Agradecimentos

A todos os que de alguma forma contribuíram para que este trabalho se tornasse uma realidade, gostaria de expressar os meus sinceros agradecimentos, nomeadamente:

- À Professora Doutora Paula Smith, pela amizade, confiança e valiosíssimo contributo na conclusão deste trabalho.

- À Doutora Margarida Sequeira, pelas sugestões de trabalho, críticas e observações que, em muito, contribuíram para esta tese.

- À colega e amiga, Doutora Paula Martins, sempre disponível e presente.

- A todos os colegas e amigos, pelo apoio e confiança.

- Ao Departamento de Matemática e ao Centro de Matemática da Universidade do Minho, pelos meios concedidos e que permitiram a minha valorização pedagógica e científica.

- À Fundação para a Ciência e Tecnologia, pelo financiamento através do programa de investigação POCTI.

- Ao meu pai, irmão e avós que, apesar da distância, estiveram sempre presentes.

- À minha mãe, pelo amor inquestionável de mãe.

- Ao meu marido e às minhas filhas, Eduarda e Magda, por todo o amor e carinho.

A todos, sem excepção, muito obrigada.

Estudos em álgebras de Ockham e em álgebras de Ockham duplas

Resumo

O estudo desenvolvido nesta tese aborda questões relacionadas com duas classes de álgebras: a classe das álgebras de Ockham e a classe das álgebras de Ockham duplas.

Por álgebra de Ockham entende-se uma álgebra $(L, \wedge, \vee, f, 0, 1)$ do tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ cujo reduto $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ é um reticulado distributivo limitado e tal que a operação f é um endomorfismo dual do mesmo reduto, isto é, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ e, para quaisquer $x, y \in L$, $f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y)$ e $f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y)$. A classe das álgebras de Ockham é uma variedade, que denotamos por $\mathbf{O}$, e é sobre algumas das suas subvariedades que vamos desenvolver o nosso estudo. Dados $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}_0$, denotamos por $\mathbf{K}_{n,m}$ a subvariedade de $\mathbf{O}$ que é caracterizada pela igualdade $f^{2n+m} = f^m$; aos elementos desta classe damos a designação de álgebras-$\mathrm{K}_{n,m}$. Às álgebras de Ockham $(L, \wedge, \vee, f, 0, 1)$ que satisfazem $\mathrm{id} \leq f^{2n}$, com $n \in \mathbb{N}$, chamamos álgebras-MS_n, e a subvariedade de $\mathbf{O}$ por elas formada é denotada por $\mathbf{MS}_n$.

Associada ao conceito de álgebra de Ockham surge a noção álgebra de Ockham dupla: diz-se que uma álgebra $(L,\ \wedge,\ \vee,\ f,\ g,\ 0,\ 1)$ do tipo $(2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)$ é uma álgebra de Ockham dupla se $(L, \wedge, \vee, f, 0, 1)$ e $(L, \wedge, \vee, g, 0, 1)$ são álgebras de Ockham. A variedade das álgebras de Ockham duplas é representada por $\mathbf{O}_2$ e uma das suas subvariedades é a classe das álgebras-MS_n duplas, $n \in \mathbb{N}$, caracterizada por $fg = g^{2n} \leq \mathrm{id} \leq f^{2n} = gf$. São também objecto do nosso estudo as álgebras–$\mathrm{K}_{n,m}$ duplas, i.e., as álgebras de $\mathbf{O}_2$ que satisfazem $f^{2n+m} = f^m$, $g^{2n+m} = g^m$, $gf = f^{2qn}$ e $fg = g^{2qn}$, onde $n, m \in \mathbb{N}$ e q é o menor número natural tal que $q \geq m/2n$.

Em 1995, T. Blyth e J. Varlet estudaram congruências definidas em álgebras-$\mathrm{K}_{1,1}$ e congruências definidas em álgebras-MS duplas. Em particular, es-

tudaram congruências principais e, relativamente às que são complementadas, obtiveram a descrição do seu complemento assim como a sua caracterização. No primeiro capítulo do trabalho, generalizamos este estudo para congruências principais definidas em álgebras-$\mathrm{K}_{n,m}$ e para congruências principais definidas em álgebras-$\mathrm{K}_{n,m}$ duplas. Ainda no primeiro capítulo, analisamos uma outra questão que está relacionada com certo isomorfismo entre o reticulado de congruências de uma álgebra $\mathcal{L} \in \mathbf{K}_{n,m}$ e o reticulado de congruências da maior subálgebra de $\mathcal{L}$ que pertence a $\mathbf{K}_{1,m}$: representando por $\mathcal{L}_{1,m}$ esta subálgebra de $\mathcal{L}$, analisamos em que condições a restricão a $L_{1,m}$ de uma congruência principal definida em $\mathcal{L}$ é também uma congruência principal em $\mathcal{L}_{1,m}$.

No segundo capítulo o nosso objectivo foi determinar, para cada subvariedade $\mathbf{V}$ de $\mathbf{MS}_n$, $n \in \mathbb{N}$, as cardinalidades admissíveis para o conjunto dos pontos fixos das álgebras (contáveis) que geram $\mathbf{V}$ e verificar quais destas cardinalidades são realmente atingidas. O interesse por este tipo de questão começou com as álgebras de De Morgan finitas, num trabalho realizado por J. Varlet, e o estudo foi depois sucessivamente estendido às variedades $\mathbf{MS}$, $\mathbf{K}_{2,0}$ e $\mathbf{MS}_2$, por T. S. Blyth e J. Varlet, J. Vaz de Carvalho e M. Sequeira, respectivamente. Neste capítulo estendemos o estudo a qualquer variedade $\mathbf{MS}_n$.

Dada uma álgebra $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{MS}_n$, prova-se que, em certas condições, existe uma (e uma só) operação g definida em L tal que $\mathcal{L}' = (L, f, g)$ é uma álgebra-MS_n dupla; diz-se neste caso que $\mathcal{L}$ *se estende* a uma álgebra-MS_n dupla. No terceiro capítulo estudamos questões relacionadas com esta noção: começamos por identificar as álgebras subdirectamente irredutíveis de $\mathbf{MS}_n$ que se estendem a álgebras-MS_n duplas e, dada uma álgebra $\mathcal{L} \in \mathbf{MS}_n$ que se estende a uma álgebra-MS_n dupla, caracterizamos algumas das subálgebras de $\mathcal{L}$ que também se estendem a uma álgebra-MS_n dupla.

Studies of Ockham algebras and of double Ockham algebras

Abstract

In this thesis we study some questions about Ockham algebras and double Ockham algebras.

An algebra $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, f, 0, 1)$ of type $(2, 2, 1, 0, 0)$ is an Ockham algebra if $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ is a distributive lattice and f is a dual endomorphism of this lattice, i.e., $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ and $f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y)$, $f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y)$, for all $x, y \in L$. The variety of Ockham algebras is denoted by $\mathbf{O}$ and, given $n \in \mathbb{N}$ and $m \in \mathbb{N}_0$, we represent by $\mathbf{K}_{n,m}$ the subvariety of $\mathbf{O}$ whose elements satisfy the identity $f^{2n+m} = f^m$. The elements of $\mathbf{K}_{n,m}$ are called $\mathrm{K}_{n,m}$-algebras. An Ockham algebra $(L, \wedge, \vee, f, 0, 1)$ that satisfies $\mathrm{id} \leq f^{2n}$, with $n \in \mathbb{N}$, is called a MS_n-algebra; $\mathbf{MS}_n$ denotes the variety of these algebras.

Associated to Ockham algebras we have the notion of double Ockham algebra; an algebra $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, f, g, 0, 1)$ of type $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$ is said to be a double Ockham algebra if $(L, \wedge, \vee, f, 0, 1)$ and $(L, \wedge, \vee, g, 0, 1)$ are Ockham algebras. The variety of double Ockham algebras is represented by $\mathbf{O}_2$ and a subvaritey of $\mathbf{O}_2$ is the class of double MS_n-algebras, $n \in \mathbb{N}$, which is characterized by $fg = g^{2n} \leq \mathrm{id} \leq f^{2n} = gf$. In this thesis we also consider the class of double $\mathrm{K}_{n,m}$-algebras whose elements are Ockham algebras that satisfy $f^{2n+m} = f^m, g^{2n+m} = g^m$, $fg = g^{2qn}$, $gf = f^{2qn}$, for $n, m \in \mathbb{N}$ and where q is the smallest natural number greater than or equal to $m/2n$.

In 1995, T. Blyth and J. Varlet studied congruences defined on $\mathrm{K}_{1,1}$-algebras and congruences defined on double MS_n-algebras. In particular, they described the complement of principal congruences (when it exists) and, using this descritpion, they also determined when the complement exists. In the first chapter of this thesis, we generalize the study of these questions for $\mathrm{K}_{n,m}$-

-algebras and for double $\mathrm{K}_{n,m}$-algebras. Also in the first chapter, we study another question that is related with a certain isomorphism defined between the congruence lattice of an algebra $\mathcal{L} \in \mathbf{K}_{n,m}$ and the congruence lattice of the biggest subalgebra of $\mathcal{L}$ that belongs to $\mathbf{K}_{1,m}$: representing this subalgebra of $\mathcal{L}$ by $\mathcal{L}_{1,m}$, we determine in which conditions the restriction to $L_{1,m}$ of a principal congruence of $\mathcal{L}$ is a principal congruence of $\mathcal{L}_{1,m}$.

Our purpose in the second chapter is to determine, for each subvariety $\mathbf{V}$ of $\mathbf{MS}_n$, $n \in \mathbb{N}$, the cardinility of the set of fixed points of the (countable) algebras that generate $\mathbf{V}$. This kind of question was first studied for finite De Morgan algebras, by J. Varlet, and the study was then generalized to the varieties $\mathbf{MS}$, $\mathbf{K}_{2,0}$ and $\mathbf{MS}_2$, by J. Varlet and T. S. Blyth, J. Vaz de Carvalho and M. Sequeira, repectively.

Given an algebra $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{MS}_n$, it is known that, in certain conditions, there exists one (and just one) operation g defined on L such that $\mathcal{L}' = (L, f, g)$ is a double MS_n-algebra; we say, in this case, that $\mathcal{L}$ *extends* to a double MS_n-algebra. In the final chapter, we study some questions related with this notion: we determine which subdirectly irreducible algebras can be extended to a double MS_n-algebra and, given an algebra $\mathcal{L} \in \mathbf{MS}_n$ that extends to a double MS_n-algebra, we characterize some subalgebras of $\mathcal{L}$ that can also be extended to a double MS_n-algebra.

Indíce

Introdução

Esta tese é um pequeno contributo para o estudo de álgebras de Ockham e de álgebras de Ockham duplas, abordando e resolvendo questões relacionadas com algumas destas álgebras.

Por álgebra de Ockham entende-se uma álgebra $(L, \wedge, \vee, f, 0, 1)$ do tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ cujo reduto $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ é um reticulado distributivo limitado e tal que a operação f é um endomorfismo dual do mesmo reduto, isto é, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ e, para quaisquer $x, y \in L$, $f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y)$ e $f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y)$.

O conceito de álgebra de Ockham foi introduzido em 1977 por J. Berman, em [2], e apareceu como generalização do conceito de álgebras de De Morgan. As álgebras de De Morgan surgem associadas a estudos de lógicas: são álgebras de proposições nas quais não existem os paradoxos da implicação material. Do ponto de vista lógico, as álgebras de Ockham, são também álgebras de proposições nas quais, para além de não existirem os paradoxos da implicação material, é omitida a lei da dupla negação.

A classe de álgebras de Ockham contém, para além da classe das álgebras de De Morgan, outras classes também conhecidas, como, por exemplo, as classes das álgebras de Boole, das álgebras de Kleene e das álgebras de Stone.

As álgebras de Ockham foram assim designadas por A. Urquhart tendo em atenção que as *leis de De Morgan* são atribuídas (pelo menos, no caso da lógica proposicional) ao lógico William of Ockham.

Desde o estudo desenvolvido por J. Berman em 1977, que evidencia a importância das álgebras de Ockham em geral, muitos são os algebristas de referência que contribuiram para o desenvolvimento da teoria.

A classe das álgebras de Ockham é uma variedade, que denotamos por $\mathbf{O}$. É sobre algumas das suas subvariedades que vamos desenvolver o nosso estudo.

No mesmo trabalho em que define álgebras de Ockham ([2]), J. Berman apresenta também algumas subvariedades de $\mathbf{O}$ às quais se dá a designação de $\mathbf{K}_{n,m}$ e que são caracterizadas pela identidade $f^{2n+m} = f^m$ ($n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$). A variedade $\mathbf{K}_{1,0}$ corresponde à classe das álgebras de De Morgan.

T. Blyth e J. Varlet também estudam álgebras de Ockham e, em [4] definem a variedade $\mathbf{MS}$. Trata-se de uma subvariedade de $\mathbf{O}$ que se caracteriza por $\mathrm{id} \leq f^2$ e que generaliza as propriedades que são comuns às álgebras de De Morgan e às álgebras de Stone.

M. Ramalho e M. Sequeira em [17] definem variedades semelhantes às variedades $\mathbf{MS}$ e introduzem o conceito de álgebra-MS_n, $n \in \mathbb{N}$; a classe $\mathbf{MS}_n$ das álgebras-MS_n é a subvariedade de $\mathbf{O}$ onde cada álgebra $(L, \wedge, \vee, f, 0, 1)$ satisfaz $\mathrm{id} \leq f^{2n}$.

Inspirados nas propriedades das álgebras de Stone duplas, [1], [13], e atendendo a que a variedade $\mathbf{MS}$ contém as álgebras de Stone, T. Blyth e J. Varlet introduzem em [5] a noção de álgebra-MS dupla.

Generalizando os conceitos de álgebra de Stone dupla e de álgebra-MS dupla, M. Sequeira, em [21], define álgebras de Ockham duplas.

Por álgebra de Ockham dupla entende-se uma álgebra $(L, \wedge, \vee, f, g, 0, 1)$ do tipo (2, 2, 1, 1, 0, 0) onde $(L, \wedge, \vee, f, 0, 1)$ e $(L, \wedge, \vee, g, 0, 1)$ são álgebras de Ockham. A classe das álgebras de Ockham duplas é uma variedade que se representa por $\mathbf{O}_2$.

Uma das subvariedades de $\mathbf{O}_2$ é a classe das álgebras-MS$_n$ duplas, [21], que denotamos por $\mathbf{DMS}_n$, e que é caracterizada por $fg = g^{2n} \leq \mathrm{id} \leq f^{2n} = gf$.

Dados $n, m \in \mathbb{N}$, sendo q o menor número natural tal que $2qn \geq m$, representa-se por $\mathbf{DK}_{n,m}$ a classe formada pelas álgebras de $\mathbf{O}_2$ que satisfazem $f^{2n+m} = f^m$, $g^{2n+m} = g^m$, $gf = f^{2qn}$ e $fg = g^{2qn}$, [21]. Os elementos de $\mathbf{DK}_{n,m}$ designam-se por álgebras-K$_{n,m}$ duplas.

Estudando questões relacionadas com algumas das classes que acabámos de apresentar, o trabalho aqui desenvolvido está estruturado em quatro capítulos, que passamos a descrever sumariamente.

No capítulo 0, começamos por fazer a apresentação de conceitos e de resultados básicos que são considerados essenciais para o estudo feito nesta tese e apresentamos, também, alguma da notação utilizada.

O assunto tratado na primeira parte do capítulo 1, secção 1.1, foi motivado por alguns dos resultados obtidos em [8, Capítulo 8], relativos ao problema da complementação de congruências principais. Nesta secção estudamos congruências principais definidas em álgebras-K$_{n,m}$: relativamente às que são complementadas obtemos a descrição do seu complemento, e estabelecemos uma condição necessária e suficiente para que uma congruência principal seja complementada, [14, Teorema 2.10].

M. Ramalho, em [16], estabelece um isomorfismo entre o reticulado de congruências de uma álgebra $\mathcal{L} \in \mathbf{K}_{n,m}$ e o reticulado de congruências da maior subálgebra de $\mathcal{L}$ que pertence a $\mathbf{K}_{1,m}$. Sendo $\mathcal{L}_{1,m}$ a maior subálgebra de $\mathcal{L}$

que pertence a $\mathbf{K}_{1,m}$, o isomorfismo é definido associando a cada congruência definida em $\mathcal{L}$ a sua restrição a $L_{1,m}$. Tendo em conta esta bijecção entre os reticulados de congruências, decidimos então estudar em que condições a restrição a $L_{1,m}$ de uma congruência principal definida em $\mathcal{L}$ é uma congruência principal em $\mathcal{L}_{1,m}$.

Em [8, Capítulo 14], T. Blyth e J. Varlet estudam também congruências principais, mas desta vez definidas em álgebras-MS duplas e, para a questão sobre complementação, analisam questões análogas às que foram estudadas em [8, Capítulo 8]. Na secção 1.2 generalizamos este estudo para congruências principais definidas em álgebras-$\mathrm{K}_{n,m}$ duplas: obtemos a descrição do complemento de congruências principais complementadas, [15, Teorema 2.9], e caracterizamos estas mesmas congruências, [15, Teorema 2.11].

De [21] e de [2, Corolário Teorema 1] sabemos que as congruências principais definidas numa álgebra-$\mathrm{K}_{n,m}$ dupla $\mathcal{L} = (L, f, g)$ e as congruências principais definidas em (L, f) e em (L, g) podem ser descritas como supremo de congruências do reticulado L. Tendo em conta estas descrições e a relação existente entre as operações f e g, verifica-se que cada congruência principal definida numa álgebra-$\mathrm{K}_{n,m}$ dupla é o supremo (no reticulado de congruências de L) de congruências principais definidas nas álgebras-$\mathrm{K}_{n,m}$ simples (L, f) e (L, g). Deste facto resulta que o estudo de congruências principais definidas em álgebras-$\mathrm{K}_{n,m}$ duplas está relacionado com os resultados obtidos na secção 1.1.

No segundo capítulo o nosso objectivo foi determinar, para cada subvariedade $\mathbf{V}$ de $\mathbf{MS}_n$, $n \in \mathbb{N}$, as cardinalidades admissíveis para o conjunto dos pontos fixos das álgebras (contáveis) que geram $\mathbf{V}$ e verificar quais destas cardinalidades são realmente atingidas. O interesse por este tipo de questão começou com as álgebras de De Morgan finitas, em [27], e o estudo foi depois sucessivamente estendido às variedades $\mathbf{MS}$, $\mathbf{K}_{2,0}$ e $\mathbf{MS}_2$, em [6], [28] e [22], respectivamente. Neste capítulo analisamos o mesmo assunto para qualquer variedade $\mathbf{MS}_n$.

Dada uma classe $\mathrm{Si}(\mathbf{MS}_n)$ de álgebras subdirectamente ireedutíveis de $\mathbf{MS}_n$ tal que cada álgebra subdirectamente irredutível de $\mathbf{MS}_n$ é isomorfa a uma e a uma só álgebra de $\mathrm{Si}(\mathbf{MS}_n)$, definimos em $\mathrm{Si}(\mathbf{MS}_n)$ uma ordem parcial $\leq$. Sendo $\mathbf{V}$ uma subvariedade não trivial de $\mathbf{MS}_n$, supomos que todos os elementos maximais de $(\mathbf{V}\cap\ \mathrm{Si}(\mathbf{MS}_n), \leq)$ têm, pelo menos, um ponto fixo e, no resultado principal deste capítulo, mostramos que, se existirem exactamente k ($k \in \mathbb{N}$) elementos maximais de $(\mathbf{V}\cap\ \mathrm{Si}(\mathbf{MS}_n), \leq)$ com dois pontos fixos, então:

- dado $\alpha \in \{1, .., k\}$, não existe uma álgebra contável que tenha exactamente α pontos fixos e que gere $\mathbf{V}$;
- para todo $\alpha \in (\mathbb{N}_0 \backslash \{1, ..., k\}) \cup \{\aleph_0\}$, existe, de facto, uma álgebra contável com exactamente α pontos fixos e que gera a variedade $\mathbf{V}$.

Atendendo aos resultados obtidos, uma questão que se colocou, naturalmente, foi a de sabermos qual o número máximo de álgebras subdirectamente irredutíveis com dois pontos fixos que podem existir no conjunto dos elementos maximais de $(\mathbf{V}\cap\ \mathrm{Si}(\mathbf{MS}_n), \leq)$. Relativamente a este problema, foi possível obter uma resposta para algumas variedades $\mathbf{MS}_n$.

Para finalizar o capítulo, analisamos a aplicação dos resultados obtidos a alguns casos particulares.

Dada uma álgebra $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{MS}_n$, M. Sequeira prova que, em certas condições, existe uma (e uma só) operação g definida em L tal que $\mathcal{L}' = (L, f, g)$ é uma álgebra-MS_n dupla, [20, Proposição 5.6]. Diz-se neste caso que $\mathcal{L}$ pode ser *transformada* numa álgebra-MS_n dupla ou que que $\mathcal{L}$ *se estende* a uma álgebra-MS_n dupla.

No terceiro capítulo começamos por identificar as álgebras subdirectamente irredutíveis de $\mathbf{MS}_n$ que se estendem a álgebras-MS$_n$ duplas. Dada uma álgebra subdirectamente irredutível $\mathcal{L}$ que se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla não podemos, porém, concluir que a variedade gerada por $\mathcal{L}$ é uma classe de álgebras que também se estendem a álgebras duplas. De facto, dada uma álgebra-MS$_n$ $\mathcal{L}$ que se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla, não é garantido que uma sua subálgebra também se estenda a uma álgebra-MS$_n$ dupla. Estabelecemos uma condição suficiente para que tal aconteça e, no caso particular em que consideramos a subálgebra $\mathcal{L}_{MS_{n'}}$, i.e., a maior subálgebra de $\mathcal{L}$ que pertence a $\mathbf{MS}_{n'}$, com n' divisor de n, foi possível estabelecer uma condição necessária e suficiente para que $\mathcal{L}_{MS_{n'}}$ também se estenda a uma álgebra-MS$_n$ dupla.

Capítulo 0

Conceitos preliminares

Neste capítulo apresentamos definições e resultados que consideramos serem relevantes ao longo do trabalho; recordamos alguns conceitos gerais assim como algumas noções mais específicas relativas a álgebras de Ockham e a álgebras de Ockham duplas. Também estabelecemos alguma da notação que vamos utilizar e, para a simbologia de carácter mais geral, encontra-se na página 119 uma tabela com a sua descrição.

0.1 Conceitos gerais

Para o estudo aqui desenvolvido é essencial o conhecimento das noções básicas que a seguir referimos e que dizem respeito a Teoria de Reticulados e a Álgebra Universal:

- conjunto parcialmente ordenado, cadeia, semi-filtro, reticulado, reticulado distributivo, reticulado de Boole, aplicação isótona, aplicação antítona, operador de fecho e operador de interior, ideal, filtro, elementos $\vee$-irredutíveis, átomos, elementos complementados;
- álgebra de tipo τ, símbolo polinomial de tipo τ em n variáveis, álgebra

trivial, subálgebra de uma álgebra, álgebras semelhantes, produto directo, homomorfismo, epimorfismo, monomorfismo, endomorfismo, isomorfismo, congruência, congruência principal.

Estas noções podem ser recordadas na seguinte bibliografia: [1], [9], [11] e [12].

Dado um conjunto X, dizemos que X é *numerável* se X for equipotente a $\mathbb{N}$ e, dizemos que X é *contável* se X é finito ou numerável.

Representamos por $\mathcal{L}$ uma álgebra com conjunto suporte L. Dada uma álgebra $\mathcal{L} = (L, F)$ com conjunto suporte L e domínio operatório F, designamos por *reduto de* $\mathcal{L}$ qualquer álgebra com suporte L cujo domínio operatório é uma parte de F.

Uma álgebra $\mathcal{L}$ diz-se

- *produto subdirecto de uma família* $\{\mathcal{L}_i\}_{i\in I}$ *de álgebras semelhantes a* $\mathcal{L}$ se existe um monomorfismo $\alpha : \mathcal{L} \to \prod_{i\in I} \mathcal{L}_i$ tal que, para cada $i \in I$, o homomorfismo $p_i \circ \alpha$ é sobrejectivo;
- *subdirectamente irredutível* (s.i.) se $\mathcal{L}$ é não trivial e, sempre que $\mathcal{L}$ é produto subdirecto de uma família de álgebras $\{\mathcal{L}_i\}_{i\in I}$ com monomorfismo α, existe $i \in I$ tal que $p_i \circ \alpha$ é isomorfismo;
- *simples* se $\mathrm{Con}(\mathcal{L})$ tem exactamente dois elementos.

As álgebras subdirectamente irredutíveis podem ser caracterizadas através do seu reticulado de congruências: uma álgebra $\mathcal{L}$ é subdirectamente irredutível se e só se $\mathrm{Con}(\mathcal{L})\backslash\{\triangle\}$ tem elemento mínimo; neste caso, o elemento mínimo de $\mathrm{Con}(\mathcal{L})\backslash\{\triangle\}$ é $\bigcap(\mathrm{Con}(\mathcal{L})\backslash\{\triangle\})$ e é uma congruência principal.

Álgebras do mesmo tipo podem ser agrupadas em classes. Têm particular interesse as classes que são fechadas para a formação de subálgebras, imagens homomorfas e produtos directos. A estas classes dá-se o nome de *variedades*.

São variedades, por exemplo, a classe $\mathbf{D}$ dos reticulados distributivos e a classe $\mathbf{D}_{0,1}$ dos reticulados distributivos limitados.

A importância das álgebras subdirectamente irredutíveis está relacionada com o seguinte resultado de Birkhoff:

Teorema 0.1 [1, Teorema. I. 9.4] *Se* $\mathbf{V}$ *é uma variedade, então toda a álgebra de* $\mathbf{V}$ *é produto subdirecto de álgebras subdirectamente irredutíveis em* $\mathbf{V}$*.* ■

Sejam $\mathbf{K}$ uma classe de álgebras, $\mathbf{V}$ uma variedade e $\mathcal{L}$ uma álgebra de $\mathbf{V}$. Representamos por:

- $V(\mathbf{K})$ a variedade gerada por $\mathbf{K}$, i.e., a menor variedade que contém $\mathbf{K}$;
- $V(\mathcal{L})$ a subvariedade de $\mathbf{V}$ gerada por $\mathcal{L}$.

Uma variedade $\mathbf{V}$

- diz-se *c-distributiva* se, para cada álgebra $\mathcal{L} \in \mathbf{V}$, o reticulado de congruências de $\mathcal{L}$ é distributivo;
- *satisfaz a propriedade de extensão de congruências* (P.E.C.) se, para cada álgebra $\mathcal{L} \in \mathbf{V}$ e cada subálgebra $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$, qualquer congruência de $\mathcal{L}'$ é restrição de uma congruência de $\mathcal{L}$;
- *tem congruências principais definíveis equacionalmente em sentido restrito* (C.P.D.E.R.) se existe um número finito de pares de símbolos polinomiais em quatro variáveis (p_1, q_1), ..., (p_n, q_n) tais que, para cada álgebra $\mathcal{L} = (L, F) \in \mathbf{V}$ e elementos x, y, a, $b \in L$, se tem

$$(x, y) \in \theta(a, b) \Leftrightarrow p_i(a, b, x, y) = q_i(a, b, x, y), \text{ para todo } i \in \{1, ..., n\}.$$

Observação:

- Dado um reticulado L, o reticulado de congruências de L é distributivo.
- Qualquer variedade cujas álgebras admitem um reticulado como reduto é c-distributiva.
- Toda a variedade que tem C.P.D.E.R. satisfaz P.E.C. [10, Corolário 2].

O resultado seguinte, envolvendo a *propriedade de extensão de congruências*, é muito simples de verificar e será útil no estudo, relativo a congruências, que apresentamos no capítulo 1.

Proposição 0.2 *Sejam* $\mathbf{V}$ *uma variedade que satisfaz* P.E.C., $\mathcal{L} \in \mathbf{V}$, $\mathcal{L}'$ *uma subálgebra de* $\mathcal{L}$, *e* $a, b \in L'$. *Então* $\theta(a,b)|_{L'} = \theta_{L'}(a,b)$. ■

0.2 Álgebras de Ockham

Nesta secção destacamos noções e resultados relativos a algumas das álgebras de Ockham que serão objecto do nosso estudo: as álgebras-$\mathrm{K}_{n,m}$ e as álgebras-MS_n.

Sejam $L \in \mathbf{D}_{0,1}$ e $f : L \to L$ uma aplicação. Diz-se que f é um *endomorfismo dual de* L se $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ e $f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y)$, $f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y)$, para quaisquer $x, y \in L$.

Seja $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, f, 0, 1)$ uma álgebra do tipo $(2,2,1,0,0)$ tal que $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ é um reticulado distributivo limitado e f é um endomorfismo dual de $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$. Dizemos que $\mathcal{L}$ é uma álgebra

1) de *Boole* se $x \wedge f(x) = 0$ e $x \vee f(x) = 1$, para todo $x \in L$;

2) de *Stone* se $x \wedge f(x) = 0$, para todo $x \in L$;

3) de *De Morgan* se $x = f^2(x)$, para todo $x \in L$.

As classes das álgebras de Boole, das álgebras de Stone e das álgebras de De Morgan são variedades que representamos, respectivamente, por **B**, **S** e **M**. Com o objectivo de generalizar propriedades que são comuns às álgebras de De Morgan, às álgebras de Stone e às álgebras de Boole, J. Berman define, em [2], álgebras de Ockham.

Definição 0.3 Uma *álgebra de Ockham* é uma álgebra $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, f, 0, 1)$ do tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ tal que $(L, \wedge, \vee, 0, 1) \in \mathbf{D}_{0,1}$ e f é um endomorfismo dual de $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$.

Dada uma álgebra de Ockham $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, f, 0, 1)$, representamos por L, quer o conjunto suporte, quer o reduto $(L, \wedge, \vee, 0, 1) \in \mathbf{D}_{0,1}$. A álgebra $\mathcal{L}$ será representada apenas por (L, f) (não existe risco de confusão pois nunca falaremos em "álgebra com conjunto suporte L e com uma única operação f").

A classe das álgebras de Ockham é uma variedade que representamos por **O**; é conveniente observar que esta variedade é c-distributiva e satisfaz P.E.C., [2, Teorema 2].

Em [2] J. Berman também apresenta a classe das álgebras-$\mathrm{K}_{n,m}$; esta classe, aqui denotada por $\mathbf{K}_{n,m}$, é uma subvariedade de **O**.

Definição 0.4 Sejam $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$. Chama-se *álgebra*-$\mathrm{K}_{n,m}$ a toda a álgebra de Ockham $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, f, 0, 1)$ que satisfaz a igualdade $f^{2n+m}(x) = f^m(x)$, para todo $x \in L$.

Dados $n, n' \in \mathbb{N}$ e $m, m' \in \mathbb{N}_0$, tem-se $\mathbf{K}_{n,m} \subseteq \mathbf{K}_{n',m'}$ se e só se $n \mid n'$ e $m \leq m'$, [17]. Note-se que a variedade **M** das álgebras de De Morgan é a variedade $\mathbf{K}_{1,0}$.

Em [4], T. Blyth e J. Varlet estudam as álgebras de Ockham que satisfazem id $\leq f^2$, designam-nas por *álgebras*-MS e representam a subvariedade de **O** que elas constituem por **MS**.

M. Ramalho e M. Sequeira, em [17], generalizam o conceito de *álgebras*-MS e definem *álgebras*-MS$_n$, para $n \in \mathbb{N}$.

Definição 0.5 Seja $n \in \mathbb{N}$. Chama-se *álgebra*-MS$_n$ a qualquer álgebra $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, f, 0, 1) \in \mathbf{O}$ que satisfaça $x \leq f^{2n}(x)$, para todo $x \in L$.

A classe das álgebras-MS$_n$ é também uma subvariedade de **O** que representamos por $\mathbf{MS}_n$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, é fácil concluir que $\mathbf{K}_{n,0} \subseteq \mathbf{MS}_n \subseteq \mathbf{K}_{n,1}$ e, dados $n, n' \in \mathbb{N}$, tem-se $\mathbf{MS}_n \subseteq \mathbf{MS}_{n'}$ se e só se $n \mid n'$, [17]. Dada uma álgebra $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{MS}_n$, verifica-se que f^{2n} é um endomorfismo e um operador de fecho do reduto L.

Se L é um reticulado limitado e $x \in L$ é complementado, representamos por $c(x)$ o *complemento de x*. O conjunto dos elementos complementados de L representa-se por $\mathrm{C}(L)$ e designa-se por *centro de L*.

Caso $\mathcal{L} = (L, f)$ seja uma álgebra de Ockham, o conjunto $\mathrm{C}(L)$ é um subuniverso de $\mathcal{L}$; para cada $x \in L$, tem-se $c(f(x)) = f(c(x))$. A subálgebra $(\mathrm{C}(L), f)$ de $\mathcal{L}$ é representada por $\mathrm{C}(\mathcal{L})$.

Para qualquer $t \in \mathbb{N}$, o conjunto $f^t(L)$ também é um subuniverso de $\mathcal{L}$, representando-se a subálgebra $(f^t(L), f)$ de $\mathcal{L}$ por $f^t(\mathcal{L})$.

Como vamos verificar, os conjuntos $L_{n,m} = \{x \in L \mid f^{2n+m}(x) = f^m(x)\}$ e $L_{MS_n} = \{x \in L \mid x \leq f^{2n}(x)\}$, [23], desempenham um papel importante no estudo de álgebras de Ockham . As subálgebras $(L_{n,m}, f)$ e (L_{MS_n}, f) de $\mathcal{L}$ são denotadas por $\mathcal{L}_{n,m}$ e $\mathcal{L}_{MS_n}$, e são as maiores subálgebras de $\mathcal{L}$ que pertencem, respectivamente, a $\mathbf{K}_{n,m}$ e a $\mathbf{MS}_n$.

Sendo $\mathcal{L}$ =(L, f) uma álgebra-MS$_n$, tem-se

$$L_{MS} = \{\bigwedge_{i=0}^{n-1} f^{2i}(x) : x \in L\} = \{\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{2i}(x) : x \in L\}.$$

Proposição 0.6 *Se* $\mathcal{L}$ =$(L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$*, então* $f^m(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_{n,0}$.

Demonstração: É simples verificar que $f^m(L) \subseteq L_{n,0}$; relativamente à inclusão contrária, também se prova facilmente a sua validade. De facto, se $x \in L_{n,0}$, então $x = f^{2n}(x)$. Logo, se considerarmos $q \in \mathbb{N}$ tal que $q2n \geq m$, temos $x = f^{q2n}(x)$ e, portanto, $x \in f^m(L)$. Logo $L_{n,0} \subseteq f^m(L)$. ■

As noções e os resultados que vamos agora destacar, obtidos em [20], são relativos a álgebras subdirectamente irredutíveis (s.i.) da variedade $\mathbf{MS}_n$ e são-nos úteis no estudo que é feito nos capítulos 2 e 3.

Dada uma álgebra de Ockham $\mathcal{L} = (L, f)$, chama-se *ponto fixo de* $\mathcal{L}$ a qualquer $x \in L$ tal que $f(x) = x$. Por Fix$(\mathcal{L})$ representa-se o conjunto dos pontos fixos de $\mathcal{L}$.

Em [2, Teorema 7], J. Berman prova que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}_0$, $\mathbf{K}_{n,m}$ tem apenas um número finito de álgebras s.i. não isomorfas entre si, todas elas finitas. Como $\mathbf{MS}_n \subseteq \mathbf{K}_{n,1}$, do Lema 1 de [2] resulta que, se $\mathcal{L}$ é uma álgebra s.i. de $\mathbf{MS}_n$, então

- $L_{1,0} = \{0, 1\} \cup \text{Fix}(\mathcal{L})$;

- $\mathcal{L}$ tem, no máximo, dois pontos fixos, e estes são complementares.

Como M. Sequeira prova em [20], a descrição de cada álgebra s.i. $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{MS}_n$ está relacionada com o número de pontos fixos de $\mathcal{L}$, a subálgebra $\mathcal{L}_{n,0}$ e a relação binária $\ker f$ definida em L da seguinte forma:

$$(x, y) \in \ker f \Leftrightarrow f(x) = f(y), \text{ para todo } x,\ y \in L.$$

É evidente que $\ker f \in \mathrm{Con}(\mathcal{L})$.

Dado $l \in \{1, 2\}$, representa-se por $L^l_{n,0}$ o conjunto $\{x \in L_{n,0} : |[x]_{\ker f}| = l\}$.

O processo para identificar as álgebras s.i em $\mathbf{MS}_n$ é análogo ao que foi usado por J. Vaz de Carvalho, em [28], para identificar as álgebras s.i. de $\mathbf{K}_{n,0}$. Tal foi motivado pela relação existente entre as álgebras s.i. de $\mathbf{MS}_n$ e as álgebras simples de $\mathbf{K}_{n,0}$; esta relação é evidente no resultado seguinte.

Proposição 0.7 [20, Proposição 2.3] *Seja $\mathcal{L} \in \mathbf{MS}_n$.*

i) Se $\mathcal{L}$ é s.i., então $\mathcal{L}_{n,0}$ é simples.

ii) $\mathcal{L}$ é s.i. se e só se $|L| > 1$ e $|\mathrm{Con}(L)| \leq 3$. ■

Observação: Da proposição anterior e atendendo a que $\mathbf{MS}_n$ satisfaz P.E.C., conclui-se que toda a subálgebra não trivial de uma álgebra s.i. é também s.i..

Tendo em conta que o estudo de álgebras s.i. de $\mathbf{MS}_n$ está relacionado com as álgebras simples de $\mathbf{K}_{n,0}$, vamos agora recordar alguns factos sobre estas últimas.

Definição 0.8 [18] Para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_m = (B_m, \phi)$ é a álgebra de $\mathbf{K}_{m,0}$ cujo reduto em $\mathbf{D}_{0,1}$ é o reticulado de Boole B_m de átomos $a_0, a_1, ..., a_{m-1}$, e em que ϕ é o automorfismo dual de B_m induzido por $\phi(a_i) = c(a_{i+1(\mathrm{mod}\, m)})$, $0 \leq i \leq m - 1$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, a álgebra $\mathcal{B}_{2n}$ tem dois pontos fixos, a saber, $k_{0,n} = \bigvee_{i=0}^{n-1} a_{2i}$ e $k_{1,n} = \bigvee_{i=0}^{n-1} a_{2i+1}$. Dados $s, m \in \mathbb{N}$, se $s \mid m$, então $\mathcal{B}_s$ é, a menos de isomorfismo, subálgebra de $\mathcal{B}_m$.

Para cada $j \in \{0, 1\}$, representa-se por $\mathcal{C}_{j,n} = (C_{j,n}, \phi)$ a subálgebra de $\mathcal{B}_{2n}$ gerada por $\{a_j\}$. Note-se que $\mathcal{C}_{1,n} \cong \mathcal{C}_{0,n}$.

Para cada elemento $a \in \mathcal{B}_{2n}$ tal que

- $a = a_{i_1} \vee ... \vee a_{i_{s-1}} \vee a_0$ com $2 \leq s \leq n$ e $i_1, ..., i_{s-1}$ ímpares tais que, para todo o p, $1 \leq p \leq s-1$, existe q, $1 \leq q \leq s-1$, tal que $i_p + i_q = 2n$, $(*_n^1)$.

Representa-se por $\mathcal{C}_{1,n}^a$ a subálgebra de $\mathcal{B}_{2n}$ gerada por $\{a_1, a\}$.

Para cada elemento $b \in \mathcal{B}_{2n}$ tal que,

- $b = a_{l_1} \vee ... \vee a_{l_{v-1}} \vee a_1$ com $2 \leq v \leq n$ e $l_1, ..., l_{v-1}$ pares tais que, para todo o p, $1 \leq p \leq v-1$, existe q, $1 \leq q \leq v-1$, tal que $l_p + l_q \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 2n)$,$(*_n^0)$.

Representa-se por $\mathcal{C}_{0,n}^b$ a subálgebra de $\mathcal{B}_{2n}$ gerada por $\{a_0, b\}$.

Em [28, Teoremas 2.7, 2.9, 2.14-2.23], J. Vaz de Carvalho prova que as álgebras simples de $\mathbf{K}_{n,0}$ são, a menos de isomorfismo, as seguintes :

- sem pontos fixos: $\mathcal{B}_r$, em que $r \mid n$, r ímpar;
- com dois pontos fixos: $\mathcal{B}_{2r}$ em que $r \mid n$;
- com um só ponto fixo: $\mathcal{C}_{1,r}$, $\mathcal{C}_{1,r}^a$ em que $r \mid n$ e $a \in \mathcal{B}_{2n}$ satisfaz $(*_r^1)$.

Para o estudo de álgebras s.i. de $\mathbf{MS}_n$, M. Sequeira precisou no entanto de construir outras álgebras, que passamos a descrever.

Dados $n \in \mathbb{N}$ representamos por $\underline{n}$ uma cadeia com n elementos.

Para $m \in \mathbb{N}$, seja $U_m = \underline{3} \times \underline{2}^{m-1}$. O conjunto $J(U_m)$ dos elementos $\vee$-irredutíveis não nulos de U_m é união disjunta de uma cadeia com dois elementos, $a_0 > a_m$, e $m-1$ cadeias singulares, a_i, $1 \leq i \leq m-1$. O conjunto dos átomos de $\mathrm{C}(U_m)$ é $\mathrm{At} = \{a_i \mid 0 \leq i \leq m-1\}$.

Definição 0.9 Para cada $m \in \mathbb{N}$, designamos por $\mathcal{U}_m$ a álgebra $(U_m, \Phi) \in \mathbf{MS}_m$ em que Φ é o endomorfismo dual de U_m induzido por $\Phi(a_i) = c(a_{i+1(\operatorname{mod} m)})$, $0 \leq i \leq m-1$, e $\Phi(a_m) = c(a_{1(\operatorname{mod} m)})$.

O elemento $\bigvee\limits_{i=1}^{m} a_i$ de U_m é representado por u_m e é tal que $u_m \ll 1$ e $\Phi(u_m) = 0$.

