal facto tende a influenciar a utilização dos registos de representação, no entanto permite perceber que o registo pictórico se revela o mais utilizado na resolução das tarefas.

O registo gráfico, para os alunos da turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico, não se identifica como um registo vulgarmente utilizado, dado que o conhecimento acerca deste tipo de registo é restrito. O contacto com a reta numérica concerne a mobilização de vários aspetos que no 2.º ano de escolaridade ainda se torna difícil de consolidar e manusear.

Relativamente à turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico, o registo simbólico caracteriza-se pela sua frequente utilização, nas tarefas em que eram os alunos a escolher o registo que quisessem utilizar, e, dessa forma, depreende-se que, contrariamente aos alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico, como existe um maior contacto com os números, o registo simbólico foi a preferência dos alunos, para dar resposta às questões, na aprendizagem de tópicos dos números racionais.

O registo em linguagem natural foi utilizado, na maioria das vezes, para complementar as respostas dos alunos e, noutras situações, era utilizado pela imposição do enunciado das tarefas. Este registo é considerado como o primeiro registo que os alunos produzem intencionalmente, permitindo o funcionamento do pensamento (Duval, 2017; Silva, Santiago & Santos, 2014).

O registo pictórico, tal como o registo anterior, foi utilizado à medida que o enunciado das tarefas impunha ou quando servia de complemento ao raciocínio dos alunos. Ainda assim, acabou por ser utilizado menos vezes do que o registo em linguagem natural.

O registo gráfico, algumas vezes utilizado, levou os alunos a representarem ‘objetos’ matemáticos com alguns erros, pelo facto de existir uma inexperiência com este registo. Contudo, torna-se importante a utilização deste registo porque a compreensão e a capacidade de raciocínio dos alunos “ir-se-ão desenvolvendo à medida que eles forem representando fracções e decimais através de objectos e da recta numérica, e à medida que forem aprendendo a produzir representações equivalentes de fracções e decimais” (NCTM, p. 35, 2007).

A restrição para a utilização de um só registo de representação não deve ser imposta, pelo facto de ser essencial que os alunos sejam capazes de mobilizar os diferentes registos de representação semiótica, no decorrer do registo do seu raciocínio, na realização de uma atividade matemática (Duval, 1993).

Os alunos conseguiram contactar com os diferentes registos e, em diversas tarefas, mobilizaram determinados registos, com o objetivo de realizarem dois processos de transformação dos registos de representação semiótica fundamentais: o tratamento e a conversão. Os tratamentos realizados dentro do mesmo registo de representação, que possuem regras de operação para essa transformação (Duval, 1993), permitiram a utilização reforçada de um determinado registo. Por exemplo, nos cálculos matemáticos, existe a possibilidade de realizar o tratamento, substituindo as expressões simbólicas por outras, permitindo encontrar a solução final. As conversões realizam-se de um determinado registo para outro, sendo necessário a mobilização e a compreensão dos registos de representação semiótica (Duval, 1995). A resolução de problemas traduz, normalmente, a conversão dos diversos registos de representação, requerendo a utilização de vários registos para conseguir chegar ao resultado final. Estes

processos são fundamentais para a compreensão dos objetos matemáticos, tendo por base as suas representações.

Assim, a utilização dos diversos registos de representação eleva-se na construção do conhecimento dos alunos acerca dos objetos matemáticos, possibilitando-lhes a reflexão acerca da prática que realizam e a consideração dos pontos positivos e negativos associados à utilização dos diferentes registos (NCTM, 2007). De entre os diversos registos, os alunos sentem mais confiança em trabalhar com determinados tipos de registos. No caso dos alunos da turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico, os alunos revelam trabalhar melhor com o registo pictórico, pelo contacto duradouro que possuem com este registo. Já os alunos da turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico manifestam um maior interesse em trabalhar com o registo simbólico, deduzindo que se deve ao facto de se sentirem mais à vontade com os números. Contudo, estas preferências não devem restringir a aprendizagem dos alunos, mas sim incentivar a mobilizar os diversos registos de representação, realizando transformações entre os diversos registos, que facilitará a aprendizagem e a compreensão dos conteúdos.

#### **4.1.2. Que dificuldades e erros revelam os alunos na aprendizagem dos números racionais?**

A análise das produções dos alunos permite compreender os erros cometidos, bem como as dificuldades sentidas na aprendizagem dos números racionais. As dificuldades relacionam-se sobretudo com a “falta de compreensão conceitual que se estende pelas diferentes formas de representações utilizadas nos métodos atuais de ensino” (Oliveira, 2016).

A aprendizagem dos números racionais, para Brandl, Poff e Silva (2016), apresenta dificuldades na resolução de situações quando são representados sob a forma de fração, na resolução de cálculos e na compreensão dos diferentes significados desses números.

As dificuldades apresentadas pelos alunos da turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico prendem-se com a divisão de figuras geométricas com rigor, a representação de frações através do registo em linguagem natural, a interpretação de enunciados, a consideração da parte que corresponde à fração numa figura, a compreensão do conceito de fração, a conversão entre os diversos registos e a representação de frações através do registo gráfico.

Apesar de os alunos estarem familiarizados com o registo pictórico para representar ‘objetos’ matemáticos, quando se trata da representação de figuras e a sua divisão em partes iguais, os alunos têm dificuldades em representá-las com rigor, afetando a sua compreensão acerca dos números racionais. Considera-se que os alunos devem, no 2.º ano de escolaridade, conseguir identificar quando

um 'objeto' se consegue dividir em partes iguais (NCTM, 2007). Num estudo realizado por Costa e Mamede (2017), em termos da representação de frações através do registo pictórico, constataram que não se pode aceitar representações em que a unidade está dividida em partes desiguais, evidenciando que ignorar este erro condiciona o trabalho com as frações.

Os alunos apresentam outras dificuldades relativas à consideração das partes que devem ser coloridas, quando se tratam de frações unitárias. Em diversas situações, os alunos em vez de considerarem apenas uma das partes da unidade, consideravam mais que uma, não representando as frações unitárias. No entanto, no 2.º ano de escolaridade, os alunos devem ser capazes de considerar corretamente as partes de uma figura, que se referem a uma fração (NCTM, 2007).

