O Sentido de Divisão: Uma Experiência com Alunos do 6.º ano de escolaridade

Cristiana Pereira, Alexandra Gomes
CIEC/IE, Universidade do Minho
pg25521@alunos.uminho.pt, magomes@ie.uminho.pt

Número 5
Dezembro 2015
AEME Associação para a Educação Matemática Elementar
Ludus

Vária

O Sentido de Divisão: Uma Experiência com Alunos do 6.° ano de escolaridade

Cristiana Pereira, Alexandra Gomes
CIEC/IE, Universidade do Minho
pg25521@alunos.uminho.pt, magomes@ie.uminho.pt

Resumo: *O presente artigo resulta da conceção, desenvolvimento e avaliação de um projeto de intervenção pedagógica supervisionada e centra-se em duas intervenções numa turma de 6.° ano de escolaridade. Com efeito, objetivou-se desenvolver o sentido de divisão nos alunos da mesma e, tendo por base uma metodologia de investigação de caráter qualitativo, procurou-se responder à questão de investigação: Onde se situam as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de problemas que envolvem a divisão em contextos de partilha e de medida?. Os resultados obtidos indiciaram que os alunos sentem efetivamente dificuldades na resolução de problemas que envolvem a divisão em contextos de partilha e de medida, sobretudo na realização de divisões por métodos formais e na verificação dos dados e resultados.*

Palavras-chave: sentido de divisão; divisão como partilha; divisão como medida; 6.° ano de escolaridade.

1 O sentido de divisão

De acordo com Huinker, "the need to develop number sense is well documented and its characteristics have received extensive analysis, but the need to develop operation sense has not received the same attention or scrutiny" ([4], p. 72). Posto isto, com o intuito de caracterizar o sentido de operação, a autora apresenta sete dimensões inerentes ao desenvolvimento do mesmo, as quais se apresentam seguidamente: (i) compreensão do significado de operação; (ii) capacidade para reconhecer e descrever situações de vida real para as várias operações; (iii) dar significado aos símbolos e à linguagem matemática formal; (iv) capacidade para mudar facilmente de um modo de representação para outro; (v) compreender as relações entre as operações; (vi) capacidade para compor e decompor números e usar as propriedades das operações; e (vii) raciocinar sobre os efeitos das operações nos números.

Segundo Mendes, a aprendizagem da operação divisão é com frequência associada a dificuldades por parte dos alunos. De facto,

> os próprios professores dos 1.° e 2.° ciclos referem-se a esta operação como a mais difícil de ensinar aos seus alunos. Além disso, a sua aprendizagem é, muitas vezes, confundida com a mecanização das regras associadas ao algoritmo, não deixando espaço, na sala de aula, para o desenvolvimento de um trabalho com os alunos em torno da compreensão desta operação. (...) a aprendizagem da divisão é muito mais do que saber usar o algoritmo tradicional, significa [também] reconhecer esta operação em diferentes situações ([6], p. 6).

Efetivamente, Brocardo, Serrazina, e Kraemer consideram que a tradição curricular do nosso país é pautada pelo foco nos algoritmos [3]. Infelizmente persiste ainda "a ideia de que ensinar a divisão é ensinar a realizar o algoritmo da divisão" ([9], p. 201).

Em particular, Pinto e Monteiro referem que frequentemente surgem dificuldades aquando da divisão de números racionais representados por frações. Estas autoras constatam que "a aprendizagem da divisão de números racionais representados por fracções passa pela enfatização do algoritmo *inverter o divisor e multiplicar*" e afirmam que "o problema não está no facto de se ensinar este algoritmo, mas na forma como se ensina e quando" ([9], p. 201). Como Pinto e Monteiro alertam

> quando crianças de 11/12 anos são ensinadas a multiplicar "a primeira fracção pelo inverso da segunda", não entendem porque, se estão a dividir, têm de multiplicar. Um dos erros típicos consiste na inversão do dividendo, o que indicia uma completa incompreensão do que estão a fazer ([9], p. 201).

Tendo em consideração o suprarreferido, importa refletir acerca do desenvolvimento do próprio conceito. Acredita-se que trabalhar neste sentido permite aos alunos saber quando recorrer à divisão para resolver um dado problema e caminhar no sentido de compreender os procedimentos relativos aos algoritmos [9].

De facto, estudos disponíveis sobre esta problemática indicam-nos que cada operação tem mais do que uma interpretação. De acordo com Martins, as várias interpretações "têm implicações na forma como os alunos adquirem o sentido de cada operação, pois é necessário conhecer uma multiplicidade de significados, alguns dos quais pouco intuitivos" ([5], p. 4). Especificamente no que se refere à compreensão da operação divisão, Mendes assevera que esta se desenvolve "através do estabelecimento de relações entre contextos de divisão por medida e por partilha, de modo que seja possível comparar os procedimentos construídos pelos alunos num caso e noutro" ([6], p. 8).

Não obstante, o Programa de Matemática para o Ensino Básico, no que concerne ao domínio números e operações e ao conteúdo "números racionais não negativos", menciona que os alunos do 5.° ano de escolaridade deverão adquirir a "divisão de números racionais não negativos representados na forma de fração" ([7], p. 15).