Dados $s, m \in \mathbb{N}$, verifica-se que:

- $(U_m)_{m,0} = \mathrm{C}(U_m)$ e $(\mathcal{U}_m)_{m,0} \cong \mathcal{B}_m$;
- a álgebra $\mathcal{U}_{2m}$ tem dois pontos fixos : $k_{0,m} = \bigvee_{i=0}^{m-1} a_{2i}$ e $k_{1,m} = \bigvee_{i=0}^{m-1} a_{2i+1}$;
- se $s \mid m$, então $\mathcal{U}_s$ é, a menos de isomorfismo, subálgebra de $\mathcal{U}_m$. De facto, sendo $m = sq$, $\mathcal{U}_s$ é isomorfa à subálgebra de $\mathcal{U}_m$ gerada por $\{\bigvee_{i=0}^{q-1} a_{is+j} \mid 0 \leq j \leq s-1\} \cup \{\bigvee_{i=1}^{q} a_{is}\}$; o elemento desta subálgebra que corresponde a u_s é $\bigvee_{j=1}^{s-1}(\bigvee_{i=0}^{q-1} a_{is+j}) \vee \bigvee_{i=1}^{q} a_{is} = u_m$. Assim, a álgebra $\mathcal{U}_{2s}$ é, a menos de isomorfismo, subálgebra de $\mathcal{U}_{2m}$, tendo-se $u_{2s} = u_{2m}$ e $k_{j,s} = k_{j,m}$, $j \in \{0,1\}$.

Como $(\mathcal{U}_{2n})_{n,0} \cong \mathcal{B}_{2n}$, dados $j \in \{0,1\}$ e um elemento $a \in (\mathcal{U}_{2n})_{n,0}$ que satisfaz $(*_n^j)$, usamos a mesma notação $\mathcal{C}_{j,n}$, $\mathcal{C}_{j,n}^a$ para representar as subálgebras de $\mathcal{U}_{2n}$ geradas, respectivamente, por $\{a_j\}$ e $\{a_j, a\}$.

Para $j \in \{0,1\}$, seja $\underline{\mathbf{C}}_{j,n} = \{\mathcal{C}_{j,n}\} \cup \{\mathcal{C}_{j,n}^a \mid a \in (\mathcal{U}_{2n})_{n,0},\ a \text{ satisfaz } (*_n^j)\}$. Cada álgebra $\mathcal{X} \in \underline{\mathbf{C}}_{j,n}$ tem um só ponto fixo: $k_{j,n} = \bigvee_{i=0}^{n-1} a_{2i+j}$.

Para cada $\mathcal{X} = (X, \Phi) \in \underline{\mathbf{C}}_{1,n}$, representamos por $\mathcal{X}_{u_{2n}} = (X_{u_{2n}}, \Phi)$ a subálgebra de $\mathcal{U}_{2n}$ gerada por $X \cup \{u_{2n}\}$. Observe–se que $(\mathcal{X}_{u_{2n}})_{n,0} = \mathcal{X}$ e $\mathrm{Fix}(\mathcal{X}_{u_{2n}}) = \{k_{1,n}\}$ onde $[k_{1,n}]_{\ker \Phi}$ é um conjunto singular.

Consideremos $Y_{\mathcal{C}_{0,n}} = C_{0,n} \cap [k_{n,0}, 1]$ e $Y_{\mathcal{C}^b_{0,n}} = C^b_{0,n} \cap [k_{n,0} \vee b', 1]$, onde $b' = \bigvee\{a_{2i+1} \mid 0 \leq i \leq n-1, a_0 \nleq \Phi^{2i}(b)\}$ sempre que $b \in (U_{2n})_{n,0}$ e b satisfaz $(*^0_n)$.

Para cada álgebra $\mathcal{X} = (X, \Phi) \in \underline{\mathbf{C}}_{0,n}$ e cada $y \in Y_{\mathcal{X}}$, representamos por $\mathcal{X}_{y \wedge u_{2n}} = (X_{y \wedge u_{2n}}, \Phi)$ a subálgebra de $\mathcal{U}_{2n}$ gerada por $X \cup \{y \wedge u_{2n}\}$ e tem-se que $(\mathcal{X}_{y \wedge u_{2n}})_{n,0} = \mathcal{X}$ e $\mathrm{Fix}(\mathcal{X}_{y \wedge u_{2n}}) = \{k_{0,n}\}$.

Recorrendo às álgebras descritas, M. Sequeira prova então o seguinte:

Teorema 0.10 [20, Teorema 2.8] *Seja $\mathcal{L} \in \mathbf{MS}_n$.*

i) $\mathcal{L}$ é s.i. e $\mathrm{Fix}(\mathcal{L}) = \emptyset$ se e só se $\mathcal{L} \cong \mathcal{B}_m$ ou $\mathcal{L} \cong \mathcal{U}_m$ com m divisor ímpar de n.

ii) $\mathcal{L}$ é s.i. e $|\mathrm{Fix}(\mathcal{L})| = 2$ se e só se $\mathcal{L} \cong \mathcal{B}_{2m}$ ou $\mathcal{L} \cong \mathcal{U}_{2m}$ com m divisor de n. ■

Proposição 0.11 [20, Proposição 2.9] *i) Se n é ímpar, então $\mathcal{B}_n$ e $\mathcal{U}_n$ são, a menos de isomorfismo, as únicas álgebras s.i que pertencem a $\mathbf{MS}_n$, não pertencem a $\mathbf{MS}_t$, para $t < n$, e não têm pontos fixos. Se n é par, não existem, em $\mathbf{MS}_n \setminus \bigcup_{t\,<\,n} \mathbf{MS}_t$, álgebras s.i sem pontos fixos.*

ii) Para qualquer natural n, $\mathcal{B}_{2n}$ e $\mathcal{U}_{2n}$ são, a menos de isomorfismo, as únicas álgebras s.i que pertencem a $\mathbf{MS}_n$, não pertencem a $\mathbf{MS}_t$, para $t < n$, e têm dois pontos fixos. ■

Teorema 0.12 [20, Teorema 2.17] *Seja* $\mathcal{L} \in \mathbf{MS}_n$ *uma álgebra tal que* $\mathrm{Fix}(\mathcal{L}) = \{k\}$.

i) $\mathcal{L}$ *é s.i. e* $k \in L^1_{n,0}$ *se e só se* $\mathcal{L} \cong \mathcal{X}$ *ou* $\mathcal{L} \cong \mathcal{X}_{u_{2n}}$ *onde* $\mathcal{X} \in \underline{\mathbf{C}}_{1,m}$*, para algum divisor* m *de* n.

ii) $\mathcal{L}$ *é s.i. e* $k \in L^2_{n,0}$ *se e só se* $\mathcal{L} \cong \mathcal{X}_{y \wedge u_{2n}}$ *onde* $\mathcal{X} \in \underline{\mathbf{C}}_{0,m}$*, para algum divisor* m *de* n*, e* $y \in Y_{\mathcal{X}}$. ■

Teorema 0.13 [20, Teorema 2.18] *As álgebras subdirectamente irredutíveis em* $\mathbf{MS}_n$ *são, a menos de isomorfismo, as subálgebras de* $\mathcal{U}_{2n}$. ■

Dado que cada álgebra s.i. de $\mathbf{MS}_n$ é isomorfa a uma e uma só álgebra da classe

$$\begin{aligned}\{\mathcal{B}_s, \mathcal{U}_s : s \in \mathbb{N},\ s \mid n \text{ e } s \text{ é ímpar}\} &\cup \{\mathcal{B}_{2s}, \mathcal{U}_{2s} : s \in \mathbb{N} \text{ e } s \mid n\}\\ &\cup \{\mathcal{X},\ \mathcal{X}_{u_{2n}} : \mathcal{X} \in \underline{\mathbf{C}}_{1,m} \text{ e } m \mid n\}\\ &\cup \{\mathcal{X}_{y \wedge u_{2n}} : \mathcal{X} \in \underline{\mathbf{C}}_{0,m},\ m \mid n \text{ e } y \in Y_{\mathcal{X}}\ \},\end{aligned}$$

para o estudo feito nos capítulos 2 e 3 (relacionado com álgebras s.i. de $\mathbf{MS}_n$) é pois suficiente considerarmos os elementos desta classe.

0.3 Álgebras de Ockham duplas

Como já havíamos referido, o nosso estudo é também dedicado a álgebras de Ockham duplas. Tal como o próprio nome indica, a noção de álgebra de Ockham dupla está associada ao conceito de álgebra de Ockham. No texto que se segue vamos recordar de que forma estes dois tipos de álgebras estão relacionados assim como alguns resultados relativos às álgebras duplas.

Dada uma álgebra $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, f, g, 0, 1)$ do tipo $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$, diz-se que $\mathcal{L}$ é uma *álgebra de Stone dupla,* [13], [1], se $(L, \wedge, \vee, f, 0, 1)$ e $(L, \wedge, \vee, g, 0, 1)$

são álgebras de Stone e as operações f e g satisfazem as seguintes condições:

i) $x \leq f^2(x)$,

ii) $g^2(x) \leq x$,

iii) $gf(x) = f^2(x)$, $fg(x) = g^2(x)$.

Atentendo a que a variedade **MS** contém as álgebras de Stone, T. Blyth e J. Varlet, em [5], generalizaram as propriedades das álgebras de Stone duplas e introduziram a noção de álgebra-MS dupla. Diz-se que uma álgebra $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, f, g, 0, 1)$ do tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ é uma *álgebra-MS dupla* se $(L, \wedge, \vee, f, 0, 1)$ e $(L, \wedge, \vee, g, 0, 1)$ são álgebras de Ockham e as operações f e g satisfazem as condições (i), (ii) e (iii). Por **DMS** denota-se a variedade das álgebras-MS duplas. Representando por L^d o *reticulado dual* de L, facilmente verificamos que $(L, \wedge, \vee, f, 0, 1)$ e $(L^d, \wedge, \vee, g, 0, 1)$ são álgebras-MS e que as aplicações gf e fg são, respectivamente, um operador de fecho e um operador de interior em $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$.

Em [21], M. Sequeira também estuda álgebras duplas e generaliza os conceitos de álgebra de Stone dupla e de álgebra-MS dupla da seguinte forma:

Definição 0.14 Uma álgebra $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, f, g, 0, 1)$ do tipo $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$ diz-se uma *álgebra de Ockham dupla* ou uma *álgebra*-O_2 se $(L, \wedge, \vee, f, 0, 1)$ e $(L, \wedge, \vee, g, 0, 1)$ são álgebras de Ockham.

A classe das álgebras-O_2 é uma variedade que se denota por $\mathbf{O}_2$. À semelhança da notação estabelecida para álgebras de Ockham, dada uma álgebra $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, f, g, 0, 1) \in \mathbf{O}_2$, representamos por L quer o conjunto suporte de $\mathcal{L}$ quer o reduto $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$. A álgebra dupla $\mathcal{L}$ é representada de forma abreviada por $\mathcal{L} = (L, f, g)$ e as álgebras de Ockham redutos de $\mathcal{L}$ representam--se por (L, f) e (L, g).

M. Sequeira, no mesmo trabalho em que introduz álgebras de Ockham duplas, define álgebra-MS$_n$ dupla, para cada $n \in \mathbb{N}$. Este conceito surge naturalmente a partir da definição de álgebra-MS dupla, uma vez que a noção de álgebra-MS$_n$ dupla está relacionada com a de álgebra-MS$_n$ da mesma forma que a noção de álgebra-MS dupla se relaciona com a de álgebra-MS.

Definição 0.15 Seja $n \in \mathbb{N}$. Chama-se *álgebra*-MS$_n$ *dupla* a toda a álgebra $(L, f, g) \in \mathbf{O}_2$ que satisfaz $fg = g^{2n} \leq \mathrm{id} \leq f^{2n} = gf$.

A variedade das álgebras-MS$_n$ duplas é denotada por $\mathbf{DMS}_n$. Dados $n', n \in \mathbb{N}$, tem–se $\mathbf{DMS}_{n'} \subseteq \mathbf{DMS}_n$ se e só se $n' \mid n$, [21].

Como consequência da relação existente entre as operações f e g de uma álgebra $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DMS}_n$, M. Sequeira estabelece o seguinte resultado:

Proposição 0.16 [20, Lema 5.3] *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DMS}_n$. Então*

i) $f^i g^i = g^{2n}$, $\quad g^i f^i = f^{2n}$, *para qualquer $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq 2n$.*

ii) $f^i g^j = g^{j-i \pmod{2n}}$, $\quad g^j f^i = f^{i-j \pmod{2n}}$ *sempre que $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 2n$.*

iii) $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, g$.

iv) $\{x \in L : x = f(x)\} = \{x \in L : x = g(x)\} = \{x \in L : x = f(x) = g(x)\}$.

v) $f^{2k+1} \leq g^{2n-2k-1}$, $g^{2n-2k} \leq f^{2k}$, *para qualquer $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k \leq n-1$.* ■

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Para $(L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$, verifica-se que $f^{2n+k} = f^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq m$. Se $2n \geq m$, a correspondência $g = f^{2n-1}$ é um endomorfismo dual de L satisfazendo $g^{2n} = f^{2n}$ e $g^{2n+m} = g^m$, tendo-se também que $gf = f^{2n}$ e $fg = g^{2n}$. De um modo geral, se q é o menor número natural maior ou igual a $m/2n$ (denotado no texto que se segue por $q = \lceil m/2n \rceil$), o endomorfismo dual $g = f^{q2n-1}$ de L satisfaz $g^{2n+m} = g^m$ e $g^{q2n} = f^{q2n}$, e portanto, $gf = f^{q2n}$ e $fg = g^{q2n}$. Tendo em conta estas observações surge, em [21], a seguinte definição:

Definição 0.17 Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ e $q = \lceil m/2n \rceil$. Chama-se *álgebra*-$\mathrm{K}_{n,m}$ *dupla* a qualquer álgebra $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, f, g, 0, 1) \in \mathbf{O}_2$ que satisfaz

i) $f^{2n+m} = f^m$,

ii) $g^{2n+m} = g^m$,

iii) $fg = g^{q2n}, \quad gf = f^{q2n}$.

A variedade das álgebras-$\mathrm{K}_{n,m}$ duplas representa-se por $\mathbf{DK}_{n,m}$. Dados $n', n, m', m \in \mathbb{N}$, prova-se que $\mathbf{DK}_{n',m'} \subseteq \mathbf{DK}_{n,m}$ se e só se $n' \mid n$ e $m' \leq m$, [21, Proposição 1].

Seja $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DK}_{n,m}$. Dado $t \in \mathbb{Z}$, seja $r(t)$ o resto da divisão do inteiro t por $2n$ e, para $1 \leq i, j \leq 2n + m - 1$, seja $q_{i,j} = m + r(j - i - m)$ (observe-se que $m \leq q_{i,j} \leq 2n + m - 1$). Uma vez que, para todo $k \geq m$, $f^{2n+k} = f^k$ e $g^{2n+k} = g^k$, M. Sequeira prova a seguinte proposição.

Proposição 0.18 [21, Proposição 2] *Sejam* $n, m \in \mathbb{N}$, $q = \lceil m/2n \rceil$ *e* $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DK}_{n,m}$. *Então*

i) $g^i f^i = f^{q2n}$, $f^i g^i = g^{q2n}$, $1 \leq i \leq 2n + m - 1$.

ii) $g^i f^j = f^{q_{i,j}}$, $f^j g^i = g^{q_{j,i}}$, $1 \leq i, j \leq 2n + m - 1$.

iii) $f^m(L) = g^m(L)$. ■

Capítulo 1

Congruências em álgebras-K$_{n,m}$ e em álgebras-K$_{n,m}$ duplas

Em [8, Capítulo 8], T. Blyth e J. Varlet estudam questões relativas a congruências definidas em álgebras-K$_{1,1}$. Em particular, descrevem o complemento de congruências principais complementadas e, recorrendo à descrição obtida, caracterizam estas congruências. Na primeira parte do capítulo, secção 1.1, analisamos as mesmas questões para congruências principais definidas em álgebras-K$_{n,m}$, [14, Teorema 2.10].

M. Ramalho, em [16], estabelece um isomorfismo entre o reticulado de congruências de uma álgebra $\mathcal{L} \in \mathbf{K}_{n,m}$ e o reticulado de congruências da maior subálgebra de $\mathcal{L}$ que pertence a $\mathbf{K}_{1,m}$; sendo esta subálgebra representada por $\mathcal{L}_{1,m}$, o isomorfismo é definido associando a cada congruência definida em $\mathcal{L}$ a sua restrição a $L_{1,m}$. Tendo em conta a definição desta bijecção, decidimos estudar em que condições a restrição a $L_{1,m}$ de uma congruência principal definida em $\mathcal{L}$ é uma congruência principal em $\mathcal{L}_{1,m}$. Obtemos uma condição necessária e suficiente para que tal aconteça e, com base nesta mesma condição, chegamos à conclusão que nem sempre a restrição a $L_{1,m}$ de uma congruência principal definida em $\mathcal{L}$ é uma congruência principal em $\mathcal{L}_{1,m}$.

Na segunda secção do capítulo continuamos a estudar congruências principais, mas desta vez definidas em álgebras-$K_{n,m}$ duplas; de forma semelhante ao que foi feito na secção 1.1, obtemos a descrição do complemento de congruências principais complementadas, [15, Teorema 2.9], e caracterizamos essas congruências, [15, Teorema 2.11]. Os resultados aqui obtidos são uma generalização do estudo feito por T. Blyth e J. Varlet em [8, Capítulo 14], onde os autores já haviam abordado este assundo para congruências principais definidas em álgebras-MS duplas.

De [21] e de [2, Corolário Teorema 1] sabemos que as congruências principais definidas numa álgebra-$K_{n,m}$ dupla $\mathcal{L} = (L, f, g)$ e as congruências principais definidas em (L, f) e em (L, g) podem ser descritas como supremo de congruências do reticulado L. Tendo em conta estas descrições e a relação existente entre as operações f e g, facilmente se conclui que cada congruência principal definida numa álgebra-$K_{n,m}$ dupla é o supremo (no reticulado de congruências de L) de congruências principais definidas nas álgebras-$K_{n,m}$ simples (L, f) e (L, g). Deste facto resulta que o estudo de congruências principais definidas em álgebras-$K_{n,m}$ duplas está relacionado com os resultados obtidos na secção 1.1.

1.1 Congruências em álgebras-$K_{n,m}$

Iniciamos esta secção apresentando alguma da notação que aqui é usada e fazendo a revisão de alguns resultados relativos a congruências definidas em álgebras-$K_{n,m}$.

Dada uma álgebra $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{O}$, denotam-se por $\mathrm{Con}(\mathcal{L})$ o reticulado de congruências de $\mathcal{L}$ e por $\mathrm{Con}_R(\mathcal{L})$ o reticulado de congruências do reduto L. Para identificar os elementos de $\mathrm{Con}_R(\mathcal{L})$ utilizaremos também o índice R. Sendo a, b elementos de L, representa-se por $\theta(a, b)$ e $\theta_R(a, b)$, respectivamente, o menor elemento de $\mathrm{Con}(\mathcal{L})$ e $\mathrm{Con}_R(\mathcal{L})$ que identifica a e b. É suficiente estudar $\theta(a, b)$ para $a \leq b$, uma vez que, se $\theta \in \mathrm{Con}(\mathcal{L})$ e $x, y \in L$, então $(x, y) \in \theta$ se e só se $(x \wedge y, x \vee y) \in \theta$.

A proposição que apresentamos a seguir é fundamental no estudo de congruências definidas em álgebras-$K_{n,m}$. Dada uma congruência principal definida numa álgebra-$K_{n,m}$ $\mathcal{L}$, J. Berman obtém a sua descrição como um supremo de congruências principais do reticulado reduto de $\mathcal{L}$:

Proposição 1.1 [2, Cor. Teorema 1] *Sejam* $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$ *e* $a, b \in L$ *com* $a \leq b$. *Então*

$$\theta(a, b) = \bigvee_{i=0}^{2n+m-1} \theta_R\left(f^i(a), f^i(b)\right). \blacksquare$$

Muitos dos resultados estabelecidos neste capítulo recorrem à descrição anterior; por tal motivo convém recordar alguns factos relativos a congruências principais definidas num reticulado distributivo L.

Dados $x, y, z, w \in L$, verifica-se que:

R_0) para $z \leq w$, $(x, y) \in \theta(z, w)$ se e só se $x \wedge z = y \wedge z$ e $x \vee w = y \vee w$;

R_1) $\theta(x \wedge y, x) = \theta(y, x \vee y)$;

R_2) $\theta(x, y) \wedge \theta(z, w) = \theta(x \vee z, x \vee z \vee (y \wedge w)) = \theta(y \wedge w \wedge (x \vee z), y \wedge w)$; portanto $\theta(x, y) \wedge \theta(z, w) = \triangle$ se e só se $y \wedge w \leq x \vee z$.

Como consequência da proposição anterior e de R_0), M. Sequeira prova que qualquer congruência principal definida numa álgebra-$K_{n,m}$ pode ser descrita por equações (à semelhança do que acontece com congruências principais definidas num reticulado), i.e., $\mathbf{K}_{n,m}$ tem C.P.D.E.R., [19, 4.4, Teorema 7]. De facto, verifica-se que cada congruência principal é descrita por 2^{2n+m} equações.

Teorema 1.2 [19, 4.4, Teorema 8] *Sejam $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$ e $a, b \in L$, tais que $a \leq b$ e $x, y \in L$.*

Então $(x, y) \in \theta(a, b)$ se e só se

$$\begin{aligned} & \left(x \wedge \bigwedge_{i \in F} f^{2i}(a) \wedge \bigwedge_{j \in G} f^{2j+1}(b) \right) \vee \bigvee_{k \in T \setminus F} f^{2k}(b) \vee \bigvee_{l \in T' \setminus G} f^{2l+1}(a) \\ = & \left(y \wedge \bigwedge_{i \in F} f^{2i}(a) \wedge \bigwedge_{j \in G} f^{2j+1}(b) \right) \vee \bigvee_{k \in T \setminus F} f^{2k}(b) \vee \bigvee_{l \in T' \setminus G} f^{2l+1}(a) \end{aligned}$$

para cada $F \subseteq T$ e cada $G \subseteq T'$, sendo

$T = T' = \{0, 1, 2, ..., n + \frac{m-2}{2}\}$ se m é par ou

$T = \{0, 1, 2, ..., n + \frac{m-1}{2}\}$, $T' = \{0, 1, 2, ..., n + \frac{m-3}{2}\}$ se m é ímpar. ■

O lema seguinte também é essencial neste estudo e estabelece que toda a congruência principal definida numa álgebra de Ockham $\mathcal{L} = (L, f)$ e que é gerada por elementos de $L_{1,0}$ é uma congruência complementada.

Lema 1.3 [23] *Sejam $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{O}$ e $a, b \in L_{1,0}$ tais que $a \leq b$.*

Então $\theta(a, b)$ é complementada em $\mathrm{Con}(\mathcal{L})$, tendo-se

$$\begin{aligned} \theta(a,b)' &= \theta\left(f(a) \vee b, 1\right) \vee \theta\left(f(a), f(a) \vee a\right) \vee \theta\left(b, b \vee f(b)\right) \\ &= \theta\left(0, a \wedge f(b)\right) \vee \theta\left(a \wedge f(a), a\right) \vee \theta\left(b \wedge f(b), f(b)\right). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Para determinarmos o complemento de uma congruência principal complementada precisamos de estabelecer mais alguns resultados, que a seguir se demonstram.

Teorema 1.4 *Sejam $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$ e $a, b \in L$ tais que $a \leq b$. Então, para todo $q \in \mathbb{N}$, e para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq m$,*

$$\theta(a,b)|_{f^k(L)} = \theta\left(f^{q2n}(a), f^{q2n}(b)\right)|_{f^k(L)}.$$

Demonstração: Se $(f^k(x), f^k(y)) \in \theta(f^{q2n}(a), f^{q2n}(b))$ resulta de imediato que $(f^k(x), f^k(y)) \in \theta(a,b)$, pois $\theta\left(f^{q2n}(a), f^{q2n}(b)\right) \leq \theta(a,b)$.

Se $\left(f^k(x), f^k(y)\right) \in \theta(a,b)$, então $f^k(x)$ e $f^k(y)$ satisfazem as 2^{2n+m} equações que caracterizam $\theta(a,b)$ (Teorema 1.2). Aplicando f^{q2n} a ambos os membros das igualdades, e atendendo a que $k \geq m$, vem que $f^{q2n}(f^k(x)) = f^k(x)$ e $f^{q2n}(f^k(y)) = f^k(y)$ satisfazem as 2^{2n+m} equações que caracterizam $\theta\left(f^{q2n}(a), f^{q2n}(b)\right)$. Temos, então, que $\left(f^k(x), f^k(y)\right) \in \theta\left(f^{q2n}(a), f^{q2n}(b)\right)$. ∎

Proposição 1.5 *Sejam $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$, $i \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq m$ e $a, b \in L$ tais que $a \leq b$. Então, dados $x, y \in L$,*

$$(x,y) \in \theta_R\left(f^i(a), f^i(b)\right) \Rightarrow \left(f^k(x), f^k(y)\right) \in \theta_R\left(f^t(a), f^t(b)\right),$$

para algum $t \in \{m, ..., 2n+m-1\}$.

Demonstração: Se x e y são elementos de L tais que $(x,y) \in \theta_R\left(f^i(a), f^i(b)\right)$ para algum $i \in \mathbb{N}_0$, então $\left(f^k(x), f^k(y)\right) \in \theta_R\left(f^k(f^i(a)), f^k(f^i(b)\right)$. Como $k \geq m$, temos $f^{k+i}(a) = f^t(a)$ e $f^{k+i}(b) = f^t(b)$, com $t \in \{m, ..., 2n+m-1\}$, e desta forma concluimos que $\left(f^k(x), f^k(y)\right) \in \theta_R\left(f^t(a), f^t(b)\right)$. ∎

Proposição 1.6 *Sejam $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$ e $a, b \in L$ tais que $a \leq b$. Então*

$$\theta(a,b)|_{f^m(L)} = \bigvee_{k=0}^{2n+m-1} \theta_R\left(f^k(a), f^k(b)\right)|_{f^m(L)}.$$

Demonstração: Sabemos da Proposição 1.1 que

$$\theta(a,b) = \bigvee_{k=0}^{2n+m-1} \theta_R\left(f^k(a), f^k(b)\right)$$

e é imediato que

$$\bigvee_{k=0}^{2n+m-1} \theta_R(f^k(a), f^k(b))|_{f^m(L)} \leq \left(\bigvee_{k=0}^{2n+m-1} \theta_R\left(f^k(a), f^k(b)\right)\right)|_{f^m(L)}.$$

Relativamente à desigualdade contrária verifica-se também a sua validade. De facto, se x, y são elementos de L tais que

$$(x, y) \in \left(\bigvee_{k=0}^{2n+m-1} \theta_R\left(f^k(a), f^k(b)\right)\right)|_{f^m(L)},$$

então $x, y \in f^m(L)$ e $(x, y) \in \bigvee_{k=0}^{2n+m-1} \theta_R\left(f^k(a), f^k(b)\right)$. Consequentemente, existem $s \in \mathbb{N}$ e elementos $x_0 = x,\ x_1,\ ...,\ x_s = y \in L$ tais que, para cada $v \in \{0,\ ...,\ s-1\}$, $(x_v, x_{v+1}) \in \theta_R\left(f^{k_v}(a), f^{k_v}(b)\right)$, para algum $k_v \in \{0, ..., 2n+m-1\}$. Sendo $q = \lceil m/2n \rceil$, resulta da Proposição 1.5 que $(f^{q2n}(x_v), f^{q2n}(x_{v+1})) \in \theta_R\left(f^{t_v}(a), f^{t_v}(b)\right)$, para algum $t_v \in \{m, ..., 2n+m-1\}$. Como $q2n \geq m$, então $(f^{q2n}(x_v), f^{q2n}(x_{v+1})) \in \theta_R\left(f^{t_v}(a), f^{t_v}(b)\right)|_{f^m(L)}$. Logo

$$(f^{q2n}(x), f^{q2n}(y)) \in \bigvee_{k=0}^{2n+m-1} \theta_R\left(f^k(a), f^k(b)\right)|_{f^m(L)}$$

onde $f^{q2n}(x) = x$ e $f^{q2n}(y) = y$ pois $x, y \in f^m(L)$. Assim, concluimos que

$$\left(\bigvee_{k=0}^{2n+m-1} \theta_R\left(f^k(a), f^k(b)\right)\right)|_{f^m(L)} \leq \bigvee_{k=0}^{2n+m-1} \theta_R\left(f^k(a), f^k(b)\right)|_{f^m(L)}. \blacksquare$$

Proposição 1.7 *Sejam* $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$, $p \in \mathbb{N}$, *e* $a_i, b_i \in L$ *tais que* $a_i \leq b_i$, *para* $i \in \{1, ..., p\}$. *Então,*

$$\left(\bigvee_{i=1}^{p} \theta(a_i, b_i)\right)|_{f^m(L)} = \bigvee_{i=1}^{p} \theta(a_i, b_i)|_{f^m(L)}.$$

Demonstração: Dados $x, y \in L$ tais que $(x, y) \in (\bigvee_{i=1}^{p} \theta(a_i, b_i))|_{f^m(L)}$, tem-se que $x, y \in f^m(L)$ e $(x, y) \in \bigvee_{i=1}^{p} \theta(a_i, b_i)$. Então da Proposição 1.1 resulta que $(x, y) \in \bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{k=0}^{2n+m-1} \theta_R\left(f^k(a_i), f^k(b_i)\right)$, o que significa que existem

$s \in \mathbb{N}$ e elementos $x_0 = x$, x_1, ..., $x_s = y$ pertencentes a L tais que, para cada $v \in \{0, ..., s-1\}$, $(x_v, x_{v+1}) \in \theta_R\left(f^{k_v}(a_{i_v}), f^{k_v}(b_{i_v})\right)$, para algum $k_v \in \{0, ..., 2n+m-1\}$ e algum $i_v \in \{1, ..., p\}$.

Se considerarmos $q = \lceil m/2n \rceil$, sabemos pela Proposição 1.5 que $\left(f^{q2n}(x_v), f^{q2n}(x_{v+1})\right) \in \theta_R\left(f^{t_v}(a_{i_v}), f^{t_v}(b_{i_v})\right)$, com $t_v \in \{m, ..., 2n+m-1\}$. Logo $\left(f^{q2n}(x_v), f^{q2n}(x_{v+1})\right) \in \theta_R\left(f^{t_v}(a_{i_v}), f^{t_v}(b_{i_v})\right)|_{f^m(L)}$, para cada $v \in \{0, ..., s-1\}$. Como $f^{q2n}(x) = x$ e $f^{q2n}(y) = y$, podemos então concluir que

$$(x, y) \in \bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{k=0}^{2n+m-1} \theta_R\left(f^k(a_i), f^k(b_i)\right)|_{f^m(L)}.$$

Tendo em conta a Proposição 1.6 vem que $(x,\ y) \in \bigvee_{i=1}^{p} \theta(a_i,\ b_i)|_{f^m(L)}$, e portanto $(\bigvee_{i=1}^{p} \theta(a_i, b_i))\,|_{f^m(L)} \leq \bigvee_{i=1}^{p} \theta(a_i, b_i)|_{f^m(L)}$. Dado que a desigualdade contrária é óbvia, temos que $(\bigvee_{i=1}^{p} \theta(a_i, b_i))\,|_{f^m(L)} = \bigvee_{i=1}^{p} \theta(a_i, b_i)|_{f^m(L)}$. ■

Proposição 1.8 *Sejam* $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{O}$, $\theta \in \mathrm{Con}(\mathcal{L})$ *e* $k \in \mathbb{N}$. *Se* $\theta \in \mathrm{C}(\mathrm{Con}(\mathcal{L}))$, *então* $\theta|_{f^k(L)} \in \mathrm{C}(\mathrm{Con}(f^k(\mathcal{L})))$. *De facto, sendo* θ' *o complemento de* θ *em* $\mathrm{Con}(\mathcal{L})$, *então* $\theta'|_{f^k(L)}$ *é o complemento de* $\theta|_{f^k(L)}$ *em* $\mathrm{Con}(f^k(\mathcal{L}))$.

Demonstração: Seja θ' o complemento de θ em $\mathrm{Con}(\mathcal{L})$. Dado que $\theta \wedge \theta' = \triangle$ e $\theta|_{f^k(L)} \wedge \theta'|_{f^k(L)} \leq \theta \wedge \theta'$, conclui-se de imediato que $\theta|_{f^k(L)} \wedge \theta'|_{f^k(L)} = \triangle_{f^k(L)}$. Por outro lado, e uma vez que $(0, 1) \in \theta \vee \theta'$, existem x_0, x_1, ..., $x_n \in L$ tais que

$$0 = x_0 \overset{\theta}{\equiv} x_1 \overset{\theta'}{\equiv} x_2 \overset{\theta}{\equiv} ... \overset{\theta'}{\equiv} x_{n-2} \overset{\theta}{\equiv} x_{n-1} \overset{\theta'}{\equiv} x_n = 1.$$

Se aplicarmos f^k a cada um dos elementos obtemos

$$f^k(0) = f^k(x_0) \overset{\theta}{\equiv} f^k(x_1) \overset{\theta'}{\equiv} f^k(x_2) \overset{\theta}{\equiv} ... \overset{\theta'}{\equiv} f^k(x_{n-2}) \overset{\theta}{\equiv} f^k(x_{n-1}) \overset{\theta'}{\equiv} f^k(x_n) = f^k(1)$$

e portanto $\left(f^k(0), f^k(1)\right) \in \theta|_{f^k(L)} \vee \theta'|_{f^k(L)}$. Em ambos os casos, k par e k ímpar, é óbvio que $(0, 1) \in \theta|_{f^k(L)} \vee \theta'|_{f^k(L)}$; logo $\theta|_{f^k(L)} \vee \theta'|_{f^k(L)} = \nabla_{f^k(L)}$. Desta forma, concluimos que $\theta'|_{f^k(L)}$ é o complemento de $\theta|_{f^k(L)}$ em $\mathrm{Con}(f^k(\mathcal{L}))$. ■

Definição 1.9 Sejam $p \in \mathbb{N}$ e $(E, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dá-se a designação de *p-escada* a um subconjunto $\{a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_p\}$ de E tal que $a_1 \leq ... \leq a_p$ e $b_1 \leq ... \leq b_p$ e $a_i \leq b_i$, para todo $i \in \{1, ..., p\}$. Denotamos uma p-escada por $(a_i, b_i)_p$.

Exemplo 1.10 Para $n \in \mathbb{N}$, $T = \{0, 1, ..., n-1\}$ e $s \in \{1, ..., n\}$ seja $T_s = \{J : J \subseteq T, |J| = s\}$. Sejam $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$ e $a, b \in L$ tais que $a \leq b$. Para $s \in \{1, ..., n\}$ sejam

$$\widetilde{a}_s = \bigwedge_{J \in T_s} \bigvee_{j \in J} f^{2j}(a), \qquad \widetilde{b}_s = \bigwedge_{J \in T_s} \bigvee_{j \in J} f^{2j}(b).$$

Como é simples de verificar, $\{\widetilde{a}_s, \widetilde{b}_s : s = 1, ..., n\}$ é uma n-escada formada por elementos de $L_{1,m}$, [24].

Recorrendo à n-escada $(\widetilde{a}_s, \widetilde{b}_s)_n$ definida no exemplo anterior, M. Sequeira prova que toda a congruência principal definida numa álgebra-$K_{n,m}$ $\mathcal{L}$ é supremo de congruências principais geradas por elementos de $L_{1,m}$.

Proposição 1.11 [24] *Sejam $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$ e $a, b \in L$ tais que $a \leq b$. Então*

$$\theta(a, b) = \bigvee_{s=1}^{n} \theta(\widetilde{a}_s, \widetilde{b}_s). \blacksquare$$

Uma vez que cada congruência, definida numa álgebra $\mathcal{A}$, é o supremo de congruências principais, resulta desta proposição que cada congruência θ, definida numa álgebra $\mathcal{L} \in \mathbf{K}_{n,m}$, é supremo de congruências principais geradas por elementos de $L_{1,m.}$

Nesta secção o nosso objectivo é caracterizar as congruências principais, definidas em álgebras-$K_{n,m}$, que são complementadas. Tal será conseguido a partir do estudo de congruências do tipo $\theta = \bigvee_{s=1}^{p} \theta(c_s, d_s)$, onde $(c_s, d_s)_p$ é uma p-escada formada por elementos de $L_{1,m}$.

Note-se que se cada congruência $\theta(c_s, d_s)$ é complementada, então é óbvio que θ também é complementada e tem-se $\theta' = \bigwedge_{s=1}^{p} \theta(c_s, d_s)'$. Porém, a existência de θ' não obriga a que cada $\theta(c_s, d_s)$ seja complementada. De facto, sendo θ complementada, vamos verificar que a descrição de θ' está relacionada com o resultado do Lema 1.3 e que é possível obter esta descrição mesmo sem sabermos se cada $\theta(c_s, d_s)$ é complementada.

No texto que se segue consideramos $\mathcal{L} \in \mathbf{K}_{n,m}$, $p \in \mathbb{N}$ e $\theta = \bigvee_{s=1}^{p} \theta(c_s, d_s)$, onde $(c_s, d_s)_p$ é uma p-escada formada por elementos de $L_{1,m}$. Designamos por *i-par*, com $i \in \mathbb{N}$, o par ordenado (u, v) tal que

$$(u,v) = \begin{cases} (i, i+1) & \text{se } i \text{ é par;} \\ (i+1, i) & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Denotamos por (k, l) o m-par. Vamos assumir também que θ é complementada.

Nestas condições, se tomarmos $q = \lceil m/2n \rceil$ temos que $f^{q2n}(c_s)$ e $f^{q2n}(d_s)$ são elementos de $f^m(L)$. Então, recorrendo às proposições 1.7, 1.4 e 0.2, vem que:

$$\begin{aligned} \theta|_{f^m(L)} &= \left(\bigvee_{s=1}^{p} \theta(c_s, d_s) \right) |_{f^m(L)} = \bigvee_{s=1}^{p} \theta(c_s, d_s)|_{f^m(L)} \\ &= \bigvee_{s=1}^{p} \theta\left(f^{q2n}(c_s), f^{q2n}(d_s)\right)|_{f^m(L)} = \bigvee_{s=1}^{p} \theta_{f^m(L)}\left(f^{q2n}(c_s), f^{q2n}(d_s)\right). \end{aligned}$$

Como $c_s, d_s \in L_{1,m}$ e $q2n \geq m$, tem-se que $f^{q2n}(c_s)$, $f^{q2n}(d_s) \in L_{1,0}$. Logo, pelo Lema 1.3, sabemos que cada congruência $\theta_{f^m(L)}\left(f^{q2n}(c_s), f^{q2n}(d_s)\right)$ é complementada em $\mathrm{Con}(f^m(\mathcal{L}))$.

Dado que $q2n = m + r$ vem, para cada $x \in L_{1,m}$, que:

- se m é par, $f^{q2n}(x) = f^m(x)$ e $f^{q2n+1}(x) = f^{m+1}(x)$,

- se m é ímpar, $f^{q2n}(x) = f^{m+1}(x)$ e $f^{q2n+1}(x) = f^m(x)$.

Logo, do Lema 1.3 e das proposições 0.2 e 1.7, resulta que

$$\begin{aligned}
&\theta_{f^m(L)}\left(f^{q2n}(c_s), f^{q2n}(d_s)\right)'\\
&\quad= \theta_{f^m(L)}\left(f^{q2n}(d_s) \vee f^{q2n+1}(c_s), 1\right) \vee \theta_{f^m(L)}\left(f^{q2n}(d_s), f^{q2n}(d_s) \vee f^{q2n+1}(d_s)\right)\\
&\qquad \vee \theta_{f^m(L)}\left(f^{q2n+1}(c_s), f^{q2n+1}(c_s) \vee f^{q2n}(c_s)\right)\\
&\quad= \theta_{f^m(L)}\left(f^{k}(d_s) \vee f^{l}(c_s), 1\right) \vee \theta_{f^m(L)}\left(f^{k}(d_s), f^{k}(d_s) \vee f^{l}(d_s)\right)\\
&\qquad \vee \theta_{f^m(L)}\left(f^{l}(c_s), f^{l}(c_s) \vee f^{k}(c_s)\right)\\
&\quad= \theta\left(f^{k}(d_s) \vee f^{l}(c_s), 1\right)|_{f^m(L)} \vee \theta\left(f^{k}(d_s), f^{k}(d_s) \vee f^{l}(d_s)\right)|_{f^m(L)}\\
&\qquad \vee \theta\left(f^{l}(c_s), f^{l}(c_s) \vee f^{k}(c_s)\right)|_{f^m(L)}\\
&\quad= \left[\theta\left(f^{k}(d_s) \vee f^{l}(c_s), 1\right) \vee \theta\left(f^{k}(d_s), f^{k}(d_s) \vee f^{l}(d_s)\right)\right.\\
&\qquad \left.\vee \theta\left(f^{l}(c_s), f^{l}(c_s) \vee f^{k}(c_s)\right)\right]|_{f^m(L)}.
\end{aligned}$$

Daqui em diante a congruência

$$\theta\left(f^{k}(d_s) \vee f^{l}(c_s), 1\right) \vee \theta\left(f^{k}(d_s), f^{k}(d_s) \vee f^{l}(d_s)\right) \vee \theta\left(f^{l}(c_s), f^{l}(c_s) \vee f^{k}(c_s)\right)$$

vai ser representada por $\varphi(c_s, d_s)$.

Dado que $\theta|_{f^m(L)} = \bigvee_{s=1}^{p} \theta_{f^m(L)}\left(f^{q2n}(c_s), f^{q2n}(d_s)\right)$ e que cada congruência $\theta_{f^m(L)}(f^{q2n}(c_s), f^{q2n}(d_s))$ é complementada, a congruência $\theta|_{f^m(L)}$ também é complementada e tem-se:

$$\begin{aligned}
(\theta|_{f^m(L)})' &= \bigwedge_{s=1}^{p} \theta_{f^m(L)}\left(f^{2nq}(c_s), f^{2nq}(d_s)\right)' = \bigwedge_{s=1}^{p} \left(\varphi(c_s, d_s)|_{f^m(L)}\right)\\
&= \left(\bigwedge_{s=1}^{p} \varphi(c_s, d_s)\right)|_{f^m(L)}.
\end{aligned}$$

Denotando $\bigwedge_{s=1}^{p} \varphi(c_s, d_s)$ por ϕ, temos então $(\theta|_{f^m(L)})' = \phi|_{f^m(L)}$. Por outro lado, e uma vez que θ é complementada, sabemos pela Proposição 1.8 que $(\theta|_{f^m(L)})' = \theta'|_{f^m(L)}$. Logo $\theta'|_{f^m(L)} = \phi|_{f^m(L)}$.

Nos resultados seguintes o que vamos fazer é provar que, de facto, o complemento de θ é ϕ. Para tal, começamos por obter a descrição de ϕ como supremo de congruências principais de uma forma que é útil na prova de que o complemento de θ é ϕ.

Proposição 1.12 *Sejam $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$, $p \in \mathbb{N}$ e $(c_s, d_s)_p$ uma p-escada formada por elementos de $L_{1,m}$. Sejam (k, l) um m-par e*

$$\phi = \bigwedge_{s=1}^{p} \left[\theta\left(f^k(d_s) \vee f^l(c_s), 1\right) \vee \ \theta\left(f^k(d_s), f^k(d_s) \vee f^l(d_s)\right) \right.$$
$$\left. \vee\, \theta\left(f^l(c_s), f^l(c_s) \vee f^k(c_s)\right)\right].$$

Então

$$\phi = \bigvee_{i=1}^{p+1} \bigvee_{j=i-1}^{p} \theta\left(f^l(c_i) \vee f^k(d_j), f^l(c_i) \vee f^k(d_j) \vee \left[f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1})\right]\right)$$

onde $d_0 = 0$ e $c_{p+1} = 1$.

Demonstração: Relativamente a ϕ demonstra-se por indução sobre p que

$$\phi = \theta\left(f^l(c_1) \vee f^k(d_p), 1\right) \vee \theta\left(f^l(c_1), f^l(c_1) \vee f^k(c_1)\right) \vee \theta\left(f^k(d_p), f^k(d_p) \vee f^l(d_p)\right)$$
$$\vee \bigvee_{j=1}^{p-1} \theta\left(f^l(c_1) \vee f^k(d_j), f^l(c_1) \vee f^k(d_j) \vee f^k(c_{j+1})\right)$$
$$\vee \bigvee_{i=2}^{p} \theta\left(f^l(c_i) \vee f^k(d_p), f^l(c_i) \vee f^k(d_p) \vee f^l(d_{i-1})\right)$$
$$\vee \bigvee_{i=2}^{p} \bigvee_{j=i-1}^{p-1} \theta\left(f^l(c_i) \vee f^k(d_j), f^l(c_i) \vee f^k(d_j) \vee \left[f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1})\right]\right).$$

Este resultado obtém-se recorrendo à Proposição 1.1, aos factos R$_1$) e R$_2$) e tendo em conta que $f\left(f^k(x)\right) = f^l(x)$, $f\left(f^l(x)\right) = f^k(x)$, para todo $x \in L_{1,m}$, e que $c_s \leq d_s$ e $c_s \leq c_{s+1}$ e $d_s \leq d_{s+1}$.

A base de indução é $p = 1$ e a verificação para este valor de p é imediata. Quanto ao passo de indução, a sua prova é um exercício de rotina, e por ser bastante extensa optamos por não a apresentar. Contudo, para dar uma ideia do tipo de argumentos que são usados na demonstração, mostramos o resultado para o caso $p=2$:

$$\bigwedge_{s=1}^{2}\left[\theta\left(f^k(d_s)\vee f^l(c_s),1\right)\vee\ \theta\left(f^k(d_s),f^k(d_s)\vee f^l(d_s)\right)\vee\theta\left(f^l(c_s),f^l(c_s)\vee f^k(c_s)\right)\right]$$

$$\begin{aligned}=\bigwedge_{s=1}^{2}&\left[\theta_R\left(f^k(d_s)\vee f^l(c_s),1\right)\vee\theta_R\left(0,f^l(d_s)\wedge f^k(c_s)\right)\right.\\&\left.\vee\ \theta_R\left(f^k(d_s),f^k(d_s)\vee f^l(d_s)\right)\vee\theta_R\left(f^l(c_s),f^l(c_s)\vee f^k(c_s)\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=\ &\theta_R\left(f^l(c_1)\vee f^k(d_2),1\right)\vee\theta_R(0,f^l(d_2)\wedge f^k(c_1))\\&\vee\ \theta_R\left(f^l(c_1),f^l(c_1)\vee f^k(c_1)\right)\\&\vee\ \theta_R\left(f^k(d_2),f^k(d_2)\vee f^l(d_2)\right)\\&\vee\ \theta_R\left(f^k(d_1)\vee f^l(c_1),f^k(d_1)\vee f^l(c_1)\vee f^k(c_2)\right)\\&\vee\ \theta_R\left(f^l(c_2),f^l(c_2)\vee\left[f^l(d_1)\wedge f^k(c_1)\right]\right)\\&\vee\ \theta_R\left(f^k(d_2)\vee f^l(c_2),f^k(d_2)\vee f^l(c_2)\vee f^l(d_1)\right)\\&\vee\ \theta_R\left(f^k(d_1),f^k(d_1)\vee\left[f^l(d_2)\wedge f^k(c_2)\right]\right)\\&\vee\ \theta_R\left(f^k(d_1)\vee f^l(c_2),f^k(d_1)\vee f^l(c_2)\vee\left[f^l(d_1)\wedge f^k(c_2)\right]\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=\ &\theta\left(f^l(c_1)\vee f^k(d_2),1\right)\\&\vee\ \theta\left(f^l(c_1),f^l(c_1)\vee f^k(c_1)\right)\\&\vee\ \theta\left(f^k(d_2),f^k(d_2)\vee f^l(d_2)\right)\\&\vee\ \theta\left(f^k(d_1)\vee f^l(c_1),f^k(d_1)\vee f^l(c_1)\vee f^k(c_2)\right)\\&\vee\ \theta\left(f^k(d_2)\vee f^l(c_2),f^k(d_2)\vee f^l(c_2)\vee f^l(d_1)\right)\\&\vee\ \theta\left(f^k(d_1)\vee f^l(c_2),f^k(d_1)\vee f^l(c_2)\vee\left[f^l(d_1)\wedge f^k(c_2)\right]\right).\end{aligned}$$

Se definirmos $d_0=0$ e $c_3=1$ temos

$$\begin{aligned}&\bigwedge_{s=1}^{2}\left[\theta\left(f^k(d_s)\vee f^l(c_s),1\right)\vee\ \theta\left(f^k(d_s),f^k(d_s)\vee f^l(d_s)\right)\vee\theta\left(f^l(c_s),f^l(c_s)\vee f^k(c_s)\right)\right]\\&=\bigvee_{i=1}^{3}\bigvee_{j=i-1}^{2}\theta\left(f^l(c_i)\vee f^k(d_j),f^l(c_i)\vee f^k(d_j)\vee\left[f^l(d_{i-1})\wedge f^k(c_{j+1})\right]\right).\end{aligned}$$

No caso geral, se definirmos $d_0 = 0$ e $c_{p+1} = 1$, também podemos escrever ϕ, de forma mais abreviada, do seguinte modo

$$\phi = \bigvee_{i=1}^{p+1} \bigvee_{j=i-1}^{p} \theta\left(f^l(c_i) \vee f^k(d_j), f^l(c_i) \vee f^k(d_j) \vee \left[f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1})\right]\right). \quad \blacksquare$$

Relativamente à descrição do complemento de θ temos então que:

Teorema 1.13 *Sejam $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$, $p \in \mathbb{N}$ e $\theta = \bigvee_{s=1}^{p} \theta(c_s, d_s)$ para alguma p-escada $(c_s, d_s)_p$ formada por elementos de $L_{1,m}$. Sejam (k, l) um m-par,*

$$\varphi(c_v, d_v) = \theta\left(f^k(d_v) \vee f^l(c_v), 1\right) \vee \theta\left(f^k(d_v), f^k(d_v) \vee f^l(d_v)\right)$$
$$\vee\, \theta\left(f^l(c_v), f^l(c_v) \vee f^k(c_v)\right),$$

para $v \in \{1, ..., p\}$, e $\phi = \bigwedge_{v=1}^{p} \varphi(c_v, d_v)$.

Então

(a) $\theta \vee \phi = \bigtriangledown$,

(b) se θ é complementada, então necessariamente $\theta' = \phi$.

Demonstração: (a) Para cada $s \in \{1, ..., p\}$, $\theta(c_s, d_s) \vee \varphi(c_s, d_s) = \bigtriangledown$, pois

- $\left(0, f^l(d_s) \wedge f^k(c_s)\right) \in \theta\left(0, f^l(d_s) \wedge f^k(c_s)\right) = \theta\left(f^k(d_s) \vee f^l(c_s), 1\right)$,

- $\left(f^l(d_s) \wedge f^k(c_s), f^l(d_s) \wedge f^k(d_s)\right) \in \theta(c_s, d_s)$

- $\left(f^l(d_s) \wedge f^k(d_s), f^l(d_s)\right) \in \theta\left(f^l(d_s) \wedge f^k(d_s), f^l(d_s)\right) = \theta\left(f^k(d_s), f^k(d_s) \vee f^l(d_s)\right)$,

- $\left(f^l(d_s), f^l(c_s)\right) \in \theta(c_s, d_s)$

- $\left(f^l(c_s), f^l(c_s) \vee f^k(c_s)\right) \in \theta\left(f^l(c_s), f^l(c_s) \vee f^k(c_s)\right)$,

- $\left(f^l(c_s) \vee f^k(c_s), f^l(c_s) \vee f^k(d_s)\right) \in \theta(c_s, d_s)$

- $\left(f^l(c_s) \vee f^k(d_s), 1\right) \in \theta\left(f^l(c_s) \vee f^k(d_s), 1\right)$

Logo, $\theta \vee \phi = \left[\bigvee_{s=1}^{p} \theta(c_s, d_s)\right] \vee \bigwedge_{v=1}^{p} \varphi(c_v, d_v) = \bigwedge_{v=1}^{p} \left(\bigvee_{s=1}^{p} \theta(c_s, d_s) \vee \varphi(c_v, d_v)\right) = \bigtriangledown$.

(b) Verifiquemos agora que se θ é complementada, então $\theta' = \phi$. Com efeito, por a) sabe-se que $\theta \vee \phi = \bigtriangledown$ e, como θ é complementada, temos $\theta' \leq \phi$. Assim, falta-nos provar que $\phi \leq \theta'$. Sendo $q = \lceil m/2n \rceil$ tem-se, como já vimos anteriormente, que $\theta'|_{f^m(L)} = \phi|_{f^m(L)}$. Definindo $d_0 = 0$ e $c_{p+1} = 1$, ficou estabelecido na Proposição 1.12 que

$$\phi = \bigvee_{i=1}^{p+1} \bigvee_{j=i-1}^{p} \theta\left(f^l(c_i) \vee f^k(d_j), f^l(c_i) \vee f^k(d_j) \vee \left[f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1})\right]\right).$$

e da Proposição 1.7 vem :

$$\phi|_{f^m(L)} = \bigvee_{i=1}^{p+1} \bigvee_{j=i-1}^{p} \theta\left(f^l(c_i) \vee f^k(d_j), f^l(c_i) \vee f^k(d_j) \vee \left[f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1})\right]\right)|_{f^m(L)}.$$

Atendendo a que $\theta'|_{f^m(L)} = \phi|_{f^m(L)}$, então θ' também identifica cada um dos pares $\left(f^l(c_i) \vee f^k(d_j), f^l(c_i) \vee f^k(d_j) \vee \left[f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1})\right]\right)$ que ocorre em $\phi|_{f^m(L)}$. Mas ϕ é a menor congruência que identifica cada um destes pares. Logo $\phi \leq \theta'$ e, portanto, $\theta' = \phi$. ■

Dada uma álgebra $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$, uma questão que surge naturalmente é a de saber em que condições uma congruência θ é complementada em Con($\mathcal{L}$). No caso em que $\theta = \bigvee_{s=1}^{p} \theta(c_s, d_s)$, onde $p \in \mathbb{N}$ e $(c_s, d_s)_p$ é uma p-escada formada por elementos de $L_{1,m}$, verificamos o seguinte:

Teorema 1.14 *Sejam $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$, $p \in \mathbb{N}$ e $\theta = \bigvee_{s=1}^{p} \theta(c_s, d_s)$ para alguma p-escada $(c_s, d_s)_p$ formada por elementos de $L_{1,m}$. Seja (k, l) um m-par e definam-se $d_0 = 0$ e $c_{p+1} = 1$.*
Então, θ é complementada se e só se, para cada $s \in \{1, ..., p\}$ e $i \in \{1, ..., p+1\}$, se tem:

$d_s \wedge f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1}) \leq c_s \vee f^l(c_i) \vee f^k(d_j)$, *para* $j \in \{i-1, ..., p\}$ *e*

$d_s \wedge f^l(d_j) \wedge f^k(c_i) \leq c_s \vee f^l(c_{j+1}) \vee f^k(d_{i-1})$, *para* $j \in \{i, ..., p\}$.

Demonstração: Pelo Teorema 1.13 sabe-se que θ é complementada se e só se $\theta \wedge \phi = \triangle$, e recorrendo à Proposição 1.12 temos que

$$\phi = \bigvee_{i=1}^{p+1} \bigvee_{j=i-1}^{p} \theta\left(f^l(c_i) \vee f^k(d_j), f^l(c_i) \vee f^k(d_j) \vee \left[f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1})\right]\right).$$

Vem então que θ é complementada se e só se para cada $s \in \{1, ..., p\}$, $i \in \{1, ..., p+1\}$ e $j \in \{i-1, ..., p\}$,

$$\theta(c_s, d_s) \wedge \theta\left(f^l(c_i) \vee f^k(d_j), f^l(c_i) \vee f^k(d_j) \vee \left[f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1})\right]\right) = \triangle.$$

Com base na Proposição 1.1, nos factos R$_1$) e R$_2$), e atendendo a que $c_s, d_s \in L_{1,m}$, tem-se que

$$\theta(c_s, d_s) \wedge \theta\left(f^l(c_i) \vee f^k(d_j), f^l(c_i) \vee f^k(d_j) \vee \left[f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1})\right]\right)$$

$$\begin{aligned}
= &\left[\bigvee_{r=0}^{m+1} \theta_R\left(f^r(c_s), f^r(d_s)\right)\right] \\
&\wedge \Big[\theta_R\left(f^l(c_i) \vee f^k(d_j), f^l(c_i) \vee f^k(d_j) \vee \left[f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1})\right]\right) \\
&\quad \vee \theta_R\left(f^k(c_i) \wedge f^l(d_j) \wedge \left[f^k(d_{i-1}) \vee f^l(c_{j+1})\right], f^k(c_i) \wedge f^l(d_j)\right)\Big]
\end{aligned}$$

$$= \bigvee_{r=0}^{m+1} \left[\theta_R\left(f^r(c_s), f^r(d_s)\right) \wedge \theta_R\left(f^l(c_i) \vee f^k(d_j), f^l(c_i) \vee f^k(d_j) \vee \left[f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1})\right]\right)\right]$$

$$\vee \bigvee_{r=0}^{m+1} \left[\theta_R\left(f^r(c_s), f^r(d_s)\right) \wedge \theta_R\left(f^k(c_i) \wedge f^l(d_j) \wedge \left[f^k(d_{i-1}) \vee f^l(c_{j+1})\right], f^k(c_i) \wedge f^l(d_j)\right)\right].$$

Resulta então que

$$\theta(c_s, d_s) \wedge \theta\left(f^l(c_i) \vee f^k(d_j), f^l(c_i) \vee f^k(d_j) \vee \left[f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1})\right]\right) = \triangle$$

se e só se, para cada $r \in \{0, ..., m+1\}$, se tem

$$\theta_R(f^r(c_s), f^r(d_s)) \wedge \theta_R(f^l(c_i) \vee f^k(d_j), f^l(c_i) \vee f^k(d_j) \vee [f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1})]) = \triangle \text{ e}$$

$$\theta_R(f^r(c_s), f^r(d_s)) \wedge \theta_R(f^k(c_i) \wedge f^l(d_j) \wedge [f^k(d_{i-1}) \vee f^l(c_{j+1})], f^k(c_i) \wedge f^l(d_j)) = \triangle,$$

o que é equivalente a ter,

$$f^r(d_s) \wedge \left(f^l(c_i) \vee f^k(d_j) \vee \left[f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1})\right]\right) \leq f^r(c_s) \vee f^l(c_i) \vee f^k(d_j) \text{ e}$$
$$f^r(d_s) \wedge f^k(c_i) \wedge f^l(d_j) \leq f^r(c_s) \vee \left(f^k(c_i) \wedge f^l(d_j) \wedge \left[f^k(d_{i-1}) \vee f^l(c_{j+1})\right]\right).$$

Isto é, $\theta(c_s, d_s) \wedge \theta\left(f^l(c_i) \vee f^k(d_j), f^l(c_i) \vee f^k(d_j) \vee \left[f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1})\right]\right) = \triangle$ se e só se

$$f^r(d_s) \wedge f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1}) \leq f^r(c_s) \vee f^l(c_i) \vee f^k(d_j) \quad \text{e}$$
$$f^r(d_s) \wedge f^k(c_i) \wedge f^l(d_j) \leq f^r(c_s) \vee f^k(d_{i-1}) \vee f^l(c_{j+1}).$$

Atendendo a que $c_s \leq d_s$, as desigualdades anteriores são trivialmente satisfeitas se r é ímpar. Por outro lado, e atendendo a que $f^{l+2}(c_i) = f^l(c_i)$ e $f^{k+2}(d_i) = f^k(d_i)$ (pois $c_i, d_i \in L_{1,m}$ e $k, l \geq m$), tem-se, para todo $i \in \{1, ..., p+1\}$, $j \in \{i-1, ..., p\}$ e para todo r par,

$$d_s \wedge f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1}) \leq c_s \vee f^l(c_i) \vee f^k(d_j)$$
$$\Rightarrow f^r(d_s) \wedge f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1}) \leq f^r(c_s) \vee f^l(c_i) \vee f^k(d_j),$$

e, de igual modo,

$$d_s \wedge f^k(c_i) \wedge f^l(d_j) \leq c_s \vee f^k(d_{i-1}) \vee f^l(c_{j+1})$$
$$\Rightarrow f^r(d_s) \wedge f^k(c_i) \wedge f^l(d_j) \leq f^r(c_s) \vee f^k(d_{i-1}) \vee f^l(c_{j+1}).$$

Logo a congruência θ é complementada se e só se para cada $s \in \{1, ..., p\}$, cada $i \in \{1, ..., p+1\}$ e cada $j \in \{i-1, ..., p\}$ se tem

$$d_s \wedge f^l(d_{i-1}) \wedge f^k(c_{j+1}) \leq c_s \vee f^l(c_i) \vee f^k(d_j) \quad \text{e}$$
$$d_s \wedge f^l(d_j) \wedge f^k(c_i) \leq c_s \vee f^l(c_{j+1}) \vee f^k(d_{i-1}).$$

Note-se que estas duas condições são a mesma quando $j = i-1$ e, portanto, num dos casos, basta considerar $j \in \{i, ..., p\}$. $\blacksquare$

Corolário 1.15 *Sejam $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$ e $c, d \in L_{1,m}$ tais que $c \leq d$. Seja (k, l) um m-par. Então, $\theta(c, d)$ é complementada se e só se*

a) $d \leq c \vee f^l(c) \vee f^k(d)$; *b)* $d \wedge f^k(c) \wedge f^l(d) \leq c$;

c) $d \wedge f^k(c) \leq c \vee f^l(c)$; *d)* $d \wedge f^l(d) \leq c \vee f^k(d)$. ∎

Sendo $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$ e $a, b \in L$ tais que $a \leq b$, tem-se, atendendo à Proposição 1.11, que $\theta(a, b) = \bigvee_{s=1}^{n} \theta(\widetilde{a}_s, \widetilde{b}_s)$ onde $(\widetilde{a}_s, \widetilde{b}_s)_n$ é uma n-escada formada por elementos de $L_{1,m}$. Recorrendo aos teoremas 1.13 e 1.14 resulta, para as congruências principais de uma álgebra-K$_{n,m}$, o seguinte:

Teorema 1.16 *Sejam $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$ e $a, b \in L$ tais que $a \leq b$. Sejam $\widetilde{b}_0 = 0$, $\widetilde{a}_{n+1} = 1$, e seja (k, l) um m-par.*
Então $\theta(a, b)$ é complementada se e só se, para cada $s \in \{1, ..., n\}$ e $i \in \{1, ..., n+1\}$, se tem que

$\widetilde{b}_s \wedge f^l(\widetilde{b}_{i-1}) \wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1}) \leq \widetilde{a}_s \vee f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j)$, *para* $j \in \{i-1, ..., n\}$ *e*

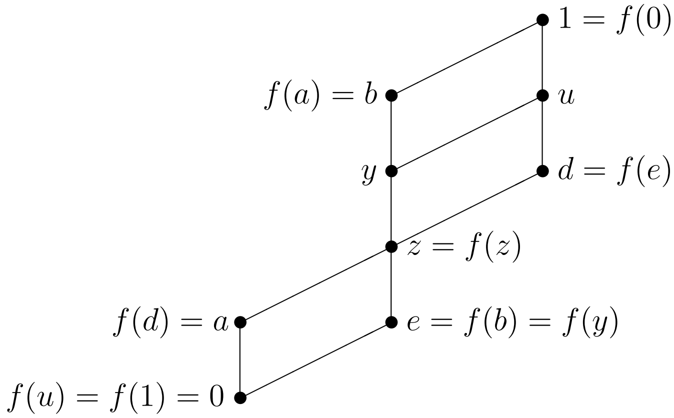
$\widetilde{b}_s \wedge f^l(\widetilde{b}_j) \wedge f^k(\widetilde{a}_i) \leq \widetilde{a}_s \vee f^l(\widetilde{a}_{j+1}) \vee f^k(\widetilde{b}_{i-1})$, *para* $j \in \{i, ..., n\}$,

e, nesse caso,

$$\theta(a,b)' = \bigwedge_{s=1}^{n} \Big[\theta\Big(f^k(\widetilde{b}_s) \vee f^l(\widetilde{a}_s), 1\Big) \vee \theta\Big(f^k(\widetilde{b}_s), f^k(\widetilde{b}_s) \vee f^l(\widetilde{b}_s)\Big) \vee \theta\big(f^l(\widetilde{a}_s), f^l(\widetilde{a}_s) \vee f^k(\widetilde{a}_s)\big)\Big].$$ ∎

Sejam $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$, $p \in \mathbb{N}$ e $\theta = \bigvee_{s=1}^{p} \theta(c_s, d_s)$ onde $(c_s, d_s)_p$ é uma p-escada formada por elementos de $L_{1,m}$. Caso θ seja complementada, verificamos no Teorema 1.13 que, para obtermos a descrição do complemento de θ, foi indiferente o facto de cada $\theta(c_s, d_s)$ ser complementada ou não. Como veremos no exemplo seguinte, pode mesmo acontecer que θ seja complementada sem que cada $\theta(c_s, d_s)$ o seja.

Exemplo 1.17 Consideremos a álgebra $A_4 \in \mathbf{MS}_2 \subseteq \mathbf{K}_{2,1}$:



Pela Proposição 1.11, tem-se $\theta(y,1) = \theta(\widetilde{y}_1, 1) \vee \theta(\widetilde{y}_2, 1) = \theta(y \wedge f^2(y), 1) \vee \theta(y \vee f^2(y), 1) = \theta(z,1) \vee \theta(u,1)$. Como $\theta(y,1) = \nabla$, tem-se que $\theta(y,1)$ é complementada. No entanto, pelo Corolário 1.15, verifica-se que o mesmo não acontece para $\theta(u,1)$, pois falha a condição c).

Continuando a tratar de questões sobre congruências principais definidas em álgebras-K$_{n,m}$, terminamos esta secção com a análise de uma questão que está relacionada com o isomorfismo que se apresenta a seguir, e que foi estabelecido por M. Ramalho.

Teorema 1.18 [16] *Seja* $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$. *Então a aplicação* $\varphi : \mathrm{Con}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathrm{Con}(\mathcal{L}_{1,m})$ *definida por* $\varphi(\theta) = \theta|_{L_{1,m}}$ *é um isomorfismo de reticulados.* ■

Atendendo à definição deste isomorfismo surgiu então a seguinte questão: a restrição a $L_{1,m}$ de uma congruência principal definida em $\mathcal{L}$ é uma congruência principal em $\mathcal{L}_{1,m}$? Como vamos verificar, de facto, tal nem sempre acontece.

Proposição 1.19 *Sejam* $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$*,* $a, b \in L$*, com* $a \leq b$*, e* $c, d \in L_{1,m}$*. Então* $\theta(a, b)|_{L_{1,m}} = \theta_{L_{1,m}}(c, d)$ *se e só se* $\theta(a, b) = \theta(c, d)$*.*

Demonstração: Admita-se que $\theta(a, b)|_{L_{1,m}} = \theta_{L_{1,m}}(c, d)$. Tendo em conta que $c, d \in L_{1,m}$ resulta da Proposição 0.2 que $\theta_{L_{1,m}}(c, d) = \theta(c, d)|_{L_{1,m}}$. Tem-se então $\theta(a, b)|_{L_{1,m}} = \theta(c, d)|_{L_{1,m}}$. Atendendo ao isomorfismo φ definido no Teorema 1.18, conclui-se que $\theta(a, b) = \theta(c, d)$. Se assumirmos que $\theta(a, b) = \theta(c, d)$ resulta, novamente pela Proposição 0.2, que $\theta(a, b)|_{L_{1,m}} = \theta_{L_{1,m}}(c, d)$. ■

Sendo $\mathcal{L} = (L, f)$ uma álgebra-K$_{n,m}$ e a, b elementos de L tais que $a \leq b$, estabelecemos na proposição anterior que $\theta(a, b)|_{L_{1,m}}$ é uma congruência principal em $\mathcal{L}_{1,m}$ se e só se existem $c, d \in L_{1,m}$ tais que $\theta(a, b) = \theta(c, d)$. Porém, nem sempre existem tais elementos $c, d \in L_{1,m}$ para os quais $\theta(a, b) = \theta(c, d)$, como se pode ver no exemplo que se apresenta no final desta secção.

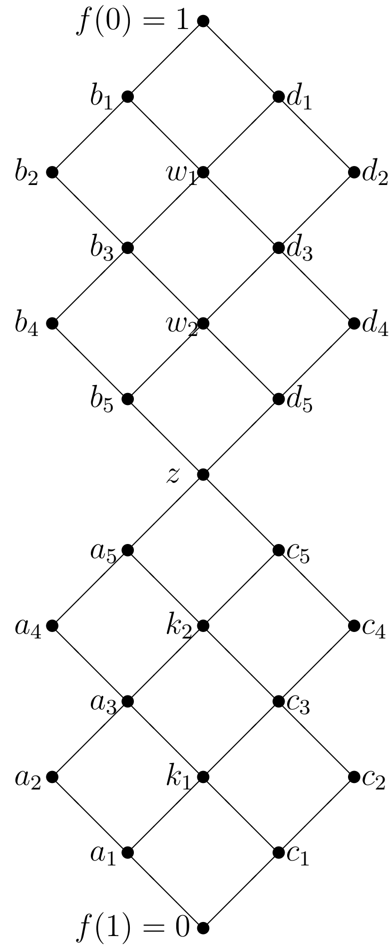
Não tendo sido possível caracterizar, no caso geral, as congruências principais cuja restrição a $L_{1,m}$ é uma congruência principal em $\mathcal{L}_{1,m}$, estabelecemos no resultado seguinte alguns casos particulares para os quais tal se verifica.

Proposição 1.20 *Sejam* $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$ *e* $a, b \in L$ *tais que* $a \leq b$*. Se existe* $k \in L_{1,0}$ *tal que* $a \leq k \leq b$*, então* $\theta(a, b) = \theta(\widetilde{a}_1, \widetilde{b}_n)$ *e, portanto,* $\theta(a, b)|_{L_{1,m}} = \theta_{L_{1,m}}(\widetilde{a}_1, \widetilde{b}_n)$*.*

Demonstração: Dado que $a \leq k \leq b$ temos $\theta(a, b) = \theta(a, k) \vee \theta(k, b)$; da Proposição 1.11 vem então que $\theta(a, b) = \bigvee_{s=1}^{n} \theta(\widetilde{a}_s, \widetilde{k}_s) \vee \bigvee_{t=1}^{n} \theta(\widetilde{k}_t, \widetilde{b}_t)$. Adicionalmente, e uma vez que $k \in L_{1,0}$, sabemos que $\widetilde{k}_j = k$, para todo $j \in \{1, ..., n\}$, donde resulta que $\theta(a, b) = \bigvee_{s=1}^{n} \theta(\widetilde{a}_s, k) \vee \bigvee_{t=1}^{n} \theta(k, \widetilde{b}_t)$. Por fim, e tendo em conta que $\widetilde{a}_j \leq \widetilde{a}_{j+1}$ e $\widetilde{b}_j \leq \widetilde{b}_{j+1}$, para todo $j \in \{1, ..., n-1\}$, e $\widetilde{a}_j \leq k \leq \widetilde{b}_j$, para todo $j \in \{1, ..., n\}$, concluimos que $\bigvee_{s=1}^{n} \theta(\widetilde{a}_s, k) = \theta(\widetilde{a}_1, k)$ e $\bigvee_{t=1}^{n} \theta(k, \widetilde{b}_t) = \theta(k, \widetilde{b}_n)$, e assim $\theta(a, b) = \theta(\widetilde{a}_1, k) \vee \theta(k, \widetilde{b}_n) = \theta(\widetilde{a}_1, \widetilde{b}_n)$. ■

A condição referida nesta proposição, embora seja suficiente, não é necessária para termos $\theta(a,b)|_{L_{1,m}} = \theta_{L_{1,m}}(c,d)$, com $c,d \in L_{1,m}$. De facto, como podemos ver no próximo exemplo , resulta da Proposição 1.11 que $\theta(a_3,a_4) = \theta(k_2,z)$, com $k_2, z \in L_{1,0}$ e, no entanto, não existe $x \in L_{1,0}$ tal que $a_3 \leq x \leq a_4$.

Exemplo 1.21 Consideremos a álgebra $\mathcal{L} = (L,f) \in \mathbf{K}_{2,0}$:



$k_i = f(w_i), w_i = f(k_i), a_i = f(d_i)$
$b_i = f(a_i), c_i = f(b_i), d_i = f(c_i), z = f(z)$

Como já haviamos referido, esta álgebra serve também para mostrar que, dada uma álgebra $\mathcal{L} \in \mathbf{K}_{n,m}$ e dados $a,b \in L$ tais que $a \leq b$, nem sempre

$\theta(a,b)|_{L_{1,m}}$ é uma congruência principal em $\mathcal{L}_{1,m}$. De facto, temos $L_{1,0} = \{0, k_1, k_2, z, w_2, w_1, 1\}$ e, recorrendo ao Teorema 1.2, verifica-se que $\theta(a_2, a_4) \neq \theta(s,t)$ para quaisquer $s, t \in L_{1,0}$. Logo, pela Proposição 1.19, $\theta(a_2, a_4)|_{L_{1,0}} \neq \theta_{L_{1,0}}(s,t)$, para quaisquer $s, t \in L_{1,0}$.

Sejam $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{K}_{n,m}$ e $a, b \in L$. Relacionadas com o estudo aqui feito, surgiram naturalmente mais algumas questões, a estudar num futuro próximo:

1. Sendo $\theta(a,b)$ complementada, quando é que $\theta(\widetilde{a}_s, \widetilde{b}_s)$ é complementada, para todo $s \in \{1, ..., n\}$?
2. Será possível caracterizar $\theta(a,b)$ de forma a que $\theta(a,b)|_{L_{1,m}}$ seja uma congruência principal em $\mathcal{L}_{1,m}$?

1.2 Congruências em álgebras-K$_{n,m}$ duplas

Tal como já referimos no início do capítulo, o estudo aqui desenvolvido é análogo ao que foi feito na primeira secção, mas neste caso é relativo a congruências definidas numa álgebra-K$_{n,m}$ dupla $\mathcal{L} = (L, f, g)$. Para os resultados que vamos obter é essencial a relação existente entre as operações f e g e, por tal motivo, chamamos a atenção para o resultado estabelecido na Proposição 0.18.

À semelhança do que foi feito na secção anterior, começamos também por apresentar alguma notação.

Dada uma álgebra-K$_{n,m}$ dupla $\mathcal{L} = (L, f, g)$, denotamos por:

- $f^m(\mathcal{L})$ a subálgebra $(f^m(L), f, g)$ de $\mathcal{L}$;
- (L, f), (L, g) as álgebras-K$_{n,m}$ que são reduto de $\mathcal{L}$;
- $\mathcal{L}^f_{p,q} = (L^f_{p,q}, f)$ e $\mathcal{L}^g_{p,q} = (L^g_{p,q}, g)$ as maiores subálgebras, respectivamente, de (L, f) e de (L, g) que pertencem a $\mathbf{K}_{p,q}$.

Fazemos referência aos seguintes reticulados de congruências: $\mathrm{Con}_R(\mathcal{L})$ do reticulado distributivo L, $\mathrm{Con}_f(\mathcal{L})$ da álgebra (L, f), $\mathrm{Con}_g(\mathcal{L})$ da álgebra (L, g) e $\mathrm{Con}(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$. Aos elementos de $\mathrm{Con}(\mathcal{L})$ chamamos *congruências duplas*.

Dados elementos $a, b \in L$, usamos a notação $\theta_R(a, b), \theta_f(a, b), \theta_g(a, b), \theta(a, b)$ para indicar o menor elemento, respectivamente, de $\mathrm{Con}_R(\mathcal{L})$, $\mathrm{Con}_f(\mathcal{L})$, $\mathrm{Con}_g(\mathcal{L})$, $\mathrm{Con}(\mathcal{L})$ que identifica a e b.

Dados $a, b \in f^m(L)$, usamos a notação $\theta_{f,f^m(L)}(a, b), \theta_{g,f^m(L)}(a, b)$ para indicar o menor elemento, respectivamente, de $\mathrm{Con}_f(f^m(\mathcal{L}))$, $\mathrm{Con}_g(f^m(\mathcal{L}))$ que identifica a e b. Note-se que $(f^m(L), f)$, $(f^m(L), g)$ são, respectivamente, subálgebras de (L, f) e de (L, g).

Observação: Seja $\mathcal{L} = (L, f, g)$ uma álgebra-$K_{n,m}$ dupla. Dadas congruências $\theta_f \in \mathrm{Con}_f(\mathcal{L})$ e $\theta_g \in \mathrm{Con}_g(\mathcal{L})$, tem-se que θ_f e θ_g são congruências do reticulado reduto de $\mathcal{L}$ e podemos então calcular o supremo e o ínfimo de θ_f e de θ_g no reticulado $\mathrm{Con}_R(\mathcal{L})$. Ao longo desta secção, sempre que nos referimos ao supremo (resp. ínfimo) de uma congruência $\theta_f \in \mathrm{Con}_f(\mathcal{L})$ e de uma congruência $\theta_g \in \mathrm{Con}_g(\mathcal{L})$ estamos a falar do supremo (resp. ínfimo) de θ_f e de θ_g em $\mathrm{Con}_R(\mathcal{L})$.

Note-se que para estudar congruências principais em álgebras-$K_{n,m}$ duplas é também suficiente analisar $\theta(a, b)$ para $a \leq b$.

Na secção 1.1 já havíamos visto que uma congruência principal definida numa álgebra-$K_{n,m}$ $\mathcal{L}'$ pode ser descrita como supremo de congruências principais do reticulado reduto de $\mathcal{L}'$ (Proposição 1.1). Dados uma álgebra $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DK}_{n,m}$ e $a, b \in L$, com $a \leq b$, M. Sequeira obtém um resultado análogo e prova que toda a congruência principal $\theta(a,b) \in \mathrm{Con}(\mathcal{L})$ pode ser descrita da seguinte forma:

Teorema 1.22 [21] *Sejam $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DK}_{n,m}$ e $a, b \in L$ tais que $a \leq b$. Então,*

$$\theta(a,b) = \theta_R(a,b) \vee \bigvee_{i=1}^{2n+m-1} \theta_R\left(f^i(a), f^i(b)\right) \vee \bigvee_{j=1}^{2n+m-1} \theta_R\left(g^j(a), g^j(b)\right). \blacksquare$$

Se $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DK}_{n,m}$, então $(L, f), (L, g)$ são álgebras-K$_{n,m}$. Logo, recorrendo ao Teorema 1.22 e à Proposição 1.1, verificamos que é possível relacionar (no reticulado $\mathrm{Con}_R(\mathcal{L})$) a congruência $\theta(a,b)$ com congruências principais definidas nas álgebras-K$_{n,m}$ que são reduto de $\mathcal{L}$.

Proposição 1.23 *Sejam $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DK}_{n,m}$ e $a, b \in L$ tais que $a \leq b$. Então,*

$$\theta(a,b) = \theta_f(a,b) \vee \theta_g(a,b). \blacksquare$$

Atendendo à relação estabelecida nesta proposição, para estudar $\theta(a,b)$ vamos então usar alguns dos resultados obtidos na primeira secção, e vamos também recorrer a outros resultados que lhes são análogos, mas que envolvem a relação existente entre f e g.

Proposição 1.24 *Sejam $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DK}_{n,m}$, $i, k \in \mathbb{N}$, e $a, b \in L$ tais que $a \leq b$. Então, dados $x, y \in L$*

$$(x,y) \in \theta_R\left(g^i(a), g^i(b)\right) \Rightarrow \left(f^k(x), f^k(y)\right) \in \theta_R\left(g^t(a), g^t(b)\right),$$

com $t \in \{m, ..., 2n+m-1\}$.

Demonstração: Se $(x,y) \in \theta_R\left(g^i(a), g^i(b)\right)$, para algum $i \in \mathbb{N}$, então $\left(f^k(x), f^k(y)\right) \in \theta_R\left(f^k(g^i(a)), f^k(g^i(b))\right)$, e da Proposição 0.18 resulta que $\left(f^k(x), f^k(y)\right) \in \theta_R\left(g^t(a)), g^t(b)\right)$, com $t \in \{m, ..., 2n+m-1\}$. $\blacksquare$

Proposição 1.25 *Sejam $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DK}_{n,m}$ e $a, b \in L$ tais que $a \leq b$. Então*

$$\theta_g(a,b)|_{f^m(L)} = \bigvee_{k=0}^{2n+m-1} \theta_R\left(g^k(a), g^k(b)\right)|_{f^m(L)}.$$

Demonstração: Dado que (L, g) é uma álgebra-$\mathrm{K}_{n,m}$, $\theta_g(a,b)$ é um elemento de $\mathrm{Con}_g(\mathcal{L})$ e $f^m(L) = g^m(L)$ a prova é imediata a partir da Proposição 1.6. ■

Proposição 1.26 *Sejam $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DK}_{n,m}$ e $a, b \in L$, com $a \leq b$. Então,*

$$\begin{aligned}\theta(a,b)|_{f^m(L)} = \theta_R(a,b)|_{f^m(L)} &\vee \bigvee_{i=1}^{2n+m-1} \theta_R\left(f^i(a), f^i(b)\right)|_{f^m(L)} \\ &\vee \bigvee_{j=1}^{2n+m-1} \theta_R\left(g^j(a), g^j(b)\right)|_{f^m(L)}.\end{aligned}$$

Demonstração: Pela Proposição 1.22 temos

$$\theta(a,b) = \theta_R(a,b) \vee \bigvee_{i=1}^{2n+m-1} \theta_R\left(f^i(a), f^i(b)\right) \vee \bigvee_{j=1}^{2n+m-1} \theta_R\left(g^j(a), g^j(b)\right).$$

e é óbvio que

$$\begin{aligned}&\theta_R(a,b)|_{f^m(L)} \vee \bigvee_{i=1}^{2n+m-1} \theta_R\left(f^i(a), f^i(b)\right)|_{f^m(L)} \vee \bigvee_{j=1}^{2n+m-1} \theta_R\left(g^j(a), g^j(b)\right)|_{f^m(L)} \\ &\leq \left(\theta_R(a,b) \vee \bigvee_{i=1}^{2n+m-1} \theta_R\left(f^i(a), f^i(b)\right) \vee \bigvee_{j=1}^{2n+m-1} \theta_R\left(g^j(a), g^j(b)\right)\right)|_{f^m(L)}.\end{aligned}$$

Relativamente à desigualdade contrária, também não é díficil concluirmos que é válida. De facto, se x, y são elementos de L tais que

$$(x,y) \in \left(\theta_R(a,b) \vee \bigvee_{i=1}^{2n+m-1} \theta_R\left(f^i(a), f^i(b)\right) \vee \bigvee_{j=1}^{2n+m-1} \theta_R\left(g^j(a), g^j(b)\right)\right)|_{f^m(L)},$$

então x, $y \in f^m(L)$ e existem $s \in \mathbb{N}$ e $x_0 = x$, x_1, ..., $x_s = y \in L$ tais que, para cada $v \in \{0, ..., s-1\}$,

- $(x_v, x_{v+1}) \in \theta_R\left(f^{i_v}(a), f^{i_v}(b)\right)$, para algum $i_v \in \{0, ..., 2n+m-1\}$

  ou

- $(x_v, x_{v+1}) \in \theta_R\left(g^{j_v}(a), g^{j_v}(b)\right)$, para algum $j_v \in \{1, ..., 2n+m-1\}$.

Consideremos $q = \lceil m/2n \rceil$. Assim, se $(x_v, x_{v+1}) \in \theta_R(f^{i_v}(a), f^{i_v}(b))$ temos pela Proposição 1.5 que $(f^{q2n}(x_v), f^{q2n}(x_{v+1})) \in \theta_R(f^{t_v}(a), f^{t_v}(b))$, para algum $t_v \in \{m, ..., 2n+m-1\}$. Dado que $f^{q2n}(x_v)$ e $f^{q2n}(x_{v+1})$ são elementos de $f^m(L)$, então $(f^{q2n}(x_v), f^{q2n}(x_{v+1})) \in \theta_R(f^{t_v}(a), f^{t_v}(b))|_{f^m(L)}$. No caso em que $(x_v,\ x_{v+1}) \in \theta_R(g^{j_v}(a), g^{j_v}(b))$ também é possível concluir, agora usando a Proposição 1.24, que $(f^{q2n}(x_v), f^{q2n}(x_{v+1})) \in \theta_R(g^{t_v}(a), g^{t_v}(b))|_{f^m(L)}$, para algum $t_v \in \{m, ..., 2n+m-1\}$. Logo,

$$(f^{q2n}(x), f^{q2n}(y)) \in \Bigg[\theta_R(a,b)|_{f^m(L)} \vee \bigvee_{i=1}^{2n+m-1} \theta_R(f^i(a), f^i(b))|_{f^m(L)} \vee \bigvee_{j=1}^{2n+m-1} \theta_R(g^j(a), g^j(b))|_{f^m(L)}\Bigg]$$

onde $f^{q2n}(x) = x$ e $f^{q2n}(y) = y$ pois $x, y \in f^m(L)$. Consequentemente,

$$\theta(a,b)|_{f^m(L)} \leq \Bigg[\theta_R(a,b)|_{f^m(L)} \vee \bigvee_{i=1}^{2n+m-1} \theta_R(f^i(a), f^i(b))|_{f^m(L)} \vee \bigvee_{j=1}^{2n+m-1} \theta_R(g^j(a), g^j(b))|_{f^m(L)}\Bigg]. \blacksquare$$

De forma análoga ao que aconteceu com álgebras-K$_{n,m}$ estabelece-se que:

Proposição 1.27 *Sejam* $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{O}_2$, $\theta \in \mathrm{Con}(\mathcal{L})$ *e* $m \in \mathbb{N}$. *Se* $\theta \in \mathrm{C}(\mathrm{Con}(\mathcal{L}))$, *então* $\theta|_{f^m(L)} \in \mathrm{C}(\mathrm{Con}(f^m(\mathcal{L})))$. *De facto, sendo* θ' *o complemento de* θ *em* $\mathrm{Con}(\mathcal{L})$, *então* $\theta'|_{f^m(L)}$ *é o complemento de* $\theta|_{f^m(L)}$ *em* $\mathrm{Con}(f^m(\mathcal{L}))$.

Demonstração: Sendo $\theta \in \mathrm{C}(\mathrm{Con}(\mathcal{L}))$ e $\theta' \in \mathrm{Con}(\mathcal{L})$ o seu complemento, então $\theta|_{f^m(L)}, \theta'|_{f^m(L)} \in \mathrm{Con}(f^m(\mathcal{L}))$. Como $\theta, \theta' \in \mathrm{Con}_f(\mathcal{L})$, θ' é também o complemento de θ em $\mathrm{Con}_f(\mathcal{L})$. Pela Proposição 1.8 resulta que $\theta'|_{f^m(L)}$ é o complemento de $\theta|_{f^m(L)}$ em $\mathrm{Con}_f(f^m(\mathcal{L}))$ e, portanto, em $\mathrm{Con}(f^m(\mathcal{L}))$. $\blacksquare$

Proposição 1.28 *Sejam* $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DK}_{n,m}$ *e* $a, b \in L$ *tais que* $a \leq b$ *e* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $k \geq m$. *Então*

i) $\theta\left(f^k(a), f^k(b)\right) = \theta_f\left(f^k(a), f^k(b)\right)$,

ii) $\theta\left(g^k(a), g^k(b)\right) = \theta_f\left(g^k(a), g^k(b)\right)$,

iii) $\theta\left(g^k(a), g^k(b)\right) = \theta_g\left(g^k(a), g^k(b)\right)$,

iv) $\theta\left(f^k(a), f^k(b)\right) = \theta_g\left(f^k(a), f^k(b)\right)$.

Demonstração: i) Pela Proposição 1.22 sabe-se que

$$\begin{aligned}\theta(f^k(a), f^k(b)) = \theta_R\left(f^k(a), f^k(b)\right) &\vee \bigvee_{i=1}^{2n+m-1} \theta_R\left(f^i(f^k(a)), f^i(f^k(b))\right)\\ &\vee \bigvee_{j=1}^{2n+m-1} \theta_R\left(g^j(f^k(a)), g^j(f^k(b))\right).\end{aligned}$$

Dado que $k = m + r$, para algum $r \in \mathbb{N}_0$, resulta da Proposição 0.18 que, para cada $x \in L$ e cada $j \in \{1, ..., 2n + m - 1\}$,

$$\begin{aligned}g^j(f^k(x)) &= g^j(f^m(f^r(x)) = f^{q_{j,m}}(f^r(x))\\ &= f^{q_{j,m}-m}(f^m(f^r(x))) = f^{q_{j,m}-m}(f^k(x)),\end{aligned}$$

com $q_{j,m} - m \in \{0, ..., 2n - 1\}$. Deste facto e da Proposicão 1.1, temos então

$$\begin{aligned}\theta(f^k(a), f^k(b)) &= \theta_R(f^k(a), f^k(b)) \vee \bigvee_{i=1}^{2n+m-1} \theta_R(f^i(f^k(a)), f^i(f^k(b)))\\ &= \theta_f(f^k(a), f^k(b)).\end{aligned}$$

O caso ii) resulta de i) bastando ter em atenção que $f^m(L) = g^m(L)$ e, portanto, $g^k(a) = f^m(x)$ e $g^k(b) = f^m(y)$, para alguns $x, y \in L$. A prova de iii) é análoga à prova feita em i) e o caso iv) resulta de iii). ■

De forma semellhante ao que se estabelece na Proposição 1.11, também é possível descrever cada congruência principal definida numa álgebra-$K_{n,m}$ dupla como supremo de congruências principais geradas por elementos de $L^f_{1,m}$

e de $L^g_{1,m}$ (referimo-nos ao supremo calculado no reticulado de congruências do reticulado reduto de $\mathcal{L}$) .

Seja $\mathcal{L} = (L, f, g)$ uma álgebra-K$_{n,m}$ dupla. Então, para $h \in \{f, g\}$, tem-se que $(L, h) \in \mathbf{K}_{n,m}$. Para $n \in \mathbb{N}$, $T = \{0, 1, ..., n-1\}$ e $s \in \{1, ..., n\}$ seja $T_s = \{J : J \subseteq T, |J| = s\}$. Para cada $z \in L$ e cada $s \in \{1, ..., n\}$, considerem-se os elementos

$$\widetilde{z}_{h,s} = \bigwedge_{J \in T_s} (\bigvee_{j \in J} h^{2j}(z)) \ ,$$

que, em (L, h), são os elementos referidos na secção anterior. Como já tinhamos observado, sabemos que $\widetilde{z}_{h,s} \in L^h_{1,m}$ e que $\widetilde{z}_{h,s} \leq \widetilde{z}_{h,s+1}$. Recorrendo a estes elementos, e tendo em conta a observação feita na página 44, resulta das proposições 1.11 e 1.23 a seguinte proposição

Proposição 1.29 *Sejam $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DK}_{n,m}$ e $a, b \in L$ tais que $a \leq b$. Então*

$$\theta(a, b) = \bigvee_{s=1}^{n} \theta_f(\widetilde{a}_{f,s}, \widetilde{b}_{f,s}) \vee \bigvee_{t=1}^{n} \theta_g(\widetilde{a}_{g,t}, \widetilde{b}_{g,t}). \ \blacksquare$$

Recorrendo novamente à Proposição 1.11 também se consegue provar que:

Proposição 1.30 *Sejam $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DK}_{n,m}$ e $a, b \in L$ tais que $a \leq b$. Então*

$$\theta(a, b)|_{f^m(L)} = \bigvee_{s=1}^{n} \theta_f(\widetilde{a}_{f,s}, \widetilde{b}_{f,s})|_{f^m(L)} \vee \bigvee_{t=1}^{n} \theta_g(\widetilde{a}_{g,t}, \widetilde{b}_{g,t})|_{f^m(L)}.$$

Demonstração: Pela Proposição 1.26 temos

$$\begin{aligned}\theta(a, b)|_{f^m(L)} = \theta_R(a, b)|_{f^m(L)} &\vee \bigvee_{i=1}^{2n+m-1} \theta_R(f^i(a), f^i(b))|_{f^m(L)} \\ &\vee \bigvee_{j=1}^{2n+m-1} \theta_R(g^j(a), g^j(b))|_{f^m(L)}\end{aligned}$$

e das proposições 1.6 e 1.25 resulta que $\theta(a, b)|_{f^m(L)} = \theta_f(a, b)|_{f^m(L)} \vee \theta_g(a, b)|_{f^m(L)}$.

Então, recorrendo à Proposição 1.11 vem

$$\theta(a,b)|_{f^m(L)} = \left(\bigvee_{s=1}^{n} \theta_f(\widetilde{a}_{f,s},\widetilde{b}_{f,s})\right)|_{f^m(L)} \vee \left(\bigvee_{t=1}^{n} \theta_g(\widetilde{a}_{g,t},\widetilde{b}_{g,t})\right)|_{f^m(L)}.$$

Finalmente, da Proposição 1.7 e atendendo a que $f^m(L) = g^m(L)$, temos que:

$$\theta(a,b)|_{f^m(L)} = \bigvee_{s=1}^{n} \theta_f(\widetilde{a}_{f,s},\widetilde{b}_{f,s})|_{f^m(L)} \vee \bigvee_{t=1}^{n} \theta_g(\widetilde{a}_{g,t},\widetilde{b}_{g,t})|_{f^m(L)}. \blacksquare$$

Observação: 1) Para simplificação de notação, os elementos $f^k(\widetilde{z}_{f,s})$ e $g^k(\widetilde{z}_{g,s})$ (com $k \in \mathbb{N}$) serão denotados, respectivamente, por $f^k(\widetilde{z}_s)$ e $g^k(\widetilde{z}_s)$. Não existe risco de confusão uma vez que nunca falaremos dos elementos $f^k(\widetilde{z}_{g,s})$ e $g^k(\widetilde{z}_{f,s})$.

2) Sejam $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DK}_{n,m}$, $h \in \{f, g\}$ e $r \in \mathbb{N}_0$. Seja (k, l) um m-par. Então, para cada $x \in L^h_{1,m}$, é conveniente ter em atenção os seguintes factos:

$$\begin{cases} f^r(h^k(x)) = h^l(x), \quad f^r(h^l(x)) = h^k(x) & \text{se } r \text{ é ímpar,} \\ f^r(h^k(x)) = h^k(x), \quad f^r(h^l(x)) = h^l(x) & \text{se } r \text{ é par,} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g^r(h^k(x)) = h^l(x), \quad g^r(h^l(x)) = h^k(x) & \text{se } r \text{ é ímpar,} \\ g^r(h^k(x)) = h^k(x), \quad g^r(h^l(x)) = h^l(x) & \text{se } r \text{ é par.} \end{cases}$$

No texto que se segue vamos considerar que $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DK}_{n,m}$ e que a, b são elementos de L tais que $a \leq b$ e $\theta(a, b)$ é complementada. Dado que $\theta(a, b)$ pode ser descrita como supremo de congruências principais das álgebras-K$_{n,m}$ que são reduto de $\mathcal{L}$, é de esperar que a descrição do complemento de $\theta(a, b)$ também esteja relacionada com o resultado estabelecido no Lema 1.3. De facto, se considerarmos $q = \lceil m/2n \rceil$ tem-se que $f^{q2n}(\widetilde{a}_s)$, $f^{q2n}(\widetilde{b}_s) \in f^m(L)$ e que $g^{q2n}(\widetilde{a}_s)$, $g^{q2n}(\widetilde{b}_s) \in g^m(L)$.

Recorrendo às proposições 1.30, 1.4 e 0.2, e tendo em conta que $f^m(L) = g^m(L)$, vem então:

$$\begin{aligned}\theta(a,b)|_{f^m(L)} &= \bigvee_{s=1}^{n} \theta_f(\widetilde{a}_{f,s},\widetilde{b}_{f,s})|_{f^m(L)} \vee \bigvee_{t=1}^{n} \theta_g(\widetilde{a}_{g,t},\widetilde{b}_{g,t})|_{f^m(L)} \\ &= \bigvee_{s=1}^{n} \theta_f\left(f^{q2n}(\widetilde{a}_s), f^{q2n}(\widetilde{b}_s)\right)|_{f^m(L)} \vee \bigvee_{t=1}^{n} \theta_g\left(g^{q2n}(\widetilde{a}_t), g^{q2n}(\widetilde{b}_t)\right)|_{f^m(L)} \\ &= \bigvee_{s=1}^{n} \theta_{f,f^m(L)}\left(f^{q2n}(\widetilde{a}_s), f^{q2n}(\widetilde{b}_s)\right) \vee \bigvee_{t=1}^{n} \theta_{g,f^m(L)}\left(g^{q2n}(\widetilde{a}_t), g^{q2n}(\widetilde{b}_t)\right).\end{aligned}$$

Dado que $\widetilde{a}_{f,s}$, $\widetilde{b}_{f,s} \in L^f_{1,m}$ e $\widetilde{a}_{g,t}$, $\widetilde{b}_{g,t} \in L^g_{1,m}$ e $q2n \geq m$, tem-se que $f^{q2n}(\widetilde{a}_s)$, $f^{q2n}(\widetilde{b}_s) \in L^f_{1,0}$, e $g^{q2n}(\widetilde{a}_t)$, $g^{q2n}(\widetilde{b}_t) \in L^g_{1,0}$. Então, pelo Lema 1.3, as congruências $\theta_{f,f^m(L)}\left(f^{q2n}(\widetilde{a}_s), f^{q2n}(\widetilde{b}_s)\right)$ e $\theta_{g,f^m(L)}\left(g^{q2n}(\widetilde{a}_t), g^{q2n}(\widetilde{b}_t)\right)$ são complementadas, respectivamente, nos reticulados $\mathrm{Con}_f(f^m(\mathcal{L}))$ e $\mathrm{Con}_g(f^m(\mathcal{L}))$. Seja (k,l) um m-par. Tal como verificámos na secção anterior, resulta das proposições 0.2 e 1.7 e do Lema 1.3 que

$$\begin{aligned}&\theta_{f,f^m(L)}\left(f^{2nq}(\widetilde{a}_s), f^{2nq}(\widetilde{b}_s)\right)' = \varphi_f(\widetilde{a}_{f,s},\widetilde{b}_{f,s})|_{f^m(L)} \text{ e} \\ &\theta_{g,f^m(L)}\left(g^{q2n}(\widetilde{a}_t), g^{q2n}(\widetilde{b}_t)\right)' = \varphi_g(\widetilde{a}_{g,t},\widetilde{b}_{g,t})|_{f^m(L)}\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\varphi_f(\widetilde{a}_{f,s},\widetilde{b}_{f,s}) = \theta_f\left(f^k(\widetilde{b}_s) \vee f^l(\widetilde{a}_s), 1\right) &\vee \theta_f\left(f^k(\widetilde{b}_s), f^k(\widetilde{b}_s) \vee f^l(\widetilde{b}_s)\right) \\ &\vee \theta_f\left(f^l(\widetilde{a}_s), f^l(\widetilde{a}_s) \vee f^k(\widetilde{a}_s)\right), \\ \varphi_g(\widetilde{a}_{g,s},\widetilde{b}_{g,s}) = \theta_g\left(g^k(\widetilde{b}_s) \vee g^l(\widetilde{a}_s), 1\right) &\vee \theta_g\left(g^k(\widetilde{b}_s), g^k(\widetilde{b}_s) \vee g^l(\widetilde{b}_s)\right) \\ &\vee \theta_g\left(g^l(\widetilde{a}_s), g^l(\widetilde{a}_s) \vee g^k(\widetilde{a}_s)\right).\end{aligned}$$

Da Proposição 1.28 concluimos que

$$\begin{array}{ll}\theta_{f,f^m(L)}\left(f^{2nq}(\widetilde{a}_s), f^{2nq}(\widetilde{b}_s)\right), & \theta_{g,f^m(L)}\left(g^{q2n}(\widetilde{a}_t), g^{q2n}(\widetilde{b}_t)\right) \\ \varphi_f(\widetilde{a}_{f,s},\widetilde{b}_{f,s})|_{f^m(L)}, & \varphi_g(\widetilde{a}_{g,s},\widetilde{b}_{g,s})|_{f^m(L)}\end{array}$$

são congruências de $\mathrm{Con}(f^m(\mathcal{L}))$.

Logo, como $\theta_{f,f^m(L)}\left(f^{2nq}(\widetilde{a}_s), f^{2nq}(\widetilde{b}_s)\right)$ e $\theta_{g,f^m(L)}\left(g^{q2n}(\widetilde{a}_t), g^{q2n}(\widetilde{b}_t)\right)$ são complementadas, respectivamente, em $\mathrm{Con}_f(f^m(\mathcal{L}))$ e $\mathrm{Con}_g(f^m(\mathcal{L}))$, concluimos que estas mesmas congruências também são complementadas em $\mathrm{Con}(f^m(\mathcal{L}))$. Então, e uma vez que

$$\theta(a,b)|_{f^m(L)} = \bigvee_{s=1}^{n} \theta_{f,f^m(L)}\left(f^{q2n}(\widetilde{a}_s), f^{q2n}(\widetilde{b}_s)\right) \vee \bigvee_{t=1}^{n} \theta_{g,f^m(L)}\left(g^{q2n}(\widetilde{a}_t), g^{q2n}(\widetilde{b}_t)\right)$$

é simples determinar o complemento de $\theta(a,b)|_{f^m(L)}$ em $\mathrm{Con}(f^m(\mathcal{L}))$:

$$\begin{aligned}(\theta(a,b)|_{f^m(L)})' &= \bigwedge_{s=1}^{n} \theta_{f,f^m(L)}\left(f^{2nq}(\widetilde{a}_s), f^{2nq}(\widetilde{b}_s)\right)' \wedge \bigwedge_{t=1}^{n} \theta_{g,f^m(L)}\left(g^{q2n}(\widetilde{a}_t), g^{q2n}(\widetilde{b}_t)\right)' \\ &= \left(\bigwedge_{s=1}^{n} \varphi_f(\widetilde{a}_{f,s}, \widetilde{b}_{f,s})|_{f^m(L)}\right) \wedge \left(\bigwedge_{t=1}^{n} \varphi_g(\widetilde{a}_{g,t}, \widetilde{b}_{g,t})|_{f^m(L)}\right) \\ &= \left(\bigwedge_{s=1}^{n} \varphi_f(\widetilde{a}_{f,s}, \widetilde{b}_{f,s}) \wedge \bigwedge_{t=1}^{n} \varphi_g(\widetilde{a}_{g,t}, \widetilde{b}_{g,t})\right)|_{f^m(L)}.\end{aligned}$$

A congruência $\bigwedge_{s=1}^{n} \varphi_f(\widetilde{a}_{f,s}, \widetilde{b}_{f,s}) \wedge \bigwedge_{t=1}^{n} \varphi_g(\widetilde{a}_{g,t}, \widetilde{b}_{g,t})$ é um elemento de $\mathrm{Con}(\mathcal{L})$ que vamos representar por ϕ. Temos então $(\theta(a,b)|_{f^m(L)})' = \phi|_{f^m(L)}$. Pela Proposição 1.27, e atendendo a que $\theta(a,b)$ é complementada, também sabemos que $(\theta(a,b)|_{f^m(L)})' = \theta(a,b)'|_{f^m(L)}$. Logo $\theta(a,b)'|_{f^m(L)} = \phi|_{f^m(L)}$.

De forma análoga ao que fizemos para álgebras-K$_{n,m}$, vamos provar que $\theta(a,b)' = \phi$ e, para tal, começamos por obter a descrição de ϕ como supremo de congruências principais.

Proposição 1.31 *Sejam $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DK}_{n,m}$ e $a, b \in L$, tais que $a \le b$. Definam-se $\widetilde{b}_{f,0} = \widetilde{b}_{g,0} = 0$ e $\widetilde{a}_{f,n+1} = \widetilde{a}_{g,n+1} = 1$. Seja (k,l) um m-par e, para $u, v \in \{1, ..., n\}$, sejam*

$$\begin{aligned}\varphi_f(\widetilde{a}_{f,u}, \widetilde{b}_{f,u}) = \theta_f\left(f^k(\widetilde{b}_u) \vee f^l(\widetilde{a}_u), 1\right) &\vee \theta_f\left(f^k(\widetilde{b}_u), f^k(\widetilde{b}_u) \vee f^l(\widetilde{b}_u)\right) \\ &\vee \theta_f\left(f^l(\widetilde{a}_u), f^l(\widetilde{a}_u) \vee f^k(\widetilde{a}_u)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_g(\widetilde{a}_{g,v},\widetilde{b}_{g,v}) = \theta_g\left(g^k(\widetilde{b}_v)\vee g^l(\widetilde{a}_v),1\right) \vee\ \theta_g\left(g^k(\widetilde{b}_v),g^k(\widetilde{b}_v)\vee g^l(\widetilde{b}_v)\right)\\ \vee\ \theta_g\left(g^l(\widetilde{a}_v),g^l(\widetilde{a}_v)\vee g^k(\widetilde{a}_v)\right)\quad e\end{aligned}$$

$$\phi = \bigwedge_{u=1}^{n}\varphi_f(\widetilde{a}_{f,u},\widetilde{b}_{f,u})\ \wedge\ \bigwedge_{v=1}^{n}\varphi_g(\widetilde{a}_{g,v},\widetilde{b}_{g,v}).$$

Então,

$$\phi = \bigvee_{i,p=1}^{n+1}\ \bigvee_{j=i-1}^{n}\ \bigvee_{q=p-1}^{n}\left(\theta_f(x_{i,j,p,q},y_{i,j,p,q})\vee\theta_g(w_{i,j,p,q},z_{i,j,p,q})\right)$$

onde

$$\begin{aligned}x_{i,j,p,q} &= f^l(\widetilde{a}_i)\vee f^k(\widetilde{b}_j)\vee g^l(\widetilde{a}_p)\vee g^k(\widetilde{b}_q)\\ y_{i,j,p,q} &= x_{i,j,p,q}\vee\left(f^l(\widetilde{b}_{i-1})\wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1})\wedge g^l(\widetilde{b}_{p-1})\wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1})\right),\\ w_{i,j,p,q} &= f^l(\widetilde{a}_i)\vee f^k(\widetilde{b}_j)\vee\left(g^k(\widetilde{a}_p)\wedge g^l(\widetilde{b}_q)\wedge\left[g^k(\widetilde{b}_{p-1})\vee g^l(\widetilde{a}_{q+1})\right]\right),\\ z_{i,j,p,q} &= w_{i,j,p,q}\vee\left(f^l(\widetilde{b}_{i-1})\wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1})\wedge g^k(\widetilde{a}_p)\wedge g^l(\widetilde{b}_q)\right).\end{aligned}$$

Demonstração: O resultado enunciado demonstra-se recorrendo às proposições 1.1 e 1.12 e aos factos R$_1$) e R$_2$).

Da Proposição 1.12 temos que

$$\bigwedge_{s=1}^{n}\varphi_f(\widetilde{a}_{f,s},\widetilde{b}_{f,s}) = \bigvee_{i=1}^{n+1}\ \bigvee_{j=i-1}^{n}\theta_f\left(f^l(\widetilde{a}_i)\vee f^k(\widetilde{b}_j),f^l(\widetilde{a}_i)\vee f^k(\widetilde{b}_j)\vee\left[f^l(\widetilde{b}_{i-1})\wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1})\right]\right)\text{ e}$$

$$\bigwedge_{t=1}^{n}\varphi_g(\widetilde{a}_{g,t},\widetilde{b}_{g,t}) = \bigvee_{p=1}^{n+1}\ \bigvee_{q=p-1}^{n}\theta_g\left(g^l(\widetilde{a}_p)\vee g^k(\widetilde{b}_q),g^l(\widetilde{a}_p)\vee g^k(\widetilde{b}_q)\vee\left[g^l(\widetilde{b}_{p-1})\wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1})\right]\right).$$

Da Proposição 1.1 e da observação feita na página 50 vem:

$$\begin{aligned}\bigwedge_{s=1}^{n}\varphi_f(\widetilde{a}_{f,s},\widetilde{b}_{f,s}) = \bigvee_{i=1}^{n+1}\bigvee_{j=i-1}^{n}\Big[\theta_R\left(f^l(\widetilde{a}_i)\vee f^k(\widetilde{b}_j),f^l(\widetilde{a}_i)\vee f^k(\widetilde{b}_j)\vee\left[f^l(\widetilde{b}_{i-1})\wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1})\right]\right)\\ \vee\ \theta_R\left(f^k(\widetilde{a}_i)\wedge f^l(\widetilde{b}_j)\wedge\left[f^k(\widetilde{b}_{i-1})\vee f^l(\widetilde{a}_{j+1})\right],f^k(\widetilde{a}_i)\wedge f^l(\widetilde{b}_j)\right)\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bigwedge_{t=1}^{n}\varphi_g(\widetilde{a}_{g,t},\widetilde{b}_{g,t}) = \bigvee_{p=1}^{n+1}\bigvee_{q=p-1}^{n}\Big[\theta_R\left(g^l(\widetilde{a}_p)\vee g^k(\widetilde{b}_q),g^l(\widetilde{a}_p)\vee g^k(\widetilde{b}_q)\vee\left[g^l(\widetilde{b}_{p-1})\wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1})\right]\right)\\ \vee\ \theta_R\left(g^k(\widetilde{a}_p)\wedge g^l(\widetilde{b}_q)\wedge\left[g^k(\widetilde{b}_{q-1})\vee g^l(\widetilde{a}_{q+1})\right],g^k(\widetilde{a}_p)\wedge g^l(\widetilde{b}_q)\right)\Big].\end{aligned}$$

Recorrendo aos resultados R_1) e R_2) temos

$$\phi = \bigvee_{i,p=1}^{n+1} \bigvee_{j=i-1}^{n} \bigvee_{q=p-1}^{n} \left(A_{i,j,p,q} \vee B_{i,j,p,q} \vee C_{i,j,p,q} \vee D_{i,j,p,q}\right),$$

com

$A_{i,j,p,q} = \theta_R(f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee [g^k(\widetilde{a}_p) \wedge g^l(\widetilde{b}_q) \wedge (g^k(\widetilde{b}_{p-1}) \vee g^l(\widetilde{a}_{q+1}))],$

$f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee [g^k(\widetilde{a}_p) \wedge g^l(\widetilde{b}_q) \wedge (g^k(\widetilde{b}_{p-1}) \vee g^l(\widetilde{a}_{q+1}))] \vee [f^l(\widetilde{b}_{i-1}) \wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_p) \wedge g^l(\widetilde{b}_q)]);$

$B_{i,j,p,q} = \theta_R(f^k(\widetilde{a}_i) \wedge f^l(\widetilde{b}_j) \wedge [g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q) \vee (g^l(\widetilde{b}_{p-1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1}))],$

$f^k(\widetilde{a}_i) \wedge f^l(\widetilde{b}_j) \wedge [g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q) \vee (g^l(\widetilde{b}_{p-1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1}))] \wedge [f^k(\widetilde{b}_{i-1}) \vee f^l(\widetilde{a}_{j+1}) \vee g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q)]);$

$C_{i,j,p,q} = \theta_R(f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q),$

$f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q) \vee [f^l(\widetilde{b}_{i-1}) \wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1}) \wedge g^l(\widetilde{b}_{p-1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1})]);$

$D_{i,j,p,q} = \theta_R(f^k(\widetilde{a}_i) \wedge f^l(\widetilde{b}_j) \wedge g^k(\widetilde{a}_p) \wedge g^l(\widetilde{b}_q) \wedge [f^k(\widetilde{b}_{i-1}) \vee f^l(\widetilde{a}_{j+1}) \vee g^k(\widetilde{b}_{p-1}) \vee g^l(\widetilde{a}_{q+1})],$

$f^k(\widetilde{a}_i) \wedge f^l(\widetilde{b}_j) \wedge g^k(\widetilde{a}_p) \wedge g^l(\widetilde{b}_q)).$

Novamente pela Proposição 1.1 e pela observação da página 50,

$$\phi = \bigvee_{i,p=1}^{n+1} \bigvee_{j=i-1}^{n} \bigvee_{q=p-1}^{n} \left[\theta_f(x_{i,j,p,q}, y_{i,j,p,q}) \vee \theta_g(w_{i,j,p,q}, z_{i,j,p,q})\right],$$

onde

$$\begin{aligned}
x_{i,j,p,q} &= f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q),\\
y_{i,j,p,q} &= x_{i,j,p,q} \vee \left(f^l(\widetilde{b}_{i-1}) \wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1}) \wedge g^l(\widetilde{b}_{p-1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1})\right),\\
w_{i,j,p,q} &= f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee \left(g^k(\widetilde{a}_p) \wedge g^l(\widetilde{b}_q) \wedge \left[g^k(\widetilde{b}_{p-1}) \vee g^l(\widetilde{a}_{q+1})\right]\right),\\
z_{i,j,p,q} &= w_{i,j,p,q} \vee \left(f^l(\widetilde{b}_{i-1}) \wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_p) \wedge g^l(\widetilde{b}_q)\right). \blacksquare
\end{aligned}$$

Relativamente ao complemento de uma congruência principal definida numa álgebra-$K_{n,m}$ dupla temos, então, o seguinte teorema:

Teorema 1.32 *Sejam* $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DK}_{n,m}$ *e* $a, b \in L$ *com* $a \leq b$. *Seja* (k, l) *um* m*-par e, para* $s, t \in \{1, ..., n\}$, *sejam*

$$\varphi_f(\widetilde{a}_{f,s}, \widetilde{b}_{f,s}) = \theta_f(f^k(\widetilde{b}_s) \vee f^l(\widetilde{a}_s), 1) \vee \theta_f(f^k(\widetilde{b}_s), f^k(\widetilde{b}_s) \vee f^l(\widetilde{b}_s)) \vee \theta_f(f^l(\widetilde{a}_s), f^l(\widetilde{a}_s) \vee f^k(\widetilde{a}_s)),$$

$$\varphi_g(\widetilde{a}_{g,t}, \widetilde{b}_{g,t}) = \theta_g(g^k(\widetilde{b}_t) \vee g^l(\widetilde{a}_t), 1) \vee \theta_g(g^k(\widetilde{b}_t), g^k(\widetilde{b}_t) \vee g^l(\widetilde{b}_t)) \vee \theta_g(g^l(\widetilde{a}_t), g^l(\widetilde{a}_t) \vee g^k(\widetilde{a}_t))$$

e $\phi = \bigwedge_{s=1}^{n} \varphi_f(\widetilde{a}_{f,s}, \widetilde{b}_{f,s}) \wedge \bigwedge_{t=1}^{n} \varphi_g(\widetilde{a}_{g,t}, \widetilde{b}_{g,t})$.

Então,

(a) $\theta(a, b) \vee \phi = \bigtriangledown$,

(b) se $\theta(a, b)$ *é complementada, então necessariamente* $\theta(a, b)' = \phi$.

Demonstração: Sendo $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DK}_{n,m}$ e $a, b \in L$ tais que $a \leq b$, tem-se, pela Proposição 1.29, que $\theta(a, b) = \bigvee_{s=1}^{n} \theta_f(\widetilde{a}_{f,s}, \widetilde{b}_{f,s}) \vee \bigvee_{t=1}^{n} \theta_g(\widetilde{a}_{g,t}, \widetilde{b}_{g,t})$.

(a) Para cada $s \in \{1, ..., n\}$, $\theta_f(\widetilde{a}_{f,s}, \widetilde{b}_{f,s}) \vee \varphi_f(\widetilde{a}_{f,s}, \widetilde{b}_{f,s}) = \bigtriangledown$ (tal como já tinhamos visto no Teorema 1.13). De igual modo, para cada $t \in \{1, ..., n\}$, $\theta_g(\widetilde{a}_{g,t}, \widetilde{b}_{g,t}) \vee \varphi_g(\widetilde{a}_{g,t}, \widetilde{b}_{g,t}) = \bigtriangledown$. Logo

$$\begin{aligned}
\theta \vee \phi &= \left[\bigvee_{s=1}^{n} \theta_f(\widetilde{a}_{f,s}, \widetilde{b}_{f,s}) \vee \bigvee_{t=1}^{n} \theta_g(\widetilde{a}_{g,t}, \widetilde{b}_{g,t})\right] \vee \left[\bigwedge_{u=1}^{n} \varphi_f(\widetilde{a}_{f,u}, \widetilde{b}_{f,u}) \wedge \bigwedge_{v=1}^{n} \varphi_g(\widetilde{a}_{g,v}, \widetilde{b}_{g,v})\right] \\
&= \bigwedge_{u=1}^{n} \left(\varphi_f(\widetilde{a}_{f,u}, \widetilde{b}_{g,u}) \vee \theta_f(\widetilde{a}_{f,u}, \widetilde{b}_{f,u}) \vee \bigvee_{s=1, s\neq u}^{n} \theta_f(\widetilde{a}_{f,s}, \widetilde{b}_{f,s}) \vee \bigvee_{t=1}^{n} \theta_g(\widetilde{a}_{g,t}, \widetilde{b}_{g,t})\right) \\
&\wedge \bigwedge_{v=1}^{n} \left(\varphi_g(\widetilde{a}_{g,v}, \widetilde{b}_{g,v}) \vee \theta_g(\widetilde{a}_{g,v}, \widetilde{b}_{g,v}) \vee \bigvee_{s=1}^{n} \theta_f(\widetilde{a}_{f,s}, \widetilde{b}_{f,s}) \vee \bigvee_{t=1, t\neq v}^{n} \theta_g(\widetilde{a}_{g,t}, \widetilde{b}_{g,t})\right) = \bigtriangledown.
\end{aligned}$$

(b) Verifiquemos agora que se $\theta(a, b)$ é complementada, então $\theta(a, b)' = \phi$. Por a) sabemos que $\theta(a, b) \vee \phi = \bigtriangledown$ e, sendo $\theta(a, b)$ complementada, é imediato que $\theta(a, b)' \leq \phi$. Falta agora provar que $\phi \leq \theta(a, b)'$. Definindo $\widetilde{b}_{f,0} = \widetilde{b}_{g,0} = 0$ e $\widetilde{a}_{f,n+1} = \widetilde{a}_{g,n+1} = 1$, resulta da Proposição 1.31 que

$$\phi = \bigvee_{i,p=1}^{n+1} \bigvee_{j=i-1}^{n} \bigvee_{q=p-1}^{n} \left[\theta_f(x_{i,j,p,q}, y_{i,j,p,q}) \vee \theta_g(w_{i,j,p,q}, z_{i,j,p,q})\right].$$

Atendendo a que $\theta_f(x_{i,j,p,q}, y_{i,j,p,q})$ e $\theta_g(w_{i,j,p,q}, z_{i,j,p,q})$ são congruências geradas por elementos de $g^m(L) = f^m(L)$ concluimos, com base na Proposição 1.28, que estas congruências são os menores elementos de $\mathrm{Con}(\mathcal{L})$ que identificam, respectivamente, $(x_{i,j,p,q}, y_{i,j,p,q})$ e $(w_{i,j,p,q}, z_{i,j,p,q})$. Temos então que ϕ é a menor congruência da álgebra dupla $\mathcal{L}$ que identifica cada um dos pares $(x_{i,j,p,q}, y_{i,j,p,q})$ e $(w_{i,j,p,q}, z_{i,j,p,q})$. Como já verificámos (na página 52), $\theta(a,b)'|_{f^m(L)} = \phi|_{f^m(L)}$ e então $\theta(a,b)'$ também identifica cada um dos pares indicados. Logo $\phi \leq \theta(a,b)'$ e, portanto, $\theta(a,b)' = \phi$. ■

Em [8, Teorema 14.15], T. Blyth e J. Varlet haviam chegado a uma conclusão semelhante à do teorema anterior para congruências definidas em álgebras-$\mathrm{K}_{1,1}$ duplas. Há, no entanto, um lapso na demonstração apresentada. De facto, sendo $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DK}_{1,1}$, a, b elementos de L e

$$\begin{aligned}\phi = {} & (\theta(f^2(b) \vee f(a), 1) \ \vee\ \theta\,(f^2(b), f^2(b) \vee f(b)) \ \vee\ \theta(f(a), f(a) \vee f^2(a))) \\ & \wedge (\theta(g^2(b) \vee g(a), 1) \ \vee\ \theta(g^2(b), g^2(b) \vee g(b)) \ \vee\ \theta(g(a), g(a) \vee g^2(a)))\,,\end{aligned}$$

verificamos, contrariamente ao que é afirmado em [8], que nem sempre é verdade que $\phi|_{f(L)}$ identifica os pares de elementos

$$(f^2(b) \vee f(a), 1),\ (f^2(b), f^2(b) \vee f(b)),\ (f(a), f(a) \vee f^2(a)),$$

$$(g^2(b) \vee g(a), 1),\ (g^2(b), g^2(b) \vee g(b)),\ (g(a), g(a) \vee g^2(a)).$$

Consideremos, por exemplo, a álgebra-$\mathrm{K}_{1,1}$ dupla (L, f, g) onde L é a cadeia $0 < w_0 < w_1 < w_2 < 1$ e f e g são as operações definidas em L de acordo com a seguinte tabela

x	0	w_0	w_1	w_2	1
$f(x)$	1	w_1	w_1	0	0
$g(x)$	1	1	w_1	w_1	0

.

Para $a = 0$ e $b = w_0$ tem-se

$$\phi = (\theta(1,1) \vee \theta(w_1, w_1) \vee \theta(1,1)) \wedge (\theta(1,1) \vee \theta(0,1) \vee \theta(1,1)) = \Delta$$

e, como é óbvio, $\phi|_{f(L)}$ não identifica o par $(0,1)$.

Uma vez que toda a álgebra-MS dupla é uma álgebra-$K_{1,1}$ dupla, podemos estabelecer o Teorema 14.5 de [8] como um corolário do teorema que acabámos de provar. Assim, temos

Corolário 1.33 [8, Teorema 14.5] *Seja $\mathcal{L} = (L, f, g)$ uma álgebra-MS dupla e sejam $a, b \in L$ tais que $a \leq b$. Seja*

$$\varphi_{f,g} = [\theta_f\,(f^2(b) \vee f(a), 1) \vee \theta_f\,(f^2(b) \vee f(a), 1) \vee \theta_f\,(f(a), f(a) \vee f^2(a))]$$
$$\wedge\,[\theta_g\,(g^2(b) \vee g(a), 1) \vee \theta_g\,(g^2(b) \vee g(a), 1) \vee \theta_g\,(g(a), g(a) \vee g^2(a))]$$

Então

(a) $\theta(a,b) \vee \varphi_{f,g} = \nabla$,

(b) *se $\theta(a,b)$ é complementada, então $\theta(a,b)' = \varphi_{f,g}$.* ■

Terminamos esta secção estabelecendo uma condição necessária e suficiente para que uma congruência principal definida numa álgebras-$K_{n,m}$ dupla seja complementada.

Teorema 1.34 *Sejam $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{DK}_{n,m}$ e $a, b \in L$ tais que $a \leq b$. Seja (k,l) um m-par e definam-se $\widetilde{b}_{f,0} = \widetilde{b}_{g,0} = 0$ e $\widetilde{a}_{f,n+1} = \widetilde{a}_{g,n+1} = 1$. Então, $\theta(a,b)$ é complementada se e só se para cada $s \in \{1, ..., n\}$, $(x_s, y_s) \in \{(\widetilde{a}_{f,s}, \widetilde{b}_{f,s}), (\widetilde{a}_{g,s}, \widetilde{b}_{g,s})\}$ e $i, p \in \{1, ..., n+1\}$ se tem:*

$$y_s \wedge f^l(\widetilde{b}_{i-1}) \wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1}) \wedge g^l(\widetilde{b}_{p-1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1}) \leq x_s \vee f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q),$$

para todo $j \in \{i-1, ..., n\}$ e $q \in \{p-1, ..., n\}$,

$$y_s \wedge f^l(\widetilde{b}_{i-1}) \wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_p) \wedge g^l(\widetilde{b}_q) \leq x_s \vee f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee g^k(\widetilde{b}_{p-1}) \vee g^l(\widetilde{a}_{q+1})\ ,$$

para todo $j \in \{i-1, ..., n\}$ e $q \in \{p, ..., n\}$,

$y_s \wedge f^k(\widetilde{a}_i) \wedge f^l(\widetilde{b}_j) \wedge g^l(\widetilde{b}_{p-1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1}) \leq x_s \vee f^k(\widetilde{b}_{i-1}) \vee f^l(\widetilde{a}_{j+1}) \vee g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q)$,

para todo $j \in \{i, ..., n\}$ *e* $q \in \{p-1, ..., n\}$,

$y_s \wedge f^k(\widetilde{a}_i) \wedge f^l(\widetilde{b}_j) \wedge g^k(\widetilde{a}_p) \wedge g^l(\widetilde{b}_q) \leq x_s \vee f^k(\widetilde{b}_{i-1}) \vee f^l(\widetilde{a}_{j+1}) \vee g^k(\widetilde{b}_{p-1}) \vee g^l(\widetilde{a}_{q+1})$,

para todo $j \in \{i, ..., n\}$ *e* $q \in \{p, ..., n\}$.

Demonstração: Da Proposição 1.29 temos que

$$\theta(a,b) = \bigvee_{s=1}^{n} \theta_f(\widetilde{a}_{f,s}, \widetilde{b}_{f,s}) \vee \bigvee_{t=1}^{n} \theta_g(\widetilde{a}_{g,t}, \widetilde{b}_{g,t})$$

e do Teorema 1.32 resulta que $\theta(a,b)$ é complementada se e só se $\theta(a,b) \wedge \phi = \triangle$. Da Proposição 1.12 sabe-se que

$$\begin{aligned}\phi = &\left(\bigvee_{i=1}^{n+1} \bigvee_{j=i-1}^{n} \theta_f\left(f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j), f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee \left[f^l(\widetilde{b}_{i-1}) \wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1})\right]\right)\right) \\ &\wedge \left(\bigvee_{p=1}^{n+1} \bigvee_{q=p-1}^{n} \theta_g\left(g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q), g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q) \vee \left[g^l(\widetilde{b}_{p-1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1})\right]\right)\right).\end{aligned}$$

Então $\theta(a,b)$ é complementada se e só se, para cada $s, t \in \{1, ..., n\}$, $i, p \in \{1, ..., n+1\}$, $j \in \{i-1, ..., n\}$ e $q \in \{p-1, ..., n\}$, se verificam as seguintes condições:

$$\begin{aligned}&\theta_f(\widetilde{a}_{f,s}, \widetilde{b}_{f,s}) \wedge \theta_f\left(f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j), f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee \left[f^l(\widetilde{b}_{i-1}) \wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1})\right]\right) \\ &\qquad \wedge \theta_g\left(g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q), g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q) \vee \left[g^l(\widetilde{b}_{p-1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1})\right]\right) = \triangle\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}&\theta_g(\widetilde{a}_{g,t}, \widetilde{b}_{g,t}) \wedge \theta_f\left(f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j), f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee \left[f^l(\widetilde{b}_{i-1}) \wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1})\right]\right) \\ &\qquad \wedge \theta_g\left(g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q), g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q) \vee \left[g^l(\widetilde{b}_{p-1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1})\right]\right) = \triangle.\end{aligned}$$

Da Proposição 1.1, dos factos R$_1$) e R$_2$), e atendendo a que $\widetilde{a}_{f,s}, \widetilde{b}_{f,s} \in L^f_{1,m}$ e $\widetilde{a}_{g,t}$, $\widetilde{b}_{g,t} \in L^g_{1,m}$, vem para cada $s \in \{1, ..., n\}$, i, $p \in \{1, ..., n+1\}$,

$j \in \{i-1, ..., n\}$ e $q \in \{p-1, ..., n\}$,

$$\begin{aligned}\theta_f(\widetilde{a}_{f,s}, \widetilde{b}_{f,s}) \wedge \theta_f\left(f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j), f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee \left[f^l(\widetilde{b}_{i-1}) \wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1})\right]\right) \\ \wedge\ \theta_g\left(g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q), g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q) \vee \left[g^l(\widetilde{b}_{p-1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1})\right]\right) = \triangle\end{aligned}$$

se e só se

$$\begin{aligned}&\left[\bigvee_{r=0}^{m+1} \theta_R(f^r(\widetilde{a}_s), f^r(\widetilde{b}_s))\right] \\ &\wedge \left[\theta_R\left(f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j), f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee \left[f^l(\widetilde{b}_{i-1}) \wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1})\right]\right)\right. \\ &\quad \left.\vee\ \theta_R\left(f^k(\widetilde{a}_i) \wedge f^l(\widetilde{b}_j) \wedge \left[f^k(\widetilde{b}_{i-1}) \vee f^l(\widetilde{a}_{j+1})\right], f^k(\widetilde{a}_i) \wedge f^l(\widetilde{b}_j)\right)\right] \\ &\wedge \left[\theta_R\left(g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q), g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q) \vee \left[g^l(\widetilde{b}_{p-1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1})\right]\right)\right. \\ &\quad \left.\vee\ \theta_R\left(g^k(\widetilde{a}_p) \wedge g^l(\widetilde{b}_q) \wedge \left[g^k(\widetilde{b}_{p-1}) \vee g^l(\widetilde{a}_{q+1})\right], g^k(\widetilde{a}_p) \wedge g^l(\widetilde{b}_q)\right)\right] = \triangle\end{aligned}$$

se e só se, para cada $r \in \{0, ..., m+1\}$,

a) $$\begin{aligned}&f^r(\widetilde{b}_s) \wedge f^l(\widetilde{b}_{i-1}) \wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1}) \wedge g^l(\widetilde{b}_{p-1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1}) \\ &\leq f^r(\widetilde{a}_s) \vee f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q)\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}&f^r(\widetilde{b}_s) \wedge f^l(\widetilde{b}_{i-1}) \wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_p) \wedge g^l(\widetilde{b}_q) \\ &\leq f^r(\widetilde{a}_s) \vee f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee g^k(\widetilde{b}_{p-1}) \vee g^l(\widetilde{a}_{q+1})\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}&f^r(\widetilde{b}_s) \wedge f^k(\widetilde{a}_i) \wedge f^l(\widetilde{b}_j) \wedge g^l(\widetilde{b}_{p-1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1}) \\ &\leq f^r(\widetilde{a}_s) \vee f^k(\widetilde{b}_{i-1}) \vee f^l(\widetilde{a}_{j+1}) \vee g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q)\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}&f^r(\widetilde{b}_s) \wedge f^k(\widetilde{a}_i) \wedge f^l(\widetilde{b}_j) \wedge g^k(\widetilde{a}_p) \wedge g^l(\widetilde{b}_q) \\ &\leq f^r(\widetilde{a}_s) \vee f^k(\widetilde{b}_{i-1}) \vee f^l(\widetilde{a}_{j+1}) \vee g^k(\widetilde{b}_{p-1}) \vee g^l(\widetilde{a}_{q+1})\end{aligned}$$

Note-se que as desigualdades anteriores se verificam trivialmente se r é ímpar. Sendo r par, vem, para cada $x \in L^f_{1,m}$ e cada $y \in L^g_{1,m}$ que $f^r(f^k(x)) = f^k(x)$, $f^r(f^l(x)) = f^l(x)$, $f^r(g^k(y)) = g^k(y)$ e $f^r(g^l(y)) = g^l(y)$ (como observámos na página 50). Assim as condições a), b), c) e d) são equivalentes, respectivamente, a 1), 2), 3) e 4):

1) $$\widetilde{b}_{f,s} \wedge f^l(\widetilde{b}_{i-1}) \wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1}) \wedge g^l(\widetilde{b}_{p-1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1}) \\ \leq \widetilde{a}_{f,s} \vee f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q)$$

2) $$\widetilde{b}_{f,s} \wedge f^l(\widetilde{b}_{i-1}) \wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_p) \wedge g^l(\widetilde{b}_q) \\ \leq \widetilde{a}_{f,s} \vee f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee g^k(\widetilde{b}_{p-1}) \vee g^l(\widetilde{a}_{q+1})$$

3) $$\widetilde{b}_{f,s} \wedge f^k(\widetilde{a}_i) \wedge f^l(\widetilde{b}_j) \wedge g^l(\widetilde{b}_{p-1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1}) \\ \leq \widetilde{a}_{f,s} \vee f^k(\widetilde{b}_{i-1}) \vee f^l(\widetilde{a}_{j+1}) \vee g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q)$$

4) $$\widetilde{b}_{f,s} \wedge f^k(\widetilde{a}_i) \wedge f^l(\widetilde{b}_j) \wedge g^k(\widetilde{a}_p) \wedge g^l(\widetilde{b}_q) \\ \leq \widetilde{a}_{f,s} \vee f^k(\widetilde{b}_{i-1}) \vee f^l(\widetilde{a}_{j+1}) \vee g^k(\widetilde{b}_{p-1}) \vee g^l(\widetilde{a}_{q+1})$$

As condições 1) e 2) coincidem quando $q = p - 1$ (o mesmo se passando entre as condicões 3) e 4)). Para $j = i - 1$ também temos que 1) coincide com 3), e 2) coincide com 4).

Dados $t \in \{1, ..., n\}$, i, $p \in \{1, ..., n+1\}$, $j \in \{i-1, ..., n\}$ e $q \in \{p-1, ..., n\}$, resultam de

$$\theta_g(\widetilde{a}_{g,t}, \widetilde{b}_{g,t}) \wedge \theta_f(f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j), f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee (f^l(\widetilde{b}_{i-1}) \wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1}))) \\ \wedge\, \theta_g(g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q), g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q) \vee (g^l(\widetilde{b}_{p-1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1}))) = \triangle.$$

condições análogas às anteriores.

Então $\theta(a, b)$ é complementada se e só se para cada $s \in \{1, ...\ n\}$, $(x_s, y_s) \in \{(\widetilde{a}_{f,s}, \widetilde{b}_{f,s}), (\widetilde{a}_{g,s}, \widetilde{b}_{g,s})\}$ e $i, p \in \{1, ..., n+1\}$ se tem:

$$y_s \wedge f^l(\widetilde{b}_{i-1}) \wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1}) \wedge g^l(\widetilde{b}_{p-1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1}) \leq x_s \vee f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q),$$

para todo $j \in \{i-1, ..., n\}$ e $q \in \{p-1, ..., n\}$,

$y_s \wedge f^l(\widetilde{b}_{i-1}) \wedge f^k(\widetilde{a}_{j+1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_p) \wedge g^l(\widetilde{b}_q) \leq x_s \vee f^l(\widetilde{a}_i) \vee f^k(\widetilde{b}_j) \vee g^k(\widetilde{b}_{p-1}) \vee g^l(\widetilde{a}_{q+1})$,

para todo $j \in \{i-1, ..., n\}$ e $q \in \{p, ..., n\}$,

$y_s \wedge f^k(\widetilde{a}_i) \wedge f^l(\widetilde{b}_j) \wedge g^l(\widetilde{b}_{p-1}) \wedge g^k(\widetilde{a}_{q+1}) \leq x_s \vee f^k(\widetilde{b}_{i-1}) \vee f^l(\widetilde{a}_{j+1}) \vee g^l(\widetilde{a}_p) \vee g^k(\widetilde{b}_q)$,

para todo $j \in \{i, ..., n\}$ e $q \in \{p-1, ..., n\}$,

$y_s \wedge f^k(\widetilde{a}_i) \wedge f^l(\widetilde{b}_j) \wedge g^k(\widetilde{a}_p) \wedge g^l(\widetilde{b}_q) \leq x_s \vee f^k(\widetilde{b}_{i-1}) \vee f^l(\widetilde{a}_{j+1}) \vee g^k(\widetilde{b}_{p-1}) \vee g^l(\widetilde{a}_{q+1})$,

para todo $j \in \{i, ..., n\}$ e $q \in \{p, ..., n\}$. $\blacksquare$

Capítulo 2

Pontos fixos em álgebras-MS$_n$

Para cada subvariedade $\mathbf{V}$ de $\mathbf{MS}_n$, $n \in \mathbb{N}$, determinamos as cardinalidades admissíveis para o conjunto dos pontos fixos das álgebras (contáveis) que geram $\mathbf{V}$ e, destas cardinalidades verificamos quais as que são realmente atingidas. Esta questão foi motivada por estudos análogos, feitos para as variedades $\mathbf{K}_{1,0}$, $\mathbf{MS}$, $\mathbf{K}_{2,0}$ e $\mathbf{MS}_2$, respectivamente, em [27], [6], [28] e [22].

Dada uma classe $\mathrm{Si}(\mathbf{MS}_n)$ de álgebras s.i. de $\mathbf{MS}_n$ tal que cada álgebra s.i. de $\mathbf{MS}_n$ é isomorfa a uma e a uma só álgebra de $\mathrm{Si}(\mathbf{MS}_n)$, definimos em $\mathrm{Si}(\mathbf{MS}_n)$ uma ordem parcial $\leq$. Sendo $\mathbf{V}$ uma subvariedade não trivial de $\mathbf{MS}_n$, supomos que todos os elementos maximais de $(\mathbf{V}\cap\ \mathrm{Si}(\mathbf{MS}_n), \leq)$ têm, pelo menos, um ponto fixo e, no resultado principal deste capítulo mostramos que, se existirem exactamente k ($k \in \mathbb{N}$) elementos maximais de $(\mathbf{V}\cap\ \mathrm{Si}(\mathbf{MS}_n), \leq)$ com dois pontos fixos, então:

- dado $\alpha \in \{1, .., k\}$, não existe uma álgebra contável que tenha exactamente α pontos fixos e que gere $\mathbf{V}$;
- para todo $\alpha \in (\mathbb{N}_0 \backslash \{1, ..., k\}) \cup \{\aleph_0\}$, existe, de facto, uma álgebra contável com exactamente α pontos fixos e que gera a variedade $\mathbf{V}$.

Atendendo aos resultados obtidos, uma questão que se coloca naturalmente é a de sabermos qual o número máximo de álgebras s.i com dois pontos fixos que podem existir no conjunto de elementos maximais de $(\mathbf{V} \cap \mathrm{Si}(\mathbf{MS}_n), \leq)$. No caso em que $\mathbf{V}$ é uma subvariedade de $\mathbf{MS}_{p_1^{k_1} p_2^{k_2}}$, com p_1, p_2 primos distintos e com $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$, conseguimos obter uma resposta para esta questão.

Para finalizar o estudo, analisamos a aplicação dos resultados obtidos a alguns casos particulares.

Neste capítulo usamos alguma notação específica e fazemos referência a alguns factos que convém, antes demais, apresentar.

Sejam $\mathbf{V}$ uma subvariedade de $\mathbf{O}$ e $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{O}$. Representamos por:

- Fix$(\mathcal{L})$ o conjunto $\{x \in L \mid f(x) = x\}$ dos pontos fixos de $\mathcal{L}$;
- $\mathrm{C}_{\mathrm{fix}}(\mathbf{V})$ o conjunto

$$\{|\mathrm{Fix}(\mathcal{L})| : \mathcal{L} \text{ é uma álgebra (contável) tal que } V(\mathcal{L}) = \mathbf{V}\}.$$

Dada uma álgebra de Ockham $\mathcal{L} = (L, f)$, M. Sequeira define em [22] que:

- $\mathcal{L}$ *satisfaz a propriedade* P_0 se $\mathcal{L}$ é trivial ($|L| = 1$) ou se $\mathcal{L}$ não tem pontos fixos ($\mathrm{Fix}(\mathcal{L}) = \emptyset$),
- $\mathcal{L}$ *satisfaz a propriedade* P_1 se $\mathcal{L}$ tem, no máximo, um ponto fixo, i.e., $|\mathrm{Fix}(\mathcal{L})| \in \{0, 1\}$.

Sendo $\{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}$ uma família não vazia de álgebras de Ockham verifica-se facilmente que $\mathrm{Fix}(\prod_{i \in I} \mathcal{L}_i) = \prod_{i \in I} \mathrm{Fix}(\mathcal{L}_i)$. Consequentemente, se $\{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}$ é uma família não vazia de álgebras de Ockham que satisfazem P_l, $l \in \{0, 1\}$, então o produto directo $\prod_{i \in I} \mathcal{L}_i$ também satisfaz P_l, [22].

É igualmente útil observar, que se $\mathcal{L}$ é uma álgebra de Ockham que satisfaz P_l, para algum $l \in \{0, 1\}$, então também qualquer subálgebra de $\mathcal{L}$ satisfaz P_l.

Segundo o Teorema de Birkhoff (Teorema 0.1), toda a álgebra de uma variedade $\mathbf{V}$ é produto subdirecto de álgebras subdirectamente irredutíveis em $\mathbf{V}$. Assim se todas as álgebras s.i de $\mathbf{V}$ satisfazem P_l, $l \in \{0,1\}$, o mesmo acontece com toda a álgebra de $\mathbf{V}$, tendo-se $\mathrm{C_{fix}}(\mathbf{V}) \subseteq \{0,1\}$. Põe-se então a questão de sabermos o que concluir relativamente a $\mathrm{C_{fix}}(\mathbf{V})$ se existir, pelo menos, uma álgebra s.i de $\mathbf{V}$ que não satisfaz P_l, para qualquer $l \in \{0,1\}$.

Se, numa variedade $\mathbf{V}$ de álgebras de Ockham, existe uma álgebra que não satisfaz P_1, sabemos de [22] que $\mathbf{V}$ contém a variedade $\mathbf{M}$. Relativamente a esta última variedade, sabe-se também que, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0 \cup \{\aleph_0\}$, existe uma álgebra de De Morgan cujo conjunto de pontos fixos tem cardinalidade α, [26], [27], [28, página 151]. Logo, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0 \cup \{\aleph_0\}$, existem em $\mathbf{V}$ álgebras cujo conjunto de pontos fixos tem cardinalidade α. Mas será que todas as cardinalidades são admissíveis para o conjunto dos pontos fixos das álgebras (contáveis) que geram $\mathbf{V}$? Se considerarmos, por exemplo, a variedade $\mathbf{M}$, prova–se que embora existam nesta variedade álgebras que têm exactamente um ponto fixo, nenhuma delas gera $\mathbf{M}$, [26, Teorema 4.4].

Neste capítulo vamos, então, determinar quais as cardinalidades admissíveis, e as que são realmente atingidas, para o conjunto dos pontos fixos das álgebras que geram uma subvariedade $\mathbf{V}$ de $\mathbf{MS}_n$; note-se que no caso em que $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$ o estudo refere-se apenas a álgebras contáveis.

Como já foi possível apercebermo-nos, o estudo sobre pontos fixos em álgebras-$\mathrm{MS_n}$ está relacionado com as álgebras s.i. de $\mathbf{MS}_n$ e, por isso, é conveniente recordar alguns conceitos e resultados relativos a estas álgebras, o que pode ser feito no capítulo 0, secção 0.2.

Na secção 0.2 (página 18) já havíamos feito referência a uma classe $\mathrm{Si}(\mathbf{MS}_n)$

de álgebras s.i. de $\mathbf{MS}_n$ tal que cada álgebra s.i. de $\mathbf{MS}_n$ é isomorfa a uma e a uma só álgebra de $\mathrm{Si}(\mathbf{MS}_n)$. Ao longo deste capítulo vamos considerar, sem perda de generalidade, que $\mathrm{Si}(\mathbf{MS}_n)$ refere a classe mencionada e vamos ordenar os elementos de $\mathrm{Si}(\mathbf{MS}_n)$ da seguinte forma: dados dois elementos $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y} \in \mathrm{Si}(\mathbf{MS}_n)$,

$$\mathcal{X} \leq \mathcal{Y} \Leftrightarrow \mathcal{X} \in S(\{\mathcal{Y}\}) \ (\mathcal{X} \text{ é isomorfo a uma subálgebra de } \mathcal{Y}).$$

Para cada subvariedade não trivial $\mathbf{V}$ de $\mathbf{MS}_n$, denotamos por $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ o conjunto dos elementos maximais de $(\mathbf{V}\cap\ \mathrm{Si}(\mathbf{MS}_n), \leq)$; verifica-se que se $\mathrm{m}(\mathbf{V}) = \{\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_t\}$ e $\mathcal{L}$ é uma álgebra de $\mathbf{MS}_n$ tal que $V(\mathcal{L}) = \mathbf{V} = V(\mathcal{X}_1) \vee ... \vee V(\mathcal{X}_t)$, então $\mathcal{L}$ é produto subdirecto de uma família de álgebras pertencentes a $S(\{\mathcal{X}_1\}) \cup ... \cup S(\{\mathcal{X}_t\})$ e na qual cada $\mathcal{X}_i$, $1 \leq i \leq t$, ocorre, pelo menos, uma vez, [22]. Desta forma, a cardinalidade do conjunto $\mathrm{Fix}(\mathcal{L})$, $|\mathrm{Fix}(\mathcal{L})|$, está relacionada com o número de pontos fixos das álgebras s.i. $\mathcal{X}_i$, $1 \leq i \leq t$.

Sendo $\mathbf{V}$ uma subvariedade não trivial de $\mathbf{MS}_n$ e atendendo a que uma álgebra s.i. de $\mathbf{MS}_n$ admite, no máximo, dois pontos fixos, [2, Teorema 7], o conjunto $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ satisfaz exactamente uma das seguintes condições:

i) $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ tem, pelo menos, um elemento sem pontos fixos;

ii) todo o elemento de $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ tem exactamente um ponto fixo.;

iii) todos os elementos de $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ têm, pelo menos, um ponto fixo, e há, pelo menos, um elemento de $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ que tem dois pontos fixos.

No caso em que $\mathbf{V}$ é uma subvariedade de $\mathbf{MS}_n$ que satisfaz uma das condições i) ou ii), determinam-se facilmente as cardinalidades admissíveis para o conjunto dos pontos fixos das álgebras contáveis que geram $\mathbf{V}$.

Teorema 2.1 *Seja* $\mathbf{V}$ *uma subvariedade de* $\mathbf{MS}_n$.

a) *Se* $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ *satisfaz a condição i), então* $\mathrm{C_{fix}}(\mathbf{V}) = \{0\}$.

b) *Se* $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ *satisfaz a condição ii), então* $\mathrm{C_{fix}}(\mathbf{V}) = \{0, 1\}$.

Demonstração: Suponha-se que $\mathrm{m}(\mathbf{V}) = \{\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_t\}$, e que $\mathcal{L}$ é uma álgebra de $\mathbf{MS}_n$ tal que $V(\mathcal{L}) = \mathbf{V} = V(\mathcal{X}_1) \vee ... \vee V(\mathcal{X}_t)$. Então $\mathcal{L}$ é produto subdirecto de uma família de álgebras pertencentes a $S(\{\mathcal{X}_1\}) \cup ... \cup S(\{\mathcal{X}_t\})$ e na qual, cada $\mathcal{X}_i$, $1 \leq i \leq t$, ocorre, pelo menos, uma vez.

a) Dado que $|\mathrm{Fix}(\mathcal{X}_i)| = 0$, para algum $i \in \{1, ..., t\}$, resulta que $|\mathrm{Fix}(\mathcal{L})| = 0$. Verifica-se também que a álgebra $\prod_{i=1}^{t} \mathcal{X}_i$ gera $\mathbf{V}$ e não tem pontos fixos. Então $\mathrm{C_{fix}}(\mathbf{V}) = \{0\}$.

b) Para todo $i \in \{1, ..., t\}$, $\mathcal{X}_i$ satisfaz P_1, logo $|\mathrm{Fix}(\mathcal{L})| \in \{0, 1\}$, e portanto $\mathrm{C_{fix}}(\mathbf{V}) \subseteq \{0, 1\}$. Relativamente à outra inclusão também é fácil provar a sua validade. De facto, $\prod_{i=1}^{t} \mathcal{X}_i$ é uma álgebra que gera $\mathbf{V}$ que tem um ponto fixo e, se considerarmos $\mathcal{B} = (\{0, 1\}, \wedge, \vee, f, 0, 1) \in \mathbf{K}_{1,0}$, então $\mathcal{B} \times \prod_{i=1}^{t} \mathcal{X}_i$ é uma álgebra sem pontos fixos e que também gera $\mathbf{V}$. Logo $\{0, 1\} \subseteq \mathrm{C_{fix}}(\mathbf{V})$. ■

Para o estudo do caso iii) precisamos de mais alguns resultados, relativos a álgebras s.i. com dois pontos fixos, que a seguir estabelecemos e demonstramos.

Como já referimos no capítulo 0, algumas das álgebras s.i. de $\mathbf{MS}_n$ são as álgebras $\mathcal{B}_{2m} = (B_{2m}, \phi)$ em que m é um divisor de n. Relativamente a estas álgebras vamos verificar que é possível determinar um elemento $g \in B_{2m}$ a partir do qual, e utilizando unicamente as operações $\vee, \wedge$ e ϕ, se podem obter todos os restantes elementos de B_{2m}. Em particular, podemos obter os dois pontos fixos de $\mathcal{B}_{2m}$: $\bigvee\limits_{j=0}^{m-1} a_{2j}$ e $\bigvee\limits_{j=0}^{m-1} a_{2j+1}$.

Lema 2.2 *Dado* $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, *sejam* $\mathcal{B}_{2m} = (B_{2m}, \phi)$, *e* $a_0, a_1, ..., a_{2m-1}$ *os átomos de* B_{2m}. *Seja* $g_{i,s} = a_i \vee a_{i+1(\mathrm{mod}\, 2m)} \vee ... \vee a_{i+s(\mathrm{mod}\, 2m)}$ *com* $0 \leq i \leq 2m-1$ *e* $1 \leq s < 2m-1$ *e* s *ímpar. Então* $\mathcal{S}\mathrm{g}^{\mathcal{B}_{2m}}(\{g_{i,s}\}) = \mathcal{B}_{2m}$ *e*

- *se* i *é par, tem-se*

$$\bigvee_{j=1}^{m} \phi^{2j}(g_{i,s} \wedge \phi(g_{i,s})) = \bigvee_{k=0}^{m-1} a_{2k} \ e$$

$$\bigvee_{j=1}^{m} \phi^{2j-1}(g_{i,s} \vee \phi(g_{i,s})) = \bigvee_{k=0}^{m-1} a_{2k+1},$$

- *se* i *é ímpar, tem-se*

$$\bigvee_{j=1}^{m} \phi^{2j}(g_{i,s} \wedge \phi(g_{i,s})) = \bigvee_{k=0}^{m-1} a_{2k+1} \ e$$

$$\bigvee_{j=1}^{m} \phi^{2j-1}(g_{i,s} \vee \phi(g_{i,s})) = \bigvee_{k=0}^{m-1} a_{2k}.$$

Demonstração: Seja $g_{i,s} = a_i \vee a_{i+1(\mathrm{mod}\, 2m)} \vee ... \vee a_{i+s(\mathrm{mod}\, 2m)}$, com $0 \leq i \leq 2m-1$ e $1 \leq s < 2m-1$ e s ímpar.

Dado que $\mathcal{B}_{2m} = \mathcal{S}\mathrm{g}^{\mathcal{B}_{2m}}(\{a_0, a_1, ..., a_{2m-1}\})$, para provar que $\mathcal{B}_{2m} = \mathcal{S}\mathrm{g}^{\mathcal{B}_{2m}}(\{g_{i,s}\})$ basta-nos verificar que $a_j \in \mathrm{Sg}^{\mathcal{B}_{2m}}(\{g_{i,s}\})$, para todo $j \in \{0, 1, ..., 2m-1\}$.

Como $g_{i,s} \in \mathrm{Sg}^{\mathcal{B}_{2m}}(\{g_{i,s}\})$, também $\phi(g_{i,s})$, $g_{i,s} \wedge \phi(g_{i,s})$, $g_{i,s} \vee \phi(g_{i,s}) \in \mathrm{Sg}^{\mathcal{B}_{2m}}(\{g_{i,s}\})$ e tem-se:

$$\begin{aligned}
\phi(g_{i,s}) &= c(a_{i+1(\mathrm{mod}\, 2m)}) \wedge c(a_{i+2(\mathrm{mod}\, 2m)}) \wedge ... \wedge c(a_{i+s+1(\mathrm{mod}\, 2m)}) \\
g_{i,s} \wedge \phi(g_{i,s}) &= a_i \wedge c(a_{i+1(\mathrm{mod}\, 2m)}) \wedge ... \wedge c(a_{i+s+1(\mathrm{mod}\, 2m)}) \\
&\overset{a)}{=} a_i \\
g_{i,s} \vee \phi(g_{i,s}) &= a_i \vee a_{i+1(\mathrm{mod}\, 2m)} \vee ... \vee a_{i+s(\mathrm{mod}\, 2m)} \vee c(a_{i+s+1(\mathrm{mod}\, 2m)}) \\
&\overset{b)}{=} c(a_{i+s+1(\mathrm{mod}\, 2m)})
\end{aligned}$$

a) Sabemos que $s < 2m-1$, logo $s+1 < 2m$. Então, para cada $j \in \{i+1(\mathrm{mod}\, 2m), ..., i+s+1(\mathrm{mod}\, 2m)\}$, os átomos a_i e a_j são distintos e, portanto, $a_i \leq c(a_j)$.

b) Pelo mesmo motivo apresentado em a), temos que: para cada $j \in \{i,\ i+1(\operatorname{mod} 2m),\ ...,\ i+s(\operatorname{mod} 2m)\}$, os átomos a_j e $a_{i+s+1(\operatorname{mod} 2m)}$ são distintos e, portanto, $a_j \leq c(a_{i+s+1(\operatorname{mod} 2m)})$.

Uma vez que $a_i, c(a_{i+s+1}(\operatorname{mod} 2m)) \in \mathrm{Sg}^{\mathcal{B}_{2m}}(\{g_{i,s}\})$ e que $a_j = a_{i+(2m+j-i)(\operatorname{mod} 2m)}$, para cada $j \in \{0,\ 1,\ ...,\ 2m-1\}$, temos o seguinte:

- se $2m+j-i$ é par, então $a_j = \phi^{2m+j-i(\operatorname{mod} 2m)}(a_i)$,
- se $2m+j-i$ é ímpar, então $2m+j-i = s+(2m+j-i-s)$ onde $2m+j-i-s$ é par (pois s é ímpar) e $a_j = \phi^{2m+j-i-s-1(\operatorname{mod} 2m)}(c(a_{i+s+1(\operatorname{mod} 2m)}))$.

Logo $a_j \in \mathrm{Sg}^{\mathcal{B}_{2m}}(\{g_{i,s}\})$, $\forall j \in \{0, 1, ..., 2m-1\}$, e podemos, então, concluir que $\mathcal{B}_{2m} = \mathcal{S}\mathrm{g}^{\mathcal{B}_{2m}}(\{g_{i,s}\})$.

Para $k \in \{1, ..., m\}$, temos que $\phi^{2k}(g_{i,s} \wedge \phi(g_{i,s}))$, $\phi^{2k-1}(g_{i,s} \vee \phi(g_{i,s})) \in \mathrm{Sg}^{\mathcal{B}_{2m}}(\{g_{i,s}\})$, e:

$$\begin{aligned}
\phi^{2k}(g_{i,s} \wedge \phi(g_{i,s})) &= \left(\bigvee_{j=2k}^{s+2k} a_{i+j(\operatorname{mod} 2m)}\right) \wedge \left(\bigwedge_{j=2k+1}^{s+2k+1} c(a_{i+j(\operatorname{mod} 2m)})\right) \\
&= a_{i+2k(\operatorname{mod} 2m)} \wedge \left(\bigwedge_{j=2k+1}^{s+2k+1} c(a_{i+j(\operatorname{mod} 2m)})\right) \\
&\overset{c)}{=} a_{i+2k(\operatorname{mod} 2m)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^{2k-1}(g_{i,s} \vee \phi(g_{i,s})) &= \left(\bigwedge_{j=2k-1}^{s+2k-1} c(a_{i+j(\operatorname{mod} 2m)})\right) \wedge \left(\bigvee_{j=2k}^{s+2k} a_{i+j(\operatorname{mod} 2m)}\right) \\
&= \left(\bigwedge_{j=2k-1}^{s+2k-1} c(a_{i+j(\operatorname{mod} 2m)})\right) \wedge a_{i+s+2k(\operatorname{mod} 2m)} \\
&\overset{c)}{=} a_{i+s+2k(\operatorname{mod} 2m)}
\end{aligned}$$

c) Dado que $s < 2m-1$, então $\{a_{i+2k(\operatorname{mod} 2m)}, a_{i+2k+1(\operatorname{mod} 2m)}, ..., a_{i+s+2k+1(\operatorname{mod} 2m)}\}$ é um conjunto de átomos distintos dois a dois. O mesmo se passa relativamente a $\{a_{i+2k-1(\operatorname{mod} 2m)},\ ...,\ a_{i+s+2k-1(\operatorname{mod} 2m)},\ a_{i+s+2k(\operatorname{mod} 2m)}\}$.

Então

- $\bigvee_{k=1}^{m} \phi^{2k}(g_{i,s} \wedge \phi(g_{i,s})) = \bigvee_{l=0}^{2m-1} a_{i+2l(\mathrm{mod}\, 2m)}$ e
- $\bigvee_{k=1}^{m} \phi^{2k-1}(g_{i,s} \vee \phi(g_{i,s})) = \bigvee_{l=0}^{2m-1} a_{i+s+2l(\mathrm{mod}\, 2m)}$.

Dependendo de i ser par ou ímpar, concluimos o resultado enunciado no lema. ■

Dado $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, sejam $\mathcal{U}_{2m} = (U_{2m}, \phi)$, e a_0, a_1, ..., a_{2m} os elementos $\vee$-irredutíveis de U_{2m}. Tendo em conta que $\mathrm{C}(\mathcal{U}_{2m}) = (\mathcal{U}_{2m})_{2m,0} \cong \mathcal{B}_{2m}$ e $\mathrm{At}(\mathrm{C}(U_{2m})) = \{a_0, a_1, .., a_{2m-1}\}$, resulta do lema anterior o seguinte:

Lema 2.3 *Dado $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, sejam $\mathcal{U}_{2m} = (U_{2m}, \phi)$, e a_0, a_1, ..., a_{2m} os elementos $\vee$-irredutíveis de U_{2m}. Seja $g_{i,s} = a_i \vee a_{i+1(\mathrm{mod}\, 2m)} \vee ... \vee a_{i+s(\mathrm{mod}\, 2m)}$ com $0 \leq i \leq 2m-1$ e $1 \leq s < 2m-1$ e s ímpar.*
Então

- $\mathcal{S}\mathrm{g}^{\mathcal{U}_{2m}}(\{g_{i,s}\}) = \mathrm{C}(\mathcal{U}_{2m})$.
- $\bigvee_{j=1}^{m} \phi^{2j}(g_{i,s} \wedge \phi(g_{i,s}))$ *é ponto fixo de* $\mathcal{U}_{2m}$,
- $\bigvee_{j=1}^{m} \phi^{2j-1}(g_{i,s} \vee \phi(g_{i,s}))$ *é ponto fixo de* $\mathcal{U}_{2m}$. ■

Seja $\mathbf{V}$ uma subvariedade de $\mathbf{MS}_n$ e sejam $\mathcal{X}_i \in \mathbf{V}$, $i \in \{1, ..., k\}$, álgebras s.i. com dois pontos fixos, não comparáveis duas a duas. Do Teorema 0.10 resulta que, para cada $i \in \{1, ..., k\}$, $\mathcal{X}_i \cong \mathcal{U}_{2n_i}$ ou $\mathcal{X}_i \cong \mathcal{B}_{2n_i}$, para algum n_i divisor de n, e, da Proposição 0.11 sabe-se que n_i é o menor natural tal que $\mathcal{X}_i \in \mathbf{MS}_{n_i}$. Dado que, para todo $i, j \in \{1, ..., k\}$, com $i \neq j$, as álgebras $\mathcal{X}_i$, $\mathcal{X}_j$ não são comparáveis, então, $n_i \neq n_j$.
Dado que cada álgebra $\mathcal{X}_i = (X_i, \phi_i)$ pertence a $\mathbf{MS}_{n_i}$, também sabemos que $(X_i)_{1,0} = \{\bigvee_{j=1}^{n_i} \phi_i^{2j}(x) \mid x \in X_i\}$ e, como $\mathcal{X}_i$ é subdirectamente irredutível, resulta de [2, Lema 1] que $(X_i)_{1,0} = \{0, 1\} \cup \mathrm{Fix}(\mathcal{X}_i)$.

Lema 2.4 *Sejam* $\mathbf{V}$ *uma subvariedade de* $\mathbf{MS}_n$, $k \in \mathbb{N}$ *e, para* $i \in \{1, ..., k\}$, *sejam* $\mathcal{X}_i \in \mathbf{V}$ *álgebras s.i. com dois pontos fixos, não comparáveis duas a duas. Seja* n_i *o menor natural tal que* $\mathcal{X}_i \in \mathbf{MS}_{n_i}$ *e seja* $m \in \{1, ..., k\}$ *tal que* $n_m = \max\{n_1, ..., n_k\}$. *Representem-se por* w_m, $c(w_m)$ *os pontos fixos de* $\mathcal{X}_m$. *Seja* $\mathcal{L} = (L, f)$ *uma subálgebra de* $\prod_{i=1}^{k} \mathcal{X}_i$ *e produto subdirecto de* $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in\{1,...,k\}}$.

Então existem $q_i \in \{0\} \cup \mathrm{Fix}(\mathcal{X}_i)$, *para* $i \in \{1, ..., k\} \setminus \{m\}$, *tais que* $(q_1, ..., w_m, ..., q_k)$, $(q_1, ..., c(w_m), ..., q_k) \in L$.

Demonstração: Seja $\mathcal{L}$ uma álgebra nas condições indicadas anteriormente. Para a prova do resultado enunciado vamos dividir o estudo em dois casos: $k = 1$ e $k > 1$. O resultado é imediato para o caso em que $k = 1$. Estudemos agora o caso em que $k > 1$.

Caso $k > 1$: Dado que, para todo $i \in \{1, ..., k\}$, $\mathcal{X}_i = (X_i, \phi_i)$ é uma álgebra s.i. com dois pontos fixos, então $\mathcal{X}_i \cong \mathcal{B}_{2n_i}$ ou $\mathcal{X}_i \cong \mathcal{U}_{2n_i}$, sendo n_i um divisor de n e, o menor natural para o qual $\mathcal{X}_i \in \mathbf{MS}_{n_i}$. Dados $i, j \in \{1, ..., k\}$, também sabemos que se $i \neq j$, então $n_i \neq n_j$; donde resulta que qualquer subconjunto não vazio de $\{n_1, ..., n_k\}$ admite máximo.

Sejam então $m, m' \in \{1, ..., k\}$, tais que

$$n_m = \max\{n_1, ..., n_k\} \text{ e } n_{m'} = \max(\{n_1, ..., n_k\} \setminus \{n_m\}).$$

Uma vez que $n_m \geq 2$ e $n_{m'} < n_m$, e $\mathcal{X}_m \cong \mathcal{B}_{2n_m}$ ou $\mathcal{X}_m \cong \mathcal{U}_{2n_m}$, tem-se $\mathrm{At}(\mathrm{C}(\mathcal{X}_m)) = \{a_0, a_1, ..., a_{2n_{m'}-1}, ..., a_{2n_m-1}\}$ com $2n_m - 1 \geq 3$ e $2n_{m'} - 1 < 2n_m - 1$.

Dos elementos de $\mathcal{X}_m$ vamos considerar, em particular, o elemento $e_m = a_0 \vee a_1$. Dado que $\mathcal{L}$ é produto subdirecto de $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in\{1,...,k\}}$, existem $e_i \in X_i$, $i \in \{1, ..., k\} \setminus \{m\}$, tais que $(e_i)_{i\in\{1,...,k\}} \in L$.

Para cada $i \in \{1, ..., k\}$, representamos por p_i o elemento $\bigvee_{d=1}^{n_{m'}} \phi_i^{2d}(e_i)$ e, desta forma, $\bigvee_{d=1}^{n_{m'}} f^{2d}((e_i)_{i\in\{1,...,k\}}) = (p_i)_{i\in\{1,...,k\}} \in L$.

Como, para todo $i \in \{1, ..., k\} \setminus \{m\}$, temos que $e_i \in X_i$ e $\mathcal{X}_i \in \mathbf{MS}_{n_i}$ e $n_i \leq n_{m'}$, vem

$$\begin{aligned} p_i &= \bigvee_{d=1}^{n_i} \phi_i^{2d}(e_i) \vee \bigvee_{d=n_i+1}^{n_{m'}} \phi_i^{2d}(e_i) \\ &= \bigvee_{d=1}^{n_i} \phi_i^{2d}(e_i) \in (X_i)_{1,0} = \{0,1\} \cup \mathrm{Fix}(\mathcal{X}_i). \end{aligned}$$

Verifica-se também que

$$p_m = \bigvee_{d=1}^{n_{m'}} \phi_m^{2d}(e_m) = \bigvee_{d=2}^{2n_{m'}+1} a_{d(\mathrm{mod}\, 2n_m)} = \bigvee_{j=0}^{2n_{m'}-1} a_{2+j(\mathrm{mod}\, 2n_m)}.$$

Dado que $n_m \neq 1$, $n_{m'} < n_m$ e $n_m \geq 2$, então a álgebra $\mathcal{X}_m$ e o elemento p_m estão nas condições

i) do Lema 2.2, caso $\mathcal{X}_m \cong \mathcal{B}_{2n_m}$, ii) do Lema 2.3, caso $\mathcal{X}_m \cong \mathcal{U}_{2n_m}$

e podemos concluir, em qualquer dos casos, que $\bigvee_{j=1}^{n_m} \phi_m^{2j}(p_m \wedge \phi_m(p_m))$ e $\bigvee_{j=1}^{n_m} \phi_m^{2j-1}(p_m \vee \phi_m(p_m))$ são os pontos fixos de $\mathcal{X}_m$.

Sejam $w_m = \bigvee_{j=1}^{n_m} \phi_m^{2j}(p_m \wedge \phi_m(p_m))$ e $c(w_m) = \bigvee_{j=1}^{n_m} \phi_m^{2j-1}(p_m \vee \phi_m(p_m))$.

Uma vez que $p = (p_1, ..., p_m, ..., p_k) \in L$, também temos que:

- $\bigvee_{j=1}^{n_m} f^{2j}(p \wedge f(p)) = (r_1, ..., w_m, ..., r_k) \in L$ sendo,

$$r_i = \bigvee_{j=1}^{n_m} \phi_i^{2j}(p_i \wedge \phi_i(p_i)), \text{ para } i \in \{1, ..., k\} \setminus \{m\};$$

- $\bigvee_{j=1}^{n_m} f^{2j}(p \vee f(p)) = (s_1, ..., c(w_m), ..., s_k) \in L$ sendo,

$$s_i = \bigvee_{j=1}^{n_m} \phi_i^{2j-1}(p_i \vee \phi_i(p_i)), \text{ para } i \in \{1, ..., k\} \setminus \{m\}.$$

Para todo $i \in \{1, ..., k\} \setminus \{m\}$, é fácil verificar que:

- se $p_i = 1$, então $r_i = s_i = 0$,
- se $p_i = 0$, então $r_i = s_i = 0$,
- se $p_i = u$, onde u é ponto fixo de $\mathcal{X}_i$, então $r_i = s_i = u$.

Então existem $q_i \in \{0\} \cup \text{Fix}(\mathcal{X}_i)$, para $i \in \{1, ..., k\} \setminus \{m\}$, tais que: $(q_1, ..., w_m, ..., q_k) \in L$ e $(q_1, ..., c(w_m), ..., q_k) \in L$. ■

Recorrendo a este lema mostra-se, então, o seguinte:

Teorema 2.5 *Sejam* $\mathbf{V}$ *uma subvariedade de* $\mathbf{MS}_n$, $k \in \mathbb{N}$, *e, para* $i \in \{1, ..., k\}$, *sejam* $\mathcal{X}_i \in \mathbf{V}$ *álgebras s.i. com dois pontos fixos, não comparáveis duas a duas. Seja* $\mathcal{L} = (L, f)$ *uma subálgebra de* $\prod_{i=1}^{k} \mathcal{X}_i$ *e produto subdirecto de* $\{\mathcal{X}_i\}_{i \in \{1,...,k\}}$.

Então $|\text{Fix}(\mathcal{L})| \geq k + 1$.

Demonstração: A demonstração deste resultado é feita por indução sobre k, i.e., sobre o número de álgebras s.i..

A base de indução consiste no caso $k = 1$ e para este valor de k verifica-se que a afirmação do teorema é, de facto, trivial.

Para a prova do passo de indução vamos assumir como hipótese que a afirmação é válida para certo $t \in \mathbb{N}$; temos de mostrar que o resultado também é válido para $t + 1$.

Considere-se, então, que $\mathcal{L}$ é subálgebra de $\prod_{i=1}^{t+1} \mathcal{X}_i$ e produto subdirecto de $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in\{1,...,t+1\}}$, onde, para todo $i \in \{1,...,t+1\}$, $\mathcal{X}_i = (X_i, \phi_i)$ é uma álgebra s.i. de $\mathbf{V}$, $|\mathrm{Fix}(\mathcal{X}_i)| = 2$, e, dados i_1, $i_2 \in \{1,...,t+1\}$, com $i_1 \neq i_2$, as álgebras $\mathcal{X}_{i_1}$, $\mathcal{X}_{i_2}$ não são comparáveis. Para concluirmos acerca da validade do passo de indução teremos pois de mostrar que $|\mathrm{Fix}(\mathcal{L})| \geq t+2$.

Dado que os elementos de $\bigcup_{i\in\{1,...,t+1\}} \{\mathcal{X}_i\}$ são álgebras s.i. com dois pontos fixos, não comparáveis duas a duas, já observámos anteriormente que: i) $\mathcal{X}_i \cong \mathcal{B}_{2n_i}$ ou $\mathcal{X}_i \cong \mathcal{U}_{2n_i}$, onde n_i é um divisor de n e é o menor natural tal que $\mathcal{X}_i \in \mathbf{MS}_{n_i}$; ii) $n_{i_1} \neq n_{i_2}$ sempre que $i_1 \neq i_2$. Tendo em conta estes factos e que $t+1 \geq 2$, vamos supôr, sem perda de generalidade, que $n_{t+1} = \max\{n_1, ..., n_{t+1}\}$ e $n_t = \max\{n_1, ..., n_t\}$.

Consideremos agora que φ é a restrição a L da projecção $p : \prod_{i=1}^{t+1} X_i \longrightarrow \prod_{i=1}^{t} X_i$. Então $\varphi(\mathcal{L})$ é subálgebra de $\prod_{i=1}^{t} \mathcal{X}_i$ e produto subdirecto de $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in\{1,...,t\}}$. Logo, por hipótese de indução, $\varphi(\mathcal{L})$ tem, pelo menos, $t+1$ pontos fixos:

$$(x_1^j, ..., x_t^j) \text{ com } j \in \{1,...,t+1\} \text{ e } x_i^j \in \mathrm{Fix}(\mathcal{X}_i), \text{ para } i \in \{1,...,t\}.$$

Como $(x_1^j, ..., x_t^j) \in \varphi(\mathcal{L})$ para cada $j \in \{1,...,t+1\}$, e φ é a restrição a L da projecção p, existem $y^j \in X_{t+1}$, $j \in \{1,...,t+1\}$, tais que $(x_1^j, ..., x_t^j, y^j) \in L$.

Então, para cada $j \in \{1,...,t+1\}$, também temos que $(x_1^j, ..., x_t^j, z^j) \in L$, onde $z^j = \phi_{t+1}^2(y^j) \vee ... \vee \phi_{t+1}^{2n_{t+1}}(y^j)$ e, como $\mathcal{X}_{t+1}$ é uma álgebra-MS$_{\mathrm{n_{t+1}}}$ e é s.i., $z^j \in (X_{t+1})_{1,0} = \{0,1\} \cup \mathrm{Fix}(\mathcal{X}_{t+1})$.

Seja $x^j = (x_1^j, ..., x_t^j, z^j)$ e, dado $j \in \{1,...,t+1\}$, represente-se por g^j a sequência das primeiras t componentes de x^j, i.e., $g^j = (x_1^j, ..., x_t^j)$. Note-se que dados j_1, $j_2 \in \{1,...,t+1\}$, se $j_1 \neq j_2$, então $g^{j_1} \neq g^{j_2}$ e $x^{j_1} \neq x^{j_2}$.

No texto que se segue denotamos por w_{t+1} e $c(w_{t+1})$ os pontos fixos de $\mathcal{X}_{t+1}$ e, dado que a álgebra $\mathcal{L}$ se encontra nas condições do lema anterior, sabemos que existem $q_i \in \{0\} \cup \mathrm{Fix}(\mathcal{X}_i)$, $i \in \{1, ..., t\}$, tais que $(q_1,\ ...,\ q_t,\ w_{t+1}) \in L$ e $(q_1,\ ...,\ q_t,\ c(w_{t+1})) \in L$. Sejam $e^1 = (q_1, ..., q_t,\ w_{t+1})$ e $e^2 = (q_1, ..., q_t,\ c(w_{t+1}))$.

Relativamente aos elementos $x^1, ..., x^{t+1}$ vamos agora agrupá-los em quatro conjuntos:

- $Z_1 = \{x^j \in \{x^1, ..., x^{t+1}\} : z^j = 0\}$;

- $Z_2 = \{x^j \in \{x^1, ..., x^{t+1}\} : z^j = 1\}$;

- $Z_3 = \{x^j \in \{x^1, ..., x^{t+1}\} : z^j = w_{t+1}\}$;

- $Z_4 = \{x^j \in \{x^1, ..., x^{t+1}\} : z^j = c(w_{t+1})\}$.

Como $|Z_1| + |Z_2| + |Z_3| + |Z_4| = t + 1$, prosseguimos o estudo considerando dois casos: $|Z_3| + |Z_4| = t + 1$ e $|Z_3| + |Z_4| < t + 1$.

a) $|Z_3|+|Z_4| = t+1$: Neste caso a álgebra $\mathcal{L}$ tem, pelo menos, $t+1$ pontos fixos. Tem-se também $Z_3 \neq \emptyset$ e/ou $Z_4 \neq \emptyset$; suponha-se, sem perda de generalidade, que $Z_3 \neq \emptyset$.

Dado $x^j \in Z_3$ seja $u^j = (x^j \wedge (f(e^1) \wedge f(e^2))) \vee e^2$.

Note-se que $u^j \in L$ e $u_i^j = \begin{cases} x_i^j & \text{se } i \in \{1, ..., t\} \text{ e } q_i = 0 \\ q_i & \text{se } i \in \{1, ..., t\} \text{ e } q_i \in \mathrm{Fix}(\mathcal{X}_i) \\ c(w_{k+1}) & \text{se } i = t + 1 \end{cases}$.

O elemento u^j é um ponto fixo de $\mathcal{L}$ e tem-se que $u^j \notin Z_3$ uma vez que $u_{t+1}^j = c(w_{t+1})$. Temos, agora, duas hipóteses: $u^j \notin Z_4$ (caso i) ou $u^j \in Z_4$ (caso ii).

Caso i: Se $u^j \notin Z_4$, então $\mathcal{L}$ tem mais um ponto fixo, além dos $t+1$ pontos fixos já existentes.

Caso ii: Se $u^j \in Z_4$ também conseguimos provar a existência de mais um ponto fixo de $\mathcal{L}$. De facto, se considerarmos o elemento $v^j = (u^j \wedge (f(e^1) \wedge f(e^2))) \vee e^1$ tem-se que:

- $v_i^j = \begin{cases} u_i^j = x_i^j & \text{se } i \in \{1, ..., t\} \text{ e } q_i = 0 \\ u_i^j = q_i & \text{se } i \in \{1, ..., t\} \text{ e } q_i \in \mathrm{Fix}(\mathcal{X}_i) \\ w_{k+1} & \text{se } i = t+1 \end{cases}$

  e, portanto, v^j é um ponto fixo de $\mathcal{L}$;

- $v^j \notin Z_4$ pois $v_{t+1}^j = w_{t+1}$;

- $v^j \notin Z_3$ porque $(v_i^j)_{i\in\{1,\ldots,t\}} = (u_i^j)_{i\in\{1,\ldots,t\}}$ e como $u^j \in Z_4$, então $(u_i^j)_{i\in\{1,\ldots,t\}} \neq g^l$, para todo $x^l \in Z_3$.

Logo concluimos em qualquer dos casos que $\mathcal{L}$ tem, pelo menos, mais um ponto fixo, i.e., $\mathcal{L}$ tem, pelo menos, $t+2$ pontos fixos.

b) $|Z_3| + |Z_4| < t+1$: Consideremos agora a situação em que $|Z_3| + |Z_4| = s_3 < t+1$ (note-se que se $s_3 \neq 0$, a álgebra $\mathcal{L}$ tem, pelo menos, s_3 pontos fixos). Então $|Z_1| + |Z_2| \geq 1$, donde resulta que $|Z_1| = s_1 \geq 1$ e/ou $|Z_2| = s_2 \geq 1$. Suponha-se, sem perda de generalidade, que $|Z_1| \geq 1$.

Dado $x^j \in Z_1$, sejam $s^j = (x^j \vee f(e^1)) \wedge f(x^j)$ e $t^j = (x^j \vee f(e^2)) \wedge f(x^j)$. Temos então:

- $s^j \neq t^j$ pois $s_{t+1}^j = w_{t+1}$ e $t_{t+1}^j = c(w_{t+1})$;

- s^j e t^j são pontos fixos de $\mathcal{L}$;

- $(s_i^j)_{i\in\{1,\ldots,t\}} = (t_i^j)_{i\in\{1,\ldots,t\}} = (x_i^j)_{i\in\{1,\ldots,t\}} = g^j$;

- $s^j \notin Z_4$ pois $s^j_{t+1} = w_{t+1}$;

- $s^j \notin Z_3$ pois $(s^j_i)_{i\in\{1,\dots,t\}} = g^j$, $x^j \in Z_1$ e $g^j \neq g^l$, para todo o $x^l \in Z_3$;

- $t^j \notin Z_3$ pois $t^j_{t+1} = c(w_{t+1})$;

- $t^j \notin Z_4$ pois $(t^j_i)_{i\in\{1,\dots,t\}} = g^j$, $x^j \in Z_1$ e $g^j \neq g^l$, para todo o $x^l \in Z_4$;

- dados $x^{j_1}, x^{j_2} \in Z_1$ tais que $x^{j_1} \neq x^{j_2}$, temos $g^{j_1} \neq g^{j_2}$, logo $\{s^{j_1}, t^{j_1}\} \cap \{s^{j_2}, t^{j_2}\} = \emptyset$,

donde concluimos que a álgebra $\mathcal{L}$ tem, então, mais $2.s_1$ pontos fixos: s^j, t^j, com $j \in \{1, ..., s_1\}$.

No caso em que $s_2 = 0$, a álgebra $\mathcal{L}$ tem, pelo menos, $s_3 + 2.s_1$ pontos fixos e, como $s_3 + s_1 = t + 1$ e $s_1 \geq 1$, vem que $s_3 + 2.s_1 \geq t + 2$. Logo $\mathcal{L}$ tem, pelo menos, $t + 2$ pontos fixos.

Se $s_2 \geq 1$, a álgebra $\mathcal{L}$ tem, também, mais $2.s_2$ pontos fixos, distintos dos $2.s_1$ pontos fixos obtidos anteriormente (se $x^j \in Z_2$, então $g^j \neq g^i$, para todo $x^i \in Z_1$). Neste caso, a álgebra $\mathcal{L}$ tem, pelo menos, $s_3 + 2s_1 + 2s_2$ pontos fixos e, como $2s_1 > s_1$ e $2s_2 > s_2$, vem que $s_3 + 2.s_1 + 2.s_2 > s_3 + s_1 + s_2 = t + 1$. Assim, a álgebra $\mathcal{L}$ tem, pelo menos, $t + 2$ pontos fixos. ■

O resultado que acabámos de provar é essencial na prova do lema seguinte, o qual, por sua vez, nos permitirá concluir que se $\mathbf{V}$ é uma subvariedade de $\mathbf{MS}_n$ tal que $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ satisfaz a condição iii) e $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ contém exactamente k álgebras ($k \in \mathbb{N}$) com dois pontos fixos, então $\mathrm{C}_{\mathrm{fix}}(\mathbf{V}) \subseteq (\mathbb{N}_0 \setminus \{1, ..., k\}) \cup \{\aleph_0\}$.

Lema 2.6 *Seja* $\mathbf{V}$ *uma subvariedade de* $\mathbf{MS}_n$ *tal que* $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ *satisfaz a condição iii). Se* $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ *contém exactamente* k *álgebras com dois pontos fixos, com* $k \in \mathbb{N}$*, então* $m \notin \mathrm{C}_{\mathrm{fix}}(\mathbf{V})$*, para todo* $m \in \{1, ..., k\}$.

Demonstração : Seja $\mathrm{m}(\mathbf{V}) = \{\mathcal{Y}_1, ..., \mathcal{Y}_k, ..., \mathcal{Y}_{k+s}\}$ onde $s \in \mathbb{N}_0$, $|\mathrm{Fix}(\mathcal{Y}_p)| = 2$, para $p \in \{1, ..., k\}$ e $|\mathrm{Fix}(\mathcal{Y}_p)| = 1$, para $p \in \{k+1, .., k+s\}$. Observe-se que, dados $p, q \in \{1, ..., k\}$, as álgebras $\mathcal{Y}_p$, $\mathcal{Y}_q$ não são comparáveis para $p \neq q$.

Suponha-se que $m \in \mathrm{C_{fix}}(\mathbf{V})$, para $m \in \{1, ..., k\}$. Então existe uma álgebra $\mathcal{L} \in \mathbf{MS}_n$ tal que $V(\mathcal{L}) = \mathbf{V}$ e $|\mathrm{Fix}(\mathcal{L})| = m$.

Como $V(\mathcal{L}) = \mathbf{V}$, a álgebra $\mathcal{L}$ é produto subdirecto de uma família de álgebras pertencentes a $S(\{\mathcal{Y}_1\}) \cup ... \cup S(\{\mathcal{Y}_{k+s}\})$, em que cada $\mathcal{Y}_p$, $p \in \{1, ..., k+s\}$, ocorre, pelo menos, uma vez. Seja $I = \{1, ..., k\} \cup I'$, com $I' \subseteq \mathbb{N}_0$, e considere--se que $\mathcal{L}$ é produto subdirecto de $\{\mathcal{X}_i\}_{i \in I}$, $\mathcal{X}_i = (X_i, \phi_i)$, em que cada $\mathcal{X}_i \in S(\{\mathcal{Y}_1\}) \cup ... \cup S(\{\mathcal{Y}_{k+s}\})$; sem perda de generalidade, admita-se que, para cada $i \in \{1, ..., k\}$, $\mathcal{X}_i = \mathcal{Y}_i$.

Dado que a álgebra $\mathcal{L}$ tem m pontos fixos, com $m \in \{1, ..., k\}$, então $|\mathrm{Fix}(\mathcal{X}_i)| \neq 0$, para todo $i \in I$. Seja $I_1 = \{i \in I \mid |\mathrm{Fix}(\mathcal{X}_i)| = 2\}$; note-se que, por hipótese, $|I_1| \geq k$.

Para $j \in \{1, ..., m\}$, sejam $x^j = (x_i^j)_{i \in I}$ os pontos fixos de $\mathcal{L}$ (onde cada x_i^j é ponto fixo de $\mathcal{X}_i$), $g^j = (x_{_1}^j, ..., x_{_k}^j)$ e φ a restrição a L da projecção $p : \prod_{i \in I} X_i \to \prod_{i=1}^k X_{_i}$.

Dado que φ é a restrição a L da projecção p verifica-se que

- $g^j \in \varphi(L)$, para todo $j \in \{1, ..., m\}$, e cada g^j é um ponto fixo de $\varphi(\mathcal{L})$;
- $\varphi(\mathcal{L})$ é subálgebra de $\prod_{i=1}^k \mathcal{Y}_{_i}$ e produto subdirecto de $\{\mathcal{Y}_{_i}\}_{i \in \{1,...,k\}}$ e, pelo Teorema 2.5, sabe-se que $\varphi(\mathcal{L})$ tem, pelo menos, $k+1$ pontos fixos.

Atendendo a que $k+1 > m$, então $\varphi(\mathcal{L})$ tem, pelo menos, mais $(k+1) - m$ pontos fixos $g^l = (x_1^l, ..., x_k^l)$, com $l \in \{m+1, ..., k+1\}$.

Usando, novamente, o facto de que φ é a restrição a L da projecção p, sabemos que, para cada $l \in \{m+1, ..., k+1\}$, existem $x_i^l \in X_i$, com $i \in I \setminus \{1, ..., k\}$, tais que $r^l = (x_i^l)_{i \in I} \in L$.

Consideremos agora que $u^l = f^2(r^l) \vee ... \vee f^{2n}(r^l)$, com $l \in \{m+1, ..., k+1\}$. Então, para todo $i \in \{1, ..., k\}$, $u_i^l \in \mathrm{Fix}(\mathcal{X}_i)$ e, para todo $i \in I \setminus \{1, ..., k\}$, $u_i^l = \phi_i^2(r_i^l) \vee ... \vee \phi_i^{2n}(r_i^l) \in (X_i)_{1,0}$ (pois $r_i^l \in X_i$ e $\mathcal{X}_i \in \mathbf{MS}_{n_i}$, sendo n_i um divisor de n). Por sua vez, como $\mathcal{X}_i$ é uma álgebra s.i. sabemos que $(X_i)_{1,0} = \{0, 1\} \cup \mathrm{Fix}(\mathcal{X}_i)$.

Fixando x^j (um dos pontos fixos de $\mathcal{L}$), $j \in \{1, ..., k\}$, seja $v^l = (x^j \wedge (u^l \vee f(u^l)) \vee (u^l \wedge f(u^l))$, com $l \in \{m+1, ..., k+1\}$. Relativamente a cada elemento v^l é simples verificar que se trata de um ponto fixo de $\mathcal{L}$. De facto, dado $i \in I$:

$$v_i^l = \begin{cases} x_i^j & \text{se } u_i^l \in \{0, 1, x_i^j\} \\ c(x_i^j) & \text{se } u_i^l = c(x_i^j) \end{cases}$$

e tem-se $(v_i^l)_{i \in \{1,...,k\}} = (u_i^l)_{i \in \{1,...,k\}} = g^l$.

Desta forma, a álgebra $\mathcal{L}$ tem como pontos fixos todos os elementos de $\{x^1, ..., x^m, v^{m+1}, ..., v^{k+1}\}$, onde

- $x^{j_1} \neq x^{j_2}$, para $j_1, j_2 \in \{1, ..., m\}$ e $j_1 \neq j_2$,
- $v^l \neq x^j$, para cada $l \in \{m+1, ..., k+1\}$ e $j \in \{1, ..., m\}$, uma vez que $(v_i^l)_{i \in \{1,...,k\}} = g^l$ e $g^l \neq g^j$, para todo o $j \in \{1, ..., m\}$.
- $v^{l_1} \neq v^{l_2}$, para $l_1, l_2 \in \{m+1, ..., k+1\}$ e tais que $l_1 \neq l_2$, pois $(v_i^{l_1})_{i \in \{1,...,k\}} = g^{l_1}$, $(v_i^{l_2})_{i \in \{1,...,k\}} = g^{l_2}$ e $g^{l_1} \neq g^{l_2}$,

o que significa que a álgebra $\mathcal{L}$ tem, pelo menos, $k+1$ pontos fixos, onde $k+1 > m$, contrariando assim a hipótese de que $\mathcal{L}$ tinha m pontos fixos. Logo, $m \notin \mathrm{C}_{\mathrm{fix}}(\mathbf{V})$, para todo o $m \in \{1, ..., k\}$. ■

Como consequência imediata do resultado que acabámos de provar obtemos o seguinte teorema:

Teorema 2.7 *Seja* $\mathbf{V}$ *uma subvariedade de* $\mathbf{MS}_n$ *tal que* $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ *satisfaz a condição iii). Se* $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ *contém exactamente* k *álgebras* ($k \in \mathbb{N}$) *com dois pontos fixos, então* $\mathrm{C}_{\mathrm{fix}}(\mathbf{V}) \subseteq (\mathbb{N}_0 \backslash \{1, ..., k\}) \cup \{\aleph_0\}$.

Demonstração: Suponha-se que $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ contém exactamente k álgebras, $k \in \mathbb{N}$, com dois pontos fixos. Dado que $\mathbf{V}$ tem, pelo menos, uma álgebra com dois pontos fixos, então $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$ e, neste caso, só consideramos álgebras contáveis. Então $\mathrm{C}_{\mathrm{fix}}(\mathbf{V}) \subseteq \mathbb{N}_0 \cup \{\aleph_0\}$. Por aplicação do lema anterior, sabemos que $j \notin \mathrm{C}_{\mathrm{fix}}(\mathbf{V})$, para qualquer $j \in \{1, ..., k\}$. Logo $\mathrm{C}_{\mathrm{fix}}(\mathbf{V}) \subseteq (\mathbb{N}_0 \setminus \{1, ..., k\}) \cup \{\aleph_0\}$. ■

Como vamos verificar, a inclusão estabelecida neste teorema é, de facto, uma igualdade. Começamos por analisar o caso em que $\mathbf{V}$ é uma subvariedade de $\mathbf{MS_n}$ tal que $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ satisfaz a condição iii) e $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ tem exactamente uma álgebra com dois pontos fixos. O estudo deste caso é uma generalização de [22, Teorema 3] e a sua prova é feita recorrendo às álgebras que apresentamos a seguir.

Seja H a cadeia $-\infty < ... < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < ... < +\infty$ e consideremos o endomorfismo dual de $H \times H$ definido por $f(p, q) = (-q, -p)$. Então $\mathcal{H} \times \mathcal{H} = (H \times H, f) \in \mathbf{M} = V(\mathcal{B}_2)$ e $|\mathrm{Fix}(\mathcal{H} \times \mathcal{H})| = \aleph_0$, [28].

Dados $p \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, seja $\underline{q}$ a cadeia $x_0 < x_1 < ... < x_{q-1}$ e defina-se a operação unária g em $\underline{q}^{2p}$ da seguinte forma:

$$g(x_{k_0}, x_{k_1}, ..., x_{k_{2p-1}}) = (x_{q-1-k_{2p-1}}, x_{q-1-k_0}, x_{q-1-k_1} ..., x_{q-1-k_{2p-2}}),$$
$$\forall\, (x_{k_0}, x_{k_1}, ..., x_{k_{2p-1}}) \in \underline{q}^{2p}.$$

Seja $\mathcal{Y}_q^p = (\underline{q}^{2p}, g)$. Verifica-se facilmente que $\mathcal{Y}_q^p \in \mathbf{K}_{p,0}$ e que

$$\mathrm{Fix}(\mathcal{Y}_q^p) = \{(x_k, x_{q-1-k}, x_k, ..., x_{q-1-k}) \mid 0 \leq k \leq q-1\}.$$

Temos então $|\mathrm{Fix}(\mathcal{Y}_q^p)| = q$.

Para $0 \leq i \leq 2p-1$, seja $p_i : \underline{q}^{2p} \to \underline{q}$ a projecção no factor i de $\underline{q}^{2p}$. Dados $0 \leq j \leq 2p-1$ e $1 \leq k \leq q-1$ defina-se $x_{j,k}$ como o elemento de $\underline{q}^{2p}$ tal que $p_j(x_{j,k}) = x_k$ e $p_i(x_{j,k}) = 0$, para $0 \leq i \leq 2p-1$ e $i \neq j$. O conjunto de elementos $\vee$-irredutíveis de $\underline{q}^{2p}$ é $J(\underline{q}^{2p}) = \{x_{j,k} \mid 0 \leq j \leq 2p-1, 1 \leq k \leq q-1\}$. Sendo $A = \{x_{i,q-1} \mid 0 \leq i \leq 2p-1\}$, então $(\mathrm{Sg}^{\mathcal{Y}_q^p}(A), \wedge, \vee)$ é um reticulado de Boole de átomos $x_{i,q-1}$, $0 \leq i \leq 2p-1$. A álgebra $\mathcal{S}\mathrm{g}^{\mathcal{Y}_q^p}(A) = (\mathrm{Sg}^{\mathcal{Y}_q^p}(A), g)$ é uma álgebra-$\mathrm{K}_{\mathrm{p},0}$ e é tal que $g(x_{i,q-1}) = c(x_{i+1(\mathrm{mod}\,2p),q-1})$, $0 \leq i \leq 2p-1$. Como $\mathcal{S}\mathrm{g}^{\mathcal{Y}_q^p}(A) \simeq \mathcal{B}_{2p}$ e $\mathbf{K}_{p,0} = V(\mathcal{B}_{2p})$, [28, Teorema 2.13], podemos concluir que $\mathcal{Y}_q^p$ gera $\mathbf{K}_{p,0}$.

Então, dado $p \in \mathbb{N}$, tem-se que, para todo $q \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, existe uma álgebra que gera $\mathbf{K}_{p,0}$ e que tem exactamente q pontos fixos.

Para a álgebra que a seguir se define, consideramos $q \geq 3$. Dados $0 \leq j \leq 2p-1$ e $1 \leq k \leq q-1$, representa-se por $y_{j,k}$ o elemento de $\underline{q}^{2p}$ tal que

$$p_{j+1(\mathrm{mod}\,2p)}(y_{j,k}) = \begin{cases} x_{q-2-k} & \text{se } k \leq q-2 \\ x_0 & \text{se } k = q-1 \end{cases}$$

$$p_i(y_{j,k}) = x_{q-1}, \quad 0 \leq i \leq 2p-1,\ i \neq j+1(\mathrm{mod}\,2p).$$

Seja h o endomorfismo dual de $\underline{q}^{2p}$ induzido por $h(x_{j,k}) = y_{j,k}$, $\forall\ x_{j,k} \in J(\underline{q}^{2p})$ e seja $\mathcal{W}_q^p = (\underline{q}^{2p}, h)$. É fácil verificar que $\mathcal{W}_q^p \in \mathbf{MS}_p$ e que

$$\begin{aligned}\mathrm{Fix}(\mathcal{W}_q^p) = &\{(x_k, x_{q-2-k}, x_k, ..., x_{q-2-k}) : 1 \leq k \leq q-3\} \\ &\cup \{(x_0, x_{q-1}, x_0, ..., x_{q-1}), (x_{q-1}, x_0, x_{q-1}, ..., x_0)\}.\end{aligned}$$

A álgebra $\mathcal{W}_q^p$ tem $q-1$ pontos fixos.

Consideremos o conjunto $A = \{x_{i,q-1} \mid 0 \leq i \leq 2p-1\} \cup \{x_{0,q-2}\}$, formado por elementos $\vee$-irredutíveis de $\mathcal{W}_q^p$; observe-se que A é união disjunta de uma cadeia com dois elementos, $x_{0,q-1} > x_{0,q-2}$, e $2p-1$ cadeias singulares, $x_{i,q-1}$, $1 \leq i \leq 2p-1$. A álgebra $\mathcal{S}\mathrm{g}^{\mathcal{W}_q^p}(A) = (\mathrm{Sg}^{\mathcal{W}_q^p}(A), h)$ é uma álgebra de $\mathbf{MS}_p$ e é tal que $h(x_{i,q-1}) = c(x_{i+1(\mathrm{mod}\, 2p),q-1}))$, $0 \leq i \leq 2p-1$, e $h(x_{0,q-2}) = c(x_{1,q-1})$. Como $\mathcal{S}\mathrm{g}^{\mathcal{W}_q^p}(A) \cong \mathcal{U}_{2p}$ e $\mathbf{MS}_p = V(\mathcal{U}_{2p})$ (Teorema 0.13), podemos concluir que $\mathcal{W}_q^p$ gera $\mathbf{MS}_p$.

Então, dado $p \in \mathbb{N}$, resulta que, para todo $\alpha \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, existe uma álgebra que gera $\mathbf{MS}_p$ e que tem exactamente α pontos fixos.

Recorrendo às álgebras definidas prova-se, então, que:

Teorema 2.8 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{V}$ uma subvariedade de $\mathbf{MS}_n$ que satisfaz iii) e tal que em* $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ *existe exactamente uma álgebra com dois pontos fixos.*
Então $\mathrm{C_{fix}}(\mathbf{V}) = (\mathbb{N}_0\backslash\{1\}) \cup \{\aleph_0\}$.

Demonstração: Do Teorema 2.7 sabe-se que $\mathrm{C_{fix}}(\mathbf{V}) \subseteq (\mathbb{N}_0 \setminus \{1\}) \cup \{\aleph_0\}$. Falta então provar que, para todo $\alpha \in (\mathbb{N}_0 \setminus \{1\}) \cup \{\aleph_0\}$, existe uma álgebra $\mathcal{L} \in \mathbf{V}$ tal que $V(\mathcal{L}) = \mathbf{V}$. Seja $\mathrm{m}(\mathbf{V}) = \{\mathcal{X}, \mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_t\}$ e suponha-se que $|\mathrm{Fix}(\mathcal{X})| = 2$ e $|\mathrm{Fix}(\mathcal{X}_i)| = 1$, para todo $i \in \{1, ..., t\}$. Consideremos, agora, os seguintes casos: $t = 0$ e $t > 0$.

a) $t = 0$: Relativamente a $\mathcal{X}$ sabemos que

$$\mathcal{X} \in \{\mathcal{B}_{2p} : p \in \mathbb{N} \text{ e } p \mid n\} \cup \{\mathcal{U}_{2p} : p \in \mathbb{N} \text{ e } p \mid n\}.$$

Se $\mathcal{X} = \mathcal{B}_{2p}$, com $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \mid n$, então $\mathbf{V} = V(\mathcal{B}_{2p}) = V(\mathcal{B} \times \mathcal{B}_{2p})$ $= V((\mathcal{H} \times \mathcal{H}) \times \mathcal{B}_{2p})$, e tem-se $|\mathrm{Fix}(\mathcal{B} \times \mathcal{B}_{2p})| = 0$, $|\mathrm{Fix}((\mathcal{H} \times \mathcal{H}) \times \mathcal{B}_{2p})| = \aleph_0$.

Sabemos também que $\mathbf{V} = V(\mathcal{B}_{2p}) = V(\mathcal{Y}_q^p)$, para qualquer $q \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, e Fix$(\mathcal{Y}_q^p)| = q$.

Se $\mathcal{X} = \mathcal{U}_{2p}$, com $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \mid n$, o caso é análogo. Tem-se $\mathbf{V} = V(\mathcal{U}_{2p})$ $= V(\mathcal{B} \times \mathcal{U}_{2p}) = V((\mathcal{H} \times \mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{2p})$ e $|\mathrm{Fix}(\mathcal{U}_{2p})| = 2$, $|\mathrm{Fix}(\mathcal{B} \times \mathcal{U}_{2p})| = 0$, $|\mathrm{Fix}((\mathcal{H} \times \mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{2p})| = \aleph_0$. Como já vimos, também temos $\mathbf{V} = V(\mathcal{U}_{2p})$ $= V(\mathcal{W}_q^p)$, para qualquer $q \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$, e $|\mathrm{Fix}(\mathcal{W}_q^p)| = q - 1$.

Então, em qualquer dos casos, temos $\mathrm{C_{fix}}(\mathbf{V}) = (\mathbb{N}_0 \setminus \{1\}) \cup \{\aleph_0\}$.

b) $t > 0$: Como $\mathrm{m}(\mathbf{V}) = \{\mathcal{X}, \mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_t\}$, então $\mathbf{V} = V(\mathcal{X}) \vee V(\mathcal{X}_1) \vee ... \vee V(\mathcal{X}_t)$. Por a) sabemos que, para todo $\alpha \in (\mathbb{N}_0 \setminus \{1\}) \cup \{\aleph_0\}$, existe uma álgebra $\mathcal{L}_0$ tal que $V(\mathcal{L}_0) = V(\mathcal{X})$ e $|\mathrm{Fix}(\mathcal{L}_0)| = \alpha$. Se consideramos $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \times \prod_{i=1}^{t} \mathcal{X}_i$ temos $\mathbf{V} = V(\mathcal{L})$ e $|\mathrm{Fix}(\mathcal{L})| = |\mathrm{Fix}(\mathcal{L}_0)|$. ■

Em [22, Teorema 7], M. Sequeira provou que se $\mathbf{V}$ é uma subvariedade de $\mathbf{MS}_2$ que satisfaz iii) e tal que $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ tem exactamente duas álgebras com dois pontos fixos, então $\mathrm{C_{fix}}(\mathbf{V}) = (\mathbb{N}_0 \setminus \{1,2\}) \cup \{\aleph_0\}$. Neste trabalho, foi possível obter um resultado semelhante para o caso em que $\mathbf{V}$ é uma subvariedade de $\mathbf{MS}_n$ que satisfaz iii) e $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ tem exactamente k álgebras com dois pontos fixos, com $k \geq 2$. Tal resultado é conseguido recorrendo aos factos que a seguir demonstramos.

Sejam $k \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, ..., k\}$, $p_i \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{A}_i = (A_i, f_i) \in \mathbf{O}$ tal que $\mathcal{A}_i$ tem p_i pontos fixos, w_i^l, $l \in \{1, ..., p_i\}$. Consideremos $\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{k} \mathcal{A}_i$ e os seguintes conjuntos:

$$
\begin{aligned}
X_i &= \{(a_1, ..., a_k) \in L : \ a_j = w_j^1, \forall\, j \in \{1, ..., k\}\backslash\{i\}\}, \text{ com } i \in \{1, ..., k\}, \\
X &= \bigcup_{i=1}^{k} X_i,
\end{aligned}
$$

$$I = \{(a_1, ..., a_k) \in L \mid \forall\ i \in \{1, ..., k\},\ \exists\ x_i \in A_i : a_i = x_i \wedge w_i^1\} \quad \text{e}$$

$$S = \{(a_1, ..., a_k) \in L \mid \forall\ i \in \{1, ..., k\},\ \exists\ x_i \in A_i : a_i = x_i \vee w_i^1\}.$$

Relativamente a estes conjuntos prova-se que se C é um subconjunto finito de X, então $\bigwedge C, \bigvee C \in X \cup I \cup S$. De facto,

- se $C = \emptyset$, então $\bigwedge C$ e $\bigvee C$ são, respectivamente, o elemento máximo e o elemento mínimo de L, e tem-se que $\bigwedge C \in S$ e $\bigvee C \in I$;
- se C é um conjunto singular, o resultado é óbvio;
- no caso em que $C = \{a, b\}$, é simples verificar que $a \wedge b$, $a \vee b \in X \cup I \cup S$. Como a, $b \in X$, então $a \in X_i$ e $b \in X_j$, com i, $j \in \{1, ..., k\}$. Se $i = j$ temos que $a \wedge b$, $a \vee b \in X_i \subseteq X$. No caso em que $i \neq j$, tem-se que $a \wedge b \in I$ e $a \vee b \in S$.

A prova de que $\bigwedge C, \bigvee C \in X \cup I \cup S$, para qualquer outro subconjunto finito C, pode fazer-se por indução no número de elementos de C.

Proposição 2.9 *Sejam $k \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, ..., k\}$, $p_i \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{A}_i = (A_i, f_i) \in \mathbf{O}$, tal que $\mathcal{A}_i$ tem p_i pontos fixos, w_i^l, $l \in \{1, ..., p_i\}$. Seja $\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{k} \mathcal{A}_i$, e sejam X, I e S os conjuntos definidos anteriormente.*
Então $Sg^{\mathcal{L}}(X) \subseteq X \cup I \cup S$.

Demonstração: Seja $\mathcal{L} = (\prod_{i=1}^{k} A_i, f)$. Dado que $X \subseteq f(X)$ resulta de [28, Lema 2.18] que $\mathrm{Sg}^{\mathcal{L}}(X)$ coincide com o subuniverso do reticulado gerado por X, i.e., $\mathrm{Sg}^{\mathcal{L}}(X) = \{\bigvee_{j \in J}(\bigwedge Y_j) : J \subseteq\cdot\ \mathbb{N}_0,\ Y_j \subseteq\cdot\ X,\ \forall j \in J\}$.

Seja $x \in \mathrm{Sg}^{\mathcal{L}}(X)$, então $x = \bigvee_{j \in J} (\bigwedge Y_j)$, com $J \subseteq \mathbb{N}_0$ tal que $|J| \in \mathbb{N}_0$, e com $Y_j \subseteq\cdot\ X$, $\forall\ j \in J$. Por indução no cardinal de J, prova-se que todo o elemento de $\mathrm{Sg}^{\mathcal{L}}(X)$ é um elemento de $X \cup I \cup S$. Para cada $u \in \mathbb{N}_0$ representemos por $A(u)$ a afirmação seguinte: "se $x = \bigvee_{j \in J}(\bigwedge Y_j)$, com $J \subseteq \mathbb{N}_0$ tal que $|J| = u$, e com $Y_j \subseteq\cdot X$, $\forall\, j \in J$, então $x \in X \cup I \cup S$". Vamos então provar que $A(u)$ é verdadeira, para todo $u \in \mathbb{N}_0$.

A afirmação $A(0)$ é verdadeira.

A afirmação $A(1)$ é também verdadeira. De facto, se $x = \bigwedge Y$, para algum $Y \subseteq\cdot X$, então, tal como já observámos, $x \in X \cup I$.

Assumindo que $A(s)$ é verdadeira, para certo $s \in \mathbb{N}_0$, vamos verificar que o mesmo acontece para $A(s+1)$. Seja $y = \bigvee_{r\in R}(\bigwedge Z_r)$ em que $R \subseteq \mathbb{N}_0$, $|R| = s+1$ e, para cada $r \in R$, $Z_r \subseteq\cdot X$. Sendo $R = \{r_1, ..., r_s, r_{s+1}\}$ temos $y = \bigwedge Z_{r_1} \vee (\bigvee_{r\in R\setminus\{r_1\}}(\bigwedge Z_r))$. Dado que $|Z_{r_1}| \in \mathbb{N}_0$ já sabemos que $y' = \bigwedge Z_{r_1} \in X \cup I \cup S$. Sendo $y'' = \bigvee_{r\in R\setminus\{r_1\}}(\bigwedge Z_r)$, resulta, da hipótese de indução, que $y'' \in X \cup I \cup S$. Dado que $y, y' \in X \cup Y \cup S$ é simples provar que $y = y' \vee y'' \in X \cup I \cup S$. Com efeito, temos o seguinte:

1) caso $y' \in X$, então $y' \in X_i$, para algum $i \in \{1, ..., k\}$, e:
   - i) se $y'' \in X$, então $y' \vee y'' \in X \cup S$;
   - ii) se $y'' \in I$, então $y' \vee y'' \in X_i \subseteq X$;
   - iii) se $y'' \in S$, resulta que $y' \vee y'' \in S$;

2) caso $y' \in I$:
   - i) se $y'' \in I$, então $y' \vee y'' \in I$;
   - ii) se $y'' \in S$, resulta que $y' \vee y'' \in S$;

3) caso $y' \in S$ e $y'' \in S$, então $y' \vee y'' \in S$.

Todos os outros casos ($y' \in I$ e $y'' \in X$, $y' \in S$ e $y'' \in X$, $y' \in S$ e $y'' \in I$) são análogos e em todos eles concluímos que $y = y' \vee y'' \in X \cup I \cup S$.

Assim, $A(u)$ é verdadeira para qualquer $u \in \mathbb{N}_0$. Logo $\mathrm{Sg}^{\mathcal{L}}(X) \subseteq X \cup I \cup S$. ■

Recorrendo a esta proposição prova-se então o seguinte:

Proposição 2.10 *Sejam* $k, p \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, ..., k\}$ *e* $\mathcal{A}_i = (A_i, f_i) \in \mathbf{O}$, *tais que*

- $\mathcal{A}_1$ *tem* p *pontos fixos,* w_1^l, $l \in \{1, ..., p\}$,

- *para* $j \in \{2, ..., k\}$, $\mathcal{A}_j$ *tem dois pontos fixos complementares,* w_j^1 *e* w_j^2.

Seja $\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{k} \mathcal{A}_i$, *e sejam*

$$X_i = \{(a_1, ..., a_k) \in L : a_j = w_j^1, \ \forall\ j \in \{1, ..., k\} \backslash \{i\}\}, \text{ com } i \in \{1, ..., k\} \text{ e}$$

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i.$$

Então $\mathcal{S}\mathrm{g}^{\mathcal{L}}(X)$ *tem* $p + k - 1$ *pontos fixos e*

$$\begin{aligned} \mathrm{Fix}(\mathcal{S}\mathrm{g}^{\mathcal{L}}(X)) = \{&(w_1^l, w_2^1, ..., w_k^1) : l \in \{1, ..., p\}\} \\ &\cup \bigcup_{j=2}^{k} \{(w_1^1, ..., w_{j-1}^1, w_j^2, w_{j+1}^1, ..., w_k^1)\}. \end{aligned}$$

Demonstração: Consideremos os conjuntos

$$F = \{(w_1^l, w_2^1, ..., w_k^1) : l \in \{1, ..., p\}\} \cup \bigcup_{j=2}^{k} \{(w_1^1, ..., w_{j-1}^1, w_j^2, w_{j+1}^1, ..., w_k^1)\},$$

$$I = \{(a_1, a_2, ..., a_k) \in L \mid \forall\ i \in \{1, ..., k\}, \exists\ x_i \in A_i : a_i = x_i \wedge w_i^1\} \text{ e}$$

$$S = \{(a_1, a_2, ..., a_k) \in L \mid \forall i \in \{1, ..., k\}, \exists x_i \in A_i : a_i = x_i \vee w_i^1\}.$$

É óbvio que $F \subseteq \mathrm{Fix}(\mathcal{S}\mathrm{g}^{\mathcal{L}}(X))$. Para concluirmos que os conjuntos são iguais basta recorrermos à proposição anterior que estabelece que $\mathrm{Sg}^{\mathcal{L}}(X) \subseteq X \cup I \cup S$. Dado $x \in \mathrm{Fix}(\mathcal{S}\mathrm{g}^{\mathcal{L}}(X))$, temos que $x \in X \cup I \cup S$. Se $x \in X$ é fácil verificar que $x \in F$. Se $x \in I \cup S$, concluímos (atendendo a que os pontos fixos de cada $\mathcal{A}_i$, $i \in \{2, ..., k\}$, são complementares) que $x = (w_1^l, w_2^1, ..., w_k^1)$, para algum $l \in \{1, ..., p\}$, e portanto, $x \in F$. Logo $\mathrm{Fix}(\mathcal{S}\mathrm{g}^{\mathcal{L}}(X) = F$. ■

Dada uma álgebra s.i. de $\mathbf{MS}_n$ que tenha dois pontos fixos, sabemos que estes são complementares. Assim, o resultado que acabámos de demonstrar é útil na prova do seguinte teorema:

Teorema 2.11 *Sejam* $n, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ *e* $\mathbf{V}$ *uma subvariedade de* $\mathbf{MS}_n$ *que satisfaz iii) e tal que em* $\mathrm{m}(\mathbf{V})$ *existem exactamente* k *álgebras com dois pontos fixos. Então* $\mathrm{C_{fix}}(\mathbf{V}) = (\mathbb{N}_0 \backslash \{1, ..., k\}) \cup \{\aleph_0\}$.

Demonstração: Do Teorema 2.7 sabe-se que $\mathrm{C_{fix}}(\mathbf{V}) \subseteq (\mathbb{N}_0 \backslash \{1, ..., k\}) \cup \{\aleph_0\}$. Vamos então verificar que, para todo $\alpha \in (\mathbb{N}_0 \setminus \{1, ..., k\}) \cup \{\aleph_0\}$, existe, de facto, uma álgebra $\mathcal{L} \in \mathbf{V}$ tal que $V(\mathcal{L}) = \mathbf{V}$.
Seja $\mathrm{m}(\mathbf{V}) = \{\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_k, \mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_t\}$ e suponha-se, sem perda de generalidade, que $|\mathrm{Fix}(\mathcal{A}_i)| = 2$, para $i \in \{1, ..., k\}$ e $|\mathrm{Fix}(\mathcal{X}_i)| = 1$, para $i \in \{1, ..., t\}$. Tal como no teorema 2.8, consideramos os casos: $t = 0$ e $t > 0$.

a) $t = 0$: Neste caso temos

$$\mathbf{V} = V(\mathcal{A}_1) \vee ... \vee V(\mathcal{A}_k) = V(\mathcal{B} \times \mathcal{A}_1 \times ... \times \mathcal{A}_k) = V((\mathcal{H} \times \mathcal{H}) \times \mathcal{A}_1 \times ... \times \mathcal{A}_k),$$

com $|\mathrm{Fix}(\mathcal{B} \times \mathcal{A}_1 \times ... \times \mathcal{A}_k)| = 0$ e $|\mathrm{Fix}((\mathcal{H} \times \mathcal{H}) \times \mathcal{A}_1 \times ... \times \mathcal{A}_k)| = \aleph_0$.