As dificuldades associadas aos registos de representação identificam-se com a incorreta representação das frações através do registo em linguagem natural. Como os alunos estavam a contactar pela primeira vez com as frações unitárias, em vez de identificarem, por exemplo, a fração  $\frac{1}{2}$  como 'um meio', os alunos identificavam-na como 'um segundo', referindo-se a um termo do quotidiano, que lhes é familiar, acontecendo o mesmo com outras frações. Num estudo realizado por Feteira (2012), a utilização de termos que para os alunos faziam sentido, também se evidenciou como uma dificuldade manifestada na aprendizagem dos números racionais.

A conversão entre os diferentes registos de representação, principalmente entre o registo numérico e o registo em linguagem natural, evidencia-se como uma dificuldade na aprendizagem dos números racionais. Para os alunos realizarem a conversão entre dois registos de representação é necessário o reconhecimento do objeto representado entre essas duas representações (Duval, 1995).

Ainda em termos de representação, os alunos revelaram dificuldades em representar na reta numérica as frações, não representando os números, nem o segmento de reta que define a unidade. O contacto com o registo gráfico é recente, o que leva os alunos a sentirem dificuldades na representação de números através deste registo. Aliustaoglua, Tunab e Biberç (2018) evidenciam a dificuldade que os alunos possuem em representar frações na reta numérica, indicando que essas dificuldades se prendem com a divisão do todo em pedaços e a consideração de quantos pedaços devem ser tomados. Estes autores indicam que se torna importante a determinação exata da unidade da fração, antes de ser feita a representação das frações na reta numérica.

Como os alunos contactaram com as frações pela primeira vez, torna-se evidente que ainda não consolidaram o conceito de fração, elevando-se como uma dificuldade, que pode ser extraída à medida que estes alunos contactam com as frações. A compreensão dos alunos acerca das diferentes representações dos números racionais (fração, número decimal, percentagem...) permite o

desenvolvimento da capacidade de raciocínio dos mesmos (Ponte & Quaresma, 2012). Estando ainda, no 2.º ano de escolaridade, restringido o conhecimento apenas à representação sob a forma de fração, os alunos acabam por sentir dificuldades na sua utilização. Muitas vezes, o conceito de fração é explicado através da sua representação simbólica, em que se restringe a dois números, com uma barra entre ambos (Lamon, 2007), não sendo explicado, da melhor forma, o que significa esta representação.

A interpretação de enunciados influenciou a atividade dos alunos, caracterizando-se como uma dificuldade. Como os alunos ainda não sabem ler nem escrever muito bem, a interpretação da informação contida nos enunciados não é devidamente extraída, dificultando a resolução das tarefas.

Os alunos da turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico apresentaram como dificuldades a representação de números na reta numérica, a ordenação de números racionais e a adição e a subtração de frações. Tal como na turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico, os alunos deste ciclo mostraram não estar muito familiarizados com a representação de números através do registo gráfico, devido ao reduzido contacto com este registo. A reta numérica, apesar de trazer dificuldades aos alunos, permite que estes compreendam a comparação de frações, percebendo qual fração é maior ou menor do que outra (Aliustaoğlu, Tunab & Biberç, 2018). A ordenação de números racionais, para alguns alunos, complexificou-se, nomeadamente na comparação entre números positivos e negativos e entre frações com o mesmo numerador ou denominador, podendo a reta numérica auxiliar essa comparação.

Ainda tendo por base as frações, os alunos evidenciaram dificuldades na sua adição e subtração, principalmente no que respeita a frações com diferentes denominadores. Num estudo realizado por Moreira (2014), a subtração dos números racionais escritos sob a forma de fração evidenciou-se como um dos erros apresentados pelos alunos, concluindo-se que esta operação se caracteriza como uma dificuldade na aprendizagem dos números racionais. Estas dificuldades apresentadas, tanto na turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico como na turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico, resultam em erros, que influenciam a aprendizagem dos alunos e que devem ser tidos em conta, em atividades futuras.

Os erros evidenciados pelos alunos da turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico prendem-se com a identificação incorreta da parte de uma figura associada à fração unitária, à associação do conceito 'metade' a qualquer fração como  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{4}$ , entre outras, a omissão do traço de fração na representação através do registo simbólico, a utilização de termos do quotidiano para representar frações através do registo em linguagem natural e a representação através do registo pictórico de números naturais como sendo frações.

Os alunos da turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico apresentam erros que se identificam com a representação de frações como sendo números naturais, principalmente no registo gráfico, em que a

unidade se encontra dividida em partes iguais. Moss e Case (1999) indicam que a diferenciação entre os números racionais e os números inteiros trazem dificuldades aos alunos, pelo facto de os números racionais serem caracterizados, na sua introdução, como um conceito específico que surge na forma  $\frac{a}{b}$ .

A redução ao mesmo denominador faz emergir erros nos cálculos intermédios. Na adição de frações alguns alunos apresentam erros, nomeadamente, na adição simultânea dos denominadores e dos numerados. Por exemplo, perante a expressão  $\frac{5}{2} + \frac{1}{3}$  os alunos apresentam como resultado final a fração  $\frac{6}{5}$ . A falta de conhecimentos acerca dos diferentes registos de representação leva os alunos a errarem quando são incentivados a realizarem conversões entre os registos, principalmente com o registo simbólico e o registo em linguagem natural.

Assim, compreende-se que os erros dos alunos advêm das dificuldades evidenciadas na aprendizagem dos números racionais. Os erros apresentados prendem-se com pormenores que podem ser trabalhados ao longo do tempo e à medida que os alunos ganham maturidade para consolidar conhecimentos.

#### **4.1.3. Que percepções têm os alunos sobre o recurso aos registos de representação semiótica na aprendizagem dos números racionais?**

Os alunos das turmas do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, no final da intervenção pedagógica, responderam a um questionário que pretendia averiguar as suas percepções sobre o recurso aos registos de representação semiótica na aprendizagem dos números racionais. A análise dos questionários permite evidenciar os registos de representação que facilitam a aprendizagem dos números racionais, nas turmas do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, e as vantagens e as desvantagens da utilização desses registos, na turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico.

Os alunos da turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico evidenciaram que o registo pictórico e o registo em linguagem natural foram os registos que facilitaram a sua aprendizagem dos números racionais. Justificam esta escolha apresentando justificações que se identificam com o contacto que possuem com estes tipos de registos. No caso do registo pictórico, os alunos caracterizam-no como sendo o mais fácil de compreender, para além do gosto que têm em desenhar. O registo em linguagem natural facilitou a aprendizagem dos alunos, devido à sua facilidade em ler e, por isso, de conseguirem perceber melhor o que se expressa. Para os alunos da turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico, o registo pictórico facilitou a aprendizagem dos números racionais, pelo facto de ser mais fácil de utilizar e de compreender os conceitos.

