Jose Anastacio da Cunha

O TEMPO, AS IDEIAS, A OBRA...

ESTUDOS
DOS
INÉDITOS ANASTACIANOS

Logarithms & Powers: Um Comentário

João Caramalho Domingues *
António Leal Duarte **
Maria Elfrida Ralha *
José Francisco Rodrigues ***

1. Introdução

No prefácio ("Avertissement du Traducteur") à tradução em francês dos *Principios Mathematicos* [1] o tradutor, João Manuel d'Abreu, informa-nos da existência de um conjunto de trabalhos inéditos – afirmando possuir a maior parte dos manuscritos autógrafos e os quais esperava poder publicar dentro de pouco tempo – deixados pelo seu mestre, José Anastácio da Cunha. Desses inéditos são, nessa nota introdutória, referidos os títulos de seis, sendo o segundo título precisamente *On powers and logarithms*. Por outro lado, com vista a uma publicação desses trabalhos, escreveu João Manuel d'Abreu uma carta-dedicatória ao Príncipe Regente D João VI, acompanhada de um índice com os títulos dos inéditos, dedicatória essa que se conserva no processo de Anastácio da Cunha no Arquivo Histórico-Militar [2]. De acordo com esse índice, os "Escritos posthumos" seriam constituídos por quinze trabalhos inéditos, sendo o terceiro – "Extract from an original MS" – o único referido em inglês; logo a seguir pode ler-se "Refere-se ao L IX" [3]. Tratar-se-á, por isso, do texto (ou de parte dele) que anteriormente Abreu identificara como "On Powers and Logarihms", e que pensamos ser o manuscrito com o título *Logarithms & Powers* agora publicado e que aqui analisamos.

Como é sabido o tema "potências e logaritmos" é tratado pelo nosso autor no Livro IX dos seus *Principios Mathematicos*; este tema, tanto

* Universidade do Minho e CMAT/FCT.
** Universidade de Coimbra e CMUC/FCT.
*** Universidade de Lisboa e CMUC/FCT.

[1] Cunha, J. A. [1811/1987, pp. i- ii].

[2] Ferro, J. P. [1987, p 22]. Por razões desconhecidas estes "escritos posthumos" nunca vieram a ser publicados. Sobre uma possível ordenação dos dois documentos indicativos das obras de José Anastácio da Cunha ver, no início deste volume, o texto "Projecto Anastaciano" de Maria Elfrida Ralha.

[3] Abreu, J. M. d' [1990, p. 354]; lê-se "L. X." mas trata-se de um erro de transcrição uma vez que no original está "L. IX".

quanto nos é possível perceber, deveria ser um tema importante no pensamento de Anastácio da Cunha, pelo menos a julgar pelo testemunho do seu discípulo e amigo João Manuel d'Abreu. De facto, no prefácio da tradução francesa dos *Principios Mathematicos* – querendo mostrar os méritos da obra do seu mestre – João Manuel d'Abreu apresenta apenas um exemplo: "la définition fondamentale de son IX^{me}. livre"; seguindo-se uma discussão sobre essa mesma definição que se prolonga durante quase uma página [4]. Também nas respostas à recensão de John Playfair [5], quer João Manuel d'Abreu [6], quer Anastácio Joaquim Rodrigues [7], dão grande relevo à forma como a "exponencial" é tratada no Livro IX; a este respeito escreve, em particular, Rodrigues "capacito-me que entre os mathematicos de nome o maior numero pensará como o geometra português".

Como é sabido, os logaritmos foram inventados por John Neper (ou Napier) e Jost Bürgi no início do século XVII a partir da correspondência de duas progressões (uma geométrica e outra aritmética) e tendo como objectivo a simplificação dos cálculos, transformando produtos em somas [8].

> "LOGARITHME, s. m. *(Arithmét.)* nombre d'une progresson arithmétique, lequel répond à un autre nombre dans une progression géométrique. (...)
> Ces *logarithmes* ont été inventés pour render le calcule plus expéditif, comme on verra plus bas"

escreve d'Alembert na "Encyclopédie" [9].

Outras abordagens foram surgindo tendo em vista, entre outros objectivos, o cálculo das Tábuas de logaritmos; assim Gregorius de St. Vicent – na sua "Opus Geometricorum" de 1647 – descobre a propriedade logarítmica da área limitada pela hipérbole definida pela equação $y = \frac{1}{x}$, pelo eixo das abcissas e por duas rectas paralelas ao eixo das ordenadas: fixando a paralela correspondente à menor abcissa e deixando variar

---

[4] Cunha, J. A. [1811/1987, p. vi]. Curiosamente um outro discípulo, Anastácio Joaquim Rodrigues [1811/1987], na recensão crítica desta edição que publica em 1811 no *Moniteur Universel*, refere-se ao Livro IX de Anastácio da Cunha com uma curta frase "L'auteur a consacré son 9^e livre au développement de la théorie des puissances et des logaritmes...", dando muito maior relevo ao Livro XV (sobre o Cálculo Diferencial) que apelida de "le Chef de ouvre de M. da Cunha". Sobre Anastácio Joaquim Rodrigues/Roiz e a fundamentação do Cálculo Diferencial veja-se João Caramalho Domingues [1999].

[5] Playfair, J. [1811].

[6] Abreu, J. M. d' [1813/1987].

[7] Roiz, A. J. [1813/1987].

[8] Naux, C. [1966, 1970]; Maor, E. [1994].

[9] D'Alembert, J. R. [1784/1987 Logarithme].

a outra de forma a que as respectivas áreas formem uma progressão aritmética, as abcissas correspondentes formam uma progressão geométrica e vice-versa. Contudo, St. Vincent não refere logaritmos mas, logo em 1649, Alfons Anton de Sarasa reformula este resultado em termos de logaritmos [10].

Esta relação entre a quadratura da hipérbole e os logaritmos será, posteriormente, explorada por Nicolaus Mercator, James Gregory, John Wallis e Isaac Newton que obtém a expansão em série dos logaritmos hiperbólicos:

$$\log(1+x)=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

A partir destas séries, Newton, usará as relações:

$$\frac{1}{2}[\log(1+x)-\log(1-x)]=\sum_{1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{2}[\log(1+x)+\log(1-x)]=\sum_{1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n}$$

para o cálculo efectivo dos logaritmos naturais [11], sendo que estas séries convergem muito mais rapidamente do que a anterior.

