Universidade do Minho
Instituto de Educação

Marília Emanuela Oliveira Ferreira

O uso pedagógico de histórias envolvendo raciocínio matemático no 4.º e no 5.º anos de escolaridade

outubro de 2017

UMinho | 2017 Marília Emanuela Oliveira Ferreira **O uso pedagógico de histórias envolvendo raciocínio matemático no 4.º e no 5.º anos de escolaridade**

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Marília Emanuela Oliveira Ferreira

O uso pedagógico de histórias envolvendo raciocínio matemático no 4.º e no 5.º anos de escolaridade

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e Matemática e Ciências Naturais do 2.º Ciclo do Ensino Básico

Trabalho realizado sob a orientação do
Doutor Pedro Palhares

outubro de 2017

DECLARAÇÃO

Nome: Marília Emanuela Oliveira Ferreira

Endereço Eletrónico: marilia9424@hotmail.com

Contacto telefónico: 914770383

Número do Cartão do Cidadão: 14656472

Título do Relatório de Estágio: O uso pedagógico de histórias envolvendo raciocínio matemático no 4.º e no 5.º anos de escolaridade

Orientador: Doutor Pedro Palhares

Ano de conclusão: 2017

Designação do Mestrado: Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e Matemática e Ciências Naturais do 2.º Ciclo do Ensino Básico

Universidade do Minho, _____/_____/_________

Assinatura: ____

AGRADECIMENTOS

Em primeira estância, queria agradecer aos meus alunos que participaram diretamente neste estudo, pois sem eles este Projeto não era concretizável, e o brilho nos meus olhos não era vislumbrado nos momentos em que as aprendizagens eram constantes. Gostava também de remeter uma consideração às professoras cooperantes, Maria Sameiro Bastos e Isabel Candeias, que me acompanharam e me ajudaram neste processo de iniciação à prática profissional. Um agradecimento especial à professora Isabel Candeias, que vai muito para além da colaboração neste Projeto, agradeço, pois, todos os conselhos que nortearam as minhas escolhas, mas essencialmente obrigada pela amizade, pela pessoa que é.

Dirijo um enorme obrigada ao professor orientador, Doutor Pedro Palhares, pelas sempre sábias palavras inerentes ao vasto conhecimento que possui, e com o qual tive o privilégio de contactar. Agradeço também a atenção e paciência que sempre teve para comigo.

Agora, dirigindo-me de um modo mais próximo e afetuoso, agradeço aos meus pais e à minha irmã Eva, por saborearem sempre de perto a minha dedicação, pelo orgulho verdadeiro sempre demonstrado, pelo incentivo que, como ninguém, sabem transmitir, ajudando-me a suportar as adversidades surgidas ao longo do caminho que foi sendo traçado e experimentado. Ao meu namorado Ricardo, por me preencher como pessoa, de um jeito único, por me ter acompanhado em cada compasso deste meu longo percurso com olhos atentos, por me apoiar e ouvir nos momentos em que caminhos mais sinuosos e difíceis se foram desenhando, sempre com um grande otimisto em relação a este meu grande sonho, tão grande quanto o seu âmago.

Quero deixar também um agradecimento ao professor Leandro Almeida, por ter estado sempre presente no meu percurso académico, acreditando perenemente no meu potencial, encorajando-me a alcançar novos horizontes, ensinando-me que alcança-los é sinónimo de não desistir, de não baixar os braços aos desafios e às dificuldades. Que esta amizade permaneça.

Por último, um obrigada aos meus familiares e amigos que estiveram ao meu lado desde sempre, que são essenciais na minha vida e, por assim o serem, sabem quem são e o que significam para mim. Ainda um agradecimento a todos os professores cujos ecos fervorosos fizeram de mim a aluna que sou hoje, aluna no sentido lato da palavra, aluna da vida, também, e que, desta forma, perfumaram ainda mais o meu sonho, contribuindo para a construção da professora que vejo refletida no futuro.

RESUMO

O presente Relatório possuiu na sua base a conceção, o desenvolvimento, e a avaliação de um Projeto de Intervenção Pedagógica, transversal a duas turmas - 4.º ano de escolaridade e 5.º ano de escolaridade -, de ciclos de ensino diferentes - 1.º Ciclo do Ensino Básico e 2.º Ciclo do Ensino Básico - , em que decorreu a prática de ensino supervisionada.

O Projeto, cujo tema é o desenvolvimento do raciocínio matemático, através da exploração de histórias, pretendia não só compreender como é que a exploração de histórias poderia contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático, como também se era possível construir uma sequência didática para o efeito. Neste âmbito, procurou-se dar resposta a uma questão de investigação geral: "É possível desenvolver o raciocínio matemático através da exploração de histórias envolvendo o raciocínio matemático, e construindo uma sequência didática para o efeito?" Assim sendo, os objetivos contemplados que orientaram a realização do Projeto foram os seguintes: a) Desenvolver o raciocínio dos alunos através da exploração de histórias envolvendo o raciocínio matemático; b) Promover a interdisciplinaridade entre a Matemática e o Português; e c) Construir uma sequência didática, para cada ciclo, adequada e bem fundamentada, que possibilite aos alunos desenvolverem o pensamento matemático, através do uso de histórias envolvendo o raciocínio matemático.

Quanto à metodologia de investigação adotada, trata-se de um estudo com dois casos, analisados qualitativamente, com uma abordagem fundamentalmente interpretativa. Para proceder à análise foi realizada uma observação participante e fez-se uma análise documental.

Em suma, foi possível concluir que, de um modo geral, as histórias exploradas envolvendo raciocínio matemático usadas no Projeto, constituíram-se instrumentos didáticos potenciais no auxílio da compreensão de conceitos matemáticos, na resolução de problemas, fomentando experiências de aprendizagem criativas e significativas. A par disto, com o uso das histórias usadas no Projeto, pretendeu-se promover estratégias de ensino que visassem a formulação e a resolução de problemas, permitindo a integração da matemática com a língua materna e o desenvolvimento significativo de competências de ambas as áreas. Os resultados evidenciaram uma maior motivação e predisposição para a resolução de problemas, envolvendo o raciocínio matemático, e uma consolidação gradual dos conceitos matemáticos, a par de uma comunicação matemática mais ativa.

ABSTRACT

The present Report was based on the conception, the development and the evaluation of an Educational Intervention Project, common to two classes, 4th grade and 5th grade -, of different levels - 1st Cycle and 2nd Cycle of Basic Education -, where which the supervised teaching practice occurred.

The Project, which subject is the development of the mathematical reasoning, through the exploration of stories, intended to not only understand how the exploration of stories contributes to the development of mathematical reasoning, but also if it was possible to create a didatic sequence for this purpose. In this context, one of the objectives was to give an answer to a general question of investigation: "Is it possible to develop the mathematical reasoning through the exploration of stories involving mathematical reasoning, and creating a didatic sequence for this purpose?" Therefore, the covered objectives that guide the Project´s realisation were the following ones: a) Develop student´s reasoning through the exploration of stories involving mathematical reasoning; b) To promote the interdisciplinarity between Mathematics and Portuguese language; and c) Create a didatic sequence, for each cycle, appropriate and well-founded, that enables students to develop mathematical reasoning, through the use of stories.

About the methodology adopted in this investigation, it is a study with two cases, qualitative analyzed, with an interpretative fundamentally approach. To proceed to the analysis, it was made a participant observation and a documental analysis.

It was possible to conclude that, in general, the explored stories involving mathematical reasoning used in the Project, were potencial didatic instruments in aid of the understanding of mathematical concepts, in the resolution of problems, fomenting creative and significant learning experiences. With the use of stories used in the project, we intended to promote teaching strategies to seek the formulation and the resolution of problems, allowing the integration of the mathematics with the native language and a significant development of competences of both areas.

The results showed a greater motivation and predisposition for solving problems, involving mathematical reasoning, and a gradual consolidation of mathematical concepts, along with a more active mathematical communication.

Índice

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE QUADROS

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo realiza-se a apresentação introdutória do Relatório de Estágio, tendo este sido desenvolvido no âmbito da Unidade Curricular *Prática de Ensino Supervisionada*, contemplada no 2.º ano do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e Matemática e Ciências Naturais do 2.º Ciclo do Ensino Básico, da Universidade do Minho. Esta UC compreendeu várias etapas, que serviram de alicerce para a elaboração deste Relatório: a conceção, o desenvolvimento, e a avaliação de um Projeto de Intervenção Pedagógica, transversal às duas turmas – 4.º ano de escolaridade e 5.º ano de escolaridade -, de ciclos de ensino distintos - 1.º Ciclo do Ensino Básico e 2.º Ciclo do Ensino Básico -, em que decorreu a prática de ensino supervisionada.

Na primeira secção deste capítulo, *Relevância do tema do Projeto de Intervenção Pedagógica,* concretiza-se a problematização da relevância do tema do Projeto, ao uso pedagógico de histórias envolvendo raciocínio matemático. Na segunda secção, *Objetivos* e *Questões de Investigação do Projeto de Intervenção Pedagógica,* enunciam-se os objetivos e as questões de investigação que norteiam o Projeto. Por último, na terceira secção, *Estrutura do Relatório de Estágio,* define-se a estrutura organizativa deste Relatório.

1.1. Relevância do tema do Projeto de Intervenção Pedagógica

Nos documentos curriculares oficiais, nomeadamente no Programa de Matemática do Ensino Básico (MEC,2013) e nas Metas curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2012), a menção ao raciocínio não é contemplada de forma muito explícita, estando implícita em todos os descritores, sendo o raciocínio considerado como uma capacidade estrutural indispensável ao cumprimento dos objetivos.

Nas Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2012), a abordagem mais específica ao uso do raciocínio, apenas é mencionada: no 5.º ano de escolaridade, "Utilizar raciocínio dedutivo para reconhecer propriedades geométricas" (p.33) e no 6.º ano de escolaridade em

"Problemas envolvendo as propriedades das isometrias e utilizando raciocínio dedutivo", sendo referido de forma mais concreta no 3.º ciclo do Ensino Básico.

Em consonância com o que foi referido anteriormente, o desenvolvimento do raciocínio no 4.º e 5.º anos de escolaridade, pressuposto no tema do Projeto, constitui-se importante pelo facto de estar sempre contemplado nos dois anos de escolaridade. Não obstante o que foi dito, a apreensão de conceitos matemáticos subjacentes ao tema, possui um papel fundamental na estruturação do pensamento, funcionando como uma gramática basilar do raciocínio hipotético-dedutivo.

No Programa de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013), é referido que "O gosto pela Matemática (...) constitui um propósito que pode e deve ser alcançado através do progresso da compreensão matemática e da resolução de problemas. Neste sentido, é decisivo para a educação futura dos alunos que se cultivem de forma progressiva, desde o 1.º ciclo, algumas características próprias da Matemática, como o rigor das definições e do raciocínio" (p.2). Aqui, o uso de histórias envolvendo o raciocínio matemático, ou seja, o uso da literatura com um fim, reveste-se de uma particular relevância, no que concerne à promoção do gosto pela Matemática.

Desta forma, uma vez mais, a escolha do tema do Projeto assume particular pertinência pelo facto de asseverar o desenvolvimento do raciocínio, onde a exploração de conceitos matemáticos e a resolução de problemas terão lugar, através do uso pedagógico de obras literárias.

Em conformidade com todos estes fatores considerados, a definição do tema do Projeto resultou de um estudo prévio relativamente ao plano de estudos da turma do 4.º ano de escolaridade. Para que houvesse uma articulação entre ambos os contextos de Estágio, houve também necessidade de uma deslocação à escola do 2.º Ciclo, com o objetivo de recolher também este tipo de informações junto da professora cooperante. Este facto refletiu-se também na escolha de uma obra literária diferente para o 5.º ano de escolaridade, uma obra mais complexa e desafiante para este ano de escolaridade.

Assim sendo, foi possível estruturar um Projeto articulado, adaptado aos contextos da prática.

Por último, a relevância do Projeto advém também das dificuldades demonstradas pelos alunos portugueses do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, na resposta a perguntas que implicavam o raciocínio matemático. Esta afirmação sustenta-se, no caso do 1.º Ciclo do Ensino Básico, na análise do Relatório Nacional referente ao desempenho dos alunos na Prova de Aferição de Matemática deste Ciclo no ano de 2012 – 4.º ano de escolaridade (GAVE, 2012) e, no que se refere ao 2.º Ciclo do Ensino Básico, à análise da Prova Final deste Ciclo entre os anos de 2012 e 2014 (GAVE, 2015).

No que concerne ao Relatório Nacional do 1.º Ciclo, um dos itens em que o desempenho dos alunos foi pouco satisfatório, considerando aos índices de dificuldade, foi o item envolvendo o raciocínio matemático no tema Números e Operações. Já no tema de Geometria, os alunos tiveram um melhor desempenho nos itens de raciocínio matemático, tendo entre si iguais níveis de desempenho, cerca de 63%. Concluindo, os alunos ainda evidenciam uma razoável capacidade de raciocínio matemático, embora continuem a revelar algumas dificuldades na comunicação escrita das suas ideias e raciocínios, e na resolução de problemas (GAVE, 2012).

No que se refere ao Relatório Nacional do 2.º Ciclo, pela análise dos resultados, os alunos continuam a revelar dificuldades na organização do raciocínio matemático e na sua exposição por escrito (GAVE, 2015).

Assim, em ambos os relatórios, é destacada a importância de proporcionar aos alunos, experiências matemáticas que envolvam a resolução de problemas, a partilha e a discussão e análise de diferentes estratégias de resolução, bem como a utilização de contextos e de estratégias diversificadas.

Também segundo o TIMSS (2015), a análise dos resultados em matemática, ao nível da realização em domínios cognitivos e de conteúdo mostra que, no 4.º ano, a área mais problemática é o raciocínio. Sendo a performance geral de 541, o raciocínio obteve 532, encontrando-se dez pontos abaixo da performance geral (tendo em conta os arredondamentos). Assim, a área onde será importante investir e incidir será a área do raciocínio, que se encontra muito abaixo do geral, e não outras áreas analisadas (como no Conhecimento, por exemplo, que se encontra 6 pontos acima da performance geral).

Neste contexto, a pertinência do Projeto é fundamentada pela grande relevância que o raciocínio matemático assume nos dois níveis de ensino referidos; pela flexível adaptação às planificações anuais de ambas as turmas; e pelas dificuldades dos alunos portugueses na resposta a questões que envolvem o raciocínio matemático em provas finais. Para além destas razões, fomentar o gosto pela matemática, através da interdisciplinaridade com o Português, foi também decisivo para a definição do tema.

1.2. Objetivos e Questões de Investigação do Projeto de Intervenção Pedagógica

O Projeto de Intervenção Pedagógica apresenta como proposta, o desenvolvimento de uma sequência de atividades pedagógicas direcionadas para o desenvolvimento do raciocínio, onde foram exploradas histórias envolvendo o raciocínio matemático. No que diz respeito às histórias usadas, no 1.º Ciclo só se recorreu a um dos capítulos da obra "Quando as estrelas se transformam em números", de Leonel Vieira. A história apenas foi usada inicialmente, como um propulsor para a exploração de conceitos matemáticos, onde se destaca o raciocínio algorítmico. Já no 2.º Ciclo, apesar de a obra "As aventuras de Alice no País das Maravilhas" de Lewis Carroll não ter sido estudada, foi aconselhado aos alunos que a lessem fora do período de aulas e, para além disso, puderam visualizar filmes que abordavam a obra. Neste caso, o contexto da obra foi usado em todas as intervenções, pois este estava presente em todos os problemas e tarefas propostos. Assim sendo, apesar das obras serem usadas de forma diferente, ambas convergiram para um único objetivo, o desenvolvimento do raciocínio.

No decorrer de todo este processo, foram estudadas as aprendizagens concretizadas pelos alunos neste contexto. Assim, procurou-se responder à seguinte questão de investigação: "É possível desenvolver o raciocínio matemático através da exploração de histórias envolvendo o raciocínio matemático, e construindo uma sequência didática para o efeito?"

Deste modo, os objetivos contemplados que orientaram a realização do Projeto foram os seguintes:

a) Desenvolver o raciocínio dos alunos através da exploração de histórias envolvendo o raciocínio matemático;
b) Promover a interdisciplinaridade entre a Matemática e o Português;
c) Construir uma sequência didática, para cada ciclo, adequada e bem fundamentada, que possibilite aos alunos desenvolverem o pensamento matemático, através do uso de histórias envolvendo o raciocínio matemático.

1.3. Estrutura do Relatório de Estágio

Este Relatório de Estágio, no que se refere à estrutura organizativa, encontra-se dividido em cinco capítulos principais.

O primeiro capítulo, *Introdução*, refere-se ao capítulo em exposição.

No segundo capítulo, *Enquadramento Teórico*, pretende-se organizar um corpus teórico adaptado às questões de investigação que norteiam o Projeto de Intervenção Pedagógica.

Mais concretamente na primeira secção deste capítulo, *Interdisciplinaridade: uso de histórias e conexões com outras áreas*, começa-se por abordar a relação existente entre o uso de histórias e outras áreas, como é o caso da matemática, abordando-se as vantagens do uso da literatura e como podem as histórias ser exploradas em sala de aula, ou seja, as potencialidades educativas do uso pedagógico de histórias, segundo vários autores. Na segunda secção, *Resolução de problemas*, exploram-se algumas ideias basilares inerentes à importância que assumem os problemas no domínio da Matemática, mais concretamente no desenvolvimento do raciocínio, recorrendo à literatura neste domínio. Procura-se também elencar algumas estratégias e teorias, neste âmbito. Na terceira secção, *Aprendizagem Cooperativa e Comunicação Matemática*, considera-se a metodologia de trabalho cooperativo, estabelecendo-se a ponte entre esta e a comunicação matemática, relacionando-se este tópico com a resolução de problemas. Neste ponto, também se recorre às teorias de vários autores, sendo visíveis as conexões entre a comunicação matemática e o trabalho de grupo.

No terceiro capítulo, *Metodologia*, dá-se a conhecer a metodologia usada no desenvolvimento do Projeto de Intervenção Pedagógica, característica da sua dimensão investigativa.

Na primeira secção deste capítulo, *Opções Metodológicas*, apresentam-se os objetivos e as questões de investigação que norteiam o Projeto e é referida a natureza da investigação. Na segunda secção, *Participantes*, caracteriza-se a turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico e a turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico, nas quais decorreu a prática de ensino supervisionada. Na terceira secção, *Fases do Projeto de Intervenção Pedagógica*, referem-se as diferentes fases de desenvolvimento do Projeto. Na quarta secção, *Recolha de dados* são descritos os instrumentos de recolha de dados que foram aplicados. Por fim, na quinta secção, *Análise de dados*, mencionam-se os procedimentos de análise de dados usados por forma a dar resposta às questões de investigação.

No quarto capítulo, *Análise e Discussão de Dados*, a análise e discussão de dados são apresentadas, à luz das questões de investigação que norteiam o Projeto de Intervenção Pedagógica e do enquadramento teórico que o suporta.

Na primeira secção deste capítulo, *Desenvolvimento e Avaliação da Intervenção Pedagógica no 1.º Ciclo do Ensino Básico*, procede-se a uma análise detalhada e reflexiva da intervenção pedagógica desenvolvida na turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Na segunda secção, *Desenvolvimento e Avaliação da Intervenção Pedagógica no 2.º Ciclo do Ensino Básico*, mantem-se o procedimento que anteriormente é mencionado, mas agora na turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico.

No quinto e último capítulo, *Conclusão*, apresentam-se as conclusões principais que resultaram e que advieram do Projeto de Intervenção Pedagógica, tendo como guia os objetivos do Projeto, mais concretamente as questões de investigação que nortearam o Projeto. Em consonância, faz-se referência a algumas limitações inerentes ao Projeto, relevantes na perspetivação das conclusões, sugerem-se recomendações de índole didática e, também, para investigações futuras, e tecem-se comentários reflexivos no que diz respeito à importância do Projeto, mais especificamente no que se refere ao desenvolvimento profissional.

Por fim, nas *Referências Bibliográficas*, apresenta-se uma lista do referencial teórico consultado, referido ou citado ao longo do Relatório. Nos *Anexos*, integram-se essencialmente os elementos de apoio às aulas que, embora não sejam imprescindíveis à compreensão do conteúdo do Relatório, completam a sua leitura.

CAPÍTULO 2 – ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo pretende-se dar a conhecer de forma organizada a revisão da literatura, o *corpus* teórico, sendo que este vai ao encontro das questões de investigação que norteiam o Projeto de Intervenção Pedagógica.

Na primeira secção deste capítulo, *Interdisciplinaridade*, aborda-se a conexão entre o uso de histórias e outras áreas, como é o caso da matemática, tecendo-se considerações sobre as vantagens do uso da literatura e sobre como podem as histórias ser exploradas em sala de aula, ou seja, as potencialidades educativas do uso pedagógico de histórias. Na segunda secção, *Resolução de problemas*, começa-se pela consideração da importância que adquirem os problemas no domínio da Matemática, mais concretamente no desenvolvimento do raciocínio. Na terceira secção, *Aprendizagem Cooperativa e Comunicação Matemática*, é abordada a metodologia de trabalho cooperativo, estabelecendo-se a ponte entre esta e a comunicação matemática, relacionando-se este tópico com a resolução de problemas.

2.1. Interdisciplinaridade: uso de histórias e conexões com outras áreas

O pensamento comum é o da literatura ser útil apenas para o desenvolvimento de habilidades linguísticas, ou para encontrar informações sobre um tópico na história, ciência ou geografia, por exemplo. A Matemática e a Literatura são duas áreas que tradicionalmente têm estado, em termos escolares, pouco interligadas. Talvez por essa razão, exista uma certa dicotomia entre a Matemática e o Português, as duas principais áreas curriculares do ensino básico, o que conduz a que alguns alunos assegurem o gosto apenas por uma delas. Mas existe vantagem em instituir e aprofundar a ligação entre as duas disciplinas escolares, sobretudo durante o ensino básico (Menezes, 2001). Aliás é desejável o estabelecer de conexões entre a literatura infantil e a área do raciocínio matemático, considerando o envolvimento com os conteúdos e capacidades matemáticas, havendo uma panóplia de recomendações a esse respeito, logo desde os primeiros anos de escolaridade (Azevedo, 2006).

Segundo Braddon, Hall e Taylor (1993), os alunos que gostam de literatura são os mesmos que na maior parte das vezes não gostam de resolver exercícios matemáticos de forma exaustiva, ou que possuem dificuldades em problemas de uso de operações. Integrando a matemática e a literatura, os problemas de uso de operações podem socorrer-se de histórias conhecidas para possibilitar que os alunos interiorizem as operações matemáticas em detrimento de lutarem pela sua resolução, com vocabulário que lhes é estranho. Além disso, a articulação da matemática com literatura de qualidade promove a ideia de que a matemática se descobre em todas as situações, inspirando os alunos a investigar e a explorar conceitos.

Estudos que apoiam a integração da Literatura na matemática indicam que existe uma forte relação entre a aprendizagem de conteúdos matemáticos através da escuta e da interação com histórias que envolvem a matemática: "Through qualitative analyses, the study reveals a significant shift in their beliefs, interest, and identification of benefits of teaching mathematics through literature and making connections across the curriculum. Teacher education programs can benefit from replications of this study." (Wilburne & Napoli, 2008).

Professores de Matemática que integram a Literatura na Matemática reconhecem que a compreensão matemática envolve a leitura e a escrita. Por outro lado, o raciocínio matemático e a resolução de problemas podem ser explorados recorrendo a materiais de leitura. Essas conexões da Matemática com outras disciplinas em salas de aula dão aos alunos um maior domínio na matemática (Ruiz, Thornton & Cuero, 2010).

Assim, a implementação de um método de ensino interdisciplinar e integrador, na sala de aula, proporciona o desenvolvimento de competências de numeracia e de literacia, nomeadamente o desenvolvimento do raciocínio matemático, de estratégias de construção de histórias e a utilização de estratégias de resolução e formulação de problemas (Sardinha, 2011).

Piaget (1979) hierarquizou os níveis de colaboração e integração das disciplinas, distinguindo, entre vários níveis, a interdisciplinaridade, referindo-se a esta como o segundo nível de associação entre disciplinas, no qual a cooperação entre diversas disciplinas provoca intercâmbios reais, existindo efetivamente uma reciprocidade de intercâmbios e um posterior enriquecimento mútuo. Antes da interdisciplinaridade, existe um nível inferior de integração para solucionar um problema, e aqui podemos falar de multidisciplinaridade, sendo que se procura informação e auxílio em diversas disciplinas, sem que a interação contribua para alterá-las ou enriquecê-las. Normalmente, esta é a fase inicial na constituição de grupos de trabalho interdisciplinar, no entanto não é sinónimo de que possa existir necessidade de passar a níveis de maior cooperação. A etapa superior de integração, que se situa depois da interdisciplinaridade, é denominada de transdisciplinaridade. Neste caso, sucede-se a construção de um sistema total, sem barreiras sólidas entre as disciplinas, visto pelo autor como uma teoria geral de sistemas ou estruturas operacionais, estruturas de regulamentação e sistemas probabilísticos e que as liga através de transformações reguladas e definidas.

O NCTM (2000) fornece uma boa descrição do papel da comunicação escrita e oral na promoção da compreensão matemática. Mais concretamente afirma que, seja por escrito, lendo, ouvindo ou falando, as crianças aprendem sobre o mundo que as rodeia. O uso da literatura no ensino de matemática promove todas as formas de comunicação.

> "Muitos livros infantis apresentam problemas interessantes e ilustram como outras crianças os resolvem. Através destes livros, os alunos veem a matemática num contexto diferente enquanto usam a leitura como uma forma de comunicação" (NCTM, 1991, p.28).

Aqui é defendida a ideia da integração da literatura em sala de aula, já que os estudos demonstram que desta integração está dependente a compreensão dos alunos no que diz respeito aos conceitos matemáticos. Para além disso, Mink e Fraser (2002) realizaram um estudo para analisar as atitudes dos alunos em relação à disciplina de matemática em sala de aula, demonstrando que o uso da literatura em matemática melhora a atitude dos alunos face a esta disciplina, concluindo os pesquisadores, através de sua análise de dados, que "using children's literature in the mathematics classroom empowers students to learn mathematical concepts" (p. 21).

Também para Evans, Leija e Falkner (2001) a literatura serve de veículo para a compreensão e prática de técnicas e de conceitos matemáticos. A empatia que os alunos sentem pelas personagens das histórias e o envolvimento que a aventura do contexto proporciona, fornecem uma inegável ligação entre a literatura e a apreensão de conceitos novos.

Deste modo, como referem Wilburne e Napoli (2008), a integração da literatura nas aulas de matemática não só desenvolve habilidades de literacia, como também promove a linguagem matemática e a resolução de problemas. Além disso, a representação visual nos livros estimula os leitores, e fornece linhas informativas que promovem a curiosidade das crianças. O poder da literatura e da matemática oferece aos leitores oportunidades para testar estratégias diferentes e para desenvolver experiências anteriores, por forma a ampliar as aprendizagens.

> "Integrating literature into mathematics can help teachers use a constructivist approach to: (a) provide relevance, (b) increase motivation, (c) promote critical thinking and (d) improve problem solving skills through storybook exemples" (Haury, 2001; Mink & Fraser, 2002).

De acordo com várias pesquisas, existem vários benefícios para a integração da literatura infantil na matemática, já que proporciona um contexto significativo para o aluno (Whitin & Wilde, 1992; Whitin & Whitin, 2004), pois este tem a oportunidade de experienciar como a matemática é aplicada no mundo real (Braddon, Hall & Taylor, 1993), entendendo esta disciplina como uma linguagem (Whitin & Wilde, 1992);

Whitin (1992) defende também que "There is no more powerful vehicle for meeting new goals in mathematics than the use of children's literature in the classroom" (p. 24).