Relativamente às vantagens referidas para a utilização dos diversos registos, pelos alunos da turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico, são diversificadas. Em geral, a utilização dos registos de representação favorece a compreensão dos alunos, facilitando a sua aprendizagem, diminuindo as dificuldades e alargando a possibilidade de escolhas para representar os objetos matemáticos. Estes registos de representação permitem uma aprendizagem mais eficaz, no sentido de existir um vasto conjunto de possibilidades de representar um 'objeto' matemático e, para os alunos, se não se entender de uma maneira, existe sempre a possibilidade de se representar através de outro registo e compreender dessa forma.

Os alunos, para além das referidas vantagens, apresentam desvantagens da utilização dos diversos registos de representação. Em geral, os alunos indicam que não existem desvantagens na utilização destes registos, mas, em contrapartida, alguns alunos evidenciam que a existência de diversos registos de representação tende a confundi-los nas suas atividades.

É evidenciado pelos alunos o contributo do trabalho de grupo na aprendizagem, destacando a partilha de ideias, conhecimentos e a possibilidade de se ajudarem uns aos outros. Esta organização dos alunos permite a troca de impressões, o esclarecimento de dúvidas e a partilha de informações (Ministério da Educação, 2007), o que tende a favorecer a aprendizagem dos alunos.

#### **4.2. Reflexão final**

As aprendizagens adquiridas no decorrer da prática pedagógica contribuíram para o meu desenvolvimento pessoal e profissional. Apesar de todos os contratemplos, desafiei-me a proporcionar aos alunos uma aprendizagem diferenciada, motivante e apelativa, seguindo estratégias de ensino que os alunos gostassem e aproveitassem da melhor forma, desde esquemas a jogos. O meu papel durante a intervenção pedagógica prendeu-se com a reflexão, a participação e a criatividade. A reflexão fundamentou a minha prática pedagógica, possibilitando o melhoramento aula após aula, refletindo acerca do que poderia ou deveria ser melhorado, tendo como foco principal os alunos e a sua aprendizagem. Para que os alunos se envolvessem nas atividades das aulas, assumi um papel participativo, para que se sentissem seguros e confiantes nas atividades que realizavam. A criatividade permitiu a criação de atividades diversificadas, tendo por base os documentos curriculares, apelando ao envolvimento dos alunos e à diferença dos seus procedimentos.

Ao longo da prática pedagógica percebi que as representações são a base de toda a aprendizagem e que existem diversos tipos de representações. As características dos alunos, o envolvimento nas atividades diferenciadas, a predisposição para experimentar os diversos registos de representação e a

interação entre os alunos foram os fatores que determinaram o nível de aprendizagens significativas. Contudo, é necessário ter em consideração que os diversos registos de representação possuem potencialidades e limitações. Os diferentes registos de representação potenciam a aprendizagem dos alunos, permitindo-lhes transmitir e compreender o raciocínio. No entanto, podem existir dificuldades na representação, dependendo do nível de autonomia e maturidade dos alunos. É aqui que o professor assume um papel de ajudar e mediar a utilização dos diferentes registos de representação, ajudando os alunos a perceber como se representa convencionalmente um determinado 'objeto' matemático (NCTM, 2007).

Futuramente, depois de todo o processo, compreendo a importância que os diferentes registos de representação possuem na aprendizagem dos alunos, quer na área de matemática, quer em todas as áreas curriculares. Não existe outra forma de representar as ideias mentais, se não por meio de um registo, que ajudará na organização e na construção do conhecimento.

#### **4.3. Limitações e recomendações do estudo**

Apesar de todas as conclusões retiradas da prática pedagógica, durante este estudo surgiram, eventualmente, algumas limitações. A implementação no 1.º Ciclo do Ensino Básico deteve como limitação a imaturidade dos alunos, aliado ao facto de ainda não saberem, convenientemente, ler nem escrever. Se os alunos conseguissem interpretar o que leem, em termos de representação, conseguiriam estruturar melhor o seu raciocínio e compreender o que se pretende em determinada tarefa.

Outra limitação prende-se com o facto de os alunos não estarem habituados a utilizarem alguns tipos de registo de representação, acabando por confundir uns com os outros, dificultando a utilização de todos os tipos de registos na resolução das tarefas propostas.

Relativamente ao 2.º Ciclo do Ensino Básico, manifestou-se a inexperiência do trabalho em grupo que, algumas vezes, limitou a participação dos alunos. Se os alunos conseguissem trabalhar com os colegas, dando oportunidade de partilharem ideias e de todos participarem, seria mais benéfico para a perceção da utilização dos diferentes registos de representação.

Os níveis de desempenho dos alunos influenciaram e limitaram os dados recolhidos, não havendo tempo para conhecer aprofundadamente os alunos e criar grupos heterogéneos que, com certeza, teria favorecido a recolha de dados para o estudo.

Em ambos os Ciclos, uma das limitações considerada significativa foi a escassez de tempo. Se o tempo pudesse ser alargado, teria beneficiado o conhecimento, a problematização do estudo e a pesquisa de documentos teóricos.

Outra das limitações em ambos os Ciclos foi a continuidade das sessões de intervenção, tendo influenciado o tempo de reflexão acerca da prática, o que influencia todo o processo da sua planificação. O mesmo acontece com o número de aulas, que somente se traduziu em cinco aulas em cada uma das turmas de cada ciclo considerado. Caso desse para alargar o número das aulas, os dados recolhidos seriam mais consolidados, resultando em conclusões mais consistentes.

As conclusões retiradas deste estudo possibilitam a definição de alguns aspetos para investigações futuras. Assim, seria pertinente concretizar uma investigação que incida sobre a análise de manuais e dos registos de representação que integram para a aprendizagem dos alunos.

Considero igualmente importante a realização de um estudo que incida sobre a utilização dos diferentes registos de representação pelos alunos na aprendizagem de outros tópicos matemáticos, percebendo se há influência dos tópicos matemáticas na utilização dos diversos registos.

Por fim, devo salientar que seria importante a realização de um estudo que incida sobre a utilização dos diferentes registos de representação na resolução de problemas. Nos documentos oficiais, é dado um elevado grau de importância à resolução de problemas e, por isso, seria pertinente desafiar os alunos com problemas, tendo estes que recorrer à utilização de diversos registos de representação.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AEVA (2017). *Uma Escola Promotora de Sucesso para Todos com a colaboração, cooperação e envolvimento de Todos!* Braga: Projeto Educativo.
- Aliustaoglua, F., Tunab, A., & Biberç, A. C. (2018). Misconceptions of Sixth Grade Secondary School Students on Fractions. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 10, 591-599.
- Alves, V. S. (2012). *A construção do conceito de número racional no sexto ano do ensino fundamental*. Universidade Federal de Alagoas. Maceió, AL.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação: fundamentos, métodos e técnicas*. Porto: Porto Editora.
- Bonomi, M. C. (2015). *Dificuldades no ensino-aprendizagem de matemática: a semiótica pode ajudar?* São Paulo. Acedido em 20 de junho, 2019, de [https://www.ime.usp.br/caem/anais\\_mostra\\_2015/arquivos\\_auxiliares/palestras/Palestra2\\_CrisBonomi.pdf](https://www.ime.usp.br/caem/anais_mostra_2015/arquivos_auxiliares/palestras/Palestra2_CrisBonomi.pdf).
- Brandl, E., Poffo, A. P., & Silva, A. R. (2016). Análise de atividades envolvendo os números racionais não negativos sob a ótica da teoria da registros de representação semiótica de Duval. *V SINECT*.
- Canavaro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.
- Canavaro, P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In P. Canavaro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Orgs.), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática*. Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. Acedido em 13 de junho, 2019 de [http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7041/1/Canavaro\\_Oliveira\\_Menezes\\_eiem.p df](http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7041/1/Canavaro_Oliveira_Menezes_eiem.p df).
- Cardoso, P., & Mamede, E. (2017). Dificuldades em ensinar frações no 1.º Ciclo do Ensino Básico. *Educação e Matemática*. Acedido em 14 de setembro, 2019, de <http://hdl.handle.net/1822/52502>.
- D' Amore, B. (1999). *Conceptualisation, registers of semiotic representation and noetic in mathematical education*, 1-7. Acedido em 20 de agosto, 2019, de <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/Jdamoreingl.PDF>.
- Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* (pp. 37-65). Strasbourg: IREM – ULP.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Duval, R. (2010). Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique. *AMAZÔNIA - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, 6, 126-143.
- Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *REVEMAT*, 7(2), 266-297.
- Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. (T. M. Campos, Ed.). Cham: Springer.
- Feteira, S. S. (2012). *Os números racionais, na sua representação por frações, nos primeiros anos de escolaridade*. Dissertação do Mestrado em Educação e Tecnologia em Matemática, Instituto Politécnico de Leiria, Escola Superior de Tecnologia e Gestão.
- Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. A. Cuoco, & F. R. Curcio (Eds), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173- 185). Reston : VA: NCTM.
- Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197- 218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *Roles of representation in school mathematics - 2001 Yearbook* (pp. 1-23). Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ianhes, C. (s.d.). *A aprendizagem efectiva para todos através de metodologias de ensino cooperativo*. Dissertação de Mestrado em Matemática/Educação, Universidade Portucalense.
- Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: paper from a research workshop* (pp. 101-145). Columbus, OH:ERIC/SMEAC.
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for Research. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-668). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Machado, S. D. (2003, Org.). *Aprendizagem em matemática: Registro de representação semiótica*. Campinas, SP: Coleção Papyrus Educação, Papyrus Editora.

- Martins, M. d. (2012). *Avaliação Diagnóstica: a sua influência na prática letiva na disciplina de Biologia e Geologia*. Instituto Superior de Educação e Ciências. Acedido em 13 de junho de 2019, de <https://comum.rcaap.pt/bitstream/10400.26/9054/1/Disserta%C3%A7ao%20Final%20OF%C3%A1tima%20Martins.pdf>.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.
- Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática*. Lisboa: Autor.
- Ministério da Educação e Ciência (2018). *Aprendizagens essenciais de Matemática*. Lisboa: Direção-Geral da Educação.
- Morais, C., Cerca, R., Quaresma, M., & da Ponte, J. P. (2014). Os números racionais no 2.º ano: um estudo diagnóstico. In M. Martinho, H., Tomás Ferreira, R. A., A. M. Boavida, & L. Menezes (Eds.), *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 91–109). Braga: APM.
- Moreira, R. S. (2014). *Erros cometidos pelos alunos ao estudar númeors racionais na sua forma fracionária em um escola pública de Vitória da Conquista*. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Vitória da Conquista – Bahia.
- Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 122-147.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Oliveira, J. N. (2016). Dificuldades na aprendizagem dos números racionais: confrontando dois níveis de escolaridade. In *XII Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 1-12). São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.
- Oliveira, L. M. (2014). *Aprendizagens no empreendimento estudo do raciocínio proporcional*. Londrina: Unviersidade Estadual de Londrina.
- Pacheco, J. A. (1994) *A Avaliação dos alunos na perspectiva da reforma*. Proposta de trabalho. Porto: Porto Editora.
- Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2012). Compreensão dos números racionais, comparação e ordenação: o caso de Leonor. *Interações*, 20, 37-69.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2011). Tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática. *Educação Matemática em Foco*, 1(1), 9-29.

- Queiroz, J. (2010). Sistemas semióticos, artefatos cognitivos, Umwelt – uma contribuição ao Design da Informação. *InfoDesign – Revista Brasileira de Design da Informação*, 7, 7-12.
- Santana, L. E., Lima, L. H., Silva, S. H., & Oliveira, B. P. (2013). Fração e seus diferentes registros de representação semiótica: uma análise da percepção de futuros pedagogos. In *XI Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 1-13). Curitiba.
- Silva, F. A., Santiago, M. M., & dos Santos, M. C. (2014). Significados e representações dos números racionais abordados no exame nacional do ensino médio – ENEM. *Bolema*, 28(50), 1485-1504.
- Sousa F., Cebolo, V., Alves, B., & Mamede, E. (2009). *Comunicação matemática: contributos do PFCM na reflexão das práticas de professores*. Lisboa: APM.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008) Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell, *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.
- Woleck, K. (2001). Listen to their pictures: An investigation of children's mathematical drawings. In A. Cuoco, & F. Curcio (Eds.), *Roles of representation in school mathematics - 2001 Yearbook* (pp. 215-227). Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

## **ANEXOS**

## Anexo A – Questionário inicial (1º Ciclo)

1. Qual é a área disciplinar que mais gostas (+)? E que menos gostas (-)?

Português     Matemática     Estudo do meio     Expressões

2. Gostas de Matemática?

Sim     Não     Mais ou Menos

Justifica a tua opção:

---

---

---

3. Tens dificuldades em Matemática?

Sim     Não

Se sim, em que conteúdos matemáticos tens mais dificuldade?