Note-se ainda que usando as propriedades dos logaritmos e fazendo $y=\frac{1+x}{1-x}$ a primeira daquelas duas séries transforma-se em

$$\log(y)=2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2n+1}$$

A facilidade que o uso das séries trouxe ao cálculo dos logaritmos desencadeou naturalmente tratamentos analíticos dos mesmos. Assim Edmond Halley [12] define logaritmo de uma forma que, continuando a usar notações actuais e no caso dos logaritmos naturais, se pode traduzir como

$$\log(1+q)=\lim\frac{(1+q)^{\frac{1}{n}}-1}{n}$$

---

[10] Cajori, F. [1913 pp. 12-13]; Naux, C. [1966, pp. 31 e seguintes].

[11] Naux, C. [1966, p. 70].

[12] Halley, E. [1695-1697].

Para efeitos de cálculo, $(1+q)^{\frac{1}{n}}$ seria desenvolvido de acordo com a fórmula do binómio de Newton. Em seguida Halley trata a exponencial como a função inversa do logaritmo. Esta abordagem será, mais tarde, retomada por Euler mas partindo da exponencial e tomando o logaritmo como a função inversa.

2. O manuscrito: descrição e problemas

O presente manuscrito apresenta-se-nos constituído por sete folhas escritas na frente e no verso, em inglês, estando as páginas, a partir da segunda (e com excepção da quarta) numeradas de 2 a 14; a primeira página não se encontra numerada ostentando no topo o título *Logarithms & Powers*. O texto inicia-se com uma espécie de prólogo ou prefácio (pp. 1-3), no qual são apresentadas críticas ao tratamento então dado às potências e aos logaritmos, críticas essas que, segundo o nosso autor, justificavam o novo tratamento apresentado

> *(...) For all those reasons, we presume these important doctrines are here for the first time rigorously demonstrated; and in the same time in a way more short & easy, than it is to be met with in any book.*

Na terceira página surge um local e uma data: Coimbra, 6th May 1778. Na página seguinte começa o texto propriamente dito: o título é repetido (não aparecendo por isso o respectivo número da página) e surgem três secções com os seguintes subtítulos: *Definitions, Propositions* (ainda na página 4) e *Scholiums* (na página 7). Os parágrafos estão numerados consecutivamente de 1 a 20 mas a numeração relativa às proposições (4., 12., 14. e 15.) surge complementada com uma numeração romana (I., II., III. e IIII.) bem como os parágrafos 17 a 20, que constituem a secção dos *Scholiums* e apresentam, a seguir ao respectivo número do parágrafo, também a numeração do respectivo escólio: I a IIII.

Podemos dividir este texto em duas partes: a primeira (parágrafos 1 a 19), onde é apresentada uma abordagem das potências e logaritmos próxima da que é apresentada no Livro IX dos *Principios*, embora (ainda) não tão elaborada – e que podemos, por isso, considerar uma versão primitiva desse capítulo – e uma segunda parte, onde, em jeito de apêndice, *for curiosity's sake*, como nos diz o nosso autor, é apresentada uma abordagem diferente da obtenção da série binomial.

O presente texto parece assim ser uma espécie de relatório sobre as investigações do autor a respeito de potências e logaritmos e sobre a série binomial.

Várias questões se nos colocam a propósito deste manuscrito:

i) Desde logo o problema da língua. Porquê um texto em inglês? Note-se que todos os outros textos que se conhecem de José Anastácio da Cunha (ou que lhe são atribuídos) são em português ou em francês – isto obviamente identificando o presente texto com o *Extract from an original MS* referido em João Manuel d'Abreu [13]. Aliás também nos podemos interrogar que razão terá levado João Manuel d'Abreu a indicar aquele título tão pouco esclarecedor. E porquê "Extract"? Será que Abreu não pretendia publicar o manuscrito completo tal como o conhecemos hoje? E quais as partes a serem suprimidas? É tentador pensar que Abreu, reconhecendo nos parágrafos 1 a 19 uma versão primitiva do Livro IX dos *Principios Mathematicos*, pretendesse apenas publicar a abordagem alternativa da série binomial; no entanto outras hipóteses serão também possíveis, nomeadamente a do presente manuscrito corresponder já ao "Extract".

ii) Outra das questões que este texto nos levanta prende-se com o seu objectivo:

O prólogo não está dirigido a ninguém, sendo redigido de forma bastante impessoal. Por outro lado, a forma como o texto está organizado (e o facto de estar datado) levam-nos a pensar que seria destinado a uma possível publicação. Mas então porquê escrever este texto em inglês quando o latim e o francês eram ainda, na época, línguas privilegiadas de comunicação entre membros da comunidade científica?

Como anteriormente se disse, o texto está datado de 6 de Maio de 1778 e estes não eram tempos fáceis para o seu autor: morto o rei D. José I em 24 de Fevereiro de 1777 e demitido dias antes (e caído em desgraça) o todo poderoso Ministro Marquês de Pombal, inicia-se com a subida ao trono de D. Maria I o chamado período da *Viradeira*: as forças mais conservadoras e ultramontanas da sociedade adquirem poder, a Inquisição retoma parte do poder que o poderoso Ministro tinha cerceado (e obviamente instrumentalizado [14]) e as reformas levadas a cabo por Pombal são atacadas. Na sua defesa da ortodoxia da religião e ataque a todas as ideias modernas, a Inquisição mostrou-se atenta aos contactos entre militares portugueses e estrangeiros (leia-se protestantes) nomeada-

---

[13] Esta listagem pode ser consultada, neste volume, em "O Projecto Anastaciano" de Maria Elfrida Ralha.

