Universidade do Minho
Instituto de Educação

José Manuel Macedo Monteiro

Aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço com recurso ao GeoGebra: uma experiência com alunos do 10º ano

outubro de 2018

José Manuel Macedo Monteiro Aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço com recurso ao GeoGebra: uma experiência com alunos do 10º ano

UMinho | 2018

Universidade do Minho
Instituto de Educação

José Manuel Macedo Monteiro

Aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço com recurso ao GeoGebra: uma experiência com alunos do 10º ano

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho efetuado sob a orientação do
Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

outubro de 2018

DECLARAÇÃO

Nome: José Manuel Macedo Monteiro

Endereço eletrónico: jmacedomonteiro@gmail.com

Telefone: 963968820

Número do Bilhete de Identidade: 07496133

Título do Relatório:

Aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no espaço com recurso ao GeoGebra: uma experiência com alunos do 10º ano

Supervisor: Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

Ano de conclusão: 2018

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário.

Assinatura:

Universidade do Minho, 31 de outubro de 2018.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais que me deram o ser.

À minha família e aos meus amigos, porque me ajudam a ser.

Ao Professor Doutor Floriano Viseu, mestre na orientação e no apoio sempre presentes.

À Professora Ana Paula Mourão, pela forma amiga, determinada e crítica como me orientou.

Ao colega André Silva, pela inexcedível colaboração.

Aos colegas de mestrado, com quem partilhei informações e ideias.

Ao Agrupamento de Escolas Carlos Amarante e à sua direção, por todo o apoio.

Aos alunos participantes nesta investigação.

A todos quantos de alguma forma colaboraram nesta tese.

APRENDIZAGEM DE TÓPICOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ESPAÇO COM RECURSO AO GEOGEBRA: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO 10.º ANO

José Manuel Macedo Monteiro

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário
Universidade do Minho, 2018

RESUMO

Este estudo visa averiguar o contributo do *GeoGebra* na aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço de uma turma de alunos do 10.º ano de Ciências e Tecnologias, o que remete para a determinação da evolução do pensamento geométrico durante a intervenção pedagógica. Na procura de compreender os significados que os alunos dão às suas atividades de aprendizagem desses tópicos, adotou-se uma abordagem qualitativa e interpretativa. Na concretização do objetivo delineado, formularam-se as seguintes questões de investigação: Como utilizam os alunos o GeoGebra nas atividades de aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço? Que dificuldades manifestam os alunos na aprendizagem, com ou sem o GeoGebra, de tópicos de Geometria Analítica no Espaço? Que perceções têm os alunos sobre a utilização do GeoGebra na aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço? Para responder a estas questões, recorreu-se a diferentes métodos de recolha de dados: questionários, registo vídeo das aulas, produções dos alunos na resolução de tarefas, questões aula e questões teste.

A investigação foi realizada numa escola da cidade de Braga e para a sua implementação foi elaborada a planificação de cada uma das aulas da intervenção pedagógica, tendo em conta o programa de Matemática A do Ensino Secundário, a planificação global para a disciplina prevista realizar pelos docentes da Escola e os recursos disponíveis. Destes, salientam-se os tabletes, os smartphones, o GeoGebra e a organização do espaço disponível que condicionou de certa forma o trabalho dos alunos em pares. Das oito aulas lecionadas, foram escolhidas três para uma análise sobre a realização de tarefas com 'papel e lápis' e com o GeoGebra, apenas com 'papel e lápis' e apenas com o GeoGebra, em que se procurou interpretar a evolução do pensamento Geométrico 3D dos alunos no estudo dos tópicos de Geometria Analítica no Espaço.

Os resultados obtidos mostram que o recurso ao GeoGebra envolveu os alunos na visualização e manipulação de objetos, na identificação e relacionamento das propriedades dos sólidos construídos, no uso do raciocínio lógico nas suas conclusões e verificações e em aprender e consolidar conceitos novos. As dificuldades dos alunos na aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço residiram, na sua maioria, na visualização e representação, no domínio e compreensão de conceitos e no desconhecimento do GeoGebra. As perceções manifestadas pelos alunos sobre a utilização do GeoGebra na aprendizagem de Tópicos de Geometria Analítica no Espaço apontam para as potencialidades do GeoGebra para visualizar e perceber melhor as tarefas e ainda confirmar resultados obtidos analiticamente, relacionar o gráfico com o analítico, promover a autonomia, resolver expressões analíticas, clarificar conceitos, facilitar o debate de ideias, cativar e aprender a trabalhar com um novo software usando o smartphone.

Palavras-chave: Geometria Analítica no Espaço; Ensino Secundário; GeoGebra; Aprendizagem; Dificuldades.

LEARNING OF ANALYTICAL GEOMETRY TOPICS IN SPACE WITH RESOURCE TO GEOGEBRA: AN EXPERIENCE WITH STUDENTS OF THE 10TH YEAR

José Manuel Macedo Monteiro

Master in Mathematics Teaching in the 3rd Cycle of Basic Education and Secondary Education
University of Minho, 2018

ABSTRACT

This research aims to investigate the impact of GeoGebra in the learning of topics about Analytical Geometry in Space within a class of students of grade 10 of Technological Sciences determining the evolution of the geographical thought throughout the pedagogical intervention. A qualitative and interpretive approach was used in the search to understand the meaning that students provide to their learning activities regarding these topics. While developing the research objectives, the following questions were raised: How do students use GeoGebra in learning activities regarding Analytical Geometry in Space? What are the biggest challenges students face, with or without GeoGebra, in the learning of Analytical Geometry in Space? What are the perceptions that students have about using GeoGebra to learn about Analytical Geometry in Space topics? To find answers to these questions, several methods of data collection have been used: questionnaires, video recording and audio of the lessons, replies students provided in the resolution of tasks, class questions and test questions.

The research was carried out in an institution in the city of Braga, and several lesson plans for each one of the pedagogical interventions were developed, in order to ensure that it followed the curriculum of Mathematics A for Secondary Education, the general planning for the subject that is to be delivered by the instructors and that took to account the available resources. Highlighted in this project are tablets, smartphones, GeoGebra and the organization of the physical space that influenced the work in pairs. From the eight classes, tree was selected to interpret the evolution of the 3D Geometrical thought of the students in the topics of Analytical Geometry in Space. These were classes with "pen and paper" tasks and GeoGebra, exclusively "pen and paper" tasks and exclusively GeoGebra tasks.

The results show that the use of GeoGebra involved students in the visualization and manipulation of objects, in the identification and relationship of properties of constructed solids, in the use of logical reasoning in their conclusions and verifications and in learning and consolidating new concepts. The main difficulties shown by students in the learning of Analytical Geometry in Space were related to the visualization and representation, in the expertise and understanding of concepts and in the unfamiliarity with GeoGebra. The perceptions revealed by the students regarding the use of GeoGebra in the learning of Analytical Geometry in Space indicates a positive correlation to the potential of GeoGebra to better visualize and understand assignments and to verify analytical results. Furthermore, it helped students relate the graphs and analytics, solve analytical expressions, clarify concepts and facilitate discussion of ideas. It has promoted autonomy and a higher engagement while allowing students to learn to work with a new software using the smartphone.

Keywords: Analytical Geometry in Space; Secondary Education; GeoGebra; Learning; Difficulties.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O presente capítulo está dividido em três secções: na primeira, apresenta-se o tema, o objetivo e as questões de investigação do estudo; a segunda refere a pertinência do estudo; e a terceira uma breve descrição da estrutura deste relatório.

1.1. Tema, objetivo e questões do estudo

O estudo sistemático dos conceitos matemáticos e das suas propriedades e a sua utilidade na interpretação e compreensão de fenómenos do quotidiano são agentes necessários à organização do pensamento do cidadão. A Matemática é uma das disciplinas que adquire relevo no percurso formativo de uma grande parte dos estudantes, sendo também das que mais dificuldades apresenta. Mas o insucesso escolar na disciplina de Matemática é uma realidade reconhecida por todos e de alguma forma aceite, mas que não pode ser abordada com uma atitude passiva. Quando se realizam exames nacionais surgem as estatísticas publicadas pelo Ministério da Educação dando conta do insucesso escolar na disciplina e apenas na perspetiva quantitativa. Para Ponte (1994), as causas de tais resultados "andam todas à volta dos mesmos pontos, muito embora com ênfases diferentes: a disciplina, o currículo, o professor, o aluno, razões de ordem social e cultural" (p. 2). Numa reflexão que fez sobre o insucesso em Matemática, este autor defende que a razão fundamental para que tal aconteça reside no facto de esta disciplina ser socialmente concebida para conduzir ao insucesso. Isto porque ela tem um papel fundamental no processo educativo que é o de instrumento de seleção dos alunos. Para o autor, o combate ao insucesso pressupõe uma intervenção aos mais diversos níveis, incluindo as práticas pedagógicas, o currículo, o sistema educativo e a própria sociedade em geral — promovendo uma visão da Matemática como uma ciência em permanente evolução, que tanto procura responder aos grandes problemas de cada época como é capaz de gerar os seus problemas próprios.

Não obstante, apesar das muitas dificuldades colocadas ao ensino e à aprendizagem dos estudantes, a Geometria, uma das principais áreas da Matemática, está presente em todos os setores do conhecimento e é muito rica, não só na variedade, mas também nas aplicações práticas, como, por exemplo, em desenho assistido por computador (CAD) e em modelagem geométrica (incluindo design, na modificação e fabrico de carros e de aviões, na construção de edifícios, etc.), na robótica, em imagens médicas (que levaram a novos resultados substanciais em campos como tomografia geométrica), na animação por computador, nas apresentações visuais, na realidade virtual, entre outras, apresentando um desenvolvimento exponencial. O NCTM (2007) refere que o conhecimento da Geometria proporciona uma forma de descrever, analisar e compreender o mundo e as suas estruturas. Através dos conhecimentos e capacidades que adquirem neste domínio, os alunos podem descobrir padrões e formular conjeturas, avaliar, construir e comunicar argumentos matemáticos. Tais atividades podem ser potenciadas através da utilização de softwares dinâmicos porque permitem construir e analisar uma diversidade de casos.

Por isso, é natural que os currículos atuais da Geometria procurem acompanhar o desenvolvimento da sociedade. Por outro lado, as novas tecnologias que vão emergindo resultam dessa evolução. Surge, assim, a oportunidade de desenvolver uma experiência de ensino que decorre da necessidade de avaliar o impacto destas novas tecnologias na produção do conhecimento. Neste trabalho, em particular, procura-se averiguar o impacto do GeoGebra na aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço de alunos do 10.º ano de escolaridade.

A Geometria marca a sua presença nos programas de ensino da Matemática de 1991, de 2007 e de 2011. Segundo o programa em vigor, as finalidades da Geometria são, no Ensino Básico, a estruturação do pensamento e a aplicação da Matemática ao mundo real, e no Ensino Secundário, a estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade.

As orientações programáticas são elaboradas no sentido de atribuir à Geometria e ao seu currículo a relevância que lhe é devida, em função da evolução da sociedade e da tecnologia. Nos anos iniciais de ensino são abordados os conceitos elementares, que servirão de base para construir objetos mais complexos, trabalhando-se, até ao 10.º ano, sobretudo no plano bidimensional. No 10.º ano de escolaridade introduzem-se os referenciais cartesianos planos, efetua-se o estudo das equações cartesianas das retas. Fixada uma unidade de comprimento e um referencial ortonormado do plano, passa-se para o cálculo da medida da distância entre pontos a partir das respetivas coordenadas. Finalmente, é feita uma primeira abordagem aos referenciais cartesianos do espaço, generalizando-se algumas das noções já estudadas no plano. No 11.º ano de escolaridade, introduz-se a noção geométrica de produto escalar de vetores, deduzindo-se as suas principais propriedades. Fixado um referencial ortonormado, o produto escalar estuda-se também do ponto de vista das coordenadas e completa-se o estudo das equações cartesianas de planos no espaço, iniciado no 10.º ano.

Para fazer este percurso programático, o caminho a seguir pelos alunos na aprendizagem da Geometria não se encontra isento de dificuldades. Tal é referido pelos investigadores que apontam diversos obstáculos encontrados pelos alunos. Laborde (1993) considera que as dificuldades dos estudantes em Geometria surgem muitas vezes porque raciocinam sobre desenhos quando se esperava que raciocinassem sobre objetos geométricos teóricos. Presmeg refere que "um desenho ou um diagrama é, pela sua natureza, um caso concreto, ainda que o mais simples pensamento matemático requeira abstração e generalização" (1997, p. 305), o que faz com que, muitas vezes, um caso concreto de raciocínio matemático baseado na visualização de desenhos e imagens seja a fonte de muitas dificuldades. Alguns estudantes têm dificuldade não só em representar classes de formas, como também em estabelecer relações geométricas, por não entenderem a natureza dos objetos em questão e, em particular, por atribuírem características irrelevantes a um diagrama relativamente às relações que pretende representar geometricamente (Clements & Battista, 1992; Yerushalmy & Chazan, 1993). Outra dificuldade surge quando os estudantes utilizam diagramas em demonstrações, ou quando os desenhos não capturam relações geométricas apropriadas (por exemplo uma tangente pode ser desenhada à mão livre e não parecer perpendicular ao raio que interseta) (Clements & Battista, 1992; Presmeg, 1997; Yerushalmy & Chazan, 1993). Os estudantes podem confundir diagramas geométricos com fotografias desses objetos, alterando profundamente a sua interpretação. Por exemplo, os estudantes identificam paralelogramos não retangulares como retângulos porque a sua interpretação resulta de figuras de retângulos já vistos (Clements & Battista, 1992).

Outras dificuldades que os alunos sentem são a visualização de objetos a três dimensões e o estabelecimento de conexões entre a representação gráfica desses objetos e a sua representação algébrica (Breda, Trocado, & Santos, 2013; Costa, 2000; Duval, 2012; Rodrigues, 2012). Segundo Breda, Trocado e Santos, (2013), "no tema da geometria, a tridimensionalidade dos objetos em estudo é, para os alunos, uma fonte acrescida de dificuldades, ainda mais quando se pensa em conexões envolvendo a álgebra" (p. 64).

Tendo como referência trabalhos de investigação em educação matemática, no âmbito da Geometria, algumas dificuldades dos alunos podem ser ultrapassadas ou minimizadas pela utilização de novas tecnologias, tendo escolhido o GeoGebra, ferramenta gratuita e universalmente acessível, como o material tecnológico a investigar na aprendizagem dos alunos de tópicos de

Geometria. Existe a necessidade de superar as dificuldades de ensino e da aprendizagem e de proporcionar ambientes dinâmicos, estimulantes, desafiantes que permitam aos alunos o desenvolvimento da capacidade para explorar, conjeturar, raciocinar logicamente, que o GeoGebra pode potenciar no estudo da Geometria no Espaço.

Assim, o tema objeto deste relatório é "Aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço com recurso ao GeoGebra: uma experiência com alunos do 10.º ano", que tem por finalidade contribuir para o desenvolvimento do raciocínio espacial dos alunos, através da proposta de resolução de tarefas adequadas para estes progredirem para níveis superiores de pensamento com recurso ao GeoGebra. O raciocínio espacial fornece não só as bases para o raciocínio da geometria formal como também ferramentas cognitivas para a sua análise crítica. Segundo Freudenthal (1973), a compreensão do espaço "em que o jovem vive, respira e se move é o espaço que deve aprender a conhecer, explorar, conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor" (p. 403).

Com base nos pressupostos anteriores, o objetivo geral a atingir com este trabalho consiste em averiguar o contributo do GeoGebra na aprendizagem de alunos do 10.º ano de escolaridade de tópicos de Geometria Analítica no Espaço. Para concretizar este objetivo, pretendo dar resposta às seguintes questões:

- Como utilizam os alunos o GeoGebra nas atividades de aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço?
- Que dificuldades manifestam os alunos na aprendizagem, com ou sem o GeoGebra, de tópicos de Geometria Analítica no Espaço?
- Que perceções têm os alunos sobre a utilização do GeoGebra na aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço?

O GeoGebra é um instrumento atual e poderoso no ensino e na aprendizagem da Matemática, em geral, e da Geometria, em particular, ao aliar as capacidades gráficas às capacidades algébricas do computador. É um software considerado por diversos autores como um excelente recurso no apoio à atividade dos professores e dos alunos na aprendizagem da Geometria (Breda et al., 2013; Choi, 2010; Hohenwarter & Jones, 2007; Ljajko & Ibro, 2013; Mehanovic, 2009; Santos, 2011; Silveira & Cabrita, 2013). O poder gráfico do GeoGebra possibilita o acesso a modelos visuais poderosos que os alunos estão impossibilitados de realizar através de formas de representação tradicionais. O envolvimento dos alunos nas atividades de aprendizagem com tal software pode ser fomentado pois é-lhes fornecido um meio de visualizar diversas opções geométricas sob diversas perspetivas. A aprendizagem dos alunos é auxiliada através do feedback que o GeoGebra pode proporcionar, visto que num ambiente de trabalho de geometria dinâmica arrasta-se um ponto e a forma observada no ecrã altera-se. A utilização do GeoGebra neste projeto não passa por substituir a compreensão e intuição elementares, mas por estimular essa compreensão e intuição, de forma a enriquecer e potenciar a aprendizagem da geometria (NCTM, 2007). Por estas razões, o GeoGebra torna-se propício ao estudo da Geometria, já que o recurso a múltiplas representações facilita a apropriação de conceitos geométricos pelos estudantes (Denbel, 2015).

1.2. Pertinência do estudo

É impossível compreender o papel da Matemática na construção da nossa sociedade sem refletir sobre a história da Geometria no seu ensino (Veloso, 1998). A Geometria é um domínio da máxima importância no currículo de Matemática dada a utilidade que as relações geométricas apresentam na resolução de problemas do dia-a-dia e no desenvolvimento do raciocínio e da argumentação dos alunos. As ideias geométricas revelam-se muito úteis na representação e na resolução de problemas nas diversas áreas das ciências, pelo que a Geometria deverá ser, sempre que possível, integrada com essas áreas de conhecimento. As noções de áreas e frações podem ser compreendidas através de representações geométricas, a informação pode ser apresentada através de histogramas e diagramas de dispersão, podem ser estabelecidas conexões entre a geometria e a álgebra através de gráficos de coordenadas. O raciocínio espacial é útil na interpretação de mapas, no planeamento de trajetos, na construção de plantas e na criação artística. A estrutura e a simetria presentes no ambiente que rodeia os alunos podem ser vistas e apreendidas. Os conceitos geométricos podem ser estudados através da utilização, quer de modelos concretos, quer através de desenhos e de programas informáticos de geometria dinâmica. A Geometria estabelece relações e desenvolve o raciocínio (NCTM, 2007).

Existe uma oportunidade de desenvolver uma experiência de ensino utilizando um instrumento tecnológico relativamente recente no estudo da Geometria. Tal consiste em averiguar a influência que o GeoGebra tem no ensino e na aprendizagem da Geometria Analítica do Espaço, em particular. Por este motivo, aplicar o GeoGebra na aprendizagem da Geometria Analítica do Espaço pode constituir um momento de inovação, de motivação e de melhoria na qualidade do ensino e da aprendizagem deste tópico pelo que o desenvolvimento de uma experiência de ensino com o GeoGebra é pertinente e aliciante.

Num estudo realizado por Armindo (2016), no seu relatório de estágio intitulado "O contributo do GeoGebra para a aprendizagem da Geometria Analítica no Espaço", a autora aponta a necessidade de realizar uma investigação mais alargada, começando, desde logo, pela Geometria Analítica no Plano e estendendo-a até à Geometria Analítica no Espaço. Também as dificuldades dos alunos na aprendizagem da Geometria, em geral, e da Geometria Analítica no Espaço, em particular, sustentam que se empreguem novas ferramentas que potenciem a sua aprendizagem. Todos estes aspetos foram catalisadores do presente trabalho que teve em conta o programa do 10.° ano de escolaridade, atualmente em vigor, e que se procurou adaptar aos conteúdos nele previstos.

1.3. Estrutura do relatório

Este relatório está organizado segundo quatro capítulos. No Capítulo 1, Introdução, apresenta-se o tema, o objetivo e as questões do estudo, a pertinência do tema e a estrutura do relatório.

O Capítulo 2, Enquadramento Contextual e Teórico, faz a descrição do Agrupamento de Escolas e da Escola onde decorreu a implementação do projeto, assim como das características da turma onde decorreu este estudo. Apresenta o plano geral de intervenção, salientando-se as metodologias de ensino e aprendizagem e as estratégias da intervenção pedagógica e da avaliação da ação. Comporta ainda uma revisão da literatura que serviu de base às opções estratégicas e metodológicas que adotei e à luz da qual desenvolvi a análise da implementação e a discussão dos principais resultados obtidos.

No Capítulo 3, trata-se da Intervenção Pedagógica onde se referem os tópicos lecionados no âmbito da Geometria no Espaço, se realiza uma análise dos dados resultantes das atividades realizadas pelos alunos em três das oito aulas concretizadas e se faz uma avaliação da Intervenção Pedagógica.

Por fim, o Capítulo 4, Conclusões, Recomendações e Limitações, trata, nas Conclusões, dos principais resultados do estudo, apresenta, nas Recomendações, algumas implicações da implementação do projeto para o ensino e aprendizagem da Geometria e algumas sugestões para estudos futuros, e, no que respeita às Limitações, apresenta algumas limitações na preparação e implementação do projeto.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO

Este capítulo inicia-se pelo enquadramento contextual, em que são apresentados o Agrupamento de Escolas, a Escola e a Turma onde se concretizou a intervenção pedagógica. Posteriormente, apresenta-se o enquadramento teórico que sustenta tal intervenção.

2.1. Enquadramento contextual

2.1.1. Caracterização do Agrupamento de Escolas

Licenciado em Engenharia Civil, sou professor do grupo 530 (antigo grupo 14 de Construção Civil) na Escola em que desenvolvi a Intervenção Pedagógica que sustenta este relatório, há 32 anos. Realizei a profissionalização em exercício nos anos letivos de 1992/1993 e 1993/1994 e pertenço aos quadros da escola. A realização do mestrado em ensino da Matemática deve-se à necessidade de me qualificar nesta área de ensino, porque sendo engenheiro civil não tenho habilitação profissional para lecionar Matemática. Encontro-me, pois, envolvido na orgânica e na evolução do sistema de ensino desde a criação do atual agrupamento, nomeadamente na evolução da escola como organização educativa e a sua crescente complexidade, no aparecimento de novas áreas de desenvolvimento e pesquisa na área da organização escolar, que se encontra em grande expansão. O estudo sobre o tipo de abordagens à administração do sistema de ensino permitiu concluir que a administração vigente é do tipo centralizada/desconcentrada, na qual existem níveis hierárquicos intermédios e inferiores com poder de decidir imediatamente, mas sujeitos à possibilidade das suas decisões poderem ser revogadas pelos órgãos superiores. Este tipo de administração apresenta como vantagens o aumento da adequação da organização às medidas centrais, a maior adequação das medidas aos problemas locais, a maior eficiência e eficácia dos serviços locais e o reforço do controlo estatal. Como desvantagens, apresenta o aumento da burocratização dos processos de gestão, a fiscalização e inspeção mais apertada, a diminuição da autonomia da escola e o desincentivo à participação dos cidadãos nas decisões, cultivando a passividade e conformismo social. Apesar deste último facto, existe um esforço do Agrupamento de Escolas a que pertenço em envolver a comunidade educativa nos diversos eventos, atividades e mesmo decisões que norteiam o seu dia a dia. Não poucas vezes, quer os pais, quer a comunidade, são consultados e convidados a participar em múltiplas iniciativas.

Tal Agrupamento de Escolas é constituído pelo Órgão de Administração e Gestão, – Conselho Geral, Diretor, Conselho Pedagógico e Conselho Administrativo –, pelo Órgão de Coordenação e Supervisão Pedagógica e Orientação Educativa, a Articulação Curricular, as Atividades de Grupo, Turma e Curso, Outras estruturas de Coordenação e pelo Órgão deliberativo em Matéria Administrativo Financeira dos Serviços (Administrativos, Técnicos e Técnico Pedagógicos).

A governação das atividades pedagógicas do Agrupamento rege-se por um projeto educativo, que é um documento central na organização do Agrupamento, que tem como missão "percursos com futuro", e nele estão patentes a sua história e identidade, a caracterização da comunidade educativa, a oferta educativa, a organização e serviços, o modelo educativo, os compromissos durante o período de vigência e o acompanhamento e avaliação. O principal objetivo centra-se no aluno e na sua formação como pessoa, valorizando no entanto a excelência e o mérito dos resultados que possam obter. A oferta formativa do Agrupamento é muito diversificada e são asseguradas a igualdade de oportunidades de acesso e de participação. Segundo a diretora do Agrupamento, ainda não existe uma política educativa que incentive a autonomia das escolas no sistema de ensino, o que talvez não seja surpreendente face ao tipo de administração centralizada/desconcentrada. Pode-se então questionar como melhorar a autonomia das escolas e do sistema de ensino? A resposta entronca quase sempre na descentralização. É a partir da descentralização que se constrói e se consolida a autonomia (Azevedo, 2015). A autonomia fornece a dinâmica local necessária a um sistema educativo descentralizado e, consequentemente, autónomo, com capacidade de autorregulação, possibilitando a tomada de decisões e a definição de políticas próprias, apelando a um poder próprio, que se carateriza pela distribuição de atribuições e competências de um sistema político ou administrativo, introduzindo a capacidade de ação por parte daqueles que recebem as competências distribuídas.

Considerando os diversos modelos organizacionais habituais (a escola como empresa, como burocracia, como arena política, como anarquia e como cultura), parece adequar-se ao Agrupamento o modelo de escola como cultura, uma cultura integradora, uma sensação de partilha, de harmonia, de identidade, um ambiente saudável, em que os alunos se sentem incluídos e inseridos. Um modelo de cultura diferenciadora parece adequar-se quando se analisa o contexto de dez escolas que constituem o mega agrupamento, bastante afastadas umas das outras, com lideranças intermédias como centros de contra poder.

Apesar do reconhecimento de uma escola de referência, o Agrupamento precisa refletir e encontrar debilidades que lhe permitam melhorar e ultrapassar as suas limitações. Mas como órgão de uma sociedade em que está inserido, o Agrupamento não poderá superar as limitações da sociedade em que está inserido. Quando muito, poderá indicar caminhos a percorrer nesse sentido.

Para que a escola seja plenamente democrática precisa de garantir, não só igualdade de oportunidades de acesso, mas também igualdade de oportunidades de sucesso. Ora, isto não depende apenas da Escola mas sobretudo da evolução económico-social, a eliminação de barreiras económicas que não limitem a adoção de medidas pedagógicas consideradas imprescindíveis. Uma destas medidas consiste na superação de uma debilidade já detetada, relativa à observação da prática letiva em sala de aula, enquanto dispositivo de auto regulação e de formação entre pares, com impacto no desenvolvimento profissional e na inovação de práticas pedagógicas, que só será possível ultrapassar quando se puderem ultrapassar restrições económicas de forma a incorporar aulas de coadjuvação em todas as disciplinas com insucesso (e não só às disciplinas de Matemática e de Português). Outra medida necessária parece ser a implementação do trabalho em equipa, não só entre professores, mas também entre alunos com a apresentação de trabalhos realizados, não isoladamente, mas em grande escala, valorizando estes trabalhos e não apenas os testes e os exames. Esta medida pode ajudar a colmatar a ausência de envolvimento direto dos órgãos dirigentes dos alunos na elaboração de documentos estruturantes do Agrupamento e também talvez permita começar a premiar o trabalho em equipa e não apenas o trabalho individual.

O Agrupamento distingue-se dos outros por ser um agrupamento de sucesso, por ser um mega agrupamento que, apesar das suas debilidades, encontra força e implementa medidas para atingir objetivos mais ambiciosos. A liderança é firme, responsável e catalisadora. As atividades extra curriculares (cerca de 500), cujo plano se pode consultar no portal do Agrupamento, pretendem ajudar a sua missão, permitindo uma formação plena do aluno. A forte inclusão que se verifica é um fator de união entre todos, começando pelas salas de aula, em que os jovens, alertados para a diferença, protegem e ajudam-se mutuamente. A oferta curricular é deveras diversificada e inovadora, citando-se, como exemplo, o ensino do mandarim, a festa do ano novo chinês, o desporto escolar e as palestras e conferências. Todos os alunos, funcionários e professores podem participar e manifestar uma opinião no Agrupamento. Tal desígnio é também aplicável à comunidade.

O Agrupamento dispõe de dois jardins de infância, sete escolas do primeiro ciclo, uma escola do ensino básico com o segundo e terceiro ciclos e uma escola do ensino secundário. Há necessidade de desenvolver uma articulação vertical de todos os níveis de ensino. Nesta articulação, a realização de atividades desempenha um papel fundamental devido ao intercâmbio que propiciam

A oferta formativa disponibilizada contempla uma grande diversidade de oferta pública de ensino: cursos Científico-Humanísticos (Ciências e Tecnologias; Artes Visuais; Línguas e Humanidades e Ciências Socioeconómicas); cursos Profissionais (privilegiando áreas de formação de quadros técnicos intermédios no âmbito da tradição industrial). Estes cursos de educação e formação visam combater o abandono escolar dos nossos jovens, apostando no ensino profissionalizante de dupla certificação, promovendo a certificação escolar de nível secundário e a qualificação profissional de nível IV; cursos de educação e formação profissional de adultos; ensino secundário recorrente; e centro de reconhecimento, validação e certificação de competências.

2.1.2. Caracterização da Escola

A escola onde realizei a minha intervenção pedagógica supervisionada é uma Escola Secundária que tem as suas raízes na Escola de Desenho Industrial criada por diploma régio em 11 de dezembro de 1884, tendo sido inaugurada, um ano depois, pelo rei D. Luís I. Por decreto régio de 23 de fevereiro de 1889, passou a designar-se Escola Industrial de Braga e, em 1891, recebeu a designação de Escola Industrial Frei Bartolomeu dos Mártires, em homenagem ao Arcebispo Dominicano. Supõe-se que, por esta altura, a Escola tenha mudado para as instalações da seiscentista Casa da Torre, atualmente situada no Largo Paulo Orósio. Era pretensão da Escola incluir o ensino da escrituração comercial, o que viria a ser reconhecido em 1914, com a fundação do Curso Elementar do Comércio (Decreto de 30/6/1914). Com nova vocação comercial a juntar à anterior, industrial, o número de alunos da Escola Industrial e Comercial Bartolomeu dos Mártires foi aumentando, recebendo, na década de 50, alunos provenientes de todos os concelhos limítrofes de Braga. Além do Curso de Comércio, distinguiram-se os cursos de 'Carpinteiro e Marceneiro' e 'Costura e Bordados'. A criação do ensino comercial conduziria ao estabelecimento, em 25 de agosto de 1948, de duas escolas distintas: a Escola Técnica Elementar Bartolomeu dos Mártires e a Escola Industrial e Comercial. Ficaram a compartilhar o mesmo espaço, no novo edifício público da rua do Castelo, para onde se tinha transferido, no ano de 1936, a Escola Industrial e Comercial Bartolomeu dos Mártires. Com a reforma de 31 de maio de 1951, as duas escolas voltaram a fundir-se sob a designação de Escola Comercial e Industrial de Braga. Desde a sua transferência para a Rua do Castelo, o funcionamento encontrava-se repartido por dois polos: o da rua do Castelo e o da cangosta dos Congregados, onde a Câmara Municipal de Braga deliberara edificar a nova Escola, em finais de 1880, ficando o projeto inconcluso. O projeto de construção de uma nova Escola de raiz avançou no ano de 1953 e a inauguração do edifício na atual localização ocorreu no mês de maio de 1958. Inauguradas estas novas instalações, manteve-se em funcionamento a secção do ensino comercial na rua do Castelo.

Atualmente, a Escola tem inscritos no 3.º ciclo e no ensino secundário cerca de 1700 alunos/formandos (incluem-se 39 formandos dos cursos EFA e recorrente). Neste universo de alunos, 34% são abrangidos pela Ação Social Escolar (ASE), beneficiando de apoios socioeconómicos específicos e previstos na legislação em vigor.

As funções docentes são asseguradas por um quadro estável e experiente de profissionais em todos os níveis de educação e ensino, com cerca de 220 professores, característico do contexto urbano em que se insere a maior parte dos estabelecimentos de educação e ensino. Esta mais-valia potencia uma ação educativa contínua, integrada e articulada (com resultados evidentes no sucesso escolar) e permite que, na distribuição anual do serviço, possa ser privilegiada a continuidade pedagógica.

A Escola Secundária, escola sede do Agrupamento, herda, no contexto da cidade de Braga, uma tradição forte e rica, cujas origens remontam à criação da Escola de Desenho Industrial, em 1884. Os resultados de sucesso escolar e as opções de prosseguimento de estudos no ensino superior, bem como os resultados da avaliação nos exames nacionais são, de forma consistente, a principal referência no ensino público do concelho de Braga.

A requalificação no âmbito da Parque Escolar dotou a escola de instalações e equipamentos de qualidade para o desenvolvimento do seu Projeto Educativo, no que respeita a espaços de aprendizagem, serviços educativos e espaços de lazer/convívio. A biblioteca, as salas de convívio para os alunos, os laboratórios, a sala de matemática, os ginásios, as oficinas, possibilitam a criação de clubes e projetos do agrupamento, entre os quais se destacam o clube de Línguas Estrangeiras, o clube de Artes Visuais, o clube de Matemática, o clube de Música, o clube de Robótica, o Núcleo de Xadrez, a Oficina de Matemática, a Estufa, a Escola Promotora da Saúde, o Erasmus, o Etwinning, os Jovens Repórteres do Ambiente, a Oficina de Teatro, o Parlamento Jovem e o Projeto do Desporto Escolar, entre outros.

2.1.3. Caracterização da turma

A turma onde implementei a minha intervenção pedagógica supervisionada era do 10.º ano de escolaridade de Ciências e Tecnologias de uma escola do concelho de Braga composta por 12 alunos do sexo feminino e 15 do masculino, embora no 3.º período se tenha reduzido para 26 alunos por desistência de uma aluna. Tratava-se de uma turma com alunos cuja idade variava entre os 15 anos, 23 alunos, e os 16 anos, quatro alunos. Em termos de desempenho escolar, nenhum aluno reprovou de ano, encontrando-se todos no 10.º ano pela primeira. Um dos alunos apresentava necessidades educativas especiais. Em relação ao seu estrato parental, as habilitações literárias dos seus pais eram diversificadas: grau de Doutor (1), Mestre (4), Licenciatura (13), 12.º ano (16), 9.º ano (12), e 3.º ciclo de escolaridade (4). Já no que diz respeito à relação com a disciplina de Matemática, sete alunos manifestavam dificuldades e 11 alunos destacavam-na como sendo a disciplina favorita. Outros alunos elegeram como disciplinas preferidas a Educação Física (5), Biologia e Geologia (6), Físico Química (9), Inglês (3) e Português (1).

Da análise da informação que recolhi com a finalidade de conhecer melhor algumas características dos alunos da turma sujeita a este estudo, verifiquei que 18 alunos (69%) costumam usar o computador/telemóvel para estudar matemática, enquanto 10 alunos (38%) dizem gostar de Geometria e 22 alunos (85%) desconhecem o GeoGebra. Quanto aos métodos preferidos para aprender Geometria, os alunos apresentam uma diversidade de métodos, os quais indiciam refletir os que vivenciaram no seu percurso escolar (Tabela 1).

Tabela 1.Métodos preferidos pelos alunos para aprenderem Geometria.

Métodos	nº alunos	%
Transmissão da matéria pelo professor.	12	46
Resolver problemas relacionados com situações do quotidiano.	15	58
Realizar trabalhos com colegas, em pares ou em grupo.	11	42
Resolver exercícios do manual escolar.	13	50
Passar para o caderno o que é feito no quadro.	13	50
Ser o aluno a estabelecer as definições, regras e propriedades.	2	5
Resolver exercícios/problemas com recurso a software de geometria dinâmica.	14	54

Relativamente ao aproveitamento na disciplina de Matemática, no ano letivo 2016/2017, todos os alunos transitaram para o 10.º ano com nível positivo, obtido durante o ano letivo e também no Exame Nacional. No final do ano letivo, a média das classificações foi de 4,1 (Tabela 2) e no Exame Nacional a média foi de 4,52 (Tabela 3).

Tabela 2. Classificações obtidas pelos alunos no 3.º período do 9.º ano a Matemática

	Classificação na disciplina de Matemática					
	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	Nível 5	Total
Feminino	0	0	2	4	6	12
Masculino	0	0	5	6	4	15
Total	0	0	7	10	10	27

Tabela 3. Classificações obtidas pelos alunos no Exame Nacional do 9.º ano a Matemática

	Classificação na disciplina de Matemática					
	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	Nível 5	Total
Feminino	0	0	2	3	7	12
Masculino	0	0	0	6	9	15
Total	0	0	2	9	16	27

A avaliação efetuada no 10.º ano, neste ano letivo 2017/2018, foi contínua e englobou todos os tópicos abordados. Durante o 1.º período, foram predominantes os domínios da Lógica e da Álgebra, durante o 2.º período dominou a Geometria no Plano e no Espaço e no terceiro período predominou o domínio das Funções (Tabela 4).

Tabela 4. Classificações dos alunos obtidas a Matemática no 1.º período de 2017/18

	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Feminino	1			2	1	1	2	2	2	1	0	
Masculino		1	1	3	2	1	1	2	3	0	1	
Total	1	1	1	5	3	2	3	4	5	1	1	

Classificações dos alunos obtidas a Matemática no 2.º período de 2017/18

	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	19
Feminino			1		1	2	1	1	2	1	1	1
Masculino	1	1	1	3	1	1		1	1	2	2	1
Total	1	1	2	3	2	3	1	2	3	3	3	2

Classificações dos alunos obtidas a Matemática no 3.º período de 2017/18

	6	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	20
Feminino			1	1			2	1	3	1	1	1
Masculino	1	1		2	2	1		3		2	2	1
Total	1	1	1	3	2	1	2	4	3	3	3	2

A média das classificações no primeiro período foi de 13,37, no segundo período foi de 13,23 e no terceiro período foi de 13,58. Embora não seja significativa, verifica-se uma diminuição da média das classificações durante o domínio em que predominou o ensino da Geometria.

2.2. Estratégias de intervenção

O objetivo geral a atingir com este trabalho consiste em averiguar o contributo do GeoGebra na aprendizagem de alunos do 10.º ano de escolaridade de tópicos de Geometria Analítica no Espaço. Para concretizar este objetivo houve necessidade de reunir um conjunto de meios que permitissem aos alunos desenvolver o seu trabalho. O conhecimento do programa, a planificação criteriosa de todas as aulas da intervenção e a articulação com a professora orientadora cooperante foram ações essenciais. Seriam, no entanto, inúteis, se não se preparassem os meios tecnológicos que permitiram aos alunos trabalhar com o GeoGebra, desde logo, dispor de tabletes ou telemóveis com o sistema androide, e instalar nesses dispositivos o software GeoGebra 3D mais recente. Em segundo lugar, tornou-se necessário adaptar os conteúdos programáticos ao GeoGebra. Como a maioria dos alunos não tinha telemóveis com o sistema androide, nem tabletes, foi necessário preparar os tabletes disponíveis na escola (nove) e instalar o software. Foram estes dois fatores, o tecnológico e o programático, que aliados a um terceiro fator relacionado com a disposição das carteiras no espaço físico disponível da sala de aula, levou à organização do trabalho em pares, que foram condicionantes principais da intervenção. A limitação dos equipamentos levou a que o trabalho com o GeoGebra fosse executado em pares.

2.2.1. Metodologias de ensino e aprendizagem

A minha intervenção pedagógica teve como foco central a atividade do aluno. Procurei planificar criteriosamente tarefas de natureza exploratória, tendo em consideração o programa da disciplina, de forma que os alunos aprendessem os tópicos de Geometria estudados e desenvolvessem o raciocínio geométrico 3D através do trabalho que realizaram. Procurei, assim, envolver os alunos nas atividades da sala de aula. Preocupei-me que os alunos participassem nessas atividades sem a preocupação de ser eu a explicar tudo, guardando uma parte significativa do conhecimento para que os alunos a descobrissem e assim conseguissem construir conhecimento (Ponte, 2005). Para este autor, a ênfase desloca-se da atividade “ensino” para a atividade mais complexa “ensino-aprendizagem” (p. 13). Na concretização desta metodologia de ensino, Ponte (2005) destaca o ensino exploratório, que

> parte de atividades em que os alunos são chamados a um forte envolvimento, para se fazer num segundo momento uma discussão, balanço, clarificação relativamente ao que se aprendeu. De alguma forma, trata-se do caminho inverso, em que se começa com forte ênfase em atividade prática que, por sua vez, serve de base à elaboração e fundamentação teórica. (p.15)

Numa perspetiva similar, Santos et al. (2002) consideram que é importante que seja proporcionada aos alunos a oportunidade de ‘fazer’ Matemática, especificamente através da resolução de tarefas de natureza investigativa e exploratória, adaptadas ao seu nível de amadurecimento matemático. Na seleção das tarefas, o papel do professor “é fundamental” (NCTM, 2007, p. 58). Segundo Ponte e Serrazina (2000), a dinâmica da aula é completamente diferente se o professor apresenta uma ficha tradicional de trabalho só com exercícios de aplicação ou se oferece aos alunos uma investigação ou um problema.

A escolha das tarefas ao ter implicações na evolução da aula e na aprendizagem dos alunos fez com que a sua planificação fosse executada. Foram cumpridas as metas curriculares previstas no programa da disciplina, o que exigiu uma planificação de todas as atividades de forma que os alunos pudessem adquirir as competências exigidas no domínio da Geometria Analítica do Espaço, num intervalo de tempo limitado.

Com a introdução do GeoGebra nas atividades de ensino de tópicos de Geometria Analítica no Espaço procurei que a aprendizagem desses tópicos tivesse o contributo dos alunos, fazendo Matemática, trabalhando tarefas de natureza exploratória, adequadas ao seu nível de maturidade. Intervim o menos possível, fazendo o papel de moderador, de forma a proporcionar o melhor envolvimento possível dos alunos na realização das tarefas. Os alunos resolviam as tarefas no quadro e explicavam aos colegas a resolução, fazendo-se em seguida a sua discussão e análise crítica, uma vez que os alunos aprendem não só a partir do trabalho que desenvolvem, mas também através da reflexão que efetuam sobre esse trabalho. Segundo Santos et. al. (2002), o conhecimento matemático vai sendo construído através de tentativas sucessivas, baseadas na observação e experimentação, em vez de o construir a partir de um corpo de factos e procedimentos que trabalham com quantidades, medidas e seu inter-relacionamento.

2.2.2. Estratégias de avaliação

Nesta secção descrevem-se os procedimentos realizados para dar resposta ao objetivo e às questões de investigação deste estudo. Ao procurar compreender o pensamento geométrico dos alunos de uma turma do 10.º ano, este estudo segue uma abordagem predominantemente qualitativa e interpretativa na análise das 'ações' que os alunos realizaram nas suas atividades de aprendizagem (Bogdan & Biklen, 1994). A recolha de dados foi realizada com recurso a diferentes técnicas, tais como: questionários (inicial, antes da intervenção pedagógica; e final, após a intervenção pedagógica); produções dos alunos; gravações vídeo de aulas; questões de aula; e questões de testes de avaliação das aprendizagens.

Questionários. Este método de recolha de dados, composto por um conjunto de questões, é um meio útil e eficaz para recolher informações relativas a uma ou mais variáveis, num curto espaço de tempo (Rojas, 2001). Uma das suas desvantagens poderá ser a possibilidade dada ao sujeito de fazer a sua própria interpretação das questões e de ocultar alguns factos de forma deliberada. Para a elaboração de um bom questionário, deverão ser consideradas questões abertas, fechadas ou mistas (Rojas, 2001).

Na minha intervenção pedagógica, utilizei dois questionários (Anexo 3) aos alunos da turma, um no início e outro no final. O objetivo do questionário inicial foi o de obter informação que me permitisse caraterizar a turma no que respeita aos seus dados pessoais, à relação com a Geometria, à utilização do computador no estudo a Matemática e ao conhecimento de algum software de geometria dinâmica.

O questionário final utilizado neste estudo pode ser descrito, segundo Rojas (2001), como um Questionário Misto, incluindo questões de resposta aberta e questões de resposta fechada. As questões de resposta fechada correspondem à tipologia da escala de Likert para a medição de atitudes, que consiste num conjunto de declarações ou julgamentos perante os quais o sujeito reage favorável ou desfavoravelmente, positiva ou negativamente, ou expressa a sua ausência de opiniões. A escala desenvolvida para este questionário foi baseada em cinco alternativas de resposta relativas quanto ao grau de concordância que cada aluno possui: 1 – Discordo Totalmente (DT), 2 – Discordo parcialmente, (DP), 3 – Indiferente (I), 4 – Concordo Parcialmente (CP), e 5 – Concordo Totalmente (CT).

Em função dos objetivos deste estudo, optei por elaborar um Questionário Final com duas partes: Parte1 – Opiniões sobre a Geometria no Espaço e sobre o GeoGebra, constituída por vinte e uma questões de resposta fechada; e Parte 2 – Opiniões sobre as vantagens, desvantagens da utilização do GeoGebra, dificuldades na aprendizagem de conceitos de Geometria no Espaço e o contributo do GeoGebra na clarificação dessas dificuldades, assim como a diferença entre a resolução de tarefas com 'papel e lápis' e com o GeoGebra, constituída por cinco questões de resposta aberta.

Produções dos alunos. Os documentos produzidos pelos alunos 'com papel e lápis'' durante as aulas (em duplicado através de papel químico), eram recolhidos no final, para posterior correção e análise, de forma à obtenção de dados significativos sobre as suas aprendizagens e sobre as dificuldades sentidas. As produções com o software de geometria dinâmica, o GeoGebra, eram submetidas via email na própria aula. A análise das produções dos alunos permite averiguar a evolução do pensamento geométrico em 3D, que surge neste trabalho na descrição de momentos que ilustram a minha intervenção pedagógica. Nessa análise, adotou-se uma nomenclatura que consiste em classificar as respostas que os alunos deram às questões colocadas nas tarefas propostas em respostas corretas (C), respostas parcialmente corretas (PC), respostas incorretas

(I) e respostas não realizadas (NR). É pertinente referir que as produções dos alunos com o GeoGebra foram feitas em pares devido à limitação dos equipamentos disponíveis. Com efeito, alguns (poucos) alunos dispunham de Smartphones com o sistema androide, que permitiu instalar e correr o software GeoGebra e a escola disponibilizou os restantes equipamentos (9 tabletes com o sistema androide).

Questões de aula. No final de cada aula solicitei aos alunos o preenchimento de questões relativas à forma como decorreram as atividades de aprendizagem, de forma a obter respostas relevantes que pudessem responder às questões de investigação. Para tal, foi distribuído uma folha específica, de resposta individual, contendo as seguintes questões (Anexo 4): O que aprendeste na aula de hoje? Que dificuldades sentiste? Como as ultrapassaste? Que vantagens teve o GeoGebra na realização das atividades da aula? Que desvantagens teve o GeoGebra na realização das atividades da aula?

Gravações vídeo. Todas as aulas foram gravadas em vídeo com recurso a uma GoPro. A gravação vídeo permitiu recordar a sequência dos assuntos abordados e reconstituir alguns diálogos que se estabeleceram na sala de aula durante a intervenção.

Questões de testes de avaliação. A intervenção teve início em 17 de janeiro de 2018 e termo em 6 de março de 2018. Foi acompanhada de momentos de avaliação, alguns dos quais se traduziram em questões teste. Estando a desenvolver o projeto de intervenção numa turma do ensino regular do 10.º ano, tive que adaptar a planificação da intervenção pedagógica à planificação da disciplina de Matemática. Por este motivo, não foi possível realizar um teste constituído unicamente com questões sobre Geometria Analítica no Espaço, mas houve determinados momentos em que foi possível avaliar tais conteúdos. Estes momentos de avaliação desenvolveram-se através de questões teste realizadas nos dias 26 de janeiro, 1 de março e 15 de março de 2018, elaboradas pela docente da disciplina, com a colaboração dos estagiários. Os resultados e a respetiva interpretação serão apresentados cronologicamente procurando refletir a evolução verificada. Segundo Hadji (2003) e Figari (1996), o processo de avaliação deve ser temporal, passando por três momentos distintos, o antes, o durante e o depois. Figari (1996) considera que esta temporalidade permite abranger as dimensões do que é induzido, do que é construído e do que é produzido ao longo do estudo. Com base nesta perspetiva procurei compreender se houve evolução do pensamento geométrico em 3D dos alunos.

Na posse dos diversos elementos da recolha de dados, feita ao longo da intervenção pedagógica, analisei toda a informação que daí resultou. A informação que advém da análise de documentos é uma fonte estável (pode ser revista várias vezes sem sofrer alterações), exata (contém nomes, referências e detalhes de um acontecimento) e de ampla cobertura (decorre ao longo de largos períodos de tempo, abrange muitos acontecimentos e ambientes distintos). O recurso aos diversos documentos serviu para reforçar e valorizar evidências provenientes de fontes diversificadas, assumindo um papel essencial no trabalho de campo. Na leitura deste relatório aparecerão referências a esses documentos que foram codificados conforme apresentado na Tabela 5.

Tabela 5: Codificação dos instrumentos de recolha de dados

Instrumentos	**Codificação**
Questionário inicial e final	(Qi,dd-mm) e (Qf,dd-mm)
Questão aula	(Qa,dd-mm)
Questão teste	(Qt,dd-mm)
Produção alunos com 'papel e lápis'	(Pa, dd-mm)
Produção alunos no GeoGebra	(G, dd-mm)
Gravação vídeo	(Gv, dd-mm)

2.3. Enquadramento teórico

É arriscado, senão impossível, apontar a origem da Geometria. Mas ela acompanhou a evolução do homem até aos nossos dias. Por esse motivo, pode-se afirmar que a Geometria é um dos ramos mais longos da matemática e as suas origens podem ser procuradas através de uma ampla gama de culturas e civilizações. Durante os séculos XIX e XX, a Geometria, como a maioria das áreas de matemática, passou por um período de crescimento exponencial. Como consequência, o conteúdo de Geometria e a sua diversidade interna aumentaram sem o devido reconhecimento. A Geometria do 'mundo antigo', codificada nos livros de Euclides, tornou-se rapidamente uma subespécie da vasta família das teorias matemáticas do espaço. A classificação contemporânea de mais de 50 geometria ilustra a riqueza da teoria geométrica moderna (Jones, 2000).

Atualmente, a Geometria continua a expandir-se e os Ambientes Dinâmicos de Geometria são instrumentos dessa expansão, dentre os quais emerge o GeoGebra. Software de computador, o GeoGebra tem o potencial de fazer melhorias significativas em como a Geometria é aprendida e ensinada. Mas esse software não está amplamente disponível nas salas de aula de matemática escolar, como é o caso dos recursos de computação em geral. Para que tais recursos possam ter um efeito máximo na melhoria do ensino e aprendizagem de Geometria, é necessário encontrar maneiras que permitam que os professores tenham tempo para desenvolver uma gama de informação e comunicação eficazes.

A avaliação do impacto do GeoGebra na aprendizagem da Geometria no Espaço levou a uma pesquisa sobre o conhecimento existente, pelo que se apresentam, neste capítulo, alguns aspetos e teorias considerados relevantes e que podem constituir um auxiliar importante neste trabalho. A Geometria no Currículo Escolar será o primeiro ponto desta estrutura, a que se seguirão o desenvolvimento do pensamento geométrico e o GeoGebra no ensino e aprendizagem da Geometria.

2.3.1. A Geometria no currículo escolar

Desde a antiguidade, a Geometria desenvolveu-se tanto em 'altura como em envergadura' (Hansen, Malkevitch & Douady, 1998). Atualmente, existem ramos da Geometria que nem sequer foram concebidos há mais de 95 anos. Este tremendo crescimento da Geometria criou uma tensão para os educadores interessados no assunto. À medida que esses novos ramos foram surgindo, não faltaram tópicos a competir pela atenção na sala de aula. Agora há ainda mais escolhas de tópicos, novos modos de ensino e novas tecnologias com as quais podem coabitar ideias novas e antigas (Hansen, Malkevitch & Douady, 1998).

Um grande número de desenvolvimentos contemporâneos em Matemática é predominantemente geométrico. Estes desenvolvimentos incluem o trabalho em sistemas dinâmicos (uma importante disciplina estreitamente interligada com todas as principais áreas de matemática), a visualização matemática (a arte de transformar o simbólico em geometria) e a álgebra geométrica (um sistema representacional e computacional para a geometria que é inteiramente distinto de geometria algébrica) (Jones, 2000). A evolução da Geometria é inevitável e engloba a compreensão de diversos fenómenos visuais. Uma definição contemporânea da Geometria é atribuída a Zeeman: "A geometria compreende os ramos da matemática que exploram a intuição visual (o mais dominante dos nossos sentidos) para lembrar teoremas, entender a prova, inspirar conjeturas, perceber a realidade e dar uma visão global" (Jones, 2000, p. 78).

Decidir os objetivos para a formação da Geometria envolve considerar tanto a natureza da Geometria como a variedade das suas aplicações. Assim, deve ser dada consideração ao espaço, ou seja, à visualização, e à prova (Jones, 2000). O relatório promovido pela The Royal Society/Joint Mathematical Council (2001) sugere que os objetivos atuais do ensino de Geometria podem ser resumidos da seguinte forma:

a) desenvolver consciência espacial, intuição geométrica e a capacidade de visualizar;
b) fornecer um campo amplo de experiências geométricas em duas e três dimensões;
c) desenvolver conhecimento, compreensão e capacidade no uso geométrico de propriedades e teoremas;
d) incentivar o desenvolvimento e o uso de conjeturas, raciocínio dedutivo e prova;
e) desenvolver competências de aplicação de geometria através de modelação e resolução de problemas em contextos do mundo real;
f) desenvolver competências das tecnologias da informação e comunicação úteis em contextos especificamente geométricos;
g) gerar uma atitude positiva em relação à matemática;
h) desenvolver uma consciência do património histórico e cultural da geometria na sociedade e das suas aplicações contemporâneas.

A amplitude do conhecimento do que é a Geometria contemporânea e a gama de objetivos que devem ser desenvolvidos para fornecer uma experiência completa, são parâmetros indicativos das questões que tornam o desenho de um currículo de Geometria uma tarefa complexa (Jones, 2000).

A Norma da Geometria (NCTM, 2007) privilegia o desenvolvimento de um raciocínio cuidadoso e da demonstração, recorrendo à utilização de definições e factos já conhecidos. A tecnologia pode desempenhar um papel importante no ensino e na aprendizagem da Geometria, através da utilização de programas informáticos de geometria dinâmica. Os alunos podem criar exemplos diversificados que, não constituindo uma demonstração, permitem formular e explorar conjeturas e a visualização e o raciocínio espacial surgem mais claramente. Os programas de ensino do pré-escolar ao 12.º ano deverão habilitar todos os alunos para:

- analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas;
- especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à geometria de coordenadas e a outros sistemas de representação;
- aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas;
- usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas. (NCTM, p. 44)

Segundo o programa da disciplina de Matemática em vigor, a Geometria é um dos pilares da matemática e a sua aprendizagem começa no ensino básico através do reconhecimento visual de objetos, com as noções de ponto, reta, paralelismo e perpendicularidade. A partir destes, constroem-se conceitos sobre ângulos, polígonos, circunferências ou sólidos. Em seguida, em consequência das operações de medição de comprimentos, surge a noção de fração. Por fim, surge a congruência de ângulos na sequência dos conceitos de igualdade e amplitude de ângulos (Ministério da Educação e Ciência, 2013).

No 10.º ano de escolaridade, o estudo da Geometria Analítica aborda a Geometria no plano e em seguida a Geometria no espaço. Na Geometria no plano é feita uma primeira abordagem aos referenciais cartesianos no plano, às equações cartesianas das retas, das circunferências e elipses e ao cálculo vetorial no plano. Na Geometria no espaço, é introduzida a distância entre dois pontos no espaço, a equação cartesiana da superfície esférica, a esfera e o cálculo vetorial no espaço. Introduzem-se as coordenadas de um vetor no espaço, estudam-se as operações com vetores no espaço, a multiplicação de um vetor por um escalar e a noção de norma de um vetor no espaço. Em seguida, aborda-se o conceito de vetor diretor de uma reta no espaço, da equação vetorial da reta e do sistema de equações paramétricas da reta no espaço. No 11.º ano de escolaridade, introduz-se a noção geométrica de produto escalar de vetores, deduzindo-se as suas principais propriedades. Fixado um referencial ortonormado, o produto escalar estuda-se também do ponto de vista das coordenadas e completa-se o estudo das equações cartesianas de planos no espaço, iniciado no 10.º ano (Ministério da Educação e Ciência, 2013).

Um currículo adequado da Geometria pode promover o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes, aspeto que me debruçarei seguidamente. No currículo escolar, a manipulação de números pode ser concreta, na Aritmética, ou na computação com números, e abstrata, na álgebra, ou na computação com símbolos. No ensino da Geometria, esta separação entre uma forma concreta e uma forma abstrata não é nítida e encontra-se geralmente oculta. Nesta secção procurou-se analisar algumas teorias que se debruçam e estudam o desenvolvimento do pensamento geométrico, nomeadamente a teoria de van Hiele, a teoria da abstração, o conceito de visualização e os tipos de raciocínio em geometria 3D defendidos por Pittalis e Christou (2010).

2.3.2. Os níveis de pensamento geométrico de van Hiele

A teoria de van Hiele foi desenvolvida por um casal de matemáticos holandeses nos anos cinquenta e foi aplicada para explicar porque é que os estudantes têm dificuldades com os processos cognitivos de ordem mais elevada, sobretudo a demonstração, que é requerida para o sucesso no desempenho da Geometria no ensino secundário. A teoria manifesta a ideia de que os estudantes devem progredir segundo uma sequência de níveis de pensamento, num determinado sentido, para evitar problemas de aprendizagem de um conteúdo que se situe num nível para o qual ainda não se encontram preparados, porque ainda não dominam o que lhe precede. São três os aspetos essenciais desta teoria: a existência de níveis, as propriedades dos níveis e o movimento de um nível para o próximo.

De acordo com a teoria de van Hiele, os estudantes progridem através de cinco níveis discretos e qualitativamente diferentes de pensamento geométrico. Os níveis são sequenciais e hierárquicos e para atingirem um nível mais elevado precisam de dominar os níveis mais básicos. Uma breve descrição dos níveis de van Hiele consiste em (Usiskin, 1982):

nível 0, visualização: os alunos aprendem nomes de figuras e reconhecem a forma como um todo (quadrados e retângulos parecem ser diferentes);
nível 1, análise: os alunos conseguem identificar propriedades de figuras (retângulos têm quatro ângulos retos);
nível 2, dedução informal: os alunos conseguem ordenar de forma lógica, figuras e relações, mas não raciocinam dentro de um sistema matemático (a dedução simples pode ser realizada, mas a prova não é entendida);
nível 3, dedução formal: os estudantes percebem o significado da dedução e o papel dos postulados, dos teoremas e da prova (as provas podem ser escritas com discernimento);
nível 4, rigor: os estudantes conseguem efetuar deduções abstratas, trabalhar em diversos sistemas axiomáticos e as geometrias não euclidianas podem ser estudadas.

Na teoria de van Hiele está inerente que para entender Geometria um estudante deve percorrer ordenadamente os níveis. A esta sequência fixa, chama-se propriedades dos níveis. A primeira propriedade (sequência fixa) consiste em que um estudante não pode estar no nível n sem ter passado pelo nível $n-1$; a segunda propriedade (adjacência) refere que o que é intrínseco no nível precedente, torna-se extrínseco no corrente nível; a terceira propriedade (distinção) consiste em que cada nível dispõe dos seus próprios símbolos linguísticos e a sua rede de relações entre esses símbolos; e a quarta propriedade (separação) diz que duas pessoas cujo nível de raciocínio geométrico é distinto não se entendem (Usiskin, 1982).

A progressão de um nível para o outro é determinada pelo ensino, em detrimento da teoria piagetiana, que defende a progressão do aluno em função da idade e do seu desenvolvimento cognitivo. Assim, o professor tem um papel fundamental ao definir as tarefas adequadas para os alunos progredirem para níveis superiores de pensamento. Sem experiências adequadas, o seu progresso através dos níveis é fortemente limitado. O pensamento geométrico desenvolvido por van Hiele apresenta uma visão diferente da de Piaget, porque acredita que o desenvolvimento cognitivo da Geometria pode ser acelerado pela instrução. Para van Hiele, o principal propósito do ensino é o desenvolvimento do *insight* (pode ser observado quando há uma adequada resposta a uma nova situação) no aluno. Contrariamente ao modelo de desenvolvimento de Piaget, o modelo de van Hiele centra-se no desenvolvimento de formas particulares de ensino e não no crescimento de estruturas mentais. Daí que van Hiele sugira que, na ausência de ensino sistemático, as oportunidades de as crianças desenvolverem a matemática do espaço enfraquecem e para muitos extinguem-se mesmo (Usiskin, 1982).

Pesquisas posteriores mostram que, embora a maioria dos alunos revele um nível dominante de pensamento geométrico, ao responder a perguntas abertas, um grande número deles reflete claramente nas suas respostas a presença de outros níveis, e há alguns alunos cujas respostas mostram dois níveis dominantes consecutivos de raciocínio simultaneamente (Burger & Shaughnessy, 1986; Fuys et al., 1988; Usiskin, 1982). Burger e Shaughnessy (1986) e Fuys et al. (1988) sugerem que esses estudantes estavam em transição entre dois níveis, mas as suas abordagens para o problema foram diferentes. Por exemplo, Fuys et al. (1988) atribuíram a um aluno o Nível 1-2 para indicar que o aluno usou claramente os níveis 1 e 2 do raciocínio na resolução de uma atividade (Fortuny, Gutiérrez & Jaime, 1991).

Na transição de níveis do pensamento geométrico, van Hiele identifica cinco fases de aprendizagem sequenciais: inquirição (inquiry), orientação guiada (directed orientation), explanação, orientação livre (free orientation) e integração (integration). Para van Hiele, um ensino desenvolvido de acordo com esta sequência promove a aquisição de um nível (van Hiele-Geldof, 1984). Para atingir um determinado nível o aluno deve ter dominado o seu precedente, portanto, se o nível que o aluno domina é diferente daquele que o professor está a ensinar o progresso pode não ocorrer (Crowley, 1987).

Para Fortuny, Gutiérrez e Jaime (1991), os níveis de van Hiele não são discretos e estabeleceram mais profundamente a sua transição segundo uma proposta baseada nos seguintes argumentos: (a) ter em conta a capacidade dos alunos na utilização de mais do que um nível de van Hiele; (b) a continuidade nos níveis de Van Hiele significa que a aquisição de um nível específico pode demorar vários meses ou mesmo anos. Estes autores assumem que é mais importante observar o tipo de raciocínio dos alunos do que a sua capacidade de resolver certos problemas corretamente num certo intervalo de tempo. Além disso, uma resposta parcialmente correta (ou mesmo totalmente incorreta) também pode dar mais informações. Uma resposta incorreta pode, por si só, dar uma insignificante quantidade de informação, mas o caso é diferente quando é conjugada com outras respostas. Pontuando cada resposta, considera-se tanto os níveis de van Hiele refletidos pelas respostas, como a precisão matemática. Faz-se uma avaliação de cada resposta que leva em consideração o(s) nível(s) de pensamento refletido, bem como a sua precisão matemática e integridade. Para avaliar um grau de aquisição dentro de cada nível de van Hiele, os autores propõem um procedimento que consiste na avaliação da resposta dos alunos a uma série de itens e critérios. Para cada item é atribuída uma pontuação numérica relacionada com a escala usada para determinar os graus de aquisição. Ao calcular a média das pontuações atribuídas aos itens que medem cada nível específico, é atribuído ao aluno o grau de aquisição desse nível.

2.3.3. A teoria da abstração

O dinamismo das figuras (movimento cinemático) está intimamente relacionado com as transformações geométricas (movimento geométrico) e, por isso, ao separar o movimento cinemático do tempo realiza-se uma abstração matemática. Esta tem razão de ser porque, por exemplo, se considerarmos uma isometria, não existe prejuízo em tratá-la como um movimento cinemático porque a consideração do fator tempo não altera os resultados (Dias, 2004).

Segundo a teoria da abstração (Battista, 2007), a aprendizagem ocorre através de ciclos individuais, por fases de ação (físicas e mentais) recursivas, seguidas de reflexão e abstração de forma a permitir o desenvolvimento de modelos mentais mais sofisticados. Estes modelos mentais consistem na abstração de objetos e de ações que podem ser realizados nesses objetos. Uma vez suficientemente abstraídos, os objetos e as ações tornam-se imagens que podem ser mentalmente trabalhados, ou seja, comparados, decompostos ou ligados entre si.

Identificam-se quatro níveis de abstração: abstração percetual; internalização; interiorização; e segundo nível de interiorização (Battista, 2007). A abstração percetual (von Glasersfeld, 1991) consiste num nível de reconhecimento em que a abstração isola uma caraterística no fluxo experimental e trata-a como um objeto. Quando os objetos são perceptualmente abstraídos, tornamo-nos conscientes desses objetos, colocamo-los na memória corrente e isolamos as propriedades básicas necessárias para os reconhecermos instantaneamente. No entanto, não os conseguimos representar, a não ser que se encontrem fisicamente presentes.

A internalização acontece quando a informação foi suficientemente abstraída e pode ser representada na ausência de mais esclarecimentos. A internalização conduz à visualização em todo o seu sentido (Steffe & Cobb, 1988). Segundo von Glasersfeld (1982), é neste estádio que um conceito é formado, entendendo-se por conceito uma estrutura obtida através da abstração realizada a partir do processo de experimentação que usamos recorrentemente. Para ser chamado 'conceito' as construções mentais devem ser suficientemente estáveis para serem representadas na ausência de estímulos percetuais (von Glasersfeld, 1982). Uma vez completa a internalização, pode-se refletir sobre a representação do objeto, concluindo como é composto sem analisar a sua estrutura (Steffe & Cobb, 1988).

A interiorização é realizada através de diversas fases: o isolamento da estrutura (forma), a deteção de padrões (coordenação) e operações (ações) de experiências e atividades. A interiorização dá-se quando a abstração desvincula o objeto do seu conceito original, permitindo operar, imaginar e projetá-lo noutro objeto ou noutra situação nova. Para usar uma qualquer abstração numa nova situação, é imprescindível que o objeto inicial seja reprocessado e não apenas recordado como foi encontrado no passado.

Nos níveis percetual e internalização, o contexto é uma parte inseparável da abstração, enquanto na interiorização o material abstraído torna-se separável do seu contexto original, embora as ligações possam permanecer (Steffe & Cobb, 1988). Segundo Hoyles e Healy (1997), nos níveis percetual e de internalização, o contexto é uma parte inseparável da abstração. No nível de interiorização, a abstração torna-se separável do seu contexto original, embora permaneçam as ligações ao mesmo. Quando é atingido o segundo nível de interiorização, podem realizar-se operações sobre os objetos sem ser preciso representá-los e podem ser utilizados símbolos para os substituir.

2.3.4. O conceito de visualização

O conceito de visualização assume uma importância fulcral na Matemática e em especial na Geometria – ao envolver aspetos históricos, filosóficos, psicológicos, pedagógicos e tecnológicos importantes, embora seja subjetivo e se preste por isso a diversas interpretações (Zimmermann & Cunningham, 1991). Pode acontecer que um autor use, por exemplo, o termo 'visualização' e outro autor use 'pensamento espacial', mas podem estar a usar o mesmo significado com termos diferentes. Tal confusão aparente resulta da diversidade de áreas onde a visualização é considerada relevante, assim como da variedade de especialistas interessados nela (Zimmermann & Cunningham, 1991).

Para esclarecer no que consiste a visualização apoiamo-nos nas perspetivas de vários investigadores:

- visualização em matemática constitui um aspeto importante da atividade matemática onde se atua sobre possíveis representações concretas enquanto se descobrem as relações abstratas que interessam ao matemático (Guzmán,1996, p. 16);
- o termo visualização científica é comummente corrente para o uso da tecnologia gráfica do computador (Cunningham, 1991, p. 67);
- visualização do ponto de vista da educação matemática inclui duas direções: a interpretação e compreensão de modelos visuais e a capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica (Dreyfus, 1990, p. 119);
- visualização é a relação entre imagens (Solano & Presmeg, 1995, p. 67).

De um modo geral, estas definições concordam em que a visualização se foca na perceção e manipulação de imagens visuais. Nemirovsky e Noble (1997) afirmam que há uma dificuldade comum quando se trabalha com os processos de visualização que é a necessidade de saber se a imagem visual está na mente do aluno ou fora do aluno, numa folha de papel ou no ecrã do computador. A resposta à questão sobre como as representações mentais humanas são construídas e armazenadas faz com que alguns investigadores sustentem que a forma de representação mental humana é puramente proposicional, enquanto que outros presumem que os humanos possuem dois sistemas distintos de processamento de informação: um que representa a informação verbalmente e o outro que representa a informação visualmente.

Dreyfus (1995) assume que não temos espelhos nas nossas cabeças, defendendo que as nossas imagens visuais contêm abstrações e variações fortemente interpretadas do que vimos, em que os seus elementos lógicos e pictóricos estão fortemente misturados. Assim, o conceito de imagem pode ser visto por diferentes aspetos, por exemplo: (i) como uma componente importante da cognição, uma referência mental que é o produto de imaginar numa qualquer modalidade seja visual, verbal, olfativa, auditiva ou cinestésica (Gray & Pitta, 1999); (ii) como uma construção mental que exibe informação visual ou espacial (Presmeg, 1995); (iii) como representação matemática dum conceito ou propriedade, contendo informação baseada em elementos pictóricos, gráficos ou diagramáticos (Gutierrez, 1996). O próprio termo 'visual' pode não ter só a ver com a visão, podendo-se referir também a propriedades espaciais e às suas relações com a visualização. O termo 'pensamento visual' aparece normalmente definido a par do termo 'visualização' (Hershkowitz, Parzysz & Dormolen,1996; Mariotti, 1995; Senechal, 1991). Por exemplo, para Senechal (1991), 'visualização' significa em linguagem usual 'perceção espacial' e assim é a reconstrução mental da representação de objetos a 3 dimensões e 'pensamento visual' é um termo mais lato e é o que fazemos quando reconhecemos rapidamente e manipulamos automaticamente símbolos de qualquer espécie. Mariotti (1995) induz a distinção entre visualização, que considera trazer à mente imagens de coisas visíveis, e pensamento visual, o pensar sobre coisas abstratas que originalmente podem não ser espaciais, mas que podem ser representadas na mente de alguma forma espacial. A referência 'visual' em matemática tende a relacionar-se com a compreensão e a aplicação de conceitos matemáticos utilizando representações e processos visualmente apresentados em diagramas, programas de computação gráfica e modelos físicos (Rahim & Siddo, 2009).

Pelas ideias expostas, neste trabalho considero a 'visualização' na matemática como o tipo de raciocínio baseado no uso de elementos visuais ou espaciais, mentais ou físicos, realizado para resolver tarefas matemáticas ou provar propriedades. A visualização é integrada por quatro elementos principais: imagens mentais, representações externas, processos de visualização e habilidades de visualização (Gutiérrez, 1996). Uma 'imagem mental' é qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito ou propriedade por meio de elementos visuais ou espaciais (Yakimanskaya, 1991). Uma 'representação externa' pertinente à visualização é qualquer tipo de expressão verbal ou representação gráfica de conceitos ou propriedades, incluindo imagens, desenhos, diagramas, etc., que ajuda a criar ou a transformar imagens mentais e a fazer raciocínios visuais. Segundo Bishop (1983), um processo de visualização é uma ação mental ou física em que imagens mentais estão envolvidas. Como competências de visualização, Gutiérrez (1996) distingue as seguintes:

- Perceção figura-fundo: capacidade de identificar uma figura específica isolando-a de um fundo complexo;
- Constância percetiva: capacidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou em uma imagem mental) são independentes de tamanho, cor, textura ou posição, e permanecer inconfundível quando um objeto ou imagem é percebido em diferentes orientações;
- Rotação mental: capacidade de produzir imagens mentais dinâmicas e de visualizar uma configuração em movimento;
- Perceção de posições espaciais: capacidade de relacionar um objeto, imagem ou imagem mental para si mesmo;
- Perceção de relações espaciais: capacidade de relacionar vários objetos, imagens, e/ou imagens mentais para o outro, ou simultaneamente para si mesmo;
- Discriminação visual: capacidade de comparar vários objetos, imagens, e/ou imagens mentais para identificar semelhanças e diferenças entre si.

No ensino da Geometria, a capacidade de visualização, em particular no espaço, deve ser uma das preocupações a desenvolver. Esta capacidade necessita de ser apoiada no domínio da representação, que se torna deveras complexa, porque as imagens tridimensionais que geramos mentalmente são invariavelmente representadas a duas dimensões (Gutiérrez, 1996).

2.3.5. Tipos de raciocínio em Geometria 3D

Investigações mais recentes em Geometria 3D admitem que há uma distinção entre tipos de raciocínio no pensamento geométrico em 3D e habilidade espacial (Pittalis & Christou, 2010). Habilidade espacial pode ser encarada como a capacidade que os indivíduos possuem para executar várias tarefas num trabalho curricular específico e incluir não só o conhecimento como as habilidades, tais como a construção de redes, a representação de objetos 3D por figuras 2D, identificar sólidos e seus elementos, estruturar matrizes de cubos, calcular a superfície e o volume de sólidos e comparar as propriedades das formas 3D (NCTM, 2000). O pensamento geométrico em 3D está intimamente relacionado com o domínio da Geometria, enquanto a estrutura das habilidades espaciais dos estudantes está intimamente relacionada com o desenvolvimento cognitivo a que todos estão sujeitos, sendo este um domínio da Psicologia. Segundo Pittalis e Christou (2010) é necessário desenvolver as habilidades espaciais para atingir a plenitude do pensamento geométrico em três dimensões.

Lohman (1998) considera a existência de três principais fatores de habilidade espacial: visualização espacial, orientação espacial e relações espaciais. O autor reconhece que existem outros fatores, mas que não são centrais para estas 'habilidades espaciais'. A visualização espacial requer que um aluno imagine o dobramento e desdobramento de um pedaço de papel que, quando dobrado, foi perfurado uma ou mais vezes. A orientação espacial é definida como a capacidade de os alunos permanecerem confusos pela mudança das orientações a que uma configuração espacial pode ser sujeita. As relações espaciais são definidas como a capacidade de rodar mentalmente um objeto espacial como um todo, rápida e corretamente.

Para Pittalis e Christou (2010), existem quatro tipos de raciocínio envolvidos no pensamento de Geometria 3D: (i) representar objetos 3D; (ii) estruturação espacial; (iii) medição; e (iv) conceitualização de propriedades matemáticas. Representar objetos 3D é essencial em várias situações geométricas em 3D, como o desenho de um objeto 3D, construir um objeto 3D com base na sua visão ortogonal, passar um modo de representação para outro e reconhecer e construir redes. O segundo tipo de raciocínio, que se refere à estruturação espacial, é composto por um fator de primeira ordem que define a capacidade dos alunos na realização de várias tarefas, identificar as partes componentes de uma estrutura, combiná-las e estabelecer inter-relações entre elas, como, por exemplo, a construção de matrizes 3D de cubos, manipulando matrizes 3D de objetos e enumerando os cubos que se encaixam de uma forma espacial. O terceiro tipo de raciocínio, que se refere à medição, é composto por um fator latente de primeira ordem que define a capacidade dos alunos na execução de várias tarefas de medição, como calcular a área de superfície e estimar o volume de objetos 3D sem usar fórmulas. O quarto tipo de raciocínio, que se refere à 'conceitualização de propriedades matemáticas' é uma síntese da capacidade dos estudantes em reconhecer as propriedades das formas 3D, como identificar sólidos no ambiente 2D ou em esboços, perceber os elementos estruturais e as propriedades dos objetos 3D, comparar elementos estruturais de formas 3D (o número de vértices, faces e arestas) com propriedades de formas 3D e conceitualizar relações entre formas 3D e suas propriedades.

Existem três processos cognitivos fundamentais implícitos que medeiam os quatro tipos de raciocínio descritos. Consistem na filtragem de propriedades geométricas em formas 3D, na exploração do conhecimento das propriedades das formas 3D que os alunos possuem, na manipulação de formas 3D e edição das convenções usadas na representação de formas 3D. Esses processos cognitivos estabelecem a diferença mais importante entre o pensamento de geometria 3D e as habilidades espaciais.

Assim, há necessidade de desenvolver os alunos pensando nos quatro tipos de raciocínio. O ensino de Geometria 3D deve, segundo Pittalis e Christou (2010), incluir atividades que envolvam uma variedade de situações de Geometria 3D e nas investigações a levar a cabo neste âmbito devem-se desenvolver atividades apropriadas que requerem a ativação de diferentes tipos de raciocínio porque o domínio na Geometria 3D pode ser alcançado apenas pela combinação efetiva dos quatro tipos de raciocínio. Por exemplo, os avanços dos alunos no raciocínio de medição podem melhorar a sua estruturação utilizando o conhecimento de como o volume ou a área de superfície é calculada, compreender a estrutura dos sólidos espacialmente. Além disso, representar objetos 3D é essencial na conceitualização de propriedades matemáticas em representações 2D de objetos 3D e ao mesmo tempo conceitualizar propriedades matemáticas pode contribuir para uma melhor compreensão dos modos de representar objetos 3D (Pittalis & Christou, 2010).

Os efeitos diretos das habilidades espaciais nos tipos de raciocínio em Geometria 3D sugerem que o ensino de Geometria 3D deve integrar atividades que desenvolvam competências espaciais. Esta afirmação é sustentada por Berthelot e Salin (1998), que alegam que o ensino tradicional de Geometria requer dos alunos muitas habilidades espaciais. Embora a pesquisa em melhorar as habilidades espaciais apresente resultados controversos, pensa-se que uma melhoria das habilidades espaciais teria lugar se o currículo de Geometria apontasse explicitamente as habilidades espaciais de uma forma sistemática como seu objetivo central, como defendem Berthelot e Salin (1998).

2.3.6. O GeoGebra no ensino e aprendizagem da Geometria

Existem hoje em dia múltiplas ferramentas que medeiam a aprendizagem de tópicos de Geometria. Logo-based (Lb), Geometric Supposers (GS) e Ambientes Dinâmicos de Geometria (ADG) são três tipos de ambientes computacionais destinados ao desenho de formas planas, em que foram identificadas duas características comuns. A primeira requer que os estudantes forneçam indicações explícitas para as formas geométricas, usando uma seleção nos menus disponíveis (nos GS e ADG) e listas de comandos em Logo. Assim, ao contrário do uso de 'papel e lápis', nestes ambientes computacionais os estudantes não podem desenhar sem possuírem algum nível conceptual e representativo bem explícito, argumentos que promovem e suportam a reflexão e a abstração de conceitos geométricos e a adequada progressão até ao nível dois de van Hiele. Por exemplo, Clements e Battista (1992), seguindo Papert, afirmam que,

> Escrever uma sequência de comandos Logo, ou um procedimento, para desenhar um retângulo (...) obriga o estudante a externalizar expectativas intuitivas. Quando a intuição é transportada para um programa torna-se mais intrusiva e mais acessível à reflexão. (...) Os estudantes precisam analisar os aspetos espaciais do retângulo e como podem construi-lo por partes. (p. 450)

Da mesma forma, Laborde (2001) afirma que quando se constrói um quadrado sendo dado o lado, num AGD,

> Com papel e lápis a tarefa é controlada por percepção. A mesma tarefa em ambiente Cabri não pode ser obtida a sentimento, mas através do uso de um círculo como instrumento para transferir uma determinada distância. A tarefa executada em Cabri requer mais conhecimento matemático acerca das propriedades de um quadrado e das propriedades características de um círculo. (p. 294)

Mas, sem uma adequada instrução os estudantes podem não conseguir atingir o conjunto de comandos apropriados e assim atingir um adequado nível conceptual explícito que ocorre na aprendizagem da Geometria através de ambientes computacionais que depende de uma complexa interação entre os comandos necessários à construção das figuras, da sua avaliação pelos estudantes, do seu raciocínio e da sua instrução (Battista, 2007).

A segunda característica comum atribuída ao ambiente computacional na aprendizagem da Geometria é a repetição dos desenhos (Laborde, 1992), que se consegue de forma diversa nos três ambientes (Lb, GS e ADG). No ambiente Logo, a repetição requer o uso de procedimentos e frequentemente variáveis, acrescentando mais instruções através de comandos. Em GS a repetição de construções é discreta e limitada devido à sua natureza. Em ADG a repetição das construções é contínua e dinâmica. Este fator de repetição só é interessante na medida em que pode conduzir à produção de conceitos (Battista, 2007). Isto é, será que os estudantes distinguem diversos e múltiplos elementos pertencentes a uma determinada classe de formas, criados através do seu arrastamento, ou consideram que as novas formas obtidas pelo arrastamento das anteriores são outro tipo de objetos geométricos que podem ser estudados? Esta é uma questão crucial que nos transporta aos diagramas. No estudo tradicional da Geometria, com 'papel e lápis', existem duas entidades principais. Em primeiro lugar, os diagramas, meros objetos percetuais; em segundo lugar, há a conceptualização das formas, ou seja, a forma consciente de as classificar em classes de formas. Os ADG introduzem um novo conjunto de objetos, desenhos arrastáveis, cujas características se mantêm invariantes e assim é possível obter a sua conceptualização porque as relações entre os diversos elementos criados através do arrastamento surgem instantaneamente (Jones, 2000).

Arrastar figuras e desenhos nos ADG pode não permitir aos estudantes verem as propriedades intrínsecas, nem pensar que as possuem, uma vez que estes novos desenhos criados a partir dos anteriores podem ser entendidos como novas entidades com características próprias e não como representações das anteriores. Analisando os novos desenhos criados por arrastamento, os estudantes identificam, em primeiro lugar, a limitação dos movimentos, mais tarde podem conceptualizar estas novas formas em termos de regularidade ou invariância e, finalmente, somente com muito esforço, estas novas formas são conceptualizadas em termos de propriedades geométricas formais (Battista, 2007).

2.3.6.1. Ambientes dinâmicos da Geometria

Os ambientes dinâmicos de geometria (ADG) parecem ser um dos mais populares tipos de software usados pelos professores de matemática e estão sujeitos a uma intensa investigação (Becker, 2000). Por um lado, afirma-se que os ADG proporcionam um meio revolucionário para a compreensão do desenvolvimento geométrico, promovendo a exploração das configurações geométricas e tornando a identificação das conjeturas mais acessíveis aos estudantes. Porém, os céticos preocupam-se que os ADG enfraqueçam o papel da prova nos anos avançados de escolaridade de Geometria (Mariotti, 2001). Esta é uma discussão que se prolonga desde o trabalho no 1.º ciclo da escola básica, passando pelos 2.º e 3.º ciclos e até ao ensino secundário.

A disponibilidade de ferramentas digitais, em particular os ADG, obrigou a uma mudança nos últimos anos. A chegada do GeoGebra, disponível gratuitamente, tornou o ADG acessível e disponível para qualquer um, mas também prejudicou o mercado de software educacional em Geometria que originalmente tinha espaço para vários ADGs diferentes – não apenas os blocos originais do The Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1989) e Cabri-Géomètre (Baulac, Bellemain & Laborde, 1988), mas também mais de 50 outros produtos com vários modelos de licenciamento. Alguns deles, incluindo o Sketchpad e o Cabri, ainda disponíveis, tornaram-se difíceis para fornecedores independentes ou empresas manter ou lançar ADG alternativos. Mackrell (2011) discute a questão das decisões de projeto para software interativo de geometria comparando Cabri, Sketchpad, Cinderela (Richter-Gebert & Kortenkamp, 2012) e GeoGebra, e mostra que uma certa variedade de abordagens é desejável. Mackrell também destaca o facto de que o projeto educacional consistente de um ADG é difícil de alcançar. Um produto digno de menção é o Geometry Expressions que segue uma abordagem relacional à Geometria (onde a Geometria é modelada usando um sistema de Geometria simbólica baseada em restrições), em comparação com a abordagem construtiva funcional comum (onde configurações geométricas devem ser expressas em termos de construções sequenciais).

A Geometria espacial também se tornou acessível por meio da tecnologia: o Cabri 3D, o GeoGebra 3D e outros ADG especializados que se encontram disponíveis. Mesmo assim, a manipulação 3D em realidade aumentada ainda não se tornou prioritária. Güçler et al. (2013) examinaram alunos de 10 anos de idade usando dispositivos tácteis em ambientes multimodais dinâmicos, com resultados preliminares mostrando que tais tecnologias "têm o potencial de oferecer aos estudantes mais jovens oportunidades de explorar objetos 3D através de múltiplas percepções, apoiando a forma como os alunos se envolvem em atividades matemáticas, como explorar, conjeturar, negociar significado e fazer sentido" (p. 97).

Chang et al. (2014) usaram tabletes capazes de executar o Cabri 3D para criar um ambiente de aprendizagem móvel para Geometria espacial e os seus resultados indicaram melhorias nos índices de Geometria espacial no grupo experimental. Resultados mais cautelosos foram encontrados por Perry e Steck (2015), que apontam para as dificuldades no controle de variáveis dentro de um delineamento experimental. O seu estudo mostra resultados mistos para o efeito do uso de iPads na educação em Geometria com relação ao envolvimento do aluno, pontuações de proficiência de padrões de Geometria, autoeficácia e autorregulação metacognitiva. Latsi e Kynigos (2012) utilizaram a Geometria da tartaruga 3D e descobriram que os alunos experimentam o espaço 3D simulado através de duas perspetivas distintas, a perspetiva intrínseca da tartaruga e a perspetiva extrínseca de um observador externo.

A tecnologia na educação em Geometria tornou-se importante, mas ainda não há pesquisas suficientes e concludentes sobre os seus efeitos específicos (Venturini, 2015). Isso deve-se em parte ao modo como algumas tecnologias, como os ADG, alteram objetos geométricos e se desviam de forma bastante significativa das abordagens de 'papel e lápis' – algo que pode fazer articulação em sala de aula, com livros didáticos, manipuladores físicos e, especialmente, com a avaliação (Venturini, 2015). O papel da tecnologia está apenas a começar a ser entendido, enquanto, ao mesmo tempo, continua a evoluir e a mudar rapidamente o mundo ao nosso redor e na sala de aula. Alunos e professores estão a usar ferramentas digitais ao longo do dia e é necessário entender melhor como podem ser usados efetivamente para ensinar e aprender. Para esse entendimento, a investigação pode contribuir no estudo de várias questões, como, por exemplo, refere Battista (2007):

(i) Existem duas perspetivas teóricas principais relativamente ao uso dos ADG para promover o desenvolvimento do pensamento espacial dos estudantes. A primeira consiste no facto de que é possível construir numerosos exemplos, construir figuras complexas e realizar múltiplas transformações em tempo real nesses exemplos, fazendo comparações com exemplos existentes e ambientes computacionais estáticos; a segunda perspetiva teórica consiste no facto de que as figuras arrastáveis prefiguram-se como objetos visuais e interessantes, manipuláveis, cujos movimentos podem ser limitados e analisados geometricamente e cujas propriedades, além de ser vistas, podem ser sentidas. Mas é importante testar estas teorias e determinar empiricamente como os estudantes concetualizam estas figuras concebidas por arrastamento de outras. Será que os estudantes veem configurações variadas de um desenho dinâmico como exemplos de uma classe de formas geométricas, ou veem um desenho dinâmico como um interessante objeto manipulável? Serão os seus pontos de vista alterados pela instrução? Como nos ADG as figuras são objetos manipuláveis, serão essas encaradas como classes de formas? Se assim não for, como podem esses movimentos ser imaginados? Poderá o raciocínio dos estudantes sobre os objetos manipuláveis com os ADG ser transferido para o raciocínio sobre categorias geométricas? (p. 883)

(ii) Como é que os estudantes conceptualizam construções geradas nos ADG? Qual o seu significado? Serão essas construções, procedimentos para construir uma configuração visual ou serão a representação de um conceito geométrico? Como é que a aprendizagem das ferramentas de ADG altera as estruturas conceptuais dos estudantes? Que tipos de estruturas conceptuais permitem aos estudantes empregarem de forma produtiva os ADG? Será que os conceitos criados através da utilização dos ADG são os mesmos que são apreendidos no ensino tradicional da Geometria? (p. 884)

(iii) Porque é que se torna apelativa a investigação sobre as figuras arrastáveis? Uma explicação para a atração pelas figuras arrastáveis reside na teoria psicológica do essencialismo que conjetura que as pessoas agem como se as coisas tivessem traços que as fazem ser o que são e que quando essa essência é desconhecida pode motivar a procura de novos significados (...). Por isso, uma razão que pode tornar úteis as figuras ou desenhos arrastáveis é a de que os estudantes tentem determinar a essência desses objetos, como eles se movem, porque se movem, como se movem de uma certa forma? (p. 884)

(iv) Serão as figuras arrastáveis, úteis à compreensão geométrica dos estudantes? Uma das razões pelas quais as figuras arrastáveis nos objetos gerados em ADG são úteis no desenvolvimento da compreensão geométrica dos estudantes, prende-se com o facto de que essas propriedades invariantes nesse movimento de arrastamento, poderão emergir como invariantes durante o processo, o que será impercetível num desenho estático? (p. 884)

Em resumo, algumas questões pertinentes, entre as quais se salientam as seguintes: servirão os ADG para construir figuras e fazer comparações com ambientes computacionais estáticos, ou então para manipular essas figuras, arrastando-as e sentindo as suas propriedades? Os ADG alteram a compreensão da Geometria a que os alunos estão sujeitos? Porque é que os objetos arrastáveis se movem e porque se movem? Que propriedades poderão surgir desse movimento e serão esses objetos úteis à compreensão geométrica dos estudantes? Tais questões podem originar novas investigações na procura de compreender a influência da tecnologia na aprendizagem dos alunos de tópicos de Geometria.

2.3.6.2. O GeoGebra e a Geometria

O GeoGebra (abreviatura de Geometria e Álgebra) é um software de matemática dinâmica que combina conceitos de Geometria e Álgebra num único aplicativo. O programa reúne as ferramentas tradicionais de Geometria com outras mais adequadas à Álgebra e ao Cálculo. Isto tem a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e num único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto, o que aliado à sua gratuitidade, apresenta grande interesse para utilização na aprendizagem da Matemática, em geral, e na Geometria, em particular. Como vantagem adicional encontra-se a possibilidade de representação de objetos em três dimensões, potencialidade que tem vindo a ser amplamente desenvolvida. A possibilidade de visualizar em três dimensões surge como uma nova forma de introduzir a apreensão de conceitos e de beneficiar a aprendizagem dos alunos. Este ambiente de geometria dinâmica em três dimensões é um elemento motivador e gerador de interesse, acrescido ao facto de que o uso das folhas gráficas é intuitivo para os estudantes que podem realizar, criar e desenvolver os seus trabalhos (Breda et al., 2013).

Dadas as suas características, a utilização de software como o GeoGebra poderá inspirar uma mudança nas formas de trabalhar em sala de aula os temas geométricos previstos no currículo, resolver problemas "que necessitam de pensamento de alto nível e coisas que os estudantes podem querer acompanhar fora de aulas escolares regulares" (Hohenwarter & Jones, 2007). O GeoGebra junta a facilidade de se mover entre a janela algébrica e a janela de geometria, o que significa que é possível para o utilizador, por um lado, investigar os parâmetros da equação de uma curva por arrastamento de um ponto da curva com o rato e observar a mudança que se verifica na equação. Por outro lado, permite alterar diretamente a equação da curva e observar a forma como os objetos na janela de geometria mudam.

A utilização do GeoGebra em sala de aula persegue o objetivo de mudar o papel dos alunos, de recetores passivos de informação para exploradores individuais. Isto é possível porque para utilizar esta nova aplicação de forma significativa, os estudantes têm que ser muito mais ativos na realização das atividades da sala de aula. Não se trata de uma simples apresentação de propriedades e elementos de um objeto, mas de envolver-se num processo dinâmico de criação do próprio objeto, que envolve a descoberta e a exploração. Essa maneira de aprender requer que os alunos participem ativamente, o que leva à aquisição de conhecimento que é de maior qualidade e dura mais tempo. Além disso, esta ferramenta cria um ambiente que incentiva a atividade criativa dos alunos. Não se trata de um instrumento para substituir o quadro, mas de um complemento, uma nova forma de promover a exploração dos materiais com a possibilidade do estabelecimento de conjeturas. O papel do professor é o de dirigir e monitorizar o trabalho dos alunos e estabelecer com eles uma dialética construtiva de forma a que o processo de interação do conhecimento se manifeste em ambas as direções (Ljajko & Ibro, 2013). Introduzir o GeoGebra no ensino de Matemática não é uma tarefa fácil para os professores, mas o seu uso apropriado melhora a qualidade do ensino e ajuda os alunos a obter melhores resultados na sua aprendizagem. Por exemplo, as aplicações dinâmicas que se usam para apresentar a elipse e as suas características melhoram a instrução matemática em vários aspetos: (i) gasta-se menos tempo a desenhar esboços e a fazer cálculos; assim, mais tempo poderia ser usado para aprender e explorar as características da elipse, (ii) as aplicações são dinâmicas, o que significa que os alunos teriam a possibilidade de reexaminá-las se algo não estivesse claro (Ljajko & Ibro, 2013).

O GeoGebra é um software de código aberto que fornece ferramentas para visualizar ideias matemáticas do nível elementar para o nível universitário. O GeoGebra também é independente da plataforma em que se trabalha (pois é escrito em Java) e é livre para usar diretamente do site do GeoGebra. Qualquer construção do GeoGebra pode ser exportada como uma página da Web em formato html e tornar-se dinâmica para os alunos usarem. Os menus do GeoGebra e todos os seus comandos são livremente traduzidos em quase 40 idiomas e os alunos podem alternar entre diferentes idiomas durante as sessões de trabalho, caso necessitem. O GeoGebra torna possível gravar a solução de cada aluno "passo-a-passo" se for necessária uma análise mais aprofundada (Mehanovic, 2009).

O ensino de Geometria Analítica utilizando o software GeoGebra contribui para a formação de um ambiente capaz de privilegiar as ações dos alunos na construção do conhecimento matemático, proporcionando possibilidades de visualização de conceitos e propriedades relacionados com diversos objetos geométricos. Privilegia a experimentação e dá ênfase à interpretação de construções geométricas, que são difíceis de trabalhar em sala de aula com os processos tradicionais com 'papel e lápis'. Assim, novas formas de aprendizagem surgem, desenvolve-se a autonomia, estabelecem-se conexões entre entes algébricos e geométricos, complementam-se os diversos equipamentos disponíveis (quadro, manual, projetor, computador). E a manipulação algébrica associada à visual, cria novas possibilidades de conexão, o que pode contribuir para a formação de conjeturas, definições e reflexões (Santos, 2011).

A incorporação bem-sucedida do GeoGebra na aprendizagem e ensino de Geometria pode diferir, dependendo do domínio social e cultural. Mas as mudanças numa turma podem ocorrer, entre outros, em cinco aspetos: (1) motivação, (2) discussões e interações, (3) aprendizagem centrada no aluno, (4) compreensão processual versus conceptual e (5) estratégias de resolução de problemas. Estes aspetos não só não são independentes como se encontram intimamente relacionados, pelo que as consequências de se atuar sobre um deles, pode influenciar os outros. Ora, o GeoGebra vai influenciar cada um desses aspetos (Denbel, 2015). Crê-se que uma nova abordagem poderia trazer mudanças positivas para a aprendizagem da Geometria, ou seja, ao contrário da maneira tradicional de ensinar e aprender Geometria, acredita-se que uma nova abordagem ofereça mais ofertas para aumentar a participação dos alunos em discussões com toda a turma, interações e argumentações sobre construção de teorias e no desenvolvimento de compreensão conceptual e de estratégias de resolução de problemas.

A referência à característica dinâmica dos ADG é entendida como o oposto de estática. Dinâmica conota movimento, ação e energia. A geometria dinâmica é uma geometria ativa e exploratória executada com software de computador interativo. Permite visualizar conceitos geométricos abstratos. Para Denbel (2015), as ferramentas de geometria dinâmica, como o Geometric Sketchpad, o Geometric Inventor e o Cabri, oferecem mais oportunidades para construir e justificar conceitos geométricos do que as configurações com 'papel e lápis'. Um ambiente de aprendizagem com 'papel e lápis' tem uma capacidade limitada na introdução de um conceito geométrico com ênfase nas suas propriedades intrínsecas. Esta característica insuficiente do 'papel e lápis' faz com que a tendência dos alunos para construir uma imagem conceptual seja limitada. A geometria dinâmica tende a corrigir essa insuficiência, fornecendo aos alunos a opção de gerar evidências empíricas para progredir de casos específicos para o caso geral. Além disso, um meio dinâmico de geometria desempenha um papel essencial no desenvolvimento de provas de conjeturas geométricas (Denbel, 2015). Nas atividades projetadas, geralmente, a comprovação da validade de conceitos geométricos por meio de uma ferramenta de geometria dinâmica é realizada arrastando os pontos relevantes dos objetos construídos para uma situação na qual eles satisfazem condições pré-definidas. O AGD permite o desenho de tais atividades, nas quais os alunos exploram as propriedades relevantes dos objetos geométricos, a fim de construir uma imagem concetual mais apropriada (Denbel, 2015). Assim, a aprendizagem de tópicos de Geometria num AGD pode oferecer aos alunos oportunidades para construir e manipular figuras geométricas e realizar investigações empíricas.

CAPÍTULO 3

INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Na concretização da minha intervenção pedagógica procurei averiguar o contributo do GeoGebra na aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço, os quais são sintetizados na Tabela 6. O desenvolvimento desses tópicos seguiu os domínios de conteúdos emanados do programa curricular do 10.° ano de escolaridade (Ministério da Educação e Ciência, 2013), com o apoio do GeoGebra.

Tabela 6. Síntese da intervenção pedagógica.

Aulas	Tópicos	Objetivos	Recursos
1	Posição relativa de retas e planos.	Determinar a posição relativa de retas e planos	GeoGebra, Manual escolar e Quadro Interativo
2	Referenciais e coordenadas no espaço. Projeção de um ponto no espaço.	Representar coordenadas de um ponto no espaço; determinar o simétrico de um cubo em relação aos planos coordenados.	
3	Planos paralelos aos planos coordenados. Retas paralelas aos eixos coordenados.	Escrever equações de planos paralelos aos planos coordenados.	
4	Distância entre dois pontos e equação do plano mediador de um segmento de reta no espaço. Equação cartesiana da superfície esférica e inequação cartesiana da esfera.	Determinar a distância entre dois pontos do espaço. Estabelecer a equação do plano mediador de um segmento de reta no espaço, a equação de uma superfície esférica e a inequação de uma esfera.	
5	Resolução de problemas envolvendo conjuntos de pontos do espaço.	Aplicar noções de geometria analítica no espaço à resolução de problemas.	
6	Introdução aos vetores/retas do espaço.	Representar e operar vetores e coordenadas de vetores do espaço.	
7	Ponto médio de um segmento e equações de retas no espaço.	Determinar o ponto médio de um segmento de reta no espaço. Definir equações de retas no espaço.	
8	Resolução de problemas envolvendo cálculo vetorial do espaço.	Aplicar o cálculo vetorial no espaço à resolução de problemas.	

As aulas foram planeadas e delas se recolheram as produções dos alunos, efetuaram gravações vídeo e se recolheram respostas dos alunos a questões aula. Entre as oito aulas contempladas na Tabela 6, de modo a explicitar a minha intervenção pedagógica, descrevo e interpreto momentos que dinamizei nas aulas 1, 2 e 5, o que se traduz no ensino dos tópicos posição relativa de retas e planos (aula 1), referenciais e coordenadas no espaço (aula 2) e resolução de problemas envolvendo conjuntos de pontos do espaço (aula 5).

3.1. Momentos da intervenção pedagógica

3.1.1. Posição relativa de retas e planos

Na lecionação da posição relativa de retas e planos tive em consideração os conhecimentos prévios que os alunos desenvolveram no 3.º ciclo. Partindo deste pressuposto, na aula em que lecionei este tópico procurei rever noções já estudadas e sistematizá-las, visto que servem de pré-requisito para a aprendizagem de conceitos da geometria tridimensional, e ao mesmo tempo procurei introduzir nas atividades dos alunos o GeoGebra. Na abordagem de tal tópico os alunos resolveram duas tarefas. A primeira tarefa a ser explorada foi a seguinte:

Tarefa 1: Ao estudar Geometria no Espaço, o Rui apercebeu-se que num cubo pode determinar vários planos, tais como:
(1) Um plano que contém duas diagonais faciais estritamente paralelas do cubo;
(2) Um plano perpendicular ao plano anterior que contém duas diagonais faciais;
(3) Um plano estritamente paralelo a uma das faces do cubo, que contenha outra face do cubo.
Com recurso ao GeoGebra, esboce os planos idealizados pelo Rui.

Num momento inicial, os alunos resolveram a tarefa com 'papel e lápis' e a sua exploração foi feita tendo como referência as diferentes formas de definir um plano e os elementos de um cubo. Da análise das respostas dos alunos a cada um dos itens da tarefa constata-se que alguns deles apresentam respostas corretas (C), enquanto outros têm respostas parcialmente corretas (PC), respostas incorretas (I) e não realizadas (NR), como se observa na Tabela 7.

Tabela 7: Frequência das respostas dos alunos aos itens da Tarefa 1 $(n = 27)$.

	Papel e lápis				GeoGebra			
Critérios	C	PC	I	NR	C	PC	I	NR
Construção de um cubo	26	–	1	–	23	–	2	2
Plano que contém duas diagonais faciais estritamente paralelas	25	2	–	–	11	–	4	12
Plano perpendicular ao plano que contém duas diagonais faciais estritamente paralelas, que contém duas diagonais faciais	13	11	2	1	11	–	2	14
Plano estritamente paralelo a uma das faces do cubo que contenha outra face do cubo	13	5	–	9	21	–	–	6

A representação do cubo tornou-se essencial para os alunos poderem responder às questões delineadas. Quase todos os alunos efetuaram essa representação, quer na sua atividade com 'papel e lápis' quer com o GeoGebra, o que significa que o cubo está instituído no seu pensamento geométrico, pela forma e pelos elementos que o constituem, o que se traduz na capacidade de o representar em três dimensões (3D). Os alunos revelam capacidade de visualização e de análise das características deste sólido, o que já não se verifica na resposta considerada incorreta do aluno A25 que revela ausência de criticidade na representação que efetua de um cubo (Figura 1).

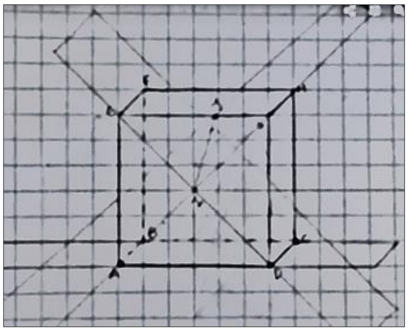


Figura 1. Representação incorreta de um cubo pelo aluno A25 (Pa, 17-01).

Após o esboço do cubo, o aluno não analisa os elementos que o constitui de modo a aperceber-se de que o representou com faces que apresentam diferenças, no que respeita à forma e dimensões das arestas. Embora não se exigisse o rigor do traçado de uma perspetiva cavaleira, visualmente esta representação poderá não ser vista como uma representação de um cubo, mas como a de um paralelepípedo.

Quanto à representação de planos no cubo com 'papel e lápis', no que respeita ao desenho do plano que contém duas diagonais faciais estritamente paralelas, somente dois alunos (7%) é que não o fizeram corretamente. Um deles, traçou o plano que claramente contém uma diagonal facial, mas não garante que contenha a que lhe é estritamente paralela, razão pela qual a resolução foi considerada parcialmente correta (Figura 1). O aluno A5 apresentou uma resposta do mesmo tipo por não garantir que o esboço do plano seja um paralelogramo[1] (Figura 2).

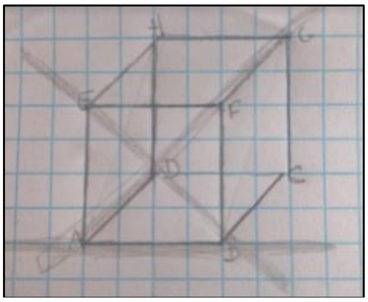


Figura 2: Representação parcialmente correta, pelo aluno A5, de um plano que contém duas diagonais faciais estritamente paralelas do cubo (Pa, 17-01).

[1] Geralmente, representa-se um plano por um paralelogramo ou por um retângulo (Palma Fernandes, 1981), o que foi convencionado nas aulas sobre tópicos de Geometria no Espaço.

A representação não é a mais adequada porque a perspetiva que adotou não o ajudou a evidenciar a forma de um paralelogramo pois ficaria sobreposto à diagonal facial frontal.

Na representação do plano perpendicular ao plano que contém duas diagonais faciais estritamente paralelas e que contém duas diagonais faciais, a maior parte dos alunos não respondeu corretamente (52%). Um número significativo de alunos apresentou uma resposta considerada parcialmente correta (41%) por não tornarem evidentes as duas diagonais nem o plano que as contém, como ilustra o seguinte esboço, elaborado pelo aluno A2 (Pa, 17-01):

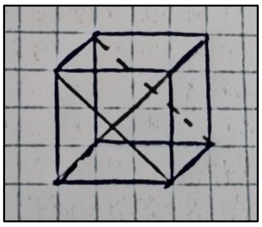


Figura 3. Resposta parcialmente correta do aluno A2 na representação do plano perpendicular ao plano que contém duas diagonais faciais estritamente paralelas do cubo e que contém duas diagonais faciais.

A ausência de tais elementos na construção indicia dever-se à perspetiva adotada, que não permite perceber se o aluno visualizou o plano perpendicular esperado, o que não acontece nas representações consideradas corretas, como exemplifica a seguinte construção, feita pelo aluno A20:

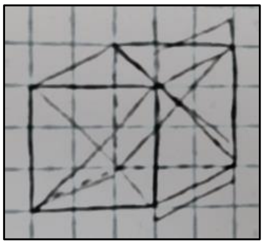


Figura 4. Resposta correta da representação do plano perpendicular ao plano que contém duas diagonais faciais estritamente paralelas do cubo e que contém duas diagonais faciais, feita pelo aluno A20 (Pa, 17-01).

Quanto às duas representações consideradas incorretas, relativamente ao item em análise, as mesmas expressam pelo menos um dos planos que não contém uma das diagonais faciais, tal como revela a seguinte figura, elaborada pelo aluno A3:

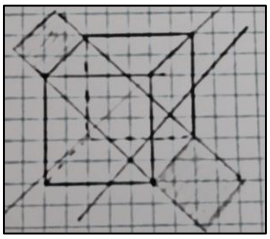


Figura 5. Resposta incorreta da representação do plano perpendicular ao plano que contém duas diagonais faciais estritamente paralelas do cubo e que contém duas diagonais faciais (Pa, 17-01).

Finalmente, a representação do plano estritamente paralelo a uma das faces do cubo que contenha outra face foi efetuada corretamente por quase metade dos alunos (48%) e foi a que teve um maior número de ausência de resposta (33%). Os restantes alunos (19%) efetuaram tal representação de uma forma que foi considerada parcialmente correta, tal como exemplifica a resolução do aluno A8 que é expressa na Figura 6.

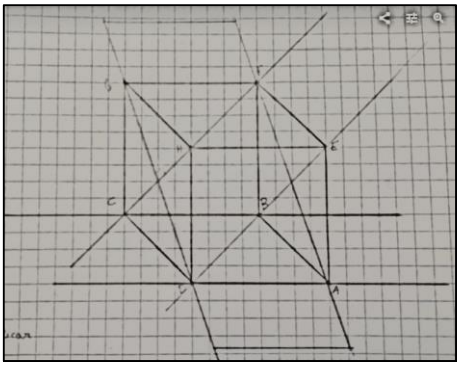


Figura 6. Resposta parcialmente correta da representação do plano estritamente paralelo a uma das faces do cubo que contenha outra face (Pa, 17-01).

Nesta representação, o aluno mostra ter a noção de que duas retas paralelas representam um plano, mas, tal como é convencionado, não representa o plano estritamente paralelo a uma das faces do cubo que contenha outra face na forma de um paralelogramo.

Durante a exploração da tarefa surgiram algumas questões dos alunos, às quais procurei envolver a turma na sua resposta, como ilustram os seguintes diálogos (Gv, 17-01):

Sara: O que é uma diagonal facial?
Renata: É uma diagonal de uma das faces do cubo.
Professor: O que é necessário para definir um plano?
André: Três pontos não colineares.
Maria: Duas retas não coincidentes.
Professor: E qual a posição das retas? As retas podem ser paralelas?
Inês: Sim.
Professor: As retas podem ser concorrentes?
Vitor: Sim.
Professor: As retas concorrentes e paralelas são complanares?
Vitor: São.
Professor: Então, para definir um plano precisamos de 3 pontos não colineares e duas retas complanares. Qual é a terceira hipótese?
Inês: Um ponto e uma reta?
Professor: ... desde que o ponto não pertença à reta.

Após a concretização da tarefa com 'papel e lápis', os alunos resolveram a tarefa em pares com o recurso ao GeoGebra (cada par de alunos dispunha de um tablete/smartphone). A escola disponibilizou nove tabletes e alguns alunos tinham smartphones com o sistema androide.

Somente um aluno resolveu a tarefa individualmente porque o número de alunos da turma era ímpar.

Na resolução da tarefa com o recurso ao GeoGebra, alguns alunos conseguiram responder a todos os critérios estipulados (41%), tal como ilustra a seguinte representação efetuada pelo par de alunos P13 (G, 17-01):

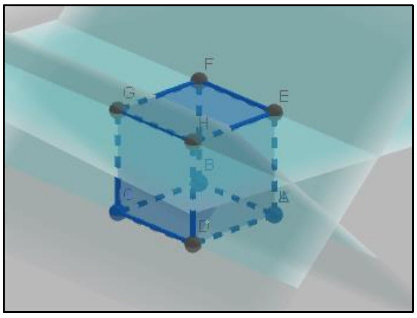


Figura 7: Representação, pelo par de alunos P13, dos critérios da Tarefa 1 com recurso ao GeoGebra.

Analisando item a item da tarefa proposta, no que diz respeito à representação do cubo, somente um par de alunos (7%) não a concretizou e o par P11 (7%) apresentou uma resposta incorreta, tal como exemplifica a seguinte construção:

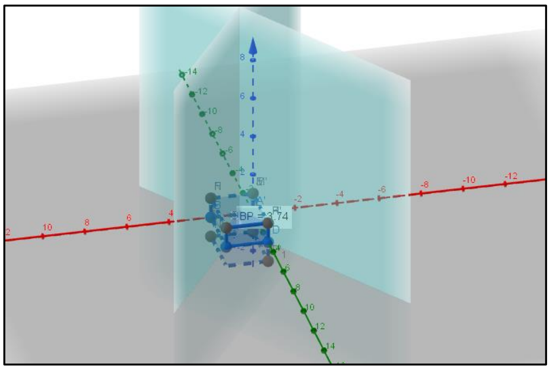


Figura 8: Representação, pelo par P11, de um cubo com recurso ao GeoGebra (G, 17-01).

Em tal construção, as arestas do sólido não têm a mesma dimensão ($2 \times 2 \times 1{,}5$), o que revela falta de capacidade crítica dos alunos na identificação da forma que representaram: um paralelepípedo que não é um cubo.

Quanto à representação de um plano que contenha duas diagonais faciais estritamente paralelas, seis pares de alunos (44%) não responderam à questão e dois pares (15%) apresentaram um esboço considerado incorreto, o que se deveu por o plano representado não conter as duas diagonais faciais, tal como exemplifica a figura seguinte, realizada pelo par P5 (G, 17-01):

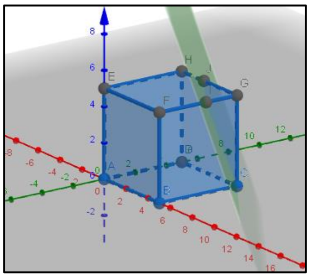


Figura 9: Representação incorreta de um plano que contém duas diagonais faciais estritamente paralelas, realizada pelo par P5.

No que respeita à representação de um plano perpendicular ao plano que contém duas diagonais faciais estritamente paralelas que contém duas diagonais faciais, a maioria dos alunos (52%) não apresentou qualquer resposta e o par de alunos P7 (7%) efetuou uma representação incorreta ao representar o plano perpendicular a uma aresta do cubo sem garantir que contenha duas diagonais faciais (Figura 10).

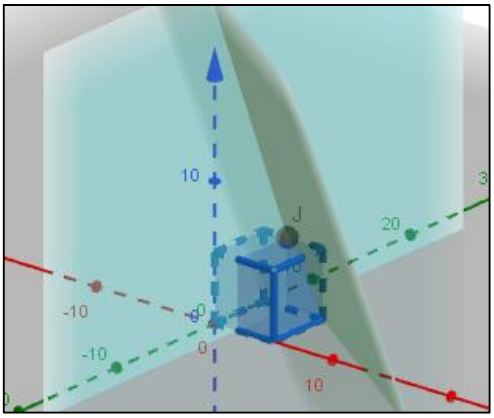


Figura 10: Representação incorreta do plano perpendicular ao plano que contém duas diagonais faciais estritamente paralelas e que contém duas diagonais faciais, feita pelo par P7 (G, 17-01).

Por fim, quanto à representação de um plano estritamente paralelo a uma das faces do cubo que contenha outra face do cubo, a maior parte dos alunos (78%) efetuou-a corretamente enquanto três pares de alunos (22%) não efetuou qualquer esboço.

Nas resoluções com o GeoGebra, o desempenho nos itens 'representar um plano que contém duas diagonais faciais estritamente paralelas do cubo' e 'representar um plano perpendicular ao plano que contém duas diagonais faciais estritamente paralelas, que contém duas diagonais faciais' foi mais conseguido com 'papel e lápis' (93% e 48%, respetivamente) do que com o GeoGebra, visto que apenas 41% dos alunos as executaram corretamente.

O desempenho no item 'representar um plano estritamente paralelo a uma das faces do cubo que contenha outra face do cubo' adquire um maior grau de execução com o GeoGebra

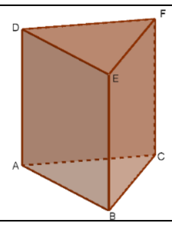
(70%) do que com ‘papel e lápis’ (48%). A explicação desta diferença indicia dever-se a uma maior acessibilidade de construção no GeoGebra do que com ‘papel e lápis’.

Após a concretização da tarefa que incidia sobre a ‘posição relativa de retas e planos’ num cubo, seguiu-se a exploração de um prisma com a finalidade de consolidar o tópico em estudo (Tarefa 2).

Tarefa 2

Desenhe, no caderno e no GeoGebra, a figura seguinte.

Represente um plano perpendicular ao plano DEF.



Da análise das respostas dos alunos, constata-se que o seu desempenho quer na ‘representação de um prisma triangular’ quer ‘na representação de um plano perpendicular ao plano formado por uma das faces triangulares’ foi mais conseguido com o GeoGebra do que com ‘papel e lápis’, como se observa na Tabela 8.

Tabela 8: Frequência das respostas dos alunos aos itens da Tarefa 2.

	Papel e lápis				GeoGebra			
	C	PC	I	NR	C	PC	I	NR
Representar um prisma triangular	19	1	–	7	25	–	–	2
Representar um plano perpendicular ao plano DEF	11	3	1	12	25	–	–	2

Relativamente à representação de um prisma triangular com ‘papel e lápis’, a maioria dos alunos (70%) conseguiu efetuá-la corretamente, enquanto o aluno A5 (4%) apresentou um esboço considerado parcialmente correto. Os restantes alunos (26%) não apresentaram qualquer esboço do prisma. No esboço considerado parcialmente correto, o aluno representa, a traço interrompido, as arestas da base superior (Figura 11).

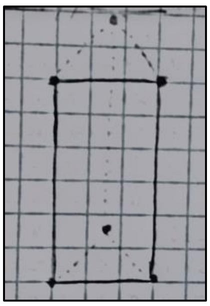


Figura 11: Representação parcialmente correta, pelo aluno A5, de um prisma triangular (Pa, 17-01).

Quanto à representação de um plano perpendicular ao plano DEF, um número significativo de alunos tanto respondeu corretamente ao que era pretendido (41%) como não apresentou qualquer esboço (44%). Entre os restantes alunos, três efetuaram um esboço considerado parcialmente correto (11%), tal como o efetuado pelo aluno A11 e o aluno A1 (4%) apresentou um esboço considerado incorreto. As representações consideradas parcialmente corretas deveram-se por os alunos não explicitarem claramente o plano solicitado, subsistindo uma certa indefinição na sua representação, tal como exemplifica a seguinte figura (Pa, 17-01):

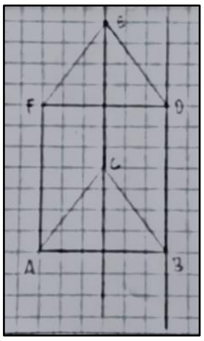


Figura 12: Representação parcialmente correta do plano perpendicular ao plano DEF, feita pelo aluno A11.

Na representação de um plano perpendicular ao plano DEF considerada incorreta, o aluno A1 não nomeia os vértices e limita-se a explicitá-lo apenas por uma reta (Figura 13).

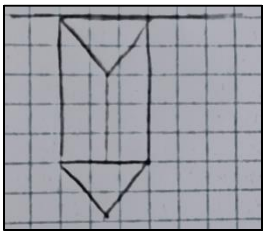


Figura 13: Representação incorreta de um plano perpendicular ao plano DEF (Pa, 17-01).

Nas respostas consideradas corretas à tarefa em análise, os alunos representaram adequadamente o prisma e o plano perpendicular ao plano DEF, como exemplifica o seguinte esboço efetuado pelo aluno A6 (Pa, 17-01):

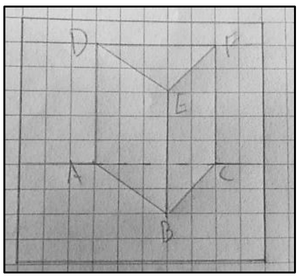


Figura 14: Representação correta de um plano perpendicular ao plano DEF, feita pelo aluno A6.

Quanto à resolução da Tarefa 2 com recurso ao GeoGebra, somente um par de alunos (7%) não apresentou qualquer esboço de cada uma das situações, o que já não se verificou com a maior parte dos pares (93%) que as representou corretamente, como ilustra a seguinte construção efetuada pelo par de alunos P10 (G, 17-01):

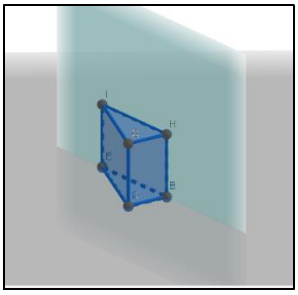


Figura 15. Representação da tarefa 2 com recurso ao GeoGebra, representada pelo par de alunos P10.

Nas construções que os alunos realizaram, a nomeação dos vértices não seguiu a ordem que constava na figura da Tarefa que lhes foi proposta devido às sucessivas tentativas de representação do prisma. Em ambos os itens, os alunos revelaram um melhor desempenho com o GeoGebra do que com 'papel e lápis': no item 'Representar um prisma triangular' 93% dos alunos concretizaram com o GeoGebra enquanto 70% o fizeram com 'papel e lápis'; no item 'Representar um plano perpendicular ao plano DEF', também 93% dos alunos o efetuaram com o GeoGebra, em contraponto aos 41% que o realizaram com 'papel e lápis'.

Em jeito de síntese, para avaliar o raciocínio geométrico dos alunos na resolução das duas tarefas adotei os quatro tipos de raciocínio envolvidos no pensamento de geometria 3D de Pittalis e Christou (2010), que consistem em: (i) representar objetos 3D; (ii) estruturação espacial; (iii) conceitualização; e (iv) medição (Tabela 9).

Tabela 9: Frequência dos tipos de raciocínio geométrico dos alunos na resolução da Tarefa 1 e Tarefa 2 .

	Tarefa 1		Tarefa 2	
	Papel e lápis	GeoGebra	Papel e lápis	GeoGebra
Representar objetos 3D	26	23	19	25
Estruturação espacial	25	11	19	25
Conceitualização	13	21	11	25
Medição	–	–	–	–

Quase todos os alunos revelaram capacidade de representar um 'objeto' 3D, o cubo e o prisma, usando a perspetiva como técnica, com base na sua visão ortogonal, quer com 'papel e lápis' quer com o GeoGebra. A maior parte dos alunos denota ter capacidade de visualização e de análise dos sólidos representados.

Relativamente à estruturação espacial de um objeto geométrico, a representação de um cubo foi mais conseguida com 'papel e lápis' do que com o GeoGebra, o que se inverteu na representação de um prisma triangular. Nessas representações, os alunos que as efetuaram adequadamente identificaram os componentes dos sólidos e combinaram-nos com os planos solicitados.

Quanto à representação do plano que contém duas diagonais faciais ocorre mais facilmente no cubo quando este é construído com 'papel e lápis' porque se trata de um sólido geométrico que começa a ser apreendido desde muito cedo, isto é, desde o 4º ano com as medições de volumes em unidades cúbicas (Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico). Por outro lado, o cubo é um poliedro que começa a ser trabalhado com frequência devido à grande predominância da sua forma no dia a dia, mantendo as suas propriedades constantes em todas as construções que dele se fazem, pelo que é uma construção que que se torna mais facilmente representável.

As propriedades de um prisma podem variar em função da figura que constitui a sua base, pelo que a sua construção com 'papel e lápis' foi visualizada com mais dificuldade pelos alunos. No caso da representação de um prisma triangular e de um plano perpendicular ao plano DEF, a flexibilidade do GeoGebra favorece a sua construção, o que explica a maior eficácia da sua representação com este recurso.

Nos dois primeiros tipos de raciocínio geométrico, 'representar objetos 3D' e 'estruturação espacial', emergem a abstração percetual na identificação de propriedades básicas dos sólidos e a internalização que se traduz nas respetivas representações com base em tais propriedades, o que conduz à visualização em todo o seu sentido.

O terceiro tipo de raciocínio geométrico abordado trata-se da conceitualização, que resulta do reconhecimento da forma 3D dos objetos, das suas propriedades. Na Tarefa 1, representar um plano paralelo a uma face que contenha outra face do cubo implica ter presente o conceito de paralelismo, o conceito de plano, as propriedades do cubo e relacionar esses conceitos com as faces do sólido e dominar a técnica de representação. Na Tarefa 2, representar um plano perpendicular a uma base implica o reconhecimento das propriedades do prisma triangular e a do plano perpendicular à base DEF e relacionar estes conceitos, o que se tornou mais eficaz no prisma com a representação no GeoGebra e a visualização adquiriu maior expressão do que a que foi realizada com 'papel e lápis'. Segundo a teoria da abstração, a interiorização predomina neste tipo de raciocínio geométrico (conceitualização), uma vez que a abstração desvincula o objeto do seu conceito original, permitindo operar, imaginar e projetá-lo noutro objeto ou noutra situação nova.

3.1.2. Referenciais e coordenadas no espaço

No estudo de tópicos de Geometria 3D importa desenvolver a capacidade dos alunos em explorar o sistema de eixos tridimensional na representação e interpretação de figuras geométricas. Com esse intuito, os alunos resolveram a seguinte tarefa:

Tarefa 1
Representar um cubo $[ABCDEFGH]$ com duas unidades de aresta e em que três das suas arestas sejam coincidentes com os eixos do referencial espacial.
1. No GeoGebra, representar no referencial espacial os planos xOy, xOz e yOz. Com esses planos, em quantas partes fica dividido o espaço? Em que diferem as coordenadas dos pontos de cada uma dessas partes?
2. Construir o cubo $[ABCDEFGH]$ no caderno e no GeoGebra.
3. Indicar as coordenadas dos vértices do cubo $[ABCDEFGH]$.
4. Determinar o perímetro da seção que resulta da intersecção do plano que contém duas diagonais faciais paralelas com o cubo $[ABCDEFGH]$.
5. Desenhar o simétrico do cubo $[ABCDEFGH]$ relativamente ao plano xOy.
6. Desenhar o simétrico do cubo obtido na alínea anterior relativamente ao plano yOz.

Da análise das respostas dos alunos aos itens da tarefa constata-se que, de uma forma geral, o seu desempenho foi mais conseguido com o GeoGebra do que com ‘papel e lápis’, conforme se pode verificar na Tabela 10.

Tabela 10. Frequência das respostas dos alunos aos itens da Tarefa 1 ($n = 27$).

	Papel e lápis				GeoGebra			
Itens	C	PC	I	NR	C	PC	I	NR
Representar no referencial espacial os planos coordenados.	–	–	–	–	25	–	–	2
Identificar características dos pontos de cada octante.	15	9	–	3	–	–	–	–
Construir o cubo $[ABCDEFGH]$.	12	1	–	14	25	–	–	2
Indicar as coordenadas dos vértices do cubo.	20	7	–	–	–	–	–	–
Representar a seção determinada pela intersecção do plano que contém duas diagonais faciais paralelas com o cubo $[ABCDEFGH]$.	–	–	–	–	–	25	–	2
Calcular o perímetro da secção obtida.	26	–	–	1	–	–	–	–
Desenhar no referencial espacial o simétrico do cubo $[ABCDEFGH]$ relativamente ao plano xOy.	11	–	–	16	23	–	2	2
Desenhar o simétrico do cubo obtido, relativamente ao plano yOz.	2	1	1	24	16	–	8	3

A resposta ao primeiro item da tarefa foi efetuada com o GeoGebra. A maioria dos alunos respondeu corretamente (93%), como exemplifica a representação dos planos coordenados no referencial espacial efetuada pelo par P1 (Figura 16).

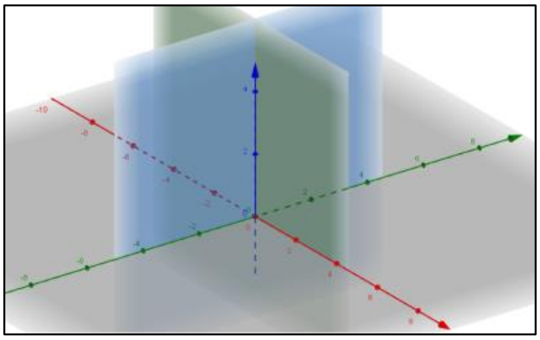
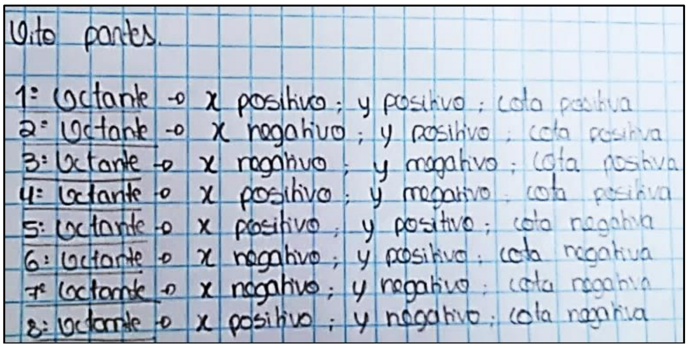


Figura 16: Representação no referencial espacial, pelo par P1, dos planos xOy, xOz e yOz (G,18-01)

Somente um par de alunos (7%) não apresentou qualquer resolução, provavelmente por não ter identificado a ferramenta do GeoGebra que permite representar planos.

Na identificação das características de pontos de cada um dos octantes obtidos, os alunos foram desafiados a fazê-lo com 'papel e lápis' para evitar que obtivessem as coordenadas de possíveis pontos com o GeoGebra. A maior parte dos alunos (56%) conseguiu identificar corretamente as características dos pontos de cada um dos octantes, como ilustra a resposta dada pelo aluno A18 (Figura 17).



Oito partes.

1º octante -> x positivo; y positivo; cota positiva
2º octante -> x negativo; y positivo; cota positiva
3º octante -> x negativo; y negativo; cota positiva
4º octante -> x positivo; y negativo; cota positiva
5º octante -> x positivo; y positivo; cota negativa
6º octante -> x negativo; y positivo; cota negativa
7º octante -> x negativo; y negativo; cota negativa
8º octante -> x positivo; y negativo; cota negativa

Figura 17. Indicação correta das características dos pontos de cada octante, pelo aluno A18 (Pa,18-01).

Por sua vez, três alunos (11%) não apresentaram qualquer resposta e os restantes (33%) apresentaram uma resposta parcialmente correta. Entre os alunos que apresentaram este tipo de resposta, oito alunos indicaram as coordenadas de pontos situados apenas nos octantes que têm cota positiva, tal como exemplifica a resposta dada pelo aluno A5, e um aluno (A1) trocou o sinal da abcissa pelo sinal da ordenada dos pontos dos octantes pares (Figura 18).

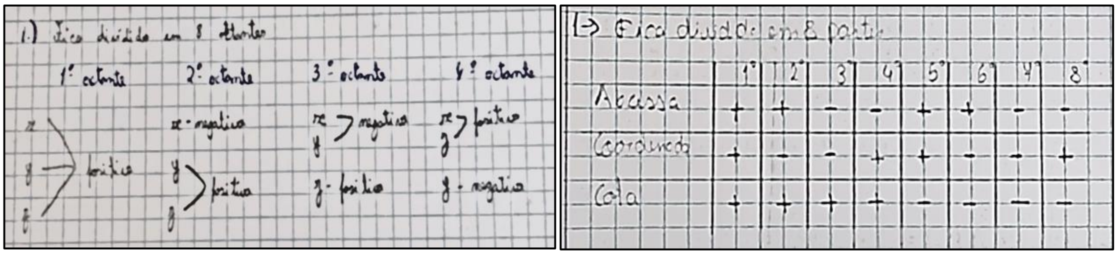


Figura 18. Indicação parcialmente correta das características dos pontos de cada octante, respetivamente, pelos alunos A5 e A1 (Pa,18-01).

A razão que levou os alunos a considerar somente quatro octantes indicia dever-se à influência da representação dos planos coordenados que efetuaram no GeoGebra. Esses alunos manifestam capacidade de visualização da variação do sinal das coordenadas dos pontos em cada octante que se situa no espaço superior a xOy, o que já não acontece com os restantes octantes. Quanto à troca de sinal da abcissa com o da ordenada dos pontos dos quadrantes pares tal pode dever-se à visualização inadequada destes eixos coordenados, o que resultou da troca de posição entre esses eixos.

Quanto ao terceiro item da tarefa, construção do cubo $[ABCDEFGH]$, os alunos também tiveram um melhor desempenho no GeoGebra do que com 'papel e lápis'. No GeoGebra, um par de alunos (7%) não a realizou e vinte e cinco (93%) construíram o cubo corretamente, tal como mostra a representação efetuada pelo par P1:

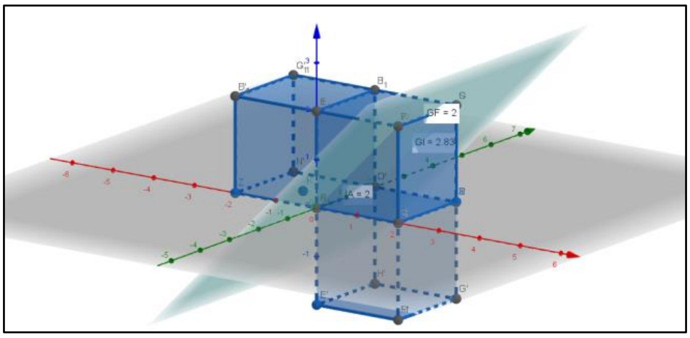


Figura 19. Construção do cubo $[ABCDEFGH]$ no GeoGebra pelo par P1 (G, 18-01).

Na construção do cubo com 'papel e lápis' verifica-se que a maioria dos alunos (52%) não efetuou qualquer resposta e um aluno (4%) apresentou uma resposta considerada parcialmente correta por representar um sólido com três arestas coincidentes com os eixos coordenados, mas que é mais parecido com um prisma quadrangular regular, em que o comprimento é claramente muito maior do que as dimensões iguais da largura e altura, do que com um cubo, tal como expressa a Figura 20.

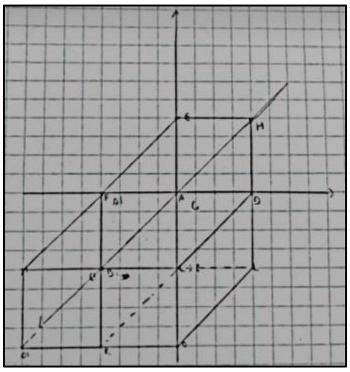


Figura 20. Construção parcialmente correta do cubo com 'papel e lápis' pelo aluno A25 (Pa,18-01).

Os restantes alunos (44%) construíram corretamente o cubo segundo as indicações dadas, tal como exemplifica a representação efetuada pelo aluno A17 (Figura 21).

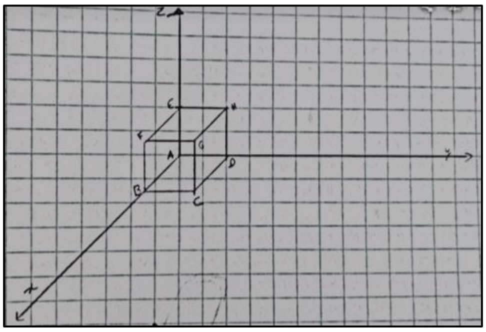
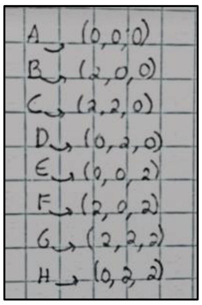


Figura 21. Construção do cubo com 'papel e lápis' pelo aluno A17 (Pa,18-01).

Na indicação das coordenadas dos vértices do cubo representado, a maior parte dos alunos (74%) fê-lo corretamente, como mostra a resposta dada pelo aluno A17:



A → (0,0,0)
B → (2,0,0)
C → (2,2,0)
D → (0,2,0)
E → (0,0,2)
F → (2,0,2)
G → (2,2,2)
H → (0,2,2)

Figura 22. Indicação correta das coordenadas dos vértices do cubo pelo aluno A17 (Pa,18-01).

Os restantes alunos (26%) apresentam uma resposta considerada parcialmente correta por considerar inadequadamente as coordenadas de pelo menos um dos vértices, tal como ilustra a resposta do aluno A5 que indica erradamente as coordenadas do vértice F (Figura 23), ou por apresentar apenas as coordenadas de metade dos vértices do cubo, como ilustra a resposta do aluno A6 (Figura 23).

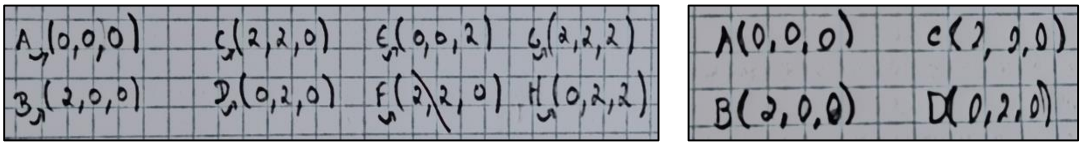


Figura 23. Indicação parcialmente correta das coordenadas dos vértices do cubo, respetivamente, pelos alunos A5 e A6 (Pa, 18-01).

No item relativo à representação da seção produzida no cubo pela intersecção deste com um plano que contivesse duas diagonais faciais, os alunos recorreram ao GeoGebra. Enquanto um par de alunos (7%) não apresentou qualquer resposta, a maior parte (93%) representou um plano que contém duas diagonais faciais paralelas do cubo, sem explicitar a secção produzida pela sua intersecção com o cubo, como exemplifica a representação efetuada pelo par P13.

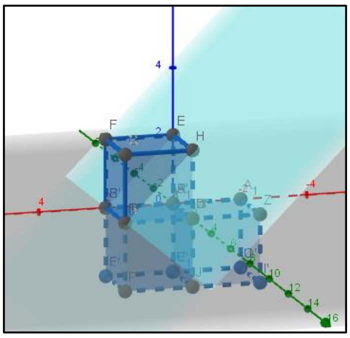


Figura 24. Representação parcialmente correta da intersecção do cubo com o plano que contém duas diagonais faciais paralelas do cubo pelo par P13 (G,18-01).

Uma razão possível para a não representação da secção indicia dever-se à falta de familiarização dos alunos com a ferramenta do GeoGebra que permite determinar as intersecções de superfícies.

Quanto ao cálculo do perímetro da secção determinada, somente um aluno (4%) é que não efetuou qualquer resposta, enquanto a maior parte dos alunos (96%) foi capaz de o calcular corretamente com 'papel e lápis', como mostra o cálculo efetuado pelo aluno A3:

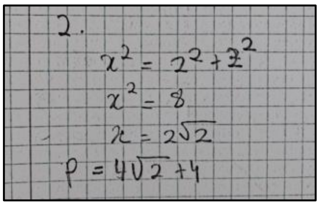


Figura 25. Cálculo, com 'papel e lápis', do perímetro da seção pelo aluno A3 (Pa,18-01).

No item da tarefa relativo ao desenho no referencial espacial do simétrico do cubo dado relativamente ao plano xOy, na resolução com 'papel e lápis' a maior parte dos alunos (59%) não efetuou qualquer resposta enquanto os restantes alunos (41%) o fez corretamente, como exemplifica a resolução efetuada pelo aluno A27 (Figura 26).

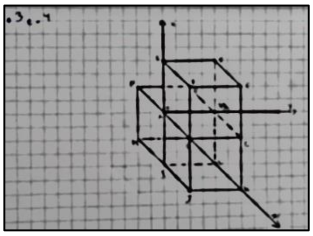


Figura 26. Representação correta do simétrico do cubo dado, relativamente ao plano xOy, pelo aluno A27 (Pa, 18-01).

Já no que respeita à resolução do mesmo item com o GeoGebra, verifica-se que o desempenho foi mais conseguido do que com o 'papel e lápis', visto que a maior parte dos alunos (85%) respondeu corretamente à questão formulada, tal como ilustra a resolução do par P1 (Figura 19). Somente um par de alunos (4%) não efetuou qualquer resposta enquanto outro par apresentou uma resposta considerada incorreta por obter um cubo que não é simétrico ao cubo dado em relação ao pano xOy, como mostra a seguinte figura:

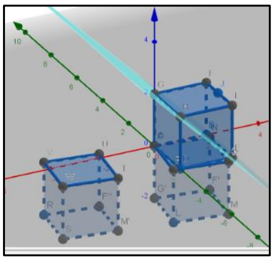


Figura 27. Representação incorreta, no GeoGebra, do simétrico do cubo dado, relativamente ao plano xOy pelo par P5 (G, 18-01).

Finalmente, na representação do simétrico do cubo obtido anteriormente relativamente ao plano yOz também houve um melhor desempenho com o GeoGebra do que com 'papel e lápis'. Relativamente a esta forma de resolução, a maior parte dos alunos (85%) não apresentou qualquer resolução. Somente dois alunos (7%) apresentaram uma resolução correta, tal como mostra a construção efetuada pelo aluno A27 (Figura 26). Dos restantes alunos, um deles (4%) apresentou uma resposta considerada parcialmente correta e o outro uma resposta incorreta, como revela a Figura 28:

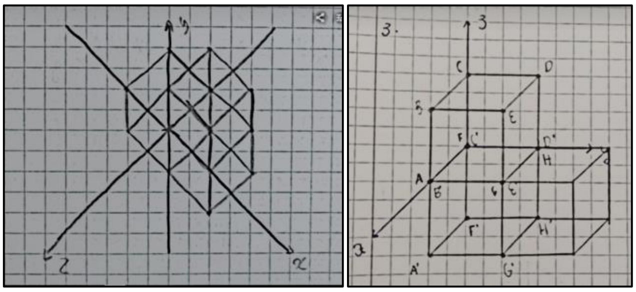


Figura 28. Representação parcialmente correta e incorreta do simétrico do cubo obtido anteriormente relativamente ao plano yOz, respetivamente, pelos alunos A4 e A16 (Pa, 18-01).

A construção considerada parcialmente correta deveu-se por o aluno trocar o eixo Oy com o eixo Oz, enquanto a construção considerada incorreta o aluno considerou um plano de simetria que não coincide com o plano yOz.

Quanto à resolução do item em análise com o GeoGebra, constata-se que a maior parte dos alunos a efetuou corretamente (59%), como ilustra a construção efetuada pelo par P8:

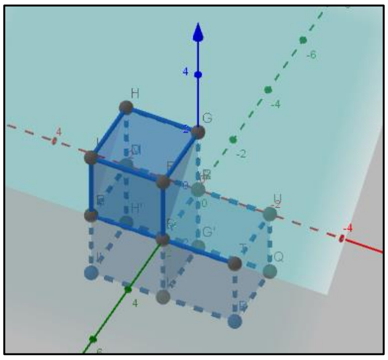


Figura 29: Representação correta do simétrico do cubo obtido anteriormente relativamente ao plano yOz, pelo par P8 (G,18-01).

Dos restantes alunos, três (11%) não efetuaram qualquer representação e quatro pares de alunos (30%) desenharam incorretamente o simétrico do cubo obtido relativamente ao plano yOz, como ilustra a construção efetuada pelo par P3:

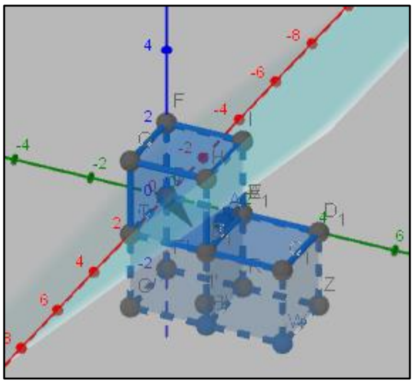


Figura 30: Representação incorreta do simétrico do cubo obtido anteriormente relativamente ao plano yOz, pelo par P3 (G,18-01).

Síntese. Na análise do raciocínio espacial dos alunos contemplado na resolução dos itens da tarefa proposta no estudo de 'Referenciais e coordenadas no espaço', atendeu-se aos quatro tipos de raciocínio envolvidos no pensamento de geometria 3D. Verifica-se que a maior parte dos alunos foi capaz de construir e representar o referencial espacial, os planos coordenados e um cubo, usando a perspetiva como técnica, com base na sua visão ortogonal, usando o GeoGebra, enquanto que com 'papel e lápis' quase metade da turma fez a representação do cubo, correspondendo ao primeiro tipo de raciocínio, isto é, 'Representar objetos 3D' (Tabela 11).

Tabela 11. Frequência dos tipos de raciocínio geométrico dos alunos na resolução da Tarefa 1.

	GeoGebra								Papel e lápis							
	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
Representar objetos 3D	25	–	25	–	–	–	–	–	–	24	13	–	–	–	–	–
Estruturação espacial	–	–	–	–	25	–	–	–	–	–	–	–	27	–	–	–
Conceitualização	–	–	–	–	–	–	23	16	–	–	–	–	–	–	11	3
Medição	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	26	–	–

Neste tipo de raciocínio geométrico, está presente a abstração percetual, pois os alunos reconhecem as propriedades básicas, quer do espaço criado pela interseção dos planos coordenados, quer do cubo. Também está presente a internalização, outra fase da abstração, pois os alunos representam esses planos e o cubo com base nas suas propriedades básicas o que conduz à visualização em todo o seu sentido. Pode-se referir a presença da capacidade de visualização e de análise, visto que a maior parte dos alunos reconhece o sólido e as suas propriedades.

Relativamente à estruturação espacial de um objeto, quase todos os alunos representou com o GeoGebra o plano que contém duas diagonais faciais paralelas, embora não tenham representado a secção que resulta da sua intersecção com o cubo, o que se pode explicar devido ao ainda frágil conhecimento do GeoGebra. As coordenadas dos octantes são indicadas de formas correta e parcialmente correta pela maior parte dos alunos, pois identificaram os componentes do espaço criado pela interseção dos planos coordenados, assim como a indicação das coordenadas dos vértices do cubo. Tal desempenho reforça que a visualização, patenteada na representação 3D, foi conseguida. Neste nível de raciocínio mantém-se a abstração percetual e a internalização, mas surge a interiorização, uma vez que esta desvincula o objeto do seu conceito original, permitindo operar, imaginar e projetá-lo noutro objeto ou noutra situação nova, como é o caso de reconhecer o sinal das coordenadas dos octantes e as coordenadas dos vértices do cubo.

A conceitualização verifica-se porque os alunos, além de reconhecerem a forma 3D dos objetos, reconhecem as suas propriedades, o que se traduz no desenho no referencial espacial do simétrico do cubo dado, relativamente ao plano xOy. Este desenho foi concretizado com 'papel e lápis' por 41% dos alunos e por 78% com o GeoGebra. Tal desenho implica ter presente o conceito de simetria, o conceito de plano, as propriedades do cubo, relacionar esses conceitos com as faces do sólido e dominar a técnica de representação. Estes conceitos estão presentes na resolução dos itens 'Desenhar o simétrico do cubo $[ABCDEFGH]$ relativamente ao plano xOy'

e ‘Desenhar o simétrico do cubo obtido na alínea anterior, relativamente ao plano yOz’ e neste caso, tal foi conseguido por 7% e 59% dos alunos, com ‘papel e lápis’ e com o GeoGebra, respetivamente.

Na questão ‘Determinar o perímetro da secção que resulta da interseção do plano que contém duas diagonais faciais paralelas com o cubo $[ABCDEFGH]$’, encontra-se presente a medição, evidenciada por 96% dos alunos na determinação do perímetro da secção. Estes alunos resolveram corretamente a questão, analiticamente, com ‘papel e lápis’, sem necessidade de representarem a secção, o que indica que a visualização da secção produzida pela intersecção do plano que contém duas diagonais faciais com o cubo está implicitamente atingida. Analisando o pensamento geométrico, do ponto e vista da teoria da abstração, verifica-se o 2.º nível de interiorização, porque a abstração permite que se realizem operações sobre os objetos sem ser preciso representá-los e podem ser utilizados símbolos para os substituir. Tal foi o caso da determinação do perímetro da secção produzida no cubo por um plano que contenha duas diagonais faciais. Embora vários estudantes tenham representado a secção, muitos não o fizeram, tendo determinado corretamente o seu perímetro, do que se infere que dominam as fases de abstração percetual e da internalização, prévias da interiorização.

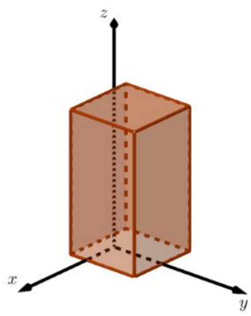
3.1.3. Resolução de problemas (envolvendo conjuntos de pontos do espaço)

Uma vez lecionadas as primeiras quatro aulas e prosseguindo a sequência de domínios de conteúdos previstos no programa do 10.º ano, surge a resolução de problemas em que se procura aplicar conhecimentos e procedimentos estudados, até ao momento, relativos às noções de geometria analítica do espaço adquiridas pelos alunos.

Tarefa 1: Exploração de um prisma

De um prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$ de altura 8, conhecem-se três vértices da base: $A(2,-1,0)$, $B(2,3,0)$ e $C(-2,3,0)$.

1. Identificar, no referencial ortonormado do espaço, os pontos $A, B\ e\ C$. Determinar as coordenadas dos restantes vértices e nomeá-los.
2. Definir analiticamente:
   - 2.1 O plano que contém a face $[EFGH]$ do prisma;
   - 2.2 A aresta $[FB]$;
   - 2.3 O plano mediador da aresta $[FB]$;
   - 2.4 O plano mediador do segmento de reta $[AG]$;
   - 2.5 A semirreta $\dot{F}G$;
   - 2.6 O conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto A é igual a 4.
3. Efetuar a representação do prisma e verificar os resultados que obteve em 2 no GeoGebra.



Após a leitura da tarefa por um aluno, gerou-se o seguinte diálogo em torno do significado de prisma quadrangular regular (Gv, 25-01):

Professor: O que é um prisma quadrangular regular?
Francisco: É um prisma cuja base é um quadrado.
Professor: Esta resposta é suficiente?
Sandra: Não, falta dizer o que significa regular.
Manuel: Tem lados paralelos iguais.
Professor: Bem, as bases podem ser paralelas e o prisma não ser regular. Então o que é que tem que acontecer?
Marco: As faces laterais têm que ser perpendiculares às bases.
Professor: Correto, então um prisma quadrangular regular terá a base na forma de um quadrado e as faces laterais iguais, por serem perpendiculares à base.

Num momento inicial, os alunos resolveram a tarefa com 'papel e lápis' e, posteriormente, recorreram ao GeoGebra para representar o prisma segundo as condições dadas na tarefa e verificar os resultados obtidos. Da análise das resoluções dos alunos pelos dois meios a que recorreram, constata-se que o seu desempenho é aproximadamente o mesmo nesses meios (Tabela 12).

Tabela 12: Frequência das respostas dos alunos aos itens da Tarefa 1 ($n = 23$).

	Papel e lápis				GeoGebra			
Itens	C	PC	I	NR	C	PC	I	NR
Identificar as coordenadas dos vértices do prisma.	16	7	–	–	23	–	–	–
Definir analiticamente o plano que contém a face $[EFGH]$ do prisma.	21	2	–	–	19	–	–	4
Definir analiticamente a aresta $[FB]$.	18	5	–	–	–	–	–	–
Definir analiticamente o plano mediador da aresta $[FB]$.	23	–	–	–	17	–	–	6
Definir analiticamente o plano mediador do segmento de reta $[AG]$.	19	3	1	–	17	–	–	6
Definir analiticamente a semirreta $\dot{F}G$.	11	11	1	–	–	–	–	–
Definir analiticamente o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto A é igual a 4.	20	2	–	1	21	–	–	2

Na resolução com 'papel e lápis', relativamente ao item 'Identificar as coordenadas dos vértices do prisma', os alunos revelam capacidade de visualização e de análise das características deste sólido. Os alunos cuja representação é parcialmente correta (30%) cometem lapsos na identificação das coordenadas de alguns vértices, tal como exemplifica a resposta do aluno A2 (Pa, 25-01):

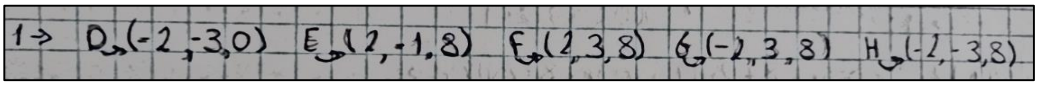


Figura 31. Indicação parcialmente correta de coordenadas dos vértices do prisma (A2).

O aluno A2 engana-se na identificação das ordenadas dos pontos D e H, indicando -3 em vez de -1, revelando falta de capacidade crítica de verificar que a representação desses pontos faria com que a sua posição comprometesse a representação do sólido.

Quanto ao item ‘Definir analiticamente o plano que contém a face $[\mathrm{EFGH}]$ do prisma’, somente dois alunos (9%) não apresentam uma resposta totalmente correta por se preocuparem com a representação da face [EFGH] em detrimento do plano que a contém, conforme ilustra a resposta do aluno A6 (Pa, 25-01):

Figura 32. Representação parcialmente correta do plano que contém a face $[\mathrm{EFGH}]$ do prisma (A6).

Já na definição analítica da aresta $[FB]$, alguns alunos (22%) apresentam as condições que traduzem a reta FB em vez do segmento de reta, resposta considerada parcialmente correta, conforme ilustra a resposta do aluno A20 (Pa, 25-01):

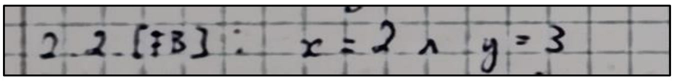


Figura 33. Representação parcialmente correta da aresta $[FB]$ do prisma (A20).

Relativamente ao item ‘Definir analiticamente o plano mediador da aresta $[\mathrm{FB}]$’, todos os alunos respondem corretamente, como explicita a resposta do aluno A11 (Figura 34).

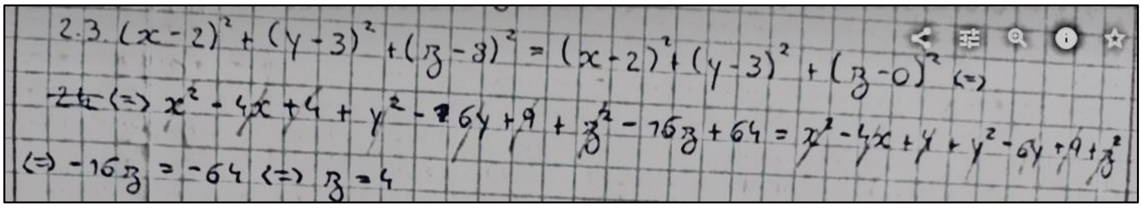
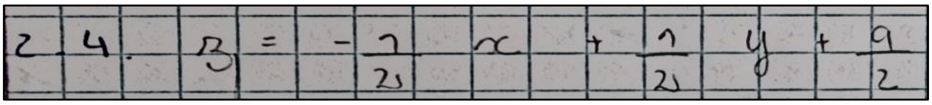


Figura 34. Representação correta do plano mediador da aresta $[FB]$, feita pelo aluno A11 (Pa,25-01).

Os alunos utilizaram a definição e realizaram a dedução formal do plano mediador. Usando a capacidade de visualização e análise, diversos alunos indicaram a equação $z = 4$, sem a deduzirem, porque a aresta $[FB]$ é vertical, o que faz com que o plano requerido seja paralelo ao plano de projeção xOy, passando no seu ponto médio.

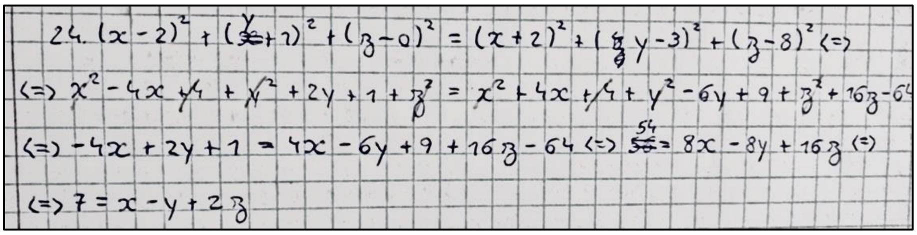
Para ‘Definir analiticamente o plano mediador do segmento de reta $[AG]$’, nem todos os alunos revelam que aplicaram a definição de plano mediador de um segmento de reta. Um aluno (A10) apresenta a expressão que define o plano mediador, mas sem ter apresentado os passos de dedução da expressão (Pa,25-01):



2.4. $z = -\frac{7}{25}x + \frac{7}{25}y + \frac{9}{2}$

Figura 35. Representação incorreta do plano mediador da aresta $[AG]$ (A10).

O mesmo já não acontece com outras respostas com erros de sinais, mas que ilustram a aplicação de tal definição, razão pela qual foram consideradas parcialmente corretas (11%). Tais erros derivam da simplificação da expressão que resulta da condição que define esse plano, como exemplifica a resolução do aluno A11 (Pa,25-01):



2.4. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-0)^2=(x+2)^2+(y-3)^2+(z-8)^2 \Leftrightarrow$

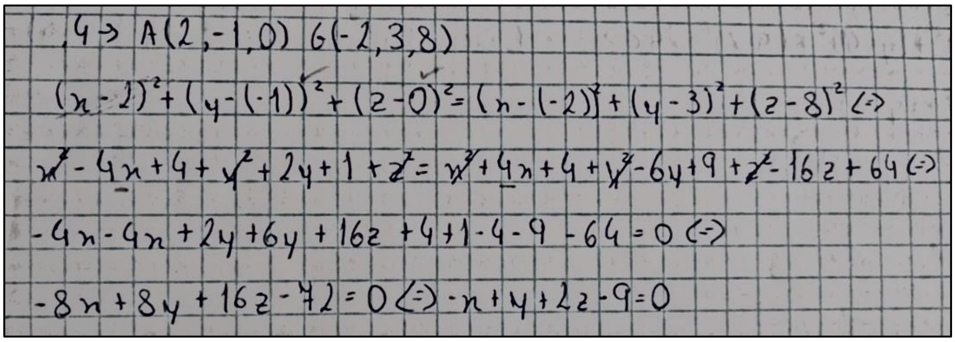
$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1+z^2=x^2+4x+4+y^2-6y+9+z^2+16z-64$

$\Leftrightarrow -4x+2y+1=4x-6y+9+16z-64 \Leftrightarrow 54=8x-8y+16z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7=x-y+2z$

Figura 36. Representação parcialmente correta do plano mediador da aresta $[AG]$ (A11).

A maior parte dos alunos (83%) aplicou corretamente a condição que resulta da definição de plano mediador de um segmento de reta e obteve a equação esperada, como mostra a resolução do aluno A2 (Pa,25-01):



2.4 → $A(2,-1,0)$ $G(-2,3,8)$

$(x-2)^2+(y-(-1))^2+(z-0)^2=(x-(-2))^2+(y-3)^2+(z-8)^2 \Leftrightarrow$

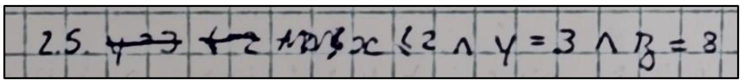
$x^2-4x+4+y^2+2y+1+z^2=x^2+4x+4+y^2-6y+9+z^2-16z+64 \Leftrightarrow$

$-4x-4x+2y+6y+16z+4+1-4-9-64=0 \Leftrightarrow$

$-8x+8y+16z-72=0 \Leftrightarrow -x+y+2z-9=0$

Figura 37: Representação correta do plano mediador da aresta $[AG]$ (A2).

No item relativo à definição analítica da semirreta $\dot{F}G$, 48% responde correctamente, 48% responde parcialmente correto e 4% (um aluno) responde incorretamente. A resposta incorreta é a seguinte (Pa,25-01),



2.5. $x \leq 2 \wedge y = 3 \wedge z = 8$

Figura 38: Resposta incorreta relativamente à definição da semirreta $\dot{F}G$ (A11).

Embora a resposta esteja formalmente correta, considerei-a incorreta porque existem carateres rasurados, feitos contra as orientações do professor, segundo as quais os alunos não deveriam rasurar quaisquer respostas, mas escrever à frente a resposta correta com a devida justificação. Este procedimento do aluno faz pressupor que, quando teve conhecimento da resposta correta, a escreveu à frente da anterior, que procurou eliminar.

As respostas parcialmente corretas prendem-se com a escrita incompleta da condição, tal como se mostra através da resposta do aluno A24 (Pa,25-01).

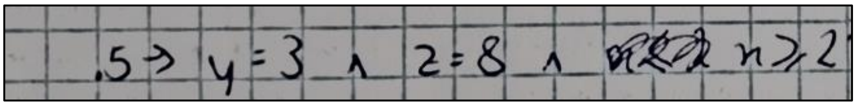


Figura 39. Resposta parcialmente correta, do aluno A24, relativamente à definição da semirreta $\dot{F}G$.

Num primeiro momento o aluno escreveu a terceira condição corretamente, $\mathrm{x} \leq 2$, mas em seguida colocou a condição incorrecta $\mathrm{x} \geq 2$, tendo procurado apagar a anterior.

Por fim, na definição analítica do conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto A é igual a 4, a maioria dos alunos (87%) identificou-o como sendo uma superfície esférica de centro nesse ponto e com este raio. Dos restantes alunos, dois (9%) apresentaram uma resposta parcialmente correta por um deles (A18) definir a condição que traduz uma esfera e o outro (A15) por, embora aplique bem a condição que define uma superfície esférica, traduzir erradamente a expressão que obtém (Figura 40), (Pa,25-01).

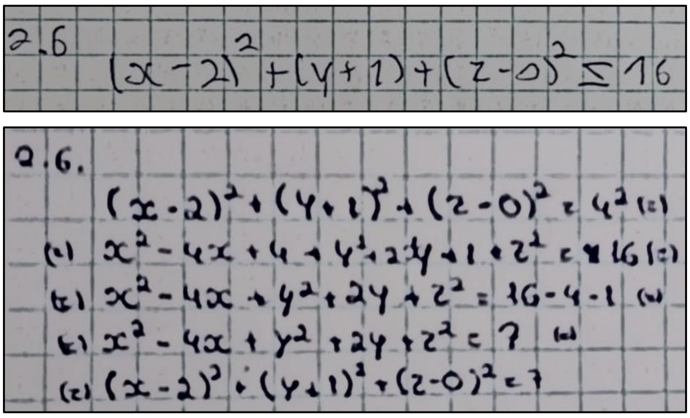


Figura 40: Respostas parcialmente corretas na definição do conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto A é igual a 4 (A18 e A15).

Após a concretização da tarefa com 'papel e lápis', os alunos resolveram a tarefa em pares com o recurso ao GeoGebra. A maioria dos alunos conseguiu responder a todos os itens da tarefa solicitados (74%), tal como ilustra a seguinte representação efetuada pelo par de alunos P4 (G,25-01):

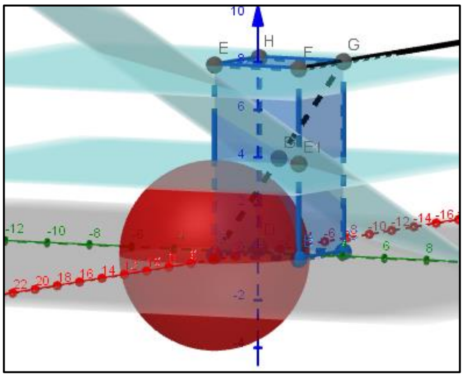


Figura 41: Representação, pelo par P4, dos itens da Tarefa 1 com recurso ao GeoGebra.

Analisando item a item da tarefa, no que diz respeito à representação dos pontos A, B e C e à identificação das coordenadas dos restantes vértices, todos os alunos as concretizaram. Já na definição analítica do plano que contém a face $[\mathrm{EFGH}]$ do prisma, a maior parte dos alunos (83%) representou-o e, mediante o feedback do GeoGebra, obteve a sua equação. O mesmo já não aconteceu com a verificação analítica da aresta $[FB]$. Embora o GeoGebra tenha facilidade de a representar, apenas permite verificar o seu comprimento.

O plano mediador da aresta $[FB]$ e o plano mediador do segmento de reta $[\mathrm{AG}]$ foram representados por 74% dos alunos, o que permitiu a sua verificação analítica. Os restantes alunos (26%) não realizaram esta verificação. Averiguar a representação analítica da semirreta $\dot{\mathrm{F}}\mathrm{G}$ também não foi possível realizar no GeoGebra por este software apresentar a sua equação vetorial, tópico ainda não estudado .

O conjunto de pontos do espaço que representam uma superfície esférica com centro no ponto A e raio igual a 4 foi verificado por 91% dos alunos, enquanto os restantes não a realizaram.

O par de alunos P7 resolveu apenas a primeira questão (G,25-01), conforme a Figura 42.

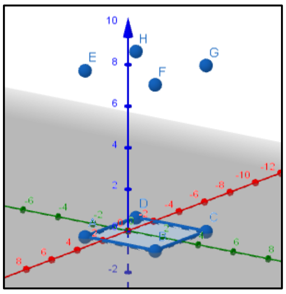


Figura 42: Um par de alunos resolveu apenas a primeira questão: 'Identificar, no referencial ortonormado do espaço, os pontos A, B e C, determinar as coordenadas dos restantes vértices e nomeá-los'.

Após a concretização da tarefa que incidia sobre a 'exploração de um prisma', seguiu-se a exploração da equação cartesiana de uma superfície esférica com a finalidade de consolidar o tópico em estudo (Tarefa 2).

Tarefa 2: Exploração da equação cartesiana de uma superfície esférica

Considere a superfície esférica definida pela seguinte equação:

$$x^2 + 2x + y^2 - 8y + z^2 - 4z - 3 = 0$$

1. Indique o centro, C, e o raio da superfície esférica.
2. Determine a intersecção da superfície esférica com cada um dos seguintes conjuntos de pontos:
   a) Eixo Oy;
   b) Plano de equação $x = -1$;
   c) Plano de equação $z = 4$;
3. Apresente a equação de um plano paralelo ao plano xOy, tangente à superfície esférica.
4. Verifique que o ponto $A(-3,0,0)$ pertence à superfície esférica.
5. Determine a inequação reduzida da esfera de centro A e raio $\overline{AC}$.

Esta tarefa teve como objetivo consolidar conhecimentos sobre a superfície esférica e sobre a esfera e determinar a intersecção entre a esfera, uma reta e um plano no espaço. Os alunos poderiam resolvê-la analiticamente, ou com o GeoGebra, ou através de ambos os processos.

Da análise das respostas dos alunos, constata-se que o seu desempenho na resolução das diversas questões vai decrescendo, como se observa na Tabela 8. É de salientar que os alunos resolveram a tarefa com 'papel e lápis' e, posteriormente, com o GeoGebra, em jeito de confirmação, mas por iniciativa própria (Tabela 13).

Tabela 13: Frequência das respostas dos alunos aos itens da Tarefa 2 ($n = 23$).

	Papel e lápis				GeoGebra			
Itens	C	PC	I	NR	C	PC	I	NR
Indicar o centro e o raio da superfície esférica	21	2	–	–	17	2	–	4
Intersecção da superfície esférica com:								
a) Eixo Oy;	14	7	1	1	17	–	–	6
d) Plano de equação $x = -1$;	6	5	3	9	11	–	–	12
e) Plano de equação $z = 4$;	6	1	1	15	9	–	–	14
Definir a equação do plano paralelo ao plano xOy, tangente à superfície esférica	2	–	1	20	–	–	–	–
Verificar que o ponto $A(-3,0,0)$ pertence à superfície esférica	1	–	–	22	2	–	–	21
Determinar a inequação reduzida da esfera de centro A e raio $\overline{AC}$.	1	–	–	22	–	–	–	–

Relativamente à indicação das coordenadas do centro da superfície esférica e da medida do seu raio com 'papel e lápis', a maioria dos alunos (91%) conseguiu efetuá-la corretamente. Os restantes dois alunos (9%), embora apresentem um raciocínio correto, apresentam resoluções consideradas parcialmente corretas porque não indicam as coordenadas do centro e a medida do raio da superfície esférica, conforme ilustra a resposta do aluno A4 (Pa,25-01):

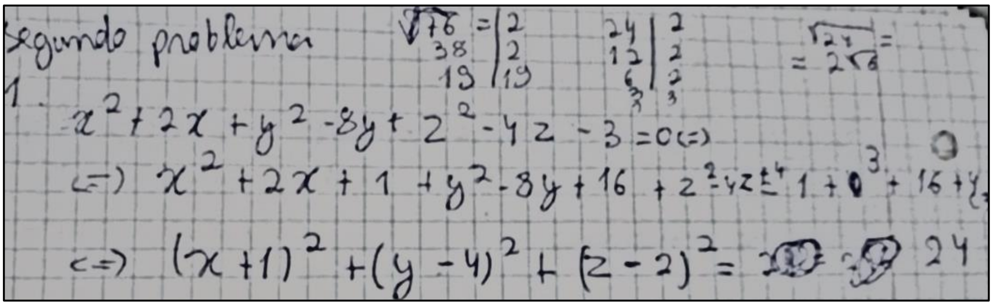


Figura 43: Resolução parcialmente correta relativamente à indicação das coordenadas do centro e da medida do raio da superfície esférica (A4).

Quanto ao item relativo à determinação da intersecção da superfície esférica com o eixo Oy do sistema de eixos tridimensional, a maior parte dos alunos respondeu corretamente (61%). Entre os restantes alunos, sobressai a resposta considerada parcialmente correta (31%) em relação às incorretas (4%) e à ausência de resposta (4%). As respostas parcialmente corretas, como a que exemplifica a dada pelo aluno A1 (Figura 44), deveram-se por ilustrar a determinação adequada da ordenada dos pontos de intersecção sem indicar a abcissa e a cota, pelo que a localização espacial dos pontos não fica definida (Pa,25-01).

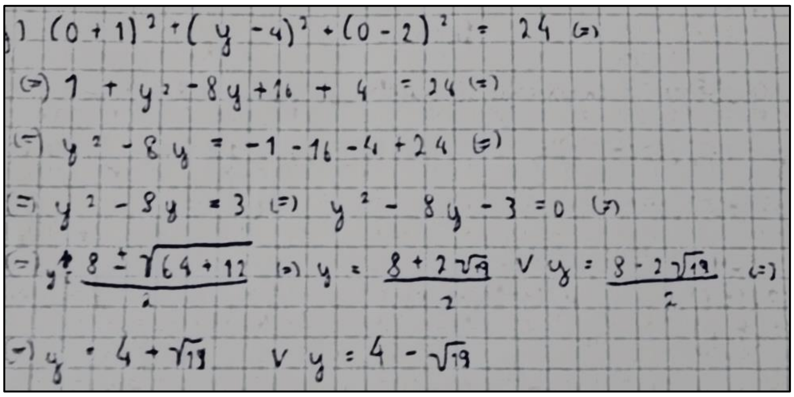


Figura 44: Resposta parcialmente correta na determinação da intersecção da superfície esférica com o eixo Oy (A1).

Quanto à resposta considerada incorreta, o aluno (A14) escreve a condição que representa a superfície esférica sem apresentar a condição que representa o eixo Oy(Pa,25-01):

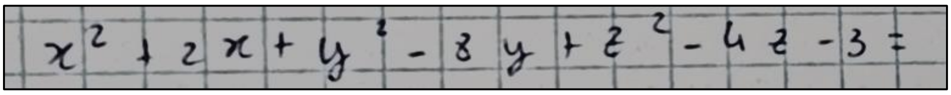


Figura 45: Resposta incorreta na determinação da intersecção da superfície esférica com o eixo Oy (A14).

Na determinação do conjunto de pontos que resultam da intersecção da superfície esférica com o plano de equação $x = -1$, prevalece a percentagem de alunos que não realizou qualquer resposta (39%). Dos restantes, 26% dos alunos responderam corretamente, 22% responderam de forma parcialmente correta e 13% de forma incorreta. Os que apresentam uma resposta parcialmente correta conciliam a equação da superfície esférica com a equação do plano $x = -1$ mas não apresentam uma resposta concreta à questão formulada, como expressa a resposta do aluno A5 (Pa,25-01):

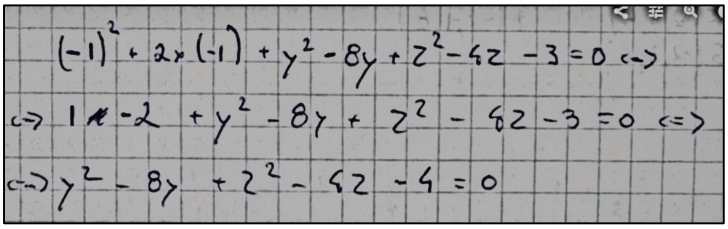


Figura 46: Resposta parcialmente correta na determinação da intersecção da superfície esférica com o plano de equação $x = -1$ (A5).

Das três respostas consideradas incorretas, destacam-se duas que resultam de procedimentos distintos efetuados pelos alunos A7 e A15, como ilustra a Figura 47.

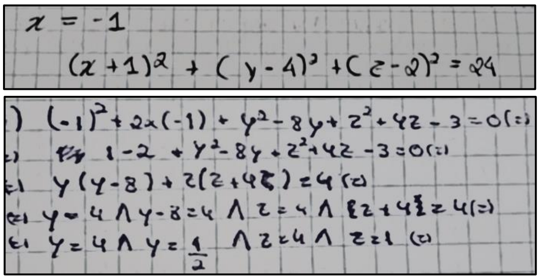


Figura 47: Respostas incorretas na determinação da intersecção da superfície esférica com o plano de equação $x = -1$, dadas pelos alunos A7 e A15, respetivamente (Pa,25-01).

A interseção da superfície esférica com o plano de equação $x = -1$ é uma circunferência que fica definida através da indicação do seu centro e do seu raio. O aluno A7 não respondeu à questão, tendo-se limitado a apresentar as suas condições iniciais, e o aluno A15 apresentou uma resolução sem nexo não tendo chegado a qualquer conclusão com sentido.

Quanto à determinação da intersecção da superfície esférica com o plano de equação $z = 4$, a maioria dos alunos (66%) não apresentou qualquer resposta, enquanto 26% dos alunos responderam corretamente, 4% responderam de forma parcialmente correta e 4% de forma incorreta. Na resposta parcialmente correta, o aluno (A5) concilia a equação da superfície esférica com a equação do plano $z = 4$, mas não responde à questão formulada (Pa, 25-01):

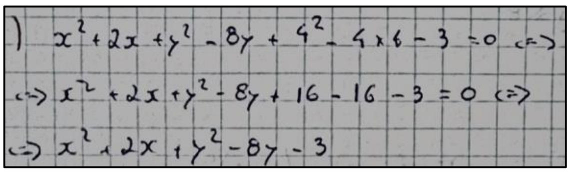
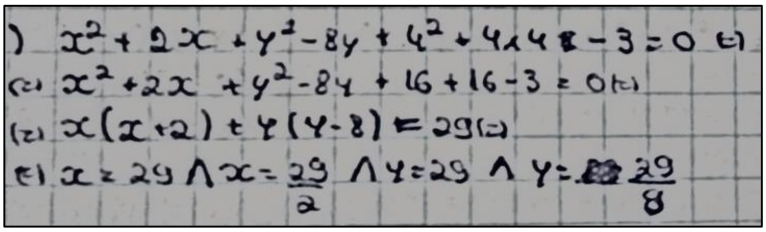


Figura 48: Resposta parcialmente correta na determinação da intersecção da superfície esférica com o plano de equação $z = 4$ (A5).

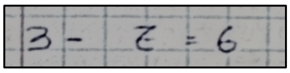
Já na resposta incorreta, embora o aluno procure determinar a intersecção entre a superfície esférica e o plano $z = 4$, aplica erradamente a lei do anulamento do produto sem ter a expressão fatorizada, como explicita a seguinte figura (Pa,25-01):



$$x^2 + 2x + y^2 - 8y + 4^2 + 4 \times 4 \cancel{8} - 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 8y + 16 + 16 - 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x+2) + y(y-8) = 29 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 29 \wedge x = \frac{29}{2} \wedge y = 29 \wedge y = \frac{29}{8}$$

Figura 49: Resposta incorreta na determinação da intersecção da superfície esférica com o plano de equação $z = 4$ (A15).

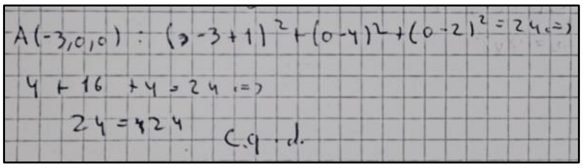
Relativamente ao item da determinação da equação de um plano paralelo ao plano xOy tangente à superfície esférica, também se verifica que a maior parte dos alunos não apresentou qualquer resposta (87%). Somente dois alunos (9%) apresentaram uma resposta correta, enquanto a resposta do aluno em falta (A21) foi considerada incorreta (4%) por apresentar uma condição que, embora traduza um plano paralelo ao plano xOy, não é tangente à superfície esférica (Pa,25-01):



3- $z = 6$

Figura 50: Resposta incorreta na determinação da equação de um plano paralelo ao plano xOy tangente à superfície esférica (A21).

Só o par P2 resolveu no GeoGebra a questão 'Verifique que o ponto $A(-3,0,0)$ pertence à superfície esférica' e relativamente à resolução analítica, apenas o aluno A19 verificou analiticamente, de forma correta, que o ponto $A(-3,0,0)$ pertencia à superfície esférica (Pa,25-01).



$A(-3,0,0)$: $(-3+1)^2 + (0-4)^2 + (0-2)^2 = 24 \Leftrightarrow$
$4 + 16 + 4 = 24 \Leftrightarrow$
$24 = 24$ c.q.d.

Figura 51. Verificação analiticamente correta feita pelo aluno A19, de que o ponto A (-3,0,0) pertence à superfície esférica.

À última questão, 'determinar a inequação reduzida da esfera de centro A e raio $\overline{AC}$', foi respondida analiticamente pelo aluno A19, de forma parcialmente correta, conforme se mostra na Figura 52 (Pa,25-01):

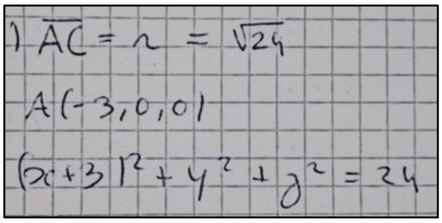


Figura 52. Resolução parcialmente correta do aluno A19, à questão 'Determine a inequação reduzida da esfera de centro A e raio $\overline{AC}$.

A resposta é considerada parcialmente correta porque o aluno A19 indicou a equação reduzida da esfera e não a sua inequação.

À medida que os alunos foram resolvendo analiticamente as questões das tarefas, foram confirmando e experimentando a resolução com o GeoGebra. O par de alunos P2 efetuou corretamente a representação de todas os itens da Tarefa 2 no GeoGebra, conforme se pode observar na Figura 53 (G,25-01).

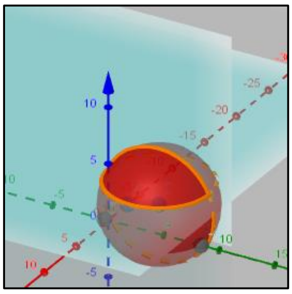


Figura 53: Representação, pelo par P2, de todos os itens da Tarefa 2, no GeoGebra.

Relativamente à verificação das coordenadas do centro, C, e da medida do raio da superfície esférica com o GeoGebra, a maioria dos alunos (73%) conseguiu concretizá-la corretamente, enquanto dois alunos do par P13 (9%) apresentaram verificações parcialmente corretas, conforme se ilustra na Figura 54 e 17% não realizaram qualquer verificação (G,25-01).

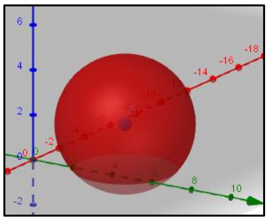


Figura 54: Verificação parcialmente correta do centro/ raio da superfície esférica com o GeoGebra (P13).

O par de alunos P13 representou o centro da esfera corretamente, $C(-1,4,2)$, mas o raio $r = 3$ estava incorreto, uma vez que o seu valor correto é $2\sqrt{6}$.

Relativamente à determinação da intersecção da superfície esférica com o eixo Oy, houve 74% de verificações corretas e 26% não responderam. Na determinação da intersecção da superfície esférica com o plano de equação $x = -1$, 48% dos alunos verificaram corretamente e

52% não realizaram qualquer resposta. Quanto à determinação da intersecção da superfície esférica com o plano de equação $z = 4$, 39% dos alunos efectuaram a verificação correta e 61% não realizaram qualquer resposta. Finalmente, um par de alunos verificou com o GeoGebra, de forma correta, que o ponto $A(-3,0,0)$ pertencia à superfície esférica.

Esta tarefa não era particularmente destinada a ser resolvida pelos alunos com o GeoGebra, mas sobretudo a praticar conceitos anteriormente apreendidos, deixando a liberdade de verificarem a solução analítica que eventualmente encontrassem. Verificou-se que os alunos privilegiaram a solução analítica, mas uma parte significativa realizou também verificações com o GeoGebra.

Em jeito de síntese, para avaliar o raciocínio geométrico dos alunos na resolução das duas tarefas adotei os quatro tipos de raciocínio envolvidos no pensamento de geometria 3D de Pittalis e Christou (2010), que consistem em: (i) representar objetos 3D; (ii) estruturação espacial; (iii) conceitualização; e (iv) medição (Tabela 14).

Tabela 14: Frequência dos tipos de raciocínio geométrico dos alunos na resolução da Tarefa 1 e Tarefa 2.

	Tarefa 1		Tarefa 2	
	Papel e lápis	GeoGebra	Papel e lápis	GeoGebra
Representar objetos 3D	16	23	21	17
Estruturação espacial	18	17	6	9
Conceitualização	11	–	1	2
Medição	20	21	–	–

A maioria dos alunos revela capacidade de representar 'objetos 3D', o prisma e a superfície esférica, quer com 'papel e lápis' quer com o GeoGebra. Analiticamente, os alunos não desenham o objeto, mas as suas respostas, corretas e parcialmente corretas, denotam capacidade de visualização e de análise dos sólidos representados.

Relativamente à estruturação espacial de um objeto geométrico, a representação de um prisma quadrangular regular e de uma esfera foi mais conseguida analiticamente do que com o GeoGebra, o que se explica pelo ainda frágil conhecimento das novas potencialidades do GeoGebra na sua aplicação à resolução das atividades propostas e do insuficiente domínio do programa de software. Nessas representações, os alunos que as efetuaram adequadamente identificaram os componentes dos sólidos e combinaram-nos com os elementos necessários.

Nos dois primeiros tipos de raciocínio geométrico, 'representar objetos 3D' e 'estruturação espacial', emergem a abstração percetual na identificação de propriedades básicas dos sólidos e a internalização que se traduz nas respetivas representações com base em tais propriedades.

O terceiro tipo de raciocínio geométrico abordado trata-se da conceitualização, que resulta do reconhecimento da forma 3D dos objetos, das suas propriedades: na Tarefa 1, definir analiticamente a semirreta $\dot{F}G$, uma situação nova, implica ter presente o conceito de reta no espaço, o conceito de plano no espaço, as propriedades do prisma e relacionar esses conceitos com as propriedades da semirreta; ou se os alunos deduzem as equações pretendidas através das definições; na Tarefa 2, representar a interseção da superfície esférica com uma reta e um plano, o que implica o reconhecimento das propriedades da esfera e da reta e dos planos, relacionar os diversos elementos visualizando os entes geométricos resultantes das interseções e determinando as equações que os representam.

No item 'Definir analiticamente o plano mediador da aresta $[FB]$', da Tarefa 1, todos os alunos responderam corretamente, alguns seguindo a dedução formal, outros, informalmente. A dedução formal implica o conhecimento do plano mediador, as suas propriedades, a sua definição, o conhecimento do prisma e das suas propriedades e a interligação dos dois tendo como foco a aresta [FB]. Estão assim presentes as quatro fases de pensamento geométrico dos alunos. No caso dos alunos que utilizaram a dedução informal, passa-se o mesmo, embora não seja deduzida a sua equação, que não é necessária para chegar à resposta correta. Neste caso, os alunos relacionam o plano mediador com um plano paralelo ao plano xOy que passa no ponto médio do segmento de reta [FB], o que também pressupõe o conhecimento do sólido e das suas propriedades, do plano mediador e das suas propriedades e da sua interação.

Segundo a teoria da abstração, a interiorização predomina neste tipo de raciocínio geométrico (conceitualização), uma vez que a abstração desvincula o objeto do seu conceito original, permitindo operar, imaginar e projetá-lo noutro objeto ou noutra situação nova.

3.2. Avaliação do ensino ministrado

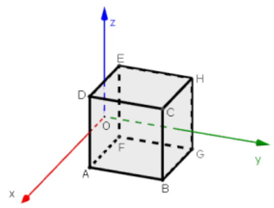
A avaliação do ensino ministrado resulta ao nível das atitudes, que designo por perceções, e ao nível dos conhecimentos revelados pelos alunos. Para avaliar as atitudes dos alunos face à sua aprendizagem durante a minha intervenção pedagógica recorri à informação recolhida a partir de questões aula, às quais os alunos responderam no final das aulas, e de um questionário, que foi respondido no final da intervenção pedagógica. Para avaliar os conhecimentos recorri às respostas que os alunos deram a questões teste, que integraram os testes que avaliaram as aprendizagens dos alunos.

3.2.1. Conhecimento de tópicos de Geometria Analítica no Espaço

Na escola onde realizei a minha intervenção pedagógica é, por um lado, política regular do Departamento de Matemática que os testes ministrados aos alunos incluam toda a matéria lecionada desde o início do ano. Por outro lado, sendo a Geometria Analítica no Espaço uma parte da Geometria que é lecionada no 10.º ano de escolaridade, não houve lugar a um teste que incidisse sobre todos os tópicos programáticos deste domínio. As questões teste de 01-02, de 01-03 e de 15-03 permitem complementar a avaliação sobre a progressão dos alunos quanto à evolução do raciocínio geométrico 3D. Dado o número significativo de alunos da turma, as dimensões reduzidas das salas e a plena ocupação da Escola, são feitas duas versões em cada teste de avaliação.

A questão teste de 01-02. O teste a que diz respeito esta questão tem duas versões e as respostas analisadas em seguida correspondem à Versão 1 (Qt, 01-02).

3. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$, de aresta 4. O ponto O é o centro da face $[AFED]$, que está contida no plano xOz; as outras faces estão contidas em planos paralelos aos planos coordenados.



3.1. Indica as coordenadas dos vértices B e E e do centro da face$[ABCD]$.

3.2. Define analiticamente:

3.2.1. A aresta $[CH]$;

3.2.2. A semirreta $\dot{D}A$;

3.2.3. A reta de interseção dos planos mediadores das arestas $[EH]$ e $[BG]$;

3.3. Usa letras da figura para identificar o conjunto dos pontos definido por:

3.3.1. $x = 2 \ \wedge \ z = -2$

3.3.2. $x = -2 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 4 \ \ \wedge \ -2 \leq z \leq 2$

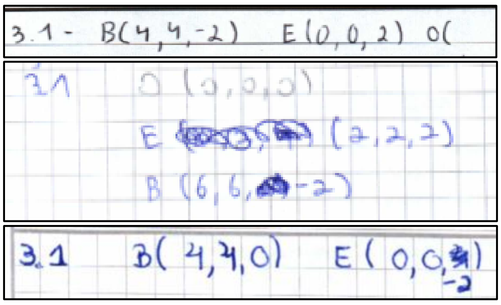
Apresenta-se na Tabela 15 a quantificação das respostas corretas (C), parcialmente corretas (PC), incorretas (I) e não realizadas (NR) desta questão.

Tabela 15. Distribuição das respostas dadas pelos alunos à questão teste de 01-03 ($n = 24$).

Questões	C	PC	I	NR
3.1. Coordenadas dos vértices B, E e do centro da face	16	5	1	2
3.2.1. Aresta $[CH]$	12	6	1	5
3.2.2. Semirreta $\dot{D}A$	13	8	1	2
3.2.3. Reta de interseção dos planos mediadores	7	10	3	4
3.3.1.Conjunto de pontos definidos por $x = 2 \wedge z = -2$	6	9	8	1
3.3.2. Conjunto de pontos definidos por $x = -2 \wedge 0 \leq y \leq 4 \wedge -2 \leq z \leq 2$	5	11	5	3

Relativamente à indicação das coordenadas dos vértices B e E e do centro da face $[ABCD]$, dos vinte e quatro alunos avaliados, um aluno (4%) apresentou uma resposta incorreta e cinco

(21%) apresentaram uma resposta parcialmente correta. Exemplo deste tipo de respostas são as que foram dadas pelos alunos A1, A8 e A11 (Qt, 01-02):


3.1 - B(4,4,-2) E(0,0,2) O(

3.1 O (0,0,0)
E (2,2,2)
B (6,6,-2)

3.1 B(4,4,0) E(0,0,-2)

Figura 55. Respostas parcialmente corretas dadas pelos alunos A1, A8 e A11, respetivamente, relativamente à indicação das coordenadas dos vértices B e E e do centro da face $[ABCD]$.

Tais respostas foram consideradas parcialmente corretas, no caso do aluno A1, porque apenas as ordenadas e as cotas dos pontos B e E estão corretas, e não assinalou as coordenadas do centro da face; já o aluno A8 indica erradamente as coordenadas do centro da base e em relação aos pontos B e E apenas estão corretas as suas cotas; e no caso do aluno A11 só estão corretas as ordenadas dos pontos B e E.

A resposta incorreta em relação à indicação das coordenadas dos vértices B e E e do centro da face $[ABCD]$ diz respeito à Versão 2 do teste de avaliação, apresentada pelo aluno A19 (Qt, 01-02):

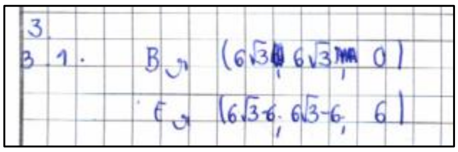
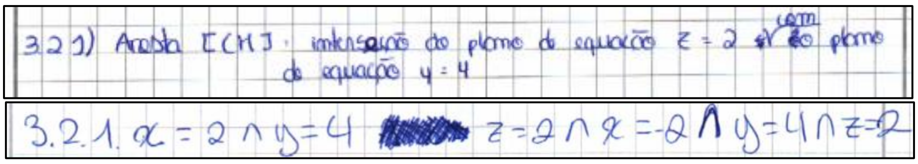

3
3.1. B (6√3, 6√3, 0)
E (6√3-6, 6√3-6, 6)

Figura 56. Resposta incorreta do aluno A19, em relação à indicação das coordenadas dos vértices B e E e do centro da face $[ABCD]$

A definição analítica da aresta $[CH]$ é apresentada parcialmente correta e incorreta pelos alunos A4 e A5, respetivamente, de acordo com a figura 57 (Qt, 01-02):

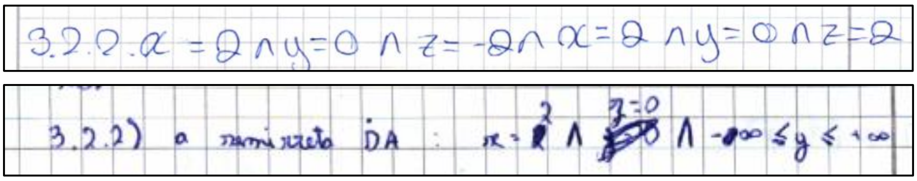

3.2.1) Aresta [CH]: interseção do plano de equação z = 2 com o plano de equação y = 4

3.2.1. x = 2 ∧ y = 4 z = 2 ∧ x = -2 ∧ y = 4 ∧ z = 2

Figura 57. Respostas parcialmente correta e incorreta, apresentadas pelos alunos A4 e A5, respetivamente, em relação à definição analítica da aresta $[CH]$.

O aluno A4 representa a equação, não da aresta, mas da reta CH e falta indicar a condição que limita o intervalo de pontos [CH]; o aluno A5 apresenta como resposta, três retas, pelo que se considera a sua resposta incorreta.

A definição analítica da semirreta $\dot{D}A$ é apresentada parcialmente correta e incorreta pelos alunos A5 e A2, respetivamente, de acordo com a seguinte figura 58 (Qt, 01-02):

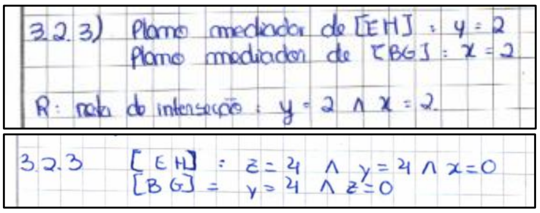

3.2.2. $x = 2 \wedge y = 0 \wedge z = -2 \wedge x = 2 \wedge y = 0 \wedge z = 2$

3.2.2) a semirreta DA : $x = 2 \wedge z = 0 \wedge -\infty \leq y \leq +\infty$

Figura 58. Definição analítica da semirreta $\dot{D}A$ é apresentada parcialmente correta e incorreta pelos alunos A5 e A2, respetivamente.

Considera-se parcialmente correta a resposta do aluno A5 porque define a reta, mas não acrescenta corretamente a condição que transforma a reta numa semirreta; quanto ao aluno A2, não consegue definir a reta DA, nem a condição que a limita e transforma numa semirreta.

A definição analítica da reta de interseção dos planos mediadores das arestas $[EH]$ e $[BG]$, é respondida de forma parcialmente correta e incorreta pelos alunos A4 e A11, respetivamente:

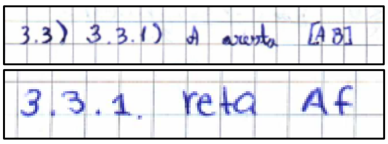

3.2.3) Plano mediador de [EH] : $y = 2$
Plano mediador de [BG] : $x = 2$
R: reta de interseção : $y = 2 \wedge x = 2$

3.2.3 [EH] : $z = 4 \wedge y = 4 \wedge x = 0$
[BG] = $y = 4 \wedge z = 0$

Figura 59. Definição analítica da reta de interseção dos planos mediadores das arestas $[EH]$ e $[BG]$, respondida de forma parcialmente correta e incorreta pelos alunos A4 e A11 (Qt, 01-02).

A solução correta seria $x = 0 \wedge y = 2$, por isso, no caso do aluno A4 se considerou a sua resposta parcialmente correta, pois uma das condições está correta e apresenta as duas condições necessárias à definição de uma reta.

Em relação à identificação do conjunto de pontos definidos por $x = 2 \wedge z = -2$, pode observar-se na figura seguinte a resposta parcialmente correta e incorreta dos alunos A2 e A3, respetivamente (Qt, 01-02):


3.3) 3.3.1) A aresta [AB]

3.3.1. reta Af

Figura 60. Resposta parcialmente correta e incorreta dos alunos A2 e A3, respetivamente, em relação à identificação do conjunto de pontos definidos por $x = 2 \ \wedge \ z = -2$.

A condição $x = 2 \wedge z = -2$ identifica a reta AB e não a aresta $[AB]$, pelo que a resposta do aluno A2 foi considerada parcialmente correta.

Relativamente à identificação do conjunto de pontos definidos pela condição $x = -2 \wedge 0 \leq y \leq 4 \wedge -2 \leq z \leq 2$, apresenta-se uma resposta parcialmente correta e outra incorreta dos alunos A10 e A8, respetivamente, na figura (Qt, 01-02):

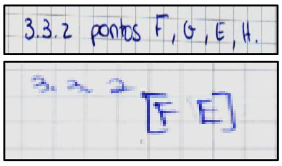
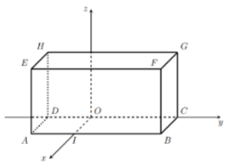


Figura 61. Resposta parcialmente correta e outra incorreta dos alunos A10 e A8, respetivamente, relativamente à identificação do conjunto de pontos definidos pela condição $x = -2 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 4 \ \wedge \ -2 \leq z \leq 2$.

A resposta correta seria a face $[EFGH]$ e o aluno A10 não associa a forma da face aos vértices que indicou acertadamente, daí ter considerado parcialmente correta a sua resposta. O aluno A8 apresentou como solução o segmento de reta $[FE]$, o que não está correto.

A questão teste de 01-03. Esta questão teste tem duas versões, muito semelhantes, pelo que foram analisadas as respostas à Versão 1. O tempo previsto foi quinze minutos e participaram apenas quinze alunos que precisavam de melhorar as suas classificações (Qt, 01-03).

1. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o paralelepípedo $[ABCDEFGH]$. O ponto O é a origem do referencial e pertence à aresta $[CD]$. O ponto I pertence à aresta $[AB]$ e ao eixo coordenado Ox. As faces $[ABCD]$ e $[CDHG]$ estão contidas nos planos coordenados xOy e yOz respetivamente. As restantes faces estão contidas em planos paralelos aos planos coordenados.
Sabe-se que o ponto E tem coordenadas (2, -2, 3) e que $\overline{AI} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.



1.1. Averigua se o ponto $K(1, 3, 4)$ pertence ao plano mediador do segmento de reta $[HB]$.
1.2. Define, por uma condição, o plano paralelo ao plano xOz e que, ao intersetar o paralelepípedo, o divide em dois sólidos iguais.
1.3. Define analiticamente
1.3.1. a superfície esférica de centro em A e que contém o ponto C;
1.3.2. um dos planos tangentes à superfície esférica e paralelo ao plano coordenado yOz.
1.4. Carateriza a região do espaço resultante da interseção da superfície esférica considerada na alínea anterior com o plano EFG.

Apresenta-se na Tabela 16 a quantificação das respostas corretas (C), parcialmente corretas (PC), incorretas (I) e não realizadas (NR), desta questão.

Tabela 16. Frequência das respostas dadas pelos alunos à questão teste de 01-03 $(n = 15)$

Questões	C	PC	I	NR
1.1 o ponto K(1, 3, 4) pertence ao plano mediador do segmento de reta [HB]?	11	2	2	0
1.2 Definir por uma condição, o plano paralelo ao plano xOz.	7	4	4	0
1.3.1 Definir analiticamente a superfície esférica	6	8	1	0
1.3.2 Definir analiticamente um dos planos tangentes à superfície esférica.	2	8	1	4
1.4 Caraterizar a região do espaço	5	5	2	3

Quatro respostas parcialmente corretas resultaram da primeira pergunta, ‘averigua se o ponto $K(1, 3, 4)$ pertence ao plano mediador do segmento de reta $[HB]$’, apresentando-se as resoluções, dos alunos A4 e A5, respetivamente (Qt, 01-03):

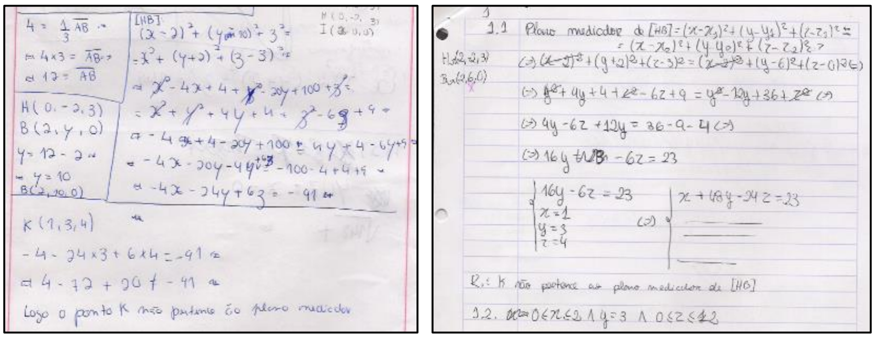


Figura 62. Respostas parcialmente corretas, dos alunos A4 e A5, quanto a averiguar se o ponto K(1, 3, 4) pertence ao plano mediador do segmento de reta [HB].

O aluno A4 considerou o segmento de reta $[AB]$ em vez do correto $[HB]$, tendo obtido uma resposta incorreta. Já o aluno A5, embora tenha acertado na resposta, enganou-se na determinação das coordenadas dos extremos do segmento de reta $[HB]$. No entanto, ambos os alunos seguiram um raciocínio correto, o que determinou serem consideradas as duas respostas como parcialmente corretas.

Os alunos A11 e A12 não estabeleceram as equações do plano mediador do segmento de reta $[HB]$, por esse motivo apresentam uma resposta incorreta, como ilustra a seguinte figura (Qt, 01-03):

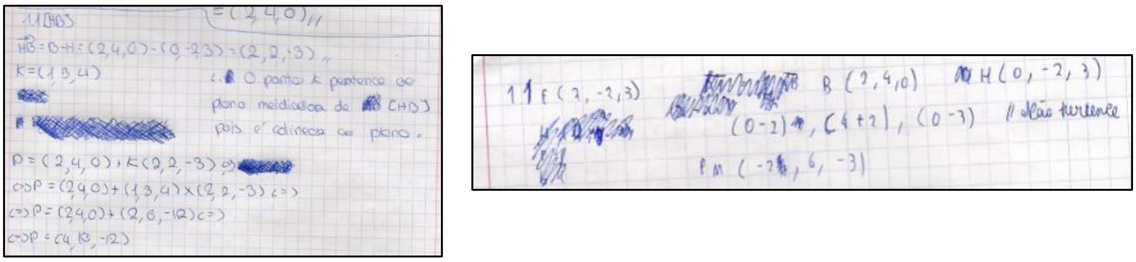


Figura 63. Respostas incorretas apresentadas pelos alunos A11 e A12, quanto a averiguar se o ponto K(1, 3, 4) pertence ao plano mediador do segmento de reta [HB].

Mostra-se na Figura 64 uma resposta parcialmente correta e outra incorreta à questão ‘definir por uma condição o plano paralelo ao plano xOz’, executadas pelos alunos A7 e A14, respetivamente (Qt, 01-03).

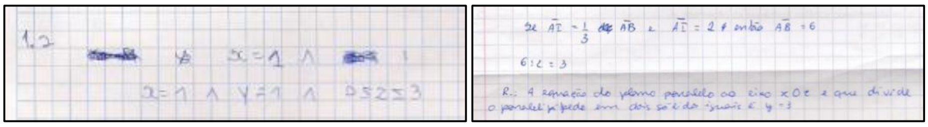


Figura 64. Resposta parcialmente correta e outra incorreta à questão de ‘definir por uma condição, o plano paralelo ao plano xOz’, executadas pelos alunos A7 e A14, respetivamente.

A resposta do aluno A7 está parcialmente correta porque indica a condição $y = 1$, que é a resposta correta, conjugada com outras duas condições que alteram o seu significado, enquanto a resposta do aluno A14 está incorreta.

Definir analiticamente a superfície esférica é respondido de forma parcialmente correta pelos alunos A2, A3, A5, A11 e incorretamente pelo aluno A6, conforme se indica na Figura 65 (Qt, 01-03).

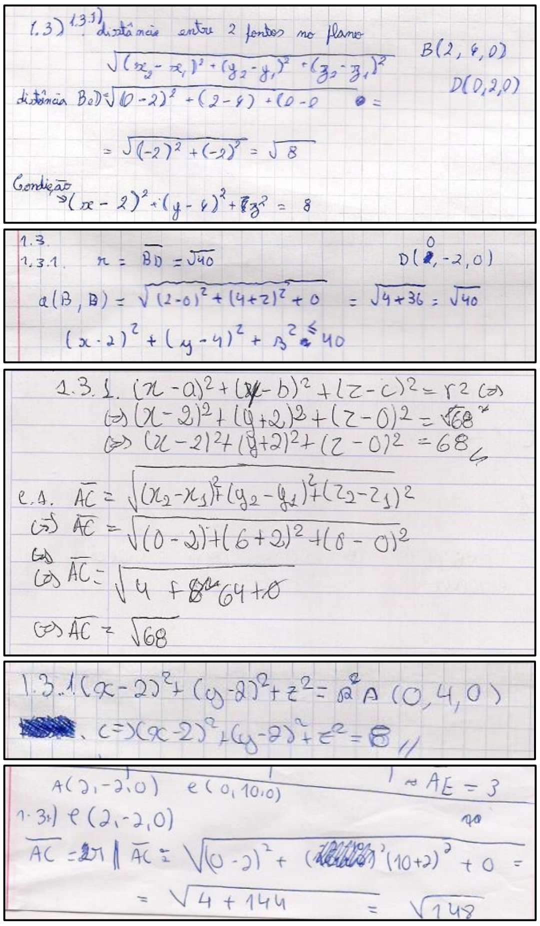


Figura 65. Respostas parcialmente corretas dos alunos A2, A3, A5 e A11 e incorreta do aluno A6, respetivamente.

O aluno A2 calculou erradamente o raio da superfície esférica; o aluno A3 definiu analiticamente a esfera em vez da superfície esférica; o aluno A5 errou na determinação das coordenadas do ponto C o que conduziu a erros na determinação do raio e na definição da equação da superfície esférica; e o aluno A11 enganou-se na determinação do raio e nas coordenadas do ponto A. Devido a estes fatores, os alunos A2, A3, A5 e A11 apresentaram respostas consideradas parcialmente corretas.

Para definir analiticamente um dos planos tangentes à superfície esférica e paralelo ao plano coordenado yOz, os alunos A2 e A9 fizeram-no de forma parcialmente correta, enquanto o aluno A11 definiu incorretamente o plano, conforme se expressa na Figura 66 (Qt, 01-03).

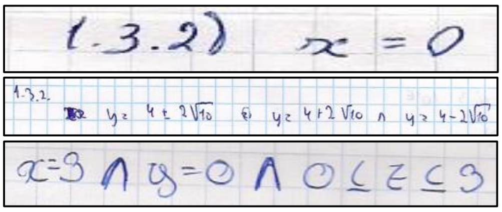


Figura 66. Definição parcialmente correta (A2, A9) e incorreta (A11) de um dos planos tangentes à superfície esférica e paralelo ao plano coordenado yOz.

O aluno A2 indicou um plano paralelo ao plano coordenado yOz, enquanto o aluno A12 indicou os dois planos tangentes à superfície esférica, pelo que a sua resposta está parcialmente correta. Já o aluno A11 apresentou um segmento de reta como resposta incorreta.

Para caraterizarem a região do espaço resultante da interseção da superfície esférica considerada na alínea anterior com o plano EFG, apresentaram resoluções parcialmente corretas os alunos A6, A12 e A14, enquanto os alunos A5 e A13 o fizeram incorretamente, conforme se apresenta na Figura 67 (Qt, 01-03).

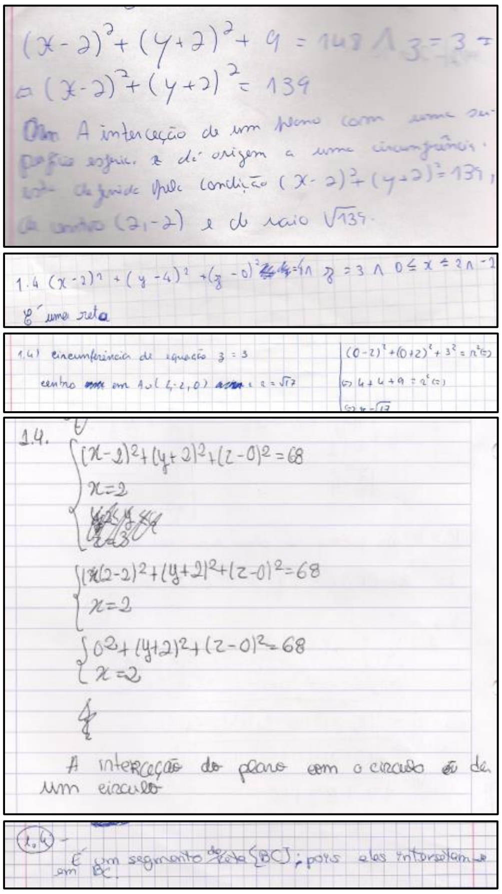
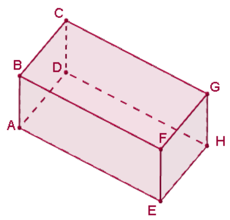


Figura 67. Resoluções parcialmente corretas (A6, A12 e A14) e incorretas (A5 e A13)

Os alunos A6 e A12 promovem a interseção entre a superfície esférica e o plano de equação $z = 3$, embora o raio da superfície esférica não esteja bem determinado, seguem o raciocínio correto para dar resposta à questão, enquanto os alunos A5 e A13 mostram não dominar os conceitos nem a visualização necessária à resolução da questão.

A questão teste de 15-03. Vinte e seis alunos participaram no teste e como nos casos anteriores, esta questão teste tem duas versões, pelo que foram analisadas as respostas à Versão 1, seguinte (Qt, 15-03):

5. Na figura está representado, num determinado referencial o. n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$. Sabe-se que:



- $A(14,-7,4)$, $B(16,-4,10)$, $C(10,-6,13)$;
- E pertence ao plano xOy;
- A reta AE é definida pelo sistema de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 14 - 3k \\ y = -7 + 6k, k \in \mathbb{R} \\ z = 4 - 2k \end{cases}$$

5.1. Determina as coordenadas do vértice E.

5.2. Escreve uma equação vetorial que defina a aresta $[BC]$.

5.3. Determina $\left\|\overrightarrow{AF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right\|$..................

5.4. O ponto C é ponto de interseção das retas:

(A) $x = 10 \wedge z = 13$ e $x = 10 \wedge y = -6$

(B) $x = -6 \wedge z = 13$ e $y = 13 \wedge z = -6$

(C) $z = 13 \wedge x = 13$ e $z = 10 \wedge y = -6$

(D) $y = -4 \wedge x = 13$ e $x = 10 \wedge y = -6$

Apresenta-se na Tabela 17 a quantificação das respostas corretas (C), parcialmente corretas (PC), incorretas (I) e não realizadas (NR) desta questão.

Tabela 17. Frequência das respostas dadas pelos alunos à questão teste de 15-03 $(n = 27)$.

Questões	C	PC	I	NR
5.1. Determinar as coordenadas do vértice E	17	7	2	1
5.2. Escrever uma equação vetorial que defina a aresta [BC]	11	15	0	1
5.3. Determinar $\left\|\overrightarrow{AF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right\|$	8	13	3	3
5.4. O ponto C é ponto de interseção das retas	21	0	2	4

Sete respostas parcialmente corretas resultaram da primeira questão 'determina as coordenadas do vértice E', dos alunos A5, A6, A7, A10, A12, A16 e A21, algumas com resolução semelhante, distinguindo-se as seguintes resoluções (A5 e A16):

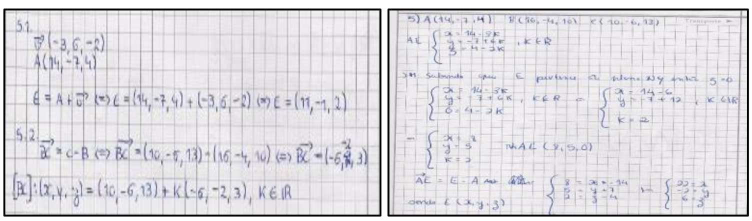


Figura 68. Resolução parcialmente correta dos alunos A5 e A17 (Qt, 15-03).

O aluno A5 estabelece a equação vetorial da reta que contém o ponto E e atribui o valor 1 a k pelo que determina coordenadas erradas deste ponto, enquanto o aluno A17 determinou corretamente o valor de k, mas a resposta a que chegou encontra-se errada.

As respostas incorretas à questão 'determina as coordenadas do vértice E', foram apresentadas pelos alunos A19 e A27, respetivamente, de acordo com a figura seguinte:

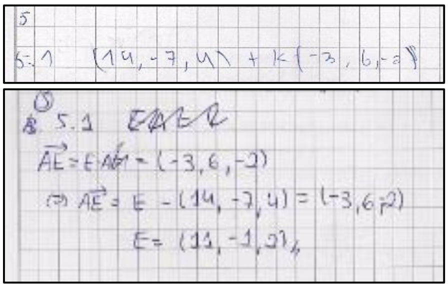


Figura 69. Resolução incorreta dos alunos A19 e A27 (Qt, 15-03).

Relativamente à questão 'escrever uma equação vetorial que defina a aresta $[BC]$', 15 alunos apresentam respostas parcialmente corretas, todas semelhantes às dos alunos A5 e A16, que se podem observar na Figura 70 (Qt, 15-03).

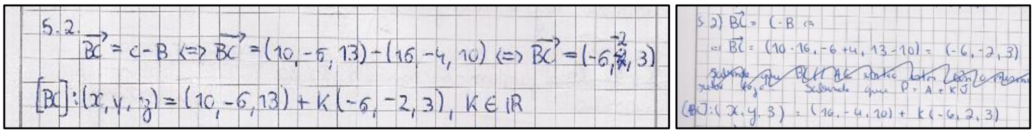


Figura 70. Resoluções parcialmente corretas representativas da questão 'escrever uma equação vetorial que defina a aresta $[BC]$' (A5 e A16).

As resoluções são parcialmente corretas porque os alunos apresentaram a equação vetorial da reta BC, faltando indicar a condição que a define como o segmento de reta $[BC]$.

Na determinação de $\left\|\overrightarrow{AF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right\|$, apresentam-se resoluções representativas parcialmente corretas dos alunos A8 e A21, respetivamente, na figura seguinte (Qt, 15-03):

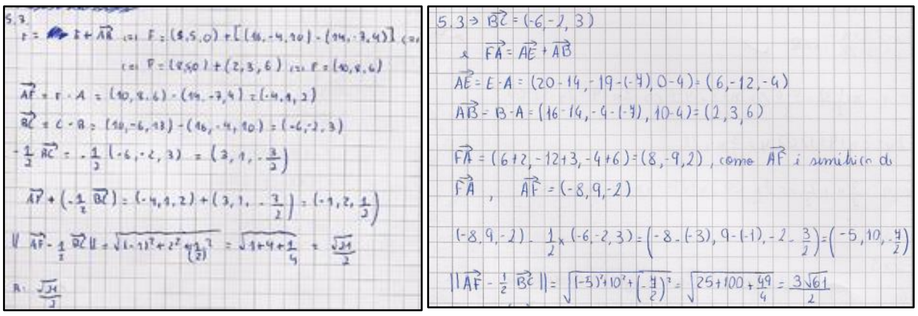


Figura 71. Resoluções parcialmente corretas na determinação de $\left\|\overrightarrow{AF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right\|$ (A8, A21).

O aluno A8 seguiu um raciocínio correto, tendo determinado os vetores pretendidos, mas ao efetuar as operações com os vetores enganou-se nos cálculos e foi conduzido a um resultado não exato. O aluno A21 também seguiu um raciocínio correto, mas cometeram incorreções no processo que o conduziu a um resultado diferente.

Os alunos A13, A2 e A27, resolveram incorretamente a determinação de $\left\|\overrightarrow{AF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right\|$, conforme se apresenta na Figura 72 (Qt, 15-03).

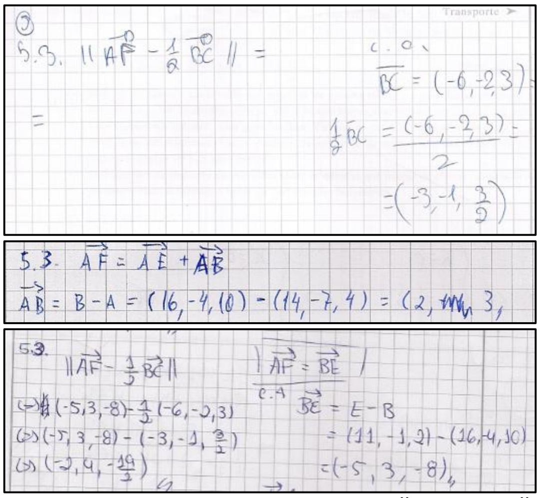


Figura 72. Resoluções incorretas na determinação de $\left\|\overrightarrow{AF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right\|$ (A13, A2 e A27).

Finalmente, o aluno A18 respondeu incorretamente a última questão de escolha múltipla ao selecionar a opção (B) (Qt, 15-03).

Síntese das questões teste. Associada à análise das resoluções das questões teste, quantifica-se a evolução que se verificou na avaliação em 3D do pensamento geométrico dos alunos, durante o período em estudo, através dos dados apresentados na seguinte figura.

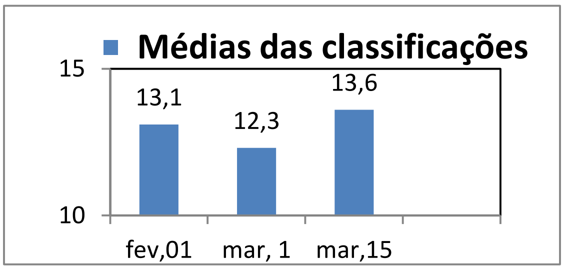


Figura 73. Evolução das classificações dos alunos às questões teste no período em estudo.

As classificações dos alunos nas questões teste sobre tópicos de Geometria Analítica no Espaço variam entre 11,2 e 13,6. Verifica-se que paulatinamente os alunos revelam uma ligeira evolução no seu desempenho nas três primeiras questões analisadas, o que sofreu uma ligeira quebra na última questão, o que indicia dever-se ao intervalo de tempo entre o final das aulas do tema geometria 3D e o momento de avaliação final.

3.2.2. Perceções dos alunos sobre a intervenção pedagógica

As perceções dos alunos sobre a minha intervenção pedagógica resultam da análise às respostas que deram a questões aula (com as quais pretendo averiguar se os alunos compreenderam os conceitos abordados, identificar as dificuldades que sentiram e as vantagens e desvantagens do GeoGebra na realização das atividades da aula) e a itens que integraram o questionário que responderam no final da intervenção.

Resultados das questões aula

Na aula onde se estudou o tópico 'posição relativa de retas e planos', os alunos destacaram a utilização do GeoGebra na revisão de conceitos apreendidos em anos anteriores, algumas dificuldades em usar este recurso, que para alguns alunos os ajudou a visualizar as construções de planos e de sólidos (Tabela 18).

Tabela 18. Frequências das respostas dos alunos às questões de aula 1 $(n = 27)$ (Qa,17-01)

O que aprendeste na aula de hoje ?	
A utilizar o GeoGebra e a identificar mais facilmente planos no espaço.	2
A utilizar o GeoGebra.	8
A utilizar o GeoGebra e a rever conceitos esquecidos.	16
A posição relativa de retas e planos.	1
Que dificuldades sentiste?	
Dificuldades a utilizar o GeoGebra.	5
Nenhumas ou poucas.	6
Dificuldades a desenhar o sólido ou os planos.	5
Dificuldades nas revisões de conceitos.	11
Que vantagens teve o GeoGebra na realização das atividades da aula ?	
Ajudou a perceber melhor.	8
Tem-se uma melhor noção das figuras e dos planos.	7
Permitiu visualizar em 3D os sólidos facilitando a resolução das tarefas.	10
Não usei o GeoGebra.	2
Que desvantagens teve o GeoGebra na realização das atividades da aula ?	
Lentidão.	5
Nenhuma.	17
Distração.	3
Não usei o GeoGebra.	2

Excetuando os alunos que não usaram o GeoGebra (7%), todos os outros apresentam vantagens na sua utilização na aprendizagem dos tópicos em estudo.

Na aula sobre os conceitos programáticos relativos aos 'referenciais e coordenadas no espaço', alguns alunos continuam a revelar dificuldades em trabalhar com o GeoGebra, enquanto outros destacam o contributo deste software na visualização dos objetos geométricos que representaram (Tabela 19).

Tabela 19. Frequência das respostas dos alunos às questões da aula 2 $(n = 27)$ (Qa,18-01)

O que aprendeste na aula de hoje ?	
Que a cota é a altura e que se lê no eixo dos z.	4
Referenciais e coordenadas no espaço, com ajuda do GeoGebra.	10
A trabalhar melhor com o GeoGebra, o simétrico de um sólido e o referencial no espaço.	13
Que dificuldades sentiste?	
A identificar os eixos coordenados.	3
Nenhumas ou poucas.	7
Em determinar o simétrico do cubo.	4
A trabalhar com o GeoGebra.	5
Na representação no papel.	8
Que vantagens teve o GeoGebra na realização das atividades da aula ?	
Ajudou a perceber melhor.	13
Visualização em 3D dos sólidos facilitando a resolução das tarefas.	13
Não usei o GeoGebra.	1
Que desvantagens teve o GeoGebra na realização das atividades da aula ?	
Lentidão.	5
Nenhuma.	16
A compreender melhor em 3D.	1
Distração.	1
Não usei o GeoGebra.	1
Dificuldades a trabalhar com o GeoGebra	3

A maioria dos alunos usou o GeoGebra nas atividades que realizaram. Com exceção de um aluno que não utilizou o GeoGebra, todos indicaram aspetos favoráveis à sua utilização, tais como 'ajudou a perceber melhor', 'ajudou a visualizar os sólidos em 3D', ou a 'compreender melhor as dimensões'. Como desvantagens da utilização do GeoGebra, enquanto a maior parte dos alunos refere "nenhuma", existem alunos para quem a lentidão da sua utilização é uma desvantagem para a sua aprendizagem.

Na aula onde se abordou os conceitos programáticos relativos à 'resolução de problemas (envolvendo conjuntos de pontos do espaço)', os alunos revelaram dificuldades em explorar os tópicos em estudo (Tabela 20).

Tabela 20. Frequência das respostas dos alunos às questões da aula 5 $(n = 27)$ (Qa,25-01)

O que aprendeste na aula de hoje ?	
A resolver problemas envolvendo conjuntos de pontos no espaço.	7
A intersetar uma superfície esférica com um plano.	7
A utilizar conhecimentos adquiridos.	5
Não responderam.	8
Que dificuldades sentiste?	
Não senti dificuldades.	11
Na interpretação das questões.	6
Em determinar a interseção da superfície esférica com um plano.	6
Não responderam.	4
Que vantagens teve o GeoGebra na realização das atividades da aula ?	
Ajudou a perceber melhor as atividades.	3
Permitiu a visualização em 3D.	13
Nenhuma.	7
Não responderam.	4
Que desvantagens teve o GeoGebra na realização das atividades da aula ?	
Demorou muito tempo na representação.	4
Nenhuma.	19
Não responderam.	4

A maior parte dos alunos não apresentou desvantagens na resolução das atividades com recurso ao GeoGebra. Porém, existem alunos para quem o uso do GeoGebra não teve vantagens nessa resolução.

Resultados do questionário final

O objetivo da minha intervenção pedagógica é o de averiguar o contributo do GeoGebra na aprendizagem de tópicos de geometria analítica no espaço. Para avaliar as opiniões dos alunos sobre esse contributo e sobre toda a experiência realizada, foi realizado um questionário no final da intervenção (Qf, 08-03). Na elaboração do questionário (Anexo 5), indagaram-se vinte e seis alunos sobre a contribuição do GeoGebra na aprendizagem de Geometria no Espaço, sobre a compreensão e visualização induzidas pelo GeoGebra nas aulas, sobre o trabalho em pares, sobre a resolução das tarefas propostas com o GeoGebra e analiticamente, durante a experiência de ensino, através de vinte e uma questões de natureza fechada. Cinco questões de natureza aberta foram colocadas relativamente às vantagens, desvantagens, dificuldades, contributo do GeoGebra e a diferença quanto à resolução analítica das tarefas de Geometria no Espaço. A análise das respostas dos alunos ao questionário foi feita a partir da contagem de frequências no caso das questões de natureza aberta e do cálculo da média e do desvio padrão, no caso das questões de natureza fechada. Como adotei a tipologia da escala de Likert para a medição de atitudes, atribuí o valor um a discordo totalmente e discordo, dois a indiferente e três a concordo e concordo totalmente, o que permitiu quantificar aqueles parâmetros estatísticos.

Na tabela seguinte apresenta-se a avaliação que os alunos fazem na aprendizagem de Geometria no Espaço com o GeoGebra, salientando-se o desenvolvimento de habilidades na utilização do GeoGebra na resolução de problemas de Geometria no Espaço e o estabelecimento nas aulas de definições de conceitos de Geometria no Espaço. Os alunos gostaram de aprender tópicos de Geometria no Espaço com o GeoGebra com recurso ao GeoGebra, o que suscitou o interesse pela Geometria (Tabela 21).

Tabela 21. Perceções dos alunos relativamente à aprendizagem de Geometria no Espaço com o GeoGebra.

Itens	$\bar{x}$	s
Gostei de aprender Geometria no Espaço com o GeoGebra.	2,2	0,4
O estudo de conceitos de Geometria no Espaço com recurso ao GeoGebra suscitou o meu interesse pela Geometria.	2,5	0,4
Sou capaz de construir no GeoGebra representações de sólidos geométricos.	2,7	0,6
Desenvolvi habilidades de utilizar o GeoGebra na resolução de problemas de Geometria no Espaço.	2,8	0,4
O GeoGebra não favoreceu a minha aprendizagem de conceitos de Geometria no Espaço.	1,4	0,6
O GeoGebra permitiu-me estabelecer nas aulas definições de conceitos de Geometria no Espaço.	2,8	0,2

O sentimento positivo dos alunos mantém-se quanto à compreensão dos conceitos e visualização induzidas pelo GeoGebra nas aulas, como se pode observar na Tabela 22, excetuando a situação da afirmação 'as aulas em que utilizei o GeoGebra foram as que participei mais nas atividades da aula', em que, em média, a resposta dos alunos foi neutra. Também é curiosa a afirmação positiva em que os estudantes referem que gostariam de aprender outros conceitos matemáticos com recurso ao GeoGebra (Tabela 22).

Tabela 22. Perceções dos alunos relativamente à compreensão e visualização induzidas pelo GeoGebra nas aulas.

Itens	$\bar{x}$	s
Os conceitos de Geometria no Espaço foram mais difíceis de compreender do que outros conceitos matemáticos.	1,3	0,3
Descobrir por mim os conceitos matemáticos é mais aliciante do que ser o professor a apresentá-los.	2,2	0,7
As aulas em que utilizei o GeoGebra foram as que participei mais nas atividades da aula.	2,0	0,8
O GeoGebra permitiu-me visualizar diferentes formas geométricas.	2,9	0,1
O GeoGebra ajudou-me a compreender melhor conceitos geométricos estudados.	2,7	0,3
O GeoGebra permitiu visualizar melhor as construções efetuadas do que no quadro/papel.	2,9	0,4
Gostaria de aprender outros conceitos matemáticos com recurso ao GeoGebra.	2,4	0,7

Relativamente ao trabalho em pares, em média, os alunos avaliam positivamente a oportunidade de trabalhar com o colega na resolução das tarefas propostas nas aulas (Tabela 23).

Tabela 23. Perceções dos alunos relativamente ao trabalho em pares.

Itens	$\bar{x}$	s
O trabalho em pares permitiu-me discutir sobre possíveis formas de resolver as tarefas.	2,8	0,4
Trabalhar em pares na sala de aula ajudou a explorar melhor o GeoGebra do que individualmente.	2,8	0,2

Encerrando a análise das respostas dos alunos às questões de natureza fechada, as opiniões também são, em média, de concordância quanto à integração do GeoGebra na resolução das tarefas propostas, como se pode observar na Tabela 24.

Tabela 24. Perceções dos alunos sobre a resolução de tarefas com o GeoGebra e analiticamente.

Itens	$\bar{x}$	s
Recorri ao GeoGebra para validar resultados obtidos analiticamente.	2,6	0,7
O GeoGebra ajudou-me a relacionar a resolução analítica e a resolução gráfica.	2,7	0,6
Recorri a processos analíticos para validar resultados obtidos no GeoGebra.	2,5	0,7
Recorri ao GeoGebra para resolver tarefas que não conseguia fazer por processos analíticos.	2,2	0,8
Preferi resolver as tarefas propostas analiticamente do que com o GeoGebra.	2,3	0,7
O GeoGebra permitiu explorar mais exemplos do que se fosse com papel e lápis.	2,9	0,1

As opiniões favoráveis dos alunos relativamente ao teor das questões de natureza fechada, são confirmadas pelos valores da média que se verificaram na maior parte das questões. Com exceção de uma resposta, a média de todas as outras varia entre 2,2 e 2,9 (num máximo possível de 3). Analisando os valores da média, podemos concluir que as respostas dos alunos se concentram entre as opções "concordo parcialmente (CP) e concordo totalmente (CT)".

Para além das questões de natureza fechada, também analisei as respostas que os alunos deram a cinco questões de natureza aberta no final do questionário, que compreendem a apresentação de três vantagens (desvantagens) da aprendizagem de Geometria do Espaço com recurso ao GeoGebra, dificuldades sentidas na aprendizagem, o contributo do GeoGebra na clarificação de dificuldades e a diferença entre a resolução de tarefas com o GeoGebra e com 'papel e lápis' (Tabela 29).

Relativamente às vantagens da utilização do GeoGebra na aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço, os alunos destacaram como principal vantagem a melhor visualização e compreensão do espaço tridimensional.

Tabela 25. Frequência das vantagens da utilização do GeoGebra na aprendizagem.

Indica três vantagens da utilização do GeoGebra para a tua aprendizagem	
Visualizar e compreender melhor o 3D.	22
Confirmar resultados obtidos analiticamente, relacionar o gráfico com o analítico.	14
Rapidez na resolução, promove a autonomia.	9
Debate de ideias, cativante, inovador.	3
Aprender a trabalhar com um novo software usando o smartphone.	3

Talvez por não conseguirem identificar claramente desvantagens com que se depararam, poucos alunos responderam a esta segunda questão, em que a principal desvantagem reside numa certa distração e desconcentração. Uma explicação possível para estas respostas é o facto de as tarefas serem desenvolvidas em pares e como cada par só dispõe de um dispositivo, o outro elemento do par tende a distrair-se.

Tabela 26. Frequência das desvantagens da utilização do GeoGebra na aprendizagem.

Indica três desvantagens da utilização do GeoGebra para a tua aprendizagem	
Utilização complicada do GeoGebra, dificuldade na utilização.	4
Aula centrada no GeoGebra.	1
Distração, afeta a concentração.	8
Demora, alguma confusão	7
Brincadeira e não poder usar no teste	1
Alguns conceitos ficam pouco esclarecidos	1

De entre as respostas às dificuldades sentidas na aprendizagem de conceitos de Geometria no Espaço salientam-se as dificuldades de visualizar sólidos no espaço e de lembrar as fórmulas definidoras dos diversos entes de Geometria Espacial estudados, o que indicia uma frágil consolidação dos conceitos neste momento.

Tabela 27. Frequência das dificuldades na aprendizagem de conceitos de Geometria no Espaço.

Que dificuldades sentiste na aprendizagem de conceitos de Geometria no Espaço?	
Intersetar os sólidos com planos no espaço.	1
Nenhumas ou poucas.	8
Visualizar sólidos no espaço.	6
Lembrar-me das diversas fórmulas usadas na definição dos elementos do espaço.	4
Localização espacial.	1
Utilização do GeoGebra.	1
Interpretar as tarefas.	2
Fazer demonstração.	1
Relacionar conceitos.	2

Relativamente ao contributo do GeoGebra na clarificação de dificuldades que sentiram na aprendizagem de conceitos de Geometria do Espaço, os alunos referiram uma melhor perceção do espaço e a obtenção dos elementos algébricos das figuras construídas.

Tabela 28. Frequência do contributo do GeoGebra na clarificação de dificuldades na aprendizagem de conceitos de Geometria do Espaço.

Qual foi o contributo do GeoGebra na clarificação de dificuldades que sentiste na aprendizagem de conceitos de Geometria do Espaço?	
Ajudou a visualizar / perceber melhor o espaço.	13
Nenhum.	5
Auxiliou a superar dificuldades.	1
Funcionamento das equações analíticas	1
Muito produtivo.	1
Na obtenção dos elementos algébricos das figuras..	3
Melhorou o relacionamento dos conteúdos abordados.	1
Ajudou a perceber a origem dos conceitos.	1

Quanto à diferença entre a resolução de tarefas com o GeoGebra e com ‘papel e lápis’, de todas as respostas às questões de natureza abertas esta foi a que obteve um espetro mais variável e diversificado, salientando-se a que refere que com ‘papel e lápis’ é mais difícil ‘ver’ e analisar figuras e verificar as respostas.

Tabela 29. Frequência da diferença entre a resolução de tarefas com o GeoGebra e com ‘papel e lápis’.

Diferença entre a resolução de tarefas com o GeoGebra e com ‘papel e lápis’	
No GeoGebra não é preciso pensar como a figura está colocada e com ‘papel e lápis’ temos que analisar e imaginar as figuras muito bem.	1
No GeoGebra podemos rodar os sólidos à vontade.	2
O espaço é mais compreensível no GeoGebra, realizo cálculos mais rapidamente.	5
Com ‘papel e lápis’ é mais difícil ‘ver’ e analisar figuras e verificar as respostas.	6
Com ‘papel e lápis’ é mais fácil perceber porque somos nós a escrever.	1
Existe uma melhor perspetiva com o GeoGebra.	4
Será preferível com ‘papel e lápis’ porque nos testes não se usa o GeoGebra.	3
No GeoGebra não precisamos de desenhar.	1
O GeoGebra é mais interativo, o ‘papel e lápis’ é mais prático.	1
O GeoGebra faz por nós.	1
O GeoGebra é mais rápido, mas mais difícil de fazer.	1

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES, RECOMENDAÇÕES E LIMITAÇÕES

Este capítulo está dividido em três secções: a primeira diz respeito às conclusões contendo os principais resultados do estudo; a segunda às recomendações com sugestões para estudos futuros; e, no que respeita às limitações, apresentam-se algumas limitações na preparação e implementação do projeto.

1.1. Conclusões

Recordando o objetivo geral a atingir com este trabalho, averiguar o contributo do GeoGebra na aprendizagem de alunos do 10.º ano de escolaridade de tópicos de Geometria Analítica no Espaço, as conclusões deste estudo emergem como resposta às questões de investigação delineadas:

- Como utilizam os alunos o *GeoGebra* nas atividades de aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço?
- Que dificuldades manifestam os alunos na aprendizagem, com ou sem o GeoGebra, de tópicos de Geometria Analítica no Espaço?
- Que perceções têm os alunos sobre a utilização do GeoGebra na aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço?

Tais respostas advêm da síntese da informação que é apresentada no capítulo que trata da intervenção pedagógica e da avaliação do ensino ministrado e são, quanto possível, sustentadas pelo quadro teórico que enquadra este estudo.

1.1.1. Como utilizam os alunos o GeoGebra nas atividades de aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço?

De acordo com o Programa e Metas Curriculares de Matemática A – Ensino Secundário (Ministério da Educação e Ciência, 2013), os desempenhos fundamentais que os alunos deverão evidenciar devem "concorrer para a aquisição de conhecimentos, factos, conceitos e procedimentos, para a construção e desenvolvimento do raciocínio matemático, para a resolução de problemas em diversos contextos, para uma comunicação (oral e escrita) adequada e para uma visão da Matemática como um todo articulado e coerente" (p. 6). Na concretização de tais desempenhos, as aulas da intervenção pedagógica foram planificadas com a preocupação de atribuir a primazia da ação aos alunos de forma que estes pudessem analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca das relações geométricas e usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas (NCTM, 2007). Assim, na planificação e na sua implementação na sala de aula, à atividade dos alunos com 'papel e lápis', que tende a predominar em todo o sistema de ensino (Ponte, 2005), foi acrescentada a realização de tarefas com recurso ao GeoGebra, quer na sua resolução, quer na sua verificação, quer na dedução de conceitos.

Inicialmente, os alunos tiveram um primeiro contato com o GeoGebra 3D e aprenderam a explorar comandos deste software, quer ao nível do plano – sobretudo os relacionados com pontos, retas e planos –, quer ao nível do espaço, tais como construir um sólido geométrico e, em seguida, arrastá-lo ou rodá-lo. Nesta fase da intervenção de ensino, a maior parte dos alunos revelou capacidade para reproduzir no GeoGebra sólidos (cubo e prisma triangular) e planos, segundo as condições dadas, que representaram com 'papel e lápis'. A comparação entre as duas formas de representação é inevitável e as diferenças e semelhanças, são apontadas nas respostas dos alunos quanto às vantagens e inconvenientes da utilização do GeoGebra.

Seguidamente, os alunos desenharam os planos coordenados no GeoGebra e identificaram as propriedades dos pontos localizados em cada um dos octantes criados pela sua interseção, apropriando-se do conceito relativo à localização espacial de um ponto. Depois, através do desenho de um cubo no GeoGebra, puderam verificar as coordenadas dos seus vértices, resposta que tinham efetuado com 'papel e lápis'. Realizaram e visualizaram no GeoGebra a interseção de um plano oblíquo com o cubo e calcularam com 'papel e lápis', o perímetro da secção obtida. A medição desta secção foi plenamente conseguida analiticamente, porque previamente haviam feito a construção da interseção, quer com papel e lápis, quer com o GeoGebra. Também representaram o simétrico do cubo em relação a um plano horizontal e o simétrico deste simétrico, em relação a um plano vertical sendo de salientar que a resolução com 'papel e lápis' foi inferior à conseguida com o GeoGebra.

Mas como o grau de dificuldade das tarefas ia sendo mais elevado, aula após aula, o desempenho que os alunos manifestavam na sua resolução também aumentava pelo que a maioria conseguia resolver as questões colocadas. Assim aconteceu na exploração de um prisma, em que os alunos verificaram com o GeoGebra os resultados previamente determinados analiticamente (determinação das coordenadas dos seus vértices, planos constituintes, retas e semirretas) e na exploração da equação cartesiana de uma superfície esférica, em que os alunos desenharam a superfície esférica no GeoGebra, verificaram o seu centro e o seu raio determinados previamente com 'papel e lápis', além de determinarem a interseção da superfície esférica com uma reta ou com diversos tipos de planos. É de referir que em algumas aulas a maioria dos alunos não conseguiu terminar as tarefas porque estas eram mais complexas e não havia tempo para as concluir. Por vezes, a resolução analítica e gráfica não coincidia, o que originava a sua verificação e reformulação, ou mesmo das duas.

Tal foi o caso da última aula analisada, sobre a 'resolução de problemas (envolvendo conjunto de pontos do espaço) ' quando se resolveram duas tarefas, em que a segunda não foi concluída pela maioria dos alunos por falta de tempo. A primeira tratou da exploração de um prisma, resolvendo tarefas, em primeiro lugar analiticamente e em segundo lugar verificando com o GeoGebra, o que foi concretizado pela maioria dos alunos; a segunda utilizou uma superfície esférica para que indicassem o centro e o raio da superfície esférica, determinassem a sua interseção com o eixo Oy, com os planos de equação $x = -1$ e $z = 4$, apresentassem a equação de um plano paralelo ao plano xOy, tangente à superfície esférica, confirmassem que o ponto $A(-3,0,0)$ pertence à superfície esférica e determinassem a inequação reduzida da esfera de centro A e raio $\overline{AC}$. O enunciado desta última tarefa não pedia explicitamente aos alunos para utilizarem 'papel e lápis' ou o GeoGebra, mas responderam das duas formas, pelo que houve respostas escritas e houve outras determinadas com o GeoGebra. Embora se verificasse equilíbrio entre as resoluções com 'papel e lápis' e com o GeoGebra, as três últimas questões não foram realizadas pela maioria dos alunos.

As tarefas relacionadas com medição, tendem a ser medidas, com a progressão das aulas, com recurso ao GeoGebra, em detrimento com a medição analítica. A explicação para este facto é a de que se torna mais apelativa, mais rápida e mais exata a utilização dos recursos de medição que o GeoGebra possui em comparação com a resolução analítica, mais árdua e trabalhosa (Battista, 2007) e os alunos adquirem progressivamente mais competências. A resolução de tarefas com o GeoGebra em detrimento do 'papel e lápis' não se torna menos válida porque exige o domínio dos conceitos em causa, o domínio das funcionalidades do GeoGebra e das operações mentais indispensáveis à obtenção da solução.

Quanto à análise do pensamento geométrico em Geometria 3D dos alunos, constata-se que na resolução das tarefas propostas durante a intervenção pedagógica se identificaram vários tipos de raciocínio espacial segundo o modelo de Phitalis e Christou (2010). Nas primeiras tarefas realizadas no início da intervenção pedagógica, quase todos os alunos revelaram capacidade de representar um ‘objeto’ 3D (primeiro tipo de raciocínio geométrico em Geometria 3D), o cubo e o prisma, usando a perspetiva como técnica, com base na sua visão ortogonal, quer com ‘papel e lápis’ quer com o GeoGebra. Relativamente à estruturação espacial (segundo tipo de raciocínio geométrico em Geometria 3D) de um objeto geométrico, a representação de um cubo foi mais conseguida com ‘papel e lápis’ do que com o GeoGebra, o que se inverteu na representação de um prisma triangular. O terceiro tipo de raciocínio geométrico abordado tratou-se da conceitualização, que resulta do reconhecimento da forma 3D dos objetos, das suas propriedades e foi mais vincado nas construções efetuadas com o GeoGebra do que com ‘papel e lápis’. Todas estas capacidades se manifestaram nos diversos momentos da intervenção pedagógica. Relativamente ao tópico ‘referenciais e coordenadas no espaço’, verificou-se que a maior parte dos alunos foi capaz de construir e representar o referencial espacial, os planos coordenados e um cubo, usando o GeoGebra, enquanto que com ‘papel e lápis’ apenas metade da turma fez a representação do cubo, correspondendo ao primeiro tipo de raciocínio (capacidade de representar um ‘objeto’ 3D). A estruturação espacial foi equivalente, quer com o GeoGebra, quer com ‘papel e lápis’, mas a conceitualização foi mais conseguida com ‘papel e lápis’. Já na medição (quarto tipo de raciocínio), o GeoGebra foi dominante, relativamente ao ‘papel e lápis’.

No momento seguinte em estudo, quando foram propostas as tarefas de ‘exploração de um prisma’ e da ‘equação cartesiana de uma superfície esférica’, a maioria dos alunos revelou capacidade de representar ‘objetos 3D’, o prisma e a superfície esférica, quer com ‘papel e lápis’ quer com o GeoGebra. Relativamente à estruturação espacial de um objeto geométrico, a representação de um prisma quadrangular regular e de uma esfera foi conseguida de forma equivalente, quer analiticamente, quer com o GeoGebra. O terceiro tipo de raciocínio geométrico abordado tratou-se da conceitualização e o quarto a medição que foram mais conseguidos analiticamente.

Embora o grau de realização seja equivalente quando são empregues ambos os meios de representação, verifica-se, com o decorrer da intervenção pedagógica, que a presença dos quatro tipos de raciocínio geométrico predomina nas tarefas que são realizadas com o GeoGebra, relativamente às que são realizadas com ‘papel e lápis’. Isto acontece porque nas tarefas realizadas com o GeoGebra está sempre presente a representação de objetos 3D e a medição, enquanto nas tarefas realizadas com ‘papel e lápis’ pode não ser necessário representar um ‘objeto’ 3D e ser mais complexa a medição e por estes motivos não se realizar analiticamente.

Verifiquei assim que a resolução das tarefas propostas na intervenção pedagógica com o recurso ao GeoGebra envolveu os alunos em atividades de visualizar e manipular as construções resultantes, identificar e relacionar propriedades dos sólidos construídos, usar o raciocínio lógico nas suas conclusões e verificações, aprender e consolidar conceitos novos. A integração do GeoGebra nas atividades das aulas proporcionou um ambiente motivador e dinâmico, que lhes permitiu construir o seu próprio conhecimento. Breda et al. (2013) consideram que a visualização em três dimensões proporciona uma nova forma de introduzir a apreensão de conceitos e de beneficiar a aprendizagem dos alunos. Para as autoras, um ambiente de aprendizagem que resulte de softwares de geometria dinâmica 3D é um elemento motivador e gerador de interesse, acrescido ao facto de que o uso das folhas gráficas é intuitivo para os estudantes que podem realizar, criar e desenvolver os seus trabalhos. Em tais ambientes, o papel do professor consistiu, segundo Ljajko e Ibro (2013), em dirigir e monitorizar o trabalho dos alunos e estabelecer com eles uma dialética construtiva de forma a que o processo de interação do conhecimento se manifeste em ambas as direções. Porém, estes autores advogam que nem sempre se torna fácil introduzir o GeoGebra na aula de matemática, principalmente quando os professores não se sentem familiarizados na sua utilização, tal como acontece com a exploração de tópicos de geometria 3D, que nem sempre faz parte das estratégias de ensino de alguns professores de matemática.

De uma forma geral, os alunos utilizaram o GeoGebra de forma construtiva na aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço e o conhecimento deste software constituiu uma nova habilidade que enriqueceu o seu estudo.

4.1.2. Que dificuldades manifestam os alunos na aprendizagem, com ou sem o GeoGebra, de tópicos de Geometria Analítica no Espaço?

No processo de aprendizagem de conceitos matemáticos, no geral, e de tópicos de Geometria Analítica no Espaço, em particular, os alunos tendem a revelar dificuldades na visualização de objetos a três dimensões e no estabelecimento de conexões entre a representação gráfica desses objetos e a sua representação simbólica (Breda, Trocado & Santos, 2013; Costa, 2000; Duval, 2012; Rodrigues, 2012). No que diz respeito à Geometria, Breda, Trocado e Santos (2013) defendem que “a tridimensionalidade dos objetos em estudo é, para os alunos, uma fonte acrescida de dificuldades, ainda mais quando se pensa em conexões envolvendo a álgebra” (p. 64). No caso da turma em estudo, os alunos não apontam explicitamente dificuldades de visualização na resposta às questões de aula, mas quando lhes é pedido que indiquem vantagens da utilização do GeoGebra na sua aprendizagem, indicam quase unanimemente que é visualizar e compreender melhor o 3D.

Os alunos apontam dificuldades sentidas durante as aulas da Intervenção Pedagógica, algumas reveladas na revisão de conceitos e na representação de sólidos com 'papel e lápis'. A maioria das dificuldades manifestadas pelos alunos reside na utilização do GeoGebra 3D e na interpretação das tarefas matemáticas que lhes foram propostas para resolver. As dificuldades em trabalhar com o GeoGebra não são surpreendentes porque como os alunos nunca tiveram qualquer contato com o GeoGebra precisariam de desenvolver habilidades no trabalho com este software, o que acontece com uma utilização mais sistemática durante algum tempo. Além disso, algumas tarefas são de resolução mais complexa, o que, segundo Battista (2007), sem uma adequada instrução os estudantes podem não conseguir atingir o conjunto de comandos apropriados e, assim, atingir um adequado nível conceptual explícito que ocorre na aprendizagem da Geometria através de ambientes computacionais que depende de uma complexa interação entre os comandos necessários à construção das figuras, da sua avaliação pelos estudantes, do seu raciocínio e da sua instrução.

No que respeita às perceções dos alunos sobre as dificuldades que sentiram na aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço, a maior parte delas relaciona-se com a visualização dos sólidos no espaço, o conhecimento de conceitos, o seu relacionamento, as fórmulas utilizadas e, por fim, a interpretação das tarefas.

Nas primeiras aulas houve dificuldades, na representação solicitada, dos objetos com 'papel e lápis', o que, segundo Costa (2000), se deve à dificuldade de representar a tridimensionalidade dos objetos em duas dimensões e os alunos não serem capazes de visualizar uma imagem de diferentes perspetivas não distinguindo uma figura geométrica do desenho que a representa. As dificuldades de visualização que os alunos mostram na realização de tarefas sem o GeoGebra são confirmadas através da análise das questões teste relativas à localização de pontos no espaço em que são incapazes de determinar as suas coordenadas, ou na determinação da equação de um plano tangente a uma superfície esférica e paralelo a um dos planos de projeção (Breda, Trocado & Santos, 2013; Costa, 2000; Duval, 2012; Rodrigues, 2012).

Outra das dificuldades habituais é o frágil domínio e compreensão de conceitos que se encontra patente em muitas das resoluções parcialmente corretas e incorretas que os alunos apresentam em 'papel e lápis', como, por exemplo, na definição analítica de uma aresta, de uma semirreta, da reta de interseção de planos, na identificação de uma reta ou de uma superfície limitada e mesmo de uma superfície esférica. Outro tipo de dificuldades não pouco frequentes nas resoluções analíticas são os erros de cálculo e a falta de coerência no raciocínio geométrico, além de não menos frequentes a distração e a desconcentração de alguns alunos.

O registo apresentado sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço resultou da análise à descrição das aulas e das questões de aula em que se conclui que, na sua maioria, consistem em dificuldades de visualização, de domínio e compreensão de conceitos, novas dificuldades relacionadas com o GeoGebra além das tradicionais, relacionadas com o significado das tarefas propostas. As dificuldades de visualização conduzem à incapacidade de ver um objeto de diversas perspetivas, a falhas na distinção entre uma figura geométrica e o desenho que representa essa figura ou em formalizar o pensamento analítico (Costa, 2000).

4.1.3. Que perceções têm os alunos sobre a utilização do GeoGebra na aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço?

Na evolução da intervenção pedagógica houve uma certa constância na assunção das vantagens da utilização do GeoGebra na resolução de tarefas, que foi manifestada pelos alunos nas suas respostas às questões de aula. Também se interessaram pelos conteúdos e participaram na realização, com o GeoGebra, das tarefas propostas.

A utilização do GeoGebra na realização das atividades da aula foi feita gradualmente ao longo das aulas da Intervenção Pedagógica e apresenta como vantagens, segundo os alunos, a ajuda para perceberem melhor as atividades na visualização 3D dos sólidos e dos planos, na compreensão das dimensões e na sua obtenção. A maioria dos alunos aponta que o GeoGebra ajuda a visualizar e a perceber melhor as atividades, o que consideram ser aspetos marcantes para a sua aprendizagem. Para além dessas vantagens, os alunos destacam outras, tais como confirmar resultados obtidos analiticamente, relacionar o gráfico com o analítico, promover a autonomia, resolver expressões analíticas, clarificar os conceitos, promover o debate de ideias, cativar e aprender a trabalhar com um novo software usando o smartphone. Segundo Sinclair et al. (2016), a maior mudança para o ensino de geometria baseada em tecnologia é a ampla disponibilidade de dispositivos móveis com toque em telas. Os alunos estão familiarizados com esses dispositivos, e os tabletes e smartphones oferecem espaço suficiente na tela para fazer geometria.

Além da confirmação de que o GeoGebra ajuda a visualizar e a compreender melhor os objetos no espaço, os alunos sugerem outros aspetos já evidenciados na revisão de literatura, como, por exemplo, a relação entre a representação gráfica e a analítica, a autonomia, a discussão, a clarificação de conceitos, a motivação e a aprendizagem de um novo software (Denbel, 2015).

Segundo Denbel (2015), um ambiente de geometria dinâmica como o GeoGebra permite o 'design' de atividades, nas quais os alunos exploram as propriedades relevantes dos objetos geométricos, a fim de construir uma imagem conceptual mais apropriada. Laborde (2001) defende que a aprendizagem de tópicos de Geometria num AGD pode oferecer aos alunos oportunidades para construir e manipular figuras geométricas e realizar investigações empíricas, atividades difíceis ou mesmo impossíveis de executar num ambiente de geometria estática.

Tais perspetivas corroboram a afirmação de que a possibilidade de visualizar em três dimensões surge como uma nova forma de introduzir a apreensão de conceitos e de beneficiar a aprendizagem dos alunos e que o ambiente de geometria dinâmica em três dimensões é um elemento motivador e gerador de interesse, acrescido do facto de que o uso das folhas gráficas é intuitivo para os estudantes que podem realizar, criar e desenvolver os seus trabalhos (Breda et al., 2013). De facto, os resultados deste estudo comprovam de que os alunos gostam de aprender Geometria no Espaço com o GeoGebra, o que suscitou o seu interesse pela Geometria, se sentem capazes de construir no GeoGebra representações de sólidos geométricos, e de desenvolver habilidades de utilizar este software na resolução de problemas de Geometria no Espaço.

As perceções manifestadas pelos alunos sobre a utilização do GeoGebra na aprendizagem de Tópicos de Geometria Analítica no Espaço apontam para a capacidade que o GeoGebra traz a visualizar e a perceber melhor as tarefas e ainda confirmar resultados obtidos analiticamente, relacionar o gráfico com o analítico, promover a autonomia, resolver expressões analíticas, clarificar os conceitos, promover o debate de ideias, cativar e aprender a trabalhar com um novo software usando o smartphone. Dadas as suas características, a utilização de software como o GeoGebra poderá inspirar uma mudança nas formas de trabalhar em sala de aula os temas geométricos previstos no currículo, resolver problemas e promover a autoaprendizagem através do envolvimento dos alunos na construção de conceitos geométricos.

As desvantagens indicadas pelos alunos com a utilização do GeoGebra, são sobretudo nas aulas iniciais e dizem respeito à morosidade na realização das tarefas, à distração, ou à discussão entre os alunos, já nas aulas finais respondem quase unanimemente que não descortinam desvantagens na sua utilização.

4.2. Recomendações

Como no estudo realizado se obtiveram resultados animadores quanto à utilização do GeoGebra na aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço a primeira recomendação para futuros estudos passa por estudar a influência do GeoGebra na aprendizagem de outros tópicos da Geometria, tanto na perspetiva do plano como do espaço, promovendo o envolvimento dos alunos na construção do conhecimento desses tópicos. Trabalhar com alunos nos anos iniciais de escolaridade permite que ao longo do tempo o GeoGebra entra nos seus esquemas de ação, o que lhes permitirá tirar mais partido das suas potencialidades.

Um outro estudo que se pode realizar com base no que foi feito neste relatório, prende-se com a avaliação das aprendizagens dos alunos. No ensino de tópicos de Geometria com o GeoGebra importa avaliar o desempenho dos alunos com a integração deste recurso nas suas atividades de avaliação: que tipo de questões devem integrar os testes de avaliação? Como avaliar o desempenho dos alunos através desse recurso? Que influência tem a sua utilização na aprendizagem e na avaliação?

Uma outra recomendação consiste em sugerir o estudo e desenvolvimento de um guia de aprendizagem com o GeoGebra, que tenha em conta o currículo de Geometria previsto no programa em vigor. Seria um novo recurso que não colidiria com os existentes, nomeadamente o manual adotado ou com a calculadora porque a diversidade de recursos disponíveis pode ser um fator importante na melhoria da aprendizagem dos alunos e do ensino dos professores.

Não posso deixar de apresentar uma recomendação final. Baseia-se numa ideia que surgiu das seguintes opiniões dos alunos quando questionados sobre 'qual a finalidade do estudo da Geometria? E qual a importância do estudo da Geometria?' Para um deles, a finalidade do estudo da Geometria é "uma espécie de revisão de toda a matéria" e o estudo da Geometria é importante porque "tem exercícios que relacionam tudo"; outro diz que a finalidade do estudo da Geometria é "aprender a relacionar vários aspetos"; e um outro responde que a finalidade do estudo da Geometria é "para obter mais informação e ganhar uma visão mais abrangente da Matemática". A ideia que surgiu destas respostas é estudar a alteração do currículo da Matemática relativamente ao momento em que se devem abordar os tópicos de Geometria, em cada ano letivo, de modo a aumentar a eficácia da aprendizagem dos alunos. Por exemplo, se será pertinente, em cada ano de escolaridade iniciar a aprendizagem pelo tópico Geometria e só posteriormente passar ao estudo dos outros tópicos.

4.3. Limitações

No estudo realizado, por razões várias, emergiram diversos tipos de limitações. A primeira limitação encontrada foi a organização do tópico Geometria previsto na planificação anual da disciplina de Matemática na Escola. Foi necessário compatibilizar um novo recurso e o seu uso ao programa da disciplina e à planificação prevista, o que foi realizado com a professora cooperante.

Outra limitação prende-se com os recursos tecnológicos. Para utilizar o GeoGebra são necessários dispositivos como os tabletes e os smartphones, que apenas seis alunos possuíam pelo que a solução encontrada foi a de ser realizado trabalho em pares, uma vez que a Escola pôde disponibilizar os restantes nove tabletes. Uma vez que só existia um equipamento disponível para dois alunos, um dos alunos acabou por dominar a realização das tarefas em detrimento do outro.

A extensão do currículo da Matemática esteve sempre presente uma vez que limitou o número de aulas que se poderiam atribuir à Intervenção Pedagógica. Com efeito, os tópicos a introduzir são extensos e diversificados, pelo que poucas aulas restaram à Geometria Analítica no Espaço para se cumprir o programa da disciplina. Este fator condicionou as aulas da intervenção porque na sua maioria não foi possível cumprir a planificação prevista, uma vez que haviam tarefas que estavam previstas realizar e por falta de tempo não se realizaram pois que na aula seguinte havia um novo tópico a abordar. Com efeito, para a resolução autónoma de tarefas, com um software que não dominavam, implicaria mais aulas para que os alunos pudessem resolver tarefas cada vez mais desafiantes e explorar com maior extensão as potencialidades do GeoGebra.

O facto de os alunos nunca terem contactado com o GeoGebra, tornou-se necessário aprender um novo recurso a par da aprendizagem dos tópicos previstos de Geometria Analítica no Espaço, o que também se considera uma limitação, uma vez que foi necessário mais tempo para a realização das tarefas. A dificuldade de interpretação que alguns alunos sentiram em algumas tarefas que lhes foram propostas, eventualmente por falta de hábito de trabalharem tarefas de natureza exploratória e de hábitos de leitura e interpretação, também dificultou a concretização dos planos de aula que foram elaborados.

BIBLIOGRAFIA

Azevedo, J. (2015). *Descentralização Administrativa e Autonomia das Escolas. 2015: o ano em que se dá mais um passo em frente*? Porto: Universidade Católica Portuguesa.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spacial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-907). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Baulac, Y., Bellemain, F., & Laborde, J. M. (1988). *Cabri-géomètre, un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie, logiciel et Manuel d'utilisation*. Paris: Cedic-Nathan.

Becker, H. J. (2000). *Findings from the Teaching, Learning and Computing Survey: Is Larry Cuban Right?* University of California. Irvine: Center for Research on Information Technology and Organizations.

Berthelot, R., & Salin, M. H. (1998). The role of pupils' spatial knowledge in the elementary teaching of geometry. In C. Mammana, & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for he 21st Century* (pp. 71–78). Dordrecht: Kluwer.

Bishop, A. J. (1983). *Spatial abilities and mathematical thinking, in Zweng*, M. Et al. (eds.). Proceedings of the IV I.C.M.E. (Birkhauser: Boston, USA), pp. 176-178.

Breda, A., Trocado, A., & Santos, J. (2013). O GeoGebra para além da segunda dimensão. *Indagatio Didactica*, *5*(1), 61–83.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17, 31-48.

Candeias, N., & Ponte, J. P. (2008). Aprender geometria utilizando um ambiente de geometria dinâmica In A. P. Canavarro, D. Moreira, & M. I. Rocha (Eds.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 313-326). Lisboa: SEM-SPCE. Acedido em 15 de novembro, 2017, de http://bit.ly/1L5oUn9.

Carvalho, J., & Cardoso, E. (2009). *A utilização de ambientes geométricos dinâmicos no ensino e aprendizagem de Geometria – um curso de Geometria no 9.º ano de escolaridade (3.º ciclo do Ensino Básico)*. Acedido em 20 de outubro, 2017, de http://hdl.handle.net/10400.14/14479.

Choi, K. (2010). Motivating students in learning mathematics with GeoGebra. *Annals. Computer Science Series*, 8(2), 65–76.

Chang, K., Wu, L., Lai, S., & Sung, Y. (2014). Using mobile devices to enhance the interactive learning for spatial geometry. *Interactive Learning Environments*, 23(1), 1–19.

Chazan, D., & Yerushelmy, M. (1990). *Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer*. Haifa: Kluwer Academic Publishers.

Clements, D., & Battista, M. (1992). Geometry and Spatial reasoning. In *handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). Nova York: Macmillan Publishing Co.

Cobb. P., & Steffe, L. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York. Spinguer-Verlag.

Costa, C. (2000). Visualização, veículo para a educação em geometria. In M. J. Saraiva, M. I. Coelho, & J. M. Matos (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da geometria* (pp. 157-184). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. In M. M. Lindquist, & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12* (pp. 1-16). Reston, Va: NCTM.

Cunningham, S. (1991). The visualization environment for mathematics education. In W. Zimmermann, & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 67-76). Washington: MAA.

Diário do Governo. Lisboa: Imprensa Nacional, 1910 a 1926.

Dias, M. (2004). *O Movimento na Geometria: Abstração ou Realidade*? Campos: Centro Universitário Fluminense.

Denbel, D. (2015). Student's learning experiences when using a dynamic geometry software tool in a Geometry lesson at secondary school in Ethiopia. *Journal of Education and Practice*, 6(1), 23–38.

Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical thinking. In P. Nesher, & J. Kilpatrick. (Eds), *Mathematics and Cognition* (pp 113-134). Cambridge: University Press.

Dreyfus, T. (1995). Imagery for diagrams. In R. Sutherland, & J. Mason (Eds), *Exploiting mental imagery with computers in Mathematics Education* (pp. 3-17). New York: Springer.

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. (M. T. Moretti, Trans.) *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7(2), 266–297.

Fernandes, P. (1981). Elementos de geometria para o ensino secundário. Lisboa: Plátano.

Figari, G. (1996). *Avaliar que referencial*? Porto: Porto Editora.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). *Journal for. Research in Mathematics Education Monograph 3: The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Glasersfeld, E. (1991). *A Constructivist's View of Learning and Teaching*. In: R. Duit, F. Goldberg & H. Niedderer (ed.) Research in physics learning: Theoretical issues and empirical studies. Proceedings of an international workshop. Kiel, Germany: IPN, 29–39, 1991.

Glasersfeld, E. (1992). Questions and Answers About Radical Constructivism. Washington DC: NSTA.

Gray, E., & Pitta, D. (1999). Images and their frames of reference: A perspective on Cognition development in elementary Arithmetic. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of 23th PME conference* (Vol. 3, pp 49-56), Haifa: Israel Institute of Technology, Department of Education in Tecnology and Science.

Güçler, B., Hegedus, S., Robidoux, R., & Jackiw, N. (2013). Investigating the mathematical discourse of young learners involved in multi-modal mathematical investigations: the case of haptic technologies. In D. Martinovic, V. Freiman, & Z. Karadag (Eds.), *Visual mathematics and cyberlearning* (pp. 97–118). Berlin: Springer.

Gutierrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 237–251.

Guttierrez, A. (1996). Visualization in 3–dimensional geometry: in search of a framework. In L. Puig, & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of 20th PME conference* (Vol. 3, pp 19-26), Valencia: Universitat de València, Dept. de Didàctica de la Matemática.

Guzmán, M. (1996). *El rincon de la pizarra*. Madrid: Ediciones Pirâmides.

Hadji, C. (2003). *A avaliação, regras do jogo: das intenções aos instrumentos*. Porto: Porto Editora.

Hansen, V. L., Malkevitch, J., & Douady, A. (1998). Geometry: Past and Future. In C. Mammana, & V. Villani (Eds.), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century (pp. 9-28). New ICMI Study Series, vol 5. Springer, Dordrecht.

Hershkowitz, R., Parzysz, B., & Dormolen, J. (1996). Space and shape. In A. Bishop, C. Keitel, C. Laborde, K. Clements, & J. Kilpatrick (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 161 – 204). Londres: Kluwer.

Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *27*(3), 126–131.

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic Mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and Its Applications*, *7*.

Hoyles, C., & Healy, L. (1997). Unfolding Meanings for Reflective Symmetry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. Vol. 2, Issue 1, pp. 27-59.

Ismail, Z., & Rahman, S. (2017). *Learning 2-Dimensional and 3-Dimensional Geometry with Geogebra: Which Would Students Do Better?* International Journal on Emerging Mathematics Education (IJEME) Vol. 1, No. 2, pp. 121-134

Isotani, S., & Brandão, L. (2006). Como Usar a Geometria Dinâmica? O Papel do Professor e do Aluno Frente às Novas Tecnologias. In *XII Workshop de Informática na Escola: anais do XXVI*

Congresso da SBC. Campo Grande (pp. 120-128). Acedido em 20 de outubro, 2017, de http://bit.ly/1Q1Lsg5.

Jackiw, N. (1989). *The Geometer's Sketchpad (Computer Software)*. Berkeley: Key Curriculum Press.

Jones, K. (2000). *Teacher Knowledge and Professional Development in Geometry*. Southampton: University of Southampton.

Laborde, C. (1993). *The Computer as Parto f the Learning Environment: The Case of Geometry*. Berlim: Springuer Verlag.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with cabri-geometry*.* *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283-317.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strasser, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 275–304). Rotterdam: Sense Publishers.

Latsi, M., & Kynigos, C. (2012). Experiencing 3D simulated space through different perspectives. In A. Jimoyiannis (Ed.), *Research on e-Learning and ICT in Education: Technological, Pedagogical and Instructional Issues* (pp. 183–196). Berlin: Springer.

Ljajko, E., & Ibro, V. (2013). Development of ideas in a GeoGebra - aided mathematics instruction. *Mevlana International Journal of Education (MIJE)*, *3*(3), 1–7.

Lodico, M., Spaulding, D., & Voegtle, K. (2010). *Methods in Educational Research from Theory to Practice*, Second Edition. San Francisco: Jossey-Bass A Wiley Imprint 989 Market Street.

Lohman, D. (1988). Spatial abilities as traits, processes and knowledge. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence*, vol. 40 (pp. 181–248). Hillsdale: LEA.

Mackrell, K. (2011). Design decisions in interactive geometry software. *ZDM -The International Journal on Mathematics Education*, 43(3), 373–387.

Malkevitch, J. (Ed): *1991, Geometry's Future*. Arlington, MA, COMAP.

Mariotti, A. (1995). Images and concepts in geometrical resoning. In R. Sutherland, & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in Mathematics Education* (p. 97-116). New York:Springer.

Mariotti, M. A. (2001b) Justifying and prooving in the cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6, pp.257-281*. Dordrecht: Kluwer.

Mehanovic, S. (2009). *Learning based on dynamic software GeoGebra*. Acedido em 10 de novembro, 2017, de http://bit.ly/1NWuOXJ.

Ministério da Educação (1991). *Programa Matemática - Plano de Organização do Ensino Aprendizagem, Ensino Básico 3.º Ciclo (Vol. II)*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional Ensino básico - Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação e Ciência. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática A – Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Nemirovsky, R., & Noble, T. (1997). On mathematical visualization and the place where we live. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 99-131.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Perry, D. R., & Steck, A. K. (2015). Increasing student engagement, self-efficacy, and meta-cognitive self-regulation in the high school geometry classroom: do iPads help? *Computers in the Schools*, 32(2), 122–143.

Pittalis, M., & Christou, C. (2010). *Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability*. Chipre: Springer Science+Business Media B.V.

Piteira, G., & Matos, J. (2000). Ambientes Dinâmicos de Geometria como Artefactos Mediadores para a Aprendizagem da Geometria. In M. J. Saraiva, M. I. Coelho, & J. M. Matos (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da geometria* (pp. 61-72). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática.

Ponte, J. P. (1994). *Matemática: Uma disciplina condenada ao insucesso*? Acedido em 24 de setembro, 2018, de: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos-por-temas.htm.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Presmeg, N. (1995). Preference for visual methods: an international study. In *Proceedings of PME XIX*, Recife, Vol 3, pp 58-65.

Presmeg, N. C. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 299-312). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Projeto Educativo do Agrupamento de Escolas.

Rahim, M.H., & Siddo, R., (2009). The use of visualization in learning and teaching mathematics. In A. Rogerson (Ed.), Proceedings of the 10th International Conference: Models in Developing

Mathematics Education. The Mathematics Education into the 21st Century Project, Dresden, Saxony, Germany, Sept 11-17.

Ribeiro, A. (2005). *O Cabri-Géomètre e a construção de uma nova cultura matemática*. Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro, Portugal.

Richter-Gebert, J., & Kortenkamp, U. (2012). *The Cinderella.2 manual. Working with the interactive geometry software.* Berlin: Springer.

Rodrigues, M. (2012). *O ensino da Geometria no 10.º ano*. Dissertação de Mestrado, Universidade Portucalense Infante D Henrique, Portugal.

Rojas, R. (2001). *El Cuestionario*. Acedido em 26 de Setembro, 2018, de http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/ceo/article/viewFile/1498/1155.

Royal Society/Joint Mathematical Council (2001). *Teaching and Learning Geometry pre-19*. London: Royal Society/Joint Mathematical Council.

Santos, L., Brocardo, J., Pires, M., & Rosendo, A. (2002). *Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior*. Lisboa: Instituto da Educação.

Santos, I. (2011). *Explorando conceitos de Geometria Analítica Plana utilizando tecnologias da informação e comunicação: uma ponte do Ensino Médio para o Ensino Superior construída na formação inicial de Professores de Matemática*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil. Acedido em 15 de novembro, 2017, de http://bit.ly/2dsmJ8K.

Santos, E. (2015). *Matemática e tecnologia: Analisando a contribuição do software GeoGebra 3D para o processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial.* Trabalho de conclusão de curso, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, Brasil. Retrieved from http://bit.ly/2gWKtOM

Silva, R., Machado, G., Zotto, N., & Mello, K. (2013). GeoGebra 3D e quadro interativo: uma possibilidade para o ensino de geometria espacial no ensino médio. In *VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática* (pp. 1–13). Rio Grande: ULBRA. Retrieved from http://bit.ly/2hK5X1j

Silveira, A., & Cabrita, I. (2013). O GeoGebra como ferramenta de apoio à aprendizagem significativa das transformações geométricas isométricas. *Indagatio Didactica*, *5*(1), 150–170.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Org.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-3709. New York, NY: Macmillan.

Sinclair, N., Bussi, M., Villiers, M., Jones, K., Kortemkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. International Journal on Mathematics Education, Volume 48, Issue 5, pp 691–719.

Solano, A., & Presmeg, N. (1995). Visualization as a relation of images. In *Proceedings of PME* XIX, Recife, Vol 3, pp 66-73.

Senechal, M. (1991). Visualization and visual thinking, In J. Malkevitch (Eds), *Geometry´Future*, (p.15-21), COMAP, Inc. USA.

Steffe, L., & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. Nova York: Springer.

Usiskin, Z. (1982). *van Hiele levels and achievment in secondary school Geometry*. Chicago: Department of Education the University of Chicago.

Veloso, E. (1998). *Geometria: temas atuais: materiais para professores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Venturini, M. (2015). *How teachers think about the role of digital technologies in student assessment in mathematics.* Unpublished PhD dissertation. Simon Fraser University, Canada.

Yerushalmy, M., & Chazan, D. (1993). *Using technology to support education reform*. Newton, MA: Education Development Center.

Yakimanskaya, I. S. (1991). The Development of Spatial Thinking in Schoolchildren. Soviet Studies in Mathematics Education. Volume 3. Reston: Institute of Education Sciences.

ANEXOS

ANEXO 1 – Autorização do Diretor

Pedido de autorização ao Diretor da Escola

Exmª Srª. Diretora da Escola Secundária Carlos Amarante

Eu, José Manuel Macedo Monteiro, venho por este meio solicitar autorização para concretizar, numa turma de 10.º ano desta escola, o projecto de Dissertação de Mestrado, a desenvolver sob orientação do Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu, sob o tema "Aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no espaço com recurso ao GeoGebra: uma experiência com alunos do 10º ano". Este projecto integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade do Minho, e tem como objetivo averiguar o contributo do GeoGebra na aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço. No decorrer da investigação as principais formas de recolha de dados para a concretização do projeto serão:

(i) questões aula, (ii) registos vídeo / áudio, (iii) questionários, (iv) trabalhos produzidos pelos alunos, (V) questões teste, (VI) entrevistas aos alunos.

Será solicitada autorização aos Encarregados de Educação dos alunos para a participação neste projeto de investigação e será salvaguardado o anonimato (quer dos alunos, quer da escola).

Antecipadamente grata pela colaboração e com os melhores cumprimentos,

Pede deferimento,

____

(José Manuel Macedo Monteiro)

Braga, 8 de Novembro 2017

ANEXO 2 – Autorização do EE

Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Exmo(a). Senhor(a)

Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática, da Universidade do Minho, enquanto professor estagiário, pretendo desenvolver experiências de ensino que potenciem a aprendizagem dos alunos do tema "APRENDIZAGEM DE TÓPICOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ESPAÇO COM RECURSO AO GEOGEBRA: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO 10ºANO". O desenvolvimento dessas experiências implica a recolha de dados, que serão obtidos através da resolução de tarefas e da observação das aulas. Para uma melhor compreensão das atividades que se desenvolvem na aula de Matemática necessito de proceder à recolha de dados através de gravações (áudio e vídeo). Para esse fim, venho desta forma solicitar a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio e vídeo dos dados necessários à concretização das experiências de ensino e de aprendizagem na sala de aula do seu educando.

Comprometo-me a usar os dados apenas para fins académicos e a não divulgar o nome da escola e dos alunos, nem expôr qualquer indicador que envolva o seu educando. Só me interessa a informação que me ajude a melhorar as minhas estratégias de ensino. Os dados das gravações serão apenas usados para efeitos do estudo a realizar e não terão qualquer influência nas classificações escolares dos alunos. Comprometo-me ainda a proceder à destruição de todas as gravações após a realização dos trabalhos.

Agradeço a sua colaboração.

Braga, 8 de Novembro 2017

O estagiário de Matemática,

____

(José Manuel Macedo Monteiro)

------------------------------ ✂ --------------------------------------

Autorizo que se faça o registo em áudio e vídeo das atividades de ensino e de aprendizagem nas aulas de Matemática que envolvem o meu educando desde que seja salvaguardado o anonimato do seu nome e de qualquer indicador que o indicie.

O Encarregado de Educação

____

ANEXO 3 - Questionários

Questionário Inicial

As tuas opiniões são importantes para o estudo que estou a realizar relativamente à aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço com recurso ao GeoGebra, sendo este um software de geometria dinâmica que se pode utilizar nas actividades de ensino e aprendizagem de tópicos matemáticos. Para obter resultados válidos é da maior importância que respondas de forma refletida a todas as questões que te são apresentadas a seguir. Comprometo-me a utilizar os dados apenas para efeitos da investigação e de forma anónima.

Dados Gerais

1. Idade:____
2. Sexo: ☐ M ☐ F
3. Quais são as tuas disciplinas preferidas ? Porquê ?

____

____

4. Em que disciplina tens mais dificuldades ? Porquê?

____

____

5. Que classificação obtiveste na disciplina de Matemática no ano anterior?______
6. Quais são os temas que mais aprecias na disciplina de Matemática?

Porquê?____

____

____

7. Quais são os temas que menos aprecias na disciplina de Matemática? Porquê?

____

____

8. Costumas usar o computador/telemóvel quando estudas Matemática? S☐ N☐

sim, com que finalidade ____

____

____

Perspetivas sobre a Geometria e o GeoGebra

1. Como caracterizas a tua relação com a Geometria? ____________________________

    ____

    ____

2. Qual é a finalidade do estudo da Geometria? __________________________________

    ____

    ____

3. A Geometria é um domínio que integra os programas da disciplina de Matemática em todos os níveis de ensino. Na tua perspetiva, qual é a importância do estudo da Geometria? ____

    ____

    ____

4. Nos anos anteriores aprendeste conceitos de Geometria com recurso a softwares como o GeoGebra? S ☐ N. ☐ Se sim, quais? ____________________________

    ____

    ____

5. Dos vários métodos para aprender Geometria, apresentados a seguir, selecciona três da tua preferência:

    ☐ transmissão da matéria pelo professor.
    ☐ resolver problemas relacionados com situações do quotidiano.
    ☐ realizar trabalhos com colegas, em pares ou em grupo.
    ☐ resolver exercícios do manual escolar.
    ☐ passar para o caderno o que é feito no quadro.
    ☐ ser o aluno a estabelecer as definições, regras e propriedades.
    ☐ resolver exercícios/problemas com recurso a software de geometria dinâmica.

Questionário Final

As tuas opiniões são importantes para o estudo que estou a realizar relativamente à aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço com recurso ao GeoGebra. Para obter resultados válidos é da maior importância que respondas de forma refletida a todas as questões que te são apresentadas a seguir. Comprometo-me a utilizar os dados apenas para efeitos do meu estudo e de forma anónima.

1. Das afirmações que se seguem, assinala com **X** a que se adequa mais ao teu grau de concordância, atendendo à seguinte escala: **DT**: Discordo Totalmente; **DP**: Discordo Parcialmente; **I**: Indiferente; **CP**: Concordo Parcialmente; **CT**: Concordo Totalmente.

Afirmações	**DT**	**DP**	**I**	**CP**	**CT**
Gostei de aprender Geometria no Espaço com o GeoGebra.					
Os conceitos de Geometria no Espaço foram mais difíceis de compreender do que outros conceitos matemáticos.					
O estudo de conceitos de Geometria no Espaço com recurso ao GeoGebra suscitou o meu interesse pela Geometria.					
O trabalho em pares permitiu-me discutir sobre possíveis formas de resolver as tarefas.					
O GeoGebra permitiu-me visualizar diferentes formas geométricas.					
Recorri ao GeoGebra para validar resultados obtidos analiticamente.					
O GeoGebra ajudou-me a compreender melhor conceitos geométricos estudados.					
O GeoGebra ajudou-me a relacionar a resolução analítica e a resolução gráfica.					
Sou capaz de construir no GeoGebra representações de sólidos geométricos.					
Recorri a processos analíticos para validar resultados obtidos no GeoGebra.					
Desenvolvi habilidades de utilizar o GeoGebra na resolução de problemas de Geometria no Espaço.					
Recorri ao GeoGebra para resolver tarefas que não conseguia fazer por processos analíticos.					
Preferi resolver as tarefas propostas analiticamente do que com o GeoGebra.					
O GeoGebra não favoreceu a minha aprendizagem de conceitos de Geometria no Espaço.					
O GeoGebra permitiu-me estabelecer nas aulas definições de conceitos de Geometria no Espaço.					
Descobrir por mim os conceitos matemáticos é mais aliciante do que ser o professor a apresentá-los					
O GeoGebra permitiu visualizar melhor as construções efetuadas do que no quadro/papel.					
As aulas em que utilizei o GeoGebra foram as que participei mais nas atividades da aula.					
O GeoGebra permitiu explorar mais exemplos do que se fosse com papel e lápis.					
Gostaria de aprender outros conceitos matemáticos com recurso ao GeoGebra.					
Trabalhar em pares na sala de aula ajudou a explorar melhor o GeoGebra do que individualmente.					

2. O ensino de Geometria no Espaço foi realizado com recurso ao GeoGebra. Indica **três vantagens** da utilização do GeoGebra para a tua aprendizagem.

____
____
____
____
____
____

3. O ensino de Geometria no Espaço foi realizado com recurso ao GeoGebra. Indica **três desvantagens** da utilização do GeoGebra para a tua aprendizagem.

____
____
____
____
____
____

4. Que dificuldades sentiste na aprendizagem de conceitos de Geometria no Espaço?

____
____
____
____
____
____

5. Qual foi o contributo do GeoGebra na clarificação de dificuldades que sentiste na aprendizagem de conceitos de Geometria no Espaço?

____
____
____
____
____
____

6. Explica a diferença entre a resolução de tarefas no GeoGebra e a resolução de tarefas com papel e lápis.

____
____
____
____
____

ANEXO 4 – Questão aula

Questões aula Data:__

O que aprendeste na aula de hoje?

____

____

____

____

____

Que dificuldades sentiste? Como as ultrapassaste?

____

____

____

____

____

Que vantagens teve o GeoGebra na realização das actividades da aula?

____

____

____

____

____

Que desvantagens teve o GeoGebra na realização das actividades da aula?

____

____

____

____

____

Plano de aula 1

Tópico: Posição relativa de retas e planos.

Objetivo: Determinar a posição relativa de retas e planos.

Conhecimento Prévio: Noção de ponto, de reta e de plano.

Atividade Motivacional

Ao estudar Geometria no Espaço, o Rui apercebeu-se que num cubo pode determinar vários planos, tais como:

(4) Um plano que contém duas diagonais faciais estritamente paralelas do cubo;
(5) Um plano perpendicular ao plano anterior que contém duas diagonais faciais;
(6) Um plano estritamente paralelo a uma das faces do cubo, que contenha outra face do cubo.

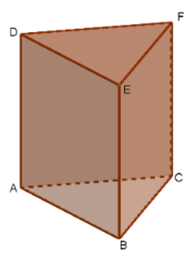
Com recurso ao GeoGebra, esboce os planos idealizados pelo Rui.

Exploração

1. Questionar os alunos sobre as diferentes formas de definir um plano.
2. Perguntar à turma quais são os elementos de um cubo.
3. Após a construção de um cubo, com uma dada medida de aresta, pedir à turma que determinem os planos solicitados na atividade motivacional.
4. Considerando os elementos de um cubo, sugerir aos alunos que identifiquem:
   - 4.1. Duas retas complanares;
   - 4.2. Duas retas não complanares;
   - 4.3. Duas retas concorrentes;
   - 4.4. Duas retas estritamente paralelas;
   - 4.5. Duas retas coincidentes;
   - 4.6. Uma reta paralela a uma face do cubo;
   - 4.7. Uma reta secante a uma face do cubo;
   - 4.8. Uma reta contida numa face;
   - 4.9. Dois planos concorrentes e a reta de intersecção.

Prática

Desenhe no caderno e no GeoGebra a figura seguinte:



Represente um plano perpendicular ao plano DEF.

Desafio

Depois de completar as seguintes afirmações, utilize o GeoGebra para ilustrar cada uma delas:

É condição necessária e suficiente para que uma reta seja paralela a um plano que ....

É condição necessária e suficiente para que dois planos distintos sejam paralelos, que exista ....

É condição necessária e suficiente para uma reta secante a um plano num dado ponto P ser perpendicular a esse plano que..

Comentários

10º ano
Ensino em pares

Perguntar como se pode definir uma reta e um plano.

Rever conceitos de paralelismo, perpendicularidade, entre retas, entre retas e planos e entre planos.

Praticar GeoGebra
Representar planos perpendiculares.

Intuir relações de:
-paralelismo no no espaço;
-perpendicularidade

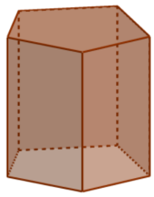
É condição necessária e suficiente para dois planos serem perpendiculares que.......................

Trabalho de Casa

Resolva os exercícios 1, 2, 3 e 4 das páginas 6 e 7 do manual. Use o GeoGebra na resolução.

Tarefas Adicionais

Desenhe no GeoGebra o seguinte prisma:



Com recurso ao GeoGebra, represente um plano perpendicular a uma das faces do prisma.

Materiais

Manual escolar, caneta, quadro, GeoGebra.

Plano de aula 2

Tópico: Referenciais e coordenadas no espaço. Projeção de um ponto no espaço.

Objetivo: Definir referencial no espaço, determinar e definir coordenadas de um ponto no espaço.

Atividade Motivacional

Abre o Geogebra e observa o referencial espacial.

Desenha o referencial no caderno, assinala a origem do referencial, O, o eixo das abcissas, x, o eixo
das ordenadas, y e o eixo das cotas, z.
Desenha um cubo com 2 de aresta no Geogebra, com arestas coincidentes com os eixos do referencial espacial. Assinala o vértice do cubo, não pertencente aos eixos coordenados. Indica o valor da abcissa, o valor da ordenada e o valor da cota deste vértice.

Exploração

Assinala no referencial criado no Geogebra:

1- O plano xOy;
2- O plano xOz;
3- O plano yOz;
4- Indica qual é a projecção ortogonal do ponto G no plano xOy;
5- Apresenta todas as coordenadas dos vértices do cubo.

Prática

Elabora a actividade inicial 1 da página 8 do manual.

Desafio

Desenha no Geogebra os vértices (1,-1,-1) e (1,1,-1). Em seguida desenha o cubo gerado pela aresta que une esses dois pontos. Determina, analiticamente, sem recorrer ao Geogebra, as coordenadas desses pontos. Depois de o fazeres, verifica essas coordenadas Com o Geogebra.

Comentários

Turma do 10º ano

Grupos de dois
Trabalhar em

Geogebra

Atividade prática

Aplicar conceitos

Síntese Final

Define referencial ortonormado no espaço. Quais são os planos coordenados?

Define projecção ortogonal de um ponto numa reta e de um ponto num plano.

Diz o que entendes por coordenadas de um ponto P.

O que aprendeste na aula de hoje?

Que dificuldades sentiste?

Trabalho de Casa

Resolve os exercícios 1, 2 e 3 da página 11 do manual.

Tarefas Adicionais

Exercício 17 da página 22 do manual.

Materiais

Manual escolar, fita métrica, caneta, quadro, Geogebra.

Plano de aula 3

Tópico: Planos paralelos aos planos coordenados. Retas paralelas aos eixos coordenados.

Objetivo: Escrever equações de planos paralelos aos planos coordenados.

Atividade Motivacional

A partir da aresta que une os pontos A(0,-1,-1) e B(0,1,-1), desenhe no GeoGebra, um
cubo. Diga quantas representações desse cubo se podem realizar?
De seguida, represente esse cubo no caderno.

Exploração

1-Representar o cubo.
2-Analisar as diferentes representações do cubo segundo os dados do enunciado
3-No mesmo referencial espacial que representa o cubo, desenhe os planos definidos pelos pontos EFG, HGC e AED.
4- Estabeleça através de uma condição:
O plano definido por EFG; Generalize.
O plano definido por HGC; Generalize.
O plano definido por AED. Generalize.
5-Indicar por uma condição, as retas que resultam da intersecção dos planos EFG, HGC e AED.

Prática

Na figura estão represen-tados nove cubos, todos com as mesmas dimen-sões, num referencial ortonormado do espaço.
Tal como a figura sugere:
- os planos que contêm as faces do cubo são perpendiculares aos eixos coordenados;
- cubos contíguos têm uma face comum ou uma aresta comum;

Comentários

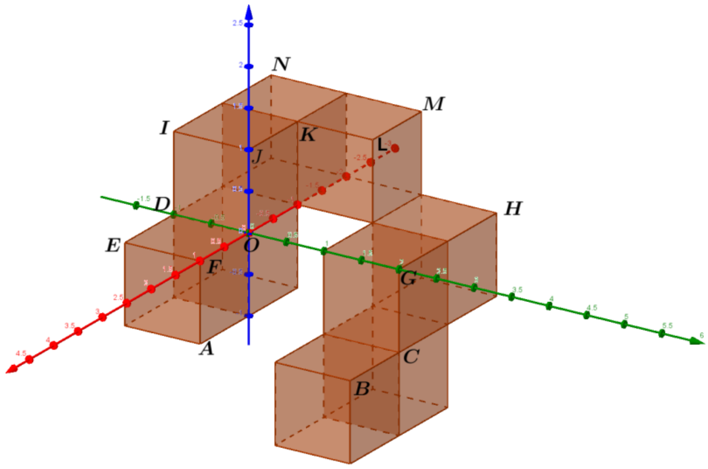
Turma do 10° ano

Com esta actividade pretende-se estimular a capacidade de visualização dos alunos de sólidos num referencial espacial. Para esse efeito, explora-se a representação de um cubo para definir equações do plano. O GeoGebra tem por finalidade, ilustrar essas representações e clarificar o conflito de representar figuras tridimensionais no plano

Estabelecer equações de planos e de retas Identificar diferenças na. representação

Esta tarefa faz parte do manual escolar. Pretende-se que os alunos definam equações de planos que contêm as faces de cubos representados no enunciado da tarefa.

- os vértices F, G e J, pertencem aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz, respectivamente;
-as coordenadas do ponto A são (1,0,-1).
1.- Determine as coordenadas dos vértices B a N;



2.- Defina por uma equação os planos:

a)AFE b)BCG c)ABC
d)NMH e)DIN f)JKL

Desafio

Tendo como referência o cubo construído a partir da aresta que une os pontos A(0,-1,-1) e B(0,1,-1), definir a condição que representa o cubo.

Escreva condições que representem as arestas do cubo anterior.

Escreva condições que representem as semi-retas definidas por AB, FG e por DH.

Explorar a representação do cubo no GeogGebra para definir a condição pedida.

Síntese Final

Diga como estabelecer a equação de um plano paralelo a um dos planos coordenados?

Diga como se estabelece a equação de uma reta?

Trabalho de Casa

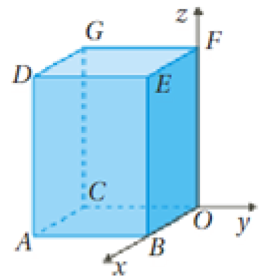
Resolve os exercícios 4 da página 12 e 5 da página 14, do manual.

Tarefas Adicionais

No referencial ortonormado do espaço está representado um prisma quadrangular regular. A unidade de medida é o centímetro. A área da base do prisma é 16 cm^2 e a área lateral é $96cm^2$. Os vértices B e F pertencem aos semieixos positivos Ox e Oz, respectivamente, e o vértice C pertence ao semieixo negativo Oy.

Escreva:

1- As coordenadas do vértice do prisma;
2- Uma condição que defina cada um dos planos que contêm as faces do prisma;
3- Uma condição que defina cada uma das arestas do prisma.



Esta tarefa faz parte do manual escolar. Pretende-se que os alunos definam equações de planos que contêm as faces do prisma e condições que representem arestas do prisma, representados no enunciado da tarefa.

Materiais

Manual escolar, caneta, quadro, Geogebra.

Plano de aula 4

Comentários

Tópico: Distância entre dois pontos e equação do plano mediador de um segmento de reta no espaço. Equação cartesiana da superfície esférica e inequação cartesiana da esfera.

Turma do 10° ano

Objetivo: Determinar a distância entre dois pontos do espaço. Estabelecer a equação do plano mediador de um segmento de reta no espaço, a equação de uma superfície esférica e a inequação de uma esfera.

Tarefa 1: distância entre dois pontos e plano mediador de um segmento de reta no espaço.

Num referencial ortonormado do espaço, um paralelepípedo tem um dos seus vértices na origem e três arestas coincidentes com os eixos coordenados. O vértice oposto à origem tem coordenadas (2,3,1).

Aplicar e desenvolver a capacidade de visualização no espaço

Exploração

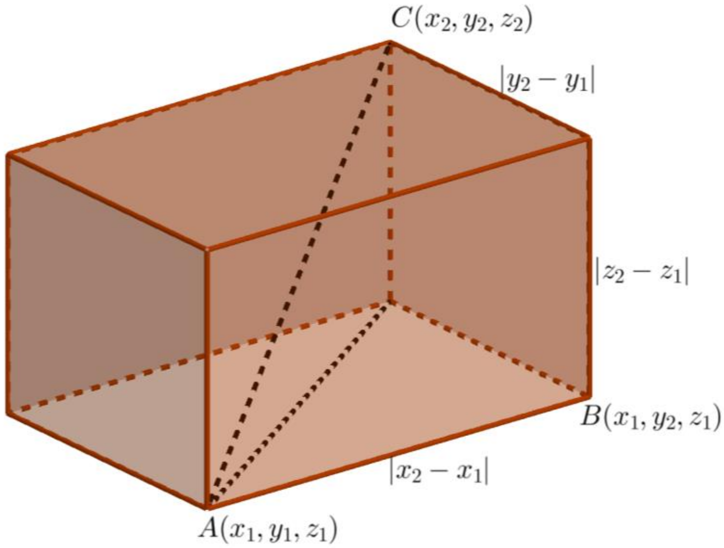
1-Representar no Geogebra o paralelepípedo.

2-Calcular o comprimento da diagonal espacial do paralelepípedo com recurso ao GeoGebra.

3-Questionar a turma como obter algebricamente esse comprimento.

4-Considerar um prisma do qual se conhece as coordenadas genéricas dos pontos $A(x_1,y_1,z_1)$ e $C(x_2,y_2,z_2)$:

A partir da distância entre dois pontos no espaço, determinada no GeoGebra, os alunos serão incentivados a deduzir a fórmula geral da distância entre dois pontos no espaço.



Como determinar a distância do ponto A ao ponto C?

5-Escrever a equação do plano mediador do segmento de reta que traduz uma das arestas do paralelepípedo.

6- Considerando um segmento de reta [AC] no espaço, em que $A(x_1,y_1,z_1)$ e $C(x_2,y_2,z_2)$, escrever uma equação do plano mediador do segmento de reta.

Pretende-se que os alunos deduzam:
-uma equação de um plano mediador paralelo a um dos planos coordenados;
-uma equação do plano mediador de um segmento de reta no espaço.

Tarefa 2: superfície esférica e esfera.

Dos diferentes sólidos que existem, já é do teu conhecimento a esfera. Como defines uma esfera? Que figura geométrica te permite gerar uma esfera?

Exploração

1-Registar no quadro as respostas dos alunos sobre o que entendem por esfera.

2-Pedir aos alunos exemplos do quotidiano que representam uma esfera.

3-A partir de uma bola, tendo como referência a distinção no plano entre circunferência e círculo, questionar a turma sobre a variação da distância de qualquer ponto da bola em relação ao seu centro.

4-Perguntar aos alunos o que se obtém de rodarem um círculo em torno de um diâmetro.

5- Distinguir superfície esférica de esfera.

Com estas questões pretende-se que os alunos digam como se pode gerar uma esfera. Mostrar-se-á um exemplo de uma semicircunferência a gerar uma circunferência ,.

6-Representar no GeoGebra uma esfera com centro na origem e raio 2cm.

7-Na folha algébrica do Geogebra, aparece a equação $x^2+y^2+z^2=4$. O que significa essa equação? Como a obter?

Pretende-se que os alunos deduzam a condição que representa

8- Determinar a inequação que representa a esfera com centro na origem e raio 2cm.
9- Determinar a condição que representa a superfície esférica e a esfera com centro no ponto $C(x_1,y_1,z_1)$ e raio r.

a esfera e a superfície esférica, com centro num ponto qualquer e raio qualquer.

Prática

1- Considere, num referencial ortonormado Oxyz, os pontos:

A(1,2,3); B(-2,2,2); C(2,2,0).

a) Determine a distância entre A e B, A e C e B e C.
b) Justifique que o triângulo [ABC] é rectângulo em A.
c) Escreva na forma ax+by+cz+d=0, com a,b,c,d $\in \mathbb{R}$, uma equação do plano mediador de [AB].

Tarefa baseada no exercício 6 da página 15 do manual.

2- Considere, num referencial ortonormado do espaço, os pontos A(4,0,0), B(2,1,3) e C(0,2,0). Seja β a superfície esférica de centro em B e que passa em A e α o plano mediador de [AC].
   2.1 Defina por uma condição a superfície esférica β.
   2.2 Defina por uma condição o plano α.
   2.3 Verifique se o centro da superfície esférica pertence ao plano α.

Tarefa retirada do manual (exercício 22 da pág. 23).

Desafio

Considere, fixado um referencial cartesiano do espaço, a superfície esférica cujo centro é o ponto C(2,2,2) e que é tangente ao plano de equação $Y = 2 - \sqrt{6}$.
1-Esta superfície contém apenas dois pontos que têm as três coordenadas iguais. Determine as coordenadas destes dois pontos.
2-Determine para que valores reais de a a intersecção da superfície esférica com o plano de equação $x = a$ é uma circunferência de raio $\sqrt{5}$.

Tarefa retirada do caderno de fichas (exercício 7 da pág. 79).

Trabalho de Casa

Resolve os exercícios 7 da pág. 16 e 8 da pág. 17, 10 e 11 da pág. 18, 12 e 13 da pág. 19 do manual.

Pretende-se que os alunos entreguem estes trabalhos de casa numa folha, para correcção.

Tarefas Adicionais

Exercício 8 da página 27 do manual.

Trabalho facultativo. Para entregar quem quiser.

Materiais

Manual escolar, caneta, quadro, Geogebra.

Plano de aula 5

Comentários

Tópico: Resolução de problemas (envolvendo conjuntos de pontos do espaço).
Objetivo: Aplicar noções de geometria analítica no espaço à resolução de problemas.
Tarefa 1: exploração de um prisma

Turma do 10º ano

De um prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$ de altura 8, conhecem-se três vértices da base: $A(2,-1,0)$, $B(2,3,0)$ e $C(-2,3,0)$.

1-Identificar, no referencial ortonormado do espaço, os pontos $A, B\ e\ C$, determinar as coordenadas dos restantes vértices e nomeá-los.

2-Definir analiticamente:

2.7 O plano que contém a face $[EFGH]$ do prisma;

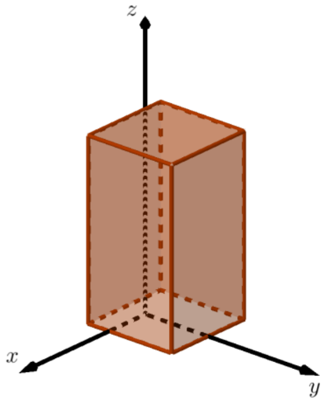
2.8 A aresta $[FB]$;

2.9 O plano mediador da aresta $[FB]$;

2.10 O plano mediador do segmento de reta $[AG]$;

2.11 A semi-reta $\dot{F}G$;

2.12 O conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto A é igual a 4.



3-Efetuar a representação do prisma e verificar os resultados que obteve em 2 no GeoGebra.

Após a leitura do enunciado da tarefa, questionar os alunos sobre o significado de prisma quadrangular regular.

Qual a influência do GeoGebra na representação que os alunos fazem dos sólidos

Tarefa 2: exploração da equação cartesiana de uma superfície esférica

Considere a superfície esférica definida pela seguinte equação:

$$x^2 + 2x + y^2 - 8y + z^2 - 4z - 3 = 0$$

1-Indique o centro, C, e o raio da superfície esférica.

2-Determine a intersecção da superfície esférica com cada um dos seguintes conjuntos de pontos:

a) Eixo Oy;
b) Plano de equação $x = -1$;
c) Plano de equação $z = 4$;

3-Apresente a equação de um plano paralelo ao plano xOy, tangente à superfície esférica.

4-Verifique que o ponto $A(-3,0,0)$ pertence à superfície esférica.

5-Determine a inequação reduzida da esfera de centro A e raio $\overline{AC}$.

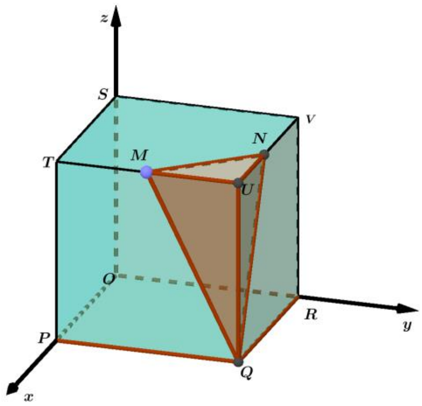
Consolidar conhecimentos sobre a superfície esférica e sobre a esfera

Visualisar a intersecção entre a esfera e um plano no espaço.

Desafio

Considere um cubo $[OPQRSTUV]$. no referencial ortonormado do espaço, do qual se conhecem os seguintes elementos:

- o cubo tem aresta 5 unidades;
- o ponto $O(0,0,0)$ é um vértice do cubo;
- os vértices P, R e S do cubo pertencem aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz, respectivamente;
- $[MNUQ]$ é uma pirâmide.



1- Represente o cubo num referencial ortonormado;
2- Representa a pirâmide que se obtém da intersecção do plano MNQ de equação 10x+15y+6z=125 , com o cubo;
3- Determine as coordenadas dos pontos M e N.
4- Determine o valor exato do volume da pirâmide $[MNUQ]$.
5- Determine a equação reduzida da superfície esférica que contém os oito vértices do cubo $[OPQRSTUV]$.

Verificar a utilidade do GeoGebra na resolução de problemas de geometria no espaço.

Estimular os alunos na aplicação do GeoGebra, na resolução de problemas.

Trabalho de Casa

Resolve os exercícios 18, 20 e 23 da pág. 23, 27 da pág. 24 e 28 da pág. 25 do manual.

Tarefas Adicionais

Exercício 8 da página 27 do manual.

Materiais

Manual escolar, caneta, quadro, Geogebra.

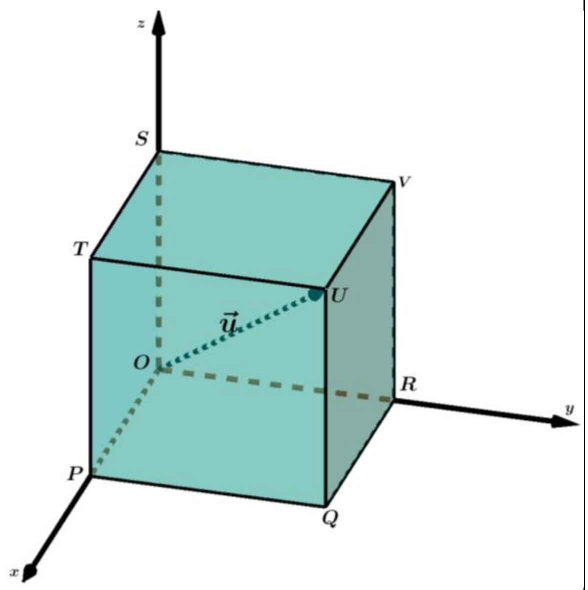
Plano de aula 6

Tópico: Introdução aos vetores / retas do espaço.

Objetivo: Representar e operar vetores e coordenadas de vectores do espaço.

Atividade Motivacional

Relativamente a um cubo de aresta 2, representado na figura, apresenta, utilizando as letras dos seus vértices:



1- Dois segmentos orientados equipolentes.
2- Três segmentos orientados não equipolentes.
3- Três segmentos orientados equipolentes ao segmento de reta $[Q, R]$.
4- Dois vectores simétricos.
5- Dois vectores cuja soma seja $\overrightarrow{PV}$. Verificar, utilizando as suas coordenadas.

Exploração

1- Rever noções do cálculo vectorial do plano, tais como: vetor, segmentos orientados equipolentes, vectores simétricos, vetores colineares e norma de um vetor.
2- Resolver as cinco primeiras questões da actividade motivacional.
3- Indicar a norma dos diferentes vetores que se podem formar com os vértices do cubo.
4- Determinar os vectores, formados pelos vértices do cubo, cuja soma seja $\overrightarrow{PV}$.
5- Solicitar um aluno que explique à turma através do GeoGebra a soma dos vectores $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{VT}$.
6- Determinar um vetor que desloque o cubo para o sétimo octante de modo que três arestas coincidam com os eixos coordenados. Verificar no GeoGebra.

Prática

Comentários

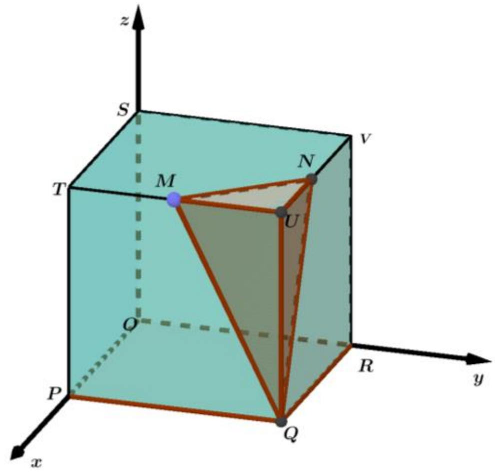
Turma do 10º ano

Com esta actividade pretende-se prolongar o estudo do cálculo vectorial no plano ao espaço.

Os alunos identificam vectores no espaço, operam com vectores definidos por coordenadas do espaço, aplicam a noção de norma de um vetor do espaço e identifica-vetores simétricos e colineares no espaço.

A regra da adição de vectores no plano é aplicada com vectores no espaço.

Considere um cubo $[OPQRSTUV]$ no referencial ortonormado do espaço, do qual se conhecem os seguintes elementos:



- o cubo tem aresta 5 unidades;
- o ponto $O(0,0,0)$ é um vértice do cubo;
- os vértices P, R e S do cubo pertencem aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz, respectivamente;
- $[MNUQ]$ é uma pirâmide.

Verificar que a resolução analítica e a resolução no GeoGebra se complementam.

A- Utilize o GeoGebra para:

1- Representar o cubo num referencial ortonormado.

2- Representar a pirâmide que se obtém da intersecção do plano MNQ de equação $10x + 15y + 6z = 125$, com o cubo;

3- Provar que $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MQ}$.

B- Comprovar com a resolução analítica os passos em A- 2 e em A- 3.

Desafio

Seja $Oxyz$ um referencial ortonormado no espaço.

O ponto A coincide com a origem dos eixos coordenados, o vetor $\overrightarrow{AV}$ é uma aresta lateral de uma pirâmide quadrangular reta de vértice V. A base da pirâmide é constituída pelo polígono $[ABCD]$, sendo $[AB]$ uma aresta coincidente com o eixo Ox.

Um prisma quadrangular regular $[EFGHMNOP]$ está inscrito na pirâmide. A base inferior $[MNOP]$ está contida na base da pirâmide; a base superior $[EFGH]$ resulta da intersecção de um plano paralelo a xOy, que contém o ponto médio do segmento $[AV]$.

1- Desenhe a pirâmide no GeoGebra sabendo que as coordenadas de V são $(2,2,6)$.

2- Represente o prisma no GeoGebra, sabendo que o vértice E é o de menor abcissa e de menor ordenada (os vértices FGH seguem a orientação de $ABCD$).

3- Mostre, analiticamente, que os vectores $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{FG}$ são colineares.

4- Determine as coordenadas:

4.1. Dos vértices da base $[EFGH]$.

4.2. Dos vetores $\overrightarrow{NH}$ e $\overrightarrow{OE}$.

4.3. Mostre que $\overrightarrow{NH} + \overrightarrow{HP} - \overrightarrow{PN} = \vec{0}$

Trabalho de Casa

Resolver as tarefas 2 da pág. 30, 4 da pág. 31, 8 e 9 da pág. 36 do manual.

Tarefas Adicionais

Tarefas 7 da pág. 34 e 10 da pág. 36 10 do manual.

Materiais

Manual escolar, caneta, quadro, Geogebra.

Plano de aula 7

Tópico: Ponto médio de um segmento e equações de retas no espaço.

Objetivo: Determinar o ponto médio de um segmento de reta no espaço. Definir equações de retas no espaço.

Atividade Motivacional

No referencial ortonormado do espaço $Oxyz$, conforme a figura, está representado um paralelepípedo cujas faces são paralelas aos planos coordenados.

Sabendo que $F(1,0,0)$ e $D(6,4,2)$, determinar:

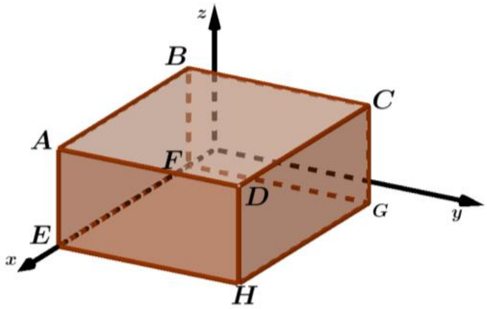
1 – As coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[E, C]$;

2 – As coordenadas do vetor diretor da reta definida por HC.

3 - A equação vectorial da reta HB;

4 - As equações paramétricas da reta HB;

5 - Mostrar que $\overrightarrow{EC}$ = $\overrightarrow{EB}$ + $\overrightarrow{EH}$;



Verificar as soluções no GeoGebra.

Exploração

1 – Questionar os alunos relativamente às noções de ponto médio de um segmento de reta no plano e de equação vectorial de uma reta no plano. Perguntar, em seguida, como serão as correspondentes expressões no espaço.

2– Resolver as cinco primeiras questões da atividade motivacional.

3 – Construir o paralelipípedo no GeoGebra e verificar as soluções das questões 1 a 5.

Prática

Considerar, num referencial ortonormado do espaço, $Oxyz$, a esfera de diâmetro $[AB]$, em que $A(3,-1,2)\ e\ B(1,7,0)$.

5. Escrever uma condição que defina a esfera;
6. Calcular o perímetro da intersecção da esfera com o plano yOz;
7. Escrever o sistema de equações paramétricas da reta AB;
8. Determinar as coordenadas do ponto da reta AB de ordenada 3.

Desafio

Na figura seguinte está representado, num referencial ortonormado do espaço, $Oxyz$, um co-ne de revolução de base contida no plano xOz.

Sabe-se que:

- O eixo do cone é a reta definida pelo sistema de equações cartesianas $x = 3$ ∧ z=3;
- Uma geratriz do cone é a reta definida pela equação vectorial (x,y,z)=(3,3,4)+k(0,6,-2), k ∈ R .

Determinar o volume do cone no GeoGebra.

Verificar analiticamente o volume determinado.

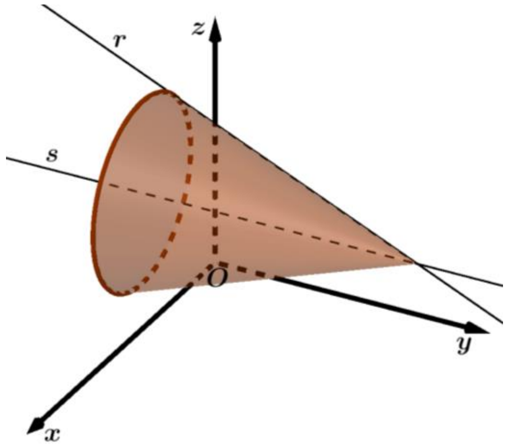
Comentários

Turma do 10° ano

Estender ao espaço as noções de:
- ponto médio de um segmento de reta no plano;
- vetor director de uma reta no plano;
- equação vectorial de uma reta no plano;
- equações paramétricas de uma reta no plano.

A verificação dos resultados obtidos no GeoGebra permite aos alunos obter feedback da sua aprendizagem

Comprovar analiticamente resultados obtidos no GeoGebra tem por finalidade validar esses resultados com os conhecimentos apreendidos.



Trabalho de Casa

Tarefas 12 e 13 da pág. 37, 14 da página 38, 15 e 16 da página 39..

Tarefas Adicionais

Tarefas 41 e 42 da página 47 do manual.

Materiais

Manual escolar, caneta, quadro, Geogebra.

Plano de aula 8

Tópico: Resolução de problemas (envolvendo cálculo vectorial do espaço).

Objetivo: Aplicar o cálculo vetorial no espaço à resolução de problemas.

Atividade Motivacional

Num referencial ortonormado do espaço $Oxyz$ é dado o plano π, definido pelos pontos $A(3,2,1), B(6,4,-1)\ e\ C(3,-2,3)$. Determine,

A-Utilizando o GeoGebra:

1- A equação cartesiana do plano π;
2- Os pontos de intersecção do plano π com os eixos coordenados;
3- As equações vectoriais das retas de interseção do plano π com os planos coordenados.

B-Analíticamente:

4- As equações cartesianas das retas de interseção do plano π com os planos coordenados;
5- As equações paramétricas das retas de interseção do plano π com os planos coordenados (considera as equações vectoriais das retas de intersecção de π com os planos coordenados).

Exploração

1 – Questionar os alunos sobre o que se obtém da interseção de duas retas. E de uma reta com um plano ? E o que se obtém da interseção de dois planos ?

2 – Rever com os alunos as noções de:

- vetor no espaço;
- vetor director de uma reta no espaço;
- equação vectorial de uma reta no espaço;
- equações paramétricas de uma reta no espaço.

Comentários

Turma do 10° ano

Os alunos constatam que as soluções de um problema podem ser encontradas pelo uso do GeoGebra, ou analiticamente.

Estas questões têm por finalidade rever noções já estudadas: posição relativa de retas e de retas e planos, vetor director de uma reta e equação vectorial de uma reta no espaço.

Pretende-se que os alunos saibam o que é um vetor director de uma reta e a forma

3– Resolver as questões da actividade motivacional.

de definir a equação vectorial de uma reta.

Prática

O Sr. Manuel dispõe para a rega dos seus campos, um reservatório com a forma de uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$ de base $[ABCD]$. Ajude o Sr. Manuel a determinar o volume do reservatório, tendo em consideração o seguinte:

- A pirâmide está projetada num referencial ortonormado do espaço $Oxyz$;
- A tem coordenadas (1,-1,1);
- A e B são extremos de uma aresta da base da pirâmide;
- C é o vértice oposto de A;
- $\overrightarrow{AV} = (\frac{5}{2}, 4, \frac{19}{2})$;
- $\overrightarrow{BV} = (-\frac{5}{2}, 4, \frac{19}{2})$;
- $\overrightarrow{CB} = (0, 4, -3)$.

1-Calcule o volume da pirâmide no GeoGebra.

2-Verifique analiticamente o volume da pirâmide.

Pretende-se que os alunos trabalhem com a equação vectorial da reta, determinem pontos, calculem o volume da pirâmide e recordem a noção de pirâmide quadrangular regular.
A resolução no GeoGebra pode ser verificada analiticamente.

Desafio

Um cubo encontra-se definido num referencial ortonormado $Oxyz$, através dos vértices $[ABCD]$, pertencentes a uma face inferior paralela ao plano xOy e através da face superior, $[EFGH]$. Sendo dados os pontos $A(3,0,-2), C(-4,1,-2)$ e $H(-1,-3,3)$, determine:

1-As coordenadas dos restantes vértices do cubo;

2-A equação vectorial da reta definida pelos vértices B e H;

3-A representação do cubo no GeoGebra;

4-Verifique a alínea 2, no GeoGebra.

Trabalho de Casa

Tarefas 12 e 13 da pág. 37, 14 da página 38, 15 e 16 da página 39..

Tarefas Adicionais

Tarefas 9 e 10 da página 52 e 12 da página 53 do manual.

Materiais

Manual escolar, caneta, quadro, Geogebra.