A integração de várias áreas disciplinares não é um conceito novo (Moyer, 2000), já que são muitos os professores que promovem essa integração, devido aos inúmeros benefícios para os alunos de todas as idades (Burns, 2005). Já o NCTM (2000) sugere que as conexões de matemática com outras disciplinas e experiências reais nas salas de aula proporcionam aos alunos um maior domínio da matemática e aconselham os professores a planear as suas aulas, integrando a matemática com outras áreas e conteúdos da vida real.

> "Integration is a buzzword in education today, but too often the meaning seems to suggest that if the teacher throws any two subject areas together, something better will happen. With a little more purposeful thought, teachers can easily raise the interest, complexity, and success of some of their favorite activities." (Braddon, Hall & Taylor, 1993, p. 5).

Apesar dos muitos benefícios da integração entre conteúdos, existe uma grande necessidade para "professional development that assists teachers in changing their conceptual perspectives to integration while also building pedagogical knowledge related to integration of science, mathematics, and literacy" (Douville, Pugalee, & Wallace 2003, p. 388).

Para Price e Lennon (2009), durante séculos, tem havido uma conexão entre a matemática e as artes, incluindo a literatura. Esta conexão está agora a ser vinculada de modo mais proeminente como parte de um currículo efetivo. Ao longo das últimas duas décadas, os professores deram mais atenção aos currículos integrados, particularmente à introdução da literatura no ensino da matemática. Há evidências de que as crianças têm mais sucesso em compreender os materiais, quando estes são apresentados de forma significativa. A diversidade na literatura proporciona várias oportunidades para que os alunos se envolvam num conceito de matemática, criando assim um contexto significativo para o aluno. David Whitin (2004) refere que "Through [these] varied opportunities for investigation, [these] books support readers in developing healthy attitudes and dispositions about mathematical activity" (p.

53). Já conhecidos os benefícios de trazer a literatura para uma aula de matemática, a questão está em como fazê-lo efetivamente na prática.

É preciso ressaltar que a matemática não deve ser ensinada unicamente através da literatura, pelo contrário, a integração de literatura em matemática deve ser usada como uma peça de um currículo de matemática bem desenhado e projetado:

> "There are many uses for children's literature in mathematics; Welchman-Tischler identified seven ways to use stories in mathematics: to provide a context or model for an activity with mathematical content; to introduce manipulatives that will be used in varied ways (not necessarily as in the story); to inspire a creative mathematics experience for children; to pose an interesting problem; to prepare for a mathematics concept or skill; to develop or explain a mathematics concept or skill; and to review a mathematics concept or skill." (Goldstein, 2007, p.12).

Segundo Callan (2004), quando a literatura é integrada em matemática, os conceitos matemáticos podem ser apresentados em cenários menos ameaçadores, que não sejam tão intimidantes para estudantes com grandes dificuldades em matemática. Além disso, a integração da literatura no currículo de matemática permite que um professor ajude os alunos com dificuldades de aprendizagem, individualizando o apoio a vários níveis na sala de aula, sendo que os alunos são mais capazes de se concentrar nos seus pontos fortes e fracos. Nesta linha de pensamento, e relativamente à história, Goldstein (2007) refere que os professores devem estar preparados para discutir conceitos matemáticos complexos que possam surgir numa história, e atribuir o tempo necessário para que os alunos compartilhem experiências pessoais, semelhantes às personagens contextualizadas no livro.

Para Sardinha (2011), a matemática é uma ferramenta de comunicação que trabalha diretamente com a capacidade de leitura e que possibilita ao aluno utilizar e perceber os dados encontrados em todas as áreas escolares e interpretar a lógica dos padrões encontrados nessas áreas. Assim, as competências de leitura e de matemática necessitam de andar interligadas para que o aluno seja um aluno de sucesso.

"Tying mathematics to stories humanizes the activity and also gives purpose and meaning to mathematics for…children" (Griffiths & Clyne, 1988, p.5), bem como desfaz a dicotomia que muitas vezes existe entre aprender (*learning)* matemática e viver (l*iving*) a matemática (Whitin & Wilde, 1992).

Concluindo, "the integration of literature into the mathematics curriculum is a successful way to increase: (a) understanding, (b) motivation, (c) relevance, (d) achievement, (e) interest, and (f) problem solving skills in upper elementary students" (Goldstein, 2007, p.19). Assim sendo, permite que os alunos beneficiem de uma compreensão mais rica e mais complexa da matemática. Os alunos com grandes dificuldades em alguns conceitos podem beneficiar de uma abordagem mais dinâmica e didática, e os alunos que se destacam podem amplificar os seus conceitos matemáticos de forma mais completa, através das aplicações dos mesmos ao mundo real.

2.2. Resolução de problemas

A literatura sugere uma grande necessidade de maior integração da literatura no currículo de matemática. Ora, o uso de livros de histórias em matemática é uma maneira natural de apresentar situações de resolução de problemas e demonstrar as etapas envolvidas para resolver um problema complexo (Hellwig, Monroe & Jacobs, 2000). Para além disso, "Allows [children] to think, reason, solve problems, compare and contrast, critique, and communicate in both old and new ways" (Ducolon, 2000).

Para Sardinha (2011), uma abordagem tendencialmente construtivista do processo de ensino/aprendizagem, para muitos autores, passa por considerar que as tarefas matemáticas devem centrar-se fundamentalmente na resolução de problemas, abrangendo de forma secundária a realização de exercícios, por valorizar a criação de processos pessoais e diversos, por admitir que o erro e o seu reconhecimento são parte integrante do processo de aprendizagem e são favoráveis a uma aprendizagem intelectualmente ativa. Também para esta autora, tanto a resolução de problemas como a sua formulação, constituem-se aspetos fulcrais para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

No que diz respeito à construção de histórias com problemas, Sardinha (2005) considera que esta fomenta o desenvolvimento de competências de numeracia e de literacia, bem como o desenvolvimento das capacidades de escrita e interpretação, do pensamento criativo e das capacidades de resolução e formulação de problemas.

Como refere Moyer (2000) não só a resolução de problemas pode ser fomentada a partir de materiais de leitura e escrita autênticos, mas também o raciocínio matemático pode ser desenvolvido através destes materiais.

Krulik e Rudnick (1993) sublinham a ideia de que ler é crucial para o desenvolvimento da resolução de problemas e das capacidades de raciocínio. Grande parte das situações problemáticas com que os alunos se deparam, por exemplo na escola, é apresentada em formato escrito. Ler em matemática é um pouco diferente do que ler na generalidade, já que ler material matemático requer uma análise mais atenta e um maior cuidado com os pormenores.

Neste sentido, o NCTM (1991) refere que a proliferação de exercícios para praticar capacidades básicas de forma isolada deve mudar no sentido de tarefas mais abertas, que abordem problemas reais e aprendizagem contextualizada, sendo importante dar mais ênfase à escrita, à oralidade e às demonstrações.

Nesta linha de pensamento, Braddon, Hall e Taylor (1993) referem que: "The integration of mathematics into language arts and science through useful and creative problem-solving activities almost always raises the level of learning." (p.5).

Também para Polya (2003), a resolução de problemas incita à curiosidade e provoca o gosto pelo pensamento independente, quando os problemas propostos estão adaptados aos conhecimentos dos alunos e as interpelações, concretizadas pelo professor, têm como objetivo estimular e facultar meios de realização. O autor considera que esta experiência, na idade adequada, poderá levar ao gosto pelo trabalho mental e alterar o modo de pensar do indivíduo.

A resolução de problemas fornece a estrutura básica para aprender a maioria dos conceitos e competências matemáticas. Uma variedade de estratégias pode ser usada para ajudar os alunos a desenvolver essa competência para resolver problemas abertos, envolvendo o aluno num ambiente propício a questões, investigações, especulações e explorações.

Braddon et al., (1993) defendem que o estudo da matemática deve enfatizar a resolução de problemas para que os alunos possam: usar abordagens de resolução de problemas para investigar e entender o conteúdo matemático; formular problemas matemáticos a partir de situações do quotidiano; desenvolver e aplicar estratégias para a resolução de uma grande diversidade de problemas; verificar e interpretar os resultados em relação ao problema original e adquirir confiança ao usar a matemática de forma significativa.

Também para Billstein, Libeskind e Lott (2007), para que haja o envolvimento dos alunos em tarefas significativas, os problemas devem ser vistos como o foco de aprendizagem, e introduzidos num contexto familiar. Uma boa resolução de problemas sucede quando se dão os seguintes tópicos: os alunos estão perante uma situação em que entendem mas não sabem como agir para chegar diretamente à solução; os alunos têm interesse em achar a solução e executam tentativas nesse âmbito; os alunos são solicitados a usar ideias matemáticas para resolver o problema.

As tarefas de resolução de problemas devem ser desenvolvidas de acordo com a ideia expressa por Hiebert (2003):

> "allowing mathematics to be problematic does not mean making mathematics unnecessarily difficult, but it does mean allowing [children] to wrestle with what is mathematically challenging " (p.55).

Contudo, também é referido mais à frente:

> "tasks that are too easy offer little opportunity for growth. Tasks too far out of reach can frustrate [children] and 'turn them off' " (p.73).

Deste modo, quando as crianças são desafiadas para tarefas que envolvem a resolução de problemas, e estas são bem projetadas, há uma construção, uma revisão e um melhoramento da sua compreensão matemática, para que esta faça sentido e assim seja possível resolver os problemas.

No que diz respeito ao processo adotado na resolução de problemas, existem métodos e modelos por forma a resolvê-los. Um dos modelos é o de Polya (2003) que considera profícuo que se cumpram determinadas fases de trabalho: compreender o problema; estabelecer um plano; executar o plano estabelecido; realizar uma revisão da resolução completa (avaliar).

Billstein et al. (2007) referem que, para solucionar um problema é necessário compreender a tarefa e a informação fornecida. O passo seguinte passa por determinar a estratégia para terminar a tarefa. Assim que se alcança a solução deve ver-se se esta faz sentido e se é plausível.

Segundo Janes e Strong (2014), depois de ser encontrada a solução para o problema e esta ser compartilhada, um passo crucial passa por olhar para a solução e determinar se esta pode ser generalizada: "Generalization is the strategy of identifying a pattern of information or events and using the pattern to formulate conclusions about other like situations" (Findell et al, 2004, p.2).

Sardinha (2011) chama a atenção para a existência de lacunas no modo de trabalhar a resolução de problemas na sala de aula. Tal como outros autores, destaca a ênfase no processo de resolução de problemas, no modo de pensar subjacente ao processo, na compreensão de que alguns problemas têm diversas soluções ou que a resolução pode seguir vários caminhos para se alcançar a solução. Assim sendo, não se deve olhar para a resolução de problemas somente como quem olha para o número de respostas certas que um aluno dá.

Neste sentido, Polya (2003) aborda que é fundamental que o professor desafie a curiosidade dos seus alunos, propondo-lhes problemas que vão ao encontro dos seus conhecimentos e "(...) ajudando-os com interpelações estimulantes." (p.11) que estimularão o gosto pelo pensamento autónomo. Antagonicamente os alunos não irão sentir interesse, provocando a estagnação do seu desenvolvimento intelectual. É importante que o professor se coloque no lugar do aluno, procurando compreender as dificuldades que este manifesta, o que o leva a realizar as mesmas interpelações de forma repetida, bem como a propor os mesmos passos, de forma a induzir à operação mental desejada.

Burton (1984) menciona que o papel do professor deverá ser sempre flexível, já que deve ser dado espaço aos alunos para tratarem do problema, funcionando o professor como uma fonte. Os problemas e os materiais são facultados pelo professor, mas a partir desse momento, as decisões são tomadas pelos alunos, sendo que o professor poderá colocar uma questão útil, que guie a discussão, direcionando os alunos. O professor deverá também estar preparado para lançar perguntas mais incómodas ou para focalizar constrangimentos que foram negligenciados numa primeira instância. Deste modo, a turma pode assumir a responsabilidade de tomada de decisões, a implementar, deixando assim o professor livre para acompanhar os alunos, de modo individualizado, construindo uma base de confiança.

> "Children and teachers need to understand that being able to explain thinking is as important as the answer. Critical thinking and establishing a spirit of inquiry are important in all mathematics classroom environments. Students who have learned to show their concepts through mathematics and students who are confortable with analysis, synthesis, and evaluation techniques are preparing for their future in the twenty-first century." (Braddon, Hall & Taylor, 1993, p. 7).

Estes autores também defendem que o estudo da matemática deve ter como um dos objetivos desenvolver o raciocínio para que os alunos possam: tirar conclusões lógicas sobre a matemática; usar modelos, factos conhecidos, propriedades e relações para explicar seu pensamento; justificar as suas respostas e processos de resolução; usar padrões e relações para analisar situações matemáticas; e acreditar que a matemática faz sentido.

O raciocínio matemático é um processo dinâmico que possibilita manipular as ideias de forma cada vez mais complexa, desenvolvendo a nossa capacidade de compreensão. Para que isto ocorra é indispensável especificar, generalizar e conjeturar. O raciocínio matemático alicerça-se numa atmosfera de interpelações, desafios e reflexão, podendo este ser melhorado ligando a prática à reflexão. Não obstante, leva a um conhecimento mais profundo de nós mesmos, a uma visão mais coerente daquilo que se tem conhecimento, a uma investigação mais eficiente do que se quer ter conhecimento e a uma postura mais crítica perante a realidade que nos rodeia. (Mason, Burton & Stacey, 1989)

Para os autores Krulik e Rudnick (1993), a resolução de problemas e o raciocínio são essenciais no nosso dia-a-dia. A resolução de problemas estabelece a ligação entre os factos, os algoritmos e as situações da vida real com que nos defrontamos. Para grande parte das pessoas, a matemática é a resolução de problemas e a resolução de problemas é raciocínio.

Em suma, torna-se importante que professores integrem a resolução de problemas no contexto das situações matemáticas, onde seja possível aos alunos reconhecerem a utilidade das estratégias. Os professores devem assim optar por escolher problemas específicos já que estes exigem o uso de estratégias particulares e possibilitam o desenvolvimento de algumas ideias matemáticas.

2.3. Aprendizagem cooperativa e Comunicação Matemática

Sardinha (2011) defende a metodologia de trabalho cooperativo como essencial por permitir o desenvolvimento da comunicação matemática, das estratégias de resolução e formulação de problemas. Ao trabalharem em grupo, os alunos desenvolvem capacidades de pensamento crítico, raciocínio e compreensão mútua, partilhando ideias e dificuldades individuais, favorecendo desta forma o espírito de entreajuda e a participação inclusiva de todos os alunos independentemente do seu grau de conhecimentos e competências.

A aprendizagem cooperativa é descrita como o processo de os alunos trabalharem em pequenos grupos e para Grandin (2006), o processo cooperativo envolve um conjunto de competências comportamentais de grupo: um comportamento de grupo inclusivo, que passa por partilharem pontos de vista e dificuldades; mediarem opiniões diferentes e alcançarem o consenso de opiniões no grupo, favorecendo a comunicação matemática. A capacidade de pensamento crítico, raciocínio e compreensão mútua são requeridos para analisar de que modo as contribuições individuais se reúnem para integrar um todo. Assim, o trabalho de grupo permite desenvolver uma atitude de persistência perante as dificuldades, possibilitando o envolvimento e a participação dos alunos tidos como menos bons.

O uso da literatura infantil em matemática incentiva a discussão, o debate, o questionamento, a confirmação, e a extensão da ideia principal da história (Whitin, 1992). Assim, as conexões matemáticas verbais diárias são essenciais para que as crianças aprendam e falem matematicamente (Moyer, 2000).

"A matemática deve ser pensada como uma linguagem; se os estudantes comunicam com precisão a linguagem da matemática, devem ser capazes de entender e aplicar os seus conhecimentos" (NCTM, 1991). É importante que as crianças pratiquem a comunicação verbal com frequência, sendo necessário que lhes sejam proporcionadas oportunidades para estas aplicarem a sua linguagem matemática.

Para Sardinha (2011), a discussão de problemas, as soluções propostas, os métodos de ataque aos problemas, entre outros fatores relevantes na resolução, devem estar presentes em todos os momentos. Essencialmente na resolução de problemas, o trabalho em grupo faculta oportunidades de verbalizar dificuldades e raciocínios efetuados potenciando, simultaneamente, o desenvolvimento dos processos metacognitivos e a comunicação matemática através da partilha de raciocínios e dificuldades. O facto de várias estratégias serem válidas, permite que vários alunos contribuam com diferentes partes na construção do caminho para chegar à solução final, proporcionando o desenvolvimento da comunicação matemática.

Grouws (2003) menciona que a modalidade de ensino em pequenos grupos, no ensino através da abordagem de resolução de problemas, facilita as discussões matemáticas. Os grupos de trabalho proporcionam oportunidades vantajosas para que um maior número de alunos verbalize as suas dificuldades e o seu pensamento, ao contrário do que se sucederia em grupo-turma. Para muitos dos alunos, participar em pequenos grupos é menos intimidador do que participar em discussões de turma. Contudo, este autor refere que não são todos os problemas os apropriados ao trabalho de grupo. Genericamente, num pequeno grupo, um problema com uma solução primária e com apenas uma solução, pode refletir-se numa eventual situação na qual somente um dos alunos do grupo consegue alcançar a solução e explicar aos colegas o seu raciocínio. Neste caso, o professor pode evitar este episódio utilizando várias técnicas, como por exemplo a atribuição de tarefas para cada um dos elementos cumprir no grupo, ou deixar bem claro que todos os elementos do grupo devem ser capazes de explicar a solução encontrada para o problema. Desta forma, problemas com mais do que uma solução são os mais adequados, já que levam a que os alunos procurem soluções usando estratégias distintas e as expliquem aos colegas.

Billstein et al. (2007) mencionam que o trabalho conjunto com outros alunos na resolução de problemas conduz ao desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e das capacidades de comunicação. Os mesmos autores relevam a aprendizagem cooperativa e o trabalho de grupo, frisando que os alunos devem trabalhar em grupo sempre que tenham oportunidades para tal. Para fomentar o trabalho de grupo e ajudar a identificar quando a aprendizagem cooperativa pode ser útil, estes autores mencionaram atividades que envolvem tarefas onde pode ser vantajoso que a natureza dos problemas possa provocar discussões em grupo que podem conduzir ao desenho de estratégias para resolver o problema.

A partilha de conexões pessoais dos alunos a partir dos problemas de uma história, aumenta a discussão de um modo geral (Callan, 2004). Relacionando-se os alunos com as experiências dos seus pares, possibilita que estes transportem essas experiências para o seu mundo e se questionem sobre ele. Whitin (2002) sublinhou a importância da comunicação quando afirmou: "by using literature, we celebrate children's voices and build inquisitive mathematical communities" (p. 503).

Neste contexto, existem muitas oportunidades para as crianças beneficiarem de um discurso produtivo, e dos professores criarem momentos para tal se suceder. O discurso produtivo é referido no Ensino de Matemática como: "ways of representing, thinking, talking, agreeing, and disagreeing" (NCTM, 2000, p.46), implicando também ter consciência e respeito pelas ideias, raciocínio, estratégias de solução e perspetivas dos outros.

O discurso produtivo envolve, numa fase primeira, que as crianças construam argumentos utilizando referentes concretos, tais como: desenhos, objetos, diagramas e ações (Janes & Strong, 2014) e, posteriormente, que lhes seja fornecido um ambiente onde as crianças tenham oportunidade de explicar as suas ideias e justificar as soluções a partir de linguagem escrita, linguagem falada ou linguagem visual. Contudo, acaba por ser mais do que isso. É a dinâmica que se verifica entre as crianças e também entre as crianças e os professores, sendo que todos escutam as ideias dos outros e se sentem seguros para desafiar essas mesmas ideias, se estas não forem compreendidas ou se possuírem uma opinião diferente, sempre reconhecendo que o raciocínio matemático e a evidência são a base do discurso e que "mathematically proficient students... justify their conclusions, communicate to others, and respond to arguments of others" (NCTM, 2000).

Assim sendo, torna-se importante que cada aluno articule o seu próprio raciocínio, ouvindo como soa e percebendo como é recebido, ao ser exposto. Esta situação só sucede se os alunos debaterem e monitorizarem o trabalho uns dos outros. A matemática na sala de aula, utilizando um texto ou um esquema individual, como a resolução de problemas, carece de mais tempo para o grupo explorar e discutir (Sardinha, 2011).

A comunicação em Matemática não é relevante unicamente para a construção de relacionamentos sociais entre as crianças. Segundo os membros do NCTM (1991):

> "A comunicação desempenha um papel importante ao ajudar as crianças a construírem ligações entre as suas noções informais, intuitivas e a linguagem abstrata

e simbolismo da matemática; Também desempenha um papel fundamental para ajudar as crianças a estabelecer conexões importantes entre (a) representações físicas, (b) pictóricas, (c) gráficas, (d) simbólicas, (e) verbais e (f) de ideias matemáticas " (p. 26).

Para além disto, o professor exerce um papel essencial na turma, no que diz respeito à discussão em Matemática (Lewis, Long, & Mackay, 1993). Um professor pode efetivamente contribuir para uma melhor comunicação em matemática pedindo aos alunos que expliquem e justifiquem as suas respostas, permanecendo neutros quando são fornecidas respostas erradas, e incitando os alunos a comentarem as ideias dos colegas da turma.

A comunicação é uma das competências frisadas na educação matemática (NCTM, 2000). A literatura faz ressurgir uma forma mais complexa de comunicação para o ensino da Matemática porque os conceitos matemáticos são apresentados em palavras e não em números. Depois de a literatura ser integrada nas aulas de Matemática, muitos professores referem que os seus alunos demonstram níveis de conforto maiores ao discutir sobre a compreensão que possuem dos conceitos matemáticos. Não obstante, este tipo de debates possibilita que os professores sejam capazes de identificar muitas das ideias erróneas que são espelhadas no decurso do diálogo.

Neste seguimento, "The practice of mathematics is not merely plugging numbers into an algorithm or calculator to find a solution, nor is it just a subject in school or a set of rules to memorize. Mathematics is thinking and reasoning, solving problems, making connections, and being able to communicate ideas mathematically" (Hellwig, Monroe & Jacobs, 2000).

Concluindo, "o trabalho de grupo desenvolve capacidades de pensamento crítico, raciocínio e compreensão mútua, permitindo a partilha de ideias e de dificuldades individuais, favorecendo o espírito de entreajuda e a participação inclusiva de todos os alunos independentemente do seu grau de conhecimentos e competências. Na resolução de problemas, o trabalho de grupo faculta oportunidades de verbalizar dificuldades e raciocínios efectuados potenciando, simultaneamente, o desenvolvimento dos processos metacognitivos e a comunicação matemática através da partilha de raciocínios e dificuldades" (Sardinha, 2011, p.68).

CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA

Neste capítulo dá-se a conhecer a metodologia adotada no desenvolvimento do Projeto de Intervenção Pedagógica, de cariz investigativo.

Na primeira secção deste capítulo, *Opções Metodológicas,* apresenta-se a questão de investigação e enunciam-se os objetivos que orientam o Projeto, e aborda-se a natureza da investigação. Na secção seguinte, *Participantes,* caracteriza-se a turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico e a turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico, nas quais teve lugar a prática de ensino supervisionada. Na terceira secção, *Fases do Projeto de Intervenção Pedagógica,* abordam-se as diferentes fases do desenvolvimento do Projeto, especificando-se a descrição de algumas destas. Na quarta secção, *Recolha de dados,* os instrumentos de recolha de dados aplicados são descritos. Por fim, na última secção, *Análise de Dados,* referem-se os procedimentos de análise de dados usados, por forma a responder às questões de investigação.

3.1. Opções Metodológicas

Em conformidade com a natureza do Projeto, a metodologia adotada é de índole qualitativa, com uma abordagem fundamentalmente interpretativa (qualitativa interpretativa).

Segundo Stake (2009), citando Fred Erickson: "a característica mais distintiva da investigação qualitativa é a sua ênfase na interpretação. A função do investigador qualitativo durante a recolha de dados é manifestamente sustentar uma interpretação vigorosa. Tendo por base as observações e outros dados, os investigadores tiram as suas próprias conclusões." (p.24).

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa vai ao encontro, normalmente, de cinco características, sendo que os estudos que recorrem à observação participante tendem a ser bons exemplos. De um modo concreto, são as seguintes: a fonte direta dos dados é o ambiente natural, integrando o investigador o instrumento primordial, nomeadamente no que diz respeito à recolha de dados, sendo que o papel do contexto assume aqui particular relevância; os dados recolhidos são geralmente descritivos; os investigadores qualitativos têm um maior interesse no processo do que nos resultados ou produtos; a análise dos dados é realizada de modo indutivo, pois o investigador não recolhe os dados com o objetivo de infirmar ou confirmar hipóteses construídas previamente, mas antes são edificadas abstrações ao mesmo tempo que os dados particulares que forem recolhidos se vão agrupando; na abordagem qualitativa, o significado constitui importância vital, no sentido em que o investigador que utiliza este tipo de abordagem, se interessa pela forma como diferentes pessoas atribuem sentido às suas experiências, as chamadas *perspetivas participantes*.

Stake (2009) menciona que "Os investigadores qualitativos tratam a singularidade dos casos e contextos individuais como importantes para a compreensão. A particularização é um objetivo importante uma vez conhecida a particularidade do caso." (p. 53), ou seja, o investigador qualitativo não só dá ênfase aos episódios significativos, à sequencialidade dos acontecimentos em contexto, mas também tenta compreender a totalidade do indivíduo.

A este propósito, Malcolm, Parlett e Hamilton identificaram a necessidade de um estudo interpretativo, onde referiam três frases através das quais os investigadores se movimentam: observação, pesquisa renovada e explicação. Para além disto, abordam o conceito de focalização progressiva: "Obviamente as três fases sobrepõem-se e inter-relacionam-se funcionalmente. A transição de fase para fase, à medida que se desenrola a investigação, ocorre assim que as áreas problemáticas se tornam progressivamente clarificadas e redefinidas (...) " (Stake, 2009, p. 37).

Assim sendo, e segundo Stake (2009), esta metodologia exige que "as pessoas mais responsáveis pelas interpretações estejam no campo, a fazer observações, a exercitar uma capacidade crítica subjetiva, a analisar e a sintetizar, e durante todo esse tempo a aperceberem-se da sua própria consciência." (p.57).

Esta metodologia enquadra-se numa investigação específica, que são os estudos de caso, onde Merriam (1988), define estudo de caso como consistindo na "observação detalhada de um contexto, ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico". Concretamente esta investigação passará por um estudo com dois casos, sendo que, a este propósito Stake (2009) refere: "Estudamos um caso quando ele próprio se reveste de um interesse muito especial, e então procuramos o pormenor de interacção com os seus contextos. O estudo de caso é o estudo da particularidade e complexidade de um único caso, conseguindo compreender a sua actividade no âmbito de circunstâncias importantes." (p.11)

Na visão de Ponte (2006), mais do que uma metodologia, um estudo de caso é fundamentalmente um *design* de investigação, de natureza empírica. No que diz respeito aos estudos de caso, este autor aborda a questão da generalização. Nesta linha de pensamento, os estudos de caso são por vezes criticados por não conduzirem à generalização dos seus resultados. Esta crítica faz emergir a tradição positivista, que persegue enunciados sob a forma de "leis gerais", ou "generalizações", "verificáveis". Ainda segundo este autor, "o problema é que a grande complexidade das situações educativas e o facto delas serem vividas por actores humanos com uma grande variedade de intenções e significados" (p.15), não se tem evidenciado um terreno fértil para o cultivo dessa abordagem, mas sim para o da abordagem interpretativa. Assim, pretende-se que seja realizada investigação com outros objetivos, onde esta vai gradualmente acrescentando novos elementos que tornem rico o conhecimento coletivo acerca de problemas e fenómenos, e não esperar encontrar soluções, de um modo repentino, para todos os problemas educativos, nem formular e comprovar leis gerais que descrevam o funcionamento dos fenómenos.