[14] Não fará, no entanto, nenhuma condenação á morte: a última condenação à morte pela Inquisição (o Padre Malagrida) deu-se durante o consulado de Pombal e por instigação deste.

mente no regimento de Valença. De acordo com João Pedro Ferro[15], em Junho de 1777, o Santo Ofício ordenou uma diligência em Valença; logo em Janeiro de 1778 vários colegas de armas do regimento de artilharia do Porto, aquartelado, em Valença são presos pela Inquisição e trazidos para os calaboiços de Coimbra onde decorrem os respectivos processos; interrogados pela Inquisição três desses militares envolvem Anastácio da Cunha em várias acusações de desvio da ortodoxia da fé, acusações que aliás são transcritas no seu processo. O nosso autor estava perfeitamente ao corrente dos perigos que corria: logo a 12 de Dezembro de 1777 Margarida Lopes – a sua apaixonada, com quem tinha vivido em Valença – lhe escreve uma carta em que o informa das perguntas que lhe haviam feito sobre o viver do nosso matemático, bem como dos boatos que corriam na região de Valença sobre a prisão de vários militares, entre os quais o próprio Anastácio da Cunha. A 11 de Fevereiro seguinte, nova carta de Margarida mais uma vez dando-lhe conta dos boatos que corriam sobre a sua prisão, bem como das acusações que publicamente lhe eram feitas em Valença[16]. Também dificilmente podia Anastácio da Cunha ignorar a prisão desses militares e a possibilidade deles o envolverem em acusações graves (ou até mesmo ter informações do que se passava nesses interrogatórios, apesar de serem, oficialmente, secretos). E a 1 de Julho de 1778 dava Anastácio da Cunha entrada nos cárceres da Inquisição de Coimbra.

Não seria só a vida pessoal do nosso autor que era ameaçada: como se depreende do relatório elaborado pelo Reitor, D. Francisco de Lemos, em 1777[17] a própria Reforma Universitária estava em perigo. A todas estas condições há ainda a acrescentar a animosidade de alunos e colegas[18] para com Anastácio da Cunha.

O manuscrito que agora analisamos foi, assim, concluído cerca de mês e meio antes da prisão de Anastácio da Cunha: numa altura em que o nosso autor seguramente já esperava por essa prisão e em que também a reforma universitária estava em causa. Por esta época, um dos seus grandes amigos o Brigadeiro James Ferrier, escocês, regressa à sua Pátria, escrevendo ao nosso autor uma carta na qual refere (possivelmente como um mero cumprimento jocoso): "bem te quizera levar comigo para te mostrar por hum addity e ganhar dinheiro para fazer a despeza da viagem"[19]. Atendendo ao ambiente que viveu nesta primeira metade de

[15] Ferro, J. P. [1987, p. 29].

[16] Ferro, J. P. [1987, pp. 28-30 e 91]. Estas cartas foram aprendidas pela Inquisição, encontrando-se no respectivo processo.

[17] Lemos, F. [1980].

[18] Teixeira, A. J. [1890/91, 1891/92].

[19] Ferro, J. P. [1987, p. 94]. A carta foi apreendida pela Inquisição e encontra-se no respectivo processo.

1778 terá, de facto, Anastácio da Cunha pensado em emigrar para Inglaterra? Seria este manuscrito uma espécie de apresentação para circular entre os conhecidos dos seus amigos britânicos, nomeadamente de James Ferrier? Será por isso que o texto foi escrito em inglês? Obviamente à falta de mais informações, estas questões não passam de meras hipóteses ou mesmo de especulações!

Nas secções seguintes iremos analisar com mais pormenor o texto *Logarithms and Powers*.

3. O manuscrito: prólogo

Apesar do título – *Logarithms and Powers* – são as potências que, no presente manuscrito, constituem o ponto de partida das reflexões do nosso autor (tal como acontece nos *Principios Mathematicos*). Assim, este manuscrito, abre com um exame à forma como eram tratadas as potências:

> *The doctrine of powers is so imperfectly taught that the cases only of whole positive indices are as yet truly demonstrated: nay their very definitions as vulgarly delivered, reach not farther: and authors content themselves with biding the reader extend those ideas to all cases, others employ sophistry to prove what the narrowness of their definition renders not only incapable of demonstration, but even unintelligible.*

Esta crítica pode-nos parecer exagerada, uma vez que as potências de expoente negativo, nulo ou fraccionário facilmente se definiriam da mesma forma que hoje fazemos, usando o (actualmente) chamado "princípio da permanência das regras operatórias": por exemplo, $a^{\frac{1}{m}}$ é $\sqrt[m]{a}$, porque $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m$ deve ser $a^{\frac{1}{m}\times m} = a$. Mas, na verdade, no século XVIII as definições "por ramos" não existiam. Isto é, não estaríamos perante um exemplo de *definição* de $a^{\frac{1}{m}}$, mas sim de uma extensão de a^n (que estava propriamente definida só para expoentes inteiros positivos), no caso de $n = \frac{1}{m}$. Para Anastácio da Cunha, a definição devia cobrir todos os casos possíveis.

O nosso autor refere-se ainda, de forma depreciativa, a autores que generalizam exemplos mal (ou insuficientemente) escolhidos:

Some prove $a^{\frac{mn}{n}} = \sqrt[n]{a^{mn}}$ *in many instances, where m and n are whole numbers and forgetting immediately that they have not produced a single instance where the numerator was not divisible by n, they put p for mn and infer* $a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^{p}}$, *be p what it will*

No entanto, a crítica de Anastácio da Cunha vai mais longe: aplicar um conceito fora do domínio onde foi definido é um abuso lógico.

É precisamente esta a forma de proceder de La Caille[20] ou de d'Alembert[21]: depois de definirem potência de expoente natural e mostrarem, para estas, as regras usuais dos produtos de potências aplicam as mesmas regras a potências de expoente racional qualquer, para "deduzirem" o valor de uma potência de expoente negativo, nulo ou fraccionário. D'Alembert define também potência de expoente irracional, a partir das aproximações racionais do expoente. Curiosamente o nosso autor não menciona no prólogo a questão das potências de expoente irracional (poderemos daqui depreender que pelo menos em 1778 Cunha não conhecia este texto da Encyclopédie?).

Segue-se, no manuscrito, a crítica ao tratamento da série binomial: as demonstrações algébricas baseadas em propriedades combinatórias só seriam válidas no caso de expoentes naturais; as demonstrações baseadas no cálculo fluxionário seriam viciosas porque o desenvolvimento do cálculo fluxionário era geralmente baseado no teorema binomial!