---

---

---

4. Que atividades mais gostas de fazer na aula de Matemática?

---

---

---

5. Como gostas mais de trabalhar nas aulas de matemática? Justifica a tua opção.

Trabalho individual     Trabalho a pares     Trabalho em grupo

---

---

---

## Anexo B - Questionário final (1º Ciclo)

1. O que mais gostaste de fazer nas aulas em que aprendeste frações?

---

---

2. O que menos gostaste de fazer nas aulas em que aprendeste frações?

---

---

3. Que dificuldades sentiste nas aulas em que aprendeste frações?

---

---

4. Gostaste de trabalhar em pares? Como avalias a tua participação com o teu par?

---

---

5. Que representações te ajudaram a perceber melhor as frações?

Desenhos     Linguagem Natural     Representação simbólica

Justifica a tua resposta.

---

---

6. Que representações tiveste mais dificuldade em perceber?

Desenhos     Linguagem Natural     Representação simbólica

Justifica a tua resposta.

---

---

### **Anexo C – Questionário inicial (2º Ciclo)**

**1.** Quais são as tuas disciplinas preferidas? Porquê?

---

---

**2.** Quais são as disciplinas que menos gostas? Porquê?

---

---

**3.** Quais são as disciplinas que tens mais dificuldades? Porquê?

---

---

**4.** Gostas da disciplina de matemática? Justifica a tua resposta.

---

---

**5.** Qual foi a nota que obtiveste no final do 1.º período, deste ano letivo, na disciplina de matemática? \_\_\_\_\_

**6.** Como gostas mais de trabalhar nas aulas de matemática?

Trabalho individual     Trabalho a pares     Trabalho em grupo

Justifica a tua opção.

---

---

**7.** O que mais gostas de fazer nas aulas de matemática?

---

---

**8.** O que menos gostas de fazer nas aulas de matemática?

---

---

**9.** Quais as dificuldades que sentiste quando aprendeste as frações?

---

---

**10.** Consideras as frações um conteúdo fácil ou difícil de aprender? Justifica a tua resposta.

---

---

**11.** Que representações consideras que facilitaram a tua compreensão na aprendizagem das frações?

Representação figural     Representação numérica     Linguagem natural

Justifica a tua resposta.

---

---

**12.** Que representações consideras que dificultaram a tua compreensão na aprendizagem das frações?

Representação figural     Representação numérica     Linguagem natural

Justifica a tua resposta.

---

---

**Obrigada pela tua participação!**

## Anexo D – Questionário final (2º Ciclo)

Este questionário tem como objetivo recolher as perceções dos alunos acerca das diferentes representações no ensino dos números racionais.

A informação recolhida será usada exclusivamente para fins académicos, preservando o anonimato.

**Nome:** \_\_\_\_\_ **Idade:** \_\_\_\_\_

Responde a cada uma das seguintes afirmações assinalando com um **x** o grau de concordância, considerando a seguinte escala:

**DT:** Discordo totalmente; **D:** Discordo; **I:** Indiferente; **C:** Concordo; **CT:** Concordo totalmente

<b>Afirmações</b>	<b>DT</b>	<b>D</b>	<b>I</b>	<b>C</b>	<b>CT</b>
1. Gostei de aprender os números racionais.					
2. Já utilizava as diferentes representações dos números racionais.					
3. Trabalhar em pares favoreceu a minha aprendizagem dos números racionais.					
4. Aprendo melhor quando utilizo diversas representações.					
5. A representação pictórica facilitou a minha aprendizagem dos números racionais.					
6. Adquiri novos conhecimentos acerca dos números racionais.					
7. A linguagem natural facilitou a minha aprendizagem dos números racionais.					
8. Trabalhar em pares permitiu a partilha de diferentes representações de números racionais.					
9. A possibilidade de contactar com as diferentes representações dos números racionais ajudou-me na aprendizagem.					
10. Senti uma evolução na aprendizagem dos números racionais.					
11. A utilização das diferentes representações confundiu-me na aprendizagem dos números racionais.					
12. Os números racionais estão muito presentes no meu dia a dia.					
13. Prefiro trabalhar com a linguagem natural do que com a representação simbólica e a representação pictórica.					
14. Trabalhar em pares beneficiou a troca de ideias na resolução das tarefas propostas.					
15. Recorrer a diferentes representações dos números racionais dificultou a minha aprendizagem					
16. A discussão sobre a resolução das tarefas ajudou a compreender o papel das diferentes representações na aprendizagem de números racionais.					
17. Descobrir por mim os conceitos matemáticos é mais aliciante do que ser o professor a apresentá-los.					
18. Já possuía conhecimentos acerca das diferentes representações dos números racionais.					
19. A aprendizagem de tópicos dos números racionais é importante para o meu quotidiano.					
20. Prefiro trabalhar com a representação pictórica do que com a representação simbólica e a linguagem natural.					
21. A representação simbólica dificultou a minha aprendizagem dos números racionais.					
22. Compreendi melhor os números racionais do que outros conteúdos matemáticos.					
23. Usar diferentes representações facilitou a resolução de tarefas.					
24. Prefiro trabalhar com a representação simbólica do que com a representação pictórica e a linguagem natural.					
25. Os números racionais são difíceis de aprender.					

1. Indica, justificando, **três vantagens** da utilização de diversas representações na aprendizagem dos números racionais.

---

---

---

2. Indica, justificando, **três desvantagens** da utilização de diversas representações na aprendizagem dos números racionais.

---

---

---

3. Refere, justificando, que representação **facilitou** a tua aprendizagem dos números racionais.

---

---

---

4. Refere, justificando, que representação **dificultou** a tua aprendizagem dos números racionais.

---

---

---

Obrigada pela colaboração!

Professora Ana Luísa

## Anexo E – Planificação 1ª Aula (1º Ciclo)

**Tópico:** Frações unitárias.

*Comentários*

**Objetivos:** Introduzir a noção de fração. Utilizar as frações unitárias para relacionar as partes de um todo.

**Formato de ensino:** Ensino exploratório.

### Atividade motivacional

Na aula de Matemática do 2.º ano, o João aprendeu algumas formas geométricas e, quando chegou a casa, decidiu fazer as mesmas em cartolina de diferentes cores. Entretanto, chegou o seu amigo Rui que acabou por destruir as figuras geométricas, cortando-as aos pedacinhos. O João muito chateado atirou as figuras para o chão e acabou por espalhá-las. O Rui disse-lhe que tinha dividido as figuras em partes iguais para lhe mostrar o que tinha aprendido hoje na escola.

