Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria Manuela Noval Fernandes Mendes

Aprendizagem de trigonometria de alunos do 9.º ano de escolaridade com recurso ao GeoGebra

janeiro de 2016

Maria Manuela Noval Fernandes Mendes **Aprendizagem de trigonometria de alunos do 9.º ano de escolaridade com recurso ao GeoGebra**

UMinho|2016

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria Manuela Noval Fernandes Mendes

Aprendizagem de trigonometria de alunos do 9.º ano de escolaridade com recurso ao GeoGebra

Relatório de Estágio
Mestrado em ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho efetuado sob a orientação do
Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

janeiro de 2016

DECLARAÇÃO

Nome: Maria Manuela Noval Fernandes Mendes

Endereço Eletrónico: novalf@hotmail.com

Telemóvel: 918292241

Número do Bilhete de Identidade: 8420878

Título do Relatório:

Aprendizagem de trigonometria de alunos do 9.º ano de escolaridade com recurso ao GeoGebra

Supervisor:

Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

Ano de conclusão: 2016

Mestrado em ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Universidade do Minho ____/____/____

Assinatura: ____

AGRADECIMENTOS

Ao Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu, meu supervisor, pela sua disponibilidade e interesse demonstrado em todos os momentos de desenvolvimento deste projeto, pelas suas sugestões e apreciações pertinentes.

Ao professor Marco, meu orientador, pelos seus conselhos relativos à intervenção pedagógica e pela partilha de experiências.

À Escola por permitir a elaboração e concretização deste projeto e aos alunos pela sua colaboração e disponibilidade em colaborar ao longo do ano de estágio.

À Rosa, minha amiga e colega de estágio, pela partilha de ideias e pela presença em todos os momentos no desenvolvimento deste projeto.

APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA DE ALUNOS DO 9.º ANO DE ESCOLARIDADE COM RECURSO AO GEOGEBRA

Maria Manuela Noval Fernandes Mendes

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Universidade do Minho, 2016

RESUMO

O presente estudo teve como principal objetivo analisar o contributo do GeoGebra no ensino e na aprendizagem de Trigonometria do triângulo retângulo de alunos do 9.º ano de escolaridade. De forma a responder a este objetivo, estabeleceram-se as seguintes questões de investigação: (1) Que atividades desenvolvem os alunos no estudo sobre tópicos de trigonometria com recurso ao GeoGebra? (2) Que dificuldades manifestam os alunos na aprendizagem de tópicos de trigonometria? Qual o papel do GeoGebra na clarificação dessas dificuldades? (3) Quais as perspetivas dos alunos sobre a utilização do GeoGebra na aprendizagem de trigonometria? Para dar resposta a estas questões recorreu-se aos seguintes métodos de recolha de dados: questionários (um antes e outro depois da intervenção pedagógica); análise documental (planos de aula, reflexões, registos de aulas, projeto curricular da escola, plano anual de atividades da escola e projeto educativo da escola); produções dos alunos; e questões no final de algumas aulas. A análise dos dados permitiu verificar que o recurso ao GeoGebra possibilitou a realização de várias atividades pelos alunos, tais como a exploração de tarefas, estabelecer conjeturas, estabelecer relações, discutir processos de construção e resultados obtidos, assim como interpretar os enunciados de problemas. Na atividade de prova das relações trigonométricas estabelecidas, os alunos manifestaram dificuldade de concretização, o que se poderá dever à falta de hábito em sistematizar conhecimentos matemáticos que adquirem. Os alunos também revelaram dificuldades na interpretação de enunciados de problemas, na justificação e na argumentação de ideias. Algumas das dificuldades sentidas pelos alunos foram clarificadas com o GeoGebra, como, por exemplo, na determinação da amplitude de ângulos agudos de um triângulo retângulo a partir das medidas dos seus lados. Relativamente à perceção sobre as estratégias desenvolvidas, a maior parte dos alunos consideram que a exploração de tarefas com o GeoGebra lhes permitiu, devido à sua natureza dinâmica, realizar atividades de forma autónoma e com mais empenho do que as que realizam com papel e lápis. Porém, na realização de tarefas de estrutura aberta, a maior parte dos alunos não as resolveu nem reconheceu o valor que este tipo de tarefas tem na sistematização de conhecimentos. Isto significa que a utilização de artefactos didáticos, na mediação da aprendizagem de conceitos matemáticos, ganha sentido com a prática e com a perceção que se tem sobre a atividade matemática.

9TH YEAR STUDENTS LEARNING OF TRIGONOMETRY WITH THE USE OF GEOGEBRA

Maria Manuela Noval Fernandes Mendes

Master's in Mathematics teaching in the third cycle of Basic Education and on the Secondary Education

University of Minho, 2016

ABSTRACT

This study aimed to analyze the contribution of GeoGebra in teaching and learning trigonometry of the rectangle triangle to students from 9th grade. In order to meet this goal, were established the following research questions: (1) What activities do students develop in the study of topics of trigonometry using the GeoGebra? (2) What difficulties do students manifest in learning topics of trigonometry? What is the role of GeoGebra in clarifying these difficulties? (3) What are the perspectives of the students on the use of GeoGebra in learning trigonometry? To address these issues we appealed to the following data collection methods: questionnaires (one before and one after the educational intervention); document analysis (lesson plans, reflections, school records, school curricular project, the annual plan of school activities and school educational project); students productions; and questions at the end of some classes. Data analysis has shown that the use of GeoGebra made possible to carry out various activities for students, such as the exploitation of tasks, establish conjectures, establish relations, discuss construction processes and results, as well as interpret the problems enunciation.

In established trigonometric relations proof activity, students expressed difficulty in implementation, which may be due to lack of habit in systematizing mathematical knowledge they acquire. Students also revealed difficulties in the interpretation of problems enunciation, in justification and ideas argumentation. Some of the difficulties encountered by the students were clarified with GeoGebra, for example, in determining the range of acute angles of a triangle rectangle from measurements of its sides. Regarding the perception of the developed strategies, most students consider that the exploration of tasks with GeoGebra allowed them, due to their dynamic nature, to perform activities autonomously and with more commitment than they do with paper and pencil. However, in carrying out open structure tasks, most of the students didn't solve them neither recognized the value that this type of work has in the systematization of knowledge. This means that the use of educational artefacts in mediating learning mathematical concepts, makes sense with practice and with the perception we have of mathematical activity.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABELAS.

INDICE DE FIGURAS

CAPITULO 1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentado o tema deste estudo, o objetivo e as questões de investigação, a pertinência do tema e uma breve descrição da estrutura deste relatório.

1.1. Tema, objetivo e questões de investigação

Vivemos numa era em que a mudança é um fenómeno evidente e imediato. Novos saberes, novos métodos, novas formas de comunicação matemática e recursos tecnológicos continuam a surgir e a evoluir (NCTM, 2007). Os cenários de mudança e de evolução social e tecnológica desafiam os profissionais da educação nos momentos de seleção das tarefas a relacionar determinados fenómenos do quotidiano com a forma de tratar os conteúdos matemáticos, uma vez que estas decisões têm consequências na aprendizagem dos alunos e na aplicação do que aprendem na compreensão e resolução desses fenómenos. A "necessidade de compreender e de ser capaz de usar a Matemática na vida quotidiana, e no local de trabalho, nunca foi tão premente" (NCTM, 2007, p. 4). Em particular, relativamente ao tema deste trabalho, *Aprendizagem de trigonometria de alunos do 9.º ano de escolaridade com recurso ao GeoGebra*, é importante que, no papel de professor, se criem momentos na sala de aula que ajudem os alunos a pensar nas diversas possibilidades de resolução das tarefas propostas, a organizar e a registar o seu pensamento. São "as ações dos professores que encorajam os alunos a pensar, a questionar, a resolver problemas e a discutir as suas ideias, estratégias e soluções" (NCTM, 2007, p. 19). Considero estas ações cruciais, dado que os alunos acabam por se responsabilizar pelas suas intervenções, desenvolvendo competências comunicativas, o que pode influenciar o seu envolvimento na resolução das tarefas propostas. Também Viseu (2008) considera que "a resolução de problemas e o trabalho de grupo podem favorecer o desenvolvimento do raciocínio e da formação dos alunos" (p. 192). Sabendo que os alunos apresentam diferentes motivações, interesses e capacidades, que conduzem a diferentes ritmos de aprendizagem, o professor tem que promover um trabalho de síntese e de reflexão, onde a aprendizagem individual ou de pequeno grupo é partilhada por todos (Varandas & Nunes 1998, p. 2). Assim, "os alunos deverão perceber e acreditar que a Matemática faz sentido, através do desenvolvimento de ideias, da exploração de fenómenos, da justificação de resultados e da utilização de conjeturas Matemáticas" (NCTM, 2007, p. 61). Com base nestes pressupostos, as sucessivas reformulações dos programas de Matemática do ensino básico refletem a preocupação de desenvolver nos alunos conhecimentos, atitudes e capacidades. Entre as capacidades, o programa de Matemática dá um especial destaque ao desenvolvimento das capacidades de raciocínio e de comunicação com a finalidade de preparar os alunos a utilizar a Matemática como instrumento de interpretação e resolução de problemas em diversos contextos. Como tal, as orientações metodológicas advogam estratégias de ensino que envolvam os alunos na construção do conhecimento dos temas que são estudados (Ministério da Educação, 2007). Tendo como base tais orientações, o que se pretende com a aprendizagem de trigonometria de alunos do 9.º ano de escolaridade com recurso ao GeoGebra, tópico que completa o estudo dedicado ao ensino da Geometria no ensino básico (Ministério da Educação, 2007), é desenvolver a capacidade do aluno de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos e trigonométricos, nomeadamente no estabelecimento de razões trigonométricas em triângulos retângulos, relações trigonométricas e na prova dessas relações. Assim, os alunos tendem a utilizar relações trigonométricas para determinar comprimentos e amplitudes de ângulos, analisar propriedades trigonométricas desenvolvendo argumentos matemáticos acerca dessas relações (NCTM, 1991).

O conhecimento que o aluno adquire permite-lhes resolver problemas do seu quotidiano, como, por exemplo, determinar a altura de edifícios, de árvores e distância inacessíveis. Nestas atividades e considerando que a tecnologia constitui uma componente essencial desse ambiente (NCTM, 2007), Viseu (2008) pondera que o uso de recursos tecnológicos favorece uma aprendizagem mais significativa, principalmente no que se refere ao desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, de autonomia e do pensamento crítico. O NCTM (2007) defende que "a tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da Matemática; influencia a Matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos" (p. 436). Através de recursos tecnológicos, "os alunos poderão raciocinar sobre outros temas mais abrangentes; (...) poderão modelar e resolver problemas mais complexos que, até então, lhes eram inacessíveis" (NCTM, 2007, p. 28). Entre os recursos tecnológicos que os alunos e o professor têm à sua disposição para utilizar na sala de aula destaca-se o GeoGebra, software dinâmico que faculta a construção, exploração e a visualização das propriedades e das relações geométricas. O envolvimento do aluno na concretização destas atividades problematiza os pressupostos do ensino tradicional, proporcionando ao aluno oportunidades de explorar elementos relevantes na construção do seu conhecimento. Também Lopes (sa) refere que os "ambientes de Geometria Dinâmica podem ser ferramentas riquíssimas na superação das dificuldades dos alunos com o estudo de conteúdos como os de Geometria" (p. 5). Em sequência desta análise, Lopes (sa) refere que,

> o que difere numa atividade com o recurso do software é a possibilidade de movimentação dos objetos e, a partir desses movimentos, o aluno investigar o que acontece com a sua construção, levantando algumas questões: A construção permanece com as mesmas características? Um simples movimento muda todas as características originais? (p. 5).

O recurso às tecnologias interfere e condiciona transformações significativas no ensino da Matemática, facilitando a experimentação e a ênfase no processo de visualização na sala de aula (Borba & Penteado, 2007). Com base nestes pressupostos, pretendo averiguar o contributo do GeoGebra na aprendizagem de trigonometria de alunos do 9.º ano de escolaridade, de forma a perceber como os alunos estabelecem as relações trigonométricas a partir das construções exploradas no GeoGebra, como as aplicam e que dificuldades revelam. Para concretizar este objetivo, pretendo responder às seguintes questões de investigação:

- Que atividades desenvolvem os alunos no estudo de tópicos de trigonometria com recurso ao GeoGebra?
- Que dificuldades manifestam os alunos na aprendizagem da trigonometria? Qual o papel do GeoGebra na clarificação dessas dificuldades?
- Quais as perspetivas dos alunos sobre a utilização do GeoGebra na aprendizagem de trigonometria?

1.2. Pertinência do estudo

O termo trigonometria já vem dos povos gregos, egípcios e babilônios, onde era utilizado no cálculo de distâncias que não podiam ser medidas por aparelhos, especialmente em situações ligadas à Astronomia. Estes povos conheciam e usavam alguns teoremas sobre razões entre os lados de triângulos semelhantes, remetendo um estudo puro e simples das medidas dos lados, ângulos e outros elementos dos triângulos. Mais tarde, os gregos iniciaram processos de sistematização desse conhecimento, começando a elaboração da trigonometria. A trigonometria não é usada apenas para estudar triângulos e circunferências, a sua aplicação serve de suporte para a resolução de questões quantitativas e lógicas. É utilizada em várias situações práticas e teóricas, envolvendo não somente problemas internos deste assunto, mas também de outras disciplinas científicas e tecnológicas que envolvem fenómenos periódicos como eletricidade, termodinâmica, ótica, eletrocardiogramas, astronomia, entre outros. Assim, para dar sentido ao conteúdo "trigonometria" através do ensino é crucial que haja compreensão Matemática nas suas aplicações. Como tal, a opção relativamente ao tema deste relatório e após várias leituras foi bastante influenciada pelo facto do tema da trigonometria normalmente ser lecionado no fim do ano letivo, e, como consequência, ser um tema pouco explorado, chegando por vezes a ser substituído por revisão de temas já lecionados, como refere Lopes (2011): "evidenciamos que parte dos professores de Matemática (...) substituía conteúdos como trigonometria, logaritmos e números complexos, por considerá-los de difícil entendimento para os alunos, por uma revisão de temas já abordados anteriormente" (p. 2). Consequentemente, o conteúdo de trigonometria passa para um segundo plano numa abordagem superficial.

Após leitura de algumas investigações, observei que não é habitual os professores e/ou investigadores se debruçarem sobre este tema ao contrário do que acontece, por exemplo, com a Álgebra ou a Geometria onde podemos analisar vários estudos. Contudo, a trigonometria é um tema importante, uma vez que está muito presente e é bastante aplicada na determinação de distâncias inacessíveis, como por exemplo, na topografia, cartografia e astronomia. Assim sendo, decidi elaborar algumas tarefas trigonométricas, suportadas pelo *software* dinâmico GeoGebra, como, por exemplo, problemas contextualizados, para que os alunos aprendessem não só de um modo significativo, mas que fossem úteis de modo a proporcionar aos alunos oportunidades para "explorar, investigar e analisar situações, discutir entre si e com o professor as várias estratégias e processos de trabalho" (APM, 1998, p. 61). Porém, alguns estudos apontam dificuldades no ensino e na aprendizagem de trigonometria, como é exemplo os realizado por Antunes e González (sa) com alunos do 9.º ano e do ensino secundário. O objetivo deste estudo remete para três vertentes: uma relativa aos conceitos que os alunos dos diferentes anos demonstram dominar; outra relativa à utilização de esquemas/representações nas diferentes respostas, e outra relativa às opiniões expressas pelos diferentes alunos sobre a pertinência da aprendizagem da trigonometria. Deste estudo, os autores concluem que os

> alunos do 9º ano apresentavam percentagens mais elevadas relativas ao domínio dos conceitos de seno e cosseno de um ângulo agudo. Contudo, obtiveram poucos registos de alunos relativamente aos conceitos de triângulos retângulos semelhantes, de razões trigonométricas de ângulos complementares

> e conceito de tangente de um ângulo agudo comparando com as percentagens relativas às outras razões trigonométricas. Sendo por isso, o conceito de razão trigonométrica de um ângulo agudo, pouco assimilado pelos alunos do 9º ano. (p. 9).

O nível de conhecimentos, revelado pelos alunos dos diferentes anos, relativo ao domínio de conceitos trigonométricos, na generalidade foi fraco. As médias com maior percentagem devem-se somente à mecanização de fórmulas, o que parece dever-se por ser um assunto facilmente esquecido ao longo do tempo. Relativamente à utilização de esquemas/representações nas diferentes respostas, os alunos que traduziram os enunciados dos problemas através de esquemas corretos, mais facilmente os resolveram. Quanto às opiniões expressas pelos diferentes alunos sobre a pertinência da aprendizagem verificou-se um número reduzido de respostas em que os alunos reconhecem a ligação da trigonometria a situações do dia-a-dia, chegando mesmo a ignorar a utilidade deste tipo de conhecimentos. De modo a enriquecer as atividades de aprendizagem dos alunos, é meu objetivo neste estudo propor aos alunos uma diversidade de tarefas que os envolvam a estabelecer e desenvolver argumentos matemáticos sobre relações trigonométricas recorrendo ao *Software* dinâmico GeoGebra, de forma a desenvolver "a intuição geométrica, a capacidade de visualização e uma relação mais afetiva com a Matemática" (Ministério da Educação, 2007, p. 51).

1.3. Estrutura do relatório

Este relatório está dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo – Introdução – é feito o enquadramento do estudo desenvolvido, onde se expõe o tema, o objetivo, as questões de investigação, a pertinência do tema e a estrutura do relatório.

No segundo capítulo – Enquadramento Contextual e Teórico – carateriza-se a escola e a turma onde se realizou o projeto, de seguida é feita a fundamentação teórica que sustenta o desenvolvimento deste trabalho onde são apresentadas as metodologias de ensino e aprendizagem e as estratégias de avaliação da minha intervenção de ensino.

No terceiro capítulo são apresentadas as tarefas desenvolvidas e interpretadas pelos alunos na aprendizagem dos tópicos da unidade Trigonometria no triângulo retângulo.

No quarto capítulo são referidas as principais conclusões deste estudo, tendo em conta as questões de investigação definidas, assim como recomendações para futuros projetos.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO

Este capítulo tem por finalidade ilustrar o contexto onde este projeto foi desenvolvido, com referência à Escola e à Turma, e ainda, à luz da literatura, sustentar os pressupostos teóricos deste trabalho e fundamentar as metodologias e estratégias utilizadas na concretização deste projeto.

2.1. Enquadramento contextual

Neste subcapítulo caraterizo a Escola e a Turma onde se desenvolveu o meu Projeto de Intervenção Pedagógica Supervisionada.

2.1.1. Caraterização da Escola

A intervenção pedagógica decorreu numa turma do 9.º ano de escolaridade de uma escola secundária, localizada na periferia da cidade de Braga, que tem à sua responsabilidade alunos de freguesias pertencentes a um meio suburbano, o que se reflete na população estudantil. Procurei conhecer o meio no qual me envolvi durante o ano letivo. Para isso realizei pesquisas documentais, nomeadamente o Regulamento Interno, o Projeto Educativo, o Projeto Curricular da Escola e o Plano Anual de Atividades, de forma a conhecer a estrutura e as normas de funcionamento da Escola. De um ponto de vista social, a escola acolhe estudantes oriundos de famílias de nível social médio e baixo. Relativamente ao nível de formação dos pais, uma percentagem significativa possui apenas o "1.º ciclo (39,6 %) e apenas 10 % possui a escolaridade obrigatória ao nível do 3.º ciclo. Estes níveis de escolarização são ainda mais baixos nos pais dos alunos dos CEF e ensino profissional" (PE, 2013, p. 7). A escola apresenta uma arquitetura em blocos independentes, envolvidos por zonas verdes, campo polidesportivo e parque interno. É de referir alguns setores que são referência na comunidade escolar, tais como: (i) Biblioteca, na qual é organizado e disponibilizado recursos documentais para o apoio de atividades curriculares, não curriculares e de lazer; (ii) Gabinete de apoio ao aluno, que constitui o espaço privilegiado da escola, de forma a apoiar os alunos que revelam dificuldades de aprendizagem ou outras necessidades específicas de apoio educativo; (iii) Clubes, que constituem um instrumento privilegiado na melhoria de inclusão e integração escolar, no desenvolvimento da formação integral dos alunos e no combate ao insucesso e abandono escolar. A participação da escola em alguns projetos de âmbito nacional e mundial, nomeadamente: Campeonato nacional da robótica Projeto *ESArobots*, tendo obtido na sua participação no ano de 2012/2013 o 1.º lugar nacional em Lisboa e 1.º lugar mundial na Holanda. No ano 2013/2014 os alunos participaram, tendo a escola obtido o 2.º lugar a nível nacional, o que lhe permitiu ficar apurada para o mundial no Brasil, mas por motivos de falta de verbas não participou; (iv) Serviços de psicologia e orientação ao nível do atendimento individualizado e também para a orientação vocacional.

Esta escola apresenta uma oferta educativa diversificada que vai ao encontro da satisfação de toda a comunidade educativa. Os alunos encontram-se distribuídos pelo 3.º ciclo, Cursos Científico Humanísticos, Cursos de Educação e Formação, Cursos Profissionais e Cursos de Educação e Formação de Adultos. Atualmente, segundo o Projeto Educativo (2013), frequentam a escola cerca de 900 alunos, distribuídos pelo 3.º ciclo (43%), CEF (2%), Cursos Científico - Humanísticos (33%), Cursos Profissionais (16%) e Cursos EFA (6%). A frequência de alunos nos cursos profissionais tem aumentado de ano para ano, situando-se atualmente nos 33% dos alunos do ensino secundário.

O Projeto Educativo da escola constitui um plano global onde estão contemplados princípios, valores, metas, estratégias e orientações que permitem assegurar, no futuro, a capacidade de gerir a escola de forma mais autónoma. Com estes princípios pretende-se "garantir a igualdade de oportunidades a todos os que nela procuram um percurso formativo" e proporcionar "uma formação de qualidade, de rigor e de exigência, tendo em vista não apenas o sucesso escolar, mas também o êxito na continuação do percurso formativo". No que concerne a análise de estratégias, objetivos e metas da educação vindos do Projeto Educativo da escola, destaca-se a valorização "da educação na formação pessoal e social", de modo a "fomentar a educação para a cidadania", inovam-se estratégias para assim obter "sucesso educativo, melhorando o serviço prestado pela escola" (Projeto Educativo, 2013, pp. 15-16).

Foi com esta preocupação que planeei a minha prática pedagógica proporcionando dinamismo nas atividades propostas, tendo como suporte o *software* dinâmico GeoGebra. Neste sentido, organizei atividades em grupo, proporcionando regras de trabalho com o intuito de desenvolver competências pedagógicas e motivar os alunos para a aprendizagem. Considerando a motivação um fator crucial para o desenvolvimento de competências nos alunos, é importante referenciar alguns projetos inerentes ao Plano Anual das Atividades, a saber: Desafio

Matemático, desenvolvido pelo grupo de Matemática onde o público-alvo são os alunos do 3.º ciclo e do secundário; Campeonato de Jogos do Agrupamento com a finalidade de: (i) Desenvolver o raciocínio lógico–abstrato; (ii) Aumentar o gosto pela Matemática; (iii) Adquirir métodos/estratégias de resolução de problemas; (iv) Desenvolver a capacidade de atenção/concentração; e (v) Uso das TIC: Existem outras atividades com o intuito de desenvolver a comunicação matemática e melhorar a capacidade de leitura e/ou interpretação/compreensão de enunciados. Com esta preocupação o Plano Curricular (2013) da escola tem em vista "desenvolver no aluno atitudes positivas face à disciplina (...), potenciar as competências a nível da resolução de problemas, da comunicação Matemática e do raciocínio matemático" (p. 31). Um dos instrumentos essenciais de concretização do Projeto Educativo será o Plano Anual de Atividades e Projeto Curricular de Escola. Tendo sempre presente que, o Projeto Educativo "respeita a organização do trabalho curricular para o desenvolvimento de competências e o desenvolvimento de atividades curriculares com recurso às TIC" (p. 10).

2.1.2. Caraterização da Turma

A turma onde desenvolvi a intervenção pedagógica era constituída por 30 alunos, que no ano letivo 2013/2014, se encontravam no 9.º ano de escolaridade com idades compreendidas entre os 13 e os 15 anos, sendo 14 do sexo feminino e 16 do sexo masculino.

Tabela 1: Distribuição dos alunos quanto ao género e à média de idades (n=30).

Idades	13	14	15
Raparigas	1	10	3
Rapazes	0	13	3
Percentagem de alunos	3%	77%	20%

Refira-se que foram mantidas as estratégias planeadas, dando continuidade ao trabalho do ano anterior, com maior enfase à diciplina de Matemática visto ser esta em que os alunos tinham mais dificulades, devido ao fraco empenho por parte dos mesmos acrescentando o número excessivo de alunos na turma. Pela observação em contexto de sala de aula no 1.º período, pude verificar esta realidade, isto é, a maior parte dos alunos revelava ter dificuldades à disciplina de Matemática, uns porque estavam desmotivados pela não compreensão dos conteúdos, outros simplesmente por se distraírem facilmente. Em consequência, o esforço verificado nestes alunos era parco, o que os impedia superar essas mesmas dificuldades. Contudo, alguns alunos, que evidenciavam dificuldades à disciplina de Matemática tentaram empenhar-se de forma a colmatá-las. Outros (cerca de metade da turma), não revelavam nenhum interesse pela disciplina perturbando os poucos que estavam mais empenhados. Este cenário piorou no 2.º e 3.º períodos, sendo cada vez menos ativa a participação e o empenho nas atividades em grupo e em pares em sala de aula. Esta atitude resultou num decréscimo do rendimento escolar, principalmente às disciplinas da área das ciências, nomeadamente Matemática e Física - Química. Durante a minha intervenção, em todas as tarefas propostas, tive a oportunidade de apresentar aos alunos algumas questões de forma a perceber melhor o seu desempenho, conhecimentos adquiridos, assim como o seu interesse pela atividade em causa. Relativamente ao comportamento era uma turma muito barulhenta, cerca de 12 a 14 alunos eram perturbadores, dificultando por vezes o desempenho do professor. O histórico escolar da turma continuou a revelar um nível de aproveitamento pouco satisfatório, existindo cerca de doze alunos com três ou mais níveis inferiores a três. No final do ano letivo, antes e depois dos exames, verificou-se os seguintes níveis de desempenho:

Tabela 2: Classificação dos alunos na disciplina de Matemática no final do ano letivo.