Como vamos ver, para os restantes valores de α admissíveis, também existe uma álgebra em $\mathbf{V}$ que tem α pontos fixos e que gera $\mathbf{V}$.

Para todo $i \in \{1, ..., k\}$, $\mathcal{A}_i$ é uma álgebra s.i. de $\mathbf{MS}_n$ com dois pontos fixos, logo $\mathcal{A}_i \in \{\mathcal{B}_{2p} : p \in \mathbb{N},\, p \mid n\} \cup \{\mathcal{U}_{2p} : p \in \mathbb{N},\, p \mid n\}$.

Se $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}_{2p}$, para algum $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \mid n$, então, e tendo em conta que $q = \alpha - (k-1) \geq 2$, sabemos que $V(\mathcal{A}_1) = V(\mathcal{Y}_q^p)$ sendo $\mathcal{Y}_q^p = (\underline{q}^{2p}, g)$ uma álgebra com q pontos fixos. Assim, $\mathbf{V} = V(\mathcal{Y}_q^p) \vee V(\mathcal{A}_2) \vee ... \vee V(\mathcal{A}_k)$ $= V(\mathcal{Y}_q^p \times \mathcal{A}_2 \times ... \times \mathcal{A}_k)$. Sendo w_1^l, $l \in \{1, ..., \alpha - (k-1)\}$, os pontos fixos de $\mathcal{Y}_q^p$ e w_i^1, w_i^2 os pontos fixos de $\mathcal{A}_i$, para $i \in \{2, ..., k\}$, seja $\mathcal{Z}_\alpha$ a subálgebra de $\mathcal{L} = \mathcal{Y}_q^p \times \mathcal{A}_2 \times ... \times \mathcal{A}_k$ gerada por

$$X = \{(x, w_2^1, w_3^1, ..., w_k^1) : x \in \underline{q}^{2p}\} \cup \bigcup_{i=2}^{k} \{(w_1^1, ..., w_{i-1}^1, x, w_{i+1}^1, ..., w_k^1) : x \in A_i\}.$$

Da Proposição 2.10 resulta que $\mathcal{Z}_\alpha$ tem $q+(k-1)=\alpha$ pontos fixos e

$$\mathrm{Fix}(\mathcal{Z}_\alpha)=\{(w_1^j,w_2^1,...,w_k^1):j\in\{1,..,q\}\}\cup\bigcup_{i=2}^{k}\{(w_1^1,...,w_{i-1}^1,w_i^2,w_{i+1}^1,...w_k^1)\}$$

Para todo $i\in\{1,...,k\}$, verifica-se que

$$\mathcal{A}_i\cong\mathcal{S}g^{\mathcal{Z}_\alpha}(\{(w_1^1,w_2^1,...,w_{i-1}^1,x,w_{i+1}^1,...,w_k^1):x\in A_i\}).$$

Logo $\mathbf{V}=V(\mathcal{Z}_\alpha)$.

Se $\mathcal{A}_1=\mathcal{U}_{2p}$, para algum $p\in\mathbb{N}$ tal que $p\mid n$, o caso é análogo ao anterior. De facto, como $q=\alpha+1-(k-1)\geq 3$, também temos que $V(\mathcal{A}_1)=V(\mathcal{W}_q^p)$ sendo $\mathcal{W}_q^p=(\underline{q}^{2p},h)$ uma álgebra com $q-1$ pontos fixos. Então $\mathbf{V}=V(\mathcal{W}_q^p)\vee V(\mathcal{A}_2)\vee...\vee V(\mathcal{A}_k)=V(\mathcal{W}_q^p\times\mathcal{A}_2\times...\times\mathcal{A}_k)$. Sendo w_1^l, para $l\in\{1,...,q-1\}$, os pontos fixos de $\mathcal{W}_q^p$ e w_i^1, w_i^2 os pontos fixos de $\mathcal{A}_i$, com $i\in\{2,...,k\}$, seja $\mathcal{Z}_\alpha$ a subálgebra de $\mathcal{L}=\mathcal{W}_q^p\times\mathcal{A}_2\times...\times\mathcal{A}_k$ gerada por

$$X=\{(x,w_2^1,w_3^1,...,w_k^1):x\in\underline{q}^{2p}\}\cup\bigcup_{i=2}^{k}\{(w_1^1,...,w_{i-1}^1,x,w_{i+1}^1,...,w_k^1):x\in A_i\}.$$

De forma análoga ao caso anterior, concluimos que $\mathcal{Z}_\alpha$ tem α pontos fixos, e que $\mathbf{V}=V(\mathcal{Z}_\alpha)$.

b) $t>0$: Neste caso, temos $\mathbf{V}=V(\mathcal{A}_1)\vee...V(\mathcal{A}_k)\vee V(\mathcal{X}_1)\vee...\vee V(\mathcal{X}_t)$. Em a) já provámos que, para todo $\alpha\in(\mathbb{N}_0\setminus\{1,...,k\})\cup\{\aleph_0\}$, existe uma álgebra $\mathcal{L}_0$ tal que $V(\mathcal{L}_0)=V(\mathcal{A}_1)\vee...V(\mathcal{A}_k)$ e $|\mathrm{Fix}(\mathcal{L}_0)|=\alpha$. Tomando $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0\times\prod_{i=1}^t\mathcal{X}_i$ temos que $\mathbf{V}=V(\mathcal{L})$ e $|\mathrm{Fix}(\mathcal{L})|=\alpha$. ■

Dados $n\in\mathbb{N}$ e $\mathbf{V}$ uma subvariedade de $\mathbf{MS}_n$, já observámos que m($\mathbf{V}$) satisfaz exactamente uma das condições: i), ii) ou iii). Se m($\mathbf{V}$) satisfaz a condição iii) coloca-se naturalmente a seguinte questão: qual o número máximo de álgebras s.i. com dois pontos fixos que m($\mathbf{V}$) pode ter? Não tendo sido possível obter a resposta no caso geral, vamos, no entanto, analisar o que acontece em alguns casos particulares.

De acordo com o Teorema 0.10, as álgebras s.i. de $\mathbf{MS}_n$ com dois pontos fixos são, a menos de isomorfismo, os elementos de $\{\mathcal{B}_{2s}, \mathcal{U}_{2s} : s \in \mathbb{N} \text{ e } s \mid n\}$. Como foi referido no capítulo 0, dados $s, t \in \mathbb{N}$ verifica-se que:

- se $s \mid t$, então $\mathcal{U}_s$ é, a menos de isomorfismo, subálgebra de $\mathcal{U}_t$;
- se $s \mid t$, então $\mathcal{B}_s$ é, a menos de isomorfismo, subálgebra de $\mathcal{B}_t$;
- $(\mathcal{U}_t)_{t,0} \cong \mathcal{B}_t$.

Então, se $\mathbf{V}$ é uma subvariedade de $\mathbf{MS}_1$, resulta do Teorema 0.13 que m($\mathbf{V}$) só pode ter uma álgebra s.i com dois pontos fixos: $\mathcal{U}_2$ ou $\mathcal{B}_2$.

Vejamos, agora, o que acontece em $\mathbf{MS}_n$ se $n \geq 2$ e $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$, onde p_1, $p_2 \in \mathbb{N}$ são números primos distintos e k_1, $k_2 \in \mathbb{N}_0$.

No texto que se segue vamos supor, sem perda de generalidade, que $k_1 \leq k_2$ e, sendo $t = k_1 + k_2$, consideramos os elementos de $\{\mathcal{B}_{2s}, \mathcal{U}_{2s} : s \in \mathbb{N} \text{ e } s \mid n\}$ agrupados da seguinte forma:

$$C_l = \{\mathcal{B}_{2p_1^{e_1} p_2^{e_2}} \mid 0 \leq e_i \leq k_i, \forall\, i \in \{1, 2\},\, e_1 + e_2 = l\},\ l \in \{0, ..., t\}$$

e

$$D_l = \{\mathcal{U}_{2p_1^{e_1} p_2^{e_2}} \mid 0 \leq e_i \leq k_i, \forall\, i \in \{1, 2\},\, e_1 + e_2 = l\},\ l \in \{0, ..., t\}.$$

Dado $l \in \{0, ..., t\}$, os elementos de C_l (respectivamente, D_l) não são comparáveis entre si e, conclui-se facilmente que:

- $|C_l| = l + 1$ se $0 \leq l < k_1$;
- $|C_l| = k_1 + 1$ se $k_1 \leq l \leq k_2$;
- $|C_l| = k_1 - r + 1$ se $k_2 < l \leq t$, e onde $r = l - k_2$.

Logo

- $\max\{|C_l| : l \in \{0, ..., t\}\} = k_1 + 1$;

- $\max(\{|C_l| : l \in \{0, ..., t\}\} \backslash \{k+1\}) = k_1$;

- $\min\{l : l \in \{0, ..., t\}$ e $|C_l| = k_1 + 1\} = k_1$;

- se $|C_l| = k_1 + 1$, então $l \in \{k_1, ..., k_2\}$.

Sejam $m = \max\{|C_l| : l \in \{0, ..., t\}\}$ e $m' = \max(\{|C_l| : l \in \{0, ..., t\}\} \backslash \{m\})$.

Relativamente aos conjuntos anteriores salientamos também os seguintes factos:

1) Dados $l_1, l_2 \in \{0, ..., m'\}$ com $l_1 < l_2$, $k \in \{1, ..., |C_{l_1}|\}$ e $A \subseteq C_{l_1}$ com $|A| = k$, prova-se que, existe $B \subseteq C_{l_2}$ tal que $|B| \geq k+1$ e todo o elemento de B é comparável com algum elemento de A. Vejamos porquê:

Seja $A = \{\mathcal{B}_{2p_1^{u_i}p_2^{s_i}} : 1 \leq i \leq k\}$ um conjunto com k elementos (distintos dois a dois) de C_{l_1}. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $s_i < s_j$, para i, $j \in \{1, ..., k\}$ e $i < j$. Como $u_i + s_i = l_1 < l_2$, para $i \in \{1, ..., k\}$, então existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $u_i + s_i + d = l_2$. Dado que $l_2 \leq k_1 \leq k_2$ tem-se $u_i + d \leq k_1$ e $s_i + d \leq k_2$. Logo são elementos de C_{l_2} as álgebras do conjunto $B = \{\mathcal{B}_{2p_1^{u_i+d}p_2^{s_i}} : 1 \leq i \leq k\} \cup \{\mathcal{B}_{2p_1^{u_j}p_2^{s_j+d}} : 1 \leq j \leq k\}$. É fácil verificarmos que este conjunto tem, pelo menos, $k+1$ elementos. De facto, os elementos de $\{\mathcal{B}_{2p_1^{u_i+d}p_2^{s_i}} : 1 \leq i \leq k\}$ (respectivamente $\{\mathcal{B}_{2p_1^{u_j}p_2^{s_j+d}} : 1 \leq j \leq k\}$) são não comparáveis dois a dois e o elemento $\mathcal{B}_{2p_1^{u_1+d}p_2^{s_1}}$ não é comparável com qualquer elemento de $\{\mathcal{B}_{2p_1^{u_j}p_2^{s_j+r}} : 1 \leq j \leq k\}$ (note-se que $u_j < u_1$, $\forall j \in \{2, ..., k\}$). Como é óbvio, todo o elemento de B é comparável com algum elemento de A.

2) Tem-se $\max\{l : l \in \{0, ..., t\}$ e $|C_l| = m\} = k_2$. De forma análoga ao que foi feito em 1), dados $l_1, l_2 \in \{k_2, ..., t\}$ com $l_1 < l_2$, $k \in \{1, ..., |C_{l_2}|\}$ e $A \subseteq C_{l_2}$

com $|A| = k$, prova-se que existe $B \subseteq C_{l_1}$ tal que $|B| = k+1$ e todo o elemento de B é comparável com algum elemento de A.

3) Dados $l_1,\ l_2 \in \{0, ..., t\}$ tais que $|C_{l_1}| = |C_{l_2}| = m$, verifica-se que k ($k \in \{1, ..., |C_{l_1}|\}$) elementos de C_{l_1} são comparáveis com k elementos de C_{l_2}.

Dado que $|C_{l_1}| = |C_{l_2}| = m$, então $l_1, l_2 \in \{k_1, ..., k_2\}$. Suponha-se que $l_1 < l_2$ e seja $A = \{\mathcal{B}_{2p_1^{u_i}p_2^{s_i}} : 1 \leq i \leq k\}$ um conjunto com k elementos (distintos dois a dois) de C_{l_1}. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $s_i < s_j$, para $i,\ j \in \{1, ..., k\}$ tais que $i < j$. Como $u_i + s_i = l_1 < l_2$, para $i \in \{1, ..., k\}$, então existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $u_i + s_i + d = l_2$. Dado que $l_2 \leq k_2$ tem-se $s_i + d \leq k_2$. Logo são elementos de C_{l_2} as álgebras do conjunto $\{\mathcal{B}_{2p_1^{u_i}p_2^{s_i+d}} : 1 \leq i \leq k\}$. É fácil concluir que este último conjunto tem k elementos (distintos dois a dois) uma vez que $s_i < s_j$, para $i,\ j \in \{1, ..., k\}$ tais que $i < j$.

4) Sendo X um conjunto de elementos de $\bigcup_{l=0}^{t} C_l$, não comparáveis dois a dois, resulta de 1), 2) e 3) que $|X| \leq m$.

5) As observações anteriores são também válidas para os conjuntos D_l.

Sejam $\mathbf{V}$ uma subvariedade de $\mathbf{MS}_n$ e Y o conjunto de álgebras s.i. com dois pontos fixos que ocorrem em m($\mathbf{V}$). Então $Y = Y_1 \cup Y_2$ com $Y_1 \subseteq \bigcup_{l=0}^{t} C_l$ e $Y_2 \subseteq \bigcup_{q=0}^{t} D_q$. Sejam $j_1 = |Y_1|$ e $j_2 = |Y_2|$. Com base nas observações anteriores vamos então determinar o número máximo de elementos que Y pode ter.

De 4) sabemos que $|Y_1| \leq m$ e $|Y_2| \leq m$, logo $|Y| = |Y_1 \cup Y_2| \leq 2m$. Verifica-se ainda que:

- Se existem $i_1, i_2 \in \{1, ..., t\}$ tais que $i_1 \neq i_2$ e $|C_{i_1}| = |C_{i_2}| = m$, é possível ter $|Y| = 2m$; supondo, sem perda de generalidade, que $i_1 < i_2$, os elementos de

$C_{i_2} \cup D_{i_1}$ não são comparáveis entre si, logo se considerarmos $Y = C_{i_2} \cup D_{i_1}$ temos $|Y| = |C_{i_2}| + |D_{i_1}| = 2m$.

- Caso exista um único $i \in \{1, ..., t\}$ tal que $|C_i| = m$ e $|D_i| = m$, então o número máximo de elementos que podem ocorrer em Y é $m + m'$.

De facto, se $j_1 > m'$, e dado que $m = m' + 1$, resulta de 4) que $|Y_1| = m$. Do que foi observado em 1), 2) e 3), concluimos que $Y_1 = C_i$. De forma análoga, se $j_2 > m'$ temos $Y_2 = D_i$. Então, se admitirmos que $j_1 + j_2 > m + m'$, e dado que $j_1, j_2 \leq m$ e $m = m' + 1$, temos $j_1 = j_2 = m$; então $Y_1 = C_i$ e $Y_2 = D_i$. Mas, todo o elemento de C_i é subálgebra de um elemento de D_i, o que contradiz a hipótese de termos $j_1 + j_2$ álgebras não comparáveis duas a duas. Logo em Y podem existir, no máximo, $m + m'$ álgebras s.i. com dois pontos fixos.

Mostrámos assim que

Teorema 2.12 *Seja $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$, onde p_1, $p_2 \in \mathbb{N}$ são números primos distintos e $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ são tais que $k_1 \leq k_2$. Seja $t = k_1 + k_2$. Para $l \in \{0, ..., t\}$, seja*

$$P_l = \{p_1^{e_1} p_2^{e_2} \mid 0 \leq e_i \leq k_i, \forall\ i \in \{1, 2\} \text{ e } e_1 + e_2 = l\}.$$

Se $\mathbf{V}$ é uma subvariedade de $\mathbf{MS}_n$ tal que $m(\mathbf{V})$ satisfaz a condição iii) e Y é o conjunto de álgebras com dois pontos fixos que ocorrem em $m(\mathbf{V})$, então

i) $|Y| \leq 2k_1 + 1$ se existe um único $i \in \{1, ..., t\}$ tal que $|P_i| = k_1 + 1$;

ii) $|Y| \leq 2k_1 + 2$ se existem $i_1, i_2 \in \{1, ..., t\}$ tais que $i_1 \neq i_2$ e $|P_{i_1}| = |P_{i_2}| = k_1 + 1$. ■

Recorremdo ao teorema, terminamos este capítulo com a indicação, para algumas variedades $\mathbf{MS}_n$, do número máximo de álgebras s.i. com dois pontos fixos que podem ocorrer em m($\mathbf{V}$), sendo $\mathbf{V}$ uma subvariedade de $\mathbf{MS}_n$.

• Caso $n = p_1^{k_1}$, onde $p_1 \in \mathbb{N}$ é primo e $k_1 \in \mathbb{N}$.

Neste caso as álgebras s.i de $\mathbf{MS}_n$ com dois pontos fixos são, a menos de isomorfismo, os elementos de $\bigcup_{l=0}^{k_1} C_l \cup \bigcup_{q=0}^{k_1} D_q$ onde: $C_l = \{\mathcal{B}_{2p_1^l}\}$ e $D_q = \{\mathcal{U}_{2p_1^q}\}$. Sendo Y o conjunto de álgebras s.i. com dois pontos fixos que existem em m($\mathbf{V}$), é fácil concluirmos que o número máximo de elementos que Y pode ter é 2. Se $|Y| = 2$, então $Y = \{\mathcal{B}_{2p_1^{j_1}}, \mathcal{U}_{2p_1^{j_2}}\}$, com $j_1 \in \{1, ..., k_1\}$, $j_2 \in \{0, ..., k_1 - 1\}$ e $j_2 < j_1$.

Sendo $\mathbf{V}$ uma subvariedade não trivial de $\mathbf{MS}_{p_1^{k_1}}$ e $\mathcal{L}$ uma álgebra (contável) que gera $\mathbf{V}$, então temos exactamente uma das seguintes situações:

i) m($\mathbf{V}$) tem uma álgebra com 0 pontos fixos e resulta que $\mathcal{L}$ também tem 0 pontos fixos.

ii) toda a álgebra de m($\mathbf{V}$) tem um único ponto fixo e, então $|\text{Fix }(\mathcal{L})| \in \{0, 1\}$.

iii) toda a álgebra de m($\mathbf{V}$) tem, pelo menos, um ponto fixo e

1) m($\mathbf{V}$) tem uma única álgebra com dois pontos fixos; neste caso, sabemos pelo Teorema 2.7 que $|\text{Fix}(\mathcal{L})| \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\} \cup \{\aleph_0\}$.

2) m($\mathbf{V}$) tem exactamente duas álgebras com dois pontos fixos e tem-se $|\text{Fix}(\mathcal{L})| \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1, 2\} \cup \{\aleph_0\}$ (Teorema 2.7).

• Caso $n = p_1 p_2$, onde $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ são números primos distintos.

As álgebras s.i. de $\mathbf{MS}_n$ com dois pontos fixos são, a menos de isomorfismo, os elementos de $\bigcup\limits_{l=0}^{2} C_l \cup \bigcup\limits_{s=0}^{2} D_s$ onde

$$\begin{array}{ll} C_0 = \{\mathcal{B}_2\}, & D_0 = \{\mathcal{U}_2\}, \\ C_1 = \{\mathcal{B}_{2p_1}, \mathcal{B}_{2p_2}\}, & D_1 = \{\mathcal{U}_{2p_1}, \mathcal{U}_{2p_2}\}, \\ C_2 = \{\mathcal{B}_{2p_1p_2}\}, & D_2 = \{\mathcal{U}_{2p_1p_2}\}. \end{array}$$

Se $\mathbf{V}$ é uma subvariedade de $\mathbf{MS}_{p_1p_2}$ tal que m($\mathbf{V}$) se encontra na situação iii) e tem k álgebras com dois pontos fixos, é fácil concluir que $k \leq 3$. Sendo Y o conjunto de álgebras s.i. com dois pontos fixos que ocorrem em m($\mathbf{V}$) verifica--se que, se $|Y| = 3$, então $Y = \{\mathcal{U}_2, \mathcal{B}_{2p_1}, \mathcal{B}_{2p_2}\}$ ou $Y = \{\mathcal{U}_{2p_1}, \mathcal{U}_{2p_2}, \mathcal{B}_{2p_1p_2}\}$.

• Caso $n = p_1p_2^{k_2}$, onde $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ são números primos distintos e $k_2 \in \mathbb{N}$ com $k_2 \geq 2$

Neste caso temos

$$
\begin{array}{ll}
C_0 = \{\mathcal{B}_2\}, & D_0 = \{\mathcal{U}_2\}, \\
C_1 = \{\mathcal{B}_{2p_1}, \mathcal{B}_{2p_2}\}, & D_1 = \{\mathcal{U}_{2p_1}, \mathcal{U}_{2p_2}\}, \\
C_2 = \{\mathcal{B}_{2p_1p_2}, \mathcal{B}_{2p_2^2}\}, & D_2 = \{\mathcal{U}_{2p_1p_2}, \mathcal{U}_{2p_2^2}\}, \\
C_3 = \{\mathcal{B}_{2p_1p_2^2}, \mathcal{B}_{2p_2^3}\}, & D_3 = \{\mathcal{U}_{2p_1p_2^2}, \mathcal{U}_{2p_2^3}\}, \\
\vdots & \vdots \\
C_{k_2} = \{\mathcal{B}_{2p_1p_2^{k_2-1}}, \mathcal{B}_{2p_2^{k_2}}\} & D_{k_2} = \{\mathcal{U}_{2p_1p_2^{k_2-1}}, \mathcal{U}_{2p_2^{k_2}}\}, \\
C_{k_2+1} = \{\mathcal{B}_{2p_1p_2^{k_2}}\} & D_{k_2+1} = \{\mathcal{U}_{2p_1p_2^{k_2}}\}.
\end{array}
$$

Se $\mathbf{V}$ é uma subvariedade de $\mathbf{MS}_{p_1p_2^{k_2}}$ tal que m($\mathbf{V}$) se encontra na situação iii) e tem k álgebras com dois pontos fixos, então $k \leq 4$. Sendo Y o conjunto de álgebras s.i. com dois pontos fixos que ocorrem em m($\mathbf{V}$), é fácil verificarmos que, se $|Y| = 4$, então Y pode ser, por exemplo, um dos conjuntos $C_{l_1} \cup D_{l_2}$ com $l_1 \in \{2, ..., k_2\}$, $l_2 \in \{1, ..., k_2 - 1\}$ e $l_2 < l_1$.

Seja $\mathbf{V}$ uma subvariedade de $\mathbf{MS}_n$ onde $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}....p_s^{ks}$ com $s \geq 3$ e p_1, p_2, ..., p_s números primos (distintos dois a dois) e $k_i \in \mathbb{N}_0$, para todo $i \in \{1, ..., s\}$. Neste caso, o estudo do número máximo de álgebras s.i. com dois pontos fixos que podem existir em m($\mathbf{V}$), parece ser semelhante ao caso $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}$, estudado atrás.

Sendo $t = \sum_{i=1}^{s} k_i$, agrupam-se os elementos de $\{\mathcal{B}_{2s}, \mathcal{U}_{2s} : s \in \mathbb{N} \text{ e } s \mid n\}$ nos conjuntos

$$C_l = \{\mathcal{B}_{2p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_s^{e_s}} \mid 0 \leq e_i \leq k_i, \forall i \in \{1, ..., s\}, \sum_{i=1}^{s} e_i = l\},\ l \in \{0, ..., t\}$$

e

$$D_l = \{\mathcal{U}_{2p^{e_1}p_2^{e_2}....p_s^{e_s}} \mid 0 \leq e_i \leq k_i, \forall i \in \{1, ..., s\}, \sum_{i=1}^{s} e_i = l\},\ l \in \{0, ..., t\},$$

e o resto da prova seria feito de acordo com a ideia que foi usada no caso $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}$. Porém, dada a complexidade que existe na determinação do número de elementos dos conjuntos C_l e D_l, este estudo não chegou a ser realizado.

Capítulo 3

Extensão de álgebras-MS$_n$ a álgebras-MS$_n$ duplas

Em [20] M. Sequeira introduz o conceito de álgebra-MS$_n$ dupla e mostra que, para cada álgebra $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{MS}_n$ que satisfaça certas condições, existe uma (e uma só) operação g definida em L tal que $\mathcal{L}' = (L, f, g)$ é uma álgebra-MS$_n$ dupla [20, Proposição 5.6]. Diz-se neste caso que $\mathcal{L}$ pode ser *transformada* numa álgebra-MS$_n$ dupla ou que $\mathcal{L}$ *se estende* a uma álgebra-MS$_n$ dupla.

Neste capítulo começamos por identificar quais as álgebras subdirectamente irredutíveis de $\mathbf{MS}_n$ que se estendem a álgebras-MS$_n$ duplas. Dada uma álgebra s.i. $\mathcal{L}$ que se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla não podemos, porém, concluir que a variedade gerada por $\mathcal{L}$ é uma classe de álgebras que também se estendem a álgebras duplas. De facto, a classe das álgebras-MS$_n$ que se estendem a álgebras-MS$_n$ duplas não é uma variedade, uma vez que não é fechada para a formação de subálgebras. Sendo $\mathcal{L} \in \mathbf{MS}_n$ uma álgebra que se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla e $\mathcal{L}'$ uma subálgebra de $\mathcal{L}$, decidimos, então, estudar em que condições $\mathcal{L}'$ também se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla. Determinamos uma condição suficiente para que $\mathcal{L}'$ se estenda a uma álgebra-

-MS$_n$ dupla e, no caso em que $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{MS_{n'}}$, com n' divisor de n, conseguimos estabelecer uma condição necessária e suficiente.

A possibilidade de estender uma álgebra $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{MS}_n$ a uma álgebra-MS$_n$ dupla é estabelecida por condições que envolvem a noção de aplicação residuada. Por tal motivo, vamos começar por recordar esta noção, assim como, outros conceitos e resultados que lhe estão associados.

Dados P e Q conjuntos parcialmente ordenados, uma aplicação $\phi : P \to Q$ diz-se *residuada* se ϕ é isótona e existe uma (e uma só) aplicação isótona $\varphi : Q \to P$ tal que $\varphi\phi \geq \mathrm{id}_P$ e $\phi\varphi \leq \mathrm{id}_Q$, [3]. A aplicação φ designa-se por *aplicação residual* de ϕ e define-se por $\varphi(y) = \max\{x \in P : \phi(x) \leq y\}$, para cada $y \in Q$. Verifica-se, também, que ϕ preserva supremos e φ preserva ínfimos. No caso em que $P = Q$ e $\phi : P \to Q$ é operador de fecho residuado com residual φ, temos que $\phi(x) = \min([x) \cap \operatorname{Im} \phi)$, para cada $x \in P$, e $\varphi(x) = \max((x] \cap \operatorname{Im} \phi)$, para cada $x \in Q$.

Um subconjunto S não vazio de P diz-se *bicompleto* se, para cada cada $x \in P$, $[x) \cap S$ tem elemento mínimo e $(x] \cap S$ tem elemento máximo. Os subconjuntos bicompletos de P são os conjuntos $\operatorname{Im} \phi$ em que ϕ é operador de fecho residuado em P, [3, Teorema 20.1].

Um subconjunto bicompleto S de P diz-se *bicompleto forte* se a aplicação $\varphi : P \to P$, definida por $\varphi(x) = \max((x] \cap S)$, para cada $x \in P$, preserva os supremos que existem em P, [5]. Note-se que S é subconjunto bicompleto forte de P se e só se $S = \operatorname{Im} \phi$, para algum operador de fecho residuado ϕ cuja aplicação residual φ preserva supremos.

Proposição 3.1 [20, Lema 5.4] *Se P é reticulado distributivo e ϕ é operador de fecho em P, são equivalentes as afirmações:*

i) $\operatorname{Im} \phi$ *é subconjunto bicompleto forte de P,* *ii)* $\mathrm{Im}\,\phi$ *é subconjunto bicompleto de* P *e, para todo* $x \in \mathrm{Im}\,\phi$*, se* $x = y \vee z$ *com* $y, z \in P$*, então* $x = \varphi(y) \vee \varphi(z)$. ■

Dada uma álgebra $\mathcal{L} = (L, f, g) \in \mathbf{DMS}_n$, prova-se que o operador de fecho $f^{2n} : L \longrightarrow L$ é residuado e a sua residual é g^{2n}, [20, Proposição 5.5]. A possibilidade de transformar uma álgebra $(L, f) \in \mathbf{MS}_n$ numa álgebra-MS_n dupla (L, f, g) está relacionada com o facto de o operador de fecho f^{2n} ser residuado. Uma vez que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^{2n}$, é possível estabelecer, em termos de $\mathrm{Im}\, f$, uma condição necessária e suficiente para que (L, f) possa ser transformada numa álgebra-MS_n dupla:

Proposição 3.2 [20, Proposição 5.6] *Uma álgebra* $(L, f) \in \mathbf{MS}_n$ *pode ser transformada numa álgebra-*MS_n *dupla se e só se* $\mathrm{Im}\, f$ *é subconjunto bicompleto forte de* L*. Neste caso, obtém-se* $(L, f, g) \in \mathbf{DMS}_n$ *onde* $g(x) = f^{2n-1}(\max((x] \cap \mathrm{Im}\, f))$*, para cada* $x \in L$*.*

Corolário 3.3 [20, Corolário 5.7] *Se* $(L, f) \in \mathbf{MS}_n$ *pode ser transformada numa álgebra-*MS_n *dupla, então qualquer elemento de* $\mathrm{Im}\, f$ *que seja* $\vee$*-redutível em* L *é também* $\vee$*-redutível em* $\mathrm{Im}\, f$*.*

Vamos começar por analisar quais as álgebras subdirectamente irredutíveis em $\mathbf{MS}_n$ que podem ser transformadas em álgebras-MS_n duplas (os resultados relativos a álgebras subdirectamente irredutíveis em $\mathbf{MS}_n$, necessários a este capítulo, podem ser recordados no capítulo 0, secção 0.2).

Como as álgebras subdirectamente irredutíveis em MS_n são, a menos de isomorfismo, os elementos de

$$\begin{aligned}\mathrm{Si}(\mathbf{MS}_n) = &\{\mathcal{B}_s, \mathcal{U}_s : s \in \mathbb{N},\ s \mid n \text{ e } s \text{ é ímpar}\} \cup \{\mathcal{B}_{2s}, \mathcal{U}_{2s} : s \in \mathbb{N} \text{ e } s \mid n\}\\ &\cup\ \{\mathcal{X},\ \mathcal{X}_{u_{2n}} : \mathcal{X} \in \underline{\mathbf{C}}_{1,m} \text{ e } m \mid n\}\\ &\cup \{\mathcal{X}_{y\wedge u_{2n}} : \mathcal{X} \in \underline{\mathbf{C}}_{0,m} \text{ e } m \mid n \text{ e } y \in Y_{\mathcal{X}}\ \},\end{aligned}$$

basta estudarmos as álgebras desta classe.

A proposição que apresentamos a seguir estabelece que, para todo $t \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_t$ se estende a uma álgebra-MS$_t$ dupla.

Proposição 3.4 *Dado* $t \in \mathbb{N}$*,* $\mathcal{U}_t = (U_t, \Phi) \in \mathbf{MS}_t$ *estende-se à álgebra--*MS$_\mathrm{t}$ *dupla* (U_t, Φ, φ)*, onde* φ *é o endomorfismo dual de* U_t *induzido por* $\varphi(a_i) = c(a_{i-1(\mathrm{mod}\, t)})$*, para* $i \in \{0, ..., t-1\}$*, e* $\varphi(a_t) = 1$*.*

Demonstração: Seja φ o endomorfismo dual de U_t induzido por $\varphi(a_i) = c(a_{i-1(\mathrm{mod}\, t)})$, para $i \in \{0, ..., t-1\}$, e $\varphi(a_t) = 1$.

Dado que $\varphi^{2t}(a_i) = a_i$, para $i \in \{0, ..., t-1\}$, e $\varphi^{2t}(a_t) = 0 \leq a_t$, tem-se que $\varphi^{2t}(x) \leq x$, para cada $x \in U_t$.

Verifica-se também que:

- $\varphi\Phi(a_i) = \varphi(c(a_{i+1(\mathrm{mod}\, t)})) = a_i = \Phi^{2t}(a_i)$, $\forall\ i \in \{0, ..., t-1\}$;
- $\varphi\Phi(a_t) = \varphi(c(a_1)) = a_0 = \Phi^{2t}(a_t)$.

  Logo, $\varphi\Phi(x) = \Phi^{2t}(x)$, para qualquer $x \in U_t$.

- $\Phi\varphi(a_i) = \Phi(c(a_{i+t-1(\mathrm{mod}\, t)})) = a_i = \varphi^{2t}(a_i)$, $\forall\ i \in \{0, ..., t-1\}$;
- $\Phi\varphi(a_t) = 0 = \varphi^{2t}(a_t)$.

  Logo, $\Phi\varphi(x) = \varphi^{2t}(x)$, para qualquer $x \in U_t$.

Desta forma, podemos concluir que $\mathcal{U}_t = (U_t, \Phi)$ se estende à álgebra-MS$_\mathrm{t}$ dupla (U_t, Φ, φ). ■

Observação: 1) Dado $t \in \mathbb{N}$, a álgebra $(U_{2t}, \Phi) \in \mathbf{MS}_{2t}$ estende-se a uma álgebra-MS$_\mathrm{t}$ dupla. De facto, da proposição anterior sabemos que (U_{2t}, Φ) se estende à álgebra-MS$_{2\mathrm{t}}$ dupla (U_{2t}, Φ, φ), onde φ é o endomorfismo dual de U_{2t} induzido por $\varphi(a_i) = c(a_{i+2t-1(\mathrm{mod}\, 2t)})$, para $i \in \{0, ..., 2t-1\}$, e $\varphi(a_{2t}) = 1$. Pela Proposição 0.11 sabemos que $(U_{2t}, \Phi) \in \mathrm{MS}_\mathrm{t}$, donde concluimos que $\Phi^{4t}(x) = \Phi^{2t}(x)$; também se verifica facilmente que $\varphi^{4t}(x) = \varphi^{2t}(x)$, para cada $x \in U_{2t}$. Logo $(U_{2t}, \Phi, \varphi) \in \mathbf{DMS}_t$.

2) Dados $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se $\mathbf{DMS}_m \subseteq \mathbf{DMS}_n$ se e só se $m \mid n$, [21].

3) Toda a álgebra $(L, f) \in \mathbf{K}_{n,0}$ pode ser transformada numa álgebra-MS$_n$ dupla; definindo $g = f^{2n-1}$ tem-se que $(L, f, g) \in \mathbf{DMS}_n$, [20].

Com base no que foi observado podemos assim estabelecer a seguinte proposição:

Proposição 3.5 *Se $\mathcal{L}$ é uma álgebra de*

$$\{\, \mathcal{U}_s : s \in \mathbb{N},\ s \mid n \ e\ s\ \textit{é ímpar}\} \cup \{\mathcal{B}_{2s}, \mathcal{U}_{2s} : s \in \mathbb{N}\, e\ s \mid n\},$$

então $\mathcal{L}$ estende-se a uma álgebra-MS$_n$ *dupla.* ■

Continuando o estudo relativo a álgebras subdirectamente irredutíveis mostramos que:

Proposição 3.6 *Se $\mathcal{L} \in \{\mathcal{X}, \mathcal{X}_{u_{2n}} : \mathcal{X} \in \underline{\mathbf{C}}_{1,m}\ e\ m \mid n\}$, então $\mathcal{L}$ estende-se a uma álgebra*-MS$_n$ *dupla.*

Demonstração: Dado $\mathcal{X} \in \underline{\mathbf{C}}_{1,m}$, tem-se

- $\mathcal{X} = \mathcal{C}_{1,m}$ (subálgebra de $\mathcal{U}_{2m}$ gerada por $\{a_1\}$, com $a_1 \in L_{m,0}$) ou

- $\mathcal{X} = \mathcal{C}^a_{1,m}$ (subálgebra de $\mathcal{U}_{2m}$ gerada por $\{a_1, a\}$, com $a_1, a \in L_{m,0}$).

Então, se $\mathcal{L} = \mathcal{X}$ resulta que $\mathcal{L} \in \mathbf{K}_{m,0} \subseteq \mathbf{K}_{n,0}$. Logo $\mathcal{L}$ estende-se a uma álgebra-MS$_n$ dupla.

Consideremos, agora, o caso em que $\mathcal{L} = \mathcal{X}_{u_{2n}}$. A álgebra $\mathcal{X}$ é subálgebra de $\mathcal{U}_{2m}$. Dado que m divide n, então $\mathcal{U}_{2m}$ é, a menos de isomorfismo, subálgebra de $\mathcal{U}_{2n}$ e tem-se $u_{2m} = u_{2n}$ e $k_{j,m} = k_{j,n}$, $j \in \{0,1\}$.

Se $\mathcal{X} = \mathcal{C}_{1,m}$, então $\mathcal{L} = ((C_{1,m})_{u_{2m}}, \Phi)$ e, portanto, $\mathcal{L}$ é a subálgebra de $\mathcal{U}_{2m}$ gerada por $C_{1,m} \cup \{u_{2m}\}$, i.e., $\mathcal{L}$ é a subálgebra de $\mathcal{U}_{2m}$ gerada por $\{a_1, u_{2m}\}$. Considerando o endomorfismo dual $\varphi : U_{2m} \longrightarrow U_{2m}$, definido de acordo com a Proposição 3.4, e atendendo a que

$\varphi(a_1) = c(a_0) = \Phi^{2m-1}(a_1) \in (C_{1,m})_{u_{2m}}$ e

$\varphi(u_{2m}) = a_{2m-1} = \Phi^{2m-2}(a_1) \in (C_{1,m})_{u_{2m}}$,

podemos considerar a aplicação $\psi : (C_{1,m})_{u_{2m}} \longrightarrow (C_{1,m})_{u_{2m}}$ definida por $\psi(x) = \varphi(x)$, para cada $x \in (C_{1,m})_{u_{2n}}$. Como é simples verificar temos

- $x \leq \Phi^{2m}(x)$ e $\psi^{2m}(x) \leq x$, para todo $x \in (C_{1,m})_{u_{2m}}$;

- $\Phi\psi = \psi^{2m}$ e $\psi\Phi = \Phi^{2m}$.

Logo $\mathcal{L}$ estende-se à álgebra $((C_{1,m})_{u_{2m}}, \Phi, \psi) \in \mathbf{DMS}_m \subseteq \mathbf{DMS}_n$.

Se $\mathcal{X} = \mathcal{C}^a_{1,m}$, então $\mathcal{L} = ((C^a_{1,m})_{u_{2m}}, \Phi)$ e, neste caso, $\mathcal{L}$ é a subálgebra de $\mathcal{U}_{2m} = (U_{2m}, \Phi)$ gerada por $C^a_{1,m} \cup \{u_{2m}\}$, i.e, $\mathcal{L}$ é a subálgebra de $\mathcal{U}_{2m}$ gerada por $\{a_1, a, u_{2m}\}$. De forma análoga ao caso anterior, concluimos que $\mathcal{L}$ se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla, pois verificamos que:

- $\varphi(a_1)$, $\varphi(u_{2m})$, $\varphi(a) \in (C^a_{1,m})_{u_{2n}}$

  (note-se que $a = a_{i_1} \vee ... \vee a_{i_{s-1}} \vee a_0$ com $2 \leq s \leq m$ e $i_1, ..., i_{s-1}$ ímpares; logo $\varphi(a) = c(a_{i_1+2m-1 (\mathrm{mod}\, 2m)}) \wedge ... \wedge c(a_{i_{s-1}+2m-1 (\mathrm{mod}\, 2m)}) \wedge c(a_{2m-1}) = \Phi^{2m-1}(a)$). ■

Proposição 3.7 *Seja* $\mathcal{L} = \mathcal{X}_{y \wedge u_{2n}}$ *com* $\mathcal{X} = \mathcal{C}_{0,m}$*,* m *divisor de* n *e* $y \in Y_{\mathcal{X}}$*.*

1) Se $y = k_{0,m}$*, então* $\mathcal{L}$ *estende-se a uma álgebra-*MS$_n$ *dupla.*

2) Se $y \neq k_{0,m}$*, então* $\mathcal{L}$ *não se estende a uma álgebra-*MS$_n$ *dupla.*

Demonstração: Seja $\mathcal{L} = \mathcal{X}_{y \wedge u_{2n}}$ com $\mathcal{X} = \mathcal{C}_{0,m} = (C_{0,m}, \Phi)$, $y \in Y_{\mathcal{X}}$ e m divisor de n. Dado que m divide n, sabemos que $\mathcal{U}_{2m}$ é, a menos de isomorfismo, subálgebra de $\mathcal{U}_{2n}$ e que $u_{2m} = u_{2n}$ e $k_{0,m} = k_{0,n}$. Então $\mathcal{L}$ é a subálgebra de $\mathcal{U}_{2m}$ gerada por $\{a_0, y \wedge u_{2m}\}$.

1) Se $y = k_{0,m} = \bigvee\limits_{i=0}^{m-1} a_{2i}$, temos $y \wedge u_{2m} = \bigvee\limits_{k=1}^{m} a_{2k}$. De forma semelhante ao que foi feito na proposição anterior, se considerarmos o endomorfismo dual $\varphi : U_{2m} \longrightarrow U_{2m}$, definido de acordo com a Proposição 3.4, verificamos que

- $\varphi(a_0) = c(a_{2m-1}) = \Phi^{2m-1}(a_0) \in (C_{0,m})_{y \wedge u_{2m}}$ e

- $\varphi\left(\bigvee_{k=1}^{m} a_{2k}\right) = \bigvee_{i=0}^{m-2} c(a_{2i+1}) = \bigvee_{i=0}^{m-2} \Phi^{2i+1}(a_0) \in (C_{0,m})_{y \wedge u_{2m}}$.

Sendo assim, podemos definir a aplicação $\psi : (C_{0,m})_{y \wedge u_{2m}} \longrightarrow (C_{0,m})_{y \wedge u_{2m}}$ por $\psi(x) = \varphi(x)$, para cada $x \in (C_{0,m})_{y \wedge u_{2m}}$, e não é díficil provar que $((C_{0,m})_{y \wedge u_{2m}}, \Phi, \psi) \in \mathbf{DMS}_m \subseteq \mathbf{DMS}_n$. Logo $\mathcal{L}$ estende-se a uma álgebra--MS$_n$ dupla.

2) Consideremos, agora, o caso em que $y \neq k_{0,m}$. Neste caso, $\mathcal{L}$ não se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla. A prova é feita recorrendo ao Corolário 3.3, pois, como vamos ver, existe um elemento $z \in \operatorname{Im}\Phi$ que é $\vee$-redutível em L e $\vee$-irredutível em $\operatorname{Im}\Phi$.

Atendendo a que $y \neq k_{0,m}$, então $y \in C_{0,m} \cap\,]k_{0,m}, 1]$, e, portanto, $y = \bigvee\limits_{k=0}^{m-1} a_{2k} \vee \bigvee\limits_{j \in S} a_j$, para algum $S \subseteq \{1, 3, ..., 2m-1\}$ e $S \neq \emptyset$. Logo $y \wedge u_{2m} = \bigvee\limits_{k=1}^{m} a_{2k} \vee \bigvee\limits_{j \in S} a_j$.

Dado que $\mathcal{L}$ é a subálgebra de $\mathcal{U}_{2m}$ gerada por $\{a_0,\ y \wedge u_{2m}\}$, são também elementos de L os seguintes:

- $(y \wedge u_{2m}) \vee a_0 = y$,

- $\Phi^l(a_0) = c(a_l)$, $l \in \{1, 3, ..., 2m-1\}$,

- $y \wedge \bigwedge_{l \in S \setminus \{j\}} c(a_l) = \bigvee_{k=0}^{m-1} a_{2k} \vee a_j$, para $j \in S$,

- $y \wedge\ u_{2m} \wedge \bigwedge_{l \in S \setminus \{j\}} c(a_l) = \bigvee_{k=1}^{m} a_{2k} \vee a_j$, para $j \in S$.

Se considerarmos $z = \bigvee_{k=0}^{m-1} a_{2k} \vee a_j$, para algum $j \in S$, verifica-se que:

- $z \in \operatorname{Im}\Phi$, pois $z = \Phi^{2m}\left(\bigvee_{k=0}^{m-1} a_{2k} \vee a_j\right)$;

- z é $\vee$-redutível em L, uma vez que $z = a_0 \vee \bigvee_{k=1}^{m} a_{2k} \vee a_j$, com a_0, $\bigvee_{k=1}^{m} a_{2k} \vee a_j \in L$ e $z \neq a_0$ e $z \neq \bigvee_{k=1}^{m} a_{2k} \vee a_j$;

- z é $\vee$-irredutível em $\operatorname{Im}\Phi$, pois $\operatorname{Im}\Phi = ((\mathcal{C}_{0,m})_{y \wedge u_{2m}})_{m,0} = \mathcal{C}_{0,m}$ e os elementos $\vee$-irredutíveis de $\mathcal{C}_{0,m}$ são: a_{2i}, com $i \in \{0, ..., m-1\}$, e $\bigvee_{k=0}^{m-1} a_{2k} \vee a_s$, para $s \in \{1, 3, ..., 2m-1\}$.

Logo, pelo Corolário 3.3, concluimos que $\mathcal{L}$ não se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla. ■

Proposição 3.8 *Seja* $\mathcal{L} = \mathcal{X}_{y \wedge u_{2n}}$ *onde* $\mathcal{X} = (C^b_{0,m}, \Phi)$, *para algum* m *divisor de* n, $y \in Y_{\mathcal{X}}$, b *é um elemento de* $(U_{2n})_{n,0}$ *e satisfaz* $\left(*\,{}^{0}_{n}\right)$ *e* $b' = \bigvee\{a_{2i+1} \mid 0 \leq i \leq m-1, a_0 \not\leq \Phi^{2i}(b)\}$.

1) Se $y = k_{0,m} \vee b'$, *então* $\mathcal{L}$ *estende-se a uma álgebra-*MS$_n$ *dupla.*

2) Se $y \neq k_{0,m} \vee b'$, *então* $\mathcal{L}$ *não se estende a uma álgebra-*MS$_n$ *dupla.*

Demonstração: Dado que m divide n, $\mathcal{U}_{2m}$ é subálgebra de $\mathcal{U}_{2n}$ e $u_{2n} = u_{2m}$. Como $\mathcal{L} = \mathcal{X}_{y\wedge u_{2n}}$ com $\mathcal{X} = (C^b_{0,m}, \Phi)$, então $\mathcal{L}$ é a subálgebra de $\mathcal{U}_{2m}$ gerada por $\{a_0,\, b,\, y \wedge u_{2m}\}$.

1) Se $y = k_{0,m} \vee b'$ tem-se $y \wedge u_{2m} = \bigvee\limits_{k=1}^{m} a_{2k} \vee b'$. Logo $\mathcal{L}$ é a subálgebra de $\mathcal{U}_{2m}$ gerada por $\{a_0,\, b,\, \bigvee\limits_{k=1}^{m} a_{2k} \vee b'\}$.

Para provarmos que $\mathcal{L}$ se estende a uma álgebra-MS$_\mathrm{m}$ dupla basta mostrarmos (tal como fizemos em casos anteriores) que é possível definir a aplicação $\psi : (C^b_{0,m})_{y\wedge u_{2m}} \to (C^b_{0,m})_{y\wedge u_{2m}}$ tal que $\psi(x) = \varphi(x)$, para cada $x \in (C^b_{0,m})_{y\wedge u_{2m}}$. Para tal, é suficiente verificar que

- $\varphi(a_0) = \Phi^{2m-1}(a_0) \in (C^b_{0,m})_{y\wedge u_{2m}}$,

- $\varphi(b) = \Phi^{2m-1}(b) \in (C^b_{0,m})_{y\wedge u_{2m}}$,

- $$\varphi\left(\bigvee_{k=1}^{m} a_{2k} \vee b'\right) = \Phi^{2m-1}\left(\bigvee_{k=1}^{m-1} a_{2k} \vee b'\right) = \Phi^{2m-1}\left(\bigvee_{k=1}^{m} a_{2k} \vee b'\right) \in (C^b_{0,m})_{y\wedge u_{2m}}.$$

Então $((C^b_{0,m})_{y\wedge u_{2m}}, \Phi, \psi) \in \mathbf{DMS}_m \subseteq \mathbf{DMS}_n$.

2) No caso em que $y \neq k_{0,m} \vee b'$, temos que $y \in\,]k_{0,m} \vee b', 1]$, logo

$$y = k_{0,m} \vee b' \vee \bigvee_{j\in S} a_{2j+1}, \text{ com } S \neq \emptyset \text{ e } S \subseteq \{i \mid 0 \leq i \leq m-1,\, a_0 \leq \Phi^{2i}(b)\}.$$

e, portanto, $y \wedge u_{2m} = \bigvee\limits_{i=1}^{m} a_{2i} \vee b' \vee \bigvee\limits_{j\in S} a_{2j+1}$.

Dado $j \in S$, tem-se

- $\Phi^{2j}(b) = a_0 \vee \bigvee\limits_{t\in T\subseteq\{1,\ldots,m-1\}} a_{2t} \vee a_{2j+1} \in (C^b_{0,m})_{y\wedge u_{2m}}$;
- $\Phi^{2j}(b) \wedge y \wedge u_{2m} = a_{2m} \vee \bigvee\limits_{t\in T\subseteq\{1,\ldots,m-1\}} a_{2t} \vee a_{2j+1} \in (C^b_{0,m})_{y\wedge u_{2m}}$,

donde concluimos, relativamente ao elemento $\Phi^{2j}(b) \in \mathrm{Im}\,\Phi$, que:

- é $\vee$-redutível em L pois

$$\Phi^{2j}(b) = a_0 \vee a_{2m} \vee \bigvee_{t \in T \subseteq \{1,\ldots,m-1\}} a_{2t} \vee a_{2j+1} = a_0 \vee \left(\Phi^{2j}(b) \wedge y \wedge u_{2m}\right),$$

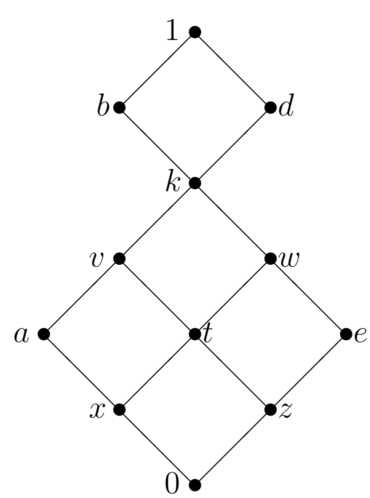
com $\Phi^{2j}(b) \neq a_0$ e $\Phi^{2j}(b) \neq \Phi^{2j}(b) \wedge y \wedge u_{2m}$;

- é $\vee$-irredutível em $\mathrm{Im}\,\Phi$ pois $\mathrm{Im}\Phi = ((\mathcal{C}^b_{0,m})_{y \wedge u_{2m}})_{m,0} = \mathcal{C}^b_{0,m}$ e os elementos $\vee$-irredutíveis de $C^b_{0,m}$ são a_{2i} e $\Phi^{2i}(b)$, com $1 \leq i \leq m-1$.

Logo, pelo Corolário 3.3, $\mathcal{L}$ não se estende a uma álgebra-$\mathbf{MS}_n$ dupla. ■

A classe $\mathbf{E}$ das álgebras de $\mathbf{MS}_n$ que se estendem a álgebras-MS$_n$ duplas não é uma variedade. De facto, a classe $\mathbf{E}$ não é fechada relativamente ao operador S. Dada uma álgebra $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{MS}_n$ que se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla, é simples verificar que tal não implica que uma subálgebra $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ também se estenda a uma álgebra-MS$_n$ dupla. É o que acontece no exemplo que se apresenta de seguida.

Exemplo 3.9 Seja L o reticulado:



e sejam f e g as operações definidas em L de acordo com a seguinte tabela:

y	x	z	a	t	e	v	w	k	b	d	0	1
$f(y)$	b	d	b	k	d	k	k	k	e	a	1	0
$g(y)$	1	1	d	1	b	d	b	k	a	e	1	0

A álgebra $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{MS}_2$ estende-se à álgebra-MS$_2$ dupla (L, f, g). No entanto, tendo-se $L_{MS} = \{0, t, v, w, k, 1\}$ e $f(L_{MS}) = \{0, k, 1\}$, verifica-se que não é possível estender $\mathcal{L}_{MS} = (L_{MS}, f)$ a uma álgebra-MS$_2$ dupla, uma vez que o elemento $k \in f(L_{MS})$ é $\vee$-redutível no reticulado L_{MS} e $\vee$-irredutível em $f(L_{MS})$ (Corolário 3.3).

Dadas uma álgebra $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{MS}_n$ que se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla e $\mathcal{L}' = (L', f)$ uma subálgebra de $\mathcal{L}$, interessa, então, analisar em que condições $\mathcal{L}'$ também se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla.

Proposição 3.10 *Sejam $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{MS}_n$ tal que $\mathcal{L}$ se estende à álgebra--MS$_n$ dupla (L, f, g) e $\mathcal{L}' = (L', f)$ uma subálgebra de $\mathcal{L}$. Se $g(L') \subseteq L'$, então $\mathcal{L}'$ estende-se à álgebra-MS$_n$ dupla (L', f, g).*

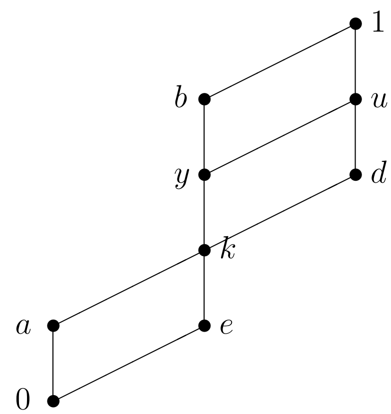
Demonstração: Seja $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{MS}_n$ tal que $\mathcal{L}$ se estende à álgebra-MS$_n$ dupla (L, f, g). Então $\operatorname{Im} f$ é um subconjunto bicompleto forte de L, o que significa que $f^{2n} : L \to L$ é um operador de fecho residuado cuja residual $g^{2n} : L \to L$ preserva supremos.

Dado que (L', f) é uma subálgebra de $\mathcal{L}$ e $f^{2n} : L \to L$ é um operador de fecho, é óbvio que $f^{2n} : L' \to L'$ é também um operador de fecho. Supondo que $g(L') \subseteq L'$ podemos considerar a aplicação $r : L' \to L'$, definida por $r(x) = g^{2n}(x)$, para todo $x \in L'$. Uma vez que $g^{2n} : L \to L$ é a residual de

$f^{2n} : L \to L$ é imediato que $f^{2n}r(x) \leq x$ e $rf^{2n}(x) \geq x$, para todo $x \in L'$, e que r preserva supremos. Então concluimos que $f^{2n} : L' \to L'$ é um operador de fecho residuado e que a sua residual (a aplicação $r : L' \to L'$) preserva supremos. Logo $\mathcal{L}' = (L', f)$ estende-se a uma álgebra-MS$_n$ dupla. ■

A condição estabelecida nesta proposição não é, contudo, necessária para que $\mathcal{L}'$ se estenda a uma álgebra-MS$_n$ dupla. Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.11 Sendo L o reticulado descrito na figura



e f, g as operações definidas em L de acordo com a tabela

x	0	1	a	b	e	d	k	y	u
$f(x)$	1	0	b	e	d	a	k	e	0
$g(x)$	1	0	d	a	b	e	k	k	e

,

verifica-se que $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{MS}_2$ se estende à álgebra-MS$_2$ dupla (L, f, g). A maior subálgebra de $\mathcal{L}$ pertencente a **MS** tem como conjunto suporte $L_{MS} = \{0, k, u, 1\}$. Considerando a aplicação $h : L_{MS} \to L_{MS}$ definida por $h(0) = 1$, $h(1) = 0$, $h(k) = k$ e $h(u) = k$, concluimos que $\mathcal{L}_{MS} = (L_{MS}, f)$

também se estende a uma álgebra-MS$_2$ dupla (L_{MS}, f, h). No entanto, $g(L_{MS}) \nsubseteq L_{MS}$.

Seja $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{MS}_n$ uma álgebra que se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla e, para cada n' divisor de n, seja $\mathcal{L}' = (L_{MS_{n'}}, f)$, i.e., $\mathcal{L}'$ é a maior subálgebra de $\mathcal{L}$ pertencente a $\mathbf{MS}_{n'}$. Neste caso particular conseguimos estabelecer uma condição necessária e suficiente para que $\mathcal{L}'$ se estenda a uma álgebra-MS$_n$ dupla.

Para obtermos a condição referida, começamos por verificar que se n' divide n, então $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{MS}_{n'}$ estende-se a uma álgebra-MS$_n$ dupla se e só se $\mathcal{L}$ se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla.

Sejam $m, m' \in \mathbb{N}$, com $m < m'$. Em [20, Proposição 5.9] M. Sequeira prova que se (L, f, g) é uma álgebra tal que $(L, f) \in \mathbf{MS}_m$, $(L^d, g) \in \mathbf{MS}_{m'}$, $fg = g^{2m'}$ e $gf = f^{2m}$, então (L, f, g) é álgebra-MS$_\mathrm{q}$ dupla para $q = \text{m.d.c.}(m, m')$. Recorrendo a este resultado concluimos que:

Proposição 3.12 *Sejam $n, n' \in \mathbb{N}$ tais que $n' \mid n$ e seja $\mathcal{L} = (L, f) \in \mathbf{MS}_{n'}$. Então $\mathcal{L}$ estende-se a uma álgebra-*MS$_{n'}$ *dupla se e só se $\mathcal{L}$ se estende a uma álgebra-*MS$_n$ *dupla.*

Demonstração: Dado que $n' \mid n$ temos $\mathbf{DMS}_{n'} \subseteq \mathbf{DMS}_n$. Logo se $\mathcal{L}$ se estende a uma álgebra-MS$_{n'}$ dupla, então $\mathcal{L}$ também se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla.

Reciprocamente, se assumirmos que $\mathcal{L}$ se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla (L, f, g) podemos concluir que $\mathcal{L}$ também se estende a uma álgebra-MS$_{n'}$ dupla. De facto: 1) se $n' = n$ o resultado é óbvio; 2) se $n' < n$, e atendendo a que $(L, f) \in \mathbf{MS}_{n'}$, $(L^d, g) \in \mathbf{MS}_n$, $fg = g^{2n}$ e $gf = f^{2n} = f^{2n'}$, resulta da Proposição 5.9 de [20] que $(L, f, g) \in \mathbf{DMS}_q$ para $q = \text{m.d.c.}(n', n) = n'$. ■

Corolário 3.13 *Seja $\mathcal{L} \in \mathbf{MS}_n$. Se n' é o menor natural tal que $\mathcal{L} \in \mathbf{MS}_{n'}$, então $\mathcal{L}$ estende-se a uma álgebra-*MS$_{n'}$ *dupla se e só se $\mathcal{L}$ se estende a uma álgebra-*MS$_n$ *dupla.*

Demonstração: Se n' é o menor natural tal que $\mathcal{L} \in \mathbf{MS}_{n'}$, então n' divide n, logo o resultado é consequência imediata da proposição anterior. ■

Sejam n, $n' \in \mathbb{N}$ tais que n' divide n, seja $\mathcal{L} = (L, f)$ uma álgebra-MS$_n$ e consideremos a aplicação $f^{2n'} : L_{MS_{n'}} \to L_{MS_{n'}}$. Se $f^{2n} : L \to L$ é uma aplicação residuada vamos verificar que esta condição é suficiente para que $f^{2n'} : L_{MS_{n'}} \to L_{MS_{n'}}$ também seja uma aplicação residuada.

Proposição 3.14 *Sejam n, $n' \in \mathbb{N}$ tais que $n = n'q$, para algum $q \in \mathbb{N}$, e seja $\mathcal{L} = (L, f)$ uma álgebra-*MS$_n$. *Se $f^{2n} : L \to L$ é uma aplicação residuada com residual $m : L \to L$, então $f^{2n'} : L_{MS_{n'}} \to L_{MS_{n'}}$ é uma aplicação residuada sendo a sua residual a aplicação $\widehat{m} : L_{MS_{n'}} \to L_{MS_{n'}}$ definida por $\widehat{m}(x) = \bigwedge_{i=0}^{q-1} f^{2n'i}(m(x))$, para todo $x \in L_{MS_{n'}}$.*

Demonstração: A residual de $f^{2n} : L \to L$ é a aplicação $m : L \to L$ definida por $m(x) = \max((x]_L \cap f(L))$, para cada $x \in L$. Recorrendo à residual de f^{2n}, prova-se que também existe $\max((x]_{L_{MS_{n'}}} \cap f(L_{MS_{n'}}))$, para cada $x \in L_{MS_{n'}}$, tendo-se $\max((x]_{L_{MS_{n'}}} \cap f(L_{MS_{n'}})) = \bigwedge_{i=0}^{q-1} f^{2n'i}(m(x))$. Com efeito,

1) atendendo a que $m(x) \leq x$, resulta que $\bigwedge_{i=0}^{q-1} f^{2n'i}(m(x)) \leq \bigwedge_{i=0}^{q-1} f^{2n'i}(x)$. Dado que $x \in L_{MS_{n'}}$ temos $x \leq f^{2n'}(x) \leq ... \leq f^{2n'(q-1)}(x)$ e, portanto, $\bigwedge_{i=0}^{q-1} f^{2n'i}(x) = x$. Então $\bigwedge_{i=0}^{q-1} f^{2n'i}(m(x)) \leq x$.
Como $m(x) \in f(L)$, vem $m(x) = f(a)$, para algum $a \in L$, e consequentemente temos $\bigwedge_{i=0}^{q-1} f^{2n'i}(m(x)) = f\left(\bigvee_{i=0}^{q-1} f^{2n'i}(a)\right)$. Então é imediato que $\bigwedge_{i=0}^{q-1} f^{2n'i}(m(x)) \in f(L_{MS_{n'}})$ pois $\bigvee_{i=0}^{q-1} f^{2n'i}(a) \in L_{MS_{n'}}$.

Logo $\bigwedge_{i=0}^{q-1} f^{2n'i}(m(x)) \in (x]_{L_{MS_{n'}}} \cap f(L_{MS_{n'}})$.

2) para cada $y \in (x]_{L_{MS_{n'}}} \cap f(L_{MS_{n'}})$, temos que $y \in (x]_L \cap f(L)$, logo $y \leq m(x)$. Vem então $\bigwedge_{i=0}^{q-1} f^{2n'i}(y) \leq \bigwedge_{i=0}^{q-1} f^{2n'i}(m(x))$. Dado que $y \in f(L_{MS_{n'}})$, temos $f^{2n'i}(y) = y$, para cada $i \in \{0, ..., q-1\}$, donde resulta que $y \leq \bigwedge_{i=0}^{q-1} f^{2n'i}(m(x))$.

De 1) e 2) resulta que $\max((x]_{L_{MS_{n'}}} \cap f(L_{MS_{n'}})) = \bigwedge_{i=0}^{q-1} f^{2n'i}(m(x))$.

Uma vez que existe $\max((x]_{L_{MS_{n'}}} \cap f(L_{MS_{n'}}))$, para cada $x \in L_{MS_{n'}}$, podemos considerar a aplicação $\widehat{m} : L_{MS_{n'}} \to L_{MS_{n'}}$ definida por $\widehat{m}(x) = \max((x]_{L_{MS_{n'}}} \cap f(L_{MS_{n'}})) = \bigwedge_{i=0}^{q-1} f^{2n'i}(m(x))$. Atendendo a que:

- $\widehat{m}$ é isótona,
- $f^{2n'}\widehat{m}(x) = \widehat{m}(x) \leq \mathrm{id}_{L_{MS_{n'}}}(x)$, para cada $x \in L_{MS_{n'}}$,
- $\widehat{m}f^{2n'}(x) = f^{2n'}(x) \geq \mathrm{id}_{L_{MS_{n'}}}(x)$, para cada $x \in L_{MS_{n'}}$

concluimos que $\widehat{m}$ é a residual de $f^{2n'} : L_{MS_{n'}} \to L_{MS_{n'}}$. ■

Com base nesta proposição prova-se então que:

Teorema 3.15 *Sejam n, $n' \in \mathbb{N}$ tais que $n = n'q$, para algum $q \in \mathbb{N}$. Seja $\mathcal{L} = (L, f) \in$ **MS**$_n$ uma álgebra que se estende a uma álgebra-*MS$_n$ *dupla (L, f, g). Então $\mathcal{L}_{MS_{n'}} = (L_{MS_{n'}}, f)$ estende-se a uma álgebra-*MS$_n$ *dupla se e só se*

$$\forall\ x, y \in L_{MS_{n'}},\ \forall u, v \in \{1, ..., q\},\ u \neq v,\ \forall C \subseteq \{1, ..., q\}\backslash\{u\},$$
$$\left(\bigwedge_{s \in J = C \cup \{v\}} g^{2n's}(x)\right) \wedge \left(\bigwedge_{t \in \{1,...,q\}\backslash J} g^{2n't}(y)\right) \leq g^{2n'u}(x) \vee g^{2n'v}(y);$$

*nesse caso, $\mathcal{L}_{MS_{n'}}$ estende-se à álgebra-*MS$_n$ *dupla $(L_{MS_{n'}}, f, \widehat{m})$ onde $\widehat{m} : L_{MS_{n'}} \to L_{MS_{n'}}$ é a aplicação definida por $m(x) = \bigwedge_{i=1}^{q} g^{2n'_i}(x)$, para todo $x \in L_{MS_{n'}}$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{L} = (L, f)$ uma álgebra de $\mathbf{MS}_n$ que se estende à álgebra-MS$_n$ dupla (L, f, g). Então $f^{2n} : L \to L$ é um operador de fecho residuado e a sua residual preserva supremos. A residual de f^{2n} é a aplicação $g^{2n} : L \to L$, definida por $g^{2n}(x) = \max((x]_L \cap f(L))$, para cada $x \in L$.

Dado que n' divide n, sabemos pela Proposição 3.12 que $\mathcal{L}_{MS_{n'}}$ se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla se e só se $\mathcal{L}_{MS_{n'}}$ se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla. Como sabemos, a álgebra $\mathcal{L}_{MS_{n'}} = (L_{MS_{n'}}, f)$ estende-se a uma álgebra-MS$_n$ dupla se e só se $f(L_{MS_{n'}})$ é um subconjunto bicompleto forte de $L_{MS_{n'}}$, i.e., se $f^{2n'} : L_{MS_{n'}} \to L_{MS_{n'}}$ é um operador de fecho residuado e a sua residual preserva supremos.

Atendendo a que $f^{2n} : L \to L$ é uma aplicação residuada, da proposição anterior concluimos que $f^{2n'} : L_{MS_{n'}} \to L_{MS_{n'}}$ também é um operador de fecho residuado e a sua residual é a aplicação $\widehat{m} : L_{MS_{n'}} \to L_{MS_{n'}}$ definida por $\widehat{m}(x) = \bigwedge_{i=0}^{q-1} f^{2n'i}(g^{2n}(x))$, para cada $x \in L_{MS_{n'}}$. Tendo em atenção a Proposição 0.16 vem que $\widehat{m}(x) = \bigwedge_{i=1}^{q} g^{2n'i}(x)$.

Para que $\mathcal{L}_{MS_{n'}}$ se estenda a uma álgebra-MS$_n$ dupla falta verificar em que condições a residual de $f^{2n'}$ preserva supremos, i.e., temos de determinar em que condições $\widehat{m}(x \vee y) = \widehat{m}(x) \vee \widehat{m}(y)$, para quaisquer $x, y \in L_{MS_{n'}}$.

Como $g^{2n'i}(x \vee y) = g^{2n'i}(x) \vee g^{2n'i}(y)$, para todo $x, y \in L_{MS_{n'}}$, e para todo $i \in \mathbb{N}_0$, então $\widehat{m}(x \vee y) = \bigwedge_{i=1}^{q} g^{2n'i}(x \vee y) = \bigwedge_{i=1}^{q}(g^{2n'i}(x) \vee g^{2n'i}(y))$. Logo $\widehat{m}$ preserva supremos se e só se $\bigwedge_{i=1}^{q}(g^{2n'i}(x) \vee g^{2n'i}(y)) = \bigwedge_{k=1}^{q} g^{2n'k}(x) \vee \bigwedge_{j=1}^{q} g^{2n'j}(y)$.

Para que a igualdade anterior seja satisfeita basta que

$$\bigwedge_{i=1}^{q}(g^{2n'i}(x) \vee g^{2n'i}(y)) \leq \bigwedge_{k=1}^{q} g^{2n'k}(x) \vee \bigwedge_{j=1}^{q} g^{2n'j}(y), \qquad \text{(i)}$$

já que a outra desigualdade resulta trivialmente.

Atendendo a que

$$\bigwedge_{i=1}^{q}\left(g^{2n'i}(x)\vee g^{2n'i}(y)\right)=\bigvee_{C\subseteq\{1,...,q\}}\left(\bigwedge_{s\in C} g^{2n's}(x)\wedge\bigwedge_{t\in\{1,...,q\}\backslash C} g^{2n't}(y)\right)$$

e

$$\bigwedge_{k=1}^{q} g^{2n'k}(x)\vee\bigwedge_{j=1}^{q} g^{2n'j}(y)=\bigwedge_{u=1}^{q}\bigwedge_{v=1}^{q}\left(g^{2n'u}(x)\vee g^{2n'v}(y)\right)$$

a desigualdade (i) verifica-se se e só se

$$\forall C\subseteq\{1,...,q\}\text{ e }\forall u,\,v\in\{1,...,q\},$$

$$\bigwedge_{s\in C} g^{2n's}(x)\wedge\bigwedge_{t\in\{1,...,q\}\backslash C} g^{2n't}(y)\leq g^{2n'u}(x)\vee g^{2n'v}(y).$$

Destas desigualdades há algumas que são triviais e a condição anterior é então equivalente a

$$\forall u,v\in\{1,...,q\},\,u\neq v,\,\forall C\subseteq\{1,...,q\}\backslash\{u\},$$

$$\left(\bigwedge_{s\in J=C\cup\{v\}} g^{2n's}(x)\right)\wedge\left(\bigwedge_{t\in\{1,...,q\}\backslash J} g^{2n't}(y)\right)\leq g^{2n'u}(x)\vee g^{2n'v}(y).$$

Logo $\mathcal{L}_{MS_{n'}}=(L_{MS_{n'}},f)$ estende-se a uma álgebra-MS$_n$ dupla e, consequentemente, a uma álgebra-MS$_n$ dupla, se e só se a condição anterior é válida, para todo $x,y\in L_{MS_{n'}}$. ■

Deste teorema e da Proposição 3.1 resulta que a análise sobre a possibilidade de estender $\mathcal{L}_{MS_{n'}}$ a uma álgebra-MS$_n$ dupla pode ser feita com base em condições estabelecidas sobre os elementos de $f(L_{MS_{n'}})$.

Teorema 3.16 *Sejam $n,\,n'\in\mathbb{N}$ tais que $n=n'q$, para algum $q\in\mathbb{N}$. Seja $\mathcal{L}=(L,f)\in\mathbf{MS}_n$ uma álgebra que se estende a uma álgebra-*MS$_n$ *dupla (L,f,g). Então $\mathcal{L}_{MS_{n'}}=(L_{MS_{n'}},f)$ estende-se a uma álgebra-*MS$_n$ *dupla se e só se, para qualquer $x\in f(L_{MS_{n'}})$,*

$$x=a\vee b,\ com\ a,b\in L_{MS_{n'}}\Rightarrow(x\leq g^{2n'i}(a)\vee g^{2n'j}(b),\,\forall i,\,j\in\{1,...,q\}).$$

Demonstração: Se a álgebra $\mathcal{L}_{MS_{n'}} = (L_{MS_{n'}}, f)$ se estende a uma álgebra--MS$_n$ dupla, então $f(L_{MS_{n'}})$ é um subconjunto bicompleto forte de $L_{MS_{n'}}$. Da Proposição 3.1 e do Teorema 3.15 resulta que, se $\mathcal{L}_{MS_{n'}} = (L_{MS_{n'}}, f)$ se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla então, para todo $x \in f(L_{MS_{n'}})$,

$$x = a \vee b, \text{ com } a, b \in L_{MS_{n'}} \Rightarrow x = \bigwedge_{i=1}^{q} g^{2n'i}(a) \vee \bigwedge_{j=1}^{q} g^{2n'j}(b).$$

Logo, dado $x \in f(L_{MS_{n'}})$, se $x = a \vee b$ para certos $a, b \in L_{MS_{n'}}$, então $x \leq g^{2n'i}(a) \vee g^{2n'j}(b)$, para quaisquer $i, j \in \{1, ..., q\}$.

Vejamos agora que a condição enunciada se trata, de facto, de uma condição suficiente para que $\mathcal{L}_{MS_{n'}}$ se estenda a uma álgebra-MS$_n$ dupla. Atendendo a que $\mathcal{L} = (L, f)$ se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla, sabemos da Proposição 3.14 que $f^{2n'} : L_{MS_{n'}} \to L_{MS_{n'}}$ é um operador de fecho residuado sendo a sua residual a aplicação $\widehat{m} : L_{MS_{n'}} \to L_{MS_{n'}}$ definida por $\widehat{m}(x) = \bigwedge_{j=0}^{q-1} f^{2n'j}(g^{2n}(x)) = \bigwedge_{i=1}^{q} g^{2n'i}(x)$, para todo $x \in L_{MS_{n'}}$. Temos, então, que $f(L_{MS_{n'}})$ é um subconjunto bicompleto de $L_{MS_{n'}}$. Se admitirmos que, para todo $x \in f(L_{MS_{n'}})$,

$$x = a \vee b, \text{ com } a, b \in L_{MS_{n'}} \Rightarrow (\ x \leq g^{2n's}(a) \vee g^{2n't}(b), \forall s, t \in \{1, ..., q\}),$$

vem que,

$$\begin{aligned} & x = a \vee b, \text{ com } a, b \in L_{MS_{n'}} \\ & \qquad \Rightarrow x \leq \bigwedge_{s=1}^{q}\bigwedge_{t=1}^{q} (g^{2n's}(a) \vee g^{2n't}(b)) = \bigwedge_{i=1}^{q} g^{2n'i}(a) \vee \bigwedge_{j=1}^{q} g^{2n'j}(b). \end{aligned}$$

Como $(L, f, g) \in \mathbf{DMS}_n$, então $(L^d, g) \in \mathbf{MS}_n$. Logo, dados $a, b \in L$ temos $g^{2n}(a) \leq a$ e $g^{2n}(b) \leq b$ e, portanto, $\bigwedge_{i=1}^{q} g^{2n'i}(a) \vee \bigwedge_{j=1}^{q} g^{2n'j}(b) \leq a \vee b = x$. Consequentemente, para todo $x \in f(L_{MS_{n'}})$,

$$x = a \vee b, \text{ com } a, b \in L_{MS_{n'}} \Rightarrow x = \bigwedge_{i=1}^{q} g^{2n'i}(a) \vee \bigwedge_{j=1}^{q} g^{2n'j}(b).$$

Das proposições 3.1 e 3.2 concluimos que $\mathcal{L}_{MS_{n'}}$ se estende a uma álgebra-MS$_n$ dupla. ■

Bibliografia

[1] Balbes, R. e Dwinger, P. - *Distributive lattices*, University of Missouri Press, Columbia, 1974.

[2] Berman, J. - *Distributive lattices with an additional unary operation*, Aequat. Math. 16 (1977), 165-171.

[3] Blyth, T.S e Janowitz, M.F. - *Residuation Theory*, Pergamon Press, Oxford, 1972.

[4] Blyth, T.S. e Varlet, J.C. - *On a common abstraction of de Morgan algebras and Stone algebras*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 94, (1983), 301-308.

[5] Blyth, T.S. e Varlet, J.C. - *Double MS-algebras*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 98 (1984), 37-47.

[6] Blyth, T.S. e Varlet, J.C. - *Fixed points in MS-algebras*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liége 53 (1984), 3-8.

[7] Blyth, T. S. e Varlet, J. C. - *Congruences on double MS-algebras*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liége, 56 (1987), 143-152.

[8] Blyth, T.S. e Varlet, J.C. - *Ockham algebras*, Oxford Science Publications, 1995.

[9] Burris, S. e Sankappanavar, H.P. - *A Course in Universal Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[10] Day, A. - *A note on the congruence extension property*, Alg. Univ. 1 (1971), 234-235.

[11] Grätzer, G. - *General Lattice Theory*, Birkhäuser, Basel, 1978.

[12] Grätzer, G. - *Universal Algebra*, 2^{nd} edition, Springer-Verlag, New York, 1979.

[13] Katriňák, T. - *Injective double Stone algebras*, Alg. Univ. 4 (1974), 259-267.

[14] Mendes, C. - *Complemented congruences on Ockham algebras* - aceite para publicação na revista Algebra Universalis.

[15] Mendes, C. - *Complemented congruences on double Ockham algebras* - submetido para publicação em revista com *refereeing*.

[16] Ramalho, M. - *Alguns aspectos das álgebras de Ockham*, Actas XV Jornadas Luso-Espanholas, Évora, 1990, 43-48.

[17] Ramalho, M. e Sequeira, M. - *On generalized MS-algebras*, Port. Math. 44 (1987), 315-328.

[18] Schweigert, D. e Szymanska, M. - *On distributive correlation lattices*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 33 (1980), 697-721.

[19] Sequeira, M. - *Algumas subvariedades das álgebras de Ockham*, Tese de mestrado, Lisboa, 1986.

[20] Sequeira, M. - *Álgebras-MS generalizadas e álgebras-*$K_{n,1}$ *duplas*, Tese de doutoramento, Lisboa, 1989.

[21] Sequeira, M. - *Double MS_n-algebras and double $K_{n,m}$-algebras*, Glasgow Math. J. 35 (1993), 189-201.

[22] Sequeira, M - *Fixed points in MS_2-algebras*, Houston Journal of Mathematics 19 (1993), 513-522.

[23] Sequeira, M. - *Notas sobre álgebras de Ockham I*, manuscrito.

[24] Sequeira, M. - *Notas sobre álgebras de Ockham II*, manuscrito.

[25] Urquhart, A. - *Distributive lattices with a dual homomorphic operation*, Studia Logica 38 (1979), 201-209.

[26] Varlet, J. C. - *Congruences on de Morgan algebras*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 50 (1981), 332-343.

[27] Varlet, J. C. - *Fixed points in finite de Morgan algebras*, Discrete Math. 53 (1985), 265-280.

[28] Vaz de Carvalho, J. - *Sobre as variedades* $\mathrm{K}_{n,0}$ *e álgebras de Lukasiewicz generalizadas*, Tese de doutoramento, Lisboa, 1986.

Tabela de Notação

NOTAÇÃO	DESCRIÇÃO
$X \subseteq Y$	X é subconjunto de Y.
$X \subset Y$	X é subconjunto próprio de Y.
$X \subseteq\cdot\, Y$	X é um subconjunto finito de Y.
$\mathbb{N}$	o conjunto dos inteiros positivos.
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$.
$\lceil n \rceil$	o menor natural maior ou igual a n ($n \in \mathbb{N}_0$).
$m \mid n$	m divide n ($m, n \in \mathbb{N}$).
$f : X \to Y$	f é função de X em Y.
$\operatorname{Im} f$	o conjunto $\{f(x) : x \in X\}$.
$f\vert_{X'}$	a restrição de f a $X' \subseteq X$.
id_X	aplicação identidade em X.
fg	composta de f com g (f, g aplicações).
$(x_{i_1}, ..., x_{i_k})$	a permutação r de $\{x_1, ..., x_n\}$ definida por
	$r(x_{i_k}) = x_{i_1}$, $r(x_{i_j}) = x_{i_{j+1}}$ se $1 \leq j \leq k-1$,
	$r(x) = x$ se $x \notin \{x_{i_1}, ..., x_{i_k}\}$.
$\vert X\vert$	cardinal do conjunto X.
$\underline{n}$	uma cadeia com n elementos ($n \in \mathbb{N}$).
$(x]$	o conjunto $\{z \in P \mid z \leq x\}$ (P conjunto parcialmente ordenado).
$[x, y]$ ($x \leq y$)	o conjunto $\{p \in P : x \leq p \leq y\}$.
$x \ll y$	y cobre x, i.e., $x < y$ e não existe $z \in P$ tal que $x < z < y$.
$x \wedge y$, $x \vee y$	ínfimo de x e y, supremo de x e y.

NOTAÇÃO	DESCRIÇÃO
$\bigwedge X$, $\bigvee X$	ínfimo de X, supremo de X $(X \subseteq P)$.
$\min X$, $\max X$	elemento mínimo de X, elemento máximo de X $(X \subseteq P)$.
0, 1	elemento mínimo de P, elemento máximo de P.
$J(L)$	conjunto dos elementos $\vee$-irredutíveis não nulos do reticulado L.
L^d	o reticulado dual do reticulado L.
$\mathcal{L}$	álgebra (de tipo τ) com conjunto suporte L.
$\mathrm{Sg}^{\mathcal{L}}(X)$	o subuniverso da álgebra $\mathcal{L}$ gerado por X ($X \subseteq L$).
$\mathcal{S}\mathrm{g}^{\mathcal{L}}(X)$	a subálgebra de $\mathcal{L}$ gerada por X ($X \subseteq L$).
$\mathrm{Con}(\mathcal{L})$	o reticulado de congruências de $\mathcal{L}$.
∇, ∇_L	a congruência universal em $\mathcal{L}$.
$\triangle$, $\triangle_L$	a congruência identidade em $\mathcal{L}$.
θ'	o complemento (caso exista) da congruência $\theta \in \mathrm{Con}(\mathcal{L})$.
$\theta\|_{L'}$	a restrição da congruência $\theta \in \mathrm{Con}(\mathcal{L})$ a L', ($\mathcal{L}' = (L', F)$ subálgebra de $\mathcal{L}$).
$\theta(a,b)$, $\theta_L(a,b)$	a congruência principal de $\mathcal{L}$ gerada por (a,b) , com $a, b \in L$, i.e., o menor elemento de $\mathrm{Con}(\mathcal{L})$ que identifica os elementos a e b de L.
$\prod_{i\in I} L_i$	o produto directo da família de conjuntos $\{L_i\}_{i\in I}$.
$L_1 \times L_2 \times ... \times L_r$	o produto directo da família finita $\{L_1, L_2, ..., L_r\}$.
$p_j : \prod_{i\in I} L_i \to L_j$	epimorfismo projecção de $\prod_{i\in I} L_i$ em L_j.
$\prod_{i\in I} \mathcal{L}_i$	o produto directo da família de álgebras $\{\mathcal{L}_i\}_{i\in I}$.
$\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \times ... \times \mathcal{L}_r$	o produto directo da família finita de álgebras $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, ..., \mathcal{L}_r\}$.
$\mathbf{K}$	classe de álgebras do tipo τ.
$S(\mathbf{K})$	a classe das álgebras isomorfas a subálgebras das álgebras de $\mathbf{K}$.
$H(\mathbf{K})$	a classe das imagens homomorfas das álgebras de $\mathbf{K}$.
$P(\mathbf{K})$	a classe das álgebras isomorfas a produtos directos de famílias de álgebras de $\mathbf{K}$.
$P_S(\mathbf{K})$	a classe das álgebras isomorfas a produtos subdirectos de famílias de álgebras de $\mathbf{K}$.

Índice de Notação

SUBCONJUNTOS E ELEMENTOS ESPECIAIS

ÁLGEBRAS ESPECIAIS

CONGRUÊNCIAS

CLASSES DE ÁLGEBRAS

PROPRIEDADES

DIVERSOS

DIVERSOS

Índice Remissivo