1. Que figuras geométricas terá o João desenhado?
2. Depois de compostas as figuras geométricas, o Rui disse “dividi o triângulo e o quadrado em duas partes iguais”. Como representar cada uma dessas partes?
3. Depois de explicar ao João o que fez ao triângulo e ao quadrado, o Rui explicou ao amigo que dividiu o retângulo em três partes iguais, o círculo em quatro partes iguais e o pentágono em cinco partes iguais para lhe mostrar os números que aprendeu na aula de matemática. Que números são esses?

### Exploração

1. Solicitar os alunos a referir as figuras geométricas que o João desenhou.
2. Distribuir aos alunos as diferentes partes das figuras geométricas que o Rui cortou, pedindo que, posteriormente, se juntem aos colegas que tenham uma parte da mesma cor.
3. Analisar com os alunos em quantas partes cada figura geométrica foi dividida.
4. Representar cada uma das partes em que as figuras foram divididas.
5. Introduzir a noção de fração e dos seus termos, assim como de fração unitária.

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório: (1) Introdução da tarefa; (2) Exploração da tarefa; (3) Discussão.

Na resolução da tarefa pretende-se, numa primeira instância, que os alunos refiram as figuras geométricas já estudadas (triângulo, quadrado, retângulo, círculo e pentágono).

Posteriormente, os alunos contactam pela primeira vez com frações unitárias.

### Prática

1. Escreve as frações que correspondem à parte pintada em cada uma das situações.



2. Pinta as figuras de acordo com as frações indicadas.



3. Indica, em cada situação, a parte pintada utilizando duas representações diferentes.



Evidenciar as diferentes representações de frações unitárias

Por fração entende-se como uma representação de uma ou mais partes iguais em que um todo foi dividido.

Por frações unitárias entende-se as frações que têm como numerador a unidade.

---

**Desafio**

A Professora de Matemática deu aos alunos um chocolate retangular e pediu que em casa o dividissem em quantas partes quisessem. A Maria decidiu dividir o chocolate em duas partes, o João em três partes, a Rita em quatro partes e o Rui em cinco partes. Se cada um comer um bocado de chocolate, quem vai comer mais?

Mostra como chegaste à tua resposta.

**Síntese**

**1.** Quando chegares a casa, como vais explicar o que aprendeste na aula de hoje?

**2.** Tiveste dificuldades em realizar que atividades? (Coloca uma cruz nas atividades)

<input type="checkbox"/>	Perceber o que é uma fração	<input type="checkbox"/>	Escrever a fração que corresponde à parte pintada
<input type="checkbox"/>	Pintar a parte que corresponde à fração	<input type="checkbox"/>	Desenhar figuras
<input type="checkbox"/>	Entender os enunciados	<input type="checkbox"/>	Outra: _____

**Materiais:**

Lápis, borracha, pedaços de cartolina de várias cores e cola.

---

## Anexo F – Planificação 2ª Aula (1ºCiclo)

**Tópico:** Frações unitárias.

*Comentários*

**Objetivo:** Utilizar frações unitárias para referir cada uma das partes de um todo.

**Formato de ensino:** Ensino exploratório.

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório:

- (1) Introdução da tarefa;
- (2) Exploração da tarefa;
- (3) Discussão.

### Atividade motivacional

No dia do aniversário do João, a avó fez um bolo retangular para lanchar com três amigos. Quando o bolo foi dividido, a avó teve em conta que todos deveriam comer a mesma quantidade de bolo.

1. De que forma a avó pode dividir o bolo?
2. Que quantidade de bolo comeu cada criança?

### Exploração

1. Sugerir aos alunos que desenhem nos seus cadernos as diferentes formas que traduzam a divisão do bolo pela avó do João.
2. Pedir aos alunos que traduzam numericamente cada fatia do bolo que resultou da divisão pela avó do João.
3. Pedir aos alunos para comentarem a seguinte afirmação: “Se a avó dividisse o bolo em 5 fatias, o João e os amigos comeriam mais bolo”.

### Prática

1. Completa o quadro de modo a traduzir a parte pintada em cada uma das figuras:

Figuras				
Representações				
Representação numérica				
Linguagem natural				

Na resolução da tarefa pretende-se que os alunos pratiquem a conversão das frações nas diferentes representações (representação simbólica, pictórica e linguagem natural).

2. Completa o quadro de modo a representar as frações:

Representação numérica	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
Representações				
Desenho				
Linguagem natural				

3. Completa o quadro de modo a apresentar as diferentes frações:

Linguagem natural	Um quarto	Um sétimo	Um oitavo	Um décimo
Representações				
Desenho				
Representação numérica				

---

**Desafio**

A Joana tem um conjunto de tapetes quadrados de várias cores: amarelo, branco, verde e laranja. Sabe-se que a cor branca é o fundo de um tapete retangular e que este se encontra dividido em 8 quadrados iguais. Com base nestas referências, representa o tapete retangular sobreposto com os tapetes de várias cores, através das seguintes situações:

1. Metade verde e metade laranja.
2.  $\frac{1}{8}$  laranja,  $\frac{1}{8}$  verde e  $\frac{1}{8}$  amarelo.
3. Um quarto laranja.
4.  $\frac{1}{4}$  laranja,  $\frac{1}{4}$  verde e  $\frac{1}{4}$  amarelo.

**Síntese**

1. O que aprendeste na aula de hoje?
2. Tiveste dificuldades em realizar as atividades? (Coloca uma cruz)

<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>

Perceber o que é uma fração

Pintar a parte que corresponde à fração

Entender os enunciados

<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>

Escrever a fração que corresponde à parte pintada

Desenhar figuras

Escrever a fração que corresponde à parte pintada em linguagem natural

**Materiais:**

Lápis e borracha.