Realiza-se um estudo de caso quando não existe controlo sobre os acontecimentos e não se torna possível ou desejável manipular as potenciais causas do comportamento dos participantes (Merriam, 1988; Yin, 1984), ou seja, não se deseja alterar a situação, mas percebê-la tal como ela é. Em suma, não se recorre aos estudos de caso quando se pretende conhecer propriedades gerais de toda uma população, mas sim para entender a especificidade de uma determinada situação, para estudar os processos e as dinâmicas da prática, objetivando a sua melhoria, ou ainda para formular novas teorias, onde o foco das questões está em "como?" e "porquê?" e não em "o quê?", "quantas?".

Paralelamente a esta linha de pensamento sobre estudos de caso, importa referir as categorizações estabelecidas para este *design* de investigação, pela importância que adquirem no enquadramento da investigação do Projeto, concretamente quanto ao número de casos em estudo. Assim, existem os estudos de caso únicos e os estudos de caso múltiplos (Bogdan e Biklen, 1994), que se distinguem, segundo os dois autores, pelo número de casos em estudo, singular (circunscrevendo-se apenas a um) e plural, respetivamente. Importa realçar que, quando os investigadores realizam estudos de caso múltiplos, estes podem assumir uma "grande variedade de formas." (p.97)

Em jeito de conclusão, esta secção desenha as opções metodológicas tomadas no Projeto, relativamente à natureza e ao enquadramento específico da investigação, respeitante aos estudos de caso, sendo que é de ressaltar o papel interpretativo contínuo do investigador, que ganha notoriedade nos estudos de caso qualitativos.

3.2. Participantes

A Prática de Ensino Supervisionada teve lugar em dois contextos educativos diferentes, que correspondem a cada um dos ciclos de ensino. O Estágio desenvolveu-se numa escola do 1.º Ciclo do Ensino Básico e numa escola do 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico, que integram o mesmo Agrupamento, situado na zona urbana da cidade de Braga.

3.2.1. Participantes do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Na escola do 1.º Ciclo do Ensino Básico, a prática de ensino supervisionada decorreu numa turma do 4.º ano de escolaridade. Esta era constituída por vinte e seis alunos, sendo doze do sexo masculino e catorze do género feminino, com idades compreendidas entre os nove e os dez anos. Não existiam na turma alunos identificados com NEE, nem qualquer aluno com retenções em anos anteriores, contudo existem dois alunos que reprovaram no 2.º ano de escolaridade, e um aluno diagnosticado com hiperatividade.

Os alunos da turma, no que concerne ao seu ambiente sócio afetivo, destacavam-se por serem extremamente curiosos, aplicados e participativos, revelando especial entusiasmo e interesse por atividades mais dinâmicas, onde tinham a possibilidade de debater as suas ideias. De um modo geral, a turma era responsável e bem comportada, tendo sido cultivado entre os alunos um clima de entreajuda e de respeito pelo outro. Por vezes, sucediam-se situações críticas, principalmente fora da sala de aula e durante os intervalos, mas também se registaram pequenas situações de mau comportamento de alguns alunos, durante a aula.

No que concerne ao desempenho dos alunos na disciplina de Matemática, contemplaram-se as avaliações que os mesmos tiveram na respetiva disciplina no 1.º Período do ano letivo atual (quadro 1).

Quadro 1 - Níveis dos alunos na disciplina de Matemática no 1.º período.

Ano da turma	Nível obtido na disciplina de Matemática	Número de alunos
4.º ano de escolaridade	1	0
	2	0
	3	16
	4	7
	5	3

O quadro 1 evidencia que grande parte dos alunos da turma, a maioria dos alunos (vinte e três alunos), situava-se entre o nível 3 e o nível 4. Além do mais, havia somente três alunos com nível 5. Em contexto de sala de aula, estes últimos dominavam não só os momentos de aprendizagem individuais, como também as situações de aprendizagem plenárias, em grupo turma, expressando frequentemente as suas ideias, sendo muito participativos e influenciando os restantes colegas de turma a intervir, contribuindo deste modo para um trabalho coletivo.

3.2.2 Participantes do 2.º Ciclo do Ensino Básico

Na escola do 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico, a prática de ensino supervisionada decorreu numa turma de 5.º ano de escolaridade. Esta era constituída por vinte e dois alunos, onze do sexo masculino e onze do sexo feminino, com idades entre os dez anos e os treze anos de idade, sendo que todos os alunos com mais de dez anos de idade já tiveram uma retenção (geralmente no 2.º ano). Todos os alunos tiveram apoios educativos ao longo do 1.º ciclo e planos individuais de promoção do sucesso, já que o conhecimento destes alunos é inferior ao esperado para o 5.º ano de escolaridade. Todos os alunos foram "repescados" em várias turmas do 1.º ciclo como sendo alunos com grandes dificuldades de aprendizagem e o "receio" do insucesso tem sido visível nos seus comportamentos.

Alguns alunos foram referenciados para beneficiarem de educação especial o que foi concedido a três alunos: um por desenvolvimento cognitivo muito inferior à idade e saúde frágil, outro por possuir síndroma de neurofibromatose (ainda não sabe ler), e outro ainda por possuir uma doença rara, que afeta o seu desenvolvimento físico e a qualidade da sua vida diária.

Na turma existem duas gémeas com origem africana e duas gémeas de origem europeia. Existe ainda uma aluna brasileira, uma aluna ucraniana e quatro alunos de etnia cigana.

Quadro 2 - Níveis dos alunos na disciplina de Matemática no 2.° período.

Ano da turma	Nível obtido na disciplina de Matemática	Número de alunos
	1	0
	2	0
5.° ano de escolaridade	3	14
	4	8
	5	0

O quadro 2 evidencia que a turma, essencialmente, se situava entre o nível 3 e o nível 4, não existindo assim, alunos com nível 5. É importante não esquecer que, apesar de grande parte dos alunos se situar no nível 3, este nível 3 não reflete os conhecimentos que um aluno frequentador do 5.° ano de escolaridade deveria ter. Nesta linha de pensamento, é preciso ter em atenção o contexto da turma. Em contexto de sala de aula, muitos dos alunos demonstravam-se curiosos com as temáticas, participativos e realmente interessados. Contudo, e a par disto, existiam sempre alunos desconcentrados e mais desinteressados, cujo foco, nestes casos, era mais individualizado.

A fim de diagnosticar os conhecimentos matemáticos dos alunos acerca do conteúdo de Áreas e Perímetros, realizou-se um levantamento das suas conceções prévias, se realmente possuíam um mínimo de noções básicas. Neste sentido, propôs-se os problemas 1 e 2 da ficha, envolvendo um deles a construção de um Tangram para a exploração da área e do perímetro das figuras que o constituem.

3.3. Fases do Projeto de Intervenção Pedagógica

O Projeto de Intervenção Pedagógica, progressivamente desenvolvido entre outubro de 2016 e outubro de 2017, contemplou um conjunto sequencial de fases, que estão sintetizadas no quadro 3.

Quadro 3 - Fases do Projeto de Intervenção Pedagógica.

Atividades a desenvolver	outubro	novembro	dezembro	janeiro	fevereiro	março	abril	maio	junho	julho	agosto	setembro	outubro
Revisão da literatura.	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Observação e problematização do contexto educativo do 1.º Ciclo do Ensino Básico.	x	x	x										
Desenho do Projeto de Intervenção Pedagógica.		x	x										
Planificação da intervenção pedagógica a desenvolver no 1.º Ciclo do Ensino Básico.			X										
Intervenção Pedagógica no 1.º Ciclo do Ensino Básico.			X										
Uso pedagógico de histórias envolvendo raciocínio matemático no 1.º Ciclo do Ensino Básico.				X									
Análise dos dados recolhidos no 1.º Ciclo do Ensino Básico.			x	x	x								
Observação e problematização do contexto educativo do 2.º Ciclo do Ensino Básico.						X							
Planificação da intervenção pedagógica a desenvolver no 2.º Ciclo do Ensino Básico.						X							
Intervenção pedagógica no 2.º Ciclo do Ensino Básico.							x	x					
Uso pedagógico de histórias envolvendo raciocínio matemático no 2.º Ciclo do Ensino Básico.							x	x					
Análise dos dados recolhidos no 2.º Ciclo do Ensino Básico.							x	x	x				
Produção do Relatório de Estágio.									x	x	x	x	x

3.3.1. Intervenção Pedagógica no 1.º Ciclo do Ensino Básico

A intervenção pedagógica desenvolvida na turma do 4.º ano de escolaridade (1.º Ciclo do Ensino Básico) contemplou quatro intervenções, sendo que a primeira considerou a resolução de uma pequena ficha de trabalho, que passava por determinar padrões e regularidades. Achou-se importante iniciar com a multiplicação, em vez da divisão, uma vez que a turma ainda possuía algumas dificuldades na tabuada, facto que a professora cooperante salientou, e também porque nunca tinham realizado nenhuma tarefa com padrões circulares.

Para além disto, é contemplada a leitura da história *"Quando as estrelas se transformam em números"*, de Leonel Vieira, sendo esta uma obra que aborda a matemática de modo divertido, dinâmico e interativo, pelo ponto de vista de uma criança que se questiona, que reflete sobre vários temas matemáticos. Desta obra, apenas foi usada uma das histórias, correspondente a um dos capítulos. A história funcionou como um indutor neste processo, pois só fui usada inicialmente, mais concretamente na resolução de problemas direcionados para o raciocínio algorítmico, embora tivessem também sido abordados outros temas e conceitos matemáticos presentes ao longo da história.

Estas intervenções tiveram por base o envolvimento ativo dos alunos no processo de ensino-aprendizagem. Deste modo, foi dada primazia ao ensino-aprendizagem exploratório, onde a teoria e a prática estão presentes, mas de outra forma: partiu-se de atividades em que os alunos se encontravam fortemente envolvidos, para se proceder, num segundo momento a uma discussão, balanço, referente ao que foi aprendido. Percorreu-se o caminho inverso, em que se iniciou com grande ênfase na atividade prática, que serviu de apoio à elaboração e fundamentação teórica. Assim sendo, foi dada primazia a uma estratégia de ensino-aprendizagem de cunho exploratório (Ponte, 2005), com destaque para atividades de exploração com a realização de fichas de trabalho, seguindo-se investigações com a proposta de algumas tarefas com esse objetivo, problemas e alguns exercícios.

Tendo em atenção os objetivos e a natureza das tarefas propostas, foram usadas, de um modo flexível, diferentes modalidades de trabalho, mas essencialmente em pequeno grupo e em grupo turma. Billstein, Libeskind & Lott, (2007) mencionam que trabalhar com outros alunos na resolução de problemas, possibilita o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e das capacidades de comunicação.

A *Primeira Intervenção,* realizada a 17 de Janeiro de 2017, tinha como objetivo primeiro a descoberta de regularidades na tabuada (de 0 a 10), sendo que os alunos teriam de encontrar os padrões repetitivos, através dos padrões circulares. Para isso, foi proposto a realização e exploração da ficha de trabalho 1 – "Tabelas da Multiplicação: Padrões Circulares" (anexo A). O enunciado era composto por três alíneas: na primeira os alunos deviam completar a tabela da Multiplicação (completando o algarismo a multiplicar: do 1 ao 10); na segunda deveriam sublinhar o algarismo das unidades e identificar os números do padrão para então ligarem os números que encontrassem no seu padrão repetitivo, descobrindo assim as regularidades; por último, a quarta alínea passava por escrever numa folha em branco outras regularidades que encontrassem. Foram debatidas as conclusões a que chegaram em grande grupo, onde os alunos puderam partilhar as figuras que encontraram nos vários padrões circulares. De seguida, procedeu-se à exploração do início da história *"Quando as estrelas se transformam em números",* tendo sido descoberto o mês a que se reportava a narrativa, e analisados os meses do ano, atribuindo um valor monetário a cada letra do mês (cálculo usando a adição e multiplicação), identificando então o mês "mais caro" e o "mês mais barato"; procedeu-se, por fim, à resolução de problemas simples envolvendo a divisão como distribuição através do cálculo mental, inspirados na cantiga de Sebastião, tendo estes sido resolvidos oralmente.

Nesta intervenção foi privilegiado, inicialmente, o trabalho individual, partindo-se depois para o trabalho em grupo-turma, verificando-se grande interação entre os alunos na partilha de saberes. Com efeito, não foram construídas tarefas suplementares, uma vez que a as atividades foram planificadas para 90 minutos e demoraram mais, ocupando a manhã inteira. É preciso ressaltar que os alunos demoraram sempre a estabelecer-se, no início, e que a primeira tarefa foi a mais demorada, dado que tinham de investigar, desenhar as figuras, tendo sido estas partilhadas.

A *Segunda Intervenção* decorreu no dia 18 de Janeiro de 2017 e uma das primeiras atividades compreendeu a exploração de frações equivalentes (por multiplicação dos termos por um mesmo fator e dividindo os termos por dois), sendo que era esperado que os alunos verificassem que o quociente não se altera. Prosseguindo com a leitura da narrativa, procedeu-se à contextualização do algoritmo da divisão com um problema, inicialmente o da história, e depois outros problemas, que serão apresentados posteriormente, envolvendo a divisão como distribuição e como medição. A leitura da história foi finalizada e foi proposto aos alunos que continuassem a história, em pequenos grupos, com novos diálogos e personagens, criando um problema que envolvesse o algoritmo da divisão, que teriam de resolver. Posteriormente apresentariam à turma a história e o problema, pedindo a outro grupo que fosse resolver esse mesmo problema. É de ressaltar que, com esta última tarefa, se pretendia promover a interdisciplinaridade entre a disciplina de Matemática e a disciplina do Português.

Nesta segunda intervenção privilegiou-se o trabalho em pequeno grupo, pela relevância que as interações assumem entre os alunos, no processo exploratório. Os grupos eram compostos por cinco elementos, e esperava-se que todos os alunos cooperassem entre si, ouvindo a opinião dos alunos com maiores dificuldades, auxiliando-os.

Na resolução dos problemas propostos por outros grupos, pretendia-se verificar o equilíbrio que existia no grupo, a cooperação intragrupo, sendo que os grupos eram constituídos por elementos com ritmos de aprendizagem diferentes.

A *Terceira Intervenção,* realizada no dia 19 de Janeiro de 2017, privilegiou o uso do material multibase, onde primeiramente foi pedido aos alunos, em pequenos grupos, que representassem números inteiros (considerando o cubinho como unidade). De seguida, em grande grupo foi abordado o algoritmo da divisão recorrendo ao material multibase, onde aqui foi feita a divisão por conjuntos: divisão das centenas, divisão das dezenas e divisão das unidades, utilizando o algoritmo da divisão expandido, fazendo a ponte deste processo com o algoritmo, em simultâneo. Por último, a divisão foi simplificada. Aqui, era expectável, que os alunos compreendessem os passos do algoritmo da divisão.

Na segunda parte da planificação, procedeu-se ao cálculo, em forma de dízima, do quociente de dois números inteiros. Este conteúdo era novo para a turma, e era expectável que os alunos relacionassem o acrescento de zeros no dividendo com a ordem a que pertencem e, posteriormente com o cálculo, com aproximações às décimas, às centésimas e às milésimas, explicando o raciocínio.

Na terceira parte desta intervenção, os alunos teriam de identificar a parte inteira e a parte decimal (as décimas, as centésimas e as milésimas) de um número, representando os números decimais no material multibase.

A *Quarta Intervenção*, realizada no dia 24 de Janeiro de 2017, centrou-se mais concretamente nos erros decorrentes do algoritmo da divisão, que podem imergir deste. Na primeira parte, os alunos teriam de compreender um dos casos do algoritmo da divisão (acrescento do zero no quociente), dado que muitos dos alunos demonstravam sempre dúvidas e reticências aquando do acrescento; foi usada neste processo a construção de uma divisão através de uma multiplicação. Na segunda parte, visualizaram um vídeo, em que eram demonstrados vários erros cometidos não só no algoritmo da divisão, como também no algoritmo da multiplicação e na adição, para comprovar, estes dois últimos, o algoritmo da divisão. Por último, como forma de sistematizar os conhecimentos acerca do algoritmo da divisão, tinham de realizar a ficha de trabalho 2 – “ A caça aos erros no Algoritmo da Divisão” (anexo B).

Neste último momento da intervenção, favoreceu-se o trabalho individual, de modo a que os alunos assumissem a sua própria independência na construção do algoritmo da divisão correto: isto exigia, da parte dos alunos, um certo distanciamento do enunciado, para não serem "levados pelo erro", para não os cometerem, e requeria que estes sistematizassem e canalizassem todos os conhecimentos e saberes aprendidos e analisados anteriormente. Para além disto, todo este processo exigia um nível de concentração e abstração bastante elevado.

3.3.2. Intervenção Pedagógica no 2.º Ciclo do Ensino Básico

A intervenção pedagógica desenvolvida no 2.º Ciclo do Ensino Básico, na turma do 5.º ano de escolaridade, contemplou 4 intervenções, sendo que é preciso ter em conta que os alunos não mostraram possuir nenhumas conceções prévias de anos anteriores, no que diz respeito a conceitos matemáticos que vieram a ser estudados. Todas as intervenções contemplaram a realização de uma mesma ficha (anexo C) em grupo-turma, cujos problemas eram contextualizados a partir da obra " As Aventuras de Alice no País das Maravilhas" (em cada intervenção eram apresentados problemas), excetuando a última intervenção, onde foi dada primazia à criação/formulação e resolução de problemas. É preciso ter em conta que a obra literária não foi estudada previamente, contudo foi aconselhado aos alunos que a lessem fora do período letivo de aulas, tendo apenas dois alunos cumprido a tarefa. Contudo, os alunos tiveram oportunidade de visualizar filmes sobre a obra, para ficarem com uma ideia geral acerca do contexto da mesma.

Alguns conteúdos explorados ao longo das intervenções não constavam no Programa de Matemática para o Ensino Básico, nem nas Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico, facto que não constituiu problema, uma vez que a professora cooperante não seguia uma ordem pré-definida e pré-determinada nas suas aulas relativamente aos conteúdos a lecionar, e dado que os alunos não mostraram possuir quaisquer conceções prévias relativamente a estes.

Em particular, a primeira intervenção contemplou essencialmente a exploração de problemas relacionados com a área e o perímetro. Na segunda intervenção os alunos foram confrontados com problemas que envolviam o volume. Na terceira intervenção os problemas integravam o cálculo da área da superfície total de um cubo e a relação entre a área e o volume de um sólido. Na quarta e última intervenção pretendeu-se promover a interdisciplinaridade entre a Matemática e o Português em pequenos grupos, sistematizando os conhecimentos adquiridos anteriormente.

Todas estas intervenções foram ao encontro das mesmas estratégias de ensino-aprendizagem que foram definidas na *Intervenção Pedagógica no 1.º Ciclo do Ensino Básico.*

A *Primeira Intervenção,* realizada no dia 2 de Maio de 2017, tinha como objetivo principal determinar a área e o perímetro de figuras geométricas (abordagem com compreensão da fórmula para a área do triângulo). Primeiramente tentou-se perceber quais as conceções prévias acerca destes conteúdos. Por forma a explorar os conteúdos em questão, propôs-se os problemas 1 e 2 da ficha, envolvendo um deles a construção de um Tangram para a exploração da área e do perímetro das figuras que o constituem. Por último, abordou-se a ampliação e redução de figuras e explorou-se a razão de semelhança entre dois quadrados.

Nesta intervenção, privilegiou-se o trabalho em grupo-turma, apesar de ter havido momentos individuais, na construção do Tangram e mesmo na tarefa das conceções prévias.

A *Segunda Intervenção*, realizada no dia 4 de Maio de 2017, tinha como objetivo a exploração de problemas que envolviam o volume de cubos e pirâmides. Para tal, propôs-se a realização dos problemas 5, 6 e 7 da ficha. Também aqui foi abordada a compreensão da fórmula para o volume de uma pirâmide, de forma contextualizada.

Nesta intervenção os problemas foram pensados para serem realizados em pequenos grupos e um deles individualmente. Contudo, como os alunos demonstraram grandes dificuldades na resolução do primeiro problema desde início, mesmo em termos de ritmo, achou-se por bem dar continuidade à modalidade em grupo-turma adotada na intervenção anterior. Esta modalidade funcionou de forma eficaz, uma vez que os alunos iam expondo as suas dúvidas, mesmo no que diz respeito à conversão de medidas, e partilhando os seus saberes e conclusões.

Para a *Terceira Intervenção*, que teve lugar no dia 9 de Maio de 2017, a aula foi planificada apenas com um problema, o problema 8, já que os alunos se demonstraram mais demorados do que o previsto na resolução dos problemas anteriores. Nesta intervenção pretendeu-se dar a conhecer aos alunos como se efetua o cálculo para a área de superfície total de um cubo, contextualizando com o problema em questão. Por último pretendeu-se verificar se os alunos se apercebiam da relação entre a área e o volume do sólido.

A *Quarta Intervenção*, realizada no dia 11 de Maio de 2017, tinha como principal objetivo a criação e a resolução de problemas, utilizando o contexto da obra literária. Esses mesmos problemas, criados em pequenos grupos de cinco elementos, abordariam um dos conteúdos estudados nas intervenções anteriores (área, volume ou perímetro), sendo que estes foram distribuídos aleatoriamente pelos grupos.

Aqui privilegiou-se o trabalho em pequeno grupo, trabalho esse promotor de um ambiente de ensino-aprendizagem propício à comunicação e ao debate de ideias, já que era uma tarefa que envolvia uma maior criatividade, tendo sido também proposta no 1.º Ciclo do Ensino Básico. A este respeito Ponte (2005) refere que a "realização de tarefas abertas, de carácter exploratório e investigativo é um elemento marcante neste tipo de ensino, mas importância idêntica assumem os momentos de discussão em que os alunos apresentam o seu trabalho, relatam as suas conjecturas e conclusões, apresentam as suas justificações e questionam-se uns aos outros e que o professor aproveita para procurar que se clarifiquem os conceitos e procedimentos, se avalie o valor dos argumentos e se estabeleçam conexões dentro e fora da Matemática. Os momentos de discussão constituem, assim, oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento." (p.16)

Esta organização considerava cinco grupos aproximadamente equilibrados entre si e um grupo composto por alunos que evidenciavam claras dificuldades em acompanhar o ritmo de trabalho dos restantes, permitindo um apoio mais persistente e ativo com este último.

3.4. Recolha de dados

Ponte (2002), cita Susan Lytle e Marilyn Cochran-Smith (1990), que falam da investigação dos professores como "a pesquisa intencional e sistemática que os professores realizam sobre a sua escola e a sua sala de aula " (p.5). A enfâse que atribuem ao caráter sistemático diz respeito aos procedimentos de recolha de dados e de documentação das experiências e à forma como se analisam e interpretam os acontecimentos. É pois, a natureza das questões formuladas que irá determinar a natureza do objeto de estudo e dos dados a recolher. Assim sendo, na recolha de dados de natureza qualitativa utiliza-se uma panóplia de técnicas, como a observação, a entrevista, a análise de documentos, incluindo também a análise de conteúdo e a análise de discurso.

Na *Intervenção Pedagógica no 1.º Ciclo do Ensino Básico e na Intervenção Pedagógica no 2.º Ciclo do Ensino Básico*[1] foi usada uma variedade de instrumentos na obtenção de dados, concretamente: a observação participante (registada em notas de campo, completada com gravações áudio/vídeo e fotografias), e a análise documental (fichas de trabalho e problemas).

Fundamentalmente, não se trata de recolher muitos dados, mas sim recolher dados adequados aos objetivos que foram traçados, e que sejam merecedores de confiança. É também, de igual importância, que os dados sejam recolhidos segundo procedimentos claros e bem definidos, de forma a permitir a sua posterior interpretação.

No que diz respeito à observação participante, estes procuram "conhecer processos, dinâmicas e perspetivas dos intervenientes numa dada situação mas em que não há preocupação em caracterizar o seu caráter único e em delimitá-lo como caso" (Ponte, 2006, p. 11).

Nesta linha de pensamento, Frederick Erickson (1986) defende que as descobertas não são tanto verdadeiramente "descobertas", mas sim "asserções". Devido à intensa interação do investigador, quando realiza trabalho de campo ou noutras situações, dada uma orientação construtivista para o conhecimento, fornecida a atenção à intencionalidade e ao sentido do eu participante, por muito descritivo que seja o relatório, o investigador acaba por oferecer, em última instância, uma visão pessoal, ou seja, o investigador é visto como um ator social.

A este propósito, também de acordo com Psathas, os investigadores qualitativos estão permanentemente a questionar os sujeitos de investigação, com o objetivo de compreender "aquilo que *eles* experimentam, o modo como *eles* interpretam as suas experiências e o modo como *eles* próprios estruturam o mundo social em que vivem" (citado por Bogdan e Biklen, 1994, p.51). No Projeto, está patenteada essa interação feita de forma direta com os alunos na sala de aula, no decorrer de toda a intervenção pedagógica. Neste sentido, a observação participante permitiu, de um modo versátil, recolher dados importantes, que foram registados no final de cada intervenção, sob a forma de notas de campo.

Os fenomenologistas referem que os investigadores têm à sua disposição variadas formas de interpretar as experiências, em detrimento das interações com os outros e que a realidade não é mais do que o significado das suas experiências. Assim sendo, a realidade é "socialmente construída" (Greene; Luckmann citados por Bogdan e Biklen, 1994, p. 54).

---

[1] Todos os alunos da turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico e da turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico foram autorizados, consoante pedido aos respetivos encarregados de Educação, a participarem na investigação, em consonância com os métodos utilizados na recolha de dados, uma vez garantido o seu anonimato.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), "como parte dessas notas, o investigador registará ideias, estratégias, reflexões e palpites, bem como os padrões que emergem. Isto são as *notas de campo*: o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo". Quando é referido que o investigador tenta ser o mais descritivo possível, pretende-se dizer que aquilo que este observa deve ser apresentado detalhadamente ao invés de se avaliado e resumido. São caracterizadas como notas de campo extensivas, classificando-se esta observação como não estruturada. Complementarmente usou-se a fotografia e as gravações áudio e em vídeo, onde estas últimas foram posteriormente transcritas, permitindo adicionar mais detalhes e pormenores à informação já possuída.

No decorrer do Projeto, a análise documental desenvolvida centrou-se mais especificamente nas fichas de trabalho exploradas pelos alunos em algumas das intervenções pedagógicas e nos problemas que foram introduzidos, advindo destes informações e dados cruciais no âmbito da comunicação escrita, que permitiram o progresso da investigação, ou seja, o tratamento das interpretações que conduziram, por fim, a conclusões.

3.5. Análise de dados

A análise de dados, como já foi suprarreferido, tende a ser realizada de forma indutiva quando falamos de investigações qualitativas. O processo de análise é comparado a um funil: as coisas estão abertas inicialmente (no topo) e vão-se tornando mais fechadas e particulares no extremo. Isto implica que o investigador analise os dados, organize os materiais recolhidos e selecione a informação (Bogdan e Biklen, 1994).

A análise de dados, no Projeto de Intervenção Pedagógica, considerou uma análise de conteúdo e teve em atenção as questões de investigação já referidas anteriormente.

Para o *Desenvolvimento e Avaliação da Intervenção Pedagógica no 1.º Ciclo* e para o *Desenvolvimento e Avaliação da Intervenção Pedagógica no 2.º Ciclo*, recorreu-se às notas de campo recolhidas nas quatro intervenções desenvolvidas no 4.º ano de escolaridade e nas quatro intervenções desenvolvidas na turma do 5.º ano de escolaridade. Para complementar a informação, procedeu-se à transcrição dos dados advindos das gravações áudio e vídeos das intervenções, apresentando-se as resoluções de eventuais fichas de trabalho e exercícios explorados pelos alunos no decorrer de cada intervenção. Reunir estes dados permitiu a realização de uma análise descritiva e interpretativa de cada uma das intervenções separadamente. Analisar os dados permanentemente possibilitou corporizar aspetos pertinentes neste sentido, para cada intervenção, especificamente, considerando os objetivos inerentes a cada uma das tarefas sugeridas, e de um modo geral, no que concerne à problemática do Projeto.

Numa fase primeira, transcreveram-se os dados das gravações áudio e vídeo relativas aos debates originados em sala de aula sobre as conclusões a que se puderam chegar, relativos aos problemas propostos, ao uso de material didático manipulável estruturado, envolvendo sempre o raciocínio (no caso da turma do 4.° ano de escolaridade, envolvendo na maior parte das vezes, o algoritmo da divisão, onde se inclui o raciocínio algorítmico) e respeitante ao 5.° ano de escolaridade, transcrições referentes aos conteúdos sobre o perímetro e a área contextualizados em problemas, onde se incluem as ampliações e reduções, bem como a exploração de volumes em problemas. Numa segunda fase, analisaram-se os dados, chegando-se a conclusões sobre a influência que o uso pedagógico de histórias envolvendo raciocínio matemático exerce no desenvolvimento deste último.

CAPÍTULO 4 – ANÁLISE E DISCUSSÃO DE DADOS

No presente capítulo expõe-se a análise e a discussão de dados, baseadas nas questões de investigação que orientam o Projeto de Intervenção Pedagógica e o enquadramento teórico que o suporta.

A primeira secção deste capítulo denomina-se Desenvolvimento e Avaliação da Intervenção Pedagógica no 1.º Ciclo do Ensino Básico, e aqui procede-se a uma análise criteriosa e reflexiva acerca da intervenção pedagógica desenvolvida na turma do 4.º ano de escolaridade. Na segunda secção, intitulada Desenvolvimento e Avaliação da Intervenção Pedagógica no 2.º Ciclo do Ensino Básico, mantem-se o procedimento anteriormente supracitado, mas neste caso na turma do 5.º ano de escolaridade.

4.1. Desenvolvimento de Avaliação da Intervenção Pedagógica no 1.º Ciclo do Ensino Básico

4.1.1. *Primeira Intervenção*

A primeira intervenção, realizada no dia 17 de janeiro de 2017, tinha como principais objetivos: a determinação de padrões e regularidades (na tabuada do zero ao dez), sendo que teria de ser encontrado o padrão repetitivo, através do padrão circular; dar início à história, resolvendo-se problemas simples. A primeira tarefa, inerente ao primeiro objetivo supracitado, teve como suporte a exploração de uma ficha de trabalho, sendo de realçar que a turma nunca trabalhou esta tarefa anteriormente, sendo por isso uma novidade. A este propósito Vale et al. (2009), refere que "os padrões permitem que os estudantes construam uma imagem mais positiva da Matemática porque apelam fortemente a que desenvolvam o seu sentido estético e criatividade (...) promovam uma melhor compreensão das suas capacidades matemáticas" (p. 6). Para além disto, os mesmos autores fazem notar que "Usamos o termo padrão em matemática quando pretendemos procurar ordem ou estrutura e por isso os termos regularidade, repetição e simetria estão muitas vezes presentes" (p. 186).

Optou-se por começar pela multiplicação em detrimento da divisão, dado que estas operações estão relacionadas e porque os alunos ainda revelavam dificuldades na tabuada.

Assim sendo, no primeiro momento da intervenção foi distribuído aos alunos a ficha de trabalho 1 – "Tabelas da Multiplicação: Padrões Circulares" (anexo A). O enunciado era composto por três alíneas: na primeira os alunos deviam completar a tabela da Multiplicação (completando o algarismo a multiplicar: do 1 ao 10); na segunda deveriam sublinhar o algarismo das unidades e identificar os números do padrão para então, a seguir, na terceira alínea, ligarem os números que encontrassem no seu padrão repetitivo, usando o círculo, descobrindo assim as regularidades; por último, teriam de escrever numa folha em branco outras regularidades que encontrassem.

Nesta fase inicial da intervenção, foi dada primazia ao trabalho individual, partindo-se depois para o trabalho em grupo-turma, verificando-se grande interação entre os alunos na partilha de saberes, no que diz respeito aos padrões circulares encontrados. Ainda nesta fase de exploração, os alunos esqueciam-se de sublinhar o algarismo das unidades (havendo mesmo um aluno que não sabia identificar a classe das unidades), e de identificar o respetivo padrão corretamente

Dada esta situação, foi prestado auxílio individualmente, destinado ao esclarecimento de dúvidas mais específicas, relativamente aos padrões. Apesar da difícil gestão durante esta fase de atividade, procurou-se acompanhar o trabalho desenvolvido por cada um dos alunos.

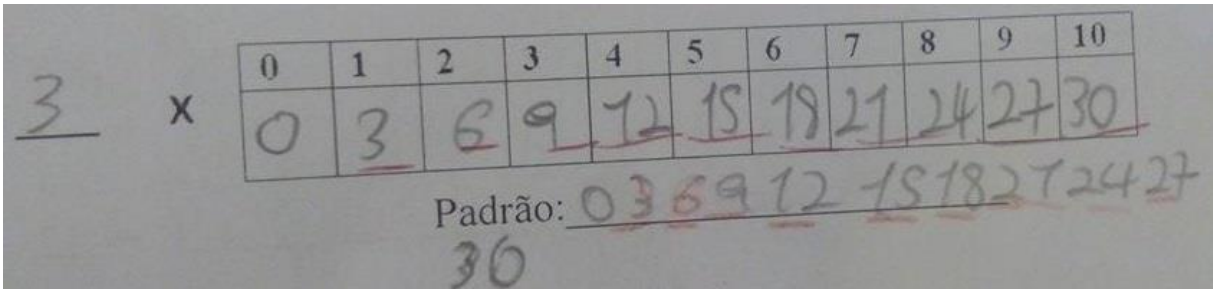


Figura 1 - Resolução de um aluno (DV) na tarefa 1 e 2 da ficha de trabalho 1.

Na segunda alínea, de um modo geral, os alunos demonstraram dificuldades em identificar o padrão e, na terceira alínea, começaram por demonstrar algumas dificuldades em desenhar o padrão circular, demonstrando logo dúvidas no padrão circular da tabuada do quatro. No desenho dos padrões circulares, identificaram-se as seguintes fragilidades: os alunos não percebiam de imediato que o padrão começava a ser repetitivo; por conseguinte, em vez de identificarem somente o padrão, colocavam novamente a tabuada.

A par destas fragilidades, houve alunos que, mesmo assim, conservaram alguns padrões circulares errados. No entanto, era visível o entusiasmo de toda a turma, em querer participar.

Assim, a alínea três ofereceu aos alunos um nível de desafio que os levou mesmo a discussões paralelas, conduzindo a uma discussão mais aberta em grupo-turma.

No final, todos os grupos conseguiram desenhar os onze padrões circulares, realizando a tarefa proposta com sucesso. Quando os alunos terminavam um padrão circular, iam explicá-lo e desenhá-lo ao quadro, promovendo-se deste modo uma discussão em plenário. Tendo sido assegurada a compreensão dos alunos naquele padrão circular em particular, cada aluno, individualmente, prosseguia para o padrão seguinte.

Depois de terem todos já desenhado os onze padrões circulares, foram debatidas algumas conclusões acerca das figuras obtidas nos padrões circulares, chegando-se a generalizações, de forma a promover a comunicação matemática no domínio oral. A generalização é compreendida pelo NCTM (2000) como uma das principais finalidades do ensino da matemática. Neste âmbito, os padrões, pela sua natureza, integram o contexto privilegiado para trabalhar a matemática e constituem uma forma de encorajar os estudantes a explorar ideias relevantes como sejam a conjetura e a generalização.

Investigadora: *olhando para os padrões circulares que vocês desenharam, o que vêm de comum entre eles?*
HG*: O padrão circular do um e do nove são iguais.*
PP: *E a do zero e a do dez.*
LA: *O padrão circular da tabuada do dois e do oito são iguais.*
TS: *E a do três e a do sete.*
DE: *O padrão do dois e do quatro são iguais.*
Investigadora: *É verdade?*
Turma: *Não! [em uníssono]*
DE: *Enganei-me! O padrão circular do quatro e do seis é que são iguais... E também o padrão circular do dois e do doze.*
RG: *e o da tabuada do cinco e o do sete também são iguais.*
Turma: *do cinco?*
RG: *enganei-me.*
BV: *A tabuada do um, três, sete e nove têm sempre todos os algarismos.*
Investigadora: *E reparam que alguns padrões formam figuras geométricas?*
RG: *Sim! O padrão circular da tabuada do dois e do oito formam um pentágono!*
LA: *E há tabuadas que formam estrelas!*
Investigadora: *Quais tabuadas?*
MM: *A tabuada do quatro e do seis.*
Investigadora: *De quantas pontas?*

TV: cinco pontas.
HC: e a tabuada do dois e a do sete formam uma estrela de dez pontas!

Transcrição 1 – Discussão em turma, sobre conclusões acerca das figuras obtidas nos padrões circulares (na exploração da ficha de trabalho 1).

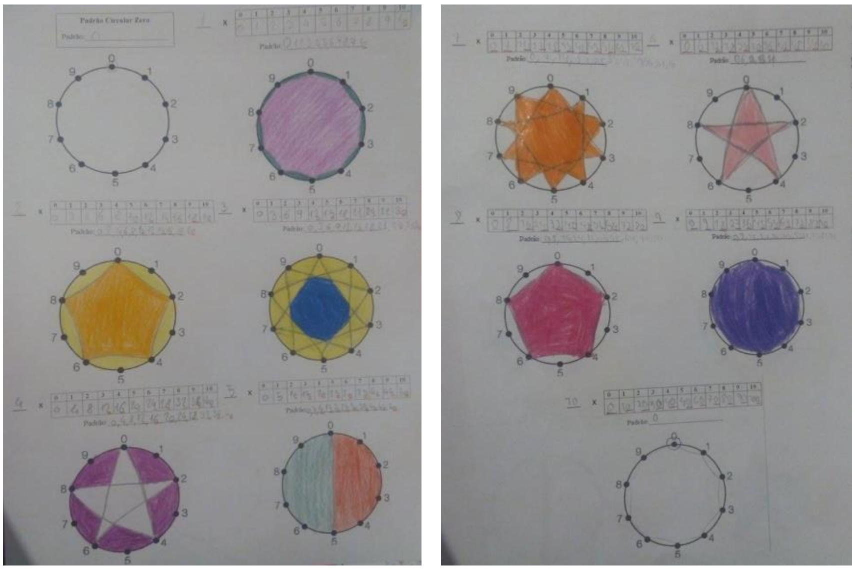


Figura 2 - Resolução da ficha, por dois alunos (Padrões circulares obtidos).

Na última alínea, os alunos optaram por debater somente a regularidade encontrada na tabuada do nove. Um dos alunos veio ao quadro explicar, pois foi o único que levantou a mão aquando da pergunta sobre qual a regularidade encontrada. Escreveu a tabuada no quadro, enquanto um dos alunos complementou a informação dizendo que diminuía de um lado (apontando para as unidades) e aumentava do outro (apontando para as dezenas).

No terceiro momento da intervenção, deu-se início à leitura da história "A divisão do Sebastião", capítulo da obra *Quando as estrelas se transformam em números*, de Leonel Vieira. Neste capítulo um menino chamado Hugo não compreende o algoritmo da divisão e é o Sebastião que o ajuda a perceber.

Esta intervenção tinha como objetivo essencial a resolução de problemas. À medida que a história foi sendo lida, foram analisados pequenos problemas e questões que envolviam o raciocínio matemático. Inicialmente a turma explorou o mês que é referido no começo da história. Assim sendo, foi questionada sobre qual seria o mês mais curto e o mais comprido, quanto ao número de letras que constituem a palavra. Foi atribuído um número inteiro (primeiramente) e um número decimal para o valor de cada letra do mês, em euros, e foi pedido aos alunos que calculassem os preços para cada mês.

De um modo geral, os alunos conceberam, de imediato, a estratégia a usar nos problemas propostos, recorrendo maioritariamente ao mesmo tipo de raciocínio, verificando-se que muitos dos alunos demonstraram interesse e curiosidade em optar pelo algoritmo da multiplicação, quando estava envolvido um número decimal, tal como tinham recorrido a esse algoritmo no cálculo com um número inteiro. Mas como os alunos não tinham ainda abordado o algoritmo da multiplicação com números decimais, recorreram à adição.

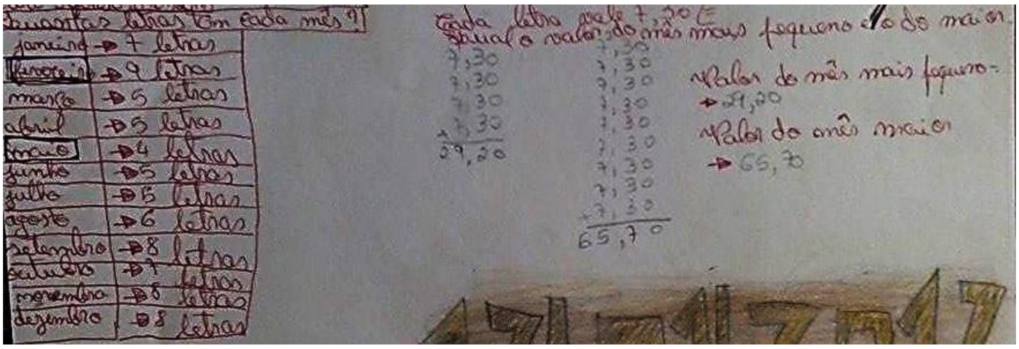


Figura 3 - Determinação do mês mais pequeno e do mês maior, quanto ao número de letras, e cálculo do preço de cada mês.

Na tarefa que se seguiu, deu-se lugar à continuação da história, abordando-se a "Cantiga do Sebastião", sendo que os alunos preencheram os espaços em falta da cantiga, tendo sido este exercício realizado em Grupo-Turma.

Esta cantiga envolvia distribuir (igualmente) por cada mão, o resultado de uma divisão (divisão como distribuição). Foram propostas outras distribuições (primeiro pelas mãos), depois pelos quatro membros, usando-se a matemática de um modo mais interativo, "brincando-se" um pouco com os números, e estimulando constantemente a participação e reflexão dos alunos.

Este momento da intervenção, pelo seu caráter mais dinâmico, envolvia uma maior participação dos alunos. Segundo Martinho e Ponte (2005), valorizar uma dinâmica comunicativa na sala de aula denota que o professor estimula o interesse dos alunos para enriquecer as interações estabelecidas. Na realidade, um dos seus papéis é fazer emergir a atividade independente de cada aluno através da interação. (p.5)

Investigadora: *Então trinta e dois a dividir por quatro quantos são? O que é que o autor quis dizer com "em cada mão"?*
RG: *Dá oito, mas lá [referindo-se ao texto] diz em cada mão! Portanto dá quatro em cada mão.*
Investigadora: *O que é que o Sebastião fez?*
DE: *Distribuiu o oito igualmente por cada mão.*
FS: *Não percebi...*
Investigadora: *Repara no resultado da divisão. Qual é?*
FS: *Oito...*
Investigadora: *Distribuindo esse número dá quantos dedos em cada mão? Distribuindo o mesmo número.*
DE: *Oito é igual a quatro mais quatro.*
Investigadora: *Ou seja quatro mais quatro igual a oito. [gesticulando com as mãos, representando o número de dedos em cada mão]*
Investigadora: *Eu vou fazer o que o Sebastião fez, mas agora com outros números. Por exemplo, quanto é que dá em cada mão dezoito a dividir por três?*
LF: *Seis.*
Turma: *Seis!*
Investigadora: *Eu disse em cada mão...*
DE: *Três.*
Turma: *Três!*

(...)

Investigadora: *Seguindo o mesmo raciocínio, vamos agora, em vez de distribuir o resultado pelas mãos, distribuí-lo pelas mãos e pelos pés. Ou seja temos de distribuí-lo por quatro conjuntos.*
DE: *Agora já não é em cada mão, é em cada membro.*
Investigadora: *Muito bem! Agora quero que responda quem ainda não respondeu. Quanto dá então, em cada mão, quatrocentos a dividir por vinte?*
NF: *Ei!*
Investigadora: *Para já digam o resultado.*
NF: *Duzentos!*
Investigadora: *Pensem melhor.*
RG: *Já sei! Já sei! Mas não posso dizer...*
MM: *vinte!*
DE: *É fácil... dois vezes dois quatro ...*
Turma: *Cinco em cada mão.*

Transcrição 2 - Discussão realizada em grupo turma, na exploração da Cantiga do Sebastião.

É de ressalvar que as divisões como distribuição propostas, feitas em grupo-turma, tiveram a participação apenas de uma minoria da turma, inicialmente. Contudo, apenas um aluno demonstrou dificuldades, dizendo que não estava a perceber o processo de distribuição. Quando questionado, da terceira vez, respondeu corretamente. Inclusive houve uma aluna que se levantou, mostrando à turma, o número que ficava em cada um dos quatro membros.

À medida que as divisões foram ficando mais complexas e desafiantes, os alunos demoravam mais tempo a responder, precipitando-se, por vezes, a dizer o resultado. Verificou-se que o raciocínio, no que diz respeito ao cálculo mental, não era um ponto forte, na maioria da turma. No entanto, foi-se constatando, cada vez mais, um envolvimento espontâneo dos alunos nesta tarefa, os quais não demonstraram dúvidas na interpretação do que era pretendido e no tipo de raciocínio a usar.

4.1.2. *Segunda Intervenção*

Na segunda intervenção, realizada em 18 de janeiro de 2017, por forma a interligar-se com a primeira, não só se optou por dar continuidade às divisões, mas agora sob a forma de fração, como também em dar continuidade à história usada.

Como primeiro objetivo esta intervenção visava a exploração de frações equivalentes (por multiplicação dos termos por um mesmo fator e dividindo os termos um pelo outro), sendo que era esperado que os alunos verificassem que o quociente não se altera. Foi privilegiada a continuidade da narrativa, procedendo-se como segundo objetivo, à contextualização do algoritmo da divisão com um problema (inicialmente o narrado na história e posteriormente, outros problemas propostos). Como objetivo terceiro, depois de finalizada a leitura da história, foi proposto aos alunos a continuação da mesma.

Investigadora: *Nós na última aula trabalhamos com a fração três quartos. Se eu quiser achar uma fração equivalente a esta, o que faço?*
HC: *Multiplicamos por dois, por exemplo.*
Investigadora: *E se quisermos uma fração equivalente a esta, mas multiplicando os termos por um número maior, por exemplo por nove?*
RG: *Quinhentos e setenta e seis!*
Investigadora: *Muito bem! Podes vir ao quadro.*
RF: *Quinhentos e setenta e seis setenta e dois avos.*
Investigadora: *Agora quero que façam esta divisão, sessenta e quatro a dividir por oito e também quinhentos e setenta e seis a dividir por setenta e dois.*
DE: *Mentalmente? Sessenta e quatro a dividir por oito são oito.*
FS: *É difícil…*
Investigadora: *Têm alguma noção do que vos vai dar, quinhentos e setenta e seis a dividir por setenta e dois?*
LA: *Mais ou menos… trinta e tal…*

(…)

Investigadora: *Então conclusões a que chegamos… multiplicando o mesmo fator pelo denominador e pelo numerador, obtemos uma fração equivalente e essa fração vai ter o mesmo…?*

RG: *O mesmo quociente.*
Investigadora: *E o mesmo acontece quando dividimos pelo mesmo número ambos os termos da fração. Quando eu vos colocava uma fração equivalente e vos pedia para dividi-la vocês não estavam a perceber que o resultado ia ser o mesmo, pois não?*
Turma: *Não. [olhando uns para os outros]*
Investigadora: *Ou seja ter sob a forma de fração ou sob a forma de algoritmo é igual, é uma divisão.*

Transcrição 3 - Discussão realizada em grupo turma, na exploração das frações equivalentes.

Uma das fragilidades evidenciadas pela turma prendeu-se com o facto de os alunos demorarem a compreender que o quociente não se altera, ou seja, a conjeturarem que, multiplicando ou dividindo pelo mesmo fator o denominador e o numerador, ou dividindo as frações equivalentes, o resultado seria o mesmo. Mesmo numa segunda tarefa mostraram-se surpreendidos quando o numerador da fração era maior.

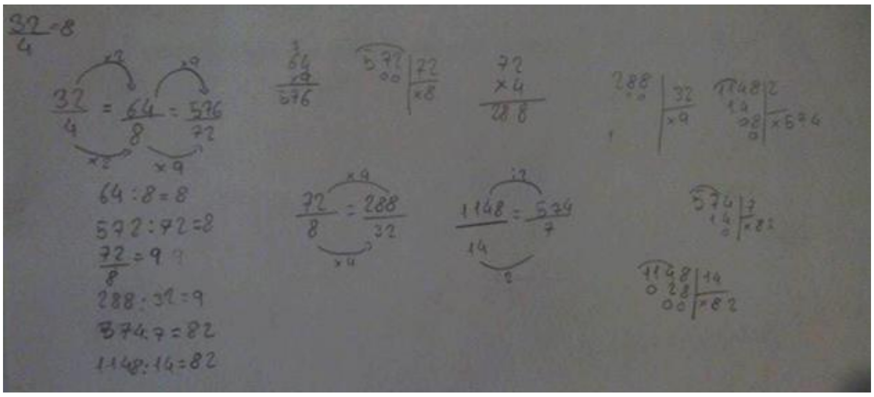


Figura 4 - Exploração de frações equivalentes, pelo aluno LF.

No momento seguinte deu-se prosseguimento à narrativa, contextualizando o algoritmo da divisão com problemas. Primeiramente foi analisado o problema apresentado na história, resolvendo-o. De seguida, foram propostos dois outros problemas. Um dos problemas envolvia a divisão como distribuição, ao passo que o outro envolvia a divisão como medida. "A divisão como distribuição refere-se a uma situação na qual uma quantidade é partilhada igualmente num dado número de grupos e quer-se saber quantos ficam em cada grupo." Já a divisão como medida, "corresponde a uma situação na qual se quer dividir uma quantidade em grupos com um dado número de elementos e quer-se saber quantos grupos se podem fazer” (Serrazina & Ponte, 2000, p.152).

Quanto ao problema apresentado na história, que envolvia a divisão como medida, o aluno deveria ser capaz de seguir alguns passos de modo a compreender o texto do problema, analisando-o por partes. O aluno deveria ter a capacidade de extrair e recuperar determinada informação, para interpretar aquilo que lia e para refletir sobre e/ou avaliar o conteúdo e formato do texto, com base nos seus conhecimentos.

Confrontados com o problema da história, os alunos não demonstraram dificuldades no algoritmo a aplicar, mas depois esqueceram-se de considerar os berlindes sobrantes. Depois dos alunos irem ao quadro resolver o problema pelo seu método, foi confrontada essa resolução com a resolução concretizada na história, que para além de recorrer ao raciocínio algorítmico, recorria ao cálculo mental por estimativa. Para além disso, foram visíveis algumas fragilidades quando os alunos recorreram ao cálculo mental.

Deu-se continuidade à modalidade de trabalho em grupo-turma, adotada no momento anterior, onde os alunos puderam partilhar os seus saberes e conclusões e discutir ideias.

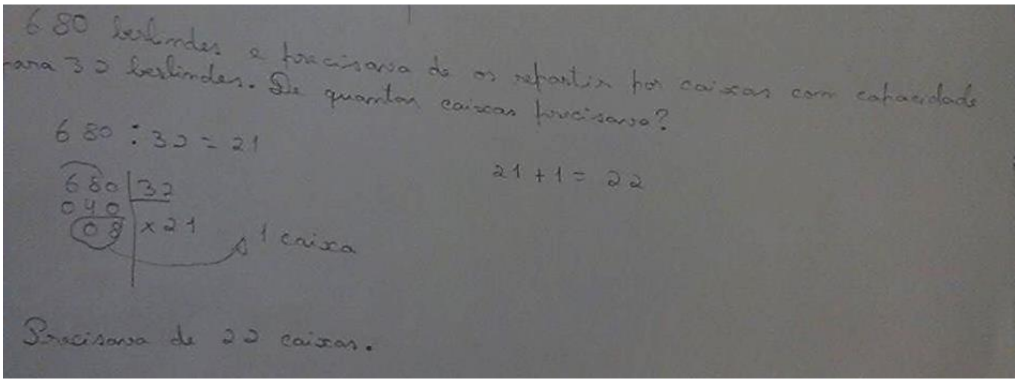


Figura 5 - Resolução do problema presente na história, pelo aluno RG.

No segundo problema, como a divisão era exata, os alunos não demonstraram dificuldades nem quanto ao algoritmo a recorrer, nem quanto à interpretação do resultado obtido. Contudo, foi também pedido que calculassem o resultado por estimativa, de modo a perceber entre que valores, o resultado se podia situar.

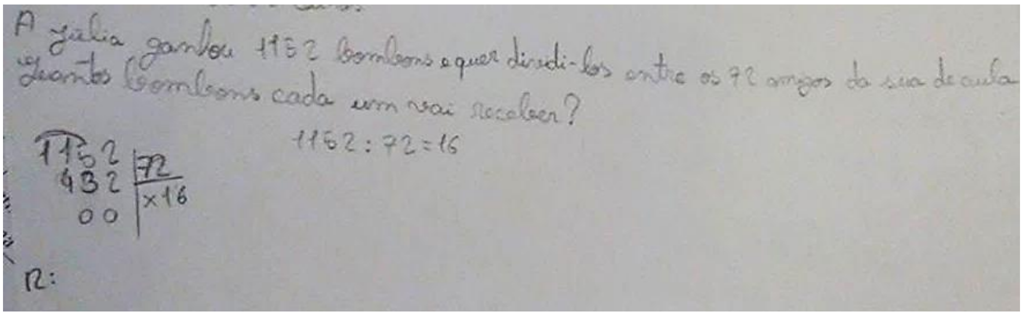


Figura 6 - Resolução do segundo problema proposto, pelo aluno LF.

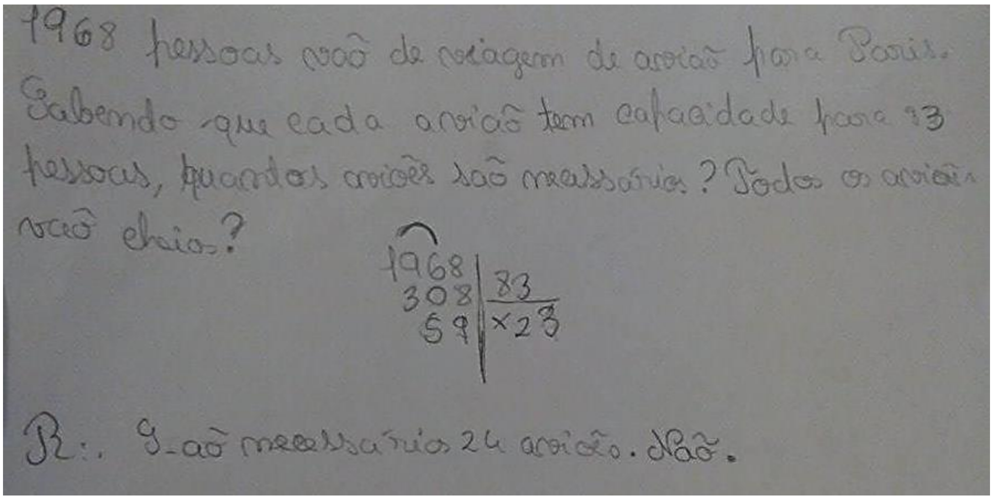


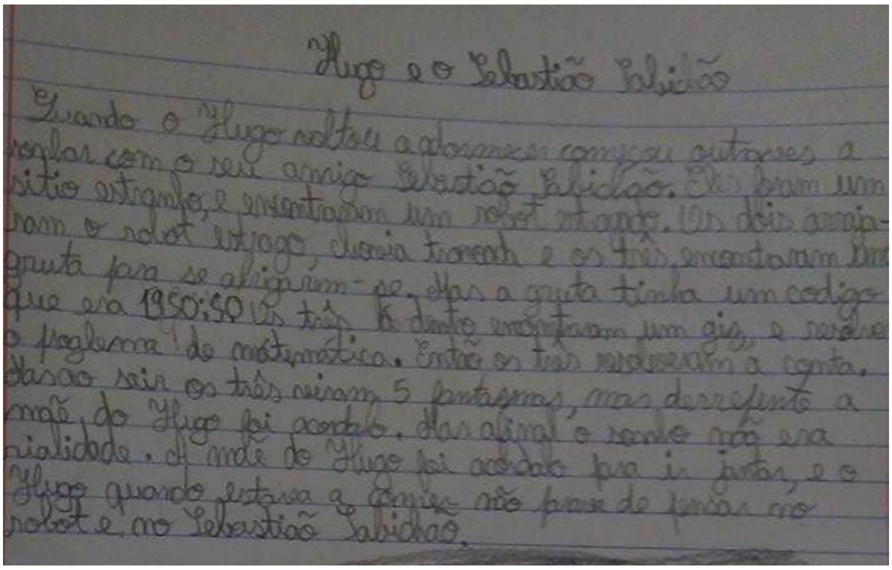
Figura 7 - Resolução do terceiro problema proposto, pelo aluno VS.

Em suma, foi visível por parte dos alunos uma maior dificuldade no problema presente na história, que envolvia a divisão como medição, esquecendo-se de considerar os berlindes sobrantes, tal como no terceiro problema, em que se esqueceram de considerar as pessoas que sobravam. Como no segundo problema, a divisão era exata, os alunos simplesmente deram atenção ao algoritmo da divisão, e não ao contexto do problema.

Estas situações problema permitiram aos alunos desenvolver uma atitude crítica perante os enunciados dos problemas, promovendo a comunicação, partilha e exploração de ideias e estratégias de formulação, resultando numa resolução de forma efetiva. Para além disso, os alunos tiveram oportunidade de exprimir e justificar os seus raciocínios, revelando que a integração da matemática com a língua portuguesa é profícua no desenvolvimento de competências de numeracia.

No terceiro momento da intervenção, foi pedido aos alunos que dessem continuidade à história, em pequenos grupos, com novos diálogos e personagens, e que criassem nessa mesma história um problema que envolvesse o algoritmo da divisão, que teriam de resolver. Nesta fase, estimulou-se a comunicação entre os alunos do mesmo grupo, incentivando-os a questionarem os seus pares acerca das ideias apresentadas.

É de ressaltar que a criação de histórias com problemas envolve competências de leitura, escrita, resolução e formulação de problemas num contexto específico. Na formulação de problemas, o trabalho cooperativo demonstrou-se mais significativo, por esta ser a atividade que exigia mais criatividade.



Hugo e o Sebastião Sabidão

Quando o Hugo voltou a adormecer começou outra vez a sonhar com o seu amigo Sebastião Sabidão. Eles foram um sítio estranho, e encontraram um robot estranho. Os dois amigaram o robot estranho, chovia trovoada e os três encontraram uma gruta para se abrigarem-se. Mas a gruta tinha um codigo que era 1950:50 Os três lá dentro encontraram um giz, e resolveram o problema de matemática. Então os três resolveram a conta. Ao sair os três viram 5 fantasmas, mas derrepente a mãe do Hugo foi acordá-lo. Mas afinal o sonho não era rialidade. A mãe do Hugo foi acordá-lo para ir jantar, e o Hugo quando estava a comer não parava de pensar no robot e no Sebastião Sabidão.

Figura 8 - Produção da história, pelo grupo MR, MC, LA e TV.

Quanto aos vários tipos de problemas criados, dos cinco grupos apresentados, apenas três grupos contextualizaram o problema. Assim, grande parte dos grupos focou-se somente em apresentar uma simples divisão e em resolvê-la.

A maior parte dos grupos manteve as personagens da história original, sendo que outros não acrescentaram novas personagens. Alguns grupos demonstraram ter grande imaginação e criatividade, tanto no contexto do problema, como na história que o envolvia.

No que se refere à organização dos grupos e cooperação entre os vários elementos, dois dos grupos, apesar de terem integrado um aluno com dificuldades, conseguiram organizar-se bem, cooperando entre si, e ouvindo as opiniões uns dos outros. Também foi notável os vários ritmos dos grupos, sendo visível que alguns grupos demoraram a dar início ao processo e a organizarem-se, enquanto outros conseguiram fazê-lo de imediato, tendo terminado a tarefa rapidamente.

No último momento, os alunos apresentaram à turma a história e o problema, pedindo a outro grupo que fosse resolver esse mesmo problema. Na leitura das histórias, a maioria dos grupos optou por colocar os seus elementos a lerem à vez, demonstrando organização e cooperação.

Figura 9 - Apresentação dos grupos, à turma, das histórias criadas.

No que diz respeito à resolução dos problemas que eram propostos pelo grupo que os criou, todos os grupos os conseguiram resolver, sem grandes dificuldades, exceto o grupo constituído por um só aluno. Este não estava a conseguir resolver o algoritmo da divisão, começando a chorar, quando o conseguiu resolver à segunda tentativa. Apesar dos restantes grupos conseguirem resolver os problemas, era evidente que, dentro de alguns grupos havia sempre um ou dois elementos que se destacavam, pois eram estes que estavam concentrados em resolver o problema, estando os restantes elementos à espera que o problema fosse solucionado. Noutros grupos, aquando da resolução, mantinham-se organizados e a cooperarem entre si, estando um atento à tabuada, enquanto outro escolhia o número a colocar no quociente, por exemplo.

Figura 10 - Resolução, por grupos, dos problemas propostos.

Na formulação de problemas, o trabalho cooperativo demonstrou-se mais significativo, por esta ser a atividade que exigia mais criatividade. De acordo com Porfírio (1993), o trabalho de grupo permite desenvolver uma atitude de persistência perante as dificuldades, possibilita o envolvimento e a participação dos alunos tidos como menos bons.

A aprendizagem cooperativa é descrita como o processo de os alunos trabalharem em pequenos grupos e para Grandin (2006), o processo cooperativo envolve um conjunto de competências comportamentais de grupo: um comportamento de grupo inclusivo, que passa por partilharem pontos de vista e dificuldades; mediarem opiniões diferentes e alcançarem o consenso de opiniões no grupo, favorecendo a comunicação matemática. A capacidade de pensamento crítico, raciocínio e compreensão mútua são requeridos para analisar de que modo as contribuições individuais se reúnem para integrar um todo.

Em síntese, com esta última tarefa pretendeu-se promover de modo mais profundo a interdisciplinaridade entre a disciplina de Matemática e a disciplina de Português. Segundo Sardinha (2011), a formulação de problemas com história, promove o desenvolvimento da escrita criativa, da compreensão textual, das capacidades de formulação e resolução de problemas e do pensamento crítico e criativo, potenciando o uso de estratégias de resolução diversificadas. Assim, é possível trabalhar, articular e desenvolver competências transversais e específicas das duas áreas de forma integrada.

Com estas tarefas, que potenciam o desenvolvimento matemático, os alunos mostraram-se bastante motivados e recetivos, sendo verificável um envolvimento ativo e mais confiante por parte destes na conceção dos seus problemas, na resolução e na forma de testar e verificar conjeturas, em grupo.

4.1.3. *Terceira Intervenção*

A terceira intervenção, decorrida no dia 19 de janeiro de 2017, objetivava, essencialmente, a utilização do material multibase na abordagem do algoritmo da divisão e a abordagem do cálculo, em forma de dízima, do quociente de números inteiros, com aproximação às décimas, centésimas e milésimas. Assim, a história usada em intervenções anteriores deixou de ser usada, dando lugar ao material multibase, tendo em vista a exploração do algoritmo da divisão, mas agora de forma prática.

Das quatro intervenções realizadas, esta foi a única que não ultrapassou o tempo estipulado, para uma hora e meia, tendo as restantes intervenções ultrapassado esse tempo.

No primeiro momento da intervenção, foi introduzido o material multibase, sendo que este "é formado por várias peças de madeira ou plástico. As unidades mais simples são os cubos unitários, que vão sendo agrupados em número igual ao número de base. O material multibase tem uma limitação: só poderão ser representados no máximo, números com quatro algarismos, pois não há modelo físico para a unidade de 4.ª ordem." (Vale & Pimentel, 2004, p.174).

Os alunos organizaram-se em pequenos grupos e, primeiramente foi pedido que representassem números inteiros, recorrendo ao material, como forma também de ter conhecimento sobre as conceções prévias acerca do material, e como modo preparatório para a atividade seguinte. Os alunos não demonstraram nenhumas dificuldades na manipulação do material para a representação de números inteiros (considerando o cubinho como unidade), reconhecendo as ordens correspondentes a cada material representativo, sendo notável, no grupo, o trabalho em equipa.

Figura 11 - Manipulação do material multibase (base dez), por um dos grupos.

Nesta atividade foi privilegiado o trabalho em pequeno grupo, sendo que em cada grupo acabava sempre por se destacar um aluno, por norma, melhor à disciplina de Matemática, assumindo o papel de líder na atividade, cujo sucesso dependeu, principalmente, da sua iniciativa.

Neste sentido, "Muitas vezes, um ou dois alunos tomam a liderança e levam o grupo a centrar-se em certas ideias, facilitando, assim, o trabalho conjunto." (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003, p. 30). Contudo, o entusiasmo era geral, querendo sempre todos os grupos participar, mostrando a representação pedida.

Na atividade seguinte, foi abordado o algoritmo da divisão, recorrendo-se ao material multibase, tendo sido feita a divisão por conjuntos: divisão das centenas, divisão das dezenas e divisão das unidades. Este processo foi feito sempre em conjunto com a turma, onde o algoritmo da divisão expandido era acompanhado com o material, de forma a perceber os passos que envolvem o algoritmo da divisão, o porquê de se ter de "abaixar" um determinado número do dividendo, e mesmo o porquê de se escolher determinado algarismo a colocar no quociente. Por fim, simplificou-se o algoritmo da divisão.

Investigadora: *Temos quatrocentos e setenta e dois a dividir por três. Vamos repartir o número quatrocentos e setenta e dois por três conjuntos, que vamos desenhar aqui. Como se representa o quotrocentos e setenta e dois?*
DE: *Quatro coisos assim [levantando a placa no ar], sete barras e dois cubos.*
Investigadora: *Devemos começar por qual ordem, a distribuir pelos conjuntos? Pelo algarismo das centenas, das dezenas ou das unidades?*
MA: *Começamos pelo maior. [referindo-se à ordem]*
Investigadora: *Pegando nestas quatro placas se eu as quiser repartir por cada conjunto, com quanto fica cada conjunto?*
PP: *Ah...cinquenta.*
Investigadora: *Quatro placas que temos, quero saber o número de placas.*

DV: *Cento e cinquenta.*
PP: *Uma! Uma! Dá uma placa para cada conjunto. E depois sobra uma.*
Investigadora: *Sobra uma, exato. E quantos quadrados tem esta placa?*
DE: *Cem.*
Investigadora: *Ou seja foi utilizada uma placa para cada conjunto. Vamos colocar aqui no dividendo qual número?*
PP: *Um.*
Investigadora: *Fazendo a divisão expandida, temos aqui agora quatro menos três que dá um, que é a placa que nos sobra. Esta placa, já vimos, que equivale a cem e vamos agora transformá-la em dezenas. O que temos de fazer?*
LA: *Dá dez barras.*
Investigadora: *Agora vamos juntar às sete dezenas que já temos e ficamos com quantas dezenas?*
DE: *Dezassete dezenas.*
Investigadora: *Como podem verificar aqui no algoritmo também abaixamos o sete e ficamos com dezassete dezenas, o algoritmo vai ao encontro do nosso processo. Distribuindo agora as quinze dezenas pelos três conjuntos, quanto fica em cada um?*
RG: *cinco barras em cada conjunto.*
Investigadora: *E sobra alguma barra?*
Turma: *Duas!*

Transcrição 4 - Discussão em grupo-turma, no uso do material multibase, para a compreensão do algoritmo da divisão.

De um modo geral a turma percebeu os processos que envolveram o algoritmo da divisão, havendo alunos que se destacaram por perceberem de imediato quanto iria receber cada conjunto.

A utilização do material ao longo da intervenção demonstrou-se estruturante para os alunos, permitindo acentuar as potencialidades e aprendizagens já possuídas acerca do mesmo, para o prosseguimento na exploração do algoritmo da divisão.

Como refere Serrazina (1990), " os estudantes que utilizam materiais manipulativos na construção de conceitos têm melhores resultados que os que o não fizeram, pois os alunos são indivíduos ativos que constroem, modificam e integram ideias ao interaccionar com o mundo físico, os materiais e os seus colegas, donde a aprendizagem da Matemática deve ser um processo activo. A aprendizagem baseia-se na experiência e a construção de conceitos matemáticos é um processo longo que requer envolvimento activo do aluno e que vai progredindo do concreto para o abstracto." (p.1)

No segundo momento da intervenção, foi abordado um conteúdo novo, cálculo em forma de dízima, do quociente de dois números inteiros, calculando com aproximação às décimas, às centésimas e às milésimas. Inicialmente era grande o receio de que os alunos não compreendessem o acrescento de zeros no dividendo, por ser um conteúdo novo, no entanto alguns alunos revelaram-se perspicazes.

Investigadora: *Como podemos transformar este resto seis, numa ordem mais pequena?*
DE: *Já sei! Em décimas!*
Investigadora: *Muito bem! E como fazemos isso?*
RG: *Coloca-se uma vírgula.*
Investigadora: *E acrescenta-se um ...?*
RG: *Zero!*
Investigadora: *Então para se transformar em décimas, acrescentou-se uma casa decimal. E para se transformar em centésimas, quantas casas temos de acrescentar?*
RG: *Duas casas decimais.*
Investigadora: *E em milésimas?*
Turma: *Três casas.*
Investigadora: *Nesta divisão queremos tentar chegar ao resto zero, chegamos agora. Temos duas casas decimais no dividendo, quantas temos de ter no quociente?*
DE: *Fica seis vírgula setenta e cinco.*
Investigadora: *Porquê? Porque andamos duas casas decimais. Ficamos então com seis unidades e setenta e cinco centésimas. E no resto quantas casas decimais temos de colocar?*
Turma: *Duas.*

Transcrição 5 - Discussão em grupo-turma, no cálculo em forma de dízima do quociente de dois números inteiros.

Ao longo das divisões exploradas, com aproximação às décimas, centésimas e milésimas, foi sempre pedido que transformassem o resultado em fração decimal, ou seja, que apresentassem o resultado sob a forma de fração. Este pedido não suscitou grandes dificuldades, havendo a par disto, sempre alguns alunos mais distraídos. Por último, de modo a sistematizarem o conteúdo novo aprendido, realizaram mais alguns exercícios individualmente no caderno diário, propostos no quadro.

Neste momento privilegiou-se o trabalho em grupo-turma, tal como na atividade anterior, dado que se tratava de um conteúdo novo, sendo que os alunos precisavam de um maior acompanhamento e orientação, ouvindo-se sempre as ideias previamente, antes de introduzir o conteúdo propriamente dito. Assim, perante as solicitações frequentes dos alunos a este novo conteúdo, não houve um foco tão grande na exteriorização de opiniões concretas, adotando-se uma atitude aberta e questionadora que os estimulou a refletirem e a (re)formularem as suas ideias face aos conflitos que experienciaram. Tal como é referido pelo NCTM (1994), "Em última análise, os alunos devem assumir a responsabilidade pela sua própria aprendizagem. No entanto, o professor é responsável pela criação de um ambiente no qual os alunos são encorajados a aceitar essa responsabilidade." (p. 118). Posto isto, alguns alunos vinham ao quadro e, com a ajuda dos colegas, resolviam a divisão, aproximando às décimas, centésimas ou milésimas (consoante o que fosse pedido).

No último momento da intervenção voltou-se novamente à utilização do material multibase, onde foi pedido que os alunos representassem números decimais, alterando as regras de representação. Aqui um dos objetivos passava por identificar a parte inteira e a parte decimal de um número.

Numa fase primeira tinham de considerar como décima um cubinho e tentar perceber qual seria então o material representativo das unidades, depois o das dezenas e depois o das centenas. Inicialmente apenas um grupo apresentou corretamente o material representativo das unidades, ficando a turma no geral um pouco confusa e reticente em mostrar o material, apresentando alguns o material representativo de quando a unidade é considerada o cubo unitário. Ou seja, aqui verificou-se que se torna um pouco difícil para os alunos se desligarem das conceções, dos conceitos e das representações que já têm interiorizados e enraizados. Mesmo depois de se já se ter colocado no quadro as "novas regras", aquando da representação dos números pedidos, os grupos ainda demonstravam dúvidas.

Numa segunda fase, considerando o cubo (maior), como unidade, questionou-se a turma, sobre qual seria o material representativo das décimas, das centésimas e das milésimas. Inicialmente um primeiro grupo errou ao tentar descobrir, mas depois, por exclusão de partes, o grupo seguinte acertou no material. Esta última mudança de regras ainda se tornou mais difícil de interiorizar, para depois se proceder à representação. À medida que a atividade se foi desenvolvendo, os grupos mostravam-se mais confiantes e seguros, mostrando o material representativo do número pedido.

Figura 12 - Manipulação do material multibase (base dez), na representação de números inteiros, por grupos.

Em jeito de conclusão sobre esta intervenção, torna-se relevante frisar que a manipulação do material concreto pelos alunos mostrou-se importante, pois permitiu que refletissem acerca das suas conceções e pensamentos e que elaborassem novas estratégias de raciocínio.

Deste modo, a exploração do material multibase, na abordagem do algoritmo da divisão, possibilitou aprofundar conhecimentos já construídos e edificar novos conhecimentos neste âmbito.

Nesta linha de pensamento Ponte (2008) refere que "para a aprendizagem ser profunda, é necessário propor aos alunos, de forma equilibrada, tarefas cujas características se complementem, possibilitando a mobilização das suas capacidades de ordem superior e uma aprendizagem mais rica e estimulante. Não o fazendo, corre-se o risco de não se desenvolverem competências importantes." (p.13).

4.1.4. *Quarta Intervenção*

Analisando numa perspetiva sequencial as intervenções realizadas anteriormente, nas quais o algoritmo da divisão era o foco principal, nesta intervenção decorrida no dia 24 de Janeiro de 2017, achou-se mais lógico que o culminar de todo este processo objetivasse a sistematização de conhecimentos acerca do algoritmo da divisão, envolvendo o raciocínio algorítmico. Lithner (2008) refere que o raciocínio algorítmico implica a escolha de uma estratégia (um algoritmo de solução e onde a argumentação preditiva tem lugar), e também que as partes de raciocínio restantes da implementação da estratégia funcionem como triviais para o raciocínio, pois apenas um erro pode impossibilitar que se chegue a uma resposta.

Esta conceção de "algoritmo" é mais abrangente do que a ideia de que um algoritmo é apenas algo que é explicitamente ensinado sob a forma de instruções executáveis, como no caso do algoritmo da divisão, por exemplo.

No primeiro momento abordou-se um dos casos do algoritmo da divisão, com o acrescento do zero no quociente. Apesar de já ser um caso conhecido dos alunos, estes sempre se demonstraram inseguros sobre quando acrescentar o zero no quociente. A partir da multiplicação, em grupo turma, foi construído o quociente para a divisão. Os alunos compreenderam bem o porquê de se ter de acrescentar o zero. Contudo, na prática, como se veio a verificar mais adiante, na realização da ficha de trabalho, não souberam aplicar os conhecimentos. Assim sendo, na teoria foi visível que os alunos interiorizaram os conceitos, mas não os fizeram corresponder na prática, em exercícios que envolviam o algoritmo da divisão.

No segundo momento da intervenção, os alunos puderam visualizar um pequeno vídeo sobre um contexto de problema, que envolvia o algoritmo da divisão e os erros subjacentes a este. Para além de serem mostrados erros cometidos no algoritmo da divisão, também foram mostrados erros envolvidos no algoritmo da multiplicação e na adição. Por fim, o vídeo foi debatido e foi explicado no quadro quais os erros cometidos, em discussão em grupo-turma.

No último momento, foi distribuída a ficha de trabalho 2 – " A caça aos erros no Algoritmo da Divisão" (anexo B), onde era pretendido que os alunos encontrassem os erros, os assinalassem, e os corrigissem para a resolução correta. Aqui privilegiou-se o trabalho individual, para que os alunos assumissem a sua própria independência na realização dos exercícios, que visavam dar resposta a muitas das dificuldades que surgem no algoritmo da divisão. No entanto, os alunos não se distanciavam da ficha, e tendencialmente seguiam os erros desta, copiando-os. Inicialmente, alguns dos melhores alunos da turma também estavam a seguir o mesmo caminho, mas foram conseguindo distanciar-se da mesma.

Foi feito o apoio pelos lugares, auxiliando os alunos nas suas dificuldades, o que levou mais tempo do que o previsto. Os alunos tinham dificuldades em proceder ao algoritmo da divisão corretamente e em identificar essencialmente erros como a incorreta deslocação da vírgula (tanto no quociente como no resto), a ausência do zero no quociente e mesmo a incorreta escolha dos algarismos no quociente.

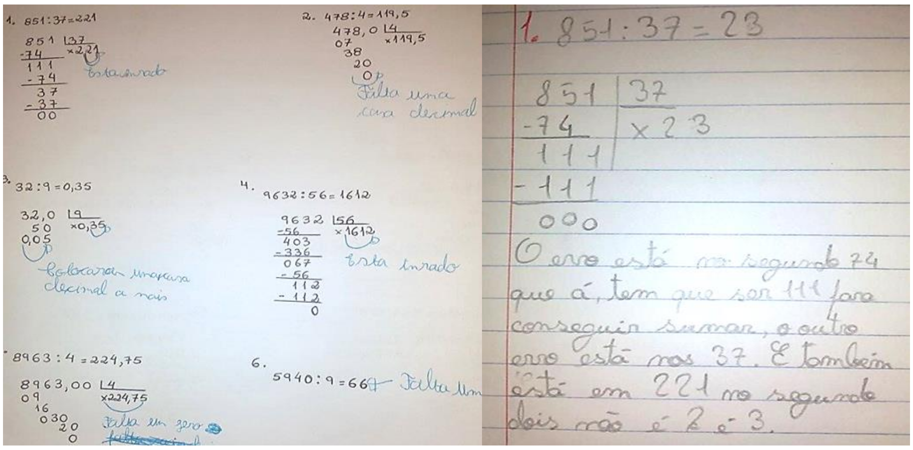


Figura 13 - Identificação dos erros e correção de uma das alíneas, da ficha de trabalho.

Inicialmente estava planeado somente serem discutidos no fim os erros encontrados, no entanto, teve de ser feita alínea por alínea a correção dos algoritmos da divisão, tendo sido chamados os alunos ao quadro, para estes não adquirirem os erros que cometeram como os corretos.

A ficha também se revelou um pouco grande, até porque o tempo planeado foi excedido.

Deste modo, promovendo-se um momento de discussão/reflexão em plenário, os alunos puderam sistematizar os seus conhecimentos e edificarem os métodos corretos, comparando-os somente no fim, com os erros da ficha.

Na correção da ficha surgiu uma divisão com três algarismos no divisor e, apesar de estes ainda não terem abordado este tópico do algoritmo da divisão, este facto não foi impeditivo para a realização do mesmo. Adotaram as mesmas estratégias e o mesmo raciocínio que adotariam se o divisor possuísse dois algarismos.

Concludentemente, tendo como referência o objetivo subjacente a esta intervenção, é de destacar que a ficha de trabalho que envolvia exercícios apoiados nos erros, não teve como propósito avaliar o aluno, mas compreender como este se apropria de um determinado conhecimento e quais as dificuldades que ainda necessita de superar até ser capaz de trabalhar com o conteúdo em questão. Assim, os alunos puderam visualizar os erros como um modo de alerta para não os tornarem procedimentais e tiveram a oportunidade de compará-los com o raciocínio correto a adotar.

4.2. Desenvolvimento de Avaliação da Intervenção Pedagógica no 2.º Ciclo do Ensino Básico

4.2.1. *Primeira Intervenção*

A primeira intervenção, realizada no dia 2 de Maio de 2017, tinha como principal objetivo a resolução de problemas que envolviam os conceitos de área e de perímetro. Para tal, foi proposto aos alunos num dos problemas, a construção de um Tangram, que foi usado nos problemas seguintes para exploração e investigação. O Tangram é um recurso didático lúdico que possibilita a exploração de vários conceitos matemáticos, permitindo relacionar as diversas figuras que o compõem, na construção e consolidação dos seguintes conceitos: figuras geométricas planas, classificação das figuras geométricas, medidas, razão e proporção, operações básicas com números racionais, perímetro e área.

No primeiro momento da intervenção pretendeu-se perceber quais as conceções prévias dos alunos acerca dos conceitos de área e perímetro, tendo sido proposto aos alunos que desenhassem numa folha quadriculada figuras com a mesma área (podendo ou não ter o mesmo perímetro). De seguida, foi explicado o conceito de figura equivalente.

Relativamente ao conceito de área e de perímetro os alunos confundiram estes dois conceitos. Muitos dos alunos tinham a ideia errónea de que, para calcularem o perímetro, tinham de contar os quadrados que se encontravam dentro da figura, confundindo o perímetro com o espaço ocupado pela figura.

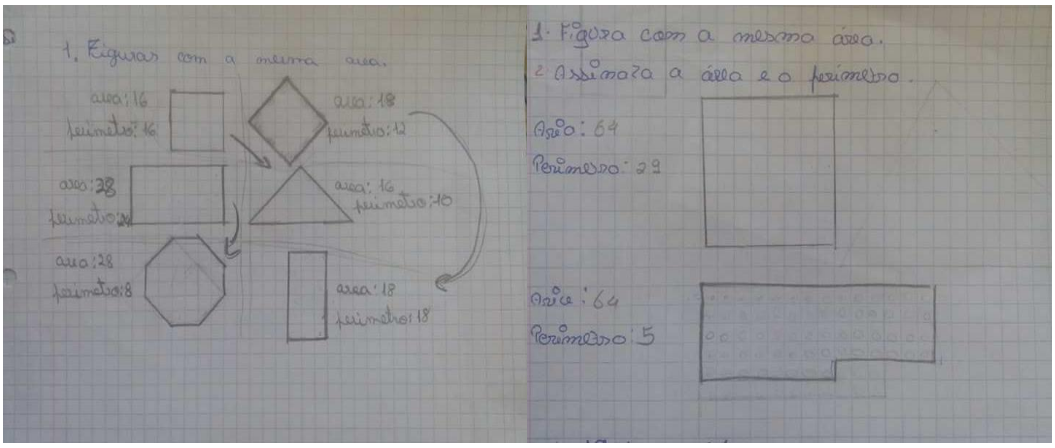


Figura 14 - Proposta de figuras equivalentes, feita por dois alunos.

Deste modo, foi verificável a enorme dificuldade dos alunos no que diz respeito ao desenho de figuras com a mesma área, mesmo depois de ter sido explicado, tendo sido mais tempo dispensado para esta tarefa, do que aquele que era esperado. A maioria dos alunos optava por desenhar figuras geométricas mais fáceis, como o quadrado e o retângulo, mostrando-se alguns alunos surpresos pelo perímetro ser diferente em algumas figuras, apesar de a área ser a mesma.

Para além disto, foi visível uma maior dificuldade na contagem de quadrículas para o perímetro do que na contagem de quadrículas para a área, pois ao alunos tinham dificuldades em perceber que o perímetro equivalia a uma espécie de "vedação" da figura, acabando por confundir ambos os conceitos.

No segundo momento da aula, os alunos começam a construir o Tangram, construção proposta no primeiro problema.

Figura 15 - Construção do Tangram.

Relativamente à construção do Tangram, os alunos começaram por ter dificuldade no posicionamento da folha onde iriam trabalhar, bem como na compreensão de conceitos já abordados, que eram mencionados nos passos para a construção do material, como por exemplo, o conceito de retas paralelas. Esta tarefa exigiu uma atenção particular no grupo de alunos com maiores dificuldades, para os quais o domínio de conceitos matemáticos não era imediato, procurando-se que os melhores alunos interagissem com os restantes, estimulando-os e auxiliando-os.

Quando os alunos foram questionados sobre como poderia ser deduzida a área do triângulo, apenas um aluno se reportou ao quadrado, dizendo que a área de um triângulo era metade. O conceito de área de um triângulo foi clarificado a partir do Tangram, não se apresentando a fórmula para memorizarem, mas antes conduzindo os alunos à compreensão do cálculo da área para esta figura geométrica em concreto.

Investigadora: *Se construíssemos uma outra figura com estas sete peças do Tangram a área seria a mesma ou diferente?*
Turma: *Diferente.*
MC: *Igual!*
Investigadora: *Só temos um aluno a discordar. Então porque dizem que a área seria diferente?*
IM: *Porque a figura é diferente.*

Investigadora: *Mas a área ocupada não ia ser a mesma?*
MC: *Sim!*
Investigadora: *Então se a área ocupada é a mesma, a área total do Tangram e da figura que podíamos construir ia ser igual. E o perímetro ia ser igual?*
Turma: *Não.*
Investigadora: *Podia ser ou não! Ia depender da nossa construção.*

Transcrição 6 - Discussão em grupo-turma, sobre a área do Tangram.

Mesmo depois do conceito de área ser explicado os alunos persistiram com as dúvidas. Contudo, depois de lhes ser novamente explicado, sempre que no enunciado aparecia o termo "espaço ocupado", os alunos referiam-se à área.

Relativamente ao segundo problema, em que era pedido que, com o triângulo médio, os alunos ocupassem o espaço do Tangram, primeiro foram ouvidas estratégias a aplicar para descobrir quantas peças (triângulos médios) eram precisas.

Investigadora: *Quantos triângulos são precisos para ocupar a área deste quadrado do vosso Tangram?*
L: *Pegar no triângulo e colocar em cima da figura para ver quantos cabem.*
Investigadora: *É a figura do vosso Tangram, que acabaram de construir, não é a figura do enunciado.*
MF: *Pegar num triângulo assim e colocar o outro assim [gesticulando com os dedos, como se os dois triângulos se complementassem e formassem um quadrado].*
CM: *É o que eu ia dizer!*
Investigadora: *Sim, poderíamos experimentar através dessa forma e ver quantos triângulos cabem na nossa área, replicando o triângulo que já temos. Mas assim íamos gastar muito tempo e papel. Podemos dividir a área do nosso Tangram pela área do nosso triângulo que já temos. O que dizem?*
CM: *Ou seja temos de saber a base e a altura do nosso triângulo, dividir a área do Tangram pelo triângulo e vai-nos dar quantos triângulos precisamos.*
Investigadora: *Muito bem.*

Transcrição 7 – Decomposição do Tangram em Triângulos Médios.

Procedeu-se então, em grupo-turma, ao cálculo da área de apenas um triângulo médio de um dos alunos, pois as medições poderiam variar um pouco. Como foram feitos arredondamentos e as construções acabam por não ser totalmente minuciosas, obteve-se um total de sete triângulos, em vez de oito como era expectável. No entanto, por uma questão de gestão de tempo, em vez de se comprovar com a replicação dos oito triângulos, no fim foi mostrada uma imagem à turma, comprovando que caberiam oito triângulos na área do Tangram.

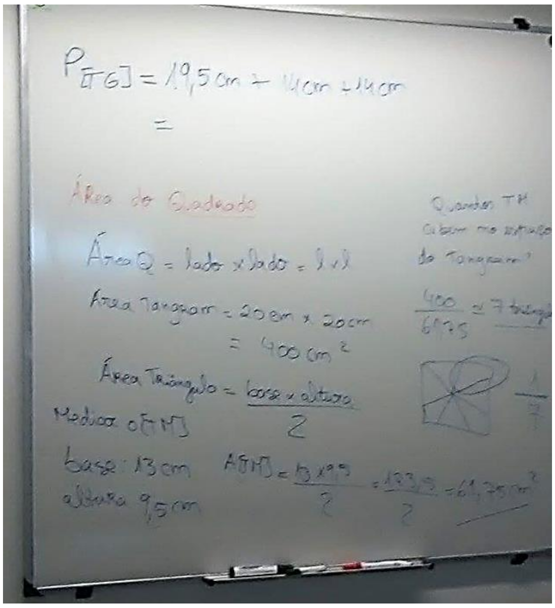


Figura 16 - Resolução das alíneas *a, b, c* e *d* do Problema 2 da Ficha.

Com a obtenção dos sete triângulos abordou-se a noção de fração de forma simples. Os alunos foram questionados como representar um dos triângulos, dos sete, sob a forma de fração e aqui os alunos, de um modo geral, não revelaram quaisquer dúvidas nem quanto à representação, nem quanto à leitura da fração.

Numa das alíneas do problema era pedido para os alunos calcularem a área e o perímetro de um trapézio, cuja figura se encontrava divida num quadrado e em dois triângulos pequenos. Foi então pedido aos alunos que montassem no seu lugar a figura que se encontrava no enunciado, de modo a poderem visualizar de forma prática a figura e poderem constatar a sua decomposição. De seguida, foi realizada uma discussão em turma de modo a descobrir como se poderia determinar tanto a área como o perímetro do trapézio, sem recorrer à fórmula, que os alunos desconheciam.

Investigadora: *Temos aqui esta figura, que se chama trapézio, constituída por um quadrado e dois triângulos pequenos. Como podemos calcular o perímetro desta figura?*
L: *Pelos lados. Pela base...*

__Investigadora:__ Tens de ser mais específico. Preciso que alguém venha assinalar no quadro, na figura, onde obtemos as medidas para o perímetro.
__CM:__ É calcular tudo junto, em redor da figura.
__Investigadora:__ E como se calcula agora a área da figura, do nosso trapézio?
__L:__ Dividindo...esta medida...
__MF:__ Medindo...
__Investigadora:__ Dividindo o quê? Ora pensem...O que é a área?
__MC:__ O que se encontra dentro do trapézio.
__Investigadora:__ É o espaço que ele ocupa, então o que temos de fazer? A área é constituída pelo quê, neste caso?
__MF:__ Pelo triângulo pequeno...
__Turma:__ por um quadrado e por outro triângulo pequeno.
__Investigadora:__ Então temos de calcular a área de quais figuras?
__MF:__ do quadrado e dos dois triângulos pequenos.

Transcrição 8 – Determinação da área e do perímetro do trapézio formado pelas peças do Tangram.

Nesta tarefa, os alunos ao unirem as peças para formar o trapézio foram-se apercebendo que o perímetro não é o resultado da soma dos lados de cada uma das figuras, individualmente. Compreenderam então, que ao formar uma nova imagem, as arestas que unem as duas peças devem ser desconsideradas. No que concerne à área, puderam constatar que aqui sim, deve ser feita a soma da área de cada uma das figuras.

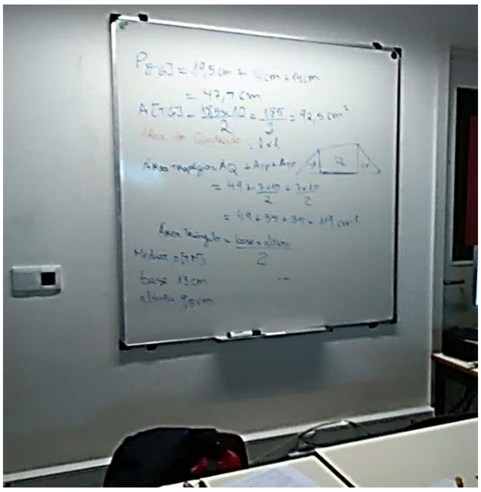


Figura 17 - Resolução da alínea *e* do Problema 2 da Ficha.

No momento seguinte os alunos calcularam a razão de semelhança entre dois quadrados e analisaram ampliações e reduções, contextualizados no problema. Aqui foi visível, tal como em momentos anteriores, que mais uma vez os alunos não possuíam nenhum tipo de conhecimento prévio sobre o conteúdo matemático em questão. Contudo, apesar de não terem conhecimento de conceitos como a razão de semelhança, ampliação e redução, compreenderam perfeitamente o contexto do problema e as medidas a ter em conta.

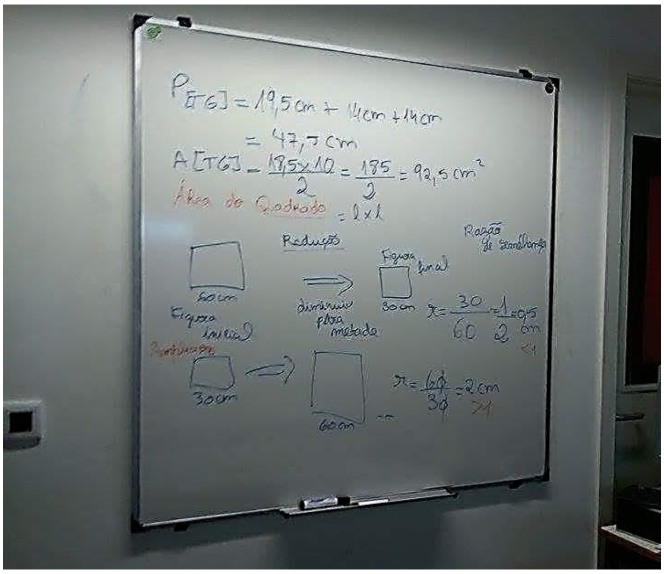


Figura 18 - Resolução do Problema 3 da Ficha.

Quando questionados sobre o que terá acontecido à área do quadrado, ao sofrer uma redução, apenas um dos alunos respondeu, dizendo que a área "diminuiu para metade". Depois de calculada a área de cada um dos quadrados, e ao ser dividida a área do quadrado final pela área do quadrado inicial, os alunos puderam verificar que a área do quadrado reduziu para um quarto. No entanto, os alunos revelaram enormes dificuldades na simplificação da fração, e mesmo na transformação da fração num número decimal.

No último problema desta intervenção, os alunos tiveram oportunidade de experienciarem e procederem a uma ampliação, a partir do quadrado do Tangram, construindo na prática e efetuando os cálculos necessários. Para o efeito, foram escritos no quadro os passos que os alunos deveriam seguir para fazerem uma ampliação.

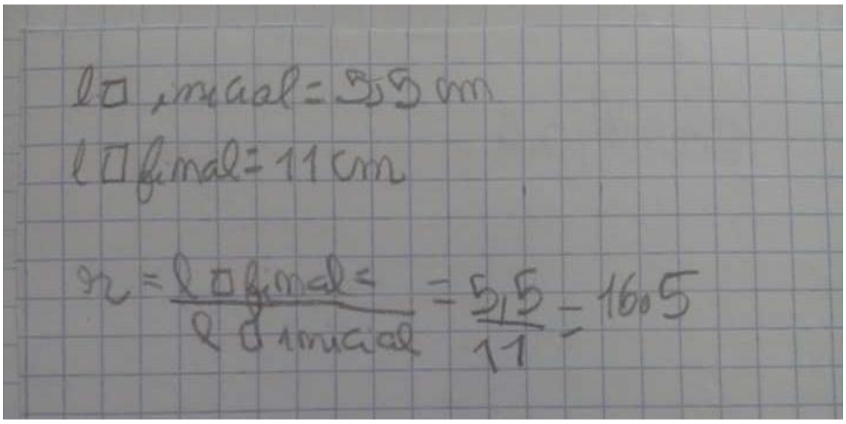


Figura 19 - Cálculos efetuados por um aluno ao efetuar uma ampliação.

A maior parte dos alunos conseguiu organizar-se adequadamente, seguindo corretamente os passos, contudo grande parte dos alunos distraíam-se no cálculo da razão de semelhança, apesar de já ter sido abordado o conceito em exercícios precedentes. Mais uma vez, nos alunos mais independentes, verificou-se uma autonomização progressiva, possibilitando uma intervenção mais focalizada destes junto dos alunos com maiores dificuldades, já que existiam alunos que, constantemente, revelavam uma profunda dependência de apoio para ultrapassar as dificuldades experimentadas e para evoluir positivamente na exploração das tarefas.

Assim sendo, as situações de ensino-aprendizagem proporcionadas nesta intervenção, ao envolverem e desafiarem intelectualmente os alunos na construção do Tangram para a dedução de fórmulas, exploração de perímetros e áreas, a partir da manipulação deste material, permitiram que estes desenvolvessem "um sentido intuitivo da sua plausibilidade" (NCTM, 2007, p. 286) e, dessa forma, concorreram para uma compreensão das fórmulas e dos conceitos, transpondo a sua simples memorização ou aplicação mecanizada.

Posteriormente, a manipulação das fórmulas e dos conteúdos matemáticos em questão, em tarefas variadas, permitiu aos alunos experimentarem dificuldades e confusões que favoreceram, também, a compreensão dos conteúdos.

Uma das fragilidades desta intervenção prendeu-se com a gestão do tempo, pois os problemas propostos revelaram-se bastante extensos para o ritmo da turma. Assim, inicialmente os alunos estavam entusiasmados com as construções e mesmo com os enunciados, contextualizados a partir da obra, encarando a resolução de problemas como uma aventura, como um desafio. Contudo, já no fim da intervenção revelavam-se cansados e exaustos.

Para além disto, a modalidade de trabalho adotada foi principalmente a modalidade em grupo-turma. Inicialmente algumas tarefas tinham sido planeadas para serem realizadas em pequeno grupo e individualmente, mas depois houve necessidade de reajustar as tarefas em conformidade com as características da turma, considerando-se pertinente proporcionar discussões e debates acerca dos conteúdos matemáticos em causa.

4.2.2. *Segunda Intervenção*

A segunda intervenção, realizada em 4 de Maio de 2017, objetiva a abordagem, com compreensão de fórmulas, do volume de um cubo e de uma pirâmide, contextualizados em problemas, dando-se continuidade à resolução da ficha.

O primeiro problema desta intervenção, o problema 5, foi pensado como o único problema a ser realizado individualmente. Mais uma vez foi alterada a modalidade de trabalho, resolvendo-se o problema em grupo-turma, procedendo-se à discussão do mesmo, debatendo-se as estratégias a adotar.

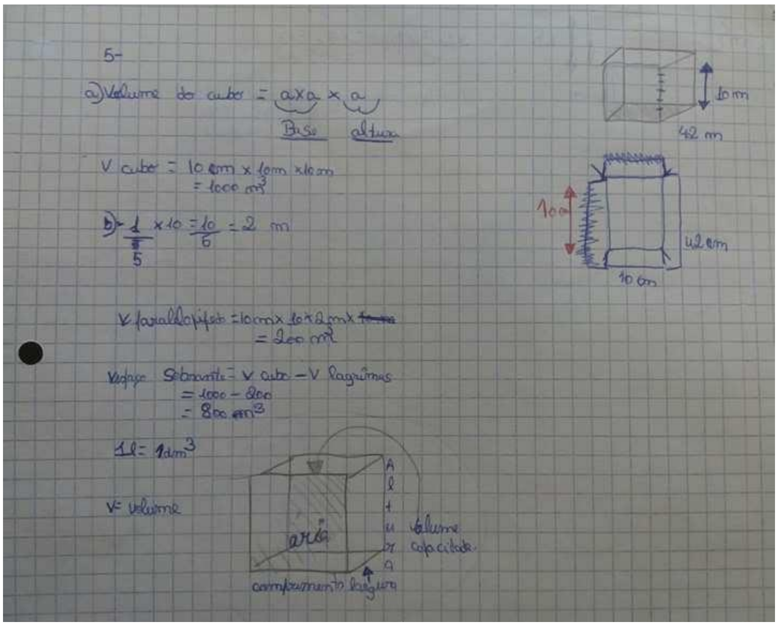


Figura 20 - Resolução do problema 5, feita pelo aluno RR.

Neste primeiro problema, os alunos não possuíam quaisquer conhecimentos sobre como é efetuado o cálculo para o volume de um cubo. Depois de esclarecida a fórmula, os alunos depararam-se com outra dificuldade, pois não sabiam descodificar a expressão " $\frac{1}{5}$ de" presente no problema. Quando questionados sobre a operação a realizar, os alunos diziam que se tinha de "somar" e de "dividir", não mencionando a expressão "de" como uma pista para a operação a adotar. Não obstante o que foi dito, no que se refere às medidas (se teriam de vir em metros quadrados ou em metros cúbicos), os alunos não tinham conhecimento sobre as convenções a adotar, confundindo-se muitas vezes.

Foi ainda visível que os alunos faziam confusão entre o conceito de volume e de capacidade, referindo-se ao conceito de volume como "o que está dentro do cubo". Posto isto, foram esclarecidos os conceitos, prosseguindo-se com a resolução do problema.

Numa das alíneas os alunos depararam-se com o cálculo do volume de um paralelepípedo, não tendo estes conhecimento que a fórmula seria igual à do cubo, apesar de não possuir as arestas todas do mesmo tamanho. Para além disto, os alunos não sabiam efetuar conversões, neste caso relativamente a medidas de capacidade, não tendo conhecimento de que $1\,\ell$ equivale a $1dm^3$. Para converter $1\ m^3$ em $1dm^3$, somente um aluno respondeu corretamente referindo que se teria de andar "três casas decimais para a frente".

No segundo momento da intervenção procedeu-se à resolução do problema 6. Primeiramente a turma foi questionada sobre a fórmula para calcular o volume da pirâmide, debatendo-se ideias, no entanto sem chegar a nenhuma conclusão plausível. De seguida, os alunos visualizaram um vídeo que explicava a fórmula do volume de uma pirâmide, a partir de uma demonstração prática que envolvia encher o interior de um cubo com o arroz contido numa pirâmide, tendo em conta que a pirâmide e o cubo teriam de possuir a mesma base e a mesma altura.

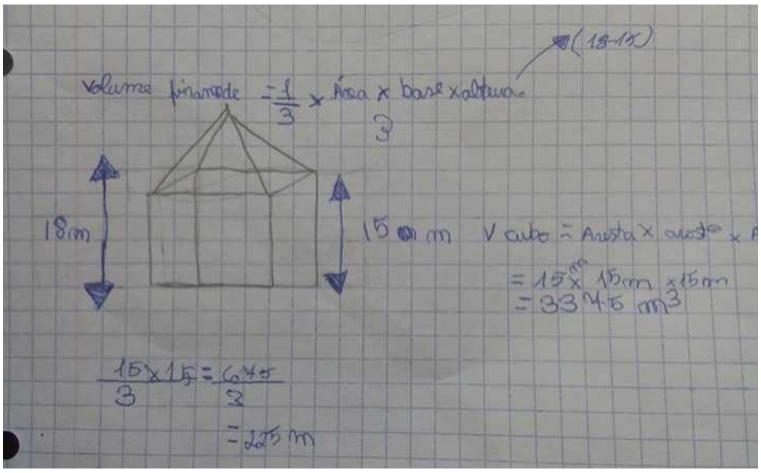


Figura 21 - Resolução do problema 6 da ficha.

Um aluno da turma foi mais perspicaz e percebeu de imediato que, para o cubo estar totalmente cheio de arroz, era necessário encher três pirâmides.

Quanto à resolução deste problema, depois dos alunos sistematizarem os seus conhecimentos no que se refere às fórmulas, aplicaram as mesmas sem nenhumas dificuldades.

Aquando da resolução deste problema, os alunos em plenário participavam ativamente auxiliando para a resolução do problema de uma forma efetiva.

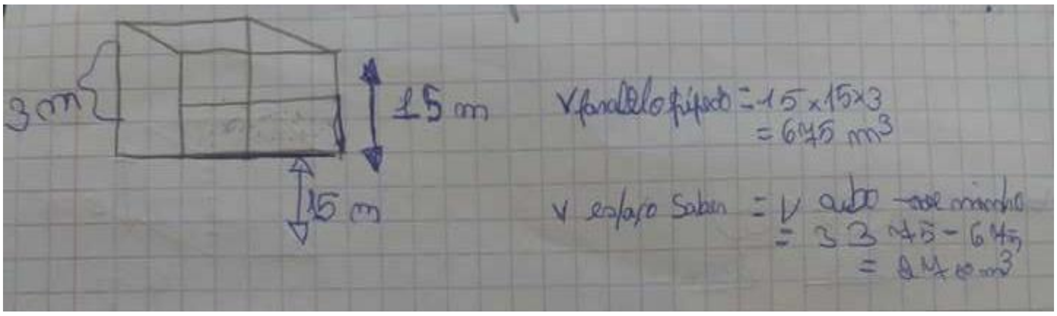


Figura 22 - Resolução do problema 7 da ficha.

No que diz respeito ao último problema, os alunos, apesar de sentirem algumas dificuldades na interpretação do enunciado e na sua compreensão, não tiveram grandes dúvidas na resolução do problema, em grande grupo. Apesar deste último problema ter sido planificado para ser resolvido em pequeno grupo, tal não sucedeu, revelando-se uma escolha acertada, pois os alunos tiveram oportunidade de espelhar as suas fragilidades, questionando os seus conhecimentos e ultrapassando as suas dúvidas.

À medida que os problemas foram sendo explorados, o contexto do problema ia sendo debatido, confrontando este com a obra literária em questão, de modo a que os alunos se situassem na história, quanto à ordem cronológica dos acontecimentos. Os alunos demonstravam-se assim mais entusiasmados e participativos ao longo de toda a intervenção, resultando numa maior comunicação matemática, expressando estes, de um modo mais intenso, os seus pensamentos. A este respeito, "Communication is one of the NCTM process skills emphasized in mathematics education (2000). Literature naturally brings a more complex mode of communication to mathematics instruction because it presents mathematical concepts in words rather than in numbers. After incorporating literature into mathematics lessons, many teachers report that their students show increased comfort levels in talking about their understanding of mathematics concepts. In addition, teachers are able to identify many misunderstandings during the course of this dialogue." (Price & Lennon, 2009).

4.2.3. *Terceira Intervenção*

Esta intervenção, concretizada no dia 9 de Maio de 2017, teve como objetivo principal a resolução de problemas envolvendo o cálculo da área da superfície total de um cubo, sendo que também era expectável que os alunos se apercebessem, num dos problemas, da relação existente entre a área da superfície total do cubo e o volume do mesmo.

Assim, no primeiro problema proposto nesta intervenção (Problema 8), um dos cubos aumentava de volume e era expectável que os alunos se apercebessem da relação existente entre o volume final e o volume inicial, ou seja, que se apercebessem que o volume do cubo aumentou oito vezes, mas tal não sucedeu.

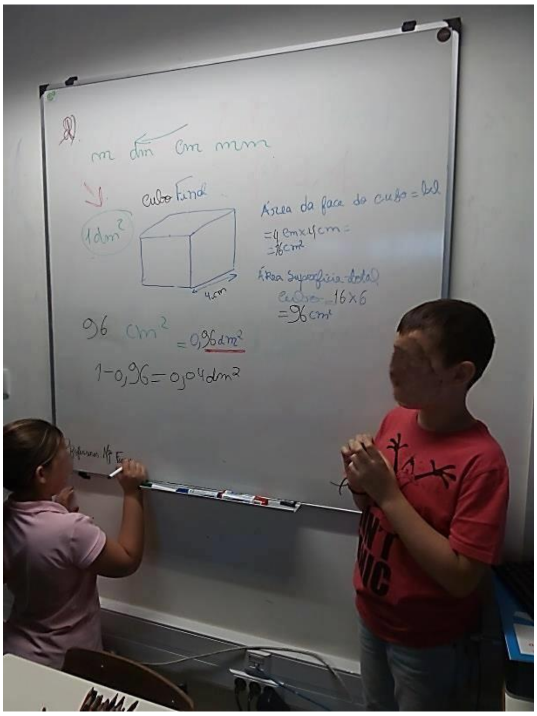


Figura 23 - Alunos resolvem, no quadro, o problema 8 da ficha.

Nesta fase inicial do problema não se verificaram grandes dúvidas no cálculo do volume, apercebendo-se os alunos de imediato que, ao aumentar a aresta do cubo para o dobro, o seu volume também aumentava para o dobro. Não obstante isto, os alunos aplicaram a fórmula do volume do cubo e procederam aos cálculos necessários.

Na alínea seguinte do problema os alunos eram questionados se a tinta chegaria para pintar o cubo. De imediato os alunos pensaram em utilizar o volume, não pensando na área de superfície. Quando aos alunos foi perguntado se sabiam calcular a área de superfície, estes não associaram ao cálculo da área de uma das faces.

> ***Investigadora:*** *Se vamos calcular a área de superfície temos de ter em atenção o quê? As faces do cubo, certo? Como se calcula a área de uma face do cubo?*
> ***L:*** *Não tenho a certeza, mas posso dizer professora? Lado vezes lado.*
> ***Investigadora:*** *Muito bem! Então a face do cubo que figura geométrica é?*
> ***Turma:*** *Um quadrado!*
> ***Investigadora:*** *Quanto mede a aresta do cubo?*
> ***Turma:*** *dois centímetros.*
> ***L:*** *Tem que se fazer dois vezes dois que é igual a quatro.*
> ***Investigadora:*** *Mas nós não temos somente uma face pois não?*
> ***LS:*** *Temos seis.*
> ***L:*** *temos de multiplicar dois por seis.*

Investigadora: *Que corresponde à área da superfície total do nosso cubo. Será que a tinta, que é mencionada no enunciado, chega para pintar o cubo?*
L: *Diz aqui que dá para pintar 1* dm^2.
Investigadora: *Mas os nossos resultados estão em* cm^2.
AN: *temos de passar de* cm^2 *para* dm^2.

Transcrição 9 – Discussão em turma, sobre o cálculo da área da superfície total do cubo.

Foi então possível verificar que apenas um aluno se recordava como se determinava a área de um quadrado. Na parte do problema que envolvia calcular se a tinta que a Alice dispunha chegaria para pintar o cubo, primeiramente a resposta espontânea dos alunos foi que não sobrou nenhuma tinta. Assim, estimulou-se a comunicação entre os alunos, incentivando-os a questionarem-se acerca das ideias que iam sendo apresentadas pelos colegas, tendo em vista a compreensão das suas realizações. Todavia, este momento foi fundamentalmente dirigido pelos alunos que iam formulando inferências válidas, sendo que os restantes afirmavam somente que concordavam.

Quando foi pedido que calculassem a tinta sobrante os alunos não sabiam que operação adotar para a calcular. Assim, tiveram de ser auxiliados para procederem à questão seguinte, que envolvia determinar quantos cubos daria para pintar com a tinta sobrante. Nesta alínea, alguns alunos tentaram calcular por estimativa quantos cubos poderiam ser pintados, respondendo corretamente apenas um dos alunos da turma, expondo o seu raciocínio, que passava por dividir a tinta sobrante pela área da superfície total do cubo, daí resultando os três cubos que dariam para pintar com a tinta sobrante. Um outro aluno procedeu à estimativa fazendo o dobro da área da superfície total do cubo, obtendo o resultado de dois cubos que dariam para pintar, esquecendo-se que a tinta que sobrava ainda dava para pintar mais um cubo.

Na última alínea do problema, os alunos teriam de calcular a área da superfície total do cubo, para o cubo cuja aresta tinha aumentado para o dobro. Aqui os alunos não revelaram dificuldades no que subjaz às estratégias a adotar mas, mais uma vez, tal como aconteceu no cálculo do volume, os alunos não se aperceberam que, relativamente à área da superfície total do cubo, ao aumentar a aresta para o dobro, a área da superfície aumentou para o quádruplo desse valor.

Importa relevar que a modalidade adotada nesta intervenção foi a modalidade em grande grupo, o que se revelou eficaz principalmente nesta intervenção, cujo enunciado foi reduzido, tornado a aula menos exaustiva e desgastante para os alunos. Nesta intervenção, a turma demonstrou-se ativa, participativa praticamente o tempo todo, revelando-se esta aula mais dinâmica e aberta à discussão.

No que diz respeito aos conteúdos abordados, de um modo sintético, a turma uma vez mais não possuía nenhum conhecimento prévio acerca do volume e da área de superfície total de um sólido geométrico, demonstrando-se ainda muito reticente quanto ao cálculo da área de uma figura geométrica simples, como o quadrado (que constituía a face do cubo).

No que se refere ao cálculo mental, no cômputo geral, a turma revelou um cálculo mental frágil e pouco desenvolvido, mesmo em operações simples, destacando-se somente dois alunos neste âmbito. Concretamente nos problemas abordados, foram visíveis dificuldades na interpretação do enunciado e no que era pedido ao longo das alíneas, não conseguindo os alunos transpor os dados do enunciado para posterior tratamento, resultando assim em dúvidas nas estratégias a adotar, em como proceder em relação ao que era pedido, como por exemplo, na operação matemática a usar.

4.2.4. *Quarta Intervenção*

A quarta e última intervenção, realizada em 11 de Maio de 2017, tinha como objetivo a criação de histórias, envolvendo também a formulação e a resolução de problemas, objetivando-se a sistematização de conhecimentos e promovendo-se a interdisciplinaridade entre a disciplina de Matemática e de Português, de uma forma mais veemente. A modalidade de trabalho escolhida foi o trabalho em pequenos grupos. O segundo momento da planificação não foi totalmente realizado, uma vez que apenas um dos grupos propôs à turma o problema que realizou. O terceiro momento, que passava pela realização de uma chuva de ideias dos conteúdos abordados até ao momento, também não foi possível de concretizar, devido ao tempo limitado.

Inicialmente foi distribuída a obra literária pelos vários grupos, sendo que os alunos poderiam retirar ideias e mesmo passagens da obra, a contemplarem no problema criado. Para além disso, a cada um dos cinco grupos, foi atribuído um dos temas já estudado: perímetro, área e volume, havendo temas que se repetiam entre grupos. Os grupos estavam equilibrados entre si, havendo dois grupos constituídos por quatro elementos e três grupos de três elementos.

Um dos grupos, que de início se teve algum receio que não cooperasse, foi o que se mostrou um dos grupos mais interessados, partilhando este, entre si, uma grande variedade de ideias relativamente ao contexto a adotar na formulação do problema, referente ao tema proposto. Este foi o primeiro grupo a terminar a tarefa, e o primeiro grupo a apresentá-lo à turma, para que o resolvessem. Relativamente a este grande interesse, à curiosidade e à envolvência, verificaram-se na turma em geral, mas este último grupo foi o que mais surpreendeu e, a este propósito, podemos falar de Zona de Desenvolvimento Proximal, "Is the distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers" (Vygotsky, 1978, p.86). Assim, a ZDP (Zona de Desenvolvimento Proximal) é uma verdadeira janela de oportunidade para a aprendizagem, sendo imprescindível que o professor a prepare e coloque em prática tarefas de ensino e aprendizagem que potenciem essa janela. Um dos instrumentos principais que o professor pode utilizar, é a linguagem, criando momentos como este, onde o professor se assume como mediador deste processo.

No momento inicial os alunos não estavam a perceber que as obras atribuídas seriam somente para retirar ideias, entendendo estes que seria para lerem a obra integralmente. Um dos grupos atrasou-se, sendo o último a terminar, já que optaram por uma estratégia diferente de organização, pois tinham uma variedade de ideias e não escolhiam uma para adequá-la ao contexto-problema. Outro dos grupos já tinha a ideia do contexto-problema a adotar, mas distraiu-se e só estava preocupado em resolver os cálculos do problema que criou. O grupo cujo tema era a área, teve dificuldade em iniciar e organizar-se, aliás como a maior parte dos grupos, e revelava-se confuso entre o conceito de perímetro e volume, para além de que havia um elemento desestabilizador no grupo. Contudo, este último grupo acabou por entrar no ritmo da maioria da turma.

De um modo geral, os grupos tinham grandes dificuldades em adequar a linguagem matemática ao enunciado que pretendiam propor, demonstrando os alunos fragilidades ao expressarem-se na linguagem correta, com os termos corretos, de modo a que, quem lesse, compreendesse o enunciado. No que concerne à criatividade, os alunos demonstraram uma enorme criatividade, utilizando de um modo criativo o contexto da obra, inventando falas e diálogos entre as personagens.

Como foi a primeira vez que se adotou a modalidade em pequenos grupos verificou-se alguma dispersão inicial, havendo uma necessidades de apoio pelos grupos, resultando numa complexificação da gestão da situação didática, que conduziu ao acompanhamento conveniente do trabalho desenvolvido nos grupos, de forma a colmatar eventuais fragilidades e a garantir a compreensão dos alunos. Grande parte das dúvidas surgidas foram colmatadas pelas interações com os seus pares, o que tornou os alunos matematicamente mais ágeis na formulação e na resolução de problemas. Assim sendo, quanto ao espírito colaborativo, os alunos demonstraram-se unidos e dispostos a trabalhar em equipa, encarando a criação de problemas como um desafio que tinham de superar, revelando uma participação ativa e um grande interesse, e uma dinâmica de grupo.

Figura 24 - Criação e resolução de problemas, em pequenos grupos, no contexto da obra *As Aventuras de Alice no País das Maravilhas.*

No momento final, apesar de apenas um grupo apresentar o seu problema para a turma resolvê-lo, os alunos tiveram aqui oportunidade para exprimir os seus pensamentos, explicando o raciocínio adotado. Quando um dos grupos foi resolver o problema, foi visível que, apesar de apresentarem as operações, não sabiam explicá-las, não conseguindo esclarecer que o algoritmo da multiplicação, neste caso, correspondia ao cálculo para a área do retângulo. Também tinham dúvidas se a área viria em metros quadrados ou em metros cúbicos, tendo a ideia errónea que se fizessem três multiplicações correspondia ao facto da área apresentar-se em metros cúbicos.

A par disto, os grupos que resolviam o problema no seu lugar, tiveram oportunidade também de interagir, verificando-se que um dos grupos estava a calcular o perímetro e não a área, e que ainda um outro grupo não conseguia resolver o problema, mostrando-se reticente na estratégia e operação a adotar. O cálculo mental em operações simples também se revelou uma fragilidade, demorando os alunos mais tempo neste âmbito, recorrendo muitas vezes ao uso da calculadora, para efetuar os cálculos.

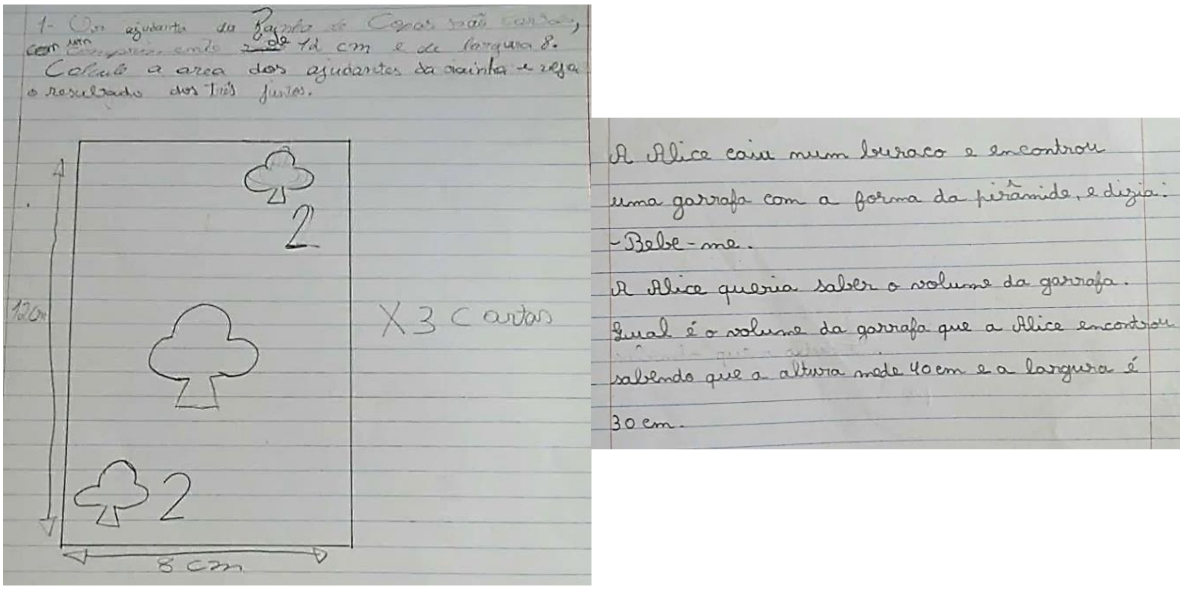


Figura 25 - Proposta de dois problemas, realizada por dois grupos.

Em suma, nesta intervenção, a aprendizagem colaborativa, através da interação entre os elementos dos grupos com diferentes níveis de aprendizagem, embora próximos na capacidade para a realização das tarefas, constituiu uma estratégia de mediação importante, onde a comunicação se revelou importante na discussão de ideias.

Para Vygotsky, o desenvolvimento consiste num processo de aprendizagem do uso das ferramentas intelectuais, através da interação social com outros mais experimentados no uso dessas ferramentas (Palincsar, Brown & Campione, 1993). Uma dessas ferramentas é a linguagem. Sob esse prisma, a interação social mais profícua é aquela na qual ocorre a resolução de um problema em conjunto, sob a orientação de outro mais apto a usar as ferramentas intelectuais mais apropriadas.

CAPÍTULO 5 – CONCLUSÃO

Neste capítulo, são apresentadas as principais conclusões que advieram do Projeto de Intervenção Pedagógica, tendo sempre como referência os objetivos do Projeto e, mais concretamente, as questões de investigação que o nortearam. Em consonância com o que foi dito, identificam-se algumas limitações relativas ao Projeto, fundamentais para o desenhar das conclusões. São também sugeridas recomendações de natureza didática, e são realizados comentários de caráter reflexivo no que subjaz ao valor do Projeto, para futuras investigações, especificamente no que diz respeito ao desenvolvimento profissional.

5.1. Conclusões

Convém referir que o Projeto não só pretendia compreender se a exploração de histórias poderia contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático, mas também se era possível construir uma sequência didática para o efeito. Neste âmbito, procurou-se dar resposta a uma questão de investigação geral que, posteriormente será apresentada. Para além disso, os objetivos que orientaram a realização do Projeto serão, agora, transformados em questões mais específicas, de modo a que as ideias a considerar sejam mais detalhadas e específicas por forma a facilitar a leitura das respostas de índole conclusiva.

Considere-se a primeira questão geral de investigação:

É possível desenvolver o raciocínio matemático através da exploração de histórias envolvendo o raciocínio matemático e construindo uma sequência didática para o efeito?

Optou-se por responder a esta questão de forma repartida por três questões mais específicas, já que esta se trata de uma questão mais generalizadora. Assim, a primeira questão seria a seguinte:

a) Em que medida é possível desenvolver o raciocínio dos alunos através da exploração de histórias envolvendo o raciocínio matemático?

Partimos do pressuposto que através da exploração de histórias são apreendidos conceitos matemáticos subjacentes ao tema, desempenhando estes um papel fundamental na estruturação do pensamento, funcionando como uma gramática basilar do raciocínio hipotético-dedutivo (NCTM, 2000).

Relativamente à turma do 4.º ano de escolaridade e, tendo em atenção as suas conceções prévias, é de ressaltar a sua perspicácia e eficácia em grande parte das tarefas, apesar do cálculo mental pouco desenvolvido. Neste contexto, foram importantes os problemas explorados, que se encontravam na história usada, pois estes auxiliaram na compreensão de todo o processo do raciocínio, fundamentalmente o raciocínio algorítmico.

A par da história usada numa primeira fase, as atividades implementadas para o desenvolvimento e o exercício do raciocínio complementaram a parte mais teórica, sendo de destacar a utilização do material multibase, que se revelou, por um lado, estruturante para os alunos e, por outro lado, permitiu acentuar as potencialidades do raciocínio algorítmico. Neste domínio, o material multibase, pelas suas características, constituiu-se um material importante para auxiliar as explorações dos alunos, possibilitando situações de aprendizagem ativas e com sucesso.

É também importante salientar que a resolução da ficha pelos alunos, que implicava a verificação do uso do raciocínio algorítmico através da descoberta de erros, no sentido de sistematizar os acontecimentos, levou a que muitos alunos não se autonomizassem da resolução errada apresentada na ficha. Isto foi evidente para grande parte dos alunos da turma, o que obrigou a que se tivesse de intervir de forma não programada. A solução escolhida foi a de realizar uma sistematização geral em grupo-turma, de modo a que os alunos não tomassem o errado como correto. Parece claro que esta atividade, ainda que dedicada ao raciocínio algorítmico, se revelou de uma dificuldade extrema para alguns alunos, tornando-se em problemas difíceis.

No que se refere à turma do 5.º ano de escolaridade, esta não exibia qualquer tipo de conceção prévia, fundamentalmente no que diz respeito à apropriação dos conceitos matemáticos a tratar. Com a apresentação de problemas baseados na história escolhida, um deles envolvendo a construção de um Tangram, com posterior análise da construção, pretendeu-se não apenas fornecer as fórmulas, mas também que houvesse um questionamento prévio e uma exploração dos materiais e dos problemas, de forma mais profunda.

Como as intervenções estavam faseadas por determinados conteúdos a abordar, foi possível verificar os conceitos matemáticos relativamente aos quais os alunos se sentiam um pouco mais à vontade, como foi o caso da área e do perímetro (apesar da confusão entre estes dois conceitos) e por conseguinte as suas fragilidades relativamente a outros conceitos (como o volume e a área da superfície total). Deste modo, foi possível um maior foco onde os alunos sentiam maiores dificuldades, e consequentemente o desenvolvimento do raciocínio matemático nessas áreas. Para além disso, era visível o êxtase dos alunos face à exploração dos problemas, e a curiosidade face aos novos conceitos, precisamente por estes serem contextualizados ao longo de todas as intervenções.

No que se refere à forma como a história foi explorada nas duas turmas, na turma do 4.º ano a história foi usada inicialmente, ou seja, como indutor de todo este processo pensado sequencialmente (no que se refere às intervenções), tendo sido verificável a partir desta uma evolução dos alunos, pois estes a nível motivacional encontravam-se mais predispostos para a resolução de problemas. Deste modo, foi evidente que as tarefas propostas ao longo das intervenções seguiram uma lógica sequencial, que possibilitava uma ligação entre as mesmas. Esta interligação visava a progressão do aluno, "degrau a degrau", tendo sido o raciocínio trabalhado de forma intensa com os alunos. Já na turma do 5.º ano de escolaridade, a história em si não foi usada, mas sim citações e o ambiente caracterizador da obra em questão, que serviram de alicerce para a construção dos problemas, que posteriormente foram apresentados à turma. Este ambiente foi encorajador no que diz respeito a uma maior participação dos alunos, e propulsor para uma atitude mais recetiva dos alunos face à matemática.

Neste âmbito, como pudemos verificar nas intervenções que envolviam o uso da história, tanto no 4.º ano de escolaridade, como no 5.º ano de escolaridade, esta revelou-se um material pedagógico potencial na aprendizagem, e tendo facilitado o interesse pela resolução de problemas, mas também pela formulação de problemas. Assim, o uso pedagógico de histórias envolvendo o raciocínio matemático, teve um papel motivador na construção de conhecimentos por parte dos alunos, que se envolviam mais intensamente e ativamente na resolução de problemas. Este envolvimento refletia-se no querer descobrir por si mesmo as respostas aos problemas, mas também se espelhava nos argumentos matemáticos usados no seu discurso, tanto em pequenos grupos, como em grupo-turma.

Em suma, é possível desenvolver o raciocínio matemático através da exploração de histórias que envolvam o raciocínio matemático, na medida em que a história seja usada em função de determinados objetivos, tendo esta de ser adequada à turma em questão. Ao ter estes fatores em linha de conta, e com o objetivo de explorar a Matemática, o raciocínio matemático é de facto desenvolvido de um modo gradual, aula a aula, com a proposta de problemas motivadores que desafiem o aluno a raciocinar matematicamente.

Atente-se, agora, na segunda questão de investigação:

b) Em que medida a interdisciplinaridade entre a Matemática e o Português contribuiu para o Ensino da Matemática?

No que concerne à interdisciplinaridade foram proporcionadas aos alunos do 4.º e do 5.º ano de escolaridade, experiências de aprendizagem pensadas para estes construírem as suas próprias histórias, integrando um problema e resolvendo-o. Estas experiências constituíram-se essenciais, no sentido em que permitiram aos alunos usar a criatividade, pensando no seu próprio problema, e nos problemas de outros grupos, superando as dificuldades e cooperando em grupo, encarando os alunos a formulação de problemas como um desafio a ser superado. Neste sentido, foi promovida a comunicação matemática, através da partilha de opiniões, tal como Martinho e Ponte (2005) afirmam: "A importância da comunicação, no contexto específico da sala de aula de Matemática e nos vários níveis de ensino, tem sido amplamente reconhecida. A comunicação constitui um processo social onde os participantes interagem trocando informações e influenciando-se mutuamente." (p. 2).

Para além disto, com o uso de histórias, os alunos com maiores fragilidades na disciplina de Matemática viram no Português um caminho e uma via para chegar matematicamente aos problemas. Esta situação sucedeu-se mais demarcadamente na turma do 2.º ciclo, uma vez que a grande maioria dos alunos que constituíam a turma revelava um grande desinteresse por aulas tidas como tradicionais. Aquando das intervenções, estes mesmos alunos queriam ter uma voz na turma, vir ao quadro e cooperar no grupo de trabalho. Para além disto, queriam ter um papel a desempenhar, uma tarefa em concreto que os fizesse sentir que estavam a contribuir de alguma forma com o seu trabalho. Isto é conforme o que diz Hong (1996), seguindo o que muitos livros de histórias utilizados em matemática apresentam: uma panóplia de situações que ensinam aos estudantes a resolver problemas pessoais, a lidar com conflitos e a assumir a responsabilidade.

Outro aspeto a ressaltar, prende-se com o modo como os alunos viram as explicações matemáticas, os conceitos matemáticos, e a própria matemática, dentro das histórias com problemas, e que resultados se verificaram na prática. Utilizando as histórias como um veículo para a exploração de conceitos, os alunos puderam usufruir de uma forma diferente de encarar a matemática e, por conseguinte, isso refletiu-se na resolução dos problemas propostos e nas tarefas (tanto em grupo, como individuais), já que o sucesso nas respostas foi maior. A preocupação em responderem corretamente era uma constante, e encarada como um desafio. Mesmo em discussões e debates, em grande e pequeno grupo, os constructos e as justificações dados pelos alunos eram mais sólidos e veementes. O facto de os alunos verem o português como um "aliado" da matemática, fez com que estes desenhassem uma maior variedade de cenários possíveis a introduzir nos problemas que criaram.

Isto vai ao encontro do que diz Murphy (1999), segundo o qual o uso de livros de histórias em matemática pode ajudar as crianças:

> "(a) gain a better understanding of concepts, (b) demonstrate the practical applications of mathematics (Whitin), and (c) illustrate how mathematical concepts are present in familiar settings that are appealing to students" (p.122).

Além disso, os professores que integram a literatura em matemática podem desenvolver nos seus alunos importantes habilidades de resolução de problemas, que continuarão a auxiliá-las ao longo da vida (Moyer, 2000).

É ainda de referir que a introdução de novas técnicas e conceitos matemáticos, através da literatura, faculta o tempo essencial para a aplicação de novas técnicas e conceitos, possibilitando que os alunos reflitam e comuniquem o que estudaram. A integração destas duas áreas representa um meio para estabelecer conexões, permitindo aos alunos o reconhecimento de situações matemáticas nas histórias e, mais tarde, no mundo que os rodeia (Sardinha, 2011).

Assim sendo, a interdisciplinaridade foi pensada com o objetivo de envolver os alunos nas aulas de um modo diferente e cumpriu esse objetivo a que se propôs, no que subjaz ao ensino da Matemática, que se caracterizou por ser um ensino interdisciplinar, motivador e eficaz, no que diz respeito à participação ativa dos alunos.

Observe-se, por fim, a terceira questão de investigação:

c) De que modo a construção de uma sequência didática, para cada ciclo, adequada e bem fundamentada, possibilita aos alunos desenvolverem o pensamento matemático, através do uso de histórias envolvendo o raciocínio matemático?

Esta questão de investigação tem por base todos os objetivos subjacentes supramencionados anteriormente, tendo sido já respondida de forma implícita. Importa mencionar que foram concedidas aos alunos as oportunidades necessárias para o desenvolvimento do raciocínio, sendo este considerado uma capacidade estrutural indispensável ao cumprimento dos objetivos.

Relativamente à construção de uma sequência didática bem fundamentada, esta construção revelou-se um desafio permanente, porque precisamente o ser adequada e adaptada, passa por tomar decisões, delinear estratégias e metodologias que se integrem na turma da melhor forma, dependendo das características de cada aluno. E, inicialmente, essa foi uma das grandes dificuldades sentidas enquanto investigadora.

Nesta linha de pensamento, foi possível sim, essa construção, o que se refletiu nos resultados já mencionados anteriormente.

5.2. Limitações do Projeto e Recomendações

No que diz respeito às limitações do Projeto, é preciso ressaltar que as conclusões suprarreferidas estão limitadas à população em investigação, neste caso às turmas do 4.º ano de escolaridade e do 5.º ano de escolaridade, em que decorreu a intervenção pedagógica, e que integraram o estudo concretizado no Projeto.

Como outra limitação, pode referir-se o facto de as histórias serem usadas, inicialmente, de forma diferente, embora com a mesma finalidade e o mesmo propósito: na turma do 4.º ano a história foi usada inicialmente, deixando de ser usada de forma gradual; na turma do 5.º ano a história foi usada em todas as intervenções, não a obra em si, mas toda a envolvência da história, presente nos problemas criados para o fim em questão. Assim, como as histórias foram usadas de forma distinta, e sendo estas um instrumento pedagógico, que foi contextualizado com as necessidades da turma, não foi possível obter, ao nível da investigação, resultados mais abrangentes, assim como não foi possível tecer resultados mais específicos e concretos.

Uma terceira limitação passa pelo pouco suporte de material escrito pelos alunos, no que diz respeito à resolução de fichas, mais especificamente na turma do 2.º ciclo, já que esta, como não revelava conceções prévias sobre os temas abordados, não realizou a ficha como estava planeado inicialmente, mas em grupo-turma, na maior parte das intervenções.

Uma das propostas a sugerir seria a de analisar o Raciocínio Matemático dos alunos de outros anos de escolaridade, implementando uma obra literária que seria toda ela explorada em sala de aula.

Não obstante estes factos, não deve ser reduzido nem menor o interesse que as conclusões demonstradas têm para o enriquecimento do conhecimento coletivo sobre o modo como o uso pedagógico de histórias influencia o raciocínio matemático, e mesmo a relação que os alunos têm com a disciplina de Matemática. Este ensino interdisciplinar aliado às sequências didáticas adotadas, pensadas relativamente a uma turma em concreto, deve ser uma possibilidade a ter em linha de conta nos horizontes de um professor, na sua prática educativa, particularmente relacionando-se com esta temática.

5.3. Reflexão Final

Em jeito de conclusão, o presente Relatório de Estágio foi desenvolvido no âmbito da Unidade Curricular Prática de Ensino Supervisionada (PES), que fundamentalmente visava o desenvolvimento de atividades de iniciação à prática profissional. Assim sendo, de acordo com esta Unidade Curricular estão presentes a conceção, o desenvolvimento, e a avaliação de um Projeto de Intervenção Pedagógica, que estiveram na base da elaboração deste Relatório. No término de todo deste processo, pode reiterar-se a importância e o valor do Projeto no que se refere ao desenvolvimento profissional. Não se querendo com isto uma exploração exaustiva do tema e das aprendizagens profissionais que o processo formativo experienciado proporcionou, pretende-se, essencialmente, destacar o cultivo de uma atitude reflexiva e crítica sobre a prática profissional, ligada ao interesse de alimentar a investigação de questões diretamente relacionadas com a própria prática:

> "A investigação dos profissionais sobre a sua prática pode ser importante por várias as razões. Antes de mais, ela contribui para o esclarecimento e resolução dos problemas. Além disso, proporciona o desenvolvimento profissional dos respectivos actores e ajuda a melhorar as organizações em que eles se inserem e, em certos casos, pode ainda contribuir para o desenvolvimento da cultura profissional nesse campo de prática e até para o conhecimento da sociedade em geral" (Ponte, 2008, p. 154).

Nesta linha de pensamento, considera-se imprescindível a exploração permanente da prática e a sua constante avaliação e reformulação. Torna-se importante experienciar formas de trabalho que conduzam os alunos a alcançar os resultados pretendidos. Para tal suceder, é necessário perceber bem os modos de pensar e as dificuldades inerentes a cada aluno, pois, para um ensino com êxito, é necessário que os professores examinem de uma forma contínua a sua relação com os alunos, com os colegas, com os pais e, nomeadamente, com o seu contexto de trabalho (Ponte, 2002).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azevedo, Fernando (2006). *Língua Materna e Literatura Infantil: Elementos nucleares para professores do Ensino Básico*. Lisboa: Lidel.

Billstein, R., Libeskind, S. & Lott, J. (2007). *A problem solving approach to mathematics for elementary school teachers*. Boston: Pearson.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.

Braddon, K., Hall, N., & Taylor, D. (1993). *Math through children's literature: Making the NCTM standards come alive.* Portsmouth, NH: Teacher Ideas Press.

Burns, M. (2005). 3 lessons by Marilyn Burns: Using storybooks to teach math. *Instructor*, 114(7), 27–30.

Burton, L. (1984). *Thinking Things Through - Problem Solving in Mathematics*. Oxford: Blackwell.

Callan, R. (2004). Reading + math = A perfect match. *Teaching K-8*, 34(4), 50-51.

Douville, P., Pugalee, D. K., & Wallace, J. D. (2003). Examining instructional practices of elementary science teachers for mathematics and literacy integration. *School Science and Mathematics*, 103, 388–396.

Ducolon, C. (2000). Quality literature as a springboard to problem solving. *Teaching Children Mathematics*, 6(7), 442-447.

Evans, C. W., Leija, A. J. e Falkner, T. R. (2001). *Maths Links – Teaching the NCTM 2000 standards thought children`s literature.* Colorado: Teacher Ideas Press.

Findell, C., Cavanagh, M., Dacey, L., Greenes, C., Sheffield, L. & Small, M. (2004). *Navigating through problem solving and reasoning in grade 1*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In: Wittrock, M.C. (ed.). *Handbook of research on teaching*. New York: Macmillan.

Gabinete de Avaliação Educacional (2012). *Relatório Nacional sobre a Provas de Aferição de Matemática do 1.º Ciclo de 2012.* Acedido em 16 de Novembro, 2016, no http://iave.pt/np4/file/134/Rel_PA_Mat_212.pdf.

Gabinete de Avaliação Educacional (2015). *Relatório Nacional sobre as Provas Finais do 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico de 2010-2014*. Acedido em 16 de Novembro, 2016, no http://iave.pt/np4/file/182/Relat_EB_2015_LV.pdf.

Goldstein, Jaime Elrath (2007). *The Integration of Children's Literature Into Mathematics*. All Regis University Theses. Acedido em 7 de Setembro, 2017, no http://epublications.regis.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1027&context=theses.

Grandin, R.G. (2006). Following vygotsky to a learner-centred school. *Post Pressed*, 1-52.

Griffiths R., & Clyne, M. (1988). *Books you can count on: Linking mathematics and literature.* Melbourne: Thomas Nelson.

Grouws, D. A. (2003). The teacher's role in teaching mathematics through problem solving. Em H. L. Schoen, *Teaching mathematics through problem solving:* Grades 6 – 12 (pp.129-141). Reston: The National Council of Teachers of Mathematics.

Haury, D. L. (2001). Literature-based mathematics in elementary school. ERIC Clearinghouse of Science Mathematics and Environmental Education.

Hellwig, S., Monroe, E.E., & Jacobs, J.S. (2000). Making informed choices: Selecting children's trade books for mathematics instruction. *Teaching Children Mathematics*, 7, 138–143.

Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM standards. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to "Principles and standards for school mathematics* (pp. 5-23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hong, H. (1996). Effects of mathematics learning through children's literature on math achievement and dispositional outcomes. *Early Childhood Research Quarterly*, 11, 477-494.

Janes, R. & Strong, E. (2014). *Numbers and Stories: Using Children's Literature to Teach Young Children Number Sense*. Corwin Press.

Krulik, S. e Rudnick, J. (1993). *Reasoning and problem solving - a handbook for elementary school teachers.* Massachusetts: Allyn and Bacon.

Lewis, A., Long, R., & Mackay,M. (1993). Fostering Communication in Mathematics Using Children's Literature. *Arithmetic Teacher*, 40, 470–73.

Lithner, J. (2008). *A Research Framework for Creative and Imitative Reasoning. Educational Studies in Mathematics*, 67 (3), 255-276.

Martinho, M. & Ponte, J. (2005).Comunicação na sala de aula de Matemática: Práticas e reflexão de uma professora de Matemática in Brocardo, J., Mendes, F.& Boavida, A. (eds). *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1989). *Pensar Matemáticamente*. Madrid: Editorial Labor. [Edição Original - (1982) Thinking Methematically, Inglaterra - Addison-Wesley Publishing Company].

Menezes, L. (2011). Matemática, Literatura & Aulas. *Educação e Matemática*, 115, 67-71.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Ministério da Educação e Ciência (2012). *Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Mink, D. V., & Fraser, B. J. (2002). Evaluation of a K-5 mathematics program which integrates children's literature: Classroom environment. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 3(1), 59-85.

Moyer, P. S. (2000). Communicating mathematically: Children's literature as a natural connection. *The Reading Teacher*, 54, 246–256.

Murphy, S. J. (1999). Learning math through stories. *School Library Journal*, 45, 122–124.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar. Portugal - Associação de Professores de Matemática. [Edição Original -

(1989) Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston: The National Council of Teachers of Mathematics].

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Palincsar, A., Brown, A. e & Campione, J. (1993). First-Grade Dialogues for Knowledge Acquisition and use. In Ellice A. Forman, Norris Minick e C. Addison Stone (Ed.), *Contexts of Learning* (p. 43-57). New York: Oxford University Press.

Piaget, J. (1979). La epistemologia de las relaciones interdisciplinares. Em L. Apostel, G. Berger, A. Briggs e G. Michaud, *Interdisciplinariedad. Problemas de la enseñanza y de la investigación en las universidades* (pp. 153-171). Cidade do México. Asociación Nacional de Universidades e Institutos de Enseñanza Superior.

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva. [Edição Original: (1945) How to solve It – A new aspect of mathematical method, Estados Unidos: Princeton University Press].

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J.P. (2002). *Investigar a nossa própria prática*. In GTI (Org). *Reflectir e investigar sobre a prática profissional.* (pp. 5-28). Lisboa: APM. Acedido em 14 de Agosto, 2017, no http://www.ipb.pt/~mjt/documdisciplinas/investigaranossa.pdf.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp.11-34). Lisboa: APM. Acedido em 20 de Novembro, 2016, no http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3008/1/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132. Acedido em 3 de Setembro, 2017, no http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3007/1/06-Ponte(BOLEMA-Estudo%20de%20caso).pdf.

Ponte, J.P. (2008). *Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional.* PNA, 2(4), 153-180. Acedido em 25 de Agosto, 2017, no http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Ponte2008PNA2(4)Investigar.pdf.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática para o 1º ciclo do ensino básico.* Lisboa: Universidade Aberta.

Porfírio, J. M. L. B. (1993). *A resolução de problemas na aula de matemática: Uma experiência no 7.º ano de escolaridade*. (Tese de mestrado). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Price, R. & Lennon, C. (2009). *Using Children's Literature to Teach Mathematics*. Durham, NC: *Quantile.* Acedido em 27 de Agosto, 2017, no https://s3.amazonaws.com/quantileresources/resources/downloads/static/ChildrensLiterature.pdf.

Ruiz, E., Thornton, J., & Cuero. K. (2010). Integrating Literature in Mathematics: A Teaching Technique for Mathematics Teachers. *School Science and Mathematics*, 110 (5), 235-237.

Sardinha, M. F. (2005). Histórias com Problemas – Uma Forma de Educar para a Numeracia e para a Literacia. Tese de mestrado em Estudos da Criança Área de Especialização em Ensino e Aprendizagem da Matemática, Braga: Universidade do Minho.

Sardinha, M. (2011). *Histórias com Problemas e a sua ligação à promoção da Numeracia e da Literacia no 1.º Ciclo do Ensino Básico*. Universidade do Minho: Instituto de Educação.

Serrazina, L. (1990). *Os materiais e o ensino da matemática. Educação e Matemática, 1(13). Acedido em 31 de Agosto, 2017, no* http://www.apm.pt/files/_EM13_pp01_4d6bd9e8e8334.pdf.

Stake, R. E. (2009). *A Arte da Investigação com Estudos de Caso*. 2ª ed. Lisboa: Edição Fundação Calouste Gulbenkian.

TIMSS. (2015). *International results in mathematics: Achievement in Content and Cognitive Domains.* Acedido em 1 de Dezembro, 2016, no http://timss2015.org/timss-2015/mathematics/achievement-in-content-and-cognitive-domains/

Vale, I. & Pimentel, T. (2004). Números e Operações. In Palhares, P. (coord). *Elementos de matemática para professores do Ensino Básico*. (159-214). Lisboa: LIDEL.

Vale, Isabel. et al. (2009). *Padrões no Ensino e Aprendizagem da Matemática: Propostas curriculares para o Ensino Básico.* ESE/ IPVC.

Vygotsky L.S. (1978). *Mind in Society – The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge MA: Harvard University Press.

Whitin, D. J. (1992). Explore mathematics through children's literature. *School Library Journal*, 38(8), 24-28.

Whitin, D. J. (2002). The potentials and pitfalls of integrating literature into the mathematics program. *Teaching Children Mathematics*, 8(9), 503-504.

Whitin, D. J. & Whitin, P. (2004). *New visions for linking literature and mathematics*. Urbana: National Council of Teachers of English.

Whitin, D. J. & Wilde, S. (1992). *Read any good math lately? Children's books for mathematical learning, K-6.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Wilburne, J. M. & Napoli, M. (2008). Connecting Mathematics and Literature: An Analysis of Pre-service Elementary School Teachers' Changing Beliefs and Knowledge. *IUMPST: The Journal*, 2 (1), 1-10.

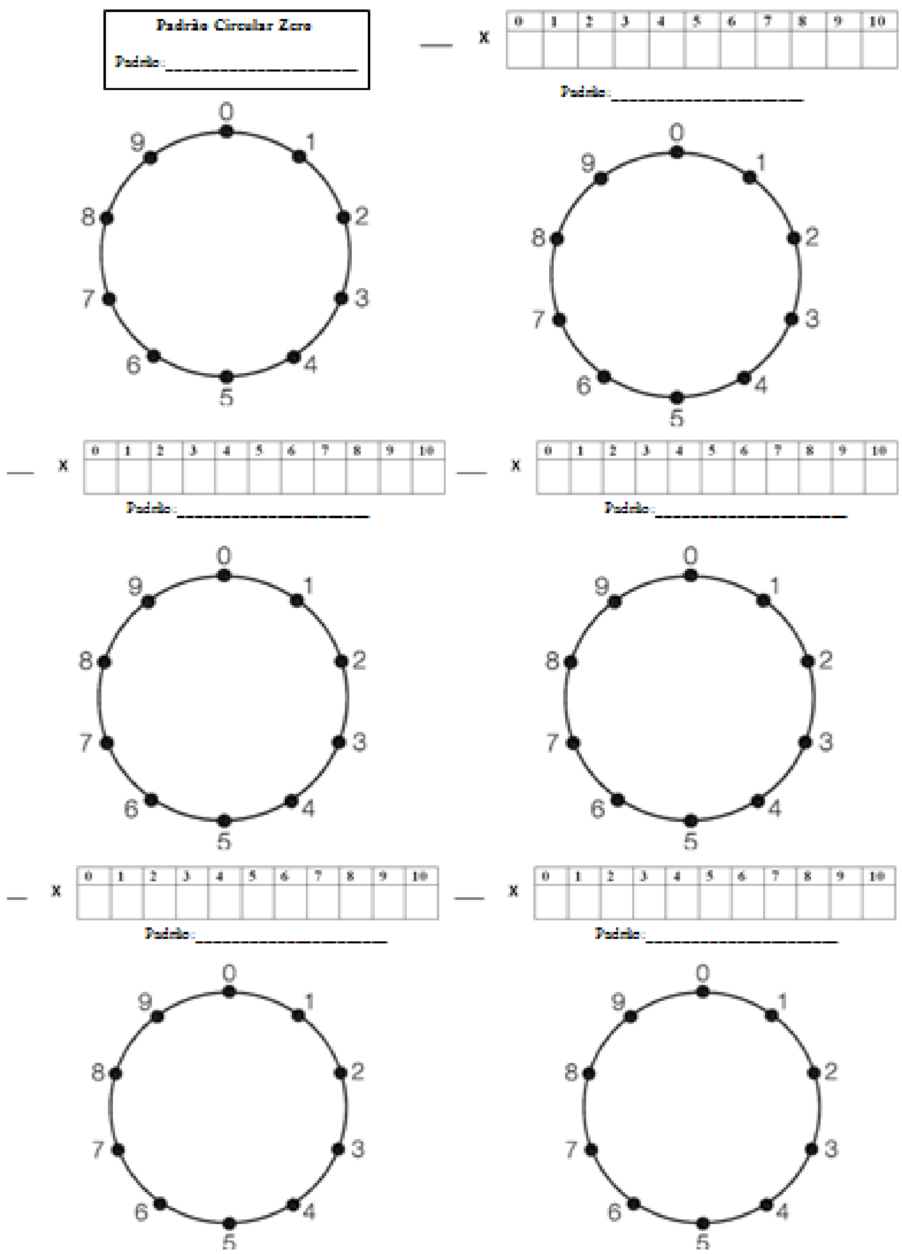
Yin, R. (1984). *Case study research: Design methods* (1st ed.). Beverly Hills, CA: Sage Publishing.

ANEXOS

Anexo A - Ficha de trabalho 1: "Tabelas da Multiplicação: Padrões Circulares"

Para cada uma das alíneas:

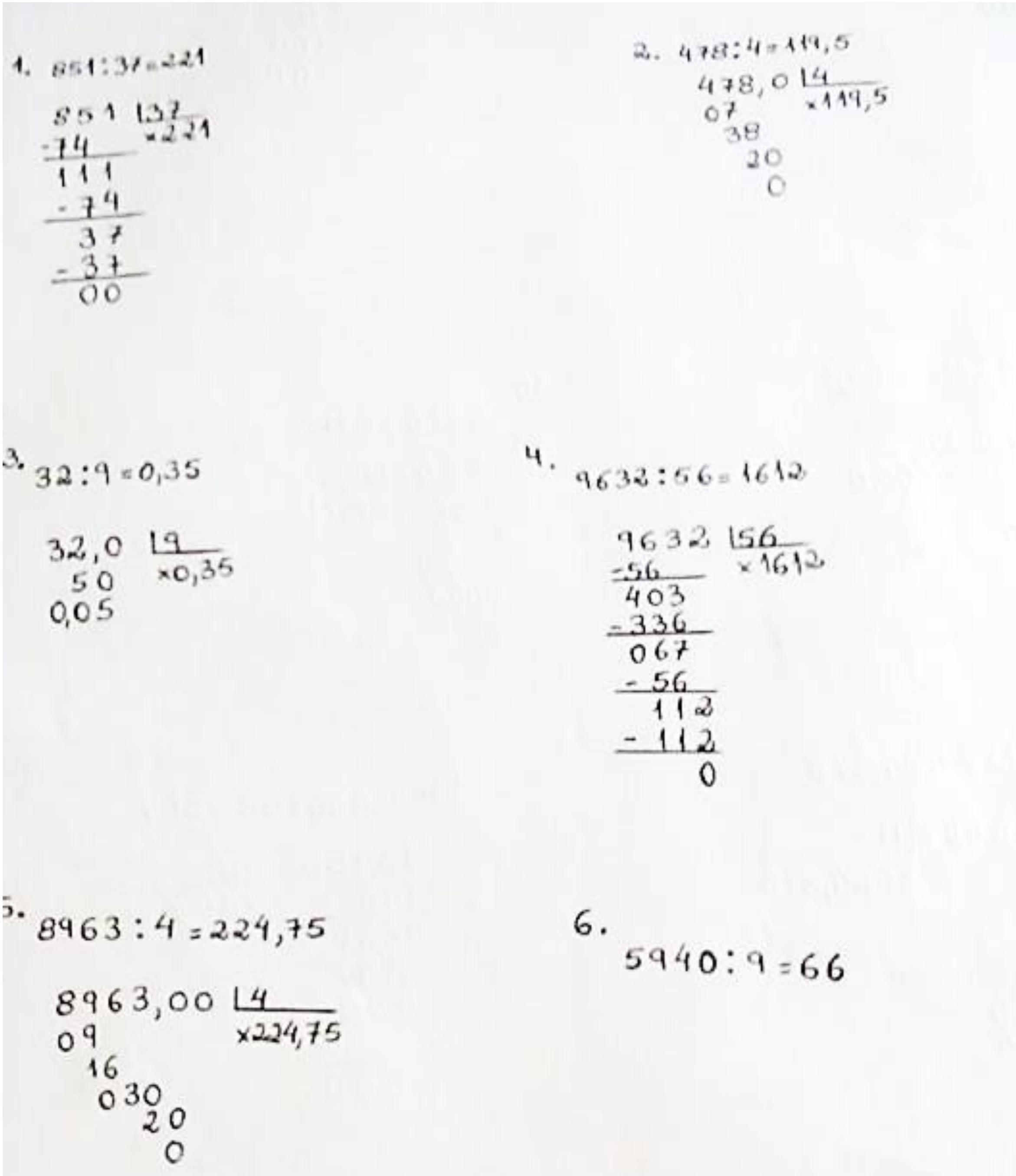
1. Completa a tabela da Multiplicação (completando o algarismo a multiplicar: do 1 ao 10).
2. Com uma caneta de cor vermelha, sublinha o algarismo das unidades e identifica os números do padrão.
3. Usando o círculo, liga os números que encontraste no teu padrão repetitivo.
4. Escreve numa folha em branco outras regularidades que encontrares.



Ficha de Trabalho " A caça aos erros no Algoritmo da Divisão"

Nome:____ Data: __/__/____

Analisa os seguintes algoritmos da divisão e descobre os erros. Caso existam, corrige-os para a forma correta.



1. 851:37=221

851 | 37
-74 ×221
111
-74
37
-37
00

2. 478:4=119,5

478,0 | 4
07 ×119,5
38
20
0

3. 32:9=0,35

32,0 | 9
50 ×0,35
0,05

4. 9632:56=1612

9632 | 56
-56 ×1612
403
-336
067
-56
112
-112
0

5. 8963:4=224,75

8963,00 | 4
09 ×224,75
16
030
20
0

6. 5940:9=66

7. 851 : 37 = 241

```
 851 |37
-74   ×241
 111
-148
  37
 -37
  00
```

8. 47967 : 32 = 15,521

```
4967,00000 |32
176         ×15,521875
 167
  070
   060
    280
     240
      160
       00
```

9. 5324 : 8 = 665,5

```
5324,0 |8
 52     ×665,5
  44
   40
    0
```

10. 53 : 6 = 8,713

```
53,00 |6
 50    ×8,713
  8
  20
0,002
```

11. 6321 : 112 = 564,375

```
6321,0000 |112
0721        ×564,375
 0490
 0420
  0840
   0560
    000
```

12. 13456 : 58 = 257

```
 13456 |58
-186    ×257
 0285
- 250
  0356
 - 356
   000
```

Vamos ajudar a Alice...

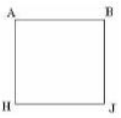
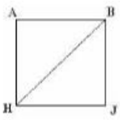
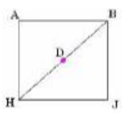
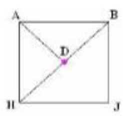
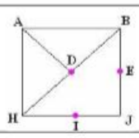
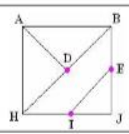
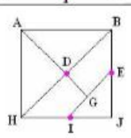
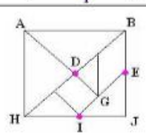
1.

Depois de cair do poço a Alice achou-se então num enorme átrio. "Havia muitas portas em redor do átrio, mas estavam todas trancadas. E, depois de o percorrer de uma ponta à outra, experimentando cada porta, a menina avançou tristemente para o centro a pensar como é que ia sair dali" (*As Aventuras de Alice no País das Maravilhas*, p. 13).

Uma das portas parecia ter uma espécie de código para a abrir. Aquelas sete peças não lhe pareciam nada estranhas, até que se lembrou das suas aulas. Era o Tangram! Como se construía um Tangram? Se conseguisse lembrar-se, talvez pudesse juntar as sete peças e abrir a porta.

Vamos ajudar a Alice?

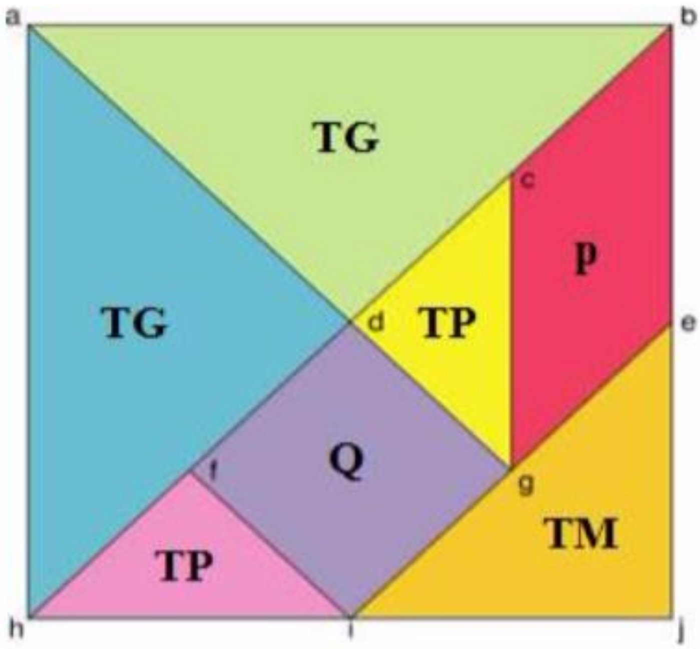
Quadro 1- Construção do jogo Tangram

Passos para construir o Tangram	
1º) Recorte o EVA em forma de um quadrado de dimensões 20cm x 20cm. Marcando A, B, J e H nos vértices. 	2º) Trace um segmento de reta que vai do vértice B a H, dividindo o quadrado em dois triângulos ABH e BHJ, sendo estes triângulos isósceles. 
3º) Para encontrar o ponto médio do segmento de reta BH, pegue o vértice A e dobre até o segmento BH. O ponto de encontro do vértice A e BH será o ponto médio de BH, chamamos de ponto D. 	4º) Agora trace um segmento de reta que vai do vértice A ao ponto D, formando três triângulos: ABD, ADH e BHJ. 
5º) Dobre o vértice J até o ponto D formando dois pontos, um no segmento BJ (ponto E) e outro no segmento HJ (ponto I). 	6º) Agora trace um segmento de reta do ponto E ao ponto I. 
7º) Dobre o ponto J até o segmento de reta EI, definindo o ponto médio, ou seja, o ponto G. Trace uma reta perpendicular do ponto D ao segmento EI. 	8º) Trace dois segmentos de reta paralelas ao segmento DG e outro ao lado AH. 
9º) Nomeação das figuras planas. Os dois triângulos maiores serão chamados TG, os dois menores TP, o médio TM, o quadrado Q e o paralelogramo de P.	10º) Recorte todas as figuras geométricas e obtenha as sete peças do jogo Tangram.

Fonte: Miranda (2015).

Resultado final na construção do Tangram:

Figura 1 - Jogo Tangram: peças identificadas de acordo os tamanhos e formatos



2.

À medida que a Alice se ia lembrando dos pormenores das aulas, aquando da construção do Tangram, vieram-lhe à memória algumas perguntas, pois a Alice era uma criança muito curiosa:

a) Como se calcula a área de um quadrado? Qual a área do Tangram?

b) Como podemos obter a fórmula para área do triângulo? É possível através da área do quadrado?

c) Pegando no Triângulo Médio (TM), quantos destes triângulos são precisos para ocupar o espaço do Tangram? Esse “espaço” refere-se a quê?

Podemos testar com construções!

d) Será que consegues ajudar a Alice a determinar o perímetro do Triângulo Grande (TG)? E a área?

e) E qual será o perímetro da figura que se segue? Juntando dois triângulos pequenos (TP) e um Quadrado (Q). E a área?

3.

Depois da Alice conseguir responder a todas as suas perguntas, quando já só lhe faltava um quadrado para completar o Tangram e resolver o mistério, para conseguir abrir a porta, a Alice começou a diminuir de tamanho, e com ela o quadrado de 60 cm de lado que tinha na mão.

"- Olha que sensação tão estranha! – admirou-se Alice. – Devo estar a encolher como um telescópio!" (*As Aventuras de Alice no País das Maravilhas,* p.16)

Alice então reparou que deveria ter sido do líquido que bebera antes, do frasco cujo rótulo dizia "bebe-me". Olhou agora para o seu quadrado e reparara que este media agora 30 cm de lado. Como já era habitual a Alice começou a questionar-se:

a) Como podemos descobrir qual a razão usada para o quadrado ter ficado com 30 cm?

b) A figura final será uma ampliação ou redução da figura inicial? Porquê?

c) O que aconteceu à área do quadrado?

4.

E se agora pegarem no quadrado do vosso Tangram e fizerem uma ampliação?

5.

"Tenho a certeza de que não eram essas as palavras certas – disse a pobre Alice, e os seus olhos marejaram-se de lágrimas. (…) Ao proferir estas palavras, o pé escorregou-lhe, e, no instante seguinte, trás! Mergulhou em água salgada até ao pescoço." (*As Aventuras de Alice no País das Maravilhas,* p.24-25).

Alice via-se agora dentro de uma piscina dentro de um cubo, cujas arestas mediam 10 metros. Pôs-se então a Alice a pensar qual seria a quantidade de água na qual estaria a nadar. Imaginou então que o cubo pudesse estar cheio de água. Qual seria o volume dessa água?

Qual será então o volume ocupado pela água, correspondente às lágrimas da Alice, sabendo que ocupa $\frac{1}{5}$ da altura do cubo? Qual seria a capacidade do espaço sobrante em litros?

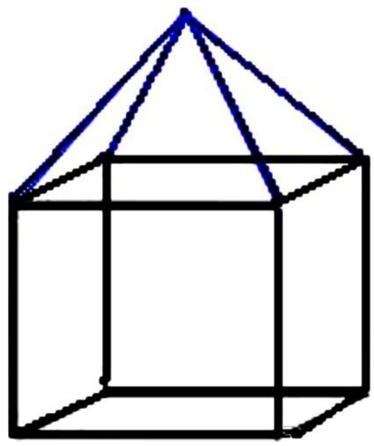
6.

"chegou a uma casinha muito engraçada (…) Entrou sem bater, e apressou-se a subir as escadas (…) ia mesmo a sair do quarto, quando avistou uma garrafinha ao pé do espelho (…) ela desarrolhou-a e levou-a aos lábios. (…) antes de ter bebido meia garrafa, sentiu a cabeça a bater contra o tecto (…)" (*As Aventuras de Alice no País das Maravilhas*, p.39-40).

Depois de ter trincado um pequeno bolo que guardara no bolso voltou ao seu tamanho normal. Saiu então da casa e viu que o telhado tinha a forma de uma pirâmide quadrangular que assentava sobre um cubo. Como já era costume e próprio da menina Alice questionar-se sobre tudo e mais qualquer coisa começou a questionar-se sobre o volume da pirâmide. Bem…ela sabia que a fórmula da pirâmide para calcular o volume era $\frac{1}{3}$ x Área da base x Altura ou a Área da base x Altura a dividir por 3 que ia dar ao mesmo! Mas porquê a dividir por três? Ela sabia calcular o volume de um cubo, mas não percebera porquê que para a pirâmide era a dividir por três…

Vamos então ver um vídeo que explique a fórmula?

Agora que já está explicada a fórmula da pirâmide, a Alice reparou que, para além do telhado ser em forma de pirâmide, a sua base assentava sobre um cubo (a parte inferior da casa). Um lagarto, o Bill, veio tentar ajudar a Alice nas suas questões, a mando do Coelho Branco, pelo que se pôs a medir a parte inferior da casa (que tinha a forma de um cubo) e viu que uma aresta media 15 m e viu que toda a estrutura da casa, ou seja, desde o chão até ao vértice da pirâmide, tinha uma altura de 18 m. Pôs-se a pensar e questionou-se sobre vários assuntos no que se refere à casa:



a) Qual o volume do cubo?

b) Qual o volume da pirâmide?

c) Qual o volume total? Ou seja da casa conjuntamente com a pirâmide?

7.

A Alice pôs-se então a olhar com mais atenção para a casa e reparou agora que, quando há pouco diminuiu de tamanho e saiu da casa, o milho que anteriormente estava a ocupar todo o sótão (pirâmide), caiu para o cubo.

a) Que volume ocupa o milho?

b) Qual a capacidade do espaço sobrante do cubo, em Litros?

8.

“Perto da entrada do jardim estava uma grande roseira com rosas brancas, mas havia três jardineiros muito atarefados a pintarem-nas de vermelho. Alice achou que aquilo era assaz curioso, e aproximou-se para os observar. Ao chegar perto, ouviu um deles a dizer:

- Toma atenção, Cinco! Não entornes essa tinta por cima de mim!

- Não tive a culpa – respondeu o Cinco, melindrado. – O Sete deu-me um safanão no cotovelo.”

(*As Aventuras de Alice no País das Maravilhas*, p.89).

Alice via-se agora no jardim da Rainha de Copas, e estava a pintar tudo de vermelho. Para tal, dispunha de uma lata cheia de tinta, com 1 dℓ de capacidade, que dava para pintar 1 dm^2. Estava então para pintar um cubo cuja aresta media 2 cm, quando, repentinamente, cada aresta do cubo aumentou para o dobro.

Uma das cartas da Rainha de Copas, impressionada com o que aconteceu, começou a fazer perguntas:

“O que aconteceu? O cubo aumentou de volume? E agora, temos tinta suficiente para pintar todo o cubo?”

a) Qual era o volume inicial do cubo?

b) Qual é o volume do cubo final?

c) Será que a tinta chegava para pintar o cubo inicial?

d) Com a tinta que sobra, quantos mais cubos dá para pintar?

e) E agora que o cubo aumentou, será que a tinta ainda chega?