Quanto aos logaritmos propriamente ditos, apresentam problemas semelhantes. As duas definições habituais (a de números em progressão aritmética correspondendo a outros em progressão geométrica e a de operação inversa da exponenciação) excluem logaritmos irracionais (*surd*). O trabalho de Halley (v. secção 1.) levanta problemas pelo uso acrítico do infinito. Marie tinha dado um tratamento "algébrico"[22] mas supondo a forma de série de potências de expoentes naturais, sem razão *a priori*. A definição de logaritmo como área "abaixo" da curva definida pela equação $y = \frac{1}{x}$ é também insatisfatória por depender ou da consideração do infinito, ou do método das fluxões, o qual, como aliás foi dito pelo nosso autor, necessita de uma demonstração prévia do teorema binomial.

---

[20] La Caille, N. L. e Marie, J. F. [1772, pp. 71-71].

[21] D'Alembert [1784/1987].

[22] La Caille, N. L. e Marie, J. F. [1772, p. 208].

4. Exponenciais e Logaritmos nos *Principios Mathematicos*

4.1 O Livro IX dos *Principios*

O Livro IX dos *Principios* tem sido estudado e comentado por diversos autores desde os estudos pioneiros de Gomes Teixeira[23] e Vicente Gonçalves[24]: interessa-nos aqui apenas fazer um resumo do conteúdo desse Livro a fim de o comparar com o presente manuscrito.

O Livro IX abre com a célebre Definição I de série convergente[25], definição que – como notou pela primeira vez Vicente Gonçalves – não é mais do que a condição necessária e suficiente de convergência de Bolzano-Cauchy (ou Cunha-Bolzano-Cauchy)[26]. Segue-se o estudo da convergência da série geométrica (usando técnicas $\varepsilon-\delta$) e como corolários (usando o óbvio critério de comparação termo a termo) a convergência das séries:

$$1+a+\frac{aa}{2}+\frac{aaa}{2\times 3}+\frac{aaaa}{2\times 3\times 4}+\frac{aaaaa}{2\times 3\times 4\times 5}+\&c.\ (\text{com } a \text{ qualquer})$$

e

$$a+\frac{aaa}{3}+\frac{aaaaa}{5}+\&c.\ (\text{com } a<1)$$

---

[23] Teixeira, F. G. [1925].

[24] Gonçalves, J. V. [1940].

[25] Cunha, J. A. da [1790/1987]. Devemos notar que Anastácio da Cunha não tem, aliás como os matemáticos seus contemporâneos, uma definição precisa nem a notação de módulo: ou melhor, quando escrevem $a>b$ encaram a e b como grandezas que depois apareceriam em fórmulas a somar ou a subtrair; portanto o $a>b$ do séc. XVIII corresponderá ao nosso $|a|>|b|$; recorde-se, a este propósito, a definição de "grandeza precedida do sinal – destinada para se tirar de outra grandeza" (esta consideração aplica-se também ao texto do presente manuscrito).

[26] Curiosamente Gomes Teixeira que faz uma análise notável da obra de Anastácio da Cunha (inclusive sobre a definição de exponencial!), sendo o primeiro autor a compreender o papel de Anastácio da Cunha na Historia da Fundamentação da Análise, não só não se refere a este aspecto como aquilo que escreve não está de acordo com o texto dos *Principios*! – facto que Vicente Gonçalkves (Gonçalves, J. V. [1940]) muito critica. Como é sabido – mas só foi notado a partir de 1987 (veja-se Rodrigues, J. F. [1987], Queiró, J. F. [1988] ou Duarte, A. L. e Silva, J. C. [1990]) – neste ponto fundamental (bem como na demonstração que se segue) a tradução francesa afasta-se do original havendo um círculo vicioso na definição proposta! Em nosso entender, e embora não o refira, Gomes Teixeira, seguiu a tradução francesa ignorando que as duas divergiam neste ponto fundamental. Por outro lado, talvez preso ao pendor "panegírico" do seu texto – Teixeira, F. G. [1925] – abstém-se de criticar a referida definição (que não o era), referindo-se-lhe como "critério".

Depois surge o "Golpe de Audácia", como lhe chamou Gomes Teixeira, a célebre definição de função exponencial que Gauss[27] também tanto apreciou; a saber:

"Representem a e b dois numeros quaesquer, e seja c o numero que faz

$$1 + c + \frac{cc}{2} + \frac{ccc}{2 \times 3} + \frac{cccc}{2 \times 3 \times 4} + \&c. = a;$$

a expressão a^b segnificará hum numero

$$= 1 + bc + \frac{bc}{2} + \frac{bbcc}{2 \times 3} + \frac{bbbccc}{2 \times 3 \times 4} + \&c.$$

e se chamará o numero a^b potência de a indicada pelo expoente b: ou também raiz de a indicada pelo expoente $\frac{1}{b}$.

A proposição II é também notável: nela demonstra o nosso autor a existência do número c, referido na definição II; o domínio da função a^x é o conjunto dos números reais positivos, tendo portando um ponto de partida para depois poder definir os logaritmos; da seguinte forma:

Dado a positivo, represente b o número

$$2\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3} \times \frac{a-1}{a+1} \times \frac{a-1}{a+1} \times \frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{5} \times \frac{a-1}{a+1} \times \frac{a-1}{a+1} \times \frac{a-1}{a+1} \times \frac{a-1}{a+1} \times \frac{a-1}{a+1} + \&c.\right)$$

(série cuja convergência já estava garantida pelo corolário 2); será

$$a = 1 + b + \frac{b}{2} + \frac{bbb}{2 \times 3} + \frac{bbbb}{2 \times 3 \times 4} + \&c.$$

A demonstração é feita através de manipulações algébricas; note-se que, quer nos *Principios Mathematicos*, quer no manuscrito em estudo, Anastácio da Cunha aplica às séries as mesmas regras operatórias das somas finitas sem sentir a necessidade de justificações suplementares.

Como já se referiu a primeira destas séries já era conhecida, sendo o seu valor o logaritmo natural de x. O que é aqui novo é a abordagem.

Segue-se a demonstração das propriedades operatórias da função potência; incluindo a regra da potência de potência e, depois, a obtenção da série binomial.

A terminar o seu Livro VIIII, na 14.ª página deste capítulo, registamos a existência de uma única página relativa ao conceito de logaritmo: inicia-se com uma definição (Def. III) seguida de um corolário e de outra

---

[27] YOUSCHKEVITCH, A. P. [1978].

definição, e de uma "advertência", para concluir com uma proposição e outros três corolários; a saber:

"Definiçoens

III. Considerando todos os numeros como potencias de hum mesmo numero, chama-se esse base; e os expoentes chamam-se logaritmos dos numeros a que pertencem.

Corol. O logaritmo da base he 1 [9. def. I].

IIII. Os logaritmos chamam-se hyperbolicos, e também naturaes, quando a base he $= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \frac{1}{2\times3\times4\times5} + \&c.$

Advertência.

la significa, logaritmo de a.

Proposiçoens.

VIIII. $la^n = nla$:

Represente b a base: será $a = b^{la}$ [9. def. 3], e logo $a^n = b^{nla}$ [9.5], e logo $la^n = nla$ [9. def. 3].

Corol. I. $l1[= la^0 [9.4.cor.] = 0la] = 0$

2. $l(ac)\ [= l[b^{la} b^{lc}) = lb^{la+lc} = (la + lc)\, lb = (la + lc) \times 1 [9.\,def.\,3]] = la + lc.$

3. $l\frac{a}{c} [= l(ac^{-1})[9.4.cor.]] = la - lc.$"

Registamos, a este propósito, que nunca, neste contexto, vemos Anastácio da Cunha abordar o conceito de logaritmo em termos "geométricos" (área da figura "abaixo" da curva definida por $y = \frac{1}{x}$); tão pouco encontramos o nosso autor preocupado com esta "espécie (nova) de relação" que, com os logaritmos, se vislumbrava entre dois números e que, num outro manuscrito[28], tanto indignava Anastácio da Cunha. Finalmente registe-se que neste capítulo IX também não surge explicitamente nenhum desenvolvimento em série para a função logaritmo!

4.2 O Livro XXI dos *Principios*

O tema dos logaritmos e das potências é novamente retomado pelo nosso autor quando, nos *Principios Mathematicos* e num Livro (XXI), a que chamou de "Problemas", regista[29] uma "Investigação de logaritmos

---

[28] Ver, neste volume, o artigo "Um estudo sobre os *Principios de Geometria tirados dos de Euclides*" onde o nosso autor se indigna com a definição 3 do Livro V dos Elementos de Euclides, rotulando-a de "apócrifa".

[29] Cunha, J. A. da [1790/1987, p. 286].

e potências". É, no mínimo, surpreendente que depois de ter dado aos leitores uma definição no corpo principal do texto, inicie agora esta secção – que, porventura, podemos interpretar como de esclarecimentos adicionais para o texto – com uma nova definição para o conceito de logaritmo (encontramos uma definição de carácter "aritmético" como a que vemos também ser usada no manuscrito em análise, mas, desta vez, com um aspecto "funcional" de possível influência Euleriana):

> "*lx*, *logaritmo de x*, he uma funcção de x, tal, que, pondo quaesquer números a, b, e o produto ab em lugar de x, sempre he $la + lb = l(ab)$."

Percebemos, com esta definição, uma abordagem algo aritmética no seu objectivo mas, e a exemplo do que Euler faz no seu tratado[30], uma metodologia eminentemente algébrica, a partir da função exponencial.

A seguir "investiga-se" se a $l(1+u)$ se pode dar a forma de uma série de potências de u – não se assumindo portanto, a priori, a sua existência como outros autores faziam e Anastácio da Cunha crítica no prólogo do presente manuscrito – obtendo-se o valor dos respectivos coeficientes mas, estranhamente, não há nenhuma referência a questões de convergência; o mesmo tipo de tratamento é dado a seguir à obtenção da série binomial, também sem referências a questões de convergência.

Sobressai, sem dúvida, a vasta competência matemática demonstrada por Anastácio da Cunha, nomeadamente em domínios como o da Álgebra ou o da Análise Infinitesimal que, na época, davam tão somente os seus primeiros passos.

5. *Logarithms & powers*

5.1 Parágrafos 1 a 19

Ao prólogo do presente manuscrito segue-se um conjunto de três definições: a definição de logaritmo – definição funcional, idêntica à do Livro XXI dos *Principios* – aqui dada verbalmente, sem recurso a símbolos, a definição de base do sistema de logaritmos e a definição de potência:

> *Any number is called a power of the basis expound by the logarithm of the number (...)*

---

[30] Euler, L. [1796/1987].

E a respectiva notação:

> *(...) if the Basis be a the number whose logarithm is p, is denoted thus, a^p.*

Seguem-se as proposições com uma característica que parece estranha: é que apesar de serem ostensivamente sobre *logaritmos*, de facto constituem essencialmente um estudo da função a^x – com o expoente variável, x, designado como *logarithm*.

A primeira proposição – registada como sendo o parágrafo 4. mas com a indicação "adicional" de I. – dá-nos a série de potências da exponencial:

Se x for logaritmo de y então $y = \sum_1^\infty \frac{M^n x^n}{n!}$.

para alguma constante M que, no parágrafo seguinte (5), se adverte supor-se positiva. A demonstração consiste em mostrar, através de manipulações algébricas com séries, que

$$\sum_1^\infty \frac{M^n (x+z)^n}{n!} = \left(\sum_1^\infty \frac{M^n x^n}{n!}\right)\left(\sum_1^\infty \frac{M^n z^n}{n!}\right)$$

a partir do qual conclui, o nosso autor, que:

> *Therefore by the definition, numbers expressed by such series have for their Logarithms the variable numbers therein contained.*

Isto é, a equação funcional da definição I é verificada pela série (ou antes, pela "função inversa" da série).

Seguem-se seis corolários (parágrafos 6 a 11): o corolário 1 assegura-nos que a série anterior é sempre convergente,

> *be the variable or logarithm what it will as the law of the denominator clearly show*

A lei do denominador não é mais do que o chamado critério de convergência de d'Alembert. É, todavia, um pouco estranho que este facto surja como um corolário; por um lado, não só não é consequência da proposição I mas, por outro, quase o contrário se passa: sem a convergência da série a proposição I não faria sentido!

O corolário 2 mostra-nos que a^x pode ser maior que qualquer número (desde que a variável seja positiva) e menor do que qualquer número (positivo).

O parágrafo 8 (corolário 3) apresenta-nos a continuidade (à Cauchy) de a^x nos seguintes termos:

> *the series may increase imperceptibly, for writing $x+u$ for the variable the difference between the Number answering to the logarithms x and $x+u$ comes out $Mu + M.Mxu + \frac{MM}{2}uu\,\frac{MMM}{2}xxu + \frac{MMM}{2}xuu + \frac{MMM}{6}u^3 + \&c.$[a] which vanishes with u, and consequently can be rendered less than any assigned magnitude.*

Como se verifica, a justificação da propriedade assume implicitamente o facto a demonstrar (compare-se com o argumento $\varepsilon-\delta$ dado na demonstração da Proposição I do Livro XV[31]). Esta é uma das propriedades que não encontramos no Livro IX dos *Principios*. No entanto, na Proposição VI do Livro XV é demonstrada a continuidade (segundo Cauchy) das funções diferenciáveis[32], assumindo Anastácio da Cunha que todas as funções tem "fluxão". Registamos que Euler em "Introductio" apresenta uma propriedade análoga para a exponencial e^x no caso de $x=0$[33] e interrogamo-nos sobre se terá sido esta a motivação do nosso autor.

Seguem-se as propriedades operatórias da função potência (Corolário 9) agora enunciada com toda a generalidade nos seguintes termos:

> *by the definition, $a^p a^q = a^{p+q}$.*

Seria, porventura, mais natural dizer-se "by the proposition 1", na medida em que a proposição 1 consiste precisamente em demonstrar aquela relação; por outro lado, definida a função a^x como inversa do logaritmo (def. 2) e tendo em conta a definição de logaritmo é também óbvio que aquela relação decorre da definição! Terá sido esta ordem de pensamento que levou o nosso autor a adoptar, nos *Principios Mathematicos*, a sua famosa definição de exponencial?

Agora o caso dos expoentes naturais, nulos e a relação $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$ saem facilmente como casos particulares daquela relação geral – corolários 5 e 6, parágrafos 10 e 11 (respectivamente) – e o caso do extracção de raízes é, no manuscrito, adiado para mais tarde.

Seguem-se (no parágrafo 12) os desenvolvimentos em série de potências do logaritmo de $1+Q$ (Proposição II), cuja justificação é bastante, porventura demasiadamente, concisa – *By the regression of series shall we*

---

[31] Cunha, J. A. da [17901987, pp. 194 e seguintes].

[32] Cunha, J. A. da [17901987, p. 196].

[33] Euler, L. [1796/1986, pp. 84-85].

have (...) [34]. Aqui, Anastácio da Cunha, usa um argumento que tinha criticado a Marie: com os dados que dispõe está a assumir, sem prova, a existência do desenvolvimento em série de potências do logaritmo de $1+Q$.

Segue-se a observação – que também encontramos em Euler a seguir à obtenção do desenvolvimento do $\log(x+1)$ [35] – de que

13. Corol. If $1+Q$ *be the Basis, then is* $M = Q - \frac{1}{2}Q^2 + \frac{1}{3}Q^3$ - *&c.*.

A obtenção do desenvolvimento binomial de $(1+Q)^x$ para Q (em módulo) menor do que 1 (Proposição III) torna-se agora uma simples manipulação algébrica de séries: bastará usar a proposição e substituir M pela série obtida no corolário 13.

Seguem-se a regra da potência de potência (Proposição IIII) e, como corolário, as regras operatórias com expoente fraccionário [36].

Surge, finalmente, a secção dos *escólios* (parágrafos 17 a 20):

— No parágrafo 17 são apresentadas três observações entre as quais destacamos uma envolvendo o cálculo da *fluxão* do logaritmo e onde é usada quer a terminologia quer a notação newtoniana; como é sabido, nos *Principios Mathematicos,* Anastácio da Cunha usa a terminologia newtoniana mas opta pela notação leibniziana.

- No parágrafo 18 é discutida a questão da curva logarítmica no caso da base do sistema de logaritmos ser um número negativo e registamos uma referência à discussão entre Euler e d'Alembert sobre o assunto

> *M. Leonard Euler taking x in the equation* $a^x = y$ *in this last sense finds on the other side of the abciss an indefinite number of points indefinitely near one another. M. d'Alembert by a construction which amounts to the admitting of fractions no reduced, finds two branches.*

- Finalmente, no parágrafo 19, é referida a questão há muito discutida que já tinha oposto Leibniz a Johann Bernoulli e então opunha d'Alembert a Euler: de acordo com o nosso autor

> *The Doctrine here delivered gives us logarithms for real positive numbers only: but nothing can thence be inferred against the existence of logarithms of other numbers.*

---

[34] "Regression of séries" - em português «reversão das séries» e em francês «retour des suites» - era um processo algébrico para, a partir de uma série para y em potências de x, encontrar uma série para x em potências de y; na prática suponha-se uma forma para esta série, substituia-se na primeira e aplicava-se o método dos coeficientes indeterminados. Ver, a este propósito, La Caille, N. L. e Marie, J. F. [1772, pp. 199-202] ou Francoeur, L. B. [1839, pp. 213-215].

[35] Euler, L. [1796/1986, p. 88].

[36] Neste ponto do manuscrito, *16. corol* (p. 7), existe, na primeira das igualdades, uma gralha óbvia que envolve o expoente m.

Esta posição está, de resto, bastante próxima da que d'Alembert apresenta no artigo sobre Logaritmos na *Encyclopédie*. Embora defendendo, ao contrário de Euler, que os logaritmos de números negativos podiam ser reais acrescenta que tudo dependerá das definições que se derem!

5.2 *Parágrafo 20*

No longo (5 páginas) escólio número 20, são apresentadas – de acordo com Anastácio da Cunha: *for curiosity's sake* – não demonstrações rigorosas, mas análises para obtenção da série binomial e da logarítmica. De resto, esta abordagem não sintética de demonstração e que se opõe metodologicamente à abordagem seguida no Livro XV também é seguida em outros dos manuscritos inéditos agora apresentados[37].