---

## Anexo G – Planificação 4ª Aula (1º Ciclo)

**Tópico:** Frações unitárias.

*Comentários*

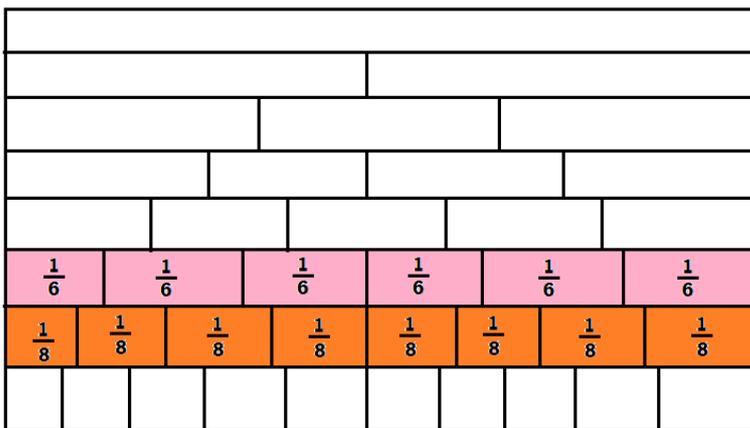
**Objetivos:** Identificar frações unitárias num segmento de reta. Utilizar as frações unitárias para relacionar as partes de um todo.

**Formato de ensino:** Ensino exploratório.

### Atividade motivacional

A professora da Raquel desafiou os alunos a resolverem um esquema. O esquema estava dividido em partes e a professora deu aos alunos as partes que faltavam, tendo estes que colocar no respetivo local.

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório: (1) Introdução da tarefa; (2) Exploração da tarefa; (3) Discussão.



O esquema será estruturado numa cartolina, tendo os alunos que colar as partes que faltam, de modo a completar o esquema.

1. Como se chamam os números representados nas partes cor de rosa e laranja do esquema?
2. Que números faltam em cada parte?
3. Que parte do esquema se traduz na maior quantidade?

*Nesta tarefa pretende-se que os alunos associem as partes à respetiva fração.*

### Exploração

1. Distribuir pelos alunos as partes do esquema.
2. Sugerir que completem o esquema.
3. Questionar os alunos acerca dos números integrados em cada parte (cor de rosa e laranja).
4. Pedir que representem cada parte do esquema numa fração.

### Prática

1. Completa o quadro.

Desenho	Linguagem natural	Reta numérica
	Um meio	
	Um	

*Nesta tarefa pretende-se que os alunos relacionem as frações e os números naturais através da representação pictórica, da linguagem natural e da reta numérica.*

---

**Desafio**

Representa as frações  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{7}$  e  $\frac{1}{9}$  e os números 1, 2 e 3 na forma de um retângulo, círculo, segmento de reta e linguagem natural.

*Com este desafio pretende-se que os alunos relacionem a representação dos números naturais com a representação das frações, na reta numérica.*

**Síntese**

1. O que aprendeste na aula de hoje?

2. Tiveste dificuldades em realizar que atividades? (Coloca uma cruz)

Perceber o que é uma fração

Escrever a fração que corresponde à parte pintada

Indicar num segmento de reta as frações

Desenhar segmentos de reta

Entender os enunciados

Escrever a fração que corresponde à parte pintada em linguagem natural

**Materiais:**

Lápis, borracha, pedaços de papel coloridos e cola.

---

## Anexo H – Planificação 2ª Aula (2ºCiclo)

**Tópico:** Ordenação e comparação de números racionais.

*Comentários*

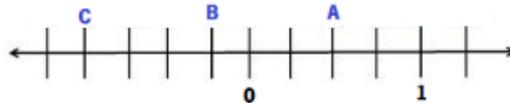
**Objetivos:** Representar e comparar frações.

**Conhecimentos prévios:** Noção de número racional. Ordenar frações.

**Formato de ensino:** Ensino exploratório.

### Atividade motivacional

Na reta numérica colocaram-se as letras  $A$ ,  $B$  e  $C$ , sabendo-se que se encontra dividida em partes iguais e que cada parte se pode traduzir por um ponto.



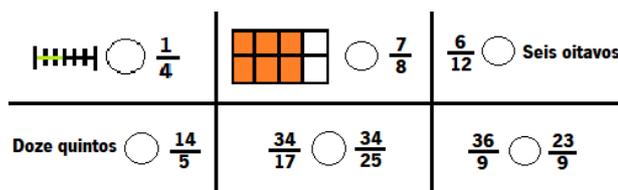
1. Quais são os números que correspondem aos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ ?
2. Qual o maior número representado na reta numérica? E o menor?
3. Representa o ponto  $A$  em duas representações distintas.

### Exploração

1. Solicitar os alunos a referirem o valor dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
2. Questionar os alunos acerca do maior valor e do menor valor representados na reta numérica.
3. Incentivar os alunos a representarem a fração um meio em duas representações distintas.

### Prática

1. Representa na reta numérica as frações  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{4}{4}$  e  $\frac{5}{4}$ .
2. Representa, por ordem crescente, as frações  $\frac{1}{4}$ ,  $-\frac{1}{2}$  e  $-\frac{1}{4}$ .
3. Comparar as frações seguintes, utilizando os símbolos  $>$  ou  $<$ .



O formato de ensino adquire características do ensino exploratório:

- (1) Introdução da tarefa;
- (2) Exploração da tarefa;
- (3) Discussão.

Nesta tarefa pretende-se que os alunos apresentem as diferentes representações da fração em questão.

Nesta tarefa pretende-se que os alunos realizem a conversão dos números racionais nas diferentes representações.

### Desafio

Numa mesa, onde estavam sentadas cinco pessoas, havia sete pães.  
 Noutra mesa, onde estavam sentadas quatro pessoas, havia cinco pães.  
 Em que mesa há mais pão para cada pessoa?  
 (Sugestão: Na tua resposta considera mais do que uma representação)

### Síntese

1. O que aprendeste na aula de hoje?
2. Que dificuldades sentiste?
3. Que representações facilitaram a tua compreensão dos tópicos da aula? Porquê?
4. Que representações dificultaram a tua compreensão dos tópicos da aula? Porquê?

### Materiais:

Lápis, borracha e régua.

## Anexo I – Planificação 3ª Aula (2º Ciclo)

**Tópico:** Adição de números racionais.

*Comentários*

**Objetivo:** Adicionar números racionais com o mesmo sinal.

**Conhecimento prévio:** Adicionar frações.

**Formato de ensino:** Ensino exploratório.

### Atividade motivacional

O Ricardo estava de férias num local onde a temperatura variava. No primeiro dia de férias, o termómetro marcava  $2^{\circ} C$  às 9h da manhã e até à hora de almoço aumentou  $3^{\circ} C$ . No quinto dia de férias, o termómetro marcava  $-3^{\circ} C$  às 7h da manhã e diminuiu dois graus até às 10h da manhã.

1. Que temperatura atingiu o termómetro, no primeiro dia de férias do Ricardo, na hora de almoço? Mostra como chegaste à tua resposta.

2. Que temperatura atingiu o termómetro, no quinto dia de férias, às 10h da manhã? Mostra como chegaste à tua resposta.

### Exploração

1. Questionar os alunos acerca da evolução das temperaturas nos dois dias referidos.

2. Solicitar os alunos a encontrar as temperaturas dos dois dias.

3. Comparar os valores no primeiro tempo e no segundo tempo do primeiro dia e do segundo dia.

4. Pedir aos alunos para discutirem a seguinte questão: “O Ricardo tem uma amiga que não sabe somar números racionais com o mesmo sinal. Para a ajudar deu-lhe as seguintes indicações: representa na reta numérica uma das frações e de seguida para lhe adicionar a outra fração, se esta for positiva desloca-te a partir da primeira para a direita, caso seja negativa desloca-te para a esquerda”. Concordas com o Ricardo? Verifica nas seguintes adições:  $\frac{3}{4} + \frac{7}{4}$ ,  $-\frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right)$ .

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório: (1) Introdução da tarefa; (2) Exploração da tarefa; (3) Discussão.

Incentivar os alunos a fazer o registo dos dados.

Nesta tarefa, pretende-se que os alunos apresentem a representação que lhes facilita a descoberta do resultado.

5. Generalizar a soma dos números racionais com o mesmo sinal.

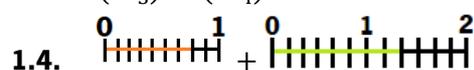
### Prática

1. Calcula.

1.1.  $(+3) + (+8)$

1.2.  $(-12) + (-8)$

1.3.  $\left(+\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right)$



1.6. A soma de mais cinco com menos dois

1.7. A soma de menos dez com menos três

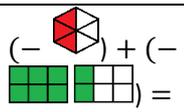
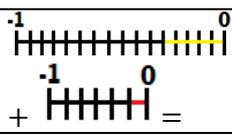
1.8.  $\left(+\begin{array}{c} \triangle \\ \square \end{array}\right) + \left(+\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array}\right)$

1.9.  $\left(-\begin{array}{c} \triangle \\ \square \end{array}\right) + \left(-\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}\right)$

Nesta tarefa pretende-se que os alunos adicionem números racionais em diferentes representações.

2. Completa o quadro com as diferentes representações e os respetivos resultados.

Nesta tarefa pretende-se que os alunos realizem a conversão dos números racionais nas diferentes representações, paralelamente será feita a adição dos números racionais.

Representação numérica	Representação pictórica	Linguagem natural
$\left(+\frac{9}{12}\right) +$ $\left(+\frac{10}{12}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$		
		A soma de mais um quarto com mais dois sextos é igual a _____.
	 $(-\frac{1}{4}) + (-\frac{2}{6}) =$	
	 $+ (-1) + (-1) =$	

### Desafio

O João estava a lançar dois dados, fazendo a adição dos dois números que obteve. Num dado, o João obteve o número  $+\frac{1}{3}$ , e no outro dado o número dois quintos. Que resultado obteve o João?

Sugestão: Apresenta a tua resolução em três representações distintas.

### Síntese

1. O que aprendeste na aula de hoje?
2. Que dificuldades sentiste?
3. Que representações facilitaram a tua compreensão dos tópicos da aula? Porquê?
4. Que representações dificultaram a tua compreensão dos tópicos da aula? Porquê?

### Materiais:

Lápis e borracha.

## Anexo J – Planificação 5ª Aula (2º Ciclo)

**Tópico:** Subtração de números racionais.

*Comentários*

**Objetivo:** Subtrair números racionais.

**Conhecimentos prévios:** Subtrair frações.

**Formato de ensino:** Ensino exploratório.

### Atividade motivacional

Três amigos vivem no mesmo prédio em andares diferentes. O prédio tem 6 andares, a entrada no rés do chão e no piso menos um tem a garagem. A Rita mora no 2.º andar, o João mora no 6.º andar e o Miguel mora três andares abaixo do João.

1. Em que andar vive o Miguel?
2. Se o pai da Rita tem o carro na garagem, quantos andares terá de descer para ir do seu apartamento até ao carro? Justifica a tua resposta.
3. Se um vizinho do prédio morar no 1.º andar e subir dois andares, a que andar foi? Compara este resultado com o que obtiveste em 2.
4. O Miguel desceu da entrada do prédio para a garagem. Traduz uma expressão que represente esta situação.
5. Quantos andares distam do apartamento do João até ao apartamento da Rita? Justifica a tua resposta.

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório:

- (1) Introdução da tarefa;
- (2) Exploração da tarefa;
- (3) Discussão.

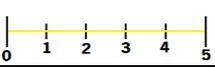
Nesta tarefa, pretende-se que os alunos contactem com as diferentes representações.

### Exploração

1. Solicitar aos alunos o registo da informação.
2. Questionar os alunos em que andar vive o Miguel.
3. Transformar a subtração entre dois números racionais numa adição.
4. Esclarecer com os alunos a subtração entre o zero e um número racional.
5. Determinar com os alunos a expressão do simétrico de um número racional não negativo.
6. Definir a medida da distância entre dois pontos.

### Prática

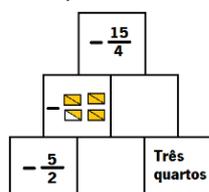
Completa o quadro.

–	–7	Menos dois	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{6}$		Zero
Menos sete						
–2						
$-\frac{1}{4}$						
– 						
+5						
0						

Nesta tarefa pretende-se que os alunos realizem a subtração dos números racionais, apresentados em diversas representações.

### Desafio

Completa o esquema, sabendo que o valor de cada quadrado é igual à diferença dos dois quadrados de baixo.



O desafio tem como objetivos: o cálculo da subtração de números racionais e a conversão das diferentes representações dos números racionais.

---

**Síntese**

1. O que aprendeste na aula de hoje?
2. Que dificuldades sentiste?
3. Que representações facilitaram a tua compreensão dos tópicos da aula? Porquê?
4. Que representações dificultaram a tua compreensão dos tópicos da aula?  
Porquê?

**Materiais:**

Lápis e borracha.

---