	Níveis < 3	**Níveis >=3**
Notas antes dos exames	16	14
Notas após os exames	16	14
(%) Exames	53 %	47 %
Aprovação na diciplina (%)	53 %	47 %

De referir que, em média, quer as raparigas quer os rapazes tiveram ao longo do ano um desempenho negativo crescente. Metade da turma manifestou um decréscimo no seu desempenho escolar, principalmente na área das ciências. Alunos que anteriormente tinham níveis de desempenho positivos passaram a ter resultados negativos.

Segundo o Plano de Turma (2013/2014), dos 30 alunos da turma 10 indicaram que querem prosseguir estudos no ensino superior, enquanto os restantes ainda não sabiam o que pretendiam seguir. Relativamente ao modo como estudavam, a maioria estudava em casa com o apoio da família. O tempo de estudo diário em média para cada aluno está entre 45m a 1h. Neste sentido, e para atenuar o insucesso escolar, "o conselho de turma continua a implementar as estratégias delineadas dando sequência ao trabalho que se tem vindo a encetar" (Plano de Turma, 2013, p. 21). As preocupações do conselho de turma determinam as orientações emanadas do projeto educativo da escola, o qual aponta planos de recuperação e acompanhamento" (p. 13). O Plano de Turma justifica esta situação dizendo que

> os resultados se devem ao descuido que se tem vindo a instalar nos alunos, nomeadamente a falta de preparação para os testes, associado à ausência de estudo sistemático e consistente (....), apresentam graves lacunas a nível das competências sistemático e consistente (....), apresentam graves lacunas a nível das competências básicas que se prendem com as dificuldades de análise e interpretação de documentos. (2013, p. 20)

Foi neste contexto que desenvolvi a minha intervenção pedagógica, tendo como objetivos entender e a superar as dificuldades dos alunos.

2.2. Enquadramento teórico

Este subcapítulo destina-se à sustentação teórica do projeto desenvolvido à luz da literatura, referindo as metodologias e as estratégias de avaliação da ação desenvolvidas.

2.2.1. O ensino de trigonometria no triângulo retângulo no currículo do 3.º ciclo

Em cada ciclo de ensino, no geral, e do ensino básico, em particular, os temas não devem ser estanques, pelo que deve haver uma abordagem construtiva e sequencial, sendo retomados os principais conceitos de forma progressiva e aprofundada. No entanto, é importante considerar as linhas orientadoras impostas para cada tema (Ministério de Educação, 2007). Dos temas que estruturam os programas escolares, a Geometria faz parte do programa de todos os anos de escolaridade, devido à sua importância no desenvolvimento do raciocínio geométrico do aluno. Ao trabalhar com figuras geométricas, o aluno discute ideias, formula conjeturas, estabelece semelhanças, o que lhe possibilita a oportunidade para descobrir relações (NCTM, 1991).

O estudo de tópicos de Geometria inicia-se no 1.º ciclo, desenvolvendo nos alunos o pensamento geométrico, dando importância à visualização e à compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço. Acrescenta-se ainda a noção de grandeza e medidas, constituindo aprendizagens essenciais neste ciclo. Todos estes conhecimentos e capacidades devem ser aplicados para resolver problemas em contextos variados (Ministério de Educação, 2007).

No 2.º ciclo, os alunos ampliam o estudo de Geometria dando ênfase às figuras unidimensionais, à exploração de isometrias, em especial à reflexão e rotação, assim como o processo de medição que continua com bastante relevo associado à resolução de problemas do quotidiano. No que diz respeito à noção de ângulo e na identificação de diversos tipos de ângulos apreendidos no 1º ciclo, introduz-se agora o conceito de amplitude, medem-se, classificam-se e constroem-se ângulos. Trabalha-se o perímetro com outras figuras geométricas (círculo e polígono irregular), exploram-se os conceitos de área e de volume, incluindo o estudo das fórmulas das áreas do triângulo e do círculo (Ministério de Educação, 2007). No 3.º ciclo, destaca-se a inter-relação plano - espaço, aprofunda-se e amplia-se o estudo de sólidos geométricos e de figuras no plano, da relação de congruência e semelhança, do teorema de Pitágoras, de áreas e volumes de polígonos e introduzem-se as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

A unidade de Trigonometria no triângulo retângulo faz parte do programa do Ensino básico do 9.º ano do 3.º ciclo, ocupando parte do 3.º período do ano escolar. A unidade em estudo tem como objetivos: (i) Identificar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo dado como razões obtidas a partir de elementos de um triângulo retângulo; (ii) Estabelecer relações trigonométricas básicas entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo; e (iii) Resolver problemas utilizando razões trigonométricas em contextos variados (Ministério de Educação, 2007). O estudo da Trigonometria tem, assim, como finalidade desenvolver a capacidade do aluno na resolução de problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos e trigonométricos, nomeadamente a demonstração de propriedades, no estabelecimento de relações e razões trigonométricas em triângulos retângulos (Ministério de Educação, 2007). O desenvolvimento deste bloco temático não é estanque, podendo ocorrer em mais do que um momento e ser interpretado e relacionado com conteúdos de outros temas já desenvolvidos (Ministério de Educação, 1991, p. 165). Canavarro, Santos e Machado, (2006) consideram que diversas ligações e abordagens do mesmo conceito em momentos diferentes permitirão uma visão dinâmica e integrada da disciplina.

Este tema teve como principal propósito "Desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço, a compreensão das transformações geométricas e da noção de demonstração, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em diversos contextos (Ministério da Educação, 2007). Salienta-se a importância atribuída a temas transversais, tais como: (i) o raciocínio matemático; (ii) a comunicação matemática; e, em particular; (iii) a resolução de problemas. Na promoção destas capacidades será explorado o GeoGebra, tendo em conta o tema definido para este projeto: Aprendizagem de Trigonometria de alunos do 9.º ano de escolaridade com recurso ao GeoGebra.

2.2.2. O GeoGebra na aprendizagem de trigonometria

A tecnologia está cada vez mais presente no nosso dia-a-dia. Cada vez mais estamos abrangidos e dependentes da utilização dos recursos tecnológicos, sendo que, um desafio para a Educação Matemática é a integração das tecnologias da informação e comunicação (TIC) na prática pedagógica. O NCTM (2007, p. 28) defende que através das

> ferramentas tecnológicas, os alunos poderão raciocinar sobre outros temas mais abrangentes, (...) como modelar e resolver problemas mais complexos que, até então, lhes eram inacessíveis, as possibilidades de envolver os alunos em desafios matemáticos aumentam de forma acentuada, com a utilização de tecnologias especiais. (p. 27-28)

Também Ponte (2000) refere que as ferramentas TIC podem ter um impacto muito significativo no ensino de disciplinas específicas, como a Matemática: o seu uso intensifica a importância da linguagem gráfica e de novas formas de representação, valoriza a oportunidade de realização de projetos e atividades de modelação, exploração e investigação. No desenvolvimento do tema de Trigonometria é vantajoso ter como suporte um *Software* dinâmico, por permitir aos alunos perceberem o conhecimento matemático como forma de resolver qualquer tarefa exploratória. As orientações metodológicas do programa de Matemática do ensino básico para o estudo da Trigonometria (Ministério da Educação, 2007) apontam a exploração do "GeoGebra*,* sobretudo na realização das tarefas exploratórias e investigativas" (p. 51).

O GeoGebra, para além de se encontrar facilmente na Web, é totalmente livre de encargos, com uma versão em vários idiomas inclusive em português. É um *software* que agrupa geometria, álgebra e cálculo. Qualquer pessoa que não tenha conhecimento do GeoGebra adapta-se, não apresentando dificuldades em explorá-lo permitindo construir e alterar figuras dinamicamente, servindo de muita utilidade por parte dos professores e alunos na sala de aula. Para Gomes e Araújo (2011), o "GeoGebra é uma ótima sugestão de recurso tecnológico no ensino da Matemática, possibilitando uma alternativa de uso das salas de informática das escolas cuja utilização está às margens das propostas educacionais" (p. 14).

Quando a informática faz parte do ambiente escolar, Lopes (2011) defende a promoção de um processo dinâmico de interação entre os alunos e professores sobre as diferentes possibilidades de representação dos conceitos matemáticos, o que se evidencia nos momentos de "realizar construções, análises, observações de regularidades e ao estabelecer relações" (p.

4). A familiarização com o GeoGebra faz com que, segundo Fernandes e Viseu (2011), os alunos produzam raciocínios mais estruturados e se envolvam nas tarefas propostas pelo professor. Também o NCTM (2007) advoga que o "raciocínio matemático desenvolve-se nas aulas, onde os alunos são encorajados a exporem as suas ideias para serem verificadas" (p. 220). Essas atividades resultantes com o GeoGebra visam aumentar o poder de argumentação do aluno sobre o que constrói e sobre os seus processos de resolução das tarefas com que se depara. Tal como indica o NCTM (2007), "um dos desafios mais importantes no ensino da Matemática refere-se ao papel que a demonstração e a justificação desempenham, sobretudo em ambientes cada vez mais tecnológicos" (p. 368).

Na concretização de uma pedagogia que valorize a atividade do aluno no estudo de Trigonometria, a utilização de recursos tecnológicos cria oportunidades ao aluno de explorar as tarefas que lhe são propostas, apresentar as suas atividades à turma, argumentar os seus processos e resultados e estabelecer as definições, regras e propriedades. O GeoGebra apresenta algumas potencialidades no ensino e aprendizagem de Trigonometria, na medida em que no processo de aprendizagem de um conceito matemático o aluno pode ter dificuldades em conseguir estabelecer a relação entre o que se pede e o resultado final. No entanto, o aluno tem oportunidade num ambiente computacional de efetuar sucessivas repetições, acabando por tentativa e erro chegar ao pretendido (Santos & Domingos, p. 4). O que importa, tal como defende o NCTM (2007), é que os alunos aprendam "Matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios" (p. 21). Estas razões tendem a justificar as dificuldades dos alunos na aprendizagem de conceitos trigonométricos. Oliveira (2012) identifica outros, tais como a preocupação expressa nos livros didáticos e na prática de alguns professores "com a aprendizagem 'mecânica' dessa parte da Matemática, ocasionando um desconhecimento conceitual dos seus elementos chaves como: seno, cosseno e tangente de um ângulo" (p. 16).

A trigonometria, enquanto componente curricular do ensino de Matemática pode ser aplicada a outros campos do conhecimento, como no estudo da Medicina, da Música, da engenharia, da resolução de problemas que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenómenos periódicos. Estudos relacionados com o ensino da Trigonometria apontam uma grande lacuna dos alunos relativamente aos conceitos básicos, como as definições de seno, cosseno e tangente, redução de ângulos ao primeiro quadrante, entre outros. Considera-se que essas lacunas sejam atribuídas à falta de conhecimentos anteriores sem nenhuma aplicação prática, baseada apenas na transmissão de fórmulas e regras, não tendo nenhum sentido para a maioria dos alunos.

No sentido de minimizar as dificuldades em ambientes tecnológicos, Ponte, Abrantes e Matos (1998) consideram, a partir da análise que efetuaram a alguns estudos realizados em Portugal, que o professor deve atender que: (i) os alunos revelam maior interesse pelas aulas em que usam computador; e (ii) o tempo é um dos fatores essenciais na aprendizagem deste tema no sentido de partir de um nível de raciocínio geométrico mais baixo, permitindo explorar figuras, construções e relações geométricas e trigonométricas de forma a atingir raciocínios mais complexos. Para estes autores, o ambiente computacional tende a "beneficiar muito, se contar com períodos de trabalho prolongados" (p. 98), para além de ser um facilitador de orientação e motivação para o aluno na sala de aula.

Através de softwares de geometria dinâmica, os alunos simulam rapidamente exemplos trigonométricos, podendo mesmo resultar em investigações matemáticas mais abrangentes do que, de outra forma, não seria possível. Para Lopes (2011), o "uso do *software* GeoGebra pode auxiliar na resolução de problemas de trigonometria, especialmente em atividades investigativas, de forma que os estudantes possam interagir com as figuras construídas" (p. 11). Os movimentos interativos que se podem efetuar com este recurso possibilitam ao aluno realizar atividades que não são possíveis com lápis e papel.

Atendendo às potencialidades deste recurso, atualmente existe recursos tecnológicos para o estudo da Trigonometria, uma vez que o programa de Matemática do ensino básico (Ministério da Educação, 2007) advoga que "a aprendizagem Matemática pressupõe que os alunos trabalhem de diferentes formas na sala de aula" (p. 12). Deste modo, continua a ser crucial a importância da utilização do GeoGebra, para além de permitir movimentos de objetos no ecrã, possibilita descobertas, confirmação de resultados, fazer investigações, levantar questões relacionadas com a sua aplicação prática, o que aumenta o poder de dedução do aluno e possibilita desenvolver capacidades intelectuais e estruturar o raciocínio lógico matemático, simulando sucessivas verificações mantendo as características iniciais da construção, para além de conseguir construir figuras sem régua e compasso.

Maia e Faria (2013) com o objetivo de perceber que autonomias os alunos adquirem ao analisar e resolver problemas relacionados com a sua vida quotidiana, usando um recurso tecnológico, elaboraram um debate, baseado em observações das atividades realizadas pelos alunos do 2.º ano do curso técnico integrado em eletrónica. Com esta abordagem, tentou-se completar deficiências enfrentadas por alguns alunos quando estudavam as funções trigonométricas seno e cosseno. Visando prevenir essa deficiência, propôs-se a utilização do GeoGebra na realização de uma sequência de atividades sobre Trigonometria. Este software permitiu dinamizar o estudo das funções trigonométricas (seno e cosseno), a construção de gráficos e a resolução das atividades propostas, tendo como objetivo oferecer aos alunos opções para superar as dificuldades de aprendizagem no ensino das funções e desenvolver estratégias de resolução de forma autónoma e criativa para as situações encontradas. Os programas de construção de gráficos facilitam a "exploração das características dos vários tipos de funções" (NCTM, 2007, p. 29). O pretexto que orientou o estudo foi o uso do computador como ferramenta didática que permite ao aluno criar e explorar propriedades a partir de uma sequência de passos até chegar ao gráfico da função pedida. Os autores sugerem este trabalho com o objetivo de facilitar a compreensão desses conceitos, com o auxílio do GeoGebra, desenvolvendo uma série de atividades. De forma a contextualizar esta proposta (construção de gráficos), os mesmos abordaram o uso das funções trigonométricas em vivências práticas, destacando o ciclo cardíaco" (Souza, 2010, p. 52) modelado matematicamente. Desta forma, os alunos aperceberam-se da ligação entre teoria e prática, de modo que estes entendam que o ensino da Matemática não está desligado do mundo real. Após o desenrolar da atividade e perante as dificuldades apresentadas pelos alunos no estudo da Trigonometria e, em particular, na construção dos gráficos das funções trigonométricas seno e cosseno, os autores examinaram e compararam com dados anteriores a diferença de execução da mesma atividade sem/com recurso ao GeoGebra. Verificou-se que houve progresso no processo de ensino e aprendizagem, ocorrendo uma grande participação da turma na realização das atividades propostas, admitindo que houve uma melhor compreensão dos conceitos trigonométricos. Verificou-se, ainda, que a interatividade proporcionada pelo GeoGebra contribuiu para que os alunos estruturassem melhor o raciocínio lógico matemático à procura de soluções para as propostas.

Considera-se relevante o uso de um *software* dinâmico, na medida em que "enriquece a extensão e qualidade das investigações, ao fornecer um meio de visualizar noções Matemáticas sobre múltiplas perspetivas" (NCTM, 2007, p. 27), permitindo um maior envolvimento em desafios matemáticos. Um estudo realizado por Leite (2011), com o objetivo de analisar as potencialidades e limitações do GeoGebra na formação dos conceitos básicos de Trigonometria, com alunos do 2.º ano, sugere duas formas de utilizar o GeoGebra: Na primeira, os alunos com domínio dos procedimentos automaticamente elaboraram as suas próprias construções. Na segunda, os alunos tinham um conjunto de construções já elaboradas bastando analisar as suas propriedades. Com estes pressupostos foram anunciados problemas sem indicação de resposta/solução. A autora aponta que esta atitude investigativa contribuiu para a formação de um conhecimento matemático diferente do que é habitual dia a dia numa sala de aula. Da análise de dados, a autora propôs uma atividade tendo como objetivo a construção de um triângulo retângulo (razões trigonométricas no triângulo retângulo) com o recurso ao GeoGebra. Nesta atividade os alunos investigaram as propriedades e características das razões trigonométricas nos triângulos retângulos e com a ajuda de uma ficha guiada construíram os triângulos retângulos fazendo as suas conjeturas através do processo de construção e visualização no ecrã. Embora esta visualização seja importante, alguns alunos tiveram dificuldades na compreensão da figura construída. Porém, à medida que o tempo ia passando os alunos começaram por perceber que aumentando e diminuindo os lados do triângulo inicialmente construído, a razão entre os seus lados não se alteravam, concluindo que estavam perante triângulos semelhantes entre si. A autora refere que as conclusões tiradas a partir das construções elaboradas pelos alunos foram reforçadas pela exploração da figura arrastando e movimentando vértices. A mesma concluiu que o uso de *softwares* de geometria dinâmica pode auxiliar na resolução de problemas de Trigonometria, em particular em atividades investigativas, de maneira a que os alunos possam interagir com as figuras construídas.

Em modo de síntese a autora faz algumas considerações sobre o uso do recurso do GeoGebra que importa referir. Vantagens: (i) Permite a exploração visual das figuras construídas, o que não é possível com as figuras estáticas feitas com régua e compasso; (ii) Facilidade do aluno em construir as figuras com o recurso do *software*; (iii) Permite que os dados sejam alterados graficamente, mantendo as características da construção (Geometria Dinâmica); e (iv) Aumenta o poder de argumentação do aluno através do processo de arrastar as figuras pelo ecrã do computador, fazendo as sucessivas simulações. Assim como desvantagens: (i) Necessidade de reestruturação dos laboratórios de informática; e (ii) Necessidade de cursos de atualização para que os professores se familiarizem com os diferentes tipos de softwares de Matemática disponíveis gratuitamente (pp. 45-46).

As indicações metodológicas do programa de Matemática do ensino básico (Ministério da Educação, 2007) e as recomendações de alguns autores, tais como Preussler e Grando (2013), Amaral e Frango (2014) e Gomes e Araújo (2011), consideram os recursos tecnológicos como impulsionadores do desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Por isso, a exploração de atividades em conjunto com o GeoGebra facilita o desenvolvimento de capacidades, promove a reflexão, permite conjeturar, desenvolver ideias e mesmo concluir e registar resultados do trabalho realizado. Subjacente ao dinamismo educacional no processo aprendizagem do aluno, é importante proporcionar-lhe outros aspetos de complexidade do pensamento matemático, que muito tem a ver com a natureza das atividades que são realizadas na aula de Matemática.

2.2.3. Teoria da atividade

A teoria da atividade desenvolvida, inicialmente, por Vygostky e, posteriormente, por Leontiev, é a designação dada à corrente psicológica que explica o desenvolvimento da mente humana, considerando a atividade humana como a unidade básica do desenvolvimento humano, que traduz as transformações resultantes das interações que se estabelecem entre o ser humano e o ambiente, mediadas por artefactos. Esta teoria evoluiu ao longo de três gerações. A primeira, centrada em Vygostky, com a criação da ideia de mediação por artefactos culturais, veio-se a representar pelo modelo triangular. Neste modelo, verifica-se a existência de um sujeito, um objeto e um mediador de ações humanas deixando para trás a separação entre o meio social envolvente e o indivíduo (Figura 1).

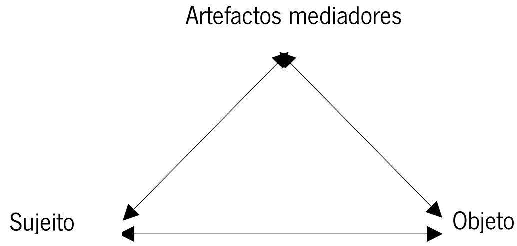


Figura 1: Modelo da 1.ª geração (Engestrom, 2001).

Vygostky destacava a aquisição de conhecimento pela interação do sujeito com o meio cultural, considerando sempre o ser humano inserido na sociedade. Para Engestrom (2001), este modelo triangular focado no indivíduo não era entendido sem o seu meio cultural, sem as ações humanas e a sociedade, sendo estas ações capazes de transformar a atividade do indivíduo. Porém, esta fase foi superada no desenvolvimento da 2.ª geração, desenvolvida em torno de Leontiev (1978), abandonando a separação entre o indivíduo e o seu meio envolvente, sociedade, passando a focar as inter-relações entre o sujeito individual e a comunidade, a relacionar ações entre os objetos individuais e a sociedade num sistema de atividade coletiva. Esta expansão do triângulo básico de Vygostky tem agora como objetivo representar os elementos sociais e coletivos do sistema de atividade humana. Acrescentando a comunidade, as regras e a divisão de trabalho, destaca a importância da análise da interação entre os vários elementos (Figura 2).

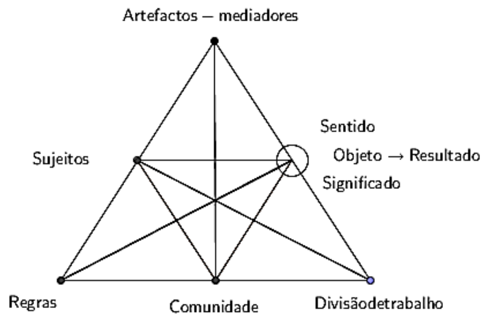


Figura 2: Modelo da 2.ª geração, estrutura de um sistema de atividade humana (Engestrom, 2001).

Este sistema, onde a atividade ocorre com a presença de regras, divisão de trabalho e ações individuais, apresenta as ferramentas (artefactos) como parte integrante e inseparável do ser humano de forma a promover o diálogo e redes de atividades interagindo entre os sistemas. Para Engestrom (2001), o sub-triângulo superior da (Figura 2)

> pode ser visto como a 'ponta do iceberg' representando ações individuais e de grupo embutidos num sistema de atividade coletiva. O objeto é representado pela figura em forma de oval indicando que as ações orientadas para o objeto são sempre, explícita ou implicitamente, caracterizada pela ambiguidade, surpresa, interpretação, produção de sentido, e potencial para a mudança. (p. 5)

Estas ações da atividade convergem, segundo o autor, para a necessidade do desenvolvimento da terceira geração, mostrando que o foco não deve estar num único sistema de atividades mas na interação entre os vários sistemas (Figura 3).

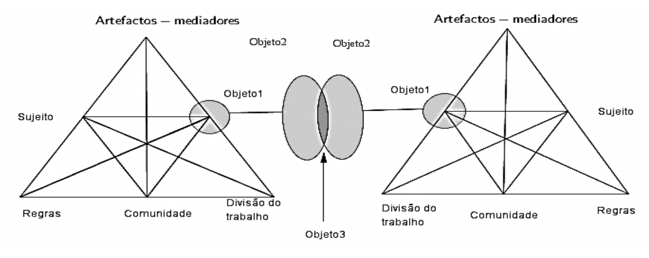


Figura 3: Modelo da terceira geração, interação de dois sistemas de atividade (Engestrom, 2001).

Neste sistema da atividade, os objetos que o constituem avançam de um estado inicial, bruto e sem reflexão (objeto1), para um estado coletivo com significado para o sistema de atividade (objeto 2), até um estado partilhado desenvolvido a partir da interação entre os dois sistemas (objeto 3). A sustentação e a interação entre os vários elementos permite desenvolver ferramentas para mediar a atividade de forma específica e objetiva, a compreensão, os movimentos e as relações do sistema de atividade (Engestrom, 2001).

Para Leontiev (1978), a atividade é uma unidade de vida mediada pela reflexão mental, por uma imagem, cuja função real é orientar o sujeito, ou seja, é um sistema que tem a estrutura, as suas próprias transições internas e transformações e o seu próprio desenvolvimento. O mesmo autor refere que a atividade de cada indivíduo depende da relação que desenvolve na sociedade e que fora desta a atividade humana não existe. Leontiev (1978) sustenta a teoria de que o desenvolvimento do homem é submetido não às leis biológicas (alterações hereditárias), mas às leis sócio históricas. São os fatores históricos culturais que influenciam o desenvolvimento do homem na sociedade. Como tal, Leontiev (1978) aponta a necessidade como uma condição interna para que ocorra atividade humana. Toda a atividade tem uma obrigação que a constitui, é fundamental um motivo e a interação das ações para que a atividade aconteça para atingir os seus objetivos.

Subjacente à atividade de desenvolvimento humano, ressalta o papel primordial que o professor ocupa na sociedade. Este não é só responsável pela transmissão de conteúdos mas é promotor de desenvolvimento de competências que, ao dedicar-se na sua prática, propondo atividades, desenvolve no aluno as suas reais necessidades. Esta prática promove o desenvolvimento e a transformação da consciência humana (Longarezi, Pedro & Perini, 2011).

2.2.4. Atividade Matemática

As propostas curriculares referem que o aluno deve ter diversos tipos de experiências matemáticas, nomeadamente resolvendo problemas, realizando atividades de investigação, atividades de exploração, desenvolvendo projetos, participando em jogos, assim como resolver problemas e exercícios que proporcionem uma prática compreensiva de procedimentos (Ministério da Educação, 2007). Para Ponte (2005), esta gestão curricular determina duas dimensões: (i) a criação de tarefas; e (ii) a estratégia visada pelo professor. A criação de tarefas possibilita aos alunos o envolvimento em atividades matematicamente ricas e produtivas, das quais podem ser mais ou menos desafiantes, mais acessíveis, mais abertas ou fechadas dependendo dos conteúdos programáticos. Relativamente à estratégia adotada pelo professor, esta normalmente envolve diferentes tipos de tarefas, sendo que, um único tipo de tarefa não abrangerá os objetivos curriculares. Geralmente, a variação dos tipos de tarefas advém dos acontecimentos e das respostas que se vai obtendo dos alunos. Para os professores, o desenvolvimento de tarefas e atividades representam-se como uma ferramenta educacional, sendo possível utilizar a atividade matemática como um conceito organizador no ensino da Matemática (Christiansen & Walther, 1986). Para estes autores, as atividades estabelecem a articulação do "ponto de encontro entre o professor e o aluno" (p. 5). A atividade é tudo o que o aluno faz em determinado contexto enquanto a tarefa é apenas o objeto de cada uma das ações desenvolvidas pelo aluno.

As tarefas normalmente selecionadas e propostas pelos professores, com o objetivo de suscitar a atividade no aluno, dão origem a diversas atividades, como se pode visualizar na Figura 4.

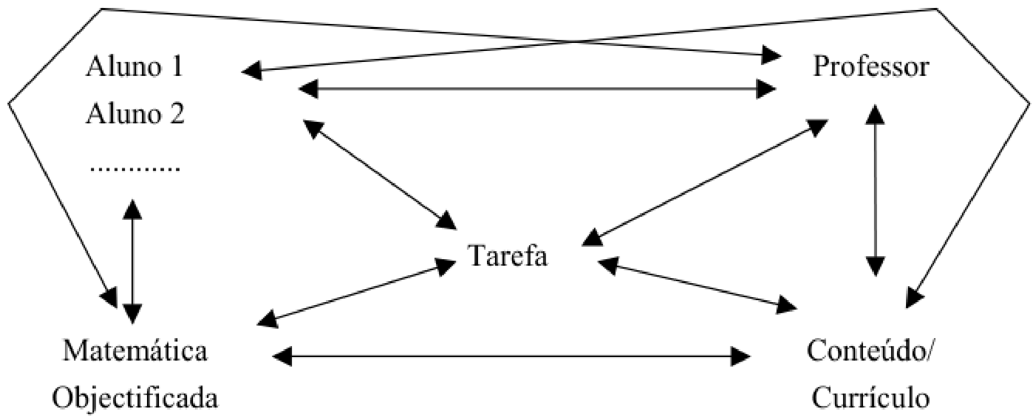


Figura 4: Definição de Tarefa segundo Christiansen e Walther (1986).

Neste modelo, o símbolo relacional do conceito de tarefa é explícito, enquanto o conceito atividade está implicitamente ilustrado nas relações entre os vários elementos indicados pelas setas. Esta complexidade matemática torna-se evidente quando o ensino é visto como um processo de interação entre o professor e o aluno e os próprios alunos, sendo que, desta forma, os professores tentam proporcionar aos alunos o acesso ao conhecimento e a capacidade matemática, de acordo com os seus objetivos. Para Christiansen e Walther (1986), este processo de ensino aprendizagem é influenciado por fatores burocráticos, o que condiciona a interação entre professor e alunos no que se refere a objetivos estipulados, como cumprir conteúdos, métodos, avaliações. Por outro lado, este processo é dependente de outros aspetos mais delicados como as reflexões dos professores sobre a Matemática, o ensino, a aprendizagem e o conhecimento dos alunos dos conteúdos lecionados. Porém, é de referir que independentemente de estes fatores influenciarem este processo, não deixa de reduzir a complexidade dos mesmos. Embora na (Figura 4) se possa visualizar um número reduzido de componentes o que implica uma redução de complexidade da tarefa relativamente à interação entre professor e aluno, há fundamentos heurísticos (encaminhar o aluno a descobrir o que se pretende ensinar) a favor deste modelo, como referem os autores:

- Descreve (reproduz, ilustra) as categorias tarefa e atividade e auxilia uma visão geral de aspetos importantes do ensino da Matemática ligados a estas categorias;
- É vasto em simplificações e interpretações e está relativamente próximo dos modelos bem conhecidos: aluno – professor – currículo e finalidades – conteúdos – métodos.

Os mesmos autores consideram que a interação entre a teoria e a prática pedagógica é complexa, pelo que muitas das "dificuldades relacionadas com as tarefas e as atividades são, devidas às conceções predominantes, limitadas e isoladas, das reflexões e dos conhecimentos dos alunos neste domínio de tarefa e atividade" (Christiansen & Walther, p. 3,1986). Estes autores relacionam a natureza das tarefas e a atividade da seguinte forma:

Tabela 3 : Importância da natureza das tarefas segundo Christiansen e Walther (1986).

Natureza das tarefas/actividades	
A tarefa e atividade servem como meio para fornecer uma visão geral; As tarefas não contêm conceitos ou estruturas matemáticas; A tarefa é interpretada sob a influência de factores burocráticos; A interação entre aluno/professor, mediado pelo conjunto de atividades reflecte objectivos, finalidades, conteúdos e métodos.	A atividade numa tarefa não assegura a aprendizagem que se pretende; A atividade é regulada pelas ações do professor, que são uma vez mais feitas e interpretadas sob a influência de atitudes cognitivas e conceções do professor e do aluno respetivamente.

A importância da natureza de tarefas e atividades é um princípio organizador do ensino da Matemática que apela para novos conceitos por parte do professor. Christiansen e Walther

(1986) referem que a proposta de tarefas e a condução da sua resolução na sala de aula constituem a principal forma de como ensinar Matemática:

> A tarefa proposta torna-se o objeto da atividade dos alunos e a proposta de tarefas em conjunto com as ações a elas respeitantes realizada pelo professor constitui o principal método pelo qual se espera que a Matemática seja transmitida aos alunos. (p. 224)

Também Leontiev (1978) indica que o contributo da teoria da atividade justifica que se um indivíduo está motivado para agir sobre um objeto, aprende através da sua atividade, das ações e reflexões relacionadas, proporcionando uma relação mútua entre objeto e atividade. A aplicação de diferentes tarefas é apontada como uma das estratégias que pode fomentar o envolvimento dos alunos nas atividades da aula (Ponte, 2005). O termo "atividade" ocupa um lugar de destaque na educação matemática. A sua aceitação está relacionada com a ideia de que o aluno deve desempenhar um "papel ativo" no processo de aprendizagem (Ponte, 2005). Para o autor, a atividade pode incluir a execução de tarefas, porém essa atividade diz respeito essencialmente ao aluno e à reflexão que sobre ela efetua num determinado contexto e período de tempo:

> Quando se está envolvido numa atividade, realiza-se uma certa tarefa. Uma tarefa é, assim, o objetivo da atividade. A tarefa pode surgir de diversas maneiras: pode ser formulada pelo professor e proposta ao aluno, ser da iniciativa do próprio aluno e resultar até de uma negociação entre o professor e o aluno. Além disso, a tarefa pode ser enunciada explicitamente logo no início do trabalho ou ir sendo constituída de modo implícito à medida que este vai decorrendo. É formulando tarefas adequadas que o professor pode suscitar a atividade. (p. 1)

A ordem pelo qual a atividade matemática acontece, o envolvimento dos alunos no processo de ensino - aprendizagem é determinante na dinâmica da sala de aula. Ponte (2005) considera necessário estabelecer estratégias orientadoras consoante o seu grau de abertura na sala de aula, permitindo uma conduta motivacional, um desafio cognitivo, de relação com a realidade, no empenho das práticas e competências matemáticas no aluno. As orientações metodológicas do programa de Matemática do ensino básico (Ministério da Educação, 2007) referem que o professor deve propor aos alunos a realização de diferentes tipos de tarefas, dando-lhes orientações claras das suas expetativas em relação ao que espera do seu trabalho e apoiando-os na sua realização. Para além da execução das tarefas, o ensino - aprendizagem tem de antever momentos de discussões de resultados e indicações de estratégias matemáticas. Da mesma forma, o programa (Ministério da Educação, 2007) menciona atividades importantes na aprendizagem da Matemática, como ouvir e praticar, para que seja viável argumentar e discutir. Quaresma e Ponte (2012) defendem que, para cada tarefa desenvolvida na sala de aula, a atividade do aluno terá por base não só as suas experiências em contextos da realidade como os conhecimentos matemáticos adquiridos em anos anteriores, não esquecendo o sentido de progressão nos diversos contextos.

Em contexto de trabalho de sala de aula, a atividade desempenha também um papel crucial, favorecendo a aprendizagem, de modo a estimular a interação construtiva entre os alunos de forma a apresentar o seu pensamento e argumentar as suas opiniões. Vários autores, como Marx e Walsh (1988) e Hierbert e Wearne (1993) têm analisado a relação entre as tarefas propostas pelos professores e os conhecimentos matemáticos adquiridos, constatando que o tipo de tarefa apresentada aos alunos influencia a aprendizagem da Matemática. Diferentes autores discutem os objetivos que as tarefas matemáticas sugerem. Stein e Smith (2009), para entenderem em que etapa surgia a dificuldade do aluno ao resolverem as tarefas, de forma a promover o desenvolvimento no aluno, focaram três fases pelas quais a tarefa se desenvolve: Primeiro, a tarefa surge no currículo ou materiais de ensino, nos manuais, entre outros; Segundo, são apresentadas ou anunciadas pelo professor; finalmente, são implementadas pelos alunos na sala de aula, de modo a que os alunos trabalhem sobre a tarefa. As fases nomeadamente a de implementação, são vistas como sugestões fundamentais sobre o que os alunos realmente aprendem, como ilustra na Figura 5.

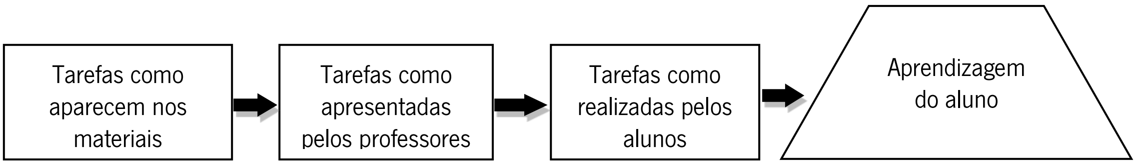


Figura 5: Tarefas matemáticas, dinâmica de fases.

Para Stein e Smith (2009), de uma experiência que realizaram com uma professora seguindo a dinâmica das fases com tarefas matemáticas, consideraram que: a professora antes de ter o conhecimento da dinâmica das fases, tinha uma intuição geral de que a atividade podia ter sido melhor, porém não era capaz de referir em que fase o aluno sentia dificuldade ao resolver a tarefa. Para os autores esta dinâmica de fases permitiu perceber algumas ocorrências que tinham acontecido na sua sala como referem, "vimos como o Quadro das Tarefas

Matemáticas pode dar aos professores indicações para a evolução das suas próprias aulas (...). A natureza das tarefas muda frequentemente quando passamos de uma fase para outra" (p. 4).

Para fazer face a estes desafios, o professor dispõe de tarefas matemáticas passiveis de promover a atividade do aluno na sua aprendizagem de conteúdos matemáticos privilegiadas na sala de aula tais como: exercícios, problemas, atividades de investigação e atividades de exploração. A seleção das tarefas, o raciocínio a valorizar e o tipo de comunicação a desenvolver na sala de aula são desafios que se colocam na prática dos professores. O cariz destas tarefas visam promover a aprendizagem e o raciocínio dos alunos na sala de aula (Quaresma, Ponte, Baptista & Pereira, 2014). Da mesma forma, o NCTM (2007) considera que a "seleção adequada de problemas pode revelar-se particularmente valiosa no desenvolvimento ou no aprofundamento dos conhecimentos sobre importantes noções matemáticas" (p. 303).

Resolução de exercícios. Os exercícios servem, sobretudo, para o aluno praticar e consolidar conhecimentos adquiridos, sendo estas tarefas de resolução mecânica e repetitiva, onde a utilização de uma fórmula ou algoritmo conduz facilmente à resposta (Viseu & Ponte, 2012). Os exercícios são tarefas de complexidade reduzida e estrutura fechada. Muitas vezes, são ponto de partida para a introdução de novas ideias, servindo essencialmente de um propósito de consolidação de conhecimentos adquiridos. Porém o excesso de exercícios traduz-se numa atividade empobrecida e pouco aliciante para o aluno, sendo, por isso, decisivo envolvê-lo noutros tipos de atividades como resolução de problemas e de tarefas de exploração e investigação (Ponte, 2005).

A resolução de exercícios pode ser apenas uma prática rotineira de habilidades processuais que os alunos aprenderam nos primeiros anos. Porém, pode ser um problema para os alunos que não foram ensinados e acabaram por aprender o procedimento sem saber como aplicá-lo corretamente. Mas com bastante prática, a resolução de exercícios pode tornar-se uma rotina para os alunos (Yeo, 2007, p. 1). O mesmo autor classifica os exercícios como "tarefas não matematicamente ricas", isto é, tarefas que evidenciam procedimentos, regras e cálculos. Também Christiansen e Walther (1986) consideram que os exercícios são tarefas rotineiras e limitadas, das quais se conhecem os procedimentos de ação para a sua resolução onde rapidamente conduzem à solução já conhecida, como sendo uma aplicação de "treinar" uma habilidade já adquirida pelo aluno. Estes autores mencionam que a atividade resultante deste tipo de tarefa não deve ocupar um lugar central no ensino e na aprendizagem, pelo que deve ser dada prioridade às atividades de construção, exploração e resolução de problemas, tarefas consideradas não rotineiras e abertas, das quais não é conhecido o procedimento. Apesar da rotina, existem sinais de novas práticas incluindo a variação de tarefas, assim como uma comunicação mais partilhada (Ponte, 2008). Bispo, Ramalho e Henriques (2008), ao refletirem a tipologia de tarefas usuais na aula, de Matemática, apuraram que a maioria das tarefas propostas aos alunos tem como objetivo a reprodução de técnicas e algoritmos básicos, sendo que estas tarefas são próprias da aplicação de exercícios. Apesar de os exercícios não beneficiarem o envolvimento dos alunos na construção do conhecimento, como refere Abrantes (1998), o "valor educativo dos exercícios não será nulo mas é claramente limitado à prática de utilização de uma ou várias regras previamente conhecidas" (p. 3). Matos e Serrazina (1996) argumentam que a resolução de exercícios é indispensável para a aquisição de competências matemáticas.

Um estudo desenvolvido pela APM (1998) dá conta das ações de trabalho dos professores que utilizam com maior frequência nas aulas. O exercício surge como a tarefa mais usada (cerca de 93% das aulas) pelos professores, ocupando um lugar próprio em todos os níveis do ensino da Matemática. Num outro estudo, realizado por Quintas, Oliveira e Ferreira (2009) com o objetivo de compreender as práticas de ensino da Estatística dos professores de Matemática no ensino secundário do 10.º ano de escolaridade, verificou-se que as atividades privilegiadas no desenvolvimento deste tema foram a resolução de problemas (90%) e a resolução de exercícios (89%).

Ponte e Serrazina (2009) aconselham mudanças relevantes para "um novo tipo de aula". Assim, os autores começam por considerar o tipo de aula antes e depois da implementação do programa de Matemática do ensino básico de 2007. Começam por revelar alguns aspetos tradicionais que caraterizam a aula: O professor ao introduzir novos conceitos promove o diálogo na turma, exemplifica alguns exemplos e fornece exercícios para os alunos resolverem, de forma a reforçar o conteúdo lecionado. Porém, este modelo de aula pode ser alterado visando outros benefícios para a aprendizagem. Assim, os autores consideram que os alunos podem de uma forma mais ativa fomentar a construção do conhecimento, tendo como suporte tarefas desafiantes e motivadoras: (i) o professor passaria apresentar uma tarefa inicial para introduzir «matéria nova» (ii) Os alunos desenvolvem a tarefa em pares ou pequenos grupos; e (iii) Apresentação e discussão/argumentação dos alunos do trabalho realizado. Finalmente, o professor termina a aula fazendo uma síntese de conceitos cruciais para o aluno perceber a importância do conteúdo lecionado: "Em vez de se proporem exercícios para os alunos praticarem processos já conhecidos, propõem-se tarefas em que eles têm de definir estratégias e argumentar soluções" (p. 3).

Resolução de Problemas Devido à riqueza de atividades que proporcionam, a resolução e formulação de problemas devem estar no centro do ensino e da aprendizagem da Matemática, em todos os níveis escolares (APM, 1988). Porém, Abrantes (1998) advoga que a resolução de problemas nunca terá sido assumida com muita importância no ensino - aprendizagem da Matemática, mas sim como uma atividade complementar, paralela, geralmente destinada a estimular ou detetar alunos particularmente dotados, por vezes associada à motivação externa para o seu estudo. Confrontar os alunos com problemas é uma orientação curricular e fundamental por diversas entidades ligadas ao ensino da Matemática. Ajuda no desenvolvimento do raciocínio, na organização do pensamento e na capacidade de executar estratégias para trabalhar com situações desconhecidas. Estimula a aptidão intelectual, promove a aprendizagem dos alunos, envolve necessariamente a investigação, a criação de caminhos e estratégias de resolução (Ministério da Educação, 2007). Também o NCTM (2007) considera que o facto de o aluno aprender a resolver problemas em Matemática os ajuda a atingir a arte de pensar, hábitos de firmeza, curiosidade e segurança perante situações desconhecidas dentro e fora da aula. A resolução de problemas constitui uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática. Da mesma forma, o NCTM (2007) considera que a "maioria dos conceitos matemáticos ou das generalizações pode ser introduzida eficientemente utilizando uma situação de problema" (p. 395). Espera-se que os alunos desenvolvam capacidades para serem capazes de resolver e formular problemas, e de analisar diferentes estratégias no enunciado de um problema (Ministério da Educação, 2007). O NCTM (2007) defende que é "através da resolução de problemas, que os alunos podem sentir o poder e a utilidade da Matemática. A resolução de problemas é essencial à investigação e à aplicação, deverá encontrar-se integrada ao longo de todo o currículo da Matemática" (p. 302). Ponte (2003) aponta ações de aprendizagem quando o aluno se depara com questões das quais não consegue responder de forma instantânea, mas que o leva a refletir como e porquê para chegar à solução. Pólya (2003) aborda a resolução de problemas de uma forma mais consistente, advoga que o desenvolvimento pelos alunos desta atividade deveria ser um dos objetivos principais do ensino da Matemática, dado que todo o trabalho elaborado em sala de aula estaria comprometido sem a resolução de problemas. Para este autor, a resolução de problemas proporciona uma aprendizagem de forma ativa, possibilitando aos alunos construir e testar o seu conhecimento matemático. Da mesma forma

Ponte (2003) considera que aprender Matemática não chega ao aluno fazer exercícios. É preciso incentivá-lo com problemas atraentes, de modo a ter uma experiência matemática verdadeira, semelhante à dos matemáticos. Como tal, Pólya indica a resolução de problemas como um processo sequencial onde se determinam diversas fases, tais como:

Tabela 4: Processo sequencial de resolução de problemas segundo (Pólya, 2003).

Fases de resolução de problemas	
Compreensão do problema	Procura-se compreender o problema de forma a encontrar a incógnita, identificar os dados e os objetivos;
Elaboração dum plano	Obtém-se um plano quando sabemos quais os cálculos ou estratégias a fim de obter a incógnita.
Execução do plano	Examinar detalhes, de forma a encaminhar o aluno à solução do problema;
Verificação dos resultados	Verificação do resultado em função da situação inicial e do raciocínio.

Ao longo destas quatro fases o aluno pode colocar uma série de questões a si próprio, organizando o seu pensamento de uma forma segura, ajudando o aluno no processo de resolução de problemas. Também o programa de Matemática do ensino básico (Ministério da Educação, 2007) indica diferentes estratégias de resolução de problemas ao longo dos vários ciclos:

Tabela 5: Estratégias de resolução de problemas (Ministério da Educação, 2007).

Estratégias de resolução de problemas	
Utilizar um esquema, diagrama, tabela, gráfico.	Fazer um esquema para obter a solução.
Simular/Simplificar o problema.	Resolver o problema simulando a situação recorrendo a objetos, criando um modelo.
Descobrir uma regularidade/regra.	Procurar a solução através da generalização de soluções específicas.
Organizar uma sequência de passos.	Uma sequência organizada permite esgotar e visualizar todos os casos possíveis;
Tentativa e erro.	Resolver o problema através de tentativas de um modo orientado e verificando em cada caso se a solução encontrada satisfaz as condições do problema.
Procurar um problema análogo mas mais simples.	Formular um problema mais simples, é possível entender mais facilmente o problema.
Desdobrar um problema complexo em questões mais simples.	Por vezes pode começar-se por um problema mais simples.
Criar um problema equivalente.	Num problema com números grandes, substituindo-os inicialmente por números menores, de modo a que se possa

	representar.
Explorar casos particulares.	Resolver um problema do mesmo tipo mas que corresponda a um caso particular daquele que se quer resolver.

Subjacente a esta dinâmica, por vezes a resolução de problemas fomenta conceitos teóricos originando novos problemas matemáticos. Deste modo a resolução de problemas pode proporcionar: (i) o recurso a diferentes representações e incentiva a comunicação; (ii) estimula o raciocínio e a justificação; (iii) ajuda a estabelecer conexões entre vários temas matemáticos e entre a Matemática e outras áreas curriculares; e (iv) apresenta a Matemática como uma disciplina útil na vida quotidiana (Ministério da Educação, 2007). É fundamental que o aluno explore situações incertas, encontre regularidades, teste conjeturas, formule generalizações e pense de uma forma lógica.

Outros autores têm-se debruçado sobre a valorização da resolução de problemas e das tarefas de investigação, enquanto experiências de aprendizagem. Contudo, Ponte (2005), também considera que as tarefas fechadas são importantes, distinguindo- se pelo seu grau de desafio, pois são "importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados" (p. 21). Também Christiansen e Walther (1986) mencionam que a prioridade de ação deve ser dada a atividades de construção, exploração e resolução de problemas, tarefas não rotineiras e abertas, das quais não se conhece o procedimento de resolução.

Como elemento de resolução de problemas, Silver (1996) descreve a formulação de problemas como uma atividade de ensino de cunho investigativo. Ponte e Serrazina (2000) salientam a importância da formulação de problemas por parte dos alunos, considerando-a como uma componente essencial da resolução de problemas. Da mesma forma o NCTM (1991) recomenda que os currículos matemáticos envolvam a experiência com problemas de investigação e aplicação, exigindo um empenho criativo na resolução dos mesmos.

A resolução de problemas assume um papel importante, quer pelo desenvolvimento de problemas matemáticos, quer com problemas quotidianos ou até de outros domínios do saber (PMEB, 2007). O raciocínio matemático abarca a formulação de conjeturas, a capacidade de as testar e numa fase seguinte, a sua demonstração.

Também Cunha, Martins e Viseu, (2014), à procura de entender a dinâmica associada à formulação de problemas, em contexto de sala de aula, proporcionaram experiências de forma a indagar as perspetivas dos alunos sobre as questões: Qual a distinção entre exercício e problema? Que estratégias são utilizadas na resolução de problemas? Qual a importância da resolução de problemas na sua formação? Qual a noção de formulação de problemas? Qual a importância da formulação de problemas no estudo de conceitos matemáticos? Esta dinâmica teve três momentos: a recolha de dados antes da experiência, a realização da experiência e após a experiência. Da análise de dados, a maior parte dos alunos entendeu que o exercício é uma tarefa de aplicação direta, enquanto para alguns é de resolução imediata e fora do contexto real. Quanto ao problema, os alunos na maioria identifica como sendo uma tarefa que desenvolve a compreensão, de resolução complexa e que incide sobre situações do contexto real. Os alunos, após as experiências de ensino, perceberam que na resolução de problemas era fundamental interpretar o enunciado do problema, sistematizar os dados, apresentar soluções, respondendo às perguntas, e por fim verificar resultados. Num terceiro momento, após a realização das tarefas sobre formulação de problemas, os autores perceberam que as perspetivas dos alunos sofreram alterações, considerando em particular que: (i) a formulação de problemas desafia a pensar; (ii) obriga a saber os conteúdos considerados; (iii) deve fazer parte da aprendizagem dos temas matemáticos; e (iv) prepara os alunos para responder a situações quotidianas. Os alunos que consideram a formalização de problemas uma tarefa exigente referem que, por um lado, esta atividade ajuda a pensar na resolução e por outro lado, na forma como a estruturam. Outros alunos apontam que esta atividade exige imaginação, obrigando-os a aprofundar a matéria para ter a certeza dos conceitos inerentes aos conteúdos. Em síntese, os autores consideram que os alunos estão mais habituados a resolver problemas e que por isso se torna mais acessível. Relativamente à formulação de problemas sentem dificuldades o que advém de não estarem familiarizados. Argumentam que para chegar a uma solução obriga a uma maior criatividade o que provoca um caminho mais difícil. Estes autores atribuem o interesse que os alunos têm relativamente à resolução de problemas, às experiências em que são envolvidos ao longo das aulas.

Um outro estudo foi realizado por Mesquita (2013), com alunos de uma turma do 1.º ciclo do 4.º ano de escolaridade, com o objetivo de perceber de que forma a interpretação de enunciados matemáticos pode influenciar o processo de resolução de problemas (1.ª fase de resolução de problemas). A autora verificou que os alunos que aplicaram as estratégias de uma forma mais exaustiva e mais organizada identificaram e interpretaram mais rapidamente o enunciado levando-os para a solução de uma forma mais rápida e eficaz. Os outros alunos que aplicaram estratégias menos exaustivas na fase de interpretação do enunciado e tratamento de dados, tiveram mais dificuldade na resolução dos problemas propostos.

Atividades de exploração. A complexidade das tarefas de estrutura aberta muitas vezes não fazem parte da prática habitual de alguns professores (APM, 1998). Contudo, as tarefas de exploração e investigação possibilitam que os alunos façam pequenas cadeias de raciocínio dedutivo, que fundamentem evidências imediatas e factos previamente aceites. Por outro lado, permitem a elaboração ordenada de conjeturas, que podem ser discutidas com base na argumentação consistente. Porém, esta competência de argumentação desenvolve-se quando os alunos são estimulados a fazer conjeturas, quando lhes é dado tempo para procurar evidências que as apoiem ou debatam, e lhes é exigido que expliquem e justifiquem as suas ideias. Desde o pré-escolar as crianças fazem generalizações a partir de exemplos concretos e, como tal, os professores devem levá-las a usar exemplos e contra exemplos para testar as suas conjeturas (Martins, Maia, Menino, Rocha & Pires, 2002). Nas tarefas abertas, Ponte (2005) integra as tarefas de exploração e as de investigação. A diferença principal entre estes dois tipos de tarefas é o grau de desafio exigido na sua resolução. As tarefas de investigação articuladas com outro tipo de tarefas, como sejam o exercício, o problema, as tarefas de exploração e os projetos, desempenham o seu papel no processo de ensino-aprendizagem.

A APM (1998) salienta a importância das tarefas a propor, referindo, em especial, a resolução de problemas, os projetos e as atividades de exploração e descoberta, como refere: Explorar significa "entrar em terreno desconhecido, recolher regularidades e padrões – ou porventura um sentido ainda mais forte – investigar, procurar encontrar, procurar e descobrir" (p. 59). Outros autores consideram que as investigações Matemáticas também proporcionam o envolvimento do aluno nas atividades, ao formular questões, na preparação de estratégias, na síntese de resultados, na seriação de ideias, na oportunidade de explorar um trabalho criativo e motivador para quem o desenvolve (Oliveira, Cunha & Segurado, 1998).

Os alunos devem aprender Matemática com compreensão, construindo novos conhecimentos, novas competências a partir de experiências e saberes prévios. É importante o conhecimento assimilado para que o aluno fomente autonomia, aprenda melhor e possa trabalhar com novos problemas e novas situações (NCTM, 2007). Segundo (NCTM, 2007), o envolvimento em tarefas difíceis é compensador quando "os alunos trabalham arduamente na resolução de um problema difícil ou na compreensão de uma ideia complexa, obtêm uma sensação especial de realização" (p. 22). Neste sentido, a vontade do aluno aprofundar e envolver-se quando desafiados em tarefas selecionadas, tornam-se confiantes na capacidade de enfrentar o problema. De acordo com Dias, Viseu, Cunha e Martins (2013), aprender "implica um maior desenvolvimento de competências de argumentação matemática, o que tem repercussões no grau de envolvência dos alunos nas atividades da sala de aula" (p. 4638). Deste modo, procuro enaltecer a exploração de tarefas de sala de aula que possam contribuir para o empenho dos alunos na construção partilhada do conhecimento matemático assim como para o desenvolvimento do sentido crítico.

Atividades investigativas: As atividades investigativas desvendam relações entre objetos matemáticos, procurando identificar e comprovar as respetivas propriedades (Ponte, 2005). O mesmo autor destaca que "se o objetivo é que os alunos realizem investigações matemáticas, importa analisar o modo como estas tarefas se distinguem de outras bem conhecidas, como exercícios e problemas" (Ponte, 2003, p. 8). Numa investigação, parte-se de uma situação aberta, que não está definida, compete a quem investiga um papel crucial na sua realização, sendo que para a realizar é importante que seja motivadora e desafiante. A resolução de tarefas de investigação que englobem padrões, por um lado realçam a exploração, investigação, conjetura e prova e, por outro, também muito importante, são cruciais e desafiadoras para os alunos (Vale & Pimentel, 2005).

Oliveira, Ponte, Cunha e Segurado (1997) realizaram um estudo com alunos do 5.º, 6.º e 7.º ano de escolaridade com atividades exploratórias e investigativas. O objetivo deste estudo baseou-se na aplicação de conceitos e processos matemáticos e o seu empenho na formulação de conjeturas, na discussão e na argumentação matemática. Os autores concluíram que as tarefas de exploração e investigação estão ao alcance de todos os alunos e não apenas dos melhores. As atividades realizadas mostraram que os alunos podem envolver-se em atividade matemática significativa visando nos alunos uma notável autonomia. Perante este estudo é de salientar que não importa o nível de escolaridade dos alunos para realizarem experiências matemáticas de natureza investigativa, uma vez que os alunos conseguem abordar e evoluírem nas tarefas no sentido de se tornarem seguros, confiantes nas suas capacidades de modo a comunicar e raciocinar matematicamente.

De acordo com Ponte (2003), a resolução de problemas e de atividades investigativas invocam à imaginação e à criatividade, envolve processos de raciocínio complexos e exige um elevado grau de desempenho, distinguindo-se das outras atividades por se tratar de situações -problema, ou seja, o tempo médio de resolução é maior. Também o NCTM (2007) considera que os “alunos precisam de explicar e justificar o seu raciocínio e de aprender a detetar falácias e a criticar o raciocínio dos colegas” (p. 220), o que proporciona diálogo e dinâmicas de resoluções nos momentos de aula.

Tabela 6: Dinâmica de resolução de atividades investigativas de Ponte (2003).

Dinâmica de resolução	
1. Exploração e formulação de questões investigativas;	2. Organização de dados e construção de conjeturas;
3. Realização de testes e refinamento e sistematização das conjeturas;	4. Construção de justificativas, argumentações ou demonstrações, tendo em vista a validação dos resultados.

O autor considera que esta dinâmica de resolução das atividades investigativas pelos alunos pode contribuir para o desenvolvimento dos alunos em vários níveis:

- Na aprendizagem do que são e como se fazem investigações;
- Na aprendizagem de conceitos, ideias e procedimentos matemáticos;
- Na aprendizagem de objetivos curriculares transversais como a capacidade de comunicação e o trabalho em grupo;
- Na formação de novas conceções e atitudes em relação à Matemática.

Deste modo, a “aprendizagem dos alunos pode ser promovida através de um trabalho de cunho exploratório e investigativo nos diferentes temas” (Ponte, 2008, p. 8). O envolvimento na resolução de tarefas para as quais não se aplicam métodos de resolução direta leva a formular as suas próprias estratégias, aplicando conhecimentos e capacidades anteriormente desenvolvidas (Ponte, 2008). Fonseca (2000) advoga que “a integração de atividades de investigação no currículo de Matemática tem sido uma preocupação crescente nos últimos tempos, dado ser um tipo de trabalho que contribui para estimular nos alunos um conjunto de processos caraterísticos da experiência matemática” (p. 1).

Alguns estudos têm-se debruçado sobre o benefício de atividades investigativas, nos quais é possível analisar alguns dos seus contributos no ensino aprendizagem da Matemática. Fonseca (2000) realizou um estudo com o objetivo de analisar os processos matemáticos utilizados por alunos de uma turma do 10.º ano com tarefas de investigação, com suporte tecnológico. Observou-se que, com o decorrer do tempo, os alunos foram-se envolvendo mais profundamente nas investigações, tornando-se mais autónomos, valorizando as respostas, os processos de realização da tarefa, considerando várias hipóteses de resposta para cada questão. Notou-se que o processo de formulação de conjeturas surge com frequência e de forma natural, no entanto os processos de justificação e prova têm uma presença menos forte, raramente surge de modo instintivo. Da mesma análise, foram identificados alguns fatores que influenciaram os processos matemáticos para a resolução de tarefas investigativas, tais como: a natureza da tarefa, a interação com os colegas e com o professor e o conhecimento prévio dos conteúdos. Os resultados obtidos evidenciaram que as tarefas mais estruturadas podem ajudar os alunos pouco familiarizados com este tipo de tarefas, promovendo o surgimento de novas ideias, permitindo-lhes avançar na tarefa a investigar, o que pode estar relacionado com o facto de os alunos precisarem de mais informações consistentes na fase inicial do processo. Neste estudo, considerou-se que as novas tecnologias revelaram-se um auxiliar da atividade de investigação. A interação com os colegas conduziu à emergência de alguns processos, embora o trabalho individual foi crucial e produtivo. As tarefas realizadas na sala de aula devem seguir objetivos estruturados de forma a encaminhar o aluno em trajetórias diferentes de aprendizagem. As tarefas com demasiada estrutura guiam "demasiado os alunos e não lhes deixar muito para pensar; pouca estrutura pode levar os alunos a moverem-se em trajetos diferentes, podendo escapar a muitos deles algumas das ideias mais importantes relacionadas com os conceitos matemáticos do currículo" (Fonseca, 2000, p. 3).

Um outro estudo foi realizado por Brocardo (2002), sobre a forma como os alunos enfrentam as atividades investigativas. O estudo baseou-se em três alunos do 8.º ano. Estes alunos começaram por evidenciar tendência para enfrentar uma investigação como uma atividade sequencial, isto é, os alunos rapidamente recolheram os dados, organizaram os dados e analisaram e formularam as conclusões. À medida que o tempo decorria, os alunos foram compreendendo a não regularidade do processo investigativo, pois este processo não é de todo direto. Esta evolução processou-se em ritmos diferentes variando de aluno para aluno. Notou-se que um dos alunos estava marcado por uma visão mecanicista da atividade matemática, enquanto os outros dois alunos trabalhavam de modo mais exaustivo e com maior gosto pela realização de tarefas abertas. Estes alunos tinham a clara ideia de que se deveria pensar na prova das suas conjeturas antes de dar por concluído a sua tarefa. Segundo Brocardo (2002), este pensar por parte do aluno foi decisivo pelo facto de ter feito um trabalho continuado e exaustivo ao longo do ano. A mesma autora refere que o sucesso e a recetividade dos alunos neste tipo de tarefas é composta de avanços e recuos, dependendo da forma como organiza o ambiente de aprendizagem que a turma proporciona. Reforçando a ideia de que com a realização deste tipo de tarefas, a confiança dos alunos na sua capacidade de realizar, gerir e argumentar nas tarefas investigativas evolui no sentido positivo.

Também Junqueira (1996) realizou uma experiência com uma turma do 9.º ano, abordando de uma forma investigativa (não direta) o tema Geometria no plano. A autora constatou que os alunos foram pouco produtivos porque a proposta de investigação foi demasiado aberta, sem um objetivo específico, provocando nos alunos um sentimento de insegurança. Porém, no decorrer do desenvolvimento da tarefa, esta foi melhorando, no sentido de formular hipóteses baseadas na observação de novos exemplos, levando os alunos a estabelecer conjeturas mais genéricas. O NCTM (2007) defende que "os professores devem ajudar os alunos a formular, aperfeiçoar e explorar conjeturas, baseadas em evidências, e a utilizar uma diversidade de técnicas de raciocínio e de prova" (p. 3). Vários autores reforçam a ideia de que faz toda a diferença apresentar aos alunos exercícios de aplicação de conhecimentos, problemas que exigem um esforço destinado à compreensão e formulação de planos de resolução, tarefas exploratórias e de investigação que obrigam a conexões e interpretações de conteúdos anteriores, elaboração e recolha de dados para futuras análises (Ponte, Branco, Quaresma, Velez & Pereira, 2008).

Subjacente aos conhecimentos teóricos apresentados e na perspetiva de atingir o máximo de alunos empenhados na aprendizagem do tópico Trigonometria no triângulo retângulo, considero importante analisar as atividades realizadas pelos alunos de modo a conhecer e interpretar dificuldades na realização das mesmas.

2.3. Estratégias de intervenção

Durante a minha intervenção pedagógica os alunos estavam organizados em pares ou em grupo de 4 elementos. No início de cada aula e para reforçar os conceitos assimilados da aula anterior procedia-se à correção do trabalho de casa. Era feita uma breve explanação sobre o que se pretendia da aula. Ao mesmo tempo, era distribuída uma ficha de trabalho e o papel químico para que estes pudessem entregar a sua resolução no final da aula. Em aulas onde as tarefas propostas tinham cariz exploratório estas eram realizadas em salas equipadas com computadores. Posteriormente, os alunos organizavam-se e trabalhavam as tarefas que lhes eram propostas, podendo perguntar e esclarecer as dúvidas que surgiam na sua interpretação e exploração. Esta dinâmica de aula tinha como intuito acompanhar os alunos, dado que era uma turma bastante barulhenta, o que muitas vezes dificultava o ritmo normal das aulas. De seguida, a tarefa era corrigida no quadro por um dos alunos e ao mesmo tempo eram feitas algumas considerações no âmbito de esclarecimento. Como refere Leikin (2000), "existem considerações didáticas que podem influenciar a introdução de um novo conceito matemático para o aluno" (p. 17). Por exemplo, conexões (a conhecimentos prévios), propriedades, exemplos, contraexemplos podem facilitar a compreensão. Estas resoluções eram discutidas com a turma com o objetivo de os alunos atingirem o conceito matemático proposto para a aula. Ainda na aula, eram expostas algumas questões de forma a perceber a evolução de competências adquiridas pelos alunos, assim como as dificuldades sentidas na resolução das tarefas ao longo das aulas.

O aluno ao envolver-se nas tarefas propostas obriga-o a realizar um papel ativo e participante na realização das mesmas, na exposição da informação dada, na criação e execução de estratégias de resolução das quais servem de suporte para que possa agir e argumentar o seu ponto de vista matemático (Ponte, 2014). Este autor refere que a resolução contínua de tarefas matematicamente ricas desenvolve nos alunos as competências de raciocínio, comunicação e de ligação entre os diferentes temas matemáticos, o que favorece a aprendizagem de conceitos matemáticos pelos próprios alunos (Ponte, 2005). Como tal, as estratégias de ensino que sugerem a aprendizagem dos alunos exigem que o professor tome decisão sobre as tarefas a propor e faça uma reflexão sobre a sua prática (NCTM, 2007). Refletir sobre as ações, conhecimentos, propostas e decisões permitem "perceber, pensar, julgar e agir" (Saraiva & Ponte, 2003, p. 7).

No decorrer da minha intervenção pedagógica, as estratégias de ensino aplicadas recaíram sobre o ensino da Trigonometria no triângulo retângulo. Este tema promoveu o trabalho em grupo, permitindo trabalhar com ferramentas tecnológicas estimulando a autonomia e sentido crítico como referem Fernandes, Alves, Machado, Correia e Rosário (2009, p. 52).

2.3.1. Metodologias de ensino e de aprendizagem

Nas estratégias de ensino de tópicos de trigonometria procurei, com o apoio do *Software* dinâmico GeoGebra, edificar estratégias que me permitissem orientar, apoiar, questionar e conhecer o modo de pensar dos alunos de forma a desenvolver competências, esclarecer condições necessárias para a compreensão significativa dos conceitos trigonométricos. Deste modo, foi crucial acompanhar e perceber que conhecimentos matemáticos adquiriram e qual a atitude matemática na integração de novos saberes. Este processo interativo proporcionou-me não só compreender as dificuldades dos alunos como também apoia-las. Na concretização das minhas estratégias atendi a vários fatores didáticos, como: o papel do professor e do aluno; Estratégias adotadas; Organização dos alunos; Recursos tecnológicos.

O papel do professor e do aluno. A questão nobre do processo de ensino aprendizagem não é algo que pode ser recompensado apenas pelo professor e pelas suas estratégias pedagógicas, mas sim uma conquista que proporciona diálogo, participação do aluno e, sobretudo, a construção de relações entre alunos e professores. O diálogo na sala de aula e a interação são frequentes para promover o reconhecimento de conexões entre ideias e proporcionar a reorganização do conhecimento (NCTM, 2007). Da mesma forma Ponte (2005), considera que a postura educacional do professor e do aluno, evidencia-se pelas tarefas que são propostas e a forma como são norteadas, em particular no ensino exploratório. Este distingue-se do ensino tradicional pelo papel desempenhado pelo professor e pelos alunos. Permite a possibilidade de trabalhar com tarefas complexas, partilhar e interagir com os colegas e o professor as suas ideias. É importante que o ensino exploratório da Matemática não seja encarado como algo que se realiza às vezes para realizar umas tarefas especiais. O ensino exploratório da Matemática precisa de tempo e de continuidade para que desenvolvam as propostas dadas pelos professores, para que desta forma facilite aprendizagem de conteúdos matemáticos mas também modos de produção do conhecimento matemático no contexto de uma comunidade da qual são parte integrante.

No ensino exploratório da Matemática Canavarro (2011) defende que os alunos aprendem a partir do trabalho exaustivo que realizam com tarefas relevantes que fazem surgir a precisão das ideias matemáticas que são organizadas em discussão na turma, desenvolvendo as suas capacidades. Desta forma, os alunos presenciam o surgimento de procedimentos matemáticos com significado, e ao mesmo tempo, desenvolvem capacidades matemáticas como a resolução de problemas, estimulam o raciocínio matemático, formulam, testam, justificam, provam conjeturas, refletem, generalizam permitindo a comunicação Matemática. Da mesma forma, o NCTM (2007) refere que "formular conjeturas e tentar justificá-las é uma parte integrante da atividade matemática dos alunos" (p. 223). Durante a execução deste projeto foram efetuadas diferentes ações de acordo com cada momento da aula. Foram selecionadas tarefas e material adequado, de modo a proporcionar o envolvimento entre professor e aluno, provocando um equilíbrio entre o que foi planeado para a aula e as dificuldades inesperadas que por vezes conduzem os alunos a situações menos confortáveis. Nos momentos em que os alunos se reuniam em grupo para resolver as tarefas, procurei ter uma intervenção reguladora dos trabalhos realizados. Tentei que os alunos seguissem um caminho autónomo na resolução das suas atividades não estando dependente do professor. Nos momentos de síntese e discussão com a turma procurei colocar questões que envolvessem os alunos, estimulando-os "a pensar, a questionar, a resolver problemas e a discutir as suas ideias, estratégias e soluções" (NCTM, 2007, p. 19).

Relativamente ao papel do aluno, este é cada vez mais responsabilizado pela sua aprendizagem e o professor é visto como um facilitador deste processo. Compete ao professor organizar um plano para a turma, o que exige reflexão permanente sobre a sua prática, de forma a desenvolver nos alunos os vários aspetos da competência matemática. Porém, o professor terá de inovar e diversificar a natureza das atividades ao longo das aulas. Canavarro, Oliveira e Menezes (2008), realizaram um estudo com base numa proposta de referência para a prática de uma aula de ensino exploratório. Os autores abarcaram esta proposta de forma organizada propondo um conjunto de ações a executar:

Tabela 7: Ações a executar numa aula exploratória

Na aprendizagem	**Na organização da aula**
O professor introduz a tarefa, sendo esta um ponto de partida ou uma questão bem determinada, para que o aluno possa interpretar, procurar padrões de forma a avançar na tarefa e estabelecer conexões.	Definir formas de organização do trabalho; Organizar materiais da aula
Realização da tarefa, durante a qual o professor interage com os alunos individualmente ou em grupo, colocando questões de forma a manter o desafio cognitivo e promover a autonomia e raciocínio dos alunos.	Promover o trabalho de pares/grupos; Regular as interações entre os alunos; Organizar a discussão a fazer;
Apresentação de resultados pelos alunos, discussão, comparação, conexões e interpretações da tarefa, relacionando conteúdos anteriores, estratégias aplicadas que servirão de orientação no desenrolar da tarefa;	Criar ambiente propício à apresentação e discussão; Gerir relações entre os alunos;
Aprendizagens Matemáticas, novas questões que servirão de suporte para investigações/explorações futuras. Estabelecer conexões com aprendizagens anteriores;	Focar os alunos no momento de sistematização coletiva; Promover o reconhecimento da importância de apurar conhecimento matemático a partir da tarefa realizada;

Neste estudo reforçou-se a ideia da complexidade do desenvolvimento das práticas de ensino exploratório da Matemática. Os autores referenciam que ao longo da prática a professora teve de tomar posições a fim de garantir aos seus alunos oportunidades de aprendizagem da Matemática.

A compreensão de conceitos matemáticos poderá ser regulada ao longo da escolaridade desde que o aluno tenha um papel ativo nas tarefas desenvolvidas na sala de aula. As orientações atuais do programa de Matemática visam um papel ativo e responsável por parte do aluno, no processo de ensino e aprendizagem (ME, 2007).

Estratégias adotadas. Tendo presente o conhecimento de alguns autores, Ponte (2005) considera que a estrutura de uma aula deve obedecer a três fases essenciais: (i) A exposição da tarefa e o modo como os alunos a interpretam; (ii) No decorrer da aula perceber o empenho do trabalho dos alunos; e (iii) A discussão e as considerações finais. Os momentos de discussão estabelecem oportunidades fundamentais para o ajuste de significados matemáticos e para a construção de novo conhecimento (Ponte, 2005). De acordo com o NCTM (2007), "a aprendizagem com compreensão os alunos terão mais sucesso com um programa de matemática escolar que incentive o seu desejo natural de compreender aquilo que lhes é pedido para aprender" (p. 22). Como tal, cada tarefa termina sempre com um momento de discussão coletiva, de forma a discutir ideias e refletir nos procedimentos e conclusões (NCTM, 2007, p. 23). Os momentos de discussão das tarefas são também relevantes para o desenvolvimento da comunicação matemática, uma das três capacidades transversais apontadas no novo Programa de Matemática (Ministério da Educação, 2007). Com base nestes pressupostos, achei importante compreender a perceção que os alunos têm sobre o ensino aprendizagem de conteúdos trigonométricos tendo como suporte o *Software* dinâmico GeoGebra. Aproveitei algumas tarefas com grau de desafio menor, os exercícios, nos momentos de introdução de novos conceitos para consolidação de conhecimentos e aplicação prática (Ponte, 2005). Apliquei alguns problemas, tarefas com grau de desafio mais elevado, uma vez que a resolução de problemas é um dos temas transversais contemplados no programa de Matemática.

Além disso, considerei nas minhas aulas algumas tarefas com grau de abertura e desafio mais elevados, tarefas de exploração para envolver o aluno na construção do seu próprio conhecimento, dado que "é muitas vezes mais eficaz, em termos de aprendizagem, que eles descubram um método próprio para resolver uma questão do que esperar que eles aprendam o método do professor" (Ponte, 2005, p. 9).

Organização dos alunos. O trabalho individual é relevante na sala de aula e fora dela. Contudo, a aprendizagem matemática pressupõe que os alunos trabalhem de diferentes formas na sala de aula: "a aprendizagem da Matemática pressupõe que os alunos trabalhem de diferentes formas, na sala de aula" (Ministério da Educação, 2007, p. 12). Uma dessas formas é o trabalho de grupo, que procurei dinamizar na realização das atividades das minhas aulas. A matemática auxilia a aprendizagem cooperativa, uma vez que oferece oportunidades para a formulação e discussão de conjeturas, argumentos e estratégias de resolução de problemas (Matos & Serrazina, 1996). Neste sentido, trabalhar em grupo significa que os alunos podem expor as suas ideias, ouvir os colegas, colocar questões, discutir estratégias e soluções, debater e criticar argumentos (Ponte et. al., 1997). A inclusão desta metodologia de trabalho em sala de aula, ajuda os alunos com dificuldades desde que estes reconheçam que têm necessidades e se sintam inseridos no grupo de forma a questionar e aplicar os conceitos dados.

Contudo, "pode ser útil aos melhores alunos, permitir-lhes observar processos conhecidos e refletir sobre eles a um nível superior" (Matos & Serrazina, 1996, p. 149). Estes autores reforçam a ideia de que os alunos ao trabalharem em grupo mostram-se mais interessados e empenhados, promovendo a discussão nas atividades expostas ao longo das aulas. Também Ponte e Quaresma (2011) consideram que o trabalho em grupo e em pares visam proporcionar aos alunos um ambiente desafiante e motivador de partilha e debate, não esquecendo os momentos de trabalho individual. De acordo com o NCTM (2007) o trabalho de grupo, determina a reflexão e a análise de conceitos. Na minha intervenção pedagógica pela importância deste método de ensino os alunos trabalharam em pares e em grupos (3/5 elementos). Os grupos formados tiveram em conta o empenho, o ritmo de aprendizagem, as dificuldades e competências de cada aluno, de forma a interagir e desenvolver capacidades uns com os outros. Esta estratégia de ensino promove a discussão e o diálogo, permite que os alunos criem autonomia, tirando assim partido das vantagens de trabalhar em grupo. Como refere Martins e Ponte (2010), o "trabalho de grupo permite desenvolver uma dinâmica em sala de aula em que todos os alunos têm oportunidade de apresentar o seu trabalho, de o ver questionado pelos outros alunos e também de questionar o trabalho dos seus colegas" (p. 16). Por fim, o facto de os alunos não estarem habituados a trabalhar neste formato de ensino ao longo do ano. De facto, foi bastante útil proporcionar-lhes uma prática diferente. De acordo com (Ministério da Educação, 2007) "os estudantes ganham em partilhar com os colegas e com o professor os seus métodos de resolução ou as justificações dos seus raciocínios" (p. 12). Outros benefícios estão inerentes ao trabalho de grupo, tais como mostra a Figura,

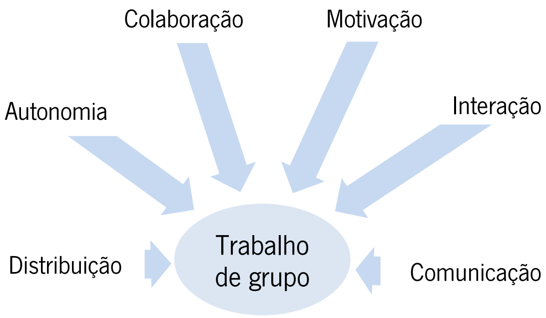


Figura 6: Benefícios do trabalho de grupo

O trabalho de grupo, embora tenha vantagens, também tem desvantagens, por exemplo: São os alunos que fazem a distribuição das tarefas no grupo e por vezes o melhor aluno do grupo resolve a tarefa proposta. Na minha intervenção, tentei estar atenta de forma a uniformizar estas atitudes de grupo. Além disso, foram organizadas estratégias que foram ao encontro dos interesses e necessidades dos alunos, de forma a prender com maior facilidade a sua atenção assim como a sua motivação. Como referem Ponte e Serrazina (2000),

> o professor precisa de ter abertura à inovação e experimentação. É importante que o professor se disponha arriscar novas abordagens, ainda que se sinta desconfortável e inseguro de vez em quando. Sem tentar novos métodos, novos tipos de tarefas e novos modos de trabalho na aula, o professor acaba por usar um conjunto limitado de rotinas (p. 16).

Tecnologia. Ao longo da minha intervenção pedagógica, foi fundamental analisar e explorar as potencialidades e limitações do *Software* GeoGebra no ensino e aprendizagem de trigonometria. De acordo com o NCTM (2007) "os professores deverão usar a tecnologia para melhorar as oportunidades de aprendizagem dos seus alunos" (p. 27). De facto, a utilização de recursos tecnológicos na resolução das tarefas trigonométricas é um fator tido em conta ao longo das aulas de matemática. Também, subjacente à seleção ou criação de tarefas matemáticas é importante que o GeoGebra como ferramenta de suporte o aluno consiga de uma forma correta e eficaz tirar o máximo de vantagens deste *Software* (NCTM, 2007). A tecnologia utilizada nas aulas foi o computador, proporcionando aos alunos explorar, representar, modificar, compor e reestruturar para edificar eficientemente a construção de triângulos, retas, ângulos, medidas com a sua respetiva visualização, libertando-os assim de cálculos excessivos (NCTM, 2007). Também Fernandes, Carvalho & Ribeiro (2007) referem que "o recurso às novas tecnologias permite libertar os alunos de tarefas rotineiras, deixando-lhes mais tempo para explorar, visualizar e interagir" (p. 35). Também Lopes (2011) refere que "o uso do *Software* GeoGebra pode auxiliar na resolução de problemas de trigonometria, especialmente em atividades investigativas, de forma que os estudantes possam interagir com as figuras construídas." Ou seja, o uso de recursos tecnológicos, em particular no ensino e aprendizagem de trigonometria, pode facilitar a compreensão de conteúdos acabando por minimizar dificuldades sobre o tema. Os *Softwares* de Geometria Dinâmica são ferramentas desafiantes para o aluno contribuindo para um ambiente investigativo de descoberta, permitindo fazer simulações facilitando o interesse pela construção de seus conhecimentos (p. 11). Em modo de síntese o NCTM (2007) advoga que as "simulações realizadas no computador poderão ajudar os alunos a evitar ou superar alguns erros de raciocínio (...)" (p. 299).

2.3.2. Estratégias de avaliação

Para concretizar o objetivo e responder às questões de investigação do projeto de intervenção pedagógica, recolhi informação através dos seguintes métodos: Questionários, análise documental (planos de aula, reflexões, registos de aulas, projeto curricular da escola, plano anual de atividades da escola e projeto educativo da escola); produções dos alunos; e questões no final de algumas aulas.

Questionários. O questionário é um instrumento de investigação onde se pretende recolher informações baseando-se na inquirição de um grupo alargado de pessoas. Gill (1999) considera que o questionário é uma "técnica de investigação composta por um conjunto de questões que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, sentimentos, valores, interesses, expectativas, aspirações" (p. 140). Este método e recolha de dados tem como vantagem garantir o anonimato dos alunos não ficando expostos a influências externas (Gill, 1999). Contudo, o autor considera que os questionários podem ter desvantagens, pelo facto de não se conhecer em que circunstâncias o aluno respondeu, o que condicionou a resposta do aluno, como também não garantir que todos os alunos preencham devidamente o questionário. Também Dias (2013) defende que o questionário:

> É uma técnica de recolha de dados que tem vantagem na medida em que impede a influência do investigador no sujeito no momento da recolha. É

> também uma forma eficaz e rápida de recolha de dados que permite a realização de comparações entre grupos (p. 42).

Na minha intervenção pedagógica apliquei dois questionários aos alunos da turma, um no primeiro dia da minha intervenção e outro no final. O questionário inicial (Anexo 1) teve como propósito caraterizar a turma em relação à disciplina de Matemática, apurar que conceitos os alunos tinham relativamente à trigonometria, e se já tinham utilizado algum *Software* dinâmico anteriormente. Na aplicação do questionário final (Anexo 2) pretendi saber qual o contributo do GeoGebra na aquisição de conhecimentos sobre os tópicos trigonométricos e recolher as perceções dos alunos sobre as estratégias delineadas. Neste questionário, nas questões da primeira parte, os alunos explanavam a frequência com que realizaram determinado tipo de atividade na sala de aula, manifestando-a segundo uma escala tipo Likert,: DT – Discordo totalmente, D – Discordo, I – Indiferente, C – Concordo e CT – Concordo Totalmente. Nas questões da segunda parte, de resposta aberta, pedia-se aos alunos que indicassem quais as vantagens e desvantagens da utilização do GeoGebra, quais as dificuldades sentidas na aprendizagem da Trigonometria e em que medida o GeoGebra ajudou no esclarecimento dessas dificuldades.

Questões colocadas no final de algumas aulas. De modo a perceber qual o contributo do GeoGebra na aprendizagem dos tópicos delineados nas planificações, adicionou-se algumas questões em cada ficha de trabalho (Anexo 3), assim como na exploração das tarefas da respetiva aula. A organização destas questões suportadas pelas Questões investigativas do projeto, foram sempre de encontro aos tópicos a desenvolver. O principal objetivo destas questões foi permitir ao professor recolher e refletir sobre as resoluções dos alunos dos conceitos abordados no estudo da trigonometria.

Análise documental. A análise de documentos complementa a informação recolhida por outros instrumentos referidos e utilizados no desenvolvimento deste projeto. Os documentos analisados foram: planificações; reflexões; registos dos diálogos da aula, realizados pela colega de estágio; e produções resultantes da atividade dos alunos. Foram também consultados os documentos oficiais, Projeto Educativo, Projeto Curricular da Escola e o Plano Anual de Atividades da escola de forma a ajustar o objetivo de investigação para uma maior inclusão no âmbito escolar em questão. Da mesma forma, foram analisados o programa de Matemática do ensino básico (Ministério da Educação, 2007) e o manual escolar adotado pela escola de forma a perceber as recomendações metodológicas e conhecer a natureza e organização das tarefas propostas sobre os tópicos de Trigonometria no triângulo retângulo.

CAPÍTULO 3

INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Este capítulo tem como objetivo analisar e interpretar a informação recolhida durante a minha prática pedagógica. São apresentados os conteúdos, focando as tarefas desenvolvidas pelos alunos na aprendizagem de tópicos da unidade trigonometria no triângulo retângulo. De seguida é feita a análise das atividades dos alunos das tarefas exploradas com o GeoGebra, assim como a análise das respostas dos alunos às questões feitas no final de aulas da intervenção pedagógica. Foram interpretadas e resolvidas tarefas de cariz exploratório nos conteúdos trigonométricos. Algumas destas tarefas foram adaptadas a partir de tarefas do manual escolar do 9.º ano adotado pela escola.

3.1. Conteúdos lecionados na intervenção pedagógica

Atendendo à calendarização das atividades escolares, a minha intervenção pedagógica decorreu ao longo de 14 aulas, com 6 aulas de duração de 90 minutos e 8 aulas de 45 minutos (Tabela 8).

Tabela 8: Tópicos lecionados

Aulas	Tópicos
1 e 2	Semelhança de triângulos, critérios de semelhança e Aplicação;
3 e 4	Razões trigonométricas de ângulos agudos e Aplicação;
5 e 6	Relações entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo e Aplicação;
7 e 8	Tabelas e Calculadoras, determinação de razões trigonométricas de amplitudes de ângulos agudos e Aplicação;
9 e 10	A trigonometria na resolução de problemas e Aplicação;
11 e 12	Tarefas de aplicação (Exercícios e problemas) e Aplicação;
13 e 14	Atividade realizada em GeoGebra – Trabalho de grupo;

Atendendo ao objetivo e às questões investigativas delineadas, são descritas 3 aulas, das quais analiso as atividades realizadas sobre as tarefas adaptadas segundo o tópico a desenvolver em cada aula. Subjacente a cada tarefa, é descrita a exploração e a interpretação dos alunos à luz dos conceitos matemáticos estudados. São as aulas 5 e 6, 7 e 8, 13 e 14. As aulas que não estão referidas na tabela anterior foram direcionadas para aulas práticas, revisões e fichas de avaliação. As aulas lecionadas seguiram os tópicos inerentes ao tema em estudo que se encontram distribuídos no manual escolar conforme mostra a (Figura 7):

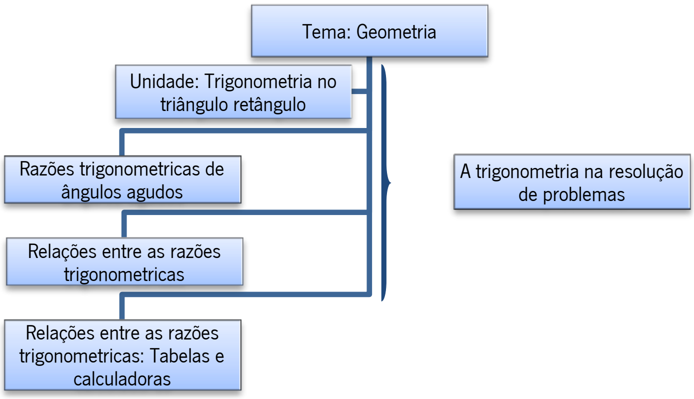


Figura 7: Distribuição dos conteúdos programáticos de acordo com o tema a lecionar

3.2. Ensino e aprendizagem de tópicos de trigonometria

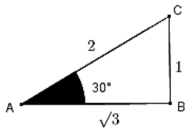
Os tópicos de Trigonometria são de extrema importância para que o aluno desenvolva a sua capacidade de resolução de problemas, determinando distâncias inacessíveis e amplitudes de ângulos. Nessa resolução, segundo Oliveira (2012), os professores desempenham um papel preponderante em atenuar a aprendizagem 'mecanizada' da Trigonometria, o que condiciona a compreensão dos conceitos seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.

3.2.1. Relações entre razões trigonométricas do mesmo ângulo

Estabelecer relações entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo.

Com o objetivo de os alunos estabelecerem as relações entre as razões trigonométricas de um ângulo agudo, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$ e $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, aplicando-as na resolução de problemas (Anexo 4), foi-lhes proposto a realização de uma tarefa exploratória com e sem recurso ao GeoGebra.

A Maria e o João ao estudarem trigonometria constataram que existem relações entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo. A Maria considerou que a $tg\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$. O João não concordou, dizendo que a $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$. Na dúvida, os dois alunos procuraram averiguar que relações podem estabelecer entre as razões trigonométricas.



1. Determina as razões trigonométricas do ângulo de 30° do seguinte triângulo retângulo:

   sen (30°)? ______________ cos (30°)? _________________

   tg (30°)? _______________

2. Tendo como base a construção do triângulo [ABC] em GeoGebra. Completa a seguinte tabela:

α	sen α	cosα	tgα	$\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$	$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
28°					
29°					
30°					
31°					

3. Partindo das razões trigonométricas estudadas, provar as relações:

   $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$

4. Mostre que $1 + 2senx\cos x = (senx + \cos x)^2$

Na expectativa da tarefa ser realizada por um maior número possível de alunos, registei no quadro o que se pretendia com a tarefa começando por relembrar conceitos já abordados em aulas anteriores. Com os alunos dispostos em pares, a exploração da tarefa abarcou quatro alíneas das quais a primeira alínea foi resolvida sem o uso do GeoGebra. Os alunos determinaram as razões trigonométricas do ângulo com amplitude de 30° do triângulo retângulo [ABC]. A maior parte dos alunos determinou sem dificuldade as razões propostas. Na determinação dessas razões, alguns alunos tiveram necessidade de efetuar algumas notações relativamente ao nome dos lados que compõem o triângulo, como mostra a Figura 8:

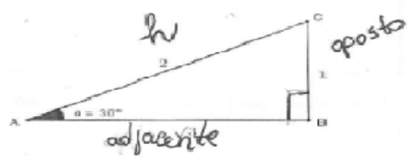


Figura 8. Esboço do triângulo retângulo [ABC] efetuado por um aluno.

Na determinação das razões trigonométricas de alguns ângulos agudos, os alunos recorreram ao GeoGebra, o que lhes permitiu, através da figura geométrica (Figura 9) já construída, gerar e recolher valores de forma a responder à alínea proposta.

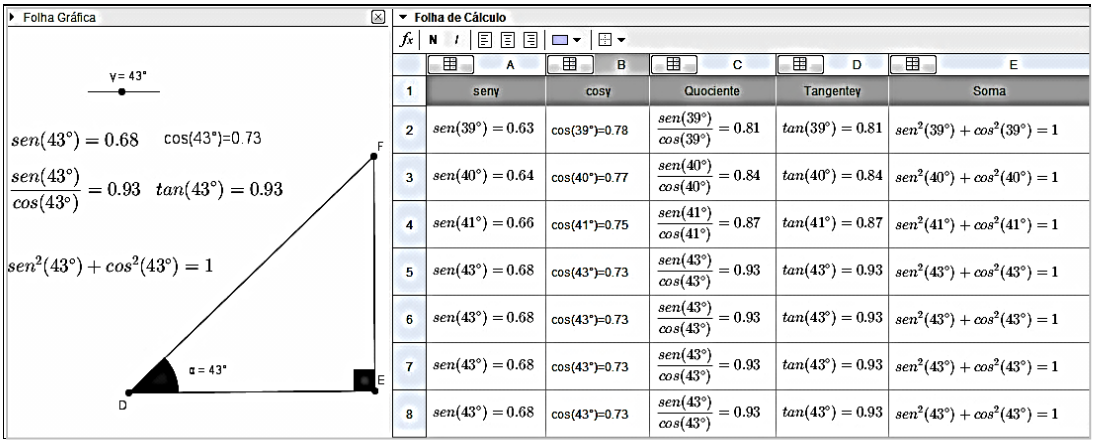


Figura 9: Estabelecer relações entre os valores das razões trigonométricas do mesmo ângulo.

A 'recolha' desses valores verificou-se através da manipulação do seletor (v). Obtidos esses valores, automaticamente eram registados numa folha de cálculo. Os alunos puderam assim comparar os valores e preencher a tabela, o que foi efetuado pela maior parte dos alunos. Contudo, alguns alunos não conseguiram obter o valor do ângulo α, tentando deslizar o seletor repetidamente.

Aluno: Professora não estou a conseguir obter o valor do ângulo 29°!

Professora: Vocês têm de deslizar o ponto sobre o segmento devagar e visualizar os valores gerados no ficheiro, provavelmente o valor do ângulo que pretendem já está gerado.

Aluno: Ah! Já vi professora.

Para verificar se os alunos estavam a perceber o preenchimento da tabela circulava pela sala observando as suas resoluções e tirando dúvidas. A determinação dos valores só foi possível pelo facto de os alunos terem oportunidade de manipular a figura já construída no GeoGebra. Subjacente a esta prática, Lopes (2011) considera que o "GeoGebra possibilita pensar de uma forma matematicamente diferente do que se estivesse a trabalhar com uma construção estática ou apenas falando dela, sem nenhum recurso visual" (p. 10). A exploração desta parte da tarefa foi importante para os alunos perceberem que, independentemente de alterarem o comprimento dos lados do triângulo, a amplitude do ângulo e a respetiva razão trigonométrica não se alteravam.

Professora: O que concluíram da tabela que acabaram de preencher?

Aluno P6: Eu verifiquei que sempre que "pucho" um dos lados do triângulo o valor do senα, cosα e tgα não mudam.

Professora: Pois não, isto quer dizer que as razões trigonométricas não dependem do comprimento dos lados do triângulo [ABC], mas apenas da amplitude dos seus ângulos. Todos concordam?

Aluno P6: Sim.

Professora: Em relação ao João e à Maria, já descobriram qual é a relação que está correta?

Aluno: Não!

De acordo com o teor das respostas dos alunos, apercebi-me que ainda não tinham chegado ao objetivo da tarefa, embora tenham percebido que a amplitude do ângulo não depende do comprimento dos lados do triângulo. Como tal, os alunos prosseguiram a exploração da alínea 3, com a qual se pretendia que validassem as igualdades $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e $\tan\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$. Ao mesmo tempo, aspirava que os alunos descobrissem a relação inicialmente pedida na tarefa proposta.

A prova da relação $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ foi concretizada através da aplicação do Teorema de Pitágoras ($c^2 = a^2+b^2$) e das razões trigonométricas $sen\alpha = \dfrac{a}{c}$ e $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$. Os alunos indiciaram perceber que as razões seno e cosseno de um ângulo agudo são obtidas a partir dos elementos de um triângulo retângulo, logo as medidas dos seus lados verificam o teorema de Pitágoras.

Na prova de $\tan\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$, os pares que conseguiram estabelecer esta relação, de uma forma geral, apresentaram respostas semelhantes, como exemplificam as resoluções do par P1 e P2. O par P1, precisou de fazer um esboço geométrico para obter as provas (Figura 10).

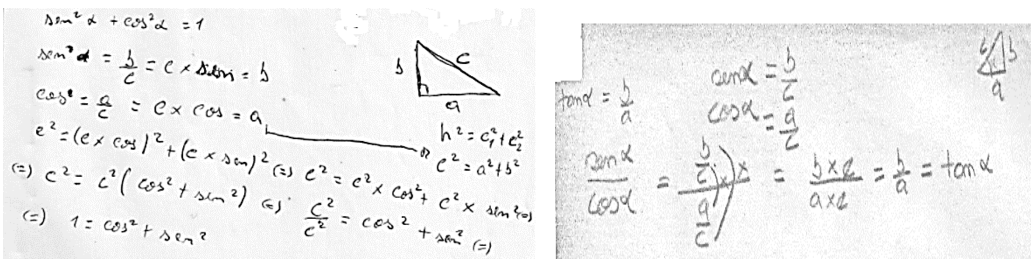


Figura 10: Prova das relações $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e $\tan\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$ do par P2.

Já o par P2, não evidenciou o esboço geométrico para provar as mesmas relações (Figura 11).

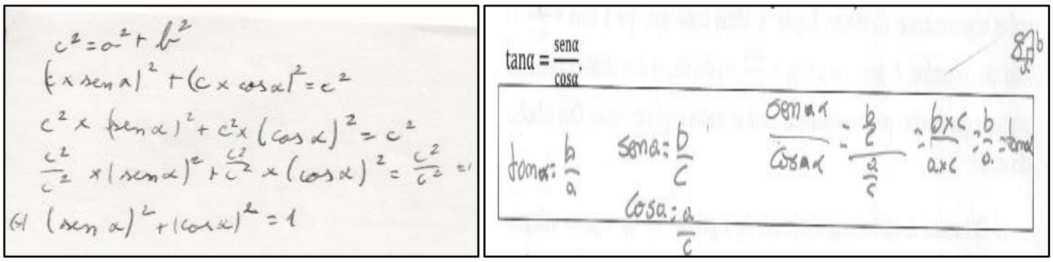


Figura 11: Prova das relações $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e $\tan\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$ do par P1

Após o tempo estipulado para a prova das relações trigonométricas propostas, um elemento do par P1 apresentou no quadro o que tinha feito no seu lugar:

Professora: Estão de acordo com a resolução de $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e $\tan\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$?

Aluno: Sim, na $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ a partir das razões trigonométricas e aplicando o Teorema de Pitágoras chegamos ao mesmo resultado. Na prova da $\tan\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$ aplicamos as razões trigonométricas.

Professora: Ouviram o vosso colega?

Aluno P2: Sim.

Professora: Então já sabem responder à questão inicialmente proposta na Tarefa 1? Quem tem razão? Qual foi a relação estabelecida?

Aluno P2: Quem tem razão é o João, porque esta relação $\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$ foi provada de acordo com as definições das razões trigonométricas em relação ao triângulo retângulo.

Professora: Têm todos com a mesma opinião?

Aluno P15: Professora, afinal quem tem razão?

Professora: Tendo como base a resolução do quadro, procedi novamente à explicação da relação estabelecida, confirmando que o João estava correto na sua afirmação.

De acordo com as respostas dadas, os alunos intervenientes conseguiram determinar a relação inicialmente estabelecida na Tarefa 1. Os pares P1, P2, P3, P7, P11, com base na prova de $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e de $\tan\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$, concluíram que o João estava correto na sua afirmação. Ao circular pelos lugares, verifiquei que alguns alunos afirmaram que quem tinha razão era o João. Outros alunos, embora não tenham conseguido provar que $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, conseguiram provar que $\tan\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$, como ilustram as respostas dos pares P4 e P5.

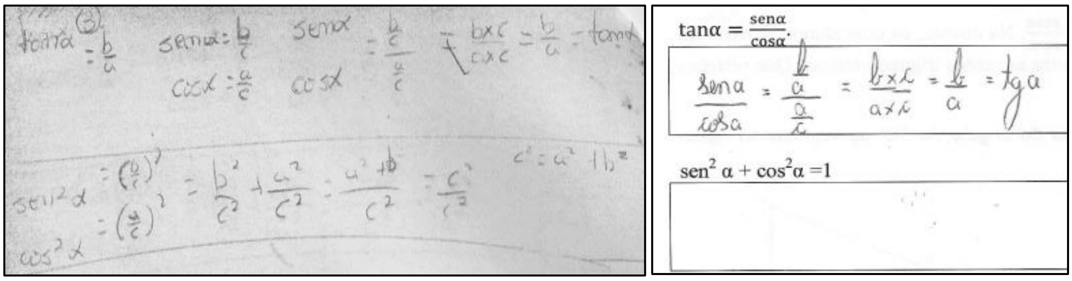


Figura 12: Resolução das provas $\tan\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$ do par P4 e P5.

Na atividade da prova das relações propostas, conclui-se que 14 alunos não aplicaram o Teorema de Pitágoras na verificação da lei fundamental da trigonometria.

Após a reflexão com a turma sobre as relações estabelecidas, propus aos alunos que provassem a igualdade $1+2senx\cos x=(senx+\cos x)^2$. Na realização desta atividade, a maior parte dos alunos manifestou dificuldades, o que indiciam que se deveram ao facto de não estarem habituados a provar resultados matemáticos. Apenas dois pares de alunos realizaram esta prova, salientando que estes eram alunos com um bom desempenho à disciplina de Matemática. Na sua resolução, estes alunos consideraram o segundo membro da igualdade e aplicaram o quadrado do binómio para obter a expressão do primeiro membro, como se pode visualizar (Figura 13) nas respostas do par P1 e P11.

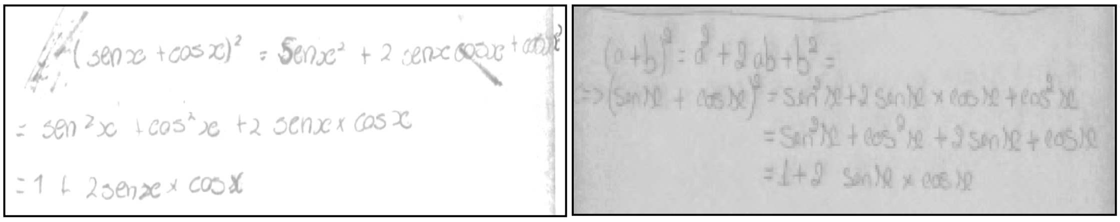


Figura 13: Prova da relação $1+2senx\cos x=(senx+\cos x)^2$ dos pares P1 e P11.

O par P11 realizou a prova atribuindo, respetivamente, ao seno e ao cosseno as incógnitas a e b, chegando à expressão do primeiro membro.

Já o par P3 começou por escrever e desenvolver o quadrado do binómio não concluindo a sua resolução, como mostra a (Figura 14):

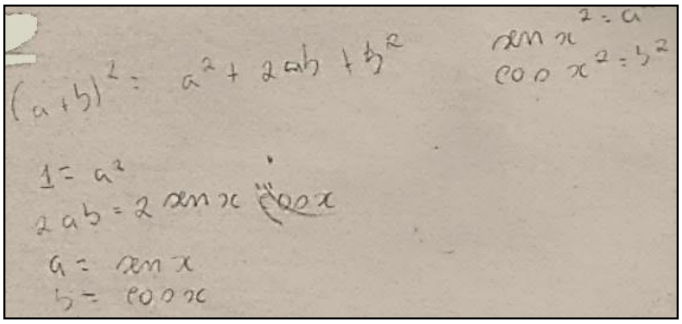


Figura 14: Resolução da prova $1+2senx\cos x=(senx+\cos x)^2$ do par P3

Da análise das produções realizadas pelos alunos, identificaram-se os seguintes procedimentos:

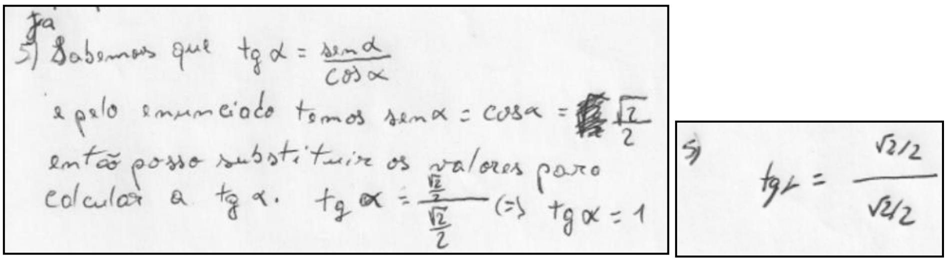
Tabela 9: Procedimento dos alunos, referente às provas

<table>
<tr><th></th><th>$sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1$</th><th>$\tan\alpha=\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$</th><th colspan="2">$1+2senx\cos x=(senx+\cos x)^2$</th></tr>
<tr><td>O aluno desenvolveu, partindo do T.P. e aplicando as razões trigonométricas.</td><td>P1, P2, P3, P7, P11;</td><td>P1, P2, P3, P7, P11;</td><td rowspan="4">Nenhum aluno resolveu a prova pegando no 1.º membro.</td><td></td></tr>
<tr><td>O aluno aplicou no 2.º membro o quadrado de um binómio.</td><td></td><td></td><td>P1, P11;</td></tr>
<tr><td>O aluno começou mas não terminou</td><td>P4, P5, P6; P8, P9, P10, P12;</td><td>P4, P5, P6, P8; P10, P12;</td><td>P2, P3, P4, P5;</td></tr>
<tr><td>O aluno não resolveu</td><td>P13, P14, P15;</td><td>P9, P13, P14, P15;</td><td>P6, P7, P8, P9, P10, P12, P13, P14, P15;</td></tr>
</table>

Mediante as dificuldades sentidas pelos alunos nas provas propostas, verificou-se que 10 alunos (33,3%) conseguiram efetuar as provas das relações propostas, enquanto 14 (46,7%) iniciaram a 1.ª prova mas não a concluíram, o que aconteceu com 12 alunos (40%) na 2.ª prova. Não efetuaram qualquer resolução na 1.ª prova 6 alunos (20%) e 8 alunos na 2.ª prova (26,7%). Relativamente à prova da igualdade $1+2senx\cos x=(senx+\cos x)^2$, cerca de 13,3% chegaram ao pretendido, 26,7% começaram a prova mas não a concluíram e 60% não conseguiram efetuar a prova.

Depois de identificar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo, como razões trigonométricas a partir de elementos de um triângulo retângulo, foi estabelecida a razão trigonométrica $\tan\alpha=\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$, assim como a sua respetiva prova. Nesta fase, os alunos individualmente tiveram oportunidade de aplicar a relação estabelecida através de aplicações práticas.

Aplicação das relações entre razões trigonométricas do mesmo ângulo. As atividades práticas (Anexo 3), retiradas do manual escolar com o objetivo de aplicar e consolidar os conhecimentos matemáticos anteriormente adquiridos, reforçaram a aprendizagem dos conteúdos lecionados. Na primeira atividade não se verificaram dificuldades de aplicação dos conhecimentos, no entanto foi evidente a falta de hábito em fundamentar as respostas. Enquanto quatro alunos tiveram esse cuidado, como exemplifica a resolução do par P1, 19 alunos simplesmente substituíram os valores das razões trigonométricas propostas mas não simplificaram a fração, como ilustra a resposta do par P6.


5) Sabemos que $tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$

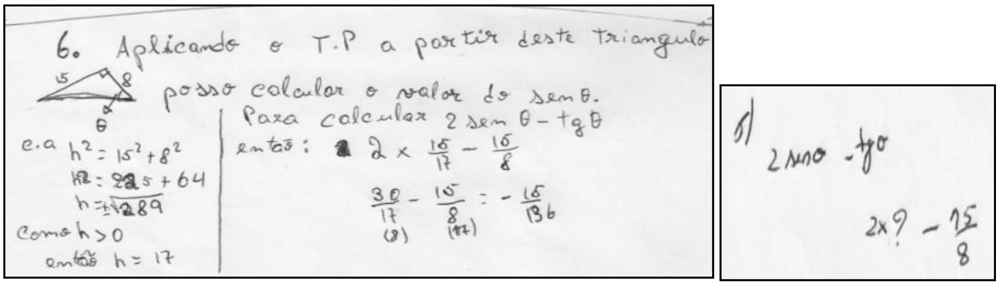
e pelo enunciado temos $sen\,\alpha = cos\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

então posso substituir os valores para calcular a $tg\,\alpha$. $tg\,\alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow tg\,\alpha = 1$

5) $tg\,\alpha = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}$

Figura 15: Resolução do aluno do par P1 e resolução do aluno do par P6.

A segunda atividade, com o objetivo de calcular $2sen\theta - tg\theta$, 4 alunos conseguiram calcular o valor exato, como exemplifica a resolução do par P2, 11 alunos só substituíram o valor da tgθ, o que lhes impossibilitou calcular o valor exato da expressão, e 15 alunos não conseguiram calcular o valor exato da expressão, como mostra a resolução do par P13 (Figura 16).


6. Aplicando o T.P a partir deste triangulo posso calcular o valor do sen θ.

e.a $h^2 = 15^2 + 8^2$

$h^2 = 225 + 64$

$h = \pm\sqrt{289}$

Como $h > 0$ então $h = 17$

Para calcular $2\,sen\,\theta - tg\,\theta$ então: $2 \times \frac{15}{17} - \frac{15}{8}$

$\frac{30}{17} - \frac{15}{8} = -\frac{15}{136}$

6) $2\,sen\,\theta - tg\,\theta$

$2 \times ? - \frac{15}{8}$

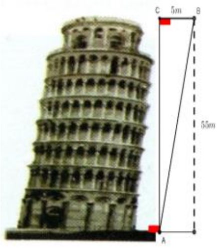
Figura 16: Resolução dos alunos do par P2 e P13.

Verifica-se que o par P2 teve o cuidado de estabelecer a relação entre os lados do triângulo e o teorema de Pitágoras, conseguindo dessa forma obter o valor da hipotenusa (incógnita desconhecida), enquanto o par P13 não conseguiu descobrir o valor da incógnita desconhecida, não concluindo o valor pretendido.

3.2.2. Determinação de razões trigonométricas de amplitudes de ângulos agudos com o uso de tabelas e calculadoras.

Na determinação das razões trigonométricas de ângulos agudos os alunos aprenderam a utilizar tabelas trigonométricas e a calculadora. Dado que os conceitos trigonométricos não são estanques, esta aprendizagem exigia conhecimentos prévios na identificação das razões trigonométricas de um dado ângulo. Nesta fase, os alunos sabiam obter os valores das razões trigonométricas através da razão entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, contudo, este método não é único, podendo também serem determinados usando tabelas trigonométricas ou calculadoras. De acordo com estes pressupostos e tendo como base as razões trigonométricas foi proposto aos alunos a realização de uma tarefa exploratória com e sem recurso ao GeoGebra.

Tarefa: Após a construção da Torre de Pisa concluiu-se que a parte mais alta da torre se separava da vertical cerca de 90 cm. Atualmente, esta separação é de 5m e a altura da torre é de 55m.Qual o ângulo formado pela torre com a vertical.



Com esta tarefa pretendia que surgissem momentos de discussão, com o intuito de ajudar os alunos a esclarecer as relações e as razões trigonométricas de um ângulo agudo. Esta tarefa foi construída em GeoGebra e de seguida explorada pelos alunos com a ajuda do professor. Como refere Valente (1993), "o aluno pode, a partir de uma construção, alterar os objetos preservando as caraterísticas originais" (p. 5), permitindo ao aluno interagir, comparar e determinar os resultados pretendidos utilizando o GeoGebra construindo o seu conhecimento. O computador da sala foi fundamental para projetar a construção de forma a estabelecer o processo que permite determinar a amplitude de um ângulo a partir do conhecimento do valor correspondente a uma das razões trigonométricas.

Na expetativa de envolver um maior número de alunos na discussão da atividade exploratória, chamei um aluno voluntário para desenvolver a tarefa no computador em GeoGebra. O objetivo desta tarefa prendia-se com o facto de o aluno ter oportunidade de simular e explorar a construção. Como refere o Ministério da Educação (2007), simular através de recursos tecnológicos (GeoGebra) permite simplificar e criar novas formas de resolver a atividade e criar novos caminhos de exploração:

Professora: Já todos leram o que se pretende na tarefa 1? Olhem para a projeção e com a ajuda da colega conseguem dizer-me o que falta saber nesta construção?

Aluno: Professora, falta a hipotenusa e o ângulo.

Professora: Então a vossa colega vai identificar na figura o ângulo formado no triângulo e o respetivo lado que vocês estão a dizer, podem ajudar?

Aluno P1: A aluna com a ajuda dos colegas identificou o triângulo e de seguida desenhou o ângulo pretendido no GeoGebra.

Aluno: Os alunos que estavam a acompanhar, leram o valor do ângulo projetado.

Professora: Perceberam a simulação do valor do ângulo pretendido?

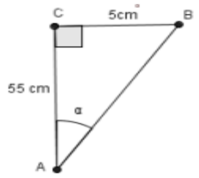
Aluno P1: Percebemos!

Professora: Então, uma vez percebida a simulação do ângulo em GeoGebra, vamos calcular analiticamente o que a vossa colega fez no GeoGebra? Quem vem ao quadro?

Aluno P1: De imediato a aluna do mesmo par diz: Professora eu vou mas não sei muito bem determinar!

Professora: Eu ajudo. Ainda com o auxílio da projeção pedi à aluna para desenhar o triângulo no quadro.

Aluno P1: A aluna desenhou o triângulo no quadro.



Professora: Ajudem a vossa colega a identificar o que observamos na figura de modo a calcular o valor do ângulo α pretendido.

Aluno P1: A aluna escreveu a expressão referindo que não sabia determinar mais.

$$\tan \alpha = \frac{5}{55} = \frac{1}{11}$$

Professora: Muito bem, perceberam esta expressão? Mas nós não podemos ficar por aqui? Vamos então desenhar aqui um esquema para que vocês consigam com a minha ajuda determinar o ângulo.

Multiplicamos pela tg e calculamos o inverso da tg

$$\tan \alpha = \frac{1}{11} \qquad\qquad \alpha \underset{\text{b) } tg^{-1}}{\overset{\text{a) } tg}{\rightleftarrows}} 1/11 \qquad\qquad \tan \alpha = \frac{1}{11} \Leftrightarrow \alpha = tg^{-1}\left(\frac{1}{11}\right) \cong 5.194$$

De acordo com expressão obtida determina-se a amplitude do ângulo α através da calculadora (onde expliquei como deveriam fazer), ou consultando a tabela trigonométrica (já fornecida), explicando que para o valor $1/11 \cong$ 0,0909 é imediato o valor do ângulo. Perante as respostas dadas, os alunos conseguiram através do GeoGebra determinar o valor do ângulo. Contudo, sem ser no GeoGebra só quatro alunos o conseguiram fazer. Este resultado vem reforçar a ideia de Lopes (2011), advogando que o "uso do GeoGebra permite encorajar o processo de descoberta dos alunos (...) confirmar resultados, fazer simulações levantar questões relacionadas com a sua aplicação prática" (p. 10). Encontrada a relação estabelecida entre as razões trigonométricas e a amplitude do ângulo pretendido, os alunos individualmente tiveram oportunidade de estabelecer a relação através de aplicações práticas.

Aplicação e determinação das relações entre as razões trigonométricas de amplitudes de ângulos agudos com o uso de tabelas e calculadoras.

As atividades práticas (Anexo 4) retiradas do manual escolar, tiveram como objetivo apurar e consolidar os conhecimentos lecionados. A primeira atividade, explorada em GeoGebra, permitiu aos alunos determinar ângulos de amplitudes variadas. De seguida, foi proposto aos alunos a determinação de distâncias. A exploração desta atividade foi importante para os alunos perceberem que alterando determinadas amplitudes de ângulos na figura construída poderia ser mais rápido do que resolver com lápis e papel. Como refere Lopes (2011) "no ensino e aprendizagem de trigonometria, (...) o GeoGebra pode contribuir para que algumas das dificuldades com o ensino do referido tema sejam minimizadas" (p. 11), o que promove a interação com as figuras construídas.

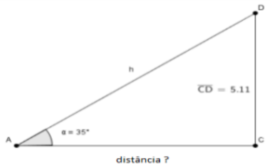
Professora: Preciso de um voluntário para vir para ao computador.
Aluno P2: Posso ir eu.
Professora: Muito bem. Então olhando para esta construção e depois de lerem a tarefa, de que forma o Paulo e o Rui clarificaram as suas incertezas? Ou seja, como determinar a distância da baliza ao local de gravação? Podem ajudar o colega?
Aluno P2: O aluno ao simular em GeoGebra um determinado ângulo, de seguida desenhou a construção e os respetivos valores no quadro.

Professora: Ajudem o vosso colega a escrever as razões trigonométricas que já conhecem.

Aluno P2: Temos senα cosαe tgα

Professora: E agora? Olhando para a figura, o que se pretende?

Aluno P2: O aluno depois de simular em GeoGebra um ângulo, desenhou a construção no quadro, para de seguida determinar a distância entre a baliza e a pessoa que estava a gravar.



Professora: Perceberam o que o vosso colega fez?

Alunos: Sim.

Professora: E agora? [Olhando para a figura] O que se pretende?

Aluno P2: Já sabemos o ângulo, um dos catetos por isso só falta o outro cateto.

Professora: Esse cateto que falta corresponde a quê?

Aluno P2: Com este cateto podemos determinar a distância do menino que está na posição A ao local da baliza, posição C.

Professora: Então como consigo determinar essa distância?

[O aluno começou por escrever a expressão, com a ajuda dos colegas e da professora]

$$tg\alpha = \frac{catetooposto}{catetoadjacente} \Leftrightarrow tg35^{o} = \frac{5.11}{distância} \Leftrightarrow$$

$$0,7 \times distância = 5.11 \Leftrightarrow distância = \frac{5.11}{0,7} \Leftrightarrow distância = 7.3 \cong 7m$$

Aluno P2: Posso calcular a tg35° utilizando a calculadora?

Professora: Sim podes. Mas também podes consultar a tabela. Então olhando para este resultado obtivemos o quê?

Aluno P2: A distância entre a baliza e a pessoa que está a gravar.

Professora: Perceberam esta resolução? Para finalizar esta atividade, vão agora determinar a distância, utilizando a consulta da tabela trigonométrica.

Aluno P2: Eu não sei utilizar a tabela.

Professora: Mandei o aluno consultar a tabela e visualizar qual o valor da tg sabendo o valor do ângulo calculado.

Aluno P2: É 0,7002

Professora: Todos sabem visualizar na tabela o valor da tangente sabendo o valor do ângulo?

Aluno P2: Eu já sei.

Alunos: Eu ainda não consegui.

Professora: Então quem já percebeu pode continuar e fazer a segunda atividade. Entretanto vou passar pelos lugares para tirar dúvidas.

De acordo com as respostas dadas, verificou-se que os alunos conseguem mais rápido e eficazmente a exploração da tarefa estando com o GeoGebra do que com lápis e papel. Como refere o NCTM (2007), “os alunos podem analisar mais exemplos ou formas de representação, do que é possível realizar manualmente, de modo a formular e a explorar conjeturas de uma forma fácil” (p. 27). Esta tarefa proporcionou o cálculo do ângulo e da distância desconhecida utilizando a calculadora ou a tabela trigonométrica reforçando a relação estabelecida entre as razões trigonométricas. A segunda tarefa, com o objetivo de utilizar a calculadora ou a tabela trigonométrica, pedia para determinar, com aproximação às centésimas, sen74°, cos13° e tg52°. Cerca de 20 dos 30 alunos (67%) determinaram os valores pretendidos utilizando a calculadora, como mostra a resolução do par P1 (Figura 17):

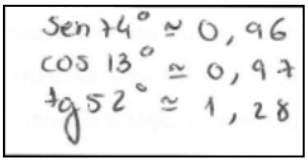


Figura 17: Procedimento do par P1

Os outros 10 alunos, 33%, não utilizaram a calculadora nem a tabela trigonométrica.

A atividade resultante da resolução da tarefa quatro (Anexo 3) permitiu reforçar a prática de cálculo de amplitudes de ângulos através da tabela trigonométrica e da calculadora.

Professora: Ao expor novamente o esquema para determinar a amplitude do ângulo, perguntei aos alunos como obter os valores da atividade proposta.

Aluno: $sen\beta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta = sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

Professora: Já calcularam o ângulo β?

Aluno: Na calculadora dá 30°, na tabela não sei ver.

Professora: Peguem na tabela e visualizem o valor de 0,5 na coluna do seno. Já visualizaram o ângulo correspondente?

Aluno: Professora, tem aqui um 0,50000 que dá o ângulo 30°, é esse?

Professora: Está correto, todos conseguiram visualizar?

Subjacente às respostas dadas, verificou-se que os alunos conseguem determinar mais facilmente o valor do ângulo usando a calculadora do que a consulta de tabelas. É importante que os alunos aprendam formas de representação convencionais, de forma a auxiliar a aprendizagem matemática (NCTM, 2007), embora a “tecnologia não substitui o professor de matemática” (NCTM, 2007, p. 28).

Esta aula organizada em grupos de cinco elementos teve como objetivo integrar, comunicar ideias e promover diálogo entre os alunos. Na aula foi entregue uma ficha de trabalho, na qual abarcava tarefas exploratórias para resolver com e sem recurso ao GeoGebra.

3.2.3. A trigonometria na resolução dos problemas.

Na aplicação das relações trigonométricas estabelecidas, os alunos resolveram alguns problemas em contextos variados com recurso ao GeoGebra.

Tarefa 1:

Um grupo de 4 alunos de origem romena está a frequentar o 1.º ano de licenciatura em matemática em Braga. Estes alunos foram reencaminhados para duas famílias que se prontificaram em dar-lhes alojamento. Uma dessas famílias vive em **Guimarães** e recebeu 2 alunos e a outra vive em **Barcelos** e também recebeu 2 alunos. Estes alunos, como têm bolsa de estudo, é exigido um documento para provar a distância percorrida do alojamento à universidade. Assim, observando o mapa e aplicando as razões trigonométricas, pretende-se:

a) Determinar a distância percorrida, partindo das razões trigonométricas, entre o alojamento e a universidade para cada um dos grupos.

b) Qual é o grupo de alunos que se encontra mais perto da universidade?

Para desenvolver esta tarefa (Anexo 5), os alunos, usando o GeoGebra, tentaram descobrir a amplitude dos ângulos verticalmente opostos e, aplicando as respetivas razões trigonométricas, determinar as distâncias pretendidas. Na espectativa de envolver os alunos na discussão da atividade exploratória, circulava pela sala questionando-os de forma a perceber com que empenho desenvolviam a tarefa. Como refere o NCTM (2007), "os alunos terão mais sucesso com um programa de matemática escolar que incentive o seu desejo natural de compreender aquilo que lhes é pedido para aprender" (p. 23). Permitindo aos alunos experiências graduais ao longo das aulas, em que vão desenvolvendo ideias, conceitos, padrões, formas e quantidades, podem adquirir naturalmente noções sólidas e corretas (NCTM, 2007).

Nesta resolução, em grupo, os alunos do grupo VI começaram por determinar no GeoGebra a amplitude do ângulo CBA. De seguida, aplicando as razões trigonométricas, calcularam o valor do lado AC do triângulo [ABC]. Este grupo pretendia determinar um dos lados do triângulo [ABC] que corresponde à distância de Barcelos (A) a Braga (B). Da mesma forma, para determinar a distância de Guimarães (D) a Braga (B), conhecido a amplitude do ângulo DBE, ângulo verticalmente oposto do ângulo ABC, os alunos determinaram o valor do lado DB do triângulo [DBE]. Este grupo concluiu que o grupo de alunos que se encontrava mais perto da Universidade (Braga) era o grupo de Guimarães, como ilustra a resolução proposta pelo grupo VI da Tarefa 1 às alíneas a) e b), respetivamente:

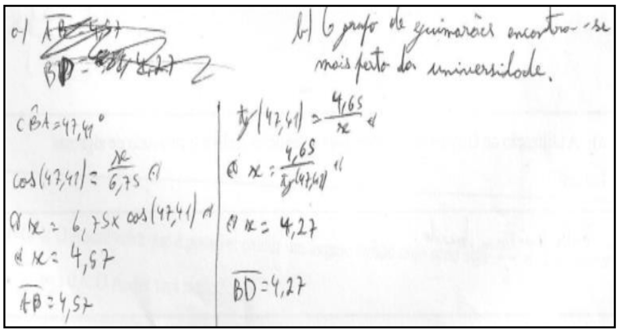


Figura 18: Resolução da Tarefa 1 pelo grupo VI.

Professora:	Já algum grupo conseguiu descobrir qual o grupo de estudantes que se encontra mais perto da universidade?
Grupo VI:	Nós concluímos que é Guimarães.
Professora:	Todos os outros grupos concordam com a afirmação deste grupo?
Alunos:	Sim, é Guimarães.
Professora:	Está correto. Grupo VI como obtiveram esse resultado?
Grupo VI:	Usamos a razão trigonométrica cos(α) para determinar a distância entre Barcelos e Braga e tg(α) para determinar a distância entre Guimarães e Braga.
Professora:	Todos fizeram assim?
Grupo II:	Nós calculamos no GeoGebra as distâncias e não aplicamos as razões trigonométricas.
Professora:	Mas foi pedido para aplicar as razões trigonométricas. E agora perceberam esta relação?
Grupo II:	Sim.

Tendo em conta as respostas dadas pelos alunos, pareceu-me que para a maioria dos alunos o tópico estabelecer razões trigonométricas em problemas de contexto real estava percebido. Porém, ainda existiam alunos que não conseguiram estabelecer as relações trigonométricas cosα e tgα.

Figura 19: Resolução da Tarefa 1 do grupo II.

O grupo II determinou em GeoGebra as distâncias entre AC e DB, concluindo que o alojamento que se encontrava mais perto da universidade era Guimarães. Estes alunos conseguiram obter a resposta correta, no entanto realizaram os cálculos através do GeoGebra não aplicando as razões trigonométricas como se pretendia. Como refere o NCTM (2007), as tecnologias "proporcionam imagens visuais das ideias matemáticas, facilitam a organização e a análise de dados, e realizam cálculos de forma eficaz e exata" (p. 26). No geral os grupos I, III, IV e V não tiveram dificuldades em determinar as distâncias.

Terminada a exploração da Tarefa 1 seguiu a exploração da Tarefa 2:

Tarefa 2:

Os 4 alunos ao fim de semana estão sempre mais disponíveis, por isso prontos a ajudar. Uma das famílias (casa de Barcelos), pensou em construir no terraço da sua casa uma sala de convívio. Para isso, houve necessidade de construir uma rampa para assim transportar o material de construção. Porém, este casal tinha de, antecipadamente, enviar um protótipo das medidas estabelecidas nessa construção. De imediato, os alunos se prontificaram a fazê-lo. Pretende-se através do GeoGebra determinar: o comprimento aproximado da rampa, sabendo que o terraço está a 4,20m do solo.

(Caso não consigam determinar o ângulo na figura considerem α=37°)

Da mesma forma, para desenvolver esta tarefa os alunos tinham de terminar a construção do triângulo e determinar através do GeoGebra a inclinação da rampa, de acordo com a figura. Ao mesmo tempo, pretendia que os alunos percebessem as vantagens e desvantagens de usar um *software* dinâmico reforçando e estabelecendo a relação entre as razões trigonométricas em contextos reais. Nesta resolução, os alunos do grupo VI começaram por construir o triângulo e determinar no GeoGebra a amplitude do ângulo formado pelo cateto adjacente (lado b) e a hipotenusa (lado c). De seguida e aplicando a razão trigonométrica senα

os alunos determinaram o comprimento do lado c, como se pode visualizar na resolução da tarefa 2 proposta pelo grupo:

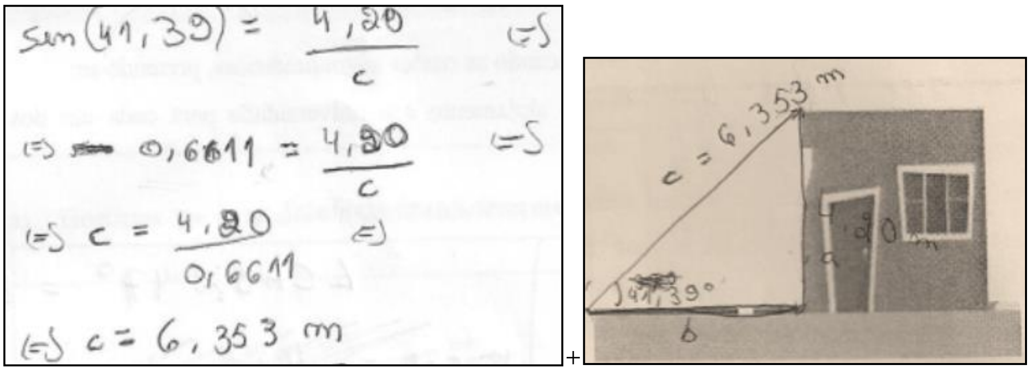


Figura 20: Resolução da Tarefa 2 do grupo VI

Este grupo e o grupo I conseguiram sem dificuldades a partir da construção, previamente elaborada no GeoGebra, determinar a amplitude do ângulo, de forma a aplicar a razão trigonométrica para calcular o comprimento da hipotenusa (lado c).

Um outro grupo determinou o comprimento aproximado da rampa, tendo considerado o ângulo fornecido no enunciado, como se pode visualizar na resolução do grupo III:

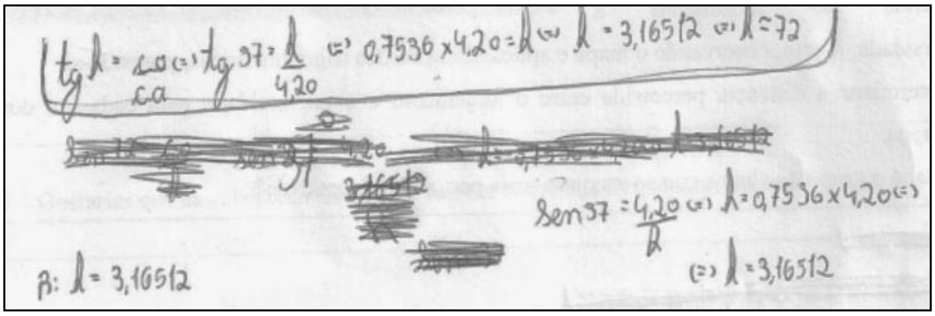


Figura 21: Resolução da Tarefa 2 do grupo III.

Este grupo, para além de não conseguir determinar a amplitude do ângulo, inicialmente não percebeu que o enunciado fornecia o valor da altura (cateto oposto) e não a distância da casa à rampa (cateto adjacente). Pela análise da resolução deste grupo percebe-se que inicialmente não interpretaram corretamente o enunciado, embora em fases seguintes conseguiram corretamente aplicar a razão trigonométrica e determinar o comprimento da rampa. Como tal, uma das dificuldades destes alunos, como refere (Lopes & Kato, sa) "encontra-se na leitura e interpretação da situação-problema, e nesse caso recusam-se a pensar sobre a questão e insistem para que o professor indique os procedimentos necessários para chegar à resposta desejada" (p. 1).

De uma forma análoga, o grupo II, para além de não conseguir determinar a amplitude do ângulo, não determinaram corretamente a razão trigonométrica tg. No entanto, conseguiram obter o resultado pretendido, como mostra a resolução do grupo:

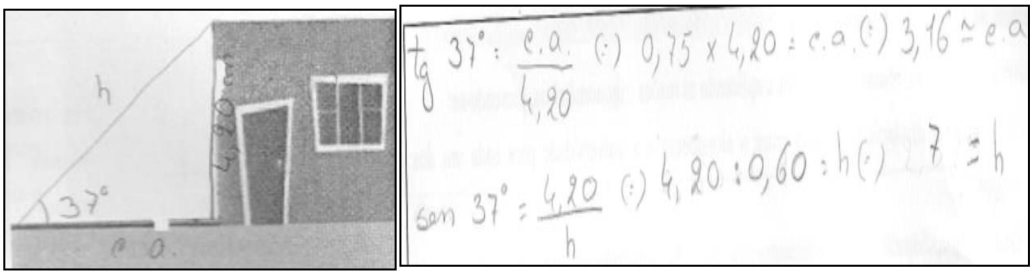


Figura 22: Resolução da Tarefa 2 do grupo II

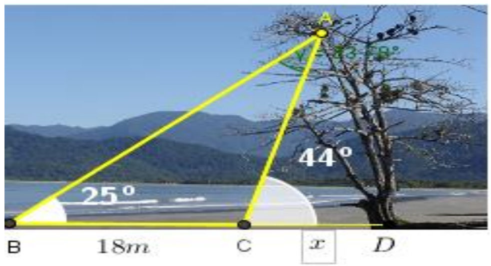
Percebe-se que os alunos deste grupo não têm hábito de estudo, pois deveriam estar familiarizados com a aplicação das fórmulas trigonométricas.

Em geral, o grupo I, V e VI não demonstraram qualquer dificuldade o que já não aconteceu com os grupos II, III e IV que mostraram dúvidas ao estabelecer as relações trigonométricas. Terminada a tarefa 2, foi chamado ao quadro um voluntário para explicar como desenvolveu a tarefa. O objetivo desta tarefa foi incentivar o diálogo com os restantes grupos.

De seguida, os alunos continuaram a ficha de trabalho resolvendo a tarefa 3 e a tarefa 4. Os objetivos destas foram reforçar a aplicação analítica das relações trigonométricas estabelecidas, perceber e comparar qual o contributo do GeoGebra em determinadas atividades, relativamente às atividades desenvolvidas sem recurso ao GeoGebra. Como refere (Ponte, 2005), a participação e o empenho dos alunos no processo de ensino-aprendizagem, além das motivações intrínsecas de cada um, podem aumentar através da inclusão de estratégias motivadoras. A aplicação de diferentes tarefas é encarada como uma das estratégias de progresso no desenvolvimento dos alunos nas atividades da aula. Subjacente a este fundamento, pretendi que o aluno tivesse a perceção das vantagens e desvantagens da utilização do GeoGebra.

Tarefa 3

O João efetuou algumas medições que registou na figura ao lado. Determine a altura da árvore. (Apresenta o resultado arredondado às décimas)



Antes dos alunos iniciarem o desenvolvimento da tarefa, procedi a uma breve explicação da figura no quadro.

Professora: Que informações têm relativamente a esta figura? O que se pretende?

Grupo VI: Queremos saber a altura da árvore. Então temos o triângulo [ABD], o ângulo e o cateto adjacente e do triângulo [ACD] temos outro ângulo e não temos mais nada.....

Professora: [No quadro escrevi as relações trigonométricas de acordo com os alunos] Não temos a altura da árvore, designamos por x a distância entre C e D pode ser?

Alunos: Sim.

Professora: E agora vamos esquematizar num sistema as condições que temos:

$$\begin{cases} tg\,44^{o} = \dfrac{h}{x} \\ \\ tg\,25^{o} = \dfrac{h}{18+x} \end{cases}$$

Grupo VI: Agora temos de resolver o sistema.

Professora: Assim conseguimos determinar todas as incógnitas que temos. Estão a perceber o que está no quadro? Podem continuar a resolução.

De acordo com as respostas dadas neste diálogo, depreende-se que alguns alunos têm assimilado os conteúdos referentes aos tópicos desenvolvidos ao longo das aulas. Porém, após a análise das resoluções de cada grupo, percebi que a maioria não conseguiu obter o resultado final da altura da árvore, o que se denota uma carência de conceitos assimilados em anos anteriores, como se pode visualizar na resolução do grupo VI:

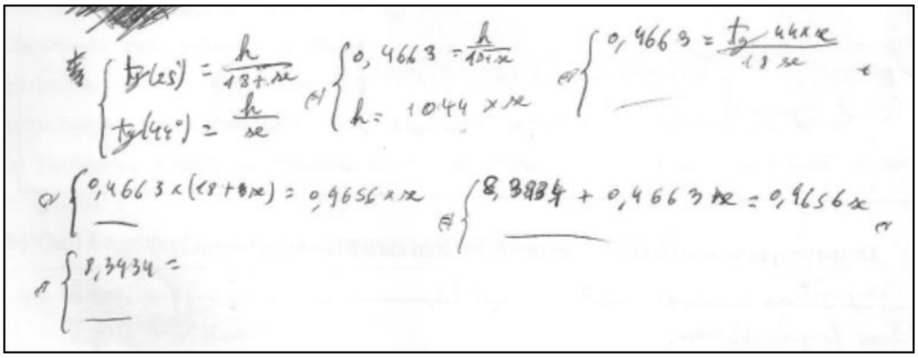


Figura 23: Resolução da Tarefa3 do grupo VI.

Neste grupo, pela análise da resolução da tarefa verifica-se que os alunos conseguem desenvolver um sistema, embora não o tenham concluído. Nesta tarefa, para além do Grupo VI, também os grupos II e V conseguiram desenvolver o sistema. O que não se pode dizer o mesmo na resolução da tarefa do grupo I:

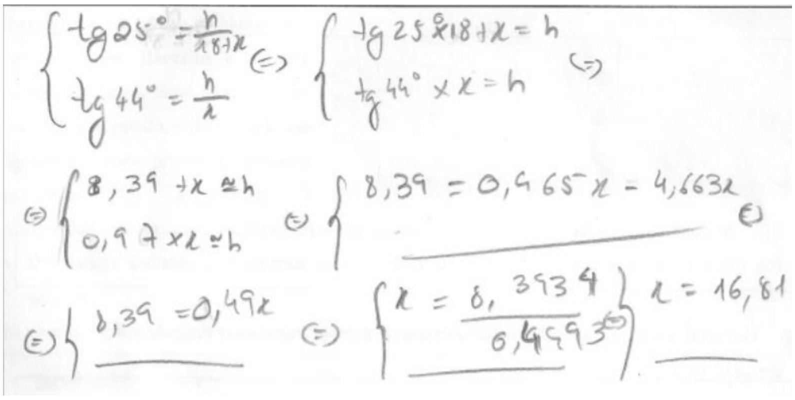


Figura 24: Resolução da Tarefa3 do grupo I.

A resolução deste grupo, em comparação com a resolução do grupo VI (anterior), permite-me averiguar que este grupo evidencia dificuldade em organizar corretamente a resolução do sistema e, por isso, têm dificuldade em chegar ao resultado pretendido. A mesma dificuldade foi refletida nos grupos I, III e IV.

Nenhum grupo concluiu a tarefa 3, logo não responderam à questão pretendida: Qual a altura da árvore? Esta situação vem reforçar a atitude de desempenho do grupo de trabalho, perante o desenvolvimento analítico das tarefas, uma vez que em tarefas idênticas desenvolvidas com o GeoGebra foram concluídas com sucesso em maior percentagem. Como advoga o NCTM (2007), é por meio das ferramentas tecnológicas " que os alunos poderão modelar e resolver problemas mais complexos que, até então lhes eram inacessíveis" (p. 28).

Tarefa 4

O André acha que é possível existir um ângulo agudo cujo seno seja $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e cujo cosseno seja 0,6. O André terá razão?

A relevância da inclusão desta tarefa deveu-se por permitir desenvolver nos alunos algumas habilidades por forma a aplicar e estabelecer as razões trigonométricas na resolução de problemas em contextos variados. Como tal, pretendi que os alunos reforçassem a aplicabilidade das razões trigonométricas, assim como a fórmula fundamental da trigonometria como se pode visualizar nas resoluções de alguns alunos:

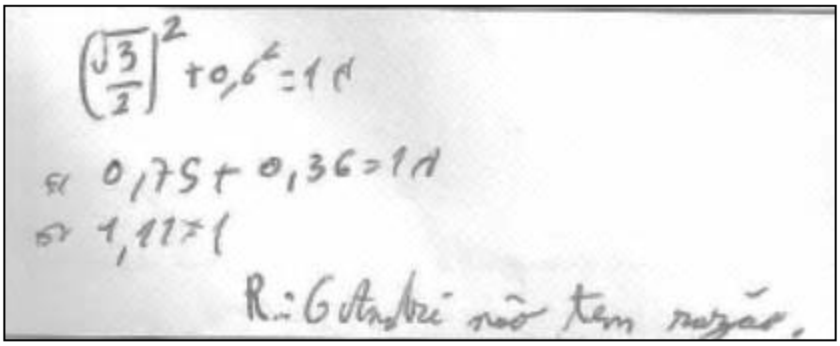


Figura 25: Resolução da Tarefa 4 do grupo VI.

A resolução deste grupo revela que recorreram à lei fundamental da trigonometria. Os grupos I, II, IV, V e VI resolveram a tarefa sem dificuldade. O grupo III esboçou o triângulo fazendo a legenda dos lados do triângulo atribuindo os valores seno e cosseno. Porém não conseguiram aplicar a lei fundamental da trigonometria não concluindo a tarefa:

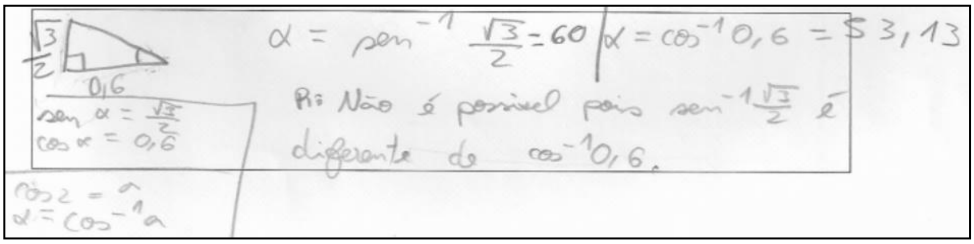


Figura 26: Resolução da Tarefa 4 do grupo III.

Na resolução desta tarefa, é clara a evidência de falta de estudo o que se traduz na forma como aplicam as relações trigonométricas.

Síntese. Após as estratégias delineadas na minha intervenção pedagógica, à luz da teoria de atividade é possível relacionar e referenciar os artefactos que mediaram na aprendizagem de tópicos de trigonometria. Subjacente às tarefas propostas e aos saberes adquiridos, interatuam nas práticas educativas a diversidade dos sujeitos (alunos) envolvidos e as relações entre alunos/professor, proporcionando a criatividade e aprofundamento das relações entre prática/teoria, o que promove uma atividade autónoma e sistemática superando a pedagogia tradicional (Libâneo, 2004). Esta mudança é possível quando exploradas e desenvolvidas em simultâneo as capacidades e hábitos de cada aluno. Assim, em forma de síntese e tendo como base o modelo da 3.ª geração da teoria da atividade segundo Engestrom (2001), apresento a Figura:

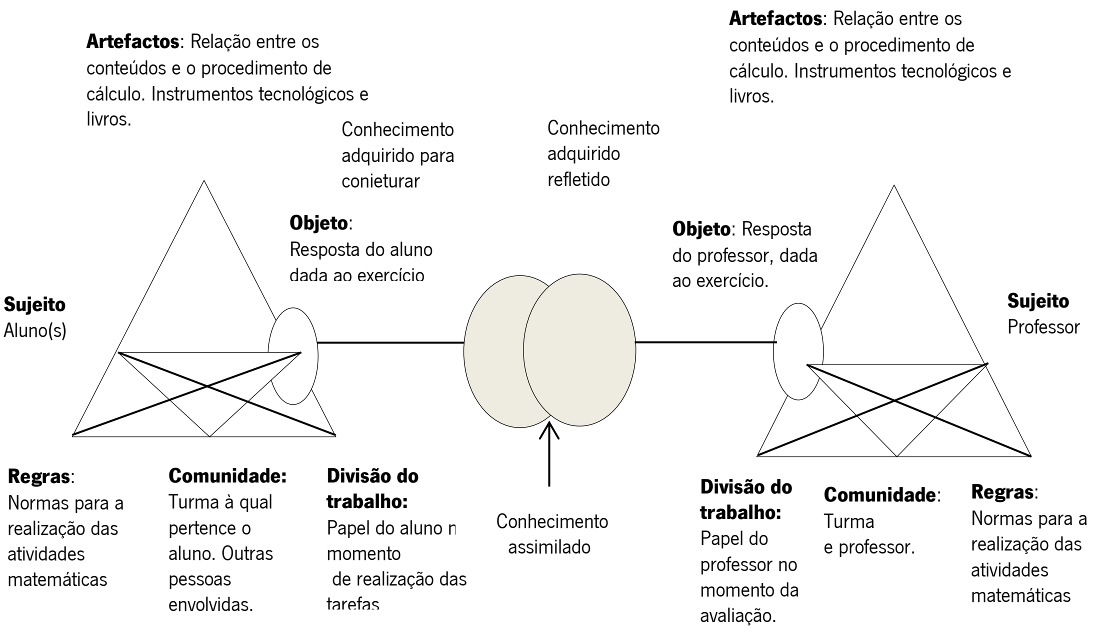


Figura 27: Modelo da 3.ª geração (Engestrom, 2001), interação Aluno/Professor.

Subjacente à ideia de que a forma de ensinar pode promover o desenvolvimento de competências cognitivas enquanto aluno, preocupei-me na prática enquadrar a dinâmica de aula exploratória tendo como suporte o modelo da 3.ª geração segundo (Engestrom, 2001). Refere-se que esta prática é apoiada por outro autores Christiansen e Walther (1986) quando referem que a Matemática deve assentar mais na atividade de cada aluno, dando prioridade ao ensino e aprendizagem de atividades de natureza cognitiva, exploratória e construtiva. Também Ponte, (2005) advoga que uma estratégia de ensino-aprendizagem de índole exploratória valoriza mais os momentos de reflexão e discussão do aluno, pelo que a aprendizagem decorre não de ouvir diretamente o professor, mas sim da reflexão realizada pelo aluno a propósito da atividade que realizou (p. 16).

Perante esta dinâmica de aulas e à luz da teoria de atividade tentei ajustar algumas funcionalidades de acordo com o modelo já referido de forma a desenvolver a relação de interacção entre o sujeito enquanto aluno e professor, mediar a utilização de artefactos, relembrar conhecimentos anteriores adquiridos pela comunidade (turma), divisão de trabalho onde o aluno se responsabiliza pelas actividades propostas de forma a cumprir as regras entre o sujeito e a comunidade.

Ao mesmo tempo e considerando que o professor tem um papel ativo neste modelo, preocupei-me em enquadrar e ajustar as funcionalidades do modelo nas minhas aulas exploratórias. Foram propostas regras de organização na turma, distribuindo os alunos aos pares ou em grupos de 4 alunos, foi proporcionado momentos de avaliação, questionando os alunos, foi dado o feedback das actividades exploradas, foram utilizados artefactos mediadores, caracterizados pela relação entre os conteúdos trigonométricos e o procedimento de cálculo, instrumentos tecnológicos, computador, manuais escolares e momentos de discussão e reflexão das actividades.

Esta interacção, aluno/professor pode desenvolver competências no sentido de melhorar a aprendizagem do aluno. Ou seja, uma didática ao serviço de uma pedagogia voltada para a formação de sujeitos que se envolvem na construção do conhecimento facilita a assimilação de conceitos e regras.

Considerando que o conhecimento e os instrumentos cognitivos se constituem nas relações entre alunos e professores, a sua assimilação implica a interação com outras pessoas que sejam também portadoras desse conhecimento. Sendo que a educação e o ensino constituem formas universais e necessárias do desenvolvimento mental, em que os fatores socioculturais e as condições internas dos indivíduos se complementam (Libâneo, 2004). Também Davydov, citado por Libâneo (2004, p. 22), refere que através da teoria da atividade a aprendizagem "é possível, por meio do ensino e da educação, formar numa pessoa certas capacidades ou qualidades mentais".

Da análise da (Figura 27) é notável perceber as contribuições da Teoria da Atividade, indo ao encontro da teoria de ensino desenvolvida por Davydov, quando refere que a aprendizagem e o ensino são formas universais de desenvolvimento mental relacionando as "tarefas didáticas com a aprendizagem do pensar e do aprender" (Libâneo, 2004, p. 7).

3.3. Perceção dos alunos sobre as estratégias implementadas

De modo a que os alunos avaliassem as estratégias delineadas, foram implementadas algumas questões "soltas" nas fichas de trabalho de cada aula. Estas questões proporcionaram melhor entendimento da relação aluno e tópico a explorar.

Questões aula: Nas aulas de concretização do projeto, os alunos responderam a algumas questões sobre o contributo do GeoGebra na sua aprendizagem e sobre as dificuldades sentidas na resolução das atividades propostas. Este leque de perguntas consubstanciou as questões investigativas inicialmente enunciadas no meu projeto.

As respostas à questão "Qual foi o contributo do GeoGebra nas relações que estabeleceste?" são apresentadas na Tabela 10. Com esta questão pretendi conhecer a opinião dos alunos sobre o contributo do GeoGebra no estabelecimento da relação entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo.

Tabela 10: Frequência de respostas referente à questão colocada na aula 1

Tópico: *Estabelecer relações entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo.*	
Qual foi o contributo do GeoGebra nas relações que estabeleceste?	Frequência
O GeoGebra torna mais fácil as tarefas porque é mais preciso, mais rápido e não é difícil de utilizar.	6
O GeoGebra foi útil porque ajudou-me a compreender a matéria de trigonometria e a estabelecer as relações trigonométricas.	10
O GeoGebra ajudou-me a compreender algumas tarefas, apesar de não perceber muito de trigonometria.	2

Da análise de algumas respostas dadas pelos alunos, constata-se que o GeoGebra contribuiu para uma resolução mais precisa e rápida das tarefas propostas e melhor compreensão dos conceitos lecionados. Os *softwares* de Geometria Dinâmica têm como característica fundamental o movimento de objetos no ecrã, permitindo exploração das tarefas, fazer investigações, descobertas, estabelecer relações, confirmar resultados, fazer simulações e colocar questões de modo a relacionar os conceitos inerentes à aplicação da sua prática (Lopes, 2011).

As respostas à questão "Gostarias que as aulas com GeoGebra fossem com mais frequência? Porquê?" são apresentadas na Tabela 11.

Tabela 11: Frequência de respostas referente à questão colocada na aula 2

Tópico: Tabelas e calculadora na determinação de razões trigonométricas de amplitudes de ângulos agudos. Gostarias que as aulas com GeoGebra fossem com mais frequência? Porquê?	Frequência
Sim, porque estando no GeoGebra estamos sempre a explorar conceitos matemáticos e nas aulas normais podemos estar só a passar do quadro.	6
Sim, porque podemos explorar geometria e álgebra ao mesmo tempo	2

Para alguns alunos, as aulas com o GeoGebra tornaram-se mais motivadoras do que as aulas de exposição e aplicação de conteúdos (Tabela 11). De acordo com as respostas da questão formalizada para esta aula, pode-se dizer que o *Software* dinâmico permitiu à maioria dos alunos compreender os conceitos lecionados nas aulas. Como refere Araújo e Gomes (2011), "através do Software podem ser abordados vários tópicos matemáticos com dinamismo e construções por professores e alunos" (p. 13). Estas aulas são mais aliciantes e motivadoras tornando-se mais produtivas.

As respostas à questão "Preferes que a resolução das tarefas seja feita no quadro antes ou depois de utilizares o GeoGebra? Porquê?" são apresentadas na Tabela 12.

Tabela 12: Frequência de respostas referente à questão colocada na aula 2.

Tópico: Tabelas e calculadora na determinação de razões trigonométricas de amplitudes de ângulos agudos. Preferes que a resolução das tarefas seja feita no quadro antes ou depois de utilizares o GeoGebra? Porquê?	Frequência
Depois de utilizar o GeoGebra, porque é mais fácil compreender a questão.	12
Antes, para percebermos melhor a prática de exercícios	10

No estudo do tópico 'Tabelas e calculadora na determinação de razões trigonométricas de amplitudes de ângulos agudos', alguns alunos (10) destacam a utilização do GeoGebra após a explanação do conteúdo no quadro, enquanto outros (12) valorizam mais essa utilização na obtenção desse conteúdo para aplicarem de seguida na resolução de tarefas práticas (Tabela 12). Como refere o NCTM (2007), a "tecnologia não só influencia o modo como a matemática é ensinada e aprendida, como também afeta o que é ensinado e o momento em que determinado tema é abordado" (p. 28). Esta aula permitiu-me perceber que o GeoGebra incutiu à maioria dos alunos motivação para trabalhar, interpretar e explorar as atividades propostas.

As respostas à questão "A utilização do GeoGebra contribui para entenderes melhor o conteúdo de algumas tarefas?" são apresentadas na Tabela 13.

Tabela 13: Frequência de respostas referente à questão colocada na aula 3.

Tópico: ***A trigonometria na resolução dos problemas.*** A utilização do GeoGebra contribui para entenderes melhor o conteúdo de algumas tarefas?	Frequência
Com o GeoGebra podemos calcular ângulos, determinar distâncias, descobrir relações.	11
O GeoGebra ajuda a explorar a tarefa.	6
Podemos estar mais tempo a desenvolver a tarefa proposta, porque fazemos e desfazemos até ficar bem.	13

Observando os dados da tabela, salienta-se a resposta "Podemos estar mais tempo a desenvolver a tarefa proposta, porque fazemos e desfazemos até ficar bem". Esta afirmação é pertinente pelo facto de os alunos terem mais tempo para explorar e pensar em estratégias para resolver a tarefa, de uma forma mais precisa, como refere o NCTM (2007): "Nos programas de ensino da matemática, a tecnologia deve ser largamente utilizada, com responsabilidade, com o intuito de enriquecer a aprendizagem matemática dos alunos" (p. 26).

De acordo com os dados da tabela, 11 alunos atribuíram várias operações ao GeoGebra, tais como calcular a amplitude de ângulos, determinar distâncias e descobrir a relação entre as razões trigonométricas; 6 alunos referem que o GeoGebra ajuda na resolução das tarefas e 13 alunos referem que deveriam ter mais tempo para explorar as tarefas propostas.

Com o objetivo de verificar se as perceções dos alunos em relação às estratégias utilizadas nas aulas da intervenção pedagógica, foi entregue um questionário no final da intervenção pedagógica:

Tabela 14: Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente ao tema de trigonometria.

Questionamento realizado na sala de aula	**DT/ D**	**I**	**CT/C**
O tema trigonometria foi o tema que mais gostei de estudar neste ano letivo.	17%	30%	53%
O estudo de trigonometria despertou o meu gosto de aprender Matemática.	17%	40%	43%
O estudo de trigonometria permitiu-me reconhecer o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do dia-a-			

dia.	10% 33% 57%
Os tópicos de trigonometria foram mais difíceis de compreender do que outros tópicos matemáticos que estudei este ano letivo.	30% 37% 33%

Nota DT/D – Discordo totalmente/Discordo; I- Indiferente; CT/C- Concordo totalmente/concordo

De acordo com os dados da tabela verifica-se que as opiniões dos alunos, referente ao tema de trigonometria, expressam visivelmente o interesse pela trigonometria, pelos problemas dia a dia. Embora o tema seja interessante para alguns alunos, estes também têm dificuldade na interpretação das tarefas.

A tabela que se segue, referente à organização e postura na sala de aula, mostra o contributo da partilha de saberes na turma, de conjeturas formuladas durante a fase dos trabalhos em pares/grupos e o sentido de responsabilidade em grupo (Boavida, 2005).

Tabela 15: Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente à organização e postura na sala de aula.

Questionamento realizado na sala de aula	**DT/ D**	**I**	**CT/C**
O trabalho em grupo favoreceu mais a minha aprendizagem de tópicos de trigonometria do que o trabalho individual.	13,4%	40%	43%
No estudo de trigonometria intervim na dinamização das atividades da aula.	30%	40%	44%
No estudo de trigonometria manifestei responsabilidade pelo desenvolvimento das atividades em grupo.	10%	23%	40%
Descobrir por mim próprio os conteúdos matemáticos é mais motivante para a minha aprendizagem do que ser o professor a apresentar esses conteúdos.	20%	23%	57%

Nota DT/D – Discordo totalmente/Discordo; I- Indiferente; CT/C- Concordo totalmente/concordo

De acordo com os dados da tabela, tendo em conta a turma, notou-se uma certa dinâmica na organização do grupo, em pares, na divisão de tarefas assim como na sua concretização. Cerca de 50% dos alunos tentaram resolver as tarefas propostas, chegando sempre a uma conclusão, como indica um aluno "quando não se apanha alguma coisa, há outra pessoa que apanha e nos ajuda". De facto, para além da exploração das tarefas, os alunos tiveram oportunidade de exprimir e fundamentar as suas opiniões. Porém, mesmo sabendo que o trabalho de grupo pode trazer implicações de natureza comportamental, é vantajoso a sua organização, permitindo reforçar, avaliar situações, colocar questões e tomar decisões. De facto é uma boa oportunidade para desenvolver um ensino mais centrado no aluno, cabendo a ele a organização e desenvolvimento da tarefa (Varandas & Nunes, sa).

De uma forma geral, os alunos reforçam as vantagens da utilização do GeoGebra nas aulas de matemática (Tabela 15).

Tabela 16: Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente ao contributo do GeoGebra nas aulas.

Questionamento realizado na sala de aula	DT/ D	I	CT/C
No estudo de Trigonometria tive a oportunidade de estabelecer as razões trigonométricas (seno, cosseno, tangente) com a ajuda do GeoGebra.	12%	40%	48%
Tive a oportunidade de aplicar as razões trigonométricas na resolução de tarefas com a ajuda do GeoGebra.	13%	40%	47%
O estudo de tópicos de trigonometria com recurso ao GeoGebra despertou o meu interesse pela Matemática.	24%	43%	33%
A utilização do GeoGebra na atividades das aulas fez-me pensar mais do que numa aula em que o professor expõe a matéria.	22%	48%	30%
As aulas em que utilizei o GeoGebra foram as que participei com mais empenho.	22%	49%	29%
O GeoGebra permitiu-me experimentar mais exemplos, conseguir distâncias e amplitudes de ângulos de uma maneira mais fácil do que em lápis e papel.	6,7%	37%	56,3%
Gostaria de aprender outros tópicos matemáticos com recurso ao GeoGebra.	10%	40%	50%
Aprendi melhor as razões trigonométricas quando combinei	17%	40%	43%
Tive a oportunidade de aplicar as razões trigonométricas de um ângulo agudo na resolução de tarefas sem a ajuda do GeoGebra.	17%	40%	43%

Nota DT/D – Discordo totalmente/Discordo; I- Indiferente; CT/C- Concordo totalmente/concordo

Mais de 30% dos alunos da turma consideram que o GeoGebra é fundamental para que tenham um papel mais ativo na sua aprendizagem e uma maior motivação para aprender os tópicos. Como referem Viseu, Nogueira e Santos (2009) "O uso de materiais tecnológicos pode apoiar assim uma aprendizagem significativa, sobretudo no que respeita ao desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, autonomia e pensamento crítico, e de uma atitude positiva em relação à Matemática" (p. 3).

A tabela que se segue, referente à prova de relações trigonométricas e resultados, mostra a necessidade de criar condições que promovam mudanças nas conceções e nos saberes dos alunos, a fim de permitir raciocinar, argumentar e provar. Como refere Boavida (2005), "atividades propícias ao envolvimento dos alunos em argumentação matemática parecem ser a negociação dos significados de conjetura, contraexemplo e prova. Parece ser igualmente importante envolver frequente e sistematicamente os alunos em experiências de prova" (p. 5).

Tabela 17: Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente à prova de relações trigonométricas e resultados.

Questionamento realizado na sala de aula	**DT/ D**	**I**	**CT/C**
Tive a oportunidade de provar relações/resultados trigonométricos.	10%	40%	50%
Provar resultados matemáticos obrigou-me a pensar mais do que resolver exercícios e problemas.	10%	40%	50%

Nota DT/D – Discordo totalmente/Discordo; I- Indiferente; CT/C- Concordo totalmente/concordo

De acordo com os resultados da tabela, pode-se concluir que pelo menos 50% dos alunos concordam que tiveram oportunidade de provar as relações entre as razões trigonométricas e consequentemente os obrigou a pensar para efetuar essas provas. Como refere o NCTM (2007), os "professores deverão estimular os alunos a formular e a investigar conjeturas matemáticas, através da colocação de questões que estimulem a construção dos seus conhecimentos" (p. 146), o que permite aos alunos desenvolver, gradualmente, habilidades e capacidades, das quais podem tirar ilações verdadeiras, que vão contribuir para a construção da sua aprendizagem. Também o Ministério da Educação (2007) advoga que os alunos ao elaborarem pequenas cadeias dedutivas, vão-se familiarizando com o processo de demonstração.

A tabela que se segue, referente às vantagens/desvantagens da trigonometria com o GeoGebra, salienta o contributo do GeoGebra na compreensão do tópico de trigonometria.

Tabela 18: Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente às vantagens/desvantagens da trigonometria com o GeoGebra

Questionamento realizado na sala de aula	
Que vantagem teve o GeoGebra na tua aprendizagem de tópicos de trigonometria	
	Frequência
O GeoGebra permite-me determinar as distâncias e o cálculo dos ângulos mais rápido e mais bem feito. Com o GeoGebra consigo resolver mais tarefas.	18
Que dificuldades sentiram na aprendizagem de tópicos de trigonometria.	
Por vezes tinha dificuldade em interpretar e determinar o que a tarefa proponha, porque tinha de saber aplicar as relações que aprendi e por vezes não sabia como.	12

Com o objetivo de completar a análise do questionário final, pretendi aferir qual foi o contributo do GeoGebra nas atividades trigonométricas propostas. A leitura desta tabela revela uma relação direta entre o trabalho desenvolvido e a capacidade matemática em trabalhar com o GeoGebra e as dificuldades sentidas na interpretação matemática. De uma forma geral e tendo como referência as respostas traduzidas na Tabela 18, os alunos gostaram de trabalhar com o GeoGebra. Enquanto 18 alunos acham que o GeoGebra lhes permitiu mais facilmente resolver as tarefas, 12 alunos tiveram dificuldades em interpretar o problema não conseguindo relacionar, provar e construir o que se pretendia. Umas vezes, porque não percebiam o enunciado, outras vezes porque não conseguiam desenhar segmentos de reta e determinar algumas distâncias, impossibilitando-os de concluir certas relações trigonométricas. Esta situação vem reforçar a ideia de que estes alunos têm pouco hábito de trabalhar com *softwares* específicos na disciplina de Matemática. Contudo, esta ferramenta, permitiu aos alunos ter oportunidade de edificar o seu próprio conhecimento de uma forma enriquecedora e motivadora, tal como refere o NCTM (2007):

> A tecnologia pode ajudar os alunos a aprender matemática, (...), munidos de calculadoras e computadores, os alunos podem analisar mais exemplos ou formas de representação, do que é possível realizar manualmente, de modo a formular e a explorar conjeturas de uma forma fácil. (p. 27)

Em modo de síntese, a utilização do GeoGebra foi precioso no processo de motivação e aprendizagem dos alunos. Os alunos conseguiram aprender conceitos matemáticos de uma forma atrativa, como uma ferramenta que facilitou a sua aprendizagem.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo, dividido em duas secções, apresentam-se as principais conclusões deste estudo, tendo em conta as questões de investigação definidas, o suporte teórico elaborado, algumas limitações no desenvolvimento do projeto e as estratégias concretizadas na intervenção pedagógica. Por último, são referidas algumas limitações no desenvolvimento da intervenção pedagógica, bem como recomendações para projetos futuros.

4.1. Conclusões

Nesta secção apresentam-se as respostas às questões de investigação tendo como referência os dados obtidos e as referências teóricas consultadas.

4.1.1. Que atividades desenvolvem os alunos no estudo sobre tópicos de trigonometria com recurso ao GeoGebra?

As atividades desenvolvidas com recurso ao GeoGebra auxiliaram os alunos a construir noções, estabelecer relações, calcular distâncias, determinar amplitudes de ângulos, interpretar construções, levantar hipóteses, de modo a tornarem-se autónomos na realização das tarefas, no desenvolvimento de estratégias de exploração e construção, e não apenas memorizar fórmulas e procedimentos. Ferreira (2005) considera que um aluno só tem sucesso de aprendizagem se tiver em contacto com uma escola inovadora e dinâmica onde o saber é construído e não simplesmente transmitido e memorizado.

Também Christiansen e Walther sugerem que a Matemática possa ser desenvolvida abarcando estas atividades como uma ferramenta educacional necessária. O autor considera que na realização de tarefas exploratórias os alunos assumem momentos de discussão uns com os outros, relatando as suas conjeturas de forma a clarificar os conceitos e a estabelecer as conexões e conclusões matemáticas. Como tal, na minha prática pedagógica e da análise dos dados recolhidos no estudo do tópico de trigonometria com recurso ao GeoGebra, os alunos desenvolveram atividades de exploração, conjeturaram e formalizaram conceitos sobre relações trigonométricas.

Nas tarefas sobre a determinação da relação entre as razões trigonométricas de um mesmo ângulo, os alunos simularam e registaram algumas amplitudes, tiveram oportunidade de manipular as figuras geométricas construídas no GeoGebra, o que lhes permitiu recolher valores e identificar regularidades. De seguida os alunos foram desafiados a provar as conjecturas, embora só um número muito reduzido o conseguiu.

No final da estratégia de ensino os alunos foram questionados relativamente ao contributo do GeoGebra no estabelecimento das relações trigonométricas das atividades realizadas na aula. A maioria dos alunos respondeu que a exploração das tarefas foi importante porque perceberam que, mesmo alterando o comprimento dos lados do triângulo, a amplitude do respetivo ângulo não se alterava. Este recurso facilitou a compreensão e a prática no estabelecimento das relações entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo, permitindo-lhes construir, rever, modificar as construções geométricas, de forma a testar as suas ideias matemáticas e conjeturar envolvendo-se na sua própria aprendizagem.

Durante a prática pedagógica o estabelecimento das relações foi mediado pelo GeoGebra, o que vem de encontro às ideias de Engestrom (2001) quando considera que as relações entre sujeito e objeto da atividade são mediados pela utilização de artefactos e pela partilha do objeto (alunos).

As tarefas realizadas com GeoGebra contribuíram para o empenho dos alunos nas atividades desenvolvidas na sala de aula, evidenciando momentos de motivação para aprender. Leontiev (1998) realça o facto do individuo que está motivado para agir sobre um determinado objeto, aprende com a sua atividade, ações e reflexões, reforçando a ideia de que não existe atividade sem um motivo.

4.1.2. Que dificuldades manifestam os alunos na aprendizagem da trigonometria? Qual o papel do GeoGebra na clarificação dessas dificuldades?

Para Lopes (2011), os *softwares* de Geometria Dinâmica possibilitam a descoberta, a confirmação de resultados, a formulação de questões relacionadas com a sua aplicação prática testando as suas conjeturas, de forma a facilitar o interesse pela construção de conhecimentos. Também Ponte (1991) advoga que o uso da tecnologia favorece o envolvimento dos alunos na formulação e teste das suas conjeturas. Ao longo da minha prática tive oportunidade de verificar que a maioria dos alunos manifestou dificuldade em provar os resultados obtidos. Este facto parece dever-se à pouca frequência de realização de atividades desta natureza, uma vez que os alunos têm dificuldade em estabelecer conexões com outros conceitos já aprendidos, acabando por não relacionar os conhecimentos adquiridos na prova de um resultado matemático.

Das atividades realizadas nas aulas verificou-se que a maior dificuldade de realização foi a atividade de prova. Só uma minoria de alunos é que conseguiu efetuar esta atividade, mesmo estes com a ajuda das sugestões da professora.

Os alunos mostram dificuldades em interpretar os passos efetuados. Esta atitude verifica-se porque os alunos sentem pouca necessidade de apresentar justificações das suas conjeturas e muito menos de apresentar provas de natureza mais formal (Fonseca, 2000), revelando fragilidade a nível de escrita, argumentação e rigor na linguagem usada. Oralmente, os alunos revelaram dificuldade em exprimir-se, em justificar as suas propostas de resolução, ficando à espera da resolução de outros alunos e da professora, provocando um desfasamento relativamente ao ritmo de aprendizagem estimulando desinteresse por parte de alguns alunos. Os mesmos referem como dificuldade no estudo da trigonometria, a aplicação de fórmulas e a sua interpretação em cotexto real. No uso do GeoGebra referem ter mais facilidade em determinar as amplitudes dos ângulos e calcular distâncias, porém, dado um enunciado de contexto real os alunos revelaram dificuldade na interpretação e consequentemente tiveram dificuldade em efetuar a sua construção geométrica em GeoGebra. Esta realidade pode também dever-se ao facto da pouca prática deste recurso nas aulas de Matemática.

No final da intervenção os alunos foram questionados relativamente ao contributo do GeoGebra nas atividades realizadas, de forma a superar as dificuldades. A maioria dos alunos respondeu que o GeoGebra facilitou a aprendizagem, atenuando as dificuldades, na medida em que puderam construir figuras, simular ângulos, arrastar os objetos construídos pelo ecrã do computador, explorar e perceber regularidades. Estas atividades, para além de proporcionar momentos de discussão, serviram para consolidar, estabelecer conceitos e relações trigonométricas, determinar amplitudes de ângulos e comprimentos que analiticamente era mais difícil. Como advoga o NCTM (2007), "ao trabalhar com as tecnologias, os alunos poderão mostrar as suas perceções sobre a matemática, dificilmente observáveis de outra forma" (p. 28). Tendo em atenção as dificuldades referidas pelos alunos, o professor deve desenvolver atividades que incidam no desenvolvimento da capacidade de comunicação e de justificação.

4.1.3. Quais as perspetivas dos alunos sobre a utilização do GeoGebra na aprendizagem de trigonometria?

O uso do GeoGebra pode auxiliar na resolução de problemas de trigonometria, sobretudo em atividades investigativas, de forma que os alunos possam interagir com as figuras construídas. Em particular nas aulas de Matemática, este *software* facilita a formulação e a prova de conjeturas permitindo a visualização e a justificação das suas construções numa tentativa e erro durante a prova.

Os *softwares* de Geometria Dinâmica são ferramentas que motivam o aluno a realizar atividades exploratórias e investigativas, facilitando o interesse pela construção dos seus conhecimentos. Ao longo da intervenção pedagógica, os alunos apresentavam, no final de cada aula, as suas apreciações sobre a estratégia delineada. Dessas observações emerge a importância que a maior parte dos alunos dão às construções geométricas na interpretação das atividades propostas, considerando produtivo e motivador trabalhar no GeoGebra. Após a intervenção pedagógica, independentemente do desempenho e da produtividade à disciplina de Matemática, os alunos referiram ser mais fácil aprender os conceitos trigonométricos através do GeoGebra porque podem redimensionar referindo que as construções geométricas foram importante para ajudar e comparar ângulos, determinar distâncias, estabelecer relações trigonométricas, não sendo necessário efetuar cálculos no papel. Para além de os alunos apresentarem uma ideia favorável sobre a utilização do GeoGebra no ensino e na aprendizagem de Trigonometria, também compreenderam o seu interesse e aplicabilidade a situações do quotidiano, tal como indica a afirmação de um aluno: "sem o GeoGebra não conseguíamos determinar tão rápido e eficaz o ângulo formado pela torre de Pisa com a vertical". Esta afirmação reflete a preocupação do aluno em obter outras estratégias para a resolução da tarefa. No final da estratégia de ensino os alunos foram questionados relativamente ao contributo do GeoGebra para perceber de que forma a exploração do GeoGebra pode superar as dificuldades. Alguns alunos referiram que o recurso usado, facilitou a superação de algumas dificuldades uma vez que puderam praticar, construir e explorar. Ao longo das aulas constatei que os alunos tiveram um papel mais activo do que nas aulas normais, eram mais autónomos e tinham de trabalhar mais sozinhos o que também contribuiu para que muitos se sentissem desorientados e para alguma irrequietude, contribuindo ainda para que as aulas se tornassem mais barulhentas.

4.2. Limitações e Recomendações

Envolver alunos desmotivados ou com dificuldades de aprendizagem é uma tarefa que requer tempo. Nem todas as metodologias se adaptam a todos os alunos ao mesmo tempo. Essa foi uma das principais dificuldades sentidas na prática pedagógica. A construção de tarefas adequadas que servissem ao mesmo tempo os objetivos da aula e os objetivos do estudo foi outro dos problemas que senti, principalmente em encontrar e adaptar tarefas investigativas. Como afirmam Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira (1999), "é um trabalho criativo para o qual não há receitas" (p. 100). Também, importa salientar o contributo da utilização de materiais tecnológicos ou manipuláveis no envolvimento dos alunos nas atividades de aprendizagem com recurso aos diferentes tipos de tarefas, como refere o NCTM (2007): "o envolvimento dos alunos com ideias matemáticas abstratas, incluindo as suas próprias, pode ser fomentado através da utilização da tecnologia" (p. 27).

Este estudo ficou ainda limitado pela falta de empenho da turma, pelo que seria mais produtivo e poderia obter dados mais concretos relativamente ao envolvimento dos alunos nas diferentes tarefas. Este facto prende-se essencialmente com o contexto em que foi desenvolvido. Por um lado, esta intervenção pedagógica teve lugar nas últimas aulas do ano letivo, pelo que os alunos estavam saturados, desmotivados e barulhentos, condicionando o tempo e o normal desempenho do professor ao concretizar as planificações estabelecidas para cada aula. Ponte (1992) salienta que, quando se pretende que os alunos descubram padrões, relações, semelhanças e diferenças, explorem atividades de forma a conseguir chegar a generalizações, levam o seu tempo a resolver condicionando o resultado pretendido para a aula. Por outro lado, considero que as dificuldades mais centradas no professor se poderiam atenuar se tivesse oportunidade de lecionar um maior número de aulas seguindo a estratégia de um ensino baseado na exploração de tarefas com o GeoGebra. Relativamente às características da turma, estas poderiam ser diferentes se os alunos tivessem oportunidade de estar inseridos em projetos desta natureza. A oportunidade de presenciar um ensino menos expositivo e mais centrado em atividades exploratórias e desenvolvidas num *Software* dinâmico com alguma frequência poderia modificar as perceções dos alunos sobre o que é ensinar e aprender, proporcionando-lhes gerar e explorar vários exemplos geométricos (NCTM, 2007). Da mesma forma, o NCTM (2007) refere que "os alunos deverão chegar ao 9.º ano com compreensão acerca das propriedades e das relações existentes em objetos geométricos básicos" (p. 366).

Para estudos futuros considero pertinente que se valorize o trabalho dos alunos na exploração dos conceitos trigonométricos num *software* dinâmico especifico através da construção de triângulos retângulos recorrendo a tarefas de contexto real. Neste sentido, considero que em cada nível de ensino, fossem implementadas estratégias análogas à desenvolvida neste estudo, e por conseguinte, efetuarem uma aprendizagem mais significativa em qualquer tema da Matemática e não apenas na Trigonometria, como advoga o NCTM (2007): "as ideias geométricas podem revelar-se uteis tanto em outras áreas da matemática, como em contextos adequados" (p. 365).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P. (1988). *Um (bom) problema (não) é (só)... Educação e Matemática, 8, 7-10 e 35.*

Amaral, M. P & Frango, I. (2014). *Um levantamento sobre pesquisas com o uso do software GeoGebra no ensino de funções matemáticas*. Acedido em 11 de março, 2014, de http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2014v9n1p90.

Antunes, A. M. F. & González, R. L. (sa). *Análise do domínio de Conceitos Trigonométricos: Estudo exploratório realizado com alunos do ensino básico ao ensino superior de escolas de Beja.* Acedido em 11 de Abril de 2015, de http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/FigueiredoLuengo02.pdf.

Araújo, W. A. & Gomes, A. M. F (2011). *GeoGebra como recurso didático no ensino da geometria analítica.*). *In VI Colóquio Internacional – "Educação e Contemporaneidade"*

Associação de Professores de Matemática (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Bispo, R., Ramalho, G., & Henriques, N. (2008). Tarefas matemáticas e desenvolvimento do conhecimento matemático no 5.º ano de escolaridade. *Análise Psicológica*, 26 (1), 3-14.

Bittencourt, A. O. (2012). *O Ensino da Trigonometria no ciclo trigonométrico, por meio do software GeoGebra*. Pró-reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa e Extensão área de Ciências Tecnológicas.

Boavida, A. M. R. (2005). *A argumentação em Matemática Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Borba, M. C. & Penteado M. G. (2007). *Informática e educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Brocardo, J. (2002). *As investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Canavarro, A. P., Oliveira, H. & Menezes, L. (2008). *Práticas de Ensino Exploratório da Matemática:* Universidade de Évora & Unidade de Investigação do IE da Universidade de Lisboa.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.

Canavarro, A. P., Machado, S. & Santos, L. (2006). Orientações curriculares atuais para a Matemática em Portugal. In *Atas do XV EIEM*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Christiansen, B. & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel. [versão traduzida em português] Acedido em 6 de novembro, 2014, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/textos/christiansen-walther86.pdf.

Cunha, M. C., Martins, P. M. & Viseu, F. (2014). A Formulação de Problemas na Aprendizagem de Derivada de uma Função. In *ProfMat2014*. Braga: Associação de Professores de Matemática.

Dias, A. E. R. (2013). *A natureza das tarefas Matemáticas e o envolvimento dos alunos nas atividades da sala de aula: um estudo com alunos do 11º ano no tema derivada de uma função*. Relatório de Estágio, Universidade do Minho.

Dias, E., Viseu, F., Cunha, M. C., & Martins, P. M. (2013). A natureza das tarefas e o envolvimento dos alunos nas atividades da aula de Matemática. In B. D. Silva, L. S. Almeida, A. Barca, M. Peralbo, A. Franco, & R. Monginho (Orgs.), *Atas do XII Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia* (pp. 4624 - 4639). Braga: Centro de Investigação em Educação, Instituto de Educação, Universidade do Minho.

Domingos, A. & Santos, F.L. (2014). A complexidade do pensamento matemático e a qualidade das aprendizagens: um modelo de análise à luz da teoria da atividade. In *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 125–140). Braga: Associação de Professores de Matemática.

Engestrom, Y. (2001). Expansive learning at work: toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14 (1), 133 – 156.

Fernandes, A. C. & Viseu, F. (2011). Os ambientes de Geometria dinâmica no desenvolvimento da capacidade de argumentação de alunos de 9.º ano na aprendizagem da Geometria. In *Actas do ProfMat2011*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Fernandes, J. A., Alves, M. P., Machado, E. A., Correia, P. F., & Rosário, M. A. (2009). Ensino e avaliação das aprendizagens em Estatística. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho, F. Viseu & P. F. Correia (Orgs.), *Atas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 52-71). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, CD-ROM.

Fernandes, J. A., Carvalho, C., & Ribeiro, S. A. (2007). Caracterização e implementação de tarefas estatísticas: um exemplo no 7°ano de escolaridade. *Revista Zetetiké*, 15(28), 27-61.

Ferreira, E. (2005). *Ensino aprendizagem de Geometria em ambientes Geométricos dinâmicos:* O tema de Geometria do Plano no 9° ano de escolaridade. (Dissertação de Mestrado em Educação).

Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula*. 209f. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Gill, A. (1999). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. São Paulo: Atlas.

Hierbert, J. & Wearne, D. (1993). Instruction tasks, classroom discourse, and students' learning in second-grade arithmetic. *American Educational Research Journal*, 30, 393-425

Junqueira, M. (1996). Exploração de construções geométricas em ambientes computacionais dinâmicos. *Quadrante*, 5 (1), 61-108.

Leite, J. L. (2011). *Uma proposta de ação didática em Trigonometria baseada no software GeoGebra.* (Tese de Licenciatura, Universidade Aberta do Brasil).

Leikin, R. & Winicki-Landman, G. (2000). On Equivalent and Non-Equivalent Definitions:Part 1. *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 17-21.

Leontiev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Acedido 22 de março, de 2014, de https://www.marxists.org/archive/leontev/works/1978/index.htm

Libâneo, J.C. (2004). A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a Teoria Histórico-cultural da Atividade e a contribuição de Vasili Davydov. *Revista Brasileira de Educação*, 27, 5 – 208.

Longarezi, A. M, Pedro, L. G. & Perini, J. F. (2011). Teoria da Atividade e Formação de Professores: Algumas Aproximações. In *Ensino Em Re-Vista, v.18, n.2, 389-400*.

Lopes, M. M (2011). *Contribuições do software geogebra no ensino e aprendizagem de Trigonometria*. Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN Brasil

Lopes, M. M. & Andrade, J. A. C. (2010). Potencialidades do *Software* GeoGebra na sala de aula de Matemática: Um exemplo com ensino e aprendizagem de trigonometria. In *X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade*.

Lopes, M. M. (sa).Potencialidades do Software GeoGebra no Ensino e Aprendizagem de Trigonometria. In *III Encontro Regional em educação Matemática*.

Lopes, S. E. & Kato, L. A. (sa). *A Leitura e a Interpretação de Problemas de Matemática no Ensino Fundamental: Algumas Estratégias de Apoio*. Acedido em 1 de outubro, 2015, de http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2212-8.pdf.

Maia, J. & Faria, D. S. A (2013). O Ensino de Matemática na Educação Profissional: A Relação entre Funções Trigonométricas e o *Software* GeoGebra. In *Anais do II Colóquio Nacional - A Produção do Conhecimento em Educação Profissional*. Natal: IFRN.

Martins, A. (2011). *A Observação no estágio pedagógico dos professores de educação Física*. (Relatório de Estágio, Universidade Lusófona de Lisboa).

Martins, C., Maia, E., Menino, H., Rocha, I. & Pires, M. V. (2002). O trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da Matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 59 – 81). Coimbra: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Martins, M.E.G. & Ponte, J.P. (2011). Organização e Tratamento de Dados. Lisboa: Ministério da Educação: DGIDC. Educação.

Matos, J. M. & Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Marx, R. W. & Walsh, J. (1988). Learning from academic tasks. *Elementary School Journal*, 88, 207-219.

Mesquita, M. S. B. V. (2013). *A interpretação de enunciados matemáticos e a resolução de Problemas*. (Tese de Mestrado, Instituto Politécnico de Setúbal).

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação - Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

National Council of Teachers of Mathematics (1991).*Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

National Council of Teachers of Mathematics (2007)*. Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Nunes, P. & Varandas, J. M. (2014). *Atividades de Investigação: Uma experiência no 10º ano.* Acedido em 25 de junho, 2015, de http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto17.PDF.

Oliveira, H. (1998). *Atividades de investigação na aula de Matemática: Aspectos da prática do professor*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Oliveira, H. M., Segurado, M. I. & Ponte, J. P. (1996). Explorar, Investigar e Discutir na Aula de Matemática. In *Actas do ProfMat96* (pp. 207-213). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Oliveira, H. M., Segurado, M. I. & Ponte, J. P. (1998). Tarefas de investigação em Matemática: Histórias da Sala de Aula. In *Actas do VI Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 107-125). Portalegre: SPCE-SEM.

Oliveira, H., Segurado, I., Ponte, J. & Cunha, M. (1999). Investigações na sala de aula: Um projeto Colaborativo. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações Matemáticas na aula e no currículo* (pp. 121-132). Lisboa: Projecto MPT e Associação de Professores de Matemática.

Oliveira, H. S. (2012). *O Ensino de Trigonometria*: *Uma Investigação com Estudantes do curso de Pós-Graduação no Ensino da Matemática*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Pereira, C., S. & Rêgo, R.M. (2011). Aprendizagem em trigonometria – contribuições da teoria da aprendizagem significativa. In *XIII Conferência Interamericana de Educación Matemática*.

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. P. (1991). Ciências da Educação, mudança educacional, formação de professores e as novas tecnologias. In A. Nóvoa et al. (Eds.), *Ciências da Educação e Mudança*. Porto: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ponte, J. P. (1992). Conceções dos professores de Matemática e processos de formação, *Educação Matemática*: *Temas de Investigação* (pp. 185 – 239). Lisboa.

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. In Educação matemática: Temas de investigação (pp. 185 - 239). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J.P., Boavida, A., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didática da matemática*. Lisboa: DES do Ministério da Educação.

Ponte, J. P., Matos, J. M. & Abrantes, P. (1998). *Investigação em Educação Matemática: implicações curriculares*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P, Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H. & Varandas, J. M. (1999). Investigando as Aulas de Investigações Matemáticas. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 133-151). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante,13* (2), 51-74.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H. & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.

Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (2000). Tecnologias de Informação e Comunicação na formação de professores: que desafios? *Iberoamericana de Educación*, 24, 63-90.

Ponte, J. P. (2003). Investigação sobre investigações Matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, 2, 93-169.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11 – 34). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2008). A investigação em educação Matemática em Portugal realizações e perspectivas. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín & L. B. Nieto (Eds.), *Investigación en educación matemática* XII (pp. 55-78). Badajoz: SEIEM.

Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2009). O novo programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança. *Educação e Matemática*, 105, 1-6.

Ponte, J. P., Quaresma, M. & Branco, N. (2011). Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 65 – 86.

Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2011). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante*, 20 (1), 53-81.

Ponte, J. P., Quaresma, M. & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática*, *1*, 65-86.

Ponte, J.P. (2014). *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática.* Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Preussler, R., & Grando, N. I. (2013). (Re) Pensar a apropriação dos significados dