O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO GEOMÉTRICO DOS ESTUDANTES E A LEITURA DE HISTÓRIAS EM QUADRINHOS: UMA ARTICULAÇÃO POSSÍVEL

Elias Santiago de Assis[1], *Maria Helena Martinho*[2]
[1]Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, elyassantiago@gmail.com
[2]Universidade do Minho, mhm@ie.uminho.pt

Resumo. *Esta pesquisa, de natureza qualitativa, tem como objetivo identificar a variação do pensamento geométrico dos estudantes a partir da leitura de histórias em quadrinhos que versam sobre a Geometria Euclidiana numa perspectiva axiomática. Trata-se de um estudo de caso realizado com um grupo de alunos da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Através de dezasseis encontros os participantes entraram em contato com sete HQs produzidas e supervisionadas pelos investigadores. Nas HQs foram expostos assuntos como congruência de triângulos, a desigualdade triangular, o teorema do ângulo externo, dente outros. Todos estes conteúdos foram apresentados à luz de uma estrutura axiomática previamente escolhida. Ao final de cada HQ foram propostas algumas atividades. As respostas apresentadas pelos discentes ajudaram os investigadores na identificação dos tipos de pensamento geométrico desenvolvidos por eles. Os dados revelaram que o raciocínio de natureza dedutiva, embora não seja tão fácil de se alcançar, pode ser estimulado e desenvolvido pelos alunos.*

Abstract. *This qualitative research aims to identify the variation of students' geometric thinking from the reading of comic books that deal with Euclidean geometry in an axiomatic perspective. This is a case study carried out with a group of students from the Federal University of Recôncavo da Bahia. Through sixteen meetings the participants came into contact with seven comics produced and supervised by the researchers. In the HQs were exposed subjects such as congruence of triangles, triangular inequality, the external angle theorem, other teeth. All these contents were presented in light of a previously chosen axiomatic structure. At the end of each HQ some activities were proposed. The answers presented by the students helped the researchers to identify the types of geometric thinking developed by them. The data showed that deductive reasoning, although not as easy to achieve, can be stimulated and developed by students.*

Palavras-chave: *Geometria Euclidiana; Níveis de pensamento geométrico; Histórias em quadrinhos*.

Introdução

Este trabalho tem como objetivo identificar o raciocínio geométrico de um grupo de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB) a partir do contato desses sujeitos com histórias em quadrinhos (HQs) confeccionadas com propósitos educacionais. Esses sujeitos eram, à época, estudantes recém-chegados à universidade. Os seus conhecimentos em geometria estavam, no início da investigação, relacionados à escolaridade básica entendida neste texto como toda formação escolar que antecede o curso superior.

Segundo Hansen (1998), o ensino de Geometria, em muitos países, aparece desprovido de abordagens axiomáticas. É de se esperar, portanto, que os estudantes concluam a educação básica com deficiências no raciocínio lógico dedutivo. Com efeito, assinala Duval (1998), a Geometria é um palco privilegiado para o desenvolvimento dos raciocínios indutivos e dedutivos dos estudantes.

O contato com a Geometria numa perspectiva axiomática é necessário para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos estudantes. Os alunos precisam ser convidados a justificar as suas respostas à luz da estrutura axiomática que dispõem. Segundo Dreyfus (1999), "a tarefa de justificação é extremamente difícil mesmo para os alunos razoavelmente proficientes" (p. 93). Tais considerações dizem respeito a todos os níveis de escolaridade.

Neste trabalho busca-se a associação entre a abordagem axiomática (densa e complexa) e a leitura de HQs (motivante e lúdica). Por meio desta articulação, pretende-se aqui responder à seguinte questão: *Através da aplicação de um conjunto de HQs que raciocínio geométrico se pode identificar nos alunos?* Para responder a essa questão, foram aplicadas sete HQs contendo assuntos de Geometria Plana, num viés axiomático, em uma turma de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UFRB. Ao final de cada HQ foram propostas algumas atividades. Os proponentes desta pesquisa analisaram os níveis de raciocínio geométrico dos estudantes a partir das respostas desses sujeitos. As HQs foram confeccionadas pelo primeiro autor sob a supervisão do segundo. A análise de dados será feita à luz das teorias desenvolvidas pelos autores mencionados na próxima secção.

Tipos de raciocínio geométrico

As argumentações matemáticas apresentadas pelos estudantes variam em função do desenvolvimento cognitivo desses sujeitos. Nesse sentido, autores como Barth (1987), Duval (1998), Martin et al. (2009), Harel e Sowder (1998) e o casal Van Hiele (Battista, 2009) buscaram caracterizar os tipos de raciocínio geométrico dos estudantes.

Segundo Barth (1987), há três estágios na aprendizagem de Geometria: percepção, comparação, inferência e verificação da inferência. A *percepção* ocorre de três formas: sensorial (manipulação dos objetos); icônica (contato com desenhos/ imagens); simbólica (mais uso de palavras). Após atravessar as fases de percepção sensorial e icônica, o aluno já consegue distinguir um quadrado de um retângulo, sem recorrer a justificações elaboradas. No estágio de *comparação*, é possível distinguir exemplos de não exemplos e comparar conceitos distintos. A percepção e a comparação ajudam o estudante a criar conjecturas. Quando o discente começa a estabelecer a relação "causa-efeito" inicia-se o estágio de *inferências*. A inferência pode ser indutiva ou dedutiva. A inferência indutiva baseia-se em exemplos. A inferência dedutiva faz uso do raciocínio lógico (e não, necessariamente, de exemplos). Por fim, pontua Barth (1987), ocorre a verificação da inferência.

Segundo Duval (1998), a aprendizagem de Geometria contempla três fases: a visualização, a construção e o raciocínio. A fase de *visualização* corresponde à percepção sensorial e icônica da teoria de Barth (1987). Durante a fase da *construção* costuma ocorrer a criação de conjecturas. Faz parte dessa fase a utilização de régua, compasso ou *software*. A fase do *raciocínio* diz respeito a obtenção de novas informações a partir de informações dadas. Recorre-se a alguma estrutura axiomática.

Para tratar dos processos de aprendizagem de Geometria, Martin et al. (2009) pontuam que os estudantes podem apresentar algum dos seguintes tipos de raciocínio: empírico, pré-formal ou formal. O *empírico* baseia-se na realização de experimentos. O *pré-formal* contempla os raciocínios intuitivo e indutivo. O *formal* está relacionado com as argumentações rigorosas por meio da sistematização de resultados conhecidos como verdadeiros (os chamados axiomas).

O casal Pierre Van Hiele e Dina Van Hiele classificam o pensamento geométrico em cinco níveis: visual-holístico, descritivo-analítico, relacional-inferencial, formal-dedutivo, rigor. Tais níveis não têm a ver com a idade dos estudantes, mas com o desenvolvimento cognitivo desses atores. Segundo o casal Van Hiele os níveis são sequenciais e hierárquicos (Battista, 2009).

No nível *visual-holístico* os estudantes centram-se na aparência global dos objetos. Pensam que um quadrado não é um retângulo, pois acreditam que estes últimos não podem ter todos os lados do mesmo comprimento. No nível *descritivo-analítico* os estudantes não veem uma figura somente como um todo. Dão-se conta de algumas de suas propriedades. Não conseguem, porém, relacioná-las. No nível *relacional-inferencial os* estudantes conseguem relacionar as propriedades de determinado objeto. Conseguem deduzir que a soma das medidas de um quadrilátero convexo é 360º decompondo-o em dois triângulos a partir de uma diagonal. No nível *formal-dedutivo* os estudantes conseguem elaborar provas matemáticas à luz do raciocínio dedutivo. No nível do *rigor* os estudantes conseguem analisar e distinguir os sistemas axiomáticos.

Harel e Sowder (1998) optam por descrever os níveis de raciocínio dos estudantes a partir das provas comumente apresentadas por estes atores. Preferem chamá-los de esquemas de prova. De acordo com esses atores, são três os possíveis esquemas de prova: a convicção externa, o esquema empírico e o dedutivo. A *convicção externa* consiste na aceitação de uma prova por estar presente no livro didático ou por ser apresentada pelo professor. Não há necessariamente um entendimento da prova (a compreensão pode ser substituída pela memorização). O *esquema empírico* consiste na utilização de casos particulares seguidos de generalização. Relaciona-se também com as experiências sensoriais dos sujeitos. Há uso de figuras e predomina o raciocínio indutivo. Por fim, há o *esquema dedutivo* em que aparecem as relações de causa e efeito a partir de um sistema axiomático.

Os dois primeiros estágios da *percepção* apontada por Barth (1987) correspondem à *fase de visualização* na classificação de Duval (1998). Conforme se pode perceber na Figura 1, durante essa fase o nível de pensamento geométrico dos estudantes é do tipo *visual-holístico* à luz da classificação de Van Hiele (Battista, 2009). Nesse estágio, partindo da categorização de Martin et al. (2009), o raciocínio do estudante pertence ao *nível empírico*.

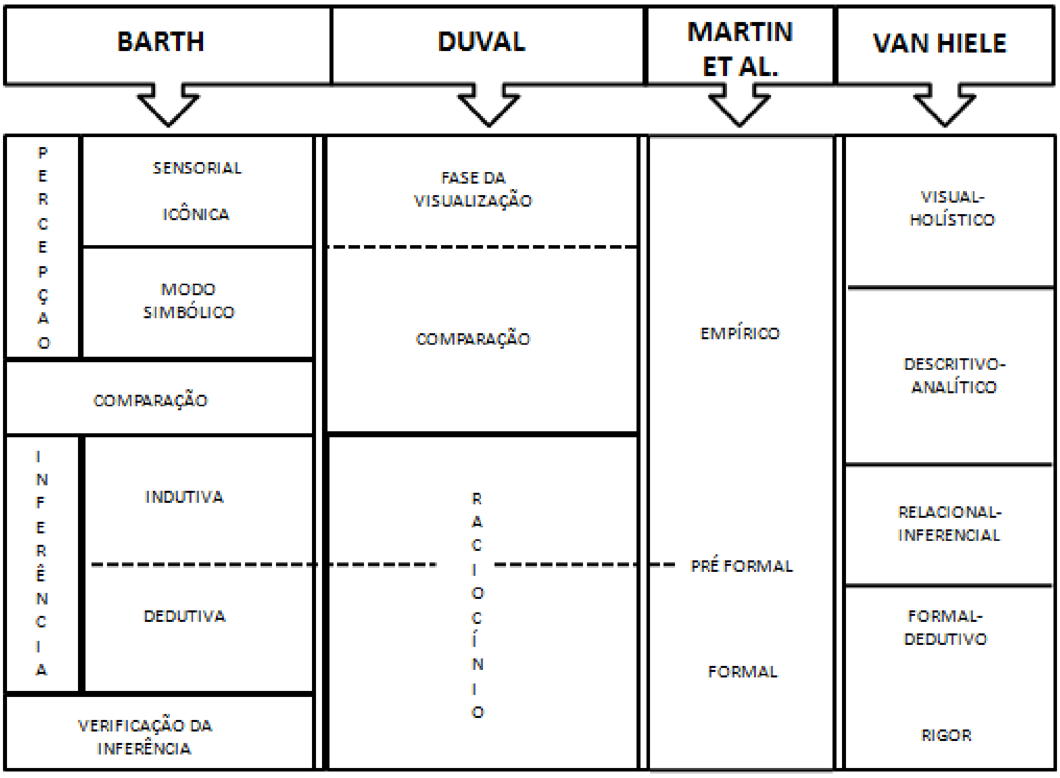


Figura 1. Processos de aprendizagem em geometria

As duas primeiras colunas da Figura 1 dialogam com as fases de aprendizagem em geometria. As duas últimas dizem respeito ao tipo de raciocínio empregado em cada uma dessas fases.

Ainda sobre o processo de aprendizagem de Geometria, Jones (2002) assinala que a visão computacional que os estudantes têm da matemática fazem com que eles não compreendam o valor das provas matemáticas e tampouco a forma como devem desenvolvê-las. É necessário resgatar a abordagem dedutiva intercalando-a com a indução e com a experimentação.

Materiais e métodos

O conjunto dos participantes da pesquisa é constituído por trinta e dois estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UFRB que estavam cursando o componente curricular *Geometria Plana e Espacial* do primeiro ano e cujas idades variavam entre 17 e 35 anos. Foram aplicadas sete HQs ao longo de dezesseis encontros realizados no ano de 2014. A pesquisa foi realizada no ambiente de trabalho do primeiro autor deste trabalho (designado de agora em diante como o *investigador*), mais especificamente em uma turma em que ele atuava como professor. Esta escolha deveu-se aos seguintes fatores: interesse pessoal do investigador em realizar pesquisas dentro do espaço onde já atuava; facilidade quanto a obtenção da anuência da direção do campus universitário no que tange a realização da investigação.

A pesquisa seguiu o paradigma qualitativo de investigação e o modelo metodológico adotado foi o estudo de caso. Optou-se por investigar com profundidade os impactos da utilização das HQs em um grupo específico. Nesta pesquisa não se pretende generalizar os resultados obtidos num contexto específico mas contribui para a produção de conhecimento (Mazzotti e Gewandsznajder, 1999). O investigador atuou como pesquisador-participante atuando numa interação constante com os participantes (Chizzoti, 2003).

Após a aplicação de cada HQ, foram entregues algumas atividades aos participantes acerca dos conteúdos apresentados. As respostas das atividades permitiram ao investigador avaliar a compreensão dos estudantes acerca dos conteúdos expostos bem como identificar o tipo de raciocínio geométrico empregado por eles. Houve também, em cada HQ, uma seção intitulada *Parando um pouco para refletir sobre a leitura* (PPPRSL). Esta seção consistia em uma atividade de múltipla escolha inserida no meio de cada HQ. Caso os estudantes assinalassem a alternativa correta poderiam prosseguir com a leitura. Caso contrário, deveriam reler a HQ até aquele ponto para então tentar responder novamente a atividade. A cada par de estudantes foi entregue uma HQ. As HQs foram produzidas pelo investigador, no *toondoo* (disponível em: www.toondoo.com) de junho de 2013 a julho de 2014. A Tabela 1 apresenta o conteúdo de cada HQ.

Tabela 1. Relação dos conteúdos presentes nas HQs

HQ	Conteúdos
HQ_1	Os Elementos de Euclides
HQ_2	Axiomas de incidência e de ordem. Segmento de reta, semirreta e semiplano.
HQ_3	Axiomas de medição de segmentos. Ponto médio de um segmento.
HQ_4	Axiomas de medição de ângulos. Classificação de ângulos. Retas perpendiculares.
HQ_5	Congruência de triângulos. Propriedades de triângulos isósceles. Bissetriz, mediana e altura relativa a um triângulo.
HQ_6	Teorema do ângulo externo. Desigualdade triangular.
HQ_7	Cálculo de área de regiões limitadas por figuras planas.

Além das respostas às atividades de cada HQ foram utilizados outros instrumentos de recolha de dados tais como questionários e entrevistas. Foram quatro questionários, um diagnóstico (QD) e três ao longo da experiência (Q1, Q2 e Q3). O QD teve como objetivo identificar a formação prévia dos participantes, sobretudo no que compete aos conteúdos de Geometria. Os restantes destinaram-se à coleta das impressões dos alunos acerca da HQ_2, HQ_4, HQ_6, respetivamente. A análise das outras HQs se deu através das entrevistas as quais ocorreram com nove participantes. A escolha desses últimos sujeitos se deu a partir da disponibilidade dos mesmos em encontrar o investigador fora do horário da aula. Eles se disponibilizaram espontaneamente após uma solicitação estendida a toda a turma.
A partir de agora os participantes serão denotados por A_i, com i variando de 1 a 32. Os termos *participantes*, *alunos*, *estudantes* ou *discentes* serão usados como sinônimos. Da mesma forma, os termos *investigador*, *pesquisador* e *professor* serão utilizados para designar o primeiro autor deste trabalho.

Os níveis de pensamento geométrico dos estudantes foram classificados segundo a descrição apresentada na tabela 2. Não foi adotado um único autor, dentre Barth, Duval, Martin et al. ou o casal Van Hiele, por se entender aqui que as teorias propostas por eles não são excludentees mas complementares.

Tabela 2. Níveis de pensamento geométrico utilizados

Níveis de pensamento	Descrição
Formal-dedutivo (FD)	Inferência dedutiva de Barth Nível formal de Martin et al. (2009) Nível formal-dedutivo de Van Hiele (foram acrescentadas algumas respostas ainda que contenham pequenos deslizes de linguagem ou notação)
Formal-dedutivo a melhorar (FDm).	Semelhante ao FD mas peca em: prolixidade, ordenamento das ideias, respostas demasiadamente sucintas
Semi-dedutivo (SD)	Argumentações bem estruturadas e dadas de forma dedutiva alternam-se com afirmações sem justificações. Foram inseridas aqui as respostas em que foram utilizados resultados não demonstrados em sala. Inserem-se aqui respostas inacabadas com lógica dedutiva. Está entre o nível relacional-inferencial e formal-dedutivo de Van Hiele. Aproxima-se do nível pré-formal de Martin et al. (2009)
Raciocínio indutivo ou incompleto (IN).	Contempla as inferências indutivas (Barth, 1987), raciocínio empírico (Martin et al. 2009) e está entre os níveis descritivo-analítico e relacional-inferencial (Van Hiele). Respostas inacabadas que seguem uma lógica indutiva
Raciocínio inconclusivo ou com erros conceituais (EC).	Atividades não respondidas, respondidas com erros, utilização de resultados equivocados, confusão entre hipótese e tese

Na próxima secção serão apresentadas algumas respostas que se constituem como representativas do conjunto de respostas apresentadas pelos alunos. Como as atividades propostas nas duas primeiras HQs não demandam necessariamente a construção de argumentações formais, o raciocínio geométrico dos alunos foi analisado a partir das restantes HQs.

Resultados

O raciocínio geométrico dos estudantes não está dissociado das experiências prévias desses sujeitos com as argumentações em Matemática. Por meio das entrevistas (E) realizadas, os alunos A_6, A_7, A_9 e A_{10} fizeram as seguintes declarações:

> [A geometria] era mais cálculo, cálculo de área, encontrar cateto, encontrar hipotenusa, medição dos ângulos, do triângulo, era mais voltado para esse lado. [A_6]
>
> Na educação básica a gente nunca ouviu falar de axioma (...) é só mecânica, prática. Eles passam, por exemplo, a área de um triângulo: base vezes altura dividido por dois. E por aí vai... Mas não demonstram para a gente o porquê daquilo ou quem foi que chegou naquilo. [A_7]
>
> (...) eram basicamente desenhos no quadro... muito poucos exemplos, (...) não davam assim, muita ênfase pra esse conteúdo. [A_9]

> (...) falaram que... tipo... a soma dos ângulos interno do triângulo.... Nem explicavam o porquê. Falou que era e pronto! [A_{10}]

As declarações acima apontam para a ausência de um ensino pautado numa perspectiva lógica-dedutiva. Priorizava-se as atividades envolvendo cálculos numéricos. A validade dos resultados matemáticos provinha da autoridade do professor ou da utilização de desenhos apresentados pelo docente. As demonstrações matemáticas não eram apresentadas e tampouco cobradas dos estudantes como referiu A_7 na entrevista: “Até chegar aqui, (...) nunca tive a necessidade, nunca precisei, nunca foi cobrado demonstrar”.

Por uma questão de tempo e espaço, optou-se por apresentar aqui os excertos de respostas apresentadas por alguns participantes para as atividades propostas nas HQs de número 4, 6 e 7. Tal escolha deveu-se ao fato dessas respostas conterem o raciocínio geométrico que mais esteve presente ao longo de toda a investigação. No que concerne às demais HQs, serão expostos dados numéricos resultantes das análises de todas as respostas apresentadas. Os dados postos iniciam-se na HQ de número 3.

Na HQ_3 foram propostas duas atividades. No Gráfico 1 pode-se ver uma descrição dos tipos de raciocínio geométrico utilizados pelos alunos.

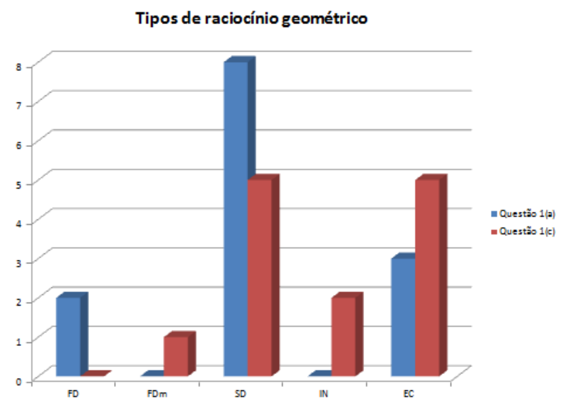


Gráfico 1. Tipos de raciocínio geométrico verificado nas respostas dos alunos às atividades propostas na HQ_3

O gráfico 1 revela uma supremacia do raciocínio semi-dedutivo (SD). Nas respostas da primeira atividade não foram encontrados raciocínio dos tipos FDm e IN. Na segunda atividade não houve respostas de natureza FD.

Na HQ_4 foram apresentados os resultados relacionados com os axiomas de medição de ângulos. Ao final da HQ foram propostas duas atividades. A Figura 2 traz o excerto da resposta apresentada por alguns alunos à primeira atividade.

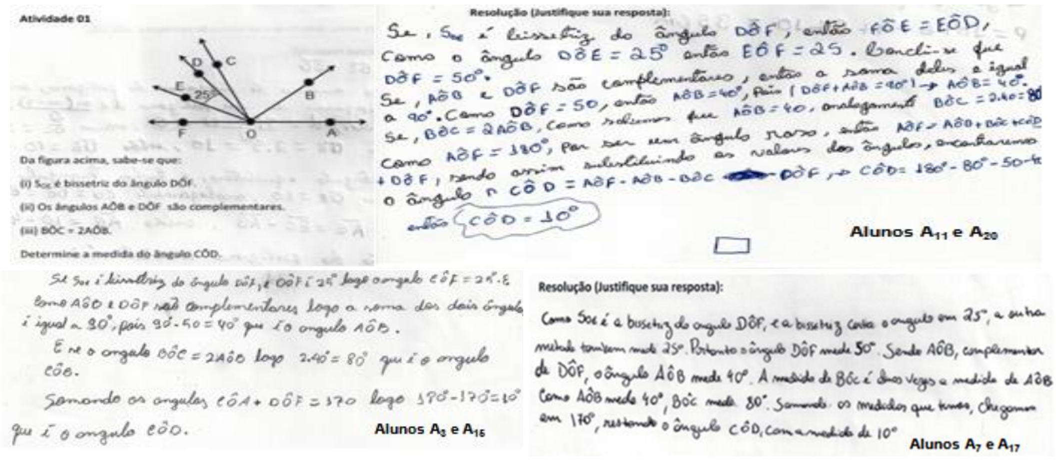


Figura 2. Excerto de respostas apresentadas por A_{11} e A_{20}, A_3 e A_{15}, A_7 e A_{17} à primeira questão proposta ao final da HQ_4.

As respostas indicadas na figura 2 revelam que os alunos usaram as hipóteses de forma lógica e dedutiva. Os textos estão bem escritos e revelam a presença do raciocínio geométrico FD. Esse mesmo tipo de raciocínio foi verificado nas respostas apresentadas por onze duplas dentre as treze duplas presentes. O Gráfico 2 apresenta os tipos de raciocínio geométrico empregados pelos alunos na resolução das duas atividades.

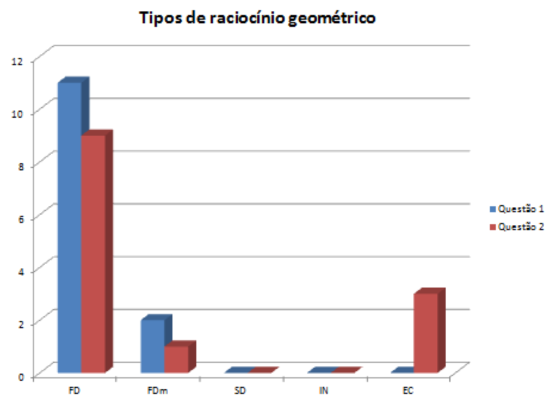


Gráfico 2. Tipos de raciocínio geométrico empregados pelos estudantes nas respostas das atividades propostas na HQ_4

De acordo com o gráfico 2 em ambas as atividades houve a predominância do raciocínio geométrico FD. Não foram identificados registos dos raciocínios SD e IN. O raciocínio EC foi verificado apenas na segunda atividade. No que se refere ao conteúdo desta HQ, A_{12} mencionou no questionário Q_2 que "o assunto é fácil e a revista ajuda bastante".

O Gráfico 3 apresenta os níveis de raciocínio geométrico identificado nas respostas atribuídas pelas treze duplas que respondera às duas questões propostas na HQ_5.

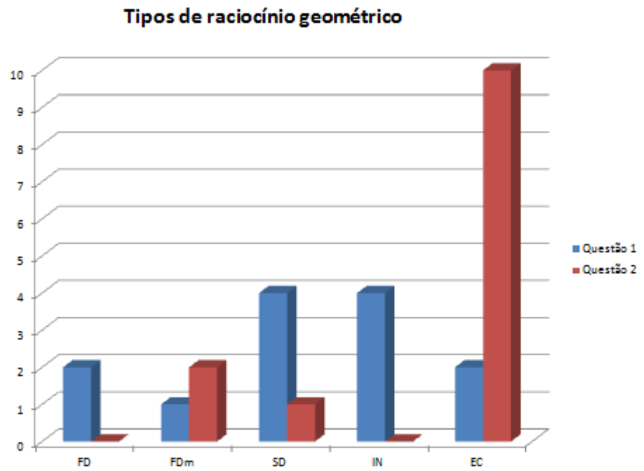


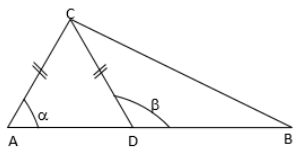
Gráfico 3. Tipo de raciocínio geométrico verificado nas respostas dos alunos às atividades propostas na HQ_5

O gráfico 3 revela a predominância dos raciocínios SD e IN na primeira questão. Houve registos dos cinco tipos de raciocínio geométrico. Na segunda questão há, de um lado, a supremacia de respostas com raciocínio EC e do outro a ausência do raciocínio FD.

A HQ_6 contempla o teorema do ângulo externo, a desigualdade triangular e os casos de congruência de triângulos retângulos. Diante da quantidade de assuntos, a leitura da HQ ocorreu em três momentos distintos. Foram propostas três questões no final da HQ conforme mostra a Figura 3.

Atividades Propostas

Considerando a figura abaixo, sabe-se que $\overline{CA} = \overline{CD}$.



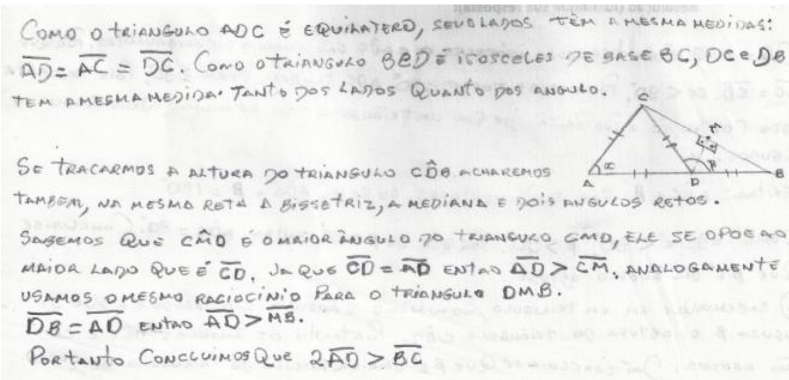
(a) Mostre que β é um ângulo obtuso.

(b) Prove que BC é o maior lado do triângulo BCD.

(c) Supondo que ADC é um triângulo equilátero e que BCD é um triângulo isósceles, mostre que $\overline{BC} \leq 2\overline{AD}$.

Figura 3. Atividades propostas na HQ_6

A terceiro item retratado na Figura 3 pode ser resolvida por meio da desigualdade triangular (DT). A_{10} e A_{28}, porém, não recorreram à DT. Eles apresentaram uma solução extensa que se destaca pela forma como foram empregados os conteúdos da HQ_6. A figura 4 traz o excerto da solução apresentada por esses alunos.



Como o triângulo ADC é equilátero, seus lados têm a mesma medidas: $\overline{AD} = \overline{AC} = \overline{DC}$. Como o triângulo BCD é isósceles de base BC, DC e DB tem a mesma medida. Tanto dos lados quanto dos ângulo.

Se traçarmos a altura do triângulo CDB acharemos também, na mesma reta a bissetriz, a mediana e dois ângulos retos.
Sabemos que $C\hat{M}D$ é o maior ângulo do triângulo CMD, ele se opõe ao maior lado que é $\overline{CD}$, já que $\overline{CD} = \overline{AD}$ então $\overline{AD} > \overline{CM}$, analogamente usamos o mesmo raciocínio para o triângulo DMB.
$\overline{DB} = \overline{AD}$ então $\overline{AD} > \overline{MB}$.
Portanto concluímos que $2\overline{AD} > \overline{BC}$

Figura 4. Solução apresentada por A_{10} e A_{28} à terceira questão proposta ao final da HQ_6

Como se pode ver na figura 4, A_{10} e A_{28} recorreram às propriedades dos triângulos isósceles. Apresentaram os argumentos de forma lógica e dedutiva. Em todos os itens da atividade retratada na figura 3, a maior parte das respostas foi construída por meio do raciocínio FD. O gráfico 4 apresenta um levantamento da quantidade de respostas construídas com cada tipo de raciocínio geométrico considerado neste texto.

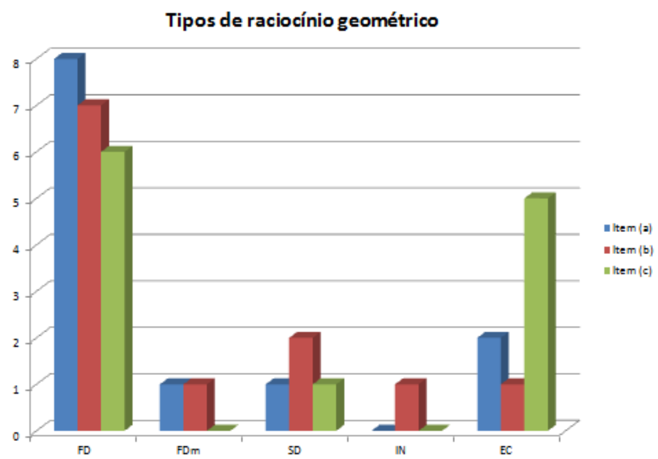


Gráfico 4. Tipos de raciocínio geométrico encontrado nas respostas dos estudantes às questões propostas ao final da HQ_6

O gráfico 4 revela o predomínio do raciocínio FD. Nos itens *a* e *b* houve uma expressiva diferença entre a quantidade de respostas com raciocínio FD e a quantidade de respostas com os outros tipos de raciocínio geométrico. No item *c* essa diferença diminuiu. Houve um aumento nas respostas com raciocínio EC.

A fragmentação da leitura da HQ_6 em três etapas fez com que o número de secções PPPRSL aumentasse. Os alunos foram convidados a apresentar as justificativas nas duas últimas secções. O gráfico 5 apresenta a quantidade de respostas dadas por meio de cada tipo de raciocínio geométrico nas duas últimas secções de PPPRSL.

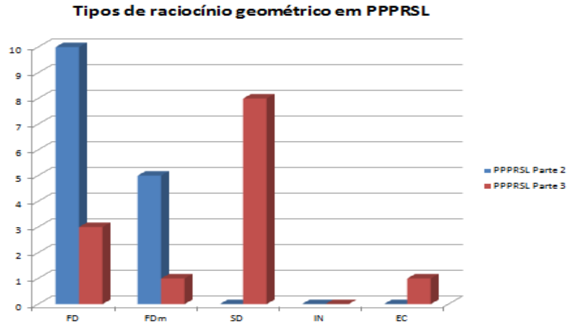


Gráfico 5. Tipos de raciocínio geométrico encontrado nas respostas dos estudantes às duas últimas partes da secção PPPRSL na HQ_6

Conforme se pode perceber através do gráfico 5, ao longo da leitura da HQ_6 os alunos recorreram ao raciocínio FD, FDm ou SD. Não houve registos de respostas construídas segundo uma lógica IN e apenas uma na presença do raciocínio EC.

Sobre a HQ_6, os alunos A_9 e A_{11} fizeram os seguintes comentários no questionário Q_3: "Como já tinha dito ao professor, esta foi uma das melhores historinhas [A_9]; "Essa revista ficou muito explicativa. Deu para absorver o máximo de conteúdos (...) eu não modificaria nada [A_{11}].

A HQ_7 contemplou o cálculo de área de figuras planas. Tendo como cenário um campo de futebol foram apresentadas as deduções das fórmulas das áreas das regiões limitadas por alguns polígonos (retângulo, paralelogramo, triângulo, trapézio) e pelo círculo. A figura 5 apresenta as atividades propostas ao final da leitura.

Figura 5. Atividades propostas ao final da HQ_7

O item *c* presente na figura 5 refere-se à comparação entre o comprimento do círculo central e o perímetro do trapézio MNRS. A maior parte das respostas foi construída por meio dos raciocínios FD ou FDm. As duplas que apresentaram o raciocínio do tipo FDm destinaram ao leitor (o professor, os colegas) a tarefa de estabelecer conexões entre as etapas que constituem a resolução. As duplas que apresentaram o raciocínio geométrico FD reuniram corretamente as linguagens simbólica, icônica e verbal. A figura 6 apresenta a resposta construída por uma das duplas.

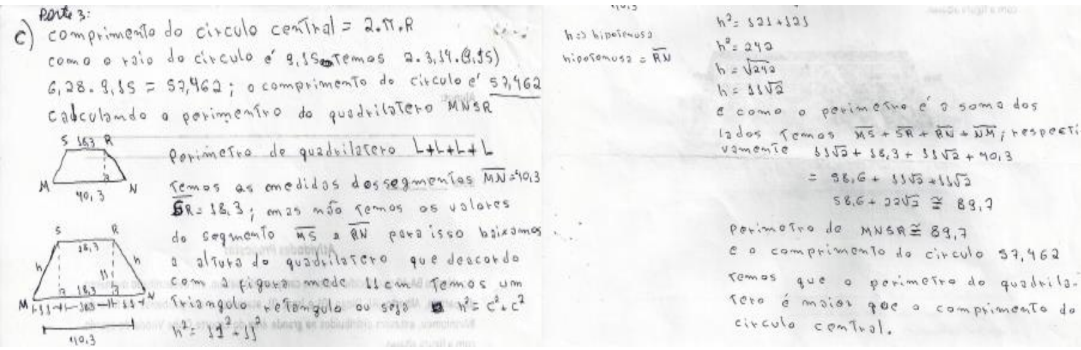


Figura 6. Solução proposta pelos alunos A_{12} e A_{29} ao terceiro item da questão proposta ao final da HQ_7

Como se pode perceber na figura 6, os alunos A_{12} e A_{29} tentaram estabelecer um diálogo com o leitor: “não temos os valores do[s] segmento[s] $\overline{MS}$ e $\overline{RN}$ para isso baixamos a altura do quadrilátero”. Estes estudantes não apresentam apenas os cálculos e as figuras, mas tentaram explicar textualmente os procedimentos adotados. Apresentaram o raciocínio geométrico FD.

O gráfico 6 apresenta a distribuição dos tipos de raciocínio geométrico ao longo dos três itens propostos.

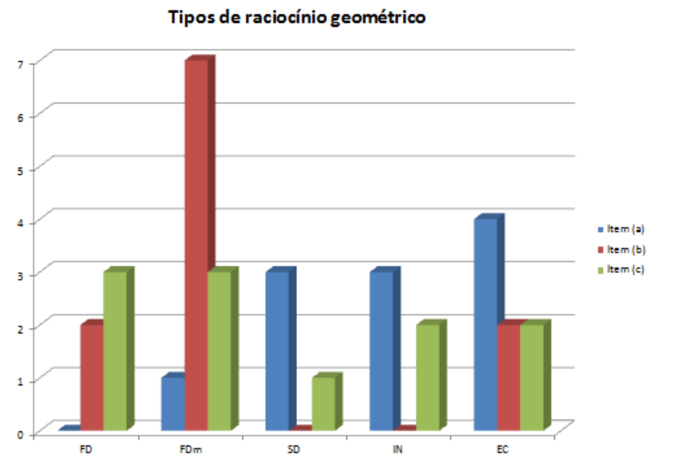


Gráfico 6. Tipos de raciocínio geométrico encontrado nas respostas atribuídas pelos estudantes às atividades propostas na HQ_7

O gráfico 6 apresenta um pico do raciocínio do tipo FDm durante a resolução do item *b*. No item *a* há um predomínio dos raciocínios SD, IN e sobretudo do raciocínio EC. Já no item *c* destacam-se os raciocínios FD e FDm.

Discussões

Na apresentação dos resultados, os níveis de raciocínio geométrico dos alunos foram classificados em: FD, FDm, SD, IN e EC. Desta vez, primando pela simplicidade do texto, optou-se por apenas três categorias: Dedutivo (FD e FDm), Semi-dedutivo (SD) e Não dedutivo (IN e EC). O gráfico 7, construído a partir dos gráficos apresentados na secção anterior, mostra a incidência desses níveis de raciocínio a partir das respostas dos estudantes às atividades propostas.

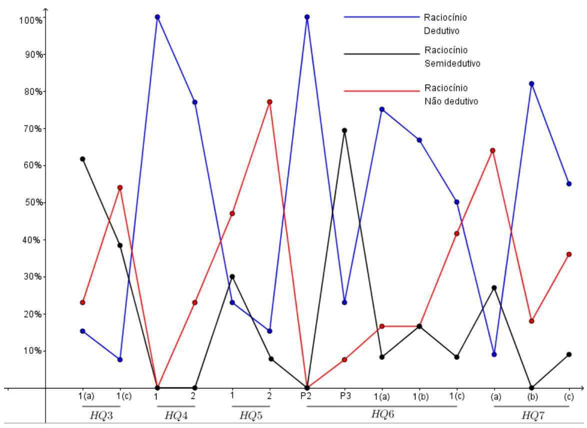


Gráfico 7. Percentual de respostas com os raciocínios dedutivo, semidedutivo e não dedutivo

Com o intuito de tornar o gráfico 7 mais compreensível optou-se por traçar linhas contínuas em vez apresentar apenas pontos isolados. Desta forma é mais fácil identificar o crescimento e o decrescimento de cada tipo de raciocínio. É possível ainda perceber o raciocínio predominante em cada atividade.

A despeito da falta do tratamento dedutivo em Geometria ao longo da educação básica dos participantes, o gráfico revela que as argumentações de natureza dedutiva foram aquelas encontradas com maior frequência. Na maior parte deste gráfico, a linha azul aparece acima das linhas vermelha e preta. A maior incidência do raciocínio dedutivo se deu nas atividades relacionadas às HQs de números 4, 6 e 7. Em momento algum a linha azul interceptou o eixo das abscissas. Isto significa que em todas as atividades foi possível encontrar alguma resposta dadas de forma dedutiva.

A seção anterior aponta alguns elementos que nos ajudam a entender a predominância do raciocínio dedutivo nas HQs de números 4, 6 e 7. A HQ_4 apresentou um conteúdo de baixo grau de complexidade de acordo com muitos participantes. A HQ_6 teve a sua leitura dividida em três momentos. A aprendizagem pôde ocorrer de forma mais processual. A HQ_7 trouxe o cálculo de área, um assunto comumente visto na educação básica.

Como as linhas azuis nem sempre estão acima das linhas vermelhas e pretas no gráfico 8 é razoável considerar que o nível de raciocínio de alguns estudantes nem sempre são de natureza formal-dedutiva. Esta conclusão aproxima-se da hipótese de que os níveis de raciocínio geométrico da classificação de Van Hiele não são necessariamente disjuntos. Conforme defende Pegg e Davey (1998, citado por Clements, 2003) alguns estudantes podem ter raciocínios de dois níveis diferentes sem ter necessariamente esgotado ambos os níveis. Há, porém sempre um nível predominante, defendem os autores.

Comparando os resultados obtidos no gráfico 8 com a formação prévia dos participantes é possível concluir que o raciocínio de natureza dedutiva pode ser estimulado e desenvolvido. É necessário, antes, que os estudantes tenham acesso a argumentações dessa natureza como o tiveram por meio das HQs.

Conclusões

Na fase inicial da pesquisa, os alunos não demonstraram familiaridade com o tratamento formal-dedutivo em Geometria. A partir das HQs aplicadas iniciou-se a aproximação desses sujeitos com as justificações de caráter lógico-dedutivo. O gráfico 7 revela que o contato com as HQs ajudou os participantes a desenvolverem o pensamento geométrico formal-dedutivo. A banda desenhada não pode ser caracterizada como a única responsável pelos dados expostos no gráfico 7. Contudo, não se pode descartar a sua influência no processo dos estudantes de aquisição da Geometria sob um viés axiomático.

Os dados revelaram que o desenvolvimento do raciocínio geométrico perpassa pela necessidade imposta aos estudantes de justificar as suas respostas à luz da estrutura axiomática que lhes é apresentada. É preciso interpelá-los, estimulá-los, incentivá-los a desenvolver argumentações de natureza dedutiva. Quanto maior a compreensão dos estudantes acerca dos conteúdos apresentados maior será a qualidade das argumentações apresentadas. A metodologia de ensino também exerce um papel relevante. Em vez de se apresentar uma série de resultados em um curto intervalo de tempo é preferível apresentá-los de forma mais gradual para que a aprendizagem possa ocorrer de forma efetiva.

Este trabalho trata-se de uma pesquisa pioneira que necessita, portanto, ser revisitada e aprimorada. Nem todos os conteúdos de Geometria Euclidiana Plana foram expostos nas HQs. Além disso, apesar de beber na fonte de Barth (1987), Duval (1998), Martin et al. (2009) e casal Van Hiele (Battista, 2009), ao classificar o raciocínio geométrico dos alunos o investigador pode ter cometido algum equívoco de interpretação. Esta investigação tem, portanto, as suas limitações.

Como tema de futuras investigações põe-se aqui a dicotomia entre a formalidade da linguagem matemática, sobretudo nas estruturas axiomáticas, e a coloquialidade da linguagem quadrinística. É plausível investigar em que medida o rigor matemático pode fragilizar a ludicidade que tanto se espera das histórias em quadrinhos.

Referências bibliográficas

Bankov, K. (2013). Teaching geometry of Bulgaria. *European Journal of Science and Mathematics Education, 1*(3), 158-164.

Barth, B. M. (1987). *A aprendizagem da abstração: métodos para um maior sucesso escolar*. Lisboa: Instituto Piaget.

Battista, M. T. (2009). Highlights of research on learning school geometry. In T. V. Craine, & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 91-108). United States: National Council of Teachers of Mathematics.

Chizzoti, A. (2003). A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: evolução e desafios. Revista Portuguesa de Educação, 16(2), 221-236.

Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. Gary Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 151–178). Reston, Virginia, USA: NCTM.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, *38*(1), 85-109.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37 - 52). London: Kluwer Academic Publishers.

Hansen, V. L. (1998). Changes and trands in geometry curricula. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 235-242). London: Kluwer Academic Publishers.

Harel. G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *7*, 234-283.

Jones (2002). Issues in the teaching and learning geometry. In L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice* (pp. 121-139). London: Routledge Falmer.

Martin, W. G., Carter, J. A., Forster, S., Howe, R., Kader, G. D., Kepner, H., Quander, J. R., McCallum, W., Robinson. E., Snipes, V. & Valdez, P. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. United States: Nacional Council Teachers of Mathematics.

Mazzotti, A. J. A., & Gewandsznajder, F. (1999). *O método nas ciências naturais e sociais: pesquisas quantitativas e qualitativas*. São Paulo: Editora Pioneira.