Nas páginas iniciais do referido documento pode ler-se que os desempenhos que os alunos em cada um dos três ciclos da escolaridade básica deverão evidenciar devem concorrer, de forma integrada, para a aquisição de conhecimentos de factos e de procedimentos, a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático, uma comunicação adequada à matemática, a resolução de problemas em diversos contextos e uma visão da matemática como um todo articulado e coerente [7]. Como se sabe, estas são ideias-chave na educação matemática. Porém, a forma como se propõem concretizar é claramente insensata. Por exemplo, no que concerne à resolução de problemas, destaca-se que esta envolve, por parte dos alunos,

> a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais ([7], p. 5).

O National Council of Teachers of Mathematics, por seu turno, relativamente à resolução de problemas, enfatiza que esta, para além de constituir um objeto da aprendizagem matemática, "é também um importante meio pelo qual os alunos aprendem matemática. Os alunos deverão ter muitas oportunidades para formular, discutir e resolver problemas (...) e, em seguida, deverão ser encorajados a reflectir sobre os seus raciocínios" ([8], p. 57). A este propósito, respostas à questão "Alguém resolveu o problema de outra maneira?" ajudam "ao desenvolvimento da linguagem comum e das representações e contribui para que os outros alunos compreendam o trabalho desenvolvido pelo primeiro" ([8], p. 59).

Tendo em consideração os aspetos anteriormente referidos relativos aos números e operações e à resolução de problemas, urge referir que compete ao professor encorajar os alunos, regularmente, "a mostrar e a aprofundar os seus conhecimentos dos números e das operações, através da resolução de problemas contextualizados interessantes e da discussão das representações e das estratégias utilizadas" ([8], p. 91). Brocardo e Serrazina consideram que os problemas são de facto basilares na aprendizagem dos números e operações [2].

Realce-se, ainda, que no Programa de Matemática para o Ensino Básico não há referência à representação e ao seu papel no estudo da matemática [7], o que contraria notoriamente "o que se tem investigado sobre o valor de uma experiência matemática rica e significativa desde os primeiros anos de escolaridade" ([12], p. 8). Relembre-se, a este propósito, um dos objetivos gerais elencados no programa revogado: "os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações (...) devem conhecer e compreender os diferentes tipos de representações, ser capazes de as utilizar em diferentes situações e de seleccionar a representação mais adequada à situação" ([10], pp. 4-5).

Neste momento, importa referenciar a pertinência da representação no estudo da matemática por desempenhar dois papéis fundamentais: é uma ferramenta de raciocínio e é um instrumento de comunicação ([8], p. 75). Neste sentido, o professor que auxilia os alunos na seleção e organização das representações que evidenciem os seus raciocínios e que ouve atentamente as suas ideias "poderá ajudá-los a desenvolverem a predisposição e a capacidade para modelar problemas eficazmente, para clarificar o seu próprio entendimento de um problema e para utilizar as representações para comunicar eficazmente com os outros" ([8], p. 244).

2 Uma experiência com alunos do 6.° ano de escolaridade

O presente artigo resulta da conceção, desenvolvimento e avaliação de um projeto de intervenção pedagógica supervisionada, concretizado no âmbito da unidade curricular Prática de Ensino Supervisionada, incluída no plano de estudos do Mestrado em Ensino do 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico da Universidade do Minho. Este decorreu, num primeiro momento, no 1.° ciclo do ensino básico, numa turma de 4.° ano de escolaridade e, num segundo momento, no 2.° ciclo do ensino básico, especificamente numa turma de 6.° ano de escolaridade.

O estudo que aqui se apresenta tem enfoque na 1.ª e 2.ª intervenções na turma de 6.° ano de escolaridade (no total foram desenvolvidas três intervenções), presenciadas por 14 alunos, com idades compreendidas entre os 11 e os 14 anos, sendo 5 do sexo masculino e 9 do sexo feminino. De assinalar que estes alunos são identificados por números, por forma a manter o anonimato.

O projeto de intervenção pedagógica supervisionada, centrado no domínio números e operações, consubstanciou-se no desenvolvimento do sentido de operação, especificamente de divisão, nos alunos da turma suprarreferida. Concomitantemente, substancializou-se na procura da resposta à questão de investigação: 1. Onde se situam as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de problemas que envolvem a divisão em contextos de partilha e de medida?. Para tal, procurou-se responder às subquestões enunciadas: 1.1 Situam-se na identificação do problema como envolvendo uma situação de divisão?; 1.2 Situam-se na realização da divisão por métodos formais?; e 1.3 Situam-se na verificação dos dados e resultados?. Assim, no decorrer da 1.ª e 2.ª intervenções, que perfizeram individualmente 90 minutos, procurou-se coadunar os objetivos pedagógicos, as atividades desenvolvidas e os objetivos investigativos. A 1.ª intervenção objetivava, fundamentalmente, desenvolver o sentido de divisão em contexto de partilha, enquanto a 2ª intervenção tinha por objetivo essencial desenvolver o sentido de divisão em contexto de medida. Para isso, foram elaborados dois problemas, um para cada sessão, através da exploração dos quais se procurava promover o reconhecimento da divisão em contexto de partilha/medida; potenciar a realização e compreensão de divisões de números racionais positivos representados na forma de fração por métodos formais e informais; e estimular a verificação dos dados e resultados. Simultaneamente, com estas intervenções procurava-se perceber onde se situavam as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de problemas que envolvem a divisão como partilha/medida, no sentido de dar resposta à questão e subquestões de investigação.

No que concerne à metodologia de investigação adotada no âmbito do estudo, importa referir que esta assumiu um caráter qualitativo. Os dados foram obtidos por formas variadas, nomeadamente através de: documentos construídos pelos alunos, registos audiovisuais (de cada intervenção), observações e anotações escritas pelo investigador. Estes elementos formaram a "base da análise" ([1], p. 149), apresentando-se, concomitantemente, como provas e pistas [1].

2.1 1.ª Intervenção - Divisão como partilha

Como referido anteriormente, a 1.ª intervenção objetivava, fundamentalmente, desenvolver o sentido de divisão em contexto de partilha. Para isso, foi elaborado o seguinte problema (Problema 1):

A Elisa pediu à mãe chocolate para oferecer a alguns amigos. A mãe deu-lhe $\frac{1}{2}$ de um chocolate e disse-lhe que deveria oferecer a cada amigo a mesma quantidade de chocolate. Se a Elisa oferecer chocolate a 4 amigos, que parte de um chocolate a Elisa vai oferecer a cada amigo?

Iniciou-se a intervenção com a distribuição, por cada um dos alunos, da Tarefa 1, para que pudesse ser concretizada individualmente. Esta consistia em assinalar, de entre as seguintes, a opção que representa o Problema 1:

$$\frac{1}{2} \div 4,\ \frac{1}{2} \times 4,\ 4 \div \frac{1}{2}\ e\ 4 \div 2.$$

Finda a concretização da Tarefa 1 por cada um dos alunos, promoveu-se um momento de discussão acerca da mesma.

De um modo geral, os alunos demonstraram facilidades na concretização desta tarefa. De acordo com Pinto e Monteiro, situações problemáticas como a apresentada, isto é, "situações onde se pretende determinar o tamanho de cada grupo, ou seja, o valor que cabe a cada um dos elementos do divisor" ([9], p. 208), são as que os alunos identificam, primeiramente, como problemas de divisão. Porém, dois alunos (8 e 9) assinalaram uma expressão numérica que não representa a situação descrita.

Solicitou-se ao aluno 8 que registasse no quadro a sua resolução e que procurasse expor os seus raciocínios. Este assinalou a expressão numérica $\frac{1}{2} \times 4$. A Transcrição 1 procura ilustrar a resolução do aluno 8:

Aluno 8 - Eu escolhi esta porque supostamente "de" é vezes e então deve ser $\frac{1}{2}$ *vezes* 4.

Transcrição 1. Explicação da resolução de um aluno (8) na Tarefa 1 (Problema 1).

O aluno 9, analogamente, assinalou a expressão numérica $\frac{1}{2} \times 4$. A Transcrição 2 procura ilustrar a sua justificação:

Aluno 9 - A mim pareceu-me que ela ia dar $\frac{1}{2}$ *aos* 4 *amigos. A cada um dos* 4 *amigos.*

Transcrição 2. Explicação da resolução de um aluno (9) na Tarefa 1 (Problema 1).

A justificação destes erros parece correlacionar-se com dificuldades concetuais e de interpretação, respetivamente. A incorreção cometida pelo primeiro aluno (8), especificamente, parece ocasionada por aprendizagens anteriores que, por vezes, como referem Pinto e Monteiro, "se tornam obstáculos à apropriação de novos conhecimentos" ([9], pp. 214-215).

Em decurso, procurou-se estimular a reflexão e argumentação das concetualizações da turma. Para isso, realizou-se uma sistematização em plenário, tendo sido registadas numa tabela as respostas às questões "O que sabemos?", "O que queremos saber?" e "Como vamos descobrir?" no âmbito do Problema 1. Esta estratégia permitiu à turma identificar e assinalar as incorreções cometidas. Por fim, cada um dos alunos registou a informação sistematizada e a correção da Tarefa 1.

Após este momento, distribuiu-se aos alunos a Tarefa 2, para que pudesse, também, ser realizada individualmente. Nesta, os alunos deviam resolver o problema apresentado.

No final da concretização da Tarefa 2 pela turma, promoveu-se um momento de discussão acerca da mesma. Solicitou-se a um aluno (13) que registasse no quadro a sua resolução e que procurasse expor os seus raciocínios. Este resolveu o problema recorrendo à representação simbólica, contudo calculou incorretamente. A Figura 1 e a Transcrição 3 procuram ilustrar a resolução do aluno 13:

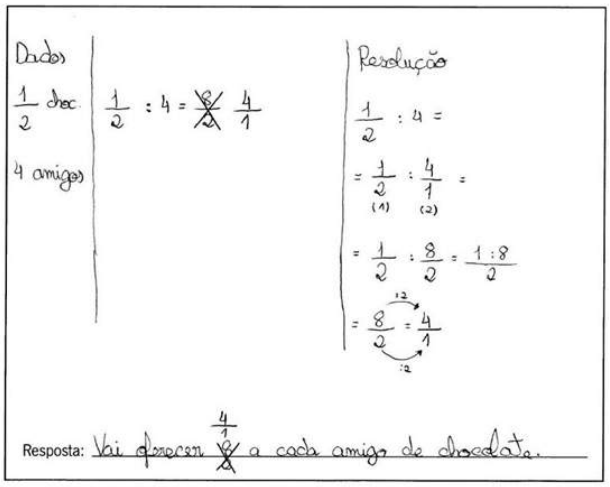

Figura 1: Resolução de um aluno (13) na Tarefa 2 (Problema 1).

Aluno 13 - Eu peguei na metade da tablete de chocolate e comecei a dividir pelos 4 amigos.

Professora - Muito bem, até aqui todos concordamos.

Aluno 13 - Só que eu tinha que arranjar uma fração, então pus o traço e o 1.

Depois tinha que arranjar o mesmo denominador e então eu multipliquei este ($\frac{1}{2}$) *por* 1 *e este* ($\frac{4}{1}$) *por* 2. *Depois quando consegui encontrar o mesmo denominador, dividi os numeradores e deixei o denominador igual porque não se pode mexer nele... Depois quando cheguei à fração, pus na forma irredutível.*

Professora - Dividiste 1 *por* 8 *que deu...*

Aluno 13 - 8. E depois pus na forma irredutível.

Transcrição 3. Explicação da resolução de um aluno (13) na Tarefa 2 (Problema 1).

Posto isto, perguntou-se à turma quem tinha uma resolução e/ou resultado diferente e pediu-se que, tal como o colega, a registasse no quadro e procurasse expor os seus raciocínios.

O aluno 8 também resolveu o problema recorrendo à representação simbólica e calculou incorretamente. A Figura 2 e a Transcrição 4 procuram ilustrar sua resolução:

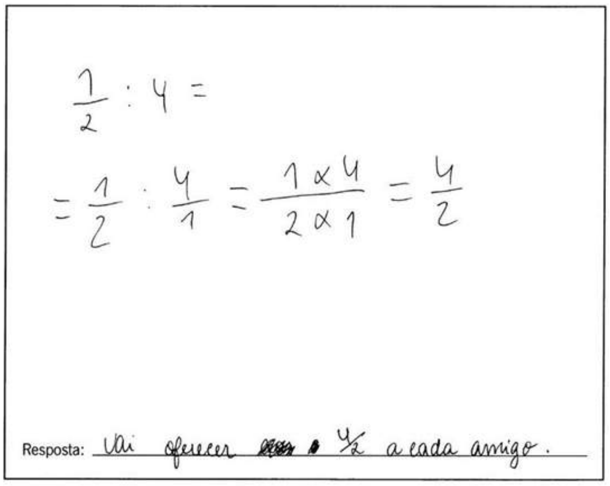

Figura 2: Resolução de um aluno (8) na Tarefa 2 (Problema 1).

Aluno 8 - Eu fiz $\frac{1}{2}$ *a dividir por* 4. *Depois representei* $\frac{1}{2}$ *a dividir por* $\frac{4}{1}$. *Depois fiz traço de fração e o numerador vezes numerador,* 1 *vezes* 4, *e depois fiz denominador vezes denominador,* 2 *vezes* 1. *E deu-me* $\frac{4}{2}$.

Transcrição 4. Explicação da resolução de um aluno (8) na Tarefa 2 (Problema 1).

Refira-se que os alunos 1 e 10 afirmaram ter procedido da mesma forma.

Acentue-se, agora, que oito alunos resolveram a Tarefa 2 recorrendo à representação simbólica do problema, porém quatro alunos (1, 8, 10 e 13) calcularam incorretamente. E, ainda, um aluno (6), apesar de ter procurado resolver o problema recorrendo à sua representação simbólica, não efetuou o cálculo. Por oposição ao preconizado pelo documento Programa de Matemática para o Ensino Básico [7] com relação à destreza na aplicação do algoritmo da divisão de números racionais não negativos por alunos do 2.° CEB, particularmente do 5.° ano de escolaridade, os presentes dados parecem evidenciar que alguns alunos que compõe a turma em estudo revelam dificuldades no cálculo da divisão de números racionais representados por frações. Estes resultados, contudo, são corroborados pelo NCTM [8], que realça o facto de os alunos sentirem, tradicionalmente, muitas dificuldades aquando da divisão destes números, muito embora inverter o divisor e multiplicar pareça ser uma forma simples para o fazer. Efetivamente, o aluno 13 evidenciou ter mobilizado procedimentos utilizáveis aquando da adição e subtração de números racionais representados por frações e os alunos 1, 8 e 10 resolveram a expressão $\frac{1}{2} \div 4$, como se da expressão $\frac{1}{2} \times 4$ se tratasse. Sublinhe-se, por fim, que estes alunos indiciaram sentir, igualmente, dificuldades na verificação dos dados e resultados, uma vez que, como se constatou, revelaram falta de sentido crítico face às soluções.

Findo este momento, o aluno 12, que resolveu o problema recorrendo à representação simbólica do mesmo, tendo realizado o cálculo corretamente e escrito a resposta correta, procurou expor os seus raciocínios. De facto, este mostrou ter multiplicado o dividendo pelo inverso do divisor, o que permitiu à turma identificar e assinalar as incorreções cometidas. Aqui, procurou-se estimular a reflexão e argumentação das concetualizações dos alunos, atendendo-se, também, aos dados e resultados obtidos. Como concluíram, as respostas dos alunos 13, 8, 1 e 10 estavam visivelmente incorretas, atentando no conjunto inicial ($\frac{1}{2}$ de um chocolate) e no número de subconjuntos (4 amigos).

O aluno 9, por sua vez, demonstrou interesse em apresentar a sua resolução, afirmando ter desenvolvido uma estratégia que o conduziu à resposta correta (Figura 3).

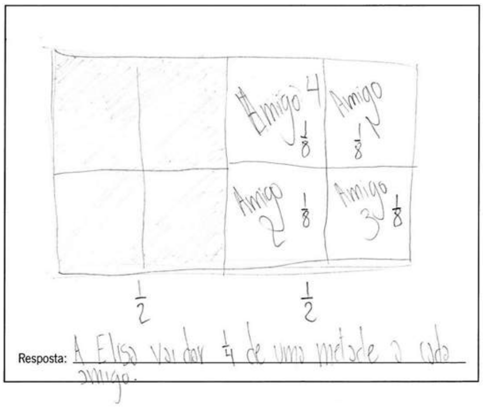

Figura 3: Resolução de um aluno (9) na Tarefa 2 (Problema 1).

Como se pode observar, este aluno resolveu o problema recorrendo à representação pictórica do mesmo. Foi dada particular atenção à sua resolução, a qual despertou a admiração da turma e se revelou similar à dos alunos 3, 5 e 11.

Em decurso, focalizou-se a atenção da turma na resposta do aluno 9 - "A Elisa vai dar $\frac{1}{4}$ de uma metade a cada amigo" - e procurou-se estimular a reflexão e argumentação das suas concetualizações. Enquanto suporte para esta discussão, a representação ativa por cada um dos alunos constitui-se essencial. Como tal, foram distribuídas folhas de papel (tamanho A5) por cada aluno e foi mencionado que cada uma destas representava uma unidade, isto é, um chocolate. Posto isto, pediu-se aos alunos que, aos pares, manipulassem o papel, de modo a resolverem (através de outro modo de representação) o Problema 1.

Denotou-se, de imediato, um envolvimento espontâneo dos alunos nesta atividade, que não gerou quaisquer dúvidas. Efetivamente, com o intuito de saber que parte de uma unidade há em cada subconjunto, os pares começaram por representar o conjunto inicial e, posteriormente, separaram-no no número conhecido de subconjuntos. Os alunos 1 e 4 deslocaram-se ao quadro e apresentaram a sua resolução.

2.2 2.ª Intervenção - Divisão como medida

A intervenção agora descrita visava, principalmente, desenvolver o sentido de divisão com o significado de medida. Para isso, foi elaborado um novo problema (Problema 2):

A Elisa pediu à mãe chocolate para oferecer a alguns amigos. A mãe deu-lhe 2 chocolates e disse-lhe que deveria oferecer a cada amigo a mesma quantidade de chocolate. Se a Elisa oferecer $\frac{1}{8}$ de um chocolate a cada amigo, vai oferecer chocolate a quantos amigos?

Tal como na 1ª intervenção, começou-se por distribuir a cada um dos alunos a Tarefa 1, para que pudesse ser concretizada individualmente. Esta consistia em assinalar, de entre as seguintes, a opção que representa o Problema 2:

$$\frac{1}{8} \div 2,\ \frac{1}{8} \times 2,\ 2 \div \frac{1}{8}\ e\ 2 \div 8.$$

Finda a concretização da Tarefa 1 por cada um dos alunos, promoveu-se um momento de discussão acerca da mesma.

Ora, tal como na intervenção anterior, de um modo geral, os alunos demonstraram facilidades na concretização da Tarefa 1. Porém, quatro alunos (13, 2, 3 e 9) não assinalaram a expressão numérica que representa a situação descrita. Assim, solicitou-se ao aluno 13 que registasse no quadro a sua resolução e que procurasse expor os seus raciocínios. Este assinalou a expressão numérica $\frac{1}{8} \times 2$. A Transcrição 5 procura ilustrar a resolução do aluno 13:

Aluno 13 - (depois de reler o problema) Já vi que não está bem. Eu li tudo mal... eu percebi outra coisa, percebi que ela tinha que dar $\frac{1}{8}$ de um chocolate a cada amigo, que eram 2. Então eu pensei que ela tinha que multiplicar $\frac{1}{8}$ de um chocolate pelos 2 amigos. Nem li bem a pergunta.

Transcrição 5. Explicação da resolução de um aluno (13) na Tarefa 1 (Problema 2).

Depois disto, o aluno 13 identificou a expressão que representa a situação descrita ($2 \div \frac{1}{8}$). Sublinhe-se que os alunos 2 e 3, à semelhança do aluno 13, afirmaram ter assinalado a expressão $\frac{1}{8} \times 2$ por não terem lido atentamente o problema.

O aluno 9 também assinalou uma expressão numérica que não representa a situação descrita: $\frac{1}{8} \div 2$. Apesar de ter revelado dificuldades em explanar os seus raciocínios, afirmou que a sua resposta estava claramente errada, referindo que a resposta correta seria $2 \div \frac{1}{8}$.

A justificação destas incorreções parece correlacionar-se com a leitura desatenta do enunciado, uma vez que assim que este foi relido a expressão numérica que representa a situação descrita foi identificada.

Em decurso, procurou-se estimular a reflexão e argumentação das concetualizações da turma. Para isso, realizou-se uma sistematização em plenário, tendo sido registadas numa tabela as respostas às questões "O que sabemos?", "O que queremos saber?" e "Como vamos descobrir?" no âmbito do Problema 2. Por fim, cada um dos alunos registou a informação sistematizada e a correção da Tarefa 1.

Após este momento, os alunos passaram para a Tarefa 2, que pressupunha a resolução do problema apresentado individualmente.

No final da concretização da Tarefa 2 pela turma, promoveu-se um momento de discussão acerca da mesma. Solicitou-se a um aluno (10) que registasse no quadro a sua resolução e que procurasse expor os seus raciocínios. Este resolveu o problema recorrendo à representação simbólica, contudo calculou incorretamente. A Figura 4 e a Transcrição 6 procuram ilustrar a resolução do aluno 10:

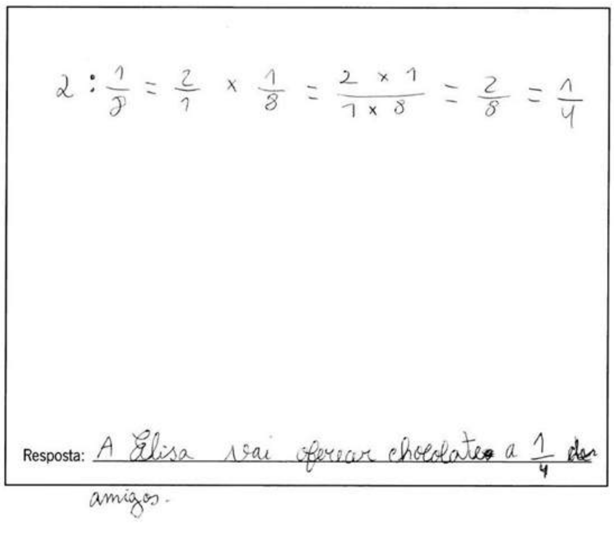

Figura 4: Resolução de um aluno (10) na Tarefa 2 (Problema 2).

Aluno 10 - Nós sabemos que... nós sabemos que dividir estes números é a mesma coisa que multiplicar. Então... 2 a dividir por $\frac{1}{8}$ é igual a 2 vezes $\frac{1}{8}$. E depois é assim... 2 vezes 1 e 1 vezes 8, que é $\frac{2}{8}$, que é $\frac{1}{4}$.

Transcrição 6. Explicação da resolução de um aluno (10) na Tarefa 2 (Problema 2).

Note-se que o aluno 1 afirmou ter procedido da mesma forma. Posto isto, perguntou-se à turma quem tinha uma resolução e/ou resultado diferente e pediu-se que, tal como o colega, a registasse no quadro e procurasse expor os seus raciocínios.

O aluno 13, outrossim, resolveu o problema recorrendo à representação simbólica e calculou incorretamente. A Figura 5 e a Transcrição 7 procuram ilustrar a resolução do aluno 13.

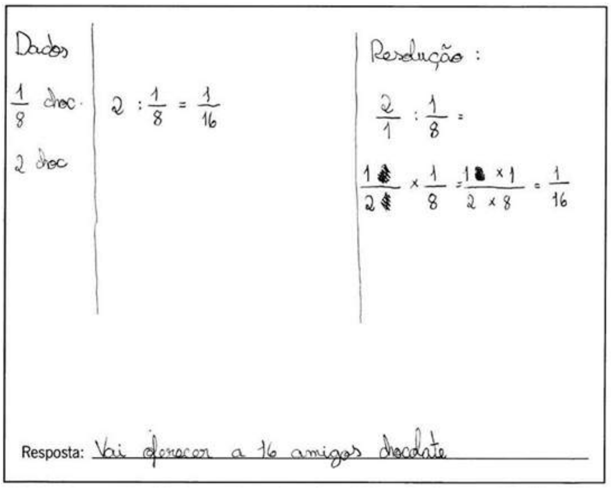

Figura 5: Resolução de um aluno (13) na Tarefa 2 (Problema 2).

Aluno 13 - A regra não é assim (referindo-se à apresentada pelo aluno 10). A regra é: dividir é multiplicar pelo inverso. E então eu fiz isso. Primeiro eu tinha que arranjar uma fração, e 2 é igual a $\frac{2}{1}$. E agora já dava, $\frac{1}{2}$ é o inverso. E depois multipliquei por $\frac{1}{8}$. Multipliquei os numeradores e os denominadores, 1 por 1 e 2 por 8. E deu $\frac{1}{16}$.

Professora - E sendo assim, a tua resposta foi...

Aluno 13 - A Elisa vai oferecer chocolate a 16 amigos. $\frac{1}{16}$ não dava. É outra vez o inverso.

Transcrição 7. Explicação da resolução de um aluno (13) na Tarefa 2 (Problema 2).

Sublinhe-se que o aluno 8 procedeu de forma análoga.

Acentue-se, agora, que nove alunos resolveram a Tarefa 2 recorrendo à representação simbólica do problema, no entanto quatro alunos (1, 8, 10 e 13) calcularam incorretamente. Efetivamente, os alunos 10 e 1 parecem ter presente a ideia de que dividir números racionais representados por frações consiste em multiplicar esses números e os alunos 13 e 8, por sua vez, parecem ter presente a ideia de que dividir números racionais representados por frações consiste em inverter o dividendo e multiplicar pelo divisor. Segundo Pinto e Monteiro, este último erro é, de facto, um dos erros típicos, e indicia "uma completa incompreensão do que [os alunos] estão a fazer" ([9], p. 201). De notar, por fim, que a resposta dada a este problema pelos alunos 10 e 1, ao contrário da registada pelos alunos 13 e 8, indicia que os primeiros sentem, também, dificuldades na verificação dos dados e resultados, na medida em que, como se constatou, revelou que detêm falta de sentido crítico face às soluções.

Findo este momento, o aluno 4, que resolveu corretamente o problema recorrendo à representação simbólica do mesmo, procurou expor os seus raciocínios. Este explicou ter multiplicado o dividendo pelo inverso do divisor e, desta forma, ter obtido a resposta ao problema. Esta exposição permitiu à turma identificar e assinalar as incorreções cometidas. Aqui, procurou-se estimular a reflexão e argumentação das concetualizações dos alunos, atendendo-se, também, aos dados e resultados. Como concluíram, as respostas dos alunos 10 e 1 estavam visivelmente incorretas, atentando no conjunto inicial (2 chocolates) e na parte de uma unidade em cada subconjunto ($\frac{1}{8}$ de um chocolate a cada amigo).

Posteriormente, o aluno 14, foi estimulado a apresentar a sua resolução, visto ter desenvolvido uma estratégia que o conduziu à resposta correta (Figura 6).

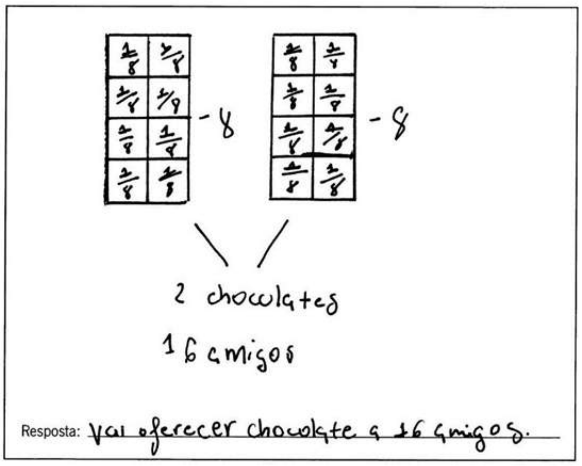

Figura 6: Resolução de um aluno (14) na Tarefa 2 (Problema 2).

Como se pode observar, este aluno resolveu o problema recorrendo à representação pictórica do mesmo. Tal como na 1.ª intervenção, foi dada particular atenção a esta forma de resolução, a qual despertou a curiosidade da turma e se revelou similar à dos alunos 3, 5, 6 e 11.

Em decurso, procurou-se promover a reflexão e argumentação das concetualizações da turma. Constituindo-se a representação ativa por cada um dos alunos fundamental, optou-se, à semelhança da intervenção anteriormente descrita, por distribuir folhas de papel (tamanho A5) por cada aluno, mencionando-se que cada uma destas representava uma unidade, isto é, um chocolate. Posto isto, pediu-se aos alunos que, aos pares, manipulassem o papel, de modo a resolverem (através de outro modo de representação) o Problema 2.

Denotou-se, novamente, um envolvimento dos alunos nesta atividade, que não gerou quaisquer dúvidas. De facto, com o intuito de saber o número de subconjuntos, os pares começaram por representar o conjunto inicial e, posteriormente, separaram-no em subconjuntos com a parte de uma unidade definida à partida. Os alunos 7 e 12 deslocaram-se ao quadro e apresentaram a sua resolução.

Por fim, realizou-se uma sistematização em plenário, tendo sido confrontadas as diferentes resoluções. O principal intuito foi permitir que os alunos estabelecessem uma conexão entre as representações simbólica, icónica e ativa, tendo surgido uma oportunidade de discutir de forma significativa a divisão como medida e a divisão por $\frac{1}{n}$. Neste âmbito, creio que, entre outros aspetos, o facto de se ter optado pela modelação da situação com recurso às folhas de papel e de se tratar de uma situação de divisão de um número inteiro por uma fração unitária permitiu à turma constatar que $2 \div \frac{1}{8} = 2 \times 8 = 16$. Na verdade, segundo o NCTM,

> os alunos poderão desenvolver conhecimentos aprofundados dos números racionais, por meio de actividades com uma diversidade de modelos, como tiras de papel (...). Tais modelos fornecem aos alunos representações concretas de ideias abstractas, facilitando a utilização de representações com compreensão, e a flexibilidade na passagem para representações equivalentes durante a resolução de problemas ([8], p. 254).

Para além disso, Sinicrope, Mick, e Kolb [11], consideram que para estabelecer uma relação entre o raciocínio efetuado na resolução de situações de divisão como medida e o algoritmo utilizado, é mais intuitivo dividir um número inteiro por uma fração unitária.

No final, foi relembrada, em grande grupo, a exploração dos problemas 1 e 2 e sintetizada a informação. Primeiramente, foram identificados os procedimentos comuns à exploração. Em seguida, foram identificados os aspetos que diferenciam os problemas referidos. Num primeiro momento, foi referenciado que o Problema 1 envolve a divisão de um número representado por uma fração por um número inteiro e que o Problema 2, por sua vez, envolve a divisão de um número inteiro por um número representado por uma fração. Em plenário, foi também definida a interpretação de divisão inerente aos problemas explorados. As questões "O que implica esta interpretação de divisão?", "Qual é o objetivo?", "O que indica o divisor?" e "O que indica o quociente?" orientaram essa construção. Só aqui se referiu que estas interpretações se designam, respetivamente, "Divisão como partilha" e "Divisão como medida".

3 Considerações finais

A 1.ª intervenção desenvolvida na turma de 6.° ano de escolaridade objetivava, essencialmente, desenvolver o sentido de divisão em contexto de partilha. Para isso explorou-se o Problema 1, que envolve esta interpretação de divisão, e verificou-se que a maioria dos alunos o identificou como envolvendo uma situação de divisão. A 2.ª intervenção, por sua vez, visava, sobretudo, desenvolver o sentido de divisão com o significado de medida. Neste âmbito, explorou-se o Problema 2, que envolve esta interpretação de divisão, e verificou-se que a maioria dos alunos o identificou como envolvendo uma situação de divisão. Todavia, quatro alunos não identificaram primeiramente o problema como envolvendo uma situação de divisão. Uma vez relido, a expressão numérica correta foi identificada. Posto isto, creio poder afirmar que, na globalidade, não se verificaram dificuldades na identificação dos problemas explorados como envolvendo situações de divisão.

Aquando da exploração do Problema 1, constatou-se que dos oito alunos que recorreram (ou procuraram recorrer) à representação simbólica para o resolver, quatro alunos calcularam incorretamente $\frac{1}{2} \div 4$ e um não o efetuou. Efetivamente, um aluno evidenciou ter mobilizado procedimentos utilizáveis aquando da adição e subtração de números racionais representados por frações e os restantes três alunos resolveram a expressão numérica $\frac{1}{2} \div 4$, como se da expressão numérica $\frac{1}{2} \times 4$ se tratasse. No âmbito do Problema 2, urge afirmar que se verificou que, dos nove alunos que recorreram à representação simbólica do problema, quatro alunos calcularam incorretamente $2 \div \frac{1}{8}$, evidenciando inúmeras dificuldades. Com efeito, dois alunos parecem ter presente a ideia de que dividir números racionais representados por frações consiste em multiplicar esses números e, por sua vez, os outros dois alunos parecem ter presente a ideia de que dividir números racionais representados por frações consiste em inverter o dividendo e multiplicar pelo divisor. Os presentes dados parecem evidenciar, portanto, que se verificaram dificuldades na realização de divisões por métodos formais.

Como supramencionado, pôde-se constatar que ocorreram a princípio incorreções devido à não verificação dos dados dos problemas. Como tal, depois de se terem relido os mesmos, foram facilmente reconhecidos pelos alunos lapsos que se justificaram pela leitura desatenta. Após se ter focalizado a atenção dos alunos nos conjuntos iniciais e nos números de subconjuntos ou nos números de elementos em cada subconjunto, foram também identificadas situações pelos próprios que revelavam a sua falta de sentido crítico face às soluções obtidas. Estes factos pareceram indiciar que se denotaram dificuldades na verificação dos dados e resultados dos problemas.

Importa ainda sublinhar que responder às questões “O que sabemos?”, “O que queremos saber?” e “Como vamos descobrir?” aquando da exploração dos problemas se revelou profícuo, na medida em que permitiu, num primeiro momento, sistematizar a informação e, posteriormente, desencadeou discussões acerca das (dis)semelhanças entre os problemas que se revelaram significativas.

É importante, outrossim, referenciar o papel central da manipulação de material neste projeto, uma vez que, como se constatou, para além de motivar os alunos, lhes permitiu modelar e clarificar o seu entendimento dos problemas e da própria representação simbólica. E, ainda, lhes permitiu comunicar eficazmente com os outros.

Referências

[1] Bogdan, R., Biklen, S. *Investigação qualitativa em educação*, Porto Editora, 1994.

[2] Brocardo, J., Serrazina, L. "O sentido do número no currículo de matemática", *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática*, Brocardo, L. Serrazina, I. Rocha (Eds.), 97–115, Escolar Editora, 2008.

[3] Brocardo, J., Serrazina, L., Kraemer, J. "Algoritmos e sentido do número", *Educação e Matemática*, 75, 11–15, 2003.

[4] Huinker, D. "Examining dimensions of fractions operation sense", *Manking sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook*, Litwiller, G. Bright (Eds.), 72–78, National Council of Teachers of Mathematics, 2002.

[5] Martins, J. "O sentido das operações nos alunos do ensino básico", Dissertação de Mestrado, Universidade do Algarve, 2011.

[6] Mendes, F. "A aprendizagem da divisão: um olhar sobre os procedimentos usados pelos alunos", *Da investigação às Práticas*, 3(2), 5–30, 2013.

[7] Ministério da Educação e Ciência. *Programa de matemática para o ensino básico*, Lisboa: Direção Geral da Educação, 2013.

[8] National Council of Teachers of Mathematics. *Princípios e normas para a matemática escolar*, Associação de Professores de Matemática, 2007.

[9] Pinto, H., Monteiro, C. "A divisão de números racionais", *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática*, Brocardo, L. Serrazina, I. Rocha (Eds.), 201–219, Escolar Editora, 2008.

[10] Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., Oliveira, P. Programa de Matemática do Ensino Básico, Lisboa: Ministério da Educação, 2007.

[11] Sinicrope, R., Mick, H., Kolb, J. "Fraction interpretations", *Manking sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook*, Litwiller, G. Bright (Eds.), 153–161, National Council of Teachers of Mathematics, 2002.

[12] Veloso, G., Brunheira, L., Rodrigues, M. "A proposta de programa de matemática para o ensino básico: um recuo de décadas", *Educação e Matemática*, 123, 3–8, 2013.