Usando, no parágrafo 12, a notação de *log* para o logaritmo é, em particular, interessante notar que na última linha do manuscrito o nosso autor a substitui por um *l*, notação que também era usada por Euler e que seria (depois) a usada, pelo nosso autor, na sua obra maior: os *Principios Mathematicos*.

Conclusão

Como podemos concluir deste estudo o manuscrito *Logarithms & powers* está bastante próximo do Livro IX dos *Principios Mathematicos*. Encontramos, todavia, também várias diferenças: desde logo a ausência de um estudo da convergência de séries, embora se note uma consciencialização dessa importância ao referir que ela se verifica; mas a maior diferença – e essa é uma das razões que o torna notável – não houve neste manuscrito o "golpe de audácia" (talvez devêssemos falar em falta de coragem), referido por Gomes Teixeira, para Anastácio da Cunha tomar como definição de exponencial o respectivo desenvolvimento em série. O que este texto, que agora apresentamos, nos diz é que o processo não foi, para o nosso autor, imediato mas regista-se que, no manuscrito, é já a partir do desenvolvimento em série que são obtidas todas as propriedades! A estranheza que referimos no início do secção V desaparece também no Livro IX dos *Principios*, onde se estuda explicitamente a exponencial, e o logaritmo é definido como a sua função inversa.

---

[37] Veja-se, a este respeito, o estudo sobre "Os Princípios do Cálculo Fluxionário", neste volume.

Há ainda o problema da constante M cujo papel ou relação na base de logaritmos não fica clara na Proposição I; esse problema é também ultrapassado nos *Principios Mathematicos* com a Proposição II do Livro IX.

Podemos finalmente observar que no Livro IX dos *Principios* há um esforço de maior rigor: por exemplo, a obtenção do desenvolvimento da série binomial é bastante mais simples neste manuscrito, mas é feita à custa do desenvolvimento em série de $\log(1+x)$ que, como já referimos, é obtido simplesmente pressupondo a sua existência e calculando os respectivos coeficientes (no Livro IX não encontramos este último desenvolvimento).

Reiteramos a ideia de que o presente manuscrito deve corresponder a uma versão primitiva do Livro IX dos *Principios Mathematicos*: não trará, por isso, grande novidade ou descobertas em relação ao texto que já conhecíamos mas nem por isso (ou precisamente por isso!) deixará de ser importante. A partir deste manuscrito podemos aperceber-nos da evolução do pensamento de José Anastácio da Cunha bem como conhecer de perto as suas fontes e as suas motivações, a sua cultura e o seu esforço no sentido do aperfeiçoamento.

Bibliografia

ABREU, João Manuel d'. *O Investigador Portuguez em Inglaterra*, vol. VIII, n.º XXX, Dezembro de 1813. (Reproduzido em *Anastácio da Cunha. O Matemático e o Poeta*, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, Lisboa, 1990, pp. 425-448).

ABREU, João Manuel d'. Escriptos posthumos de José Anastácio da Cunha ordenados relativamente ao systema dos seus Principios Mathematicos e offerecidos a S. A. R. o S. D. João VI Príncipe Regente de Portugal, in *Anastácio da Cunha. O Matemático e o Poeta*, Imprensa Nacional Casa da Moeda, Lisboa, 1990, pp. 353-355.

ALEMBERT, Jean le Rond d'. "Binome", "Exposant", "Logarithme", *Encyclopédie méthodique: mathématiques*, 3 Tomes, Paris, 1784 (ACL-éditions, Paris, 1987).

AYOUB, Raymond. "What is a Napierian logarithm?", *Amer. Math. Monthly* 100 (1993), n.º 4, pp. 351-364.

BRAGA, Teófilo. *História da Universidade de Coimbra*, vol. III *(1700-1800)*, Lisboa, Academia Real das Sciencias,1898.

CAJORI, Florian. "History of the Exponential and Logarithmic Concepts", *American Mathematical Monthly*, vol. 20, n.º 1 (Jan., 1913), pp. 5-14; n.º 2 (Feb., 1913), pp. 35-40; n.º 3 (Mar., 1913), pp. 75-84; n.º 4 (Apr., 1913), pp. 107-117.

CAJORI, Florian. *A History of Mathematical Notations*, New York, Dover Publications, 1993.

Cunha, José Anastácio da. *Principios Mathematicos*. Reprodução fac-simile da edição publicada em Lisboa em 1790. Universidade de Coimbra, 1987.

Cunha, José Anastácio da. *Príncipes Mathématiques de seu Joseph-Anastace da Cunha, traduits littéralement du portugais par J. M. D'Abreu*, Bordéus 1811. Reprodução fac-simile, Universidade de Coimbra, 1987.

Domingues, João Caramalho. *A Questão dos Princípios do Cálculo em Portugal (1786-1806)* (dissertação de mestrado), Universidade do Porto, 1999.

Euler, Leonard. *Introduction à L'Analyse Infinitésimal, traduits du latin en français, avec des Notes & des Éclaircissements par J. B. Labey*, 2 vols., Paris, 1796 (ACL-éditions, Paris, 1987).

Ferro, João Pedro. *O Processo de José Anastácio da Cunha na Inquisição de Coimbra (1778)*. Introdução, transcrição e notas de João Pedro Ferro, Lisboa, Palas Editores, 1987.

Ferro, João Pedro. "A Biblioteca de José Anastácio da Cunha" em *Actas do Colóquio Bicentenário da morte de Anastácio da Cunha – matemático e poeta*, Évora, 1998, 105-229.

Francoeur, L. B. *Curso Completo de Mathematicas Puras*, tomo 2.°, Coimbra (1839).

Giusti, Enrico. "Quelques réflexions sur les «Principios» de da Cunha" em *Anastácio da Cunha 1774-1787, o matemático e o poeta: Actas do Colóquio Internacional Anastácio da Cunha, o Matemático e o Poeta – Lisboa, 1987*. Coord. de Ferraz, Maria de Lurdes, Rodrigues, José Francisco e Saraiva, Luís. Lisboa, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, 1990, pp. 33-52.

Gonçalves, José Vicente. "Análise do livro VIIII dos «Principios Mathematicos» de José Anastácio da Cunha", *Congresso do Mundo Português*, XII, 1940, pp. 123-140. Reimpresso em J. Carvalho e Silva (ed.), *Antologia de textos essenciais sobre a História da Matemática em Portugal*, s.l., SPM, s.d., pp. 261-278.

Gonçalves, José Vicente. "Relações entre Anastácio da Cunha e Monteiro da Rocha (1773--1786)", *Memória da Academia das Ciências de Lisboa*, vol. 21 (Classe das Ciências), 1976-1977, pp. 37-60.

Halley, Edmond. "A Most Compendious and Facile Method for Constructing the Logarithms, Exemplified and Demonstrated from the Nature of Numbers, without any Regard to the Hyperbola, with a Speedy Method for Finding the Number from the Logarithm Given", *Philosophical Transactions* (1683-1775), vol. 19 (1695-1697), pp. 58-67.

Klein, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, 3 vols., Oxford University Press, 1990.

La Caille, Nicolas Louis de e Marie, Joseph François. *Leçons Élémentaires de Mathématiques*. Par M. l'Abbé de la Caille [...], Nouvelle edition, augmenté [...] par M. l'Abbé Marie. Paris, 1772.

Laugwitz, Detlef. "On the Historical Development of Infinitesimal Mathematics", *The American Mathematical Monthly*, vol. 104, n.° 5, May 1997, pp. 447-455.

Lemos, Francisco. *Relação Geral do Estado da Universidade (1777)*, Coimbra 1980.

MAOR, Eli. *e: the story of a number*. (English summary), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994.

NAUX, Charles. *Histore des Logarithms*. De Neper a Euler, 2 vols., A. Blanchard, Paris 1966, 1971.

OLIVEIRA, A. J. Franco de. "Anastácio da Cunha and the Concept of Convergent Séries", *Archive for the History of Exact Sciences* 39, n.º 1, 1988, pp. 1-12.

PENSIVY, Michel. "Jalons historiques pour une épistémologie de la série infinie do binôme", *Sience et Techiques en Perpective*, vol. 14, 1987-1988.

PENSIVY, Michel. "The Binomial Theorem", em I. Grattan-Guinness (ed.), *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Nova Iorque e Londres, Routledge, 1994; reimpresso em Baltimore e Londres, Johns Hopkins Press, s.d., vol. 1, pp. 492-498.

PLAYFAIR, John. "Principes Mathématiques de feu Joseph-Anastase da Cunha traduits litteralement du portugais par J. M. d'Abreu" (recensão), *Edinburgh Review*, Novembro de 1812 (traduzida para *O Investigador Portuguez em Inglaterra,* vol. VII, 1812, n.º 20, pp. 536-547; reproduzida (no original inglês) em *Anastácio da Cunha, O Matemático e o Poeta*, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, Lisboa, 1990, pp. 415-423).

QUEIRÓ, João Filipe. "José Anastácio da Cunha: a forgotten forerunner", *The Mathematical Intelligencer*, 10, (38-43), 1988.

QUEIRÓ, João Filipe. "José Anastácio da Cunha: um matemático a recordar, 200 anos depois", *Matemática Universitária (Soc. Brasileira de Matemática)*, 14, (5-27), 1992. (Reproduzido em *Boletim da SPM*, n.º 29, (1-18), Setembro de 1994).

RODRIGUES, Anastasio Joaquim. "Principes mathematiques de feu Joseph Anastase da Cunha traduits littéralment du portugais par J. M. d'Abreu", *Moniteur Universel*, 8 de Agosto de 1811. (Transcritos em *Anastácio da Cunha. O Matemático e o Poeta*, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, Lisboa, 1990, pp. 339-404).

ROIZ [RODRIGUES], Anastasio Joaquim. "Reflexoens em defeza dos *Principos Mathematicos* do Dr. José Anastasio da Cunha censurados no revisor de Edimburg em Novembro de 1812, vol. VIII, n.º 25, 1813, pp. 21-45", *O Investigador Portugues em Inglaterra*, 1813. (Transcritos em *Anastácio da Cunha. O Matemático e o Poeta*, Imprensa Nacional--Casa da Moeda, Lisboa, 1990, pp. 425-448).

RODRIGUES, José Francisco. "José Anastácio da Cunha, matemático em Portugal de setecentos", *Ciência, Tecnologia e Sociedade*, nº 2 (1987), pp. 66-74.

RODRIGUES, José Francisco. "A obra matemática de José Anastácio da Cunha", *Colóquio/Ciências*, n.º 1 (1988), pp. 74-86.

SILVA, Jaime Carvalho e & DUARTE, António Leal. "Os «Principios Mathematicos» de José Anastácio da Cunha", in *Anastácio da Cunha. O Matemático e o Poeta*, coordenação de M. L. FERRAZ, J. F. RODRIGUES e L. SARAIVA, Lisboa, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, 1990, pp. 81-95.

TEIXEIRA, António José. "Questão entre José Anastásio da Cunha e José Monteiro da Rocha", *O Instituto,* vol. XXXVIII (1890/91) p,p. 20-27, 119-131, 187-202, 268-279, 350-357, 431-442, 512-521, 573-576, 653-662, 739-746, 816-820, e vol. XXXIX (1891/92), pp. 490-497.

Teixeira, F. Gomes. "Elogio histórico do Doutor José Anastácio da Cunha", in *Panegíricos e Conferências*, Coimbra (1925).

Teixeira, F. Gomes. *História das Matemáticas em Portugal*, Lisboa, Academia das Ciências de Lisboa, 1934.

Youschkevitch, A. P. "José Anastácio da Cunha", *Dictionary of Scientific Biography*, ed. C. Gillispie, vol. XVI, 1978, pp. 98-99 (reproduzido em *Biographical Dictionary of Mathematicians*, New York, Charles Scribner, vol. I, pp. 556-557).

Youschkevitch, A. P. "J. A. da Cunha et les fondements de l'analyse infinitésimale", *Revue d'Histoire des Sciences*, XXVI (1973), pp. 3-22.

Youschkevitch, A. P. "C. F. Gauss et J. A. da Cunha", *Revue d'Histoire des Sciences*, XXXI (1978), pp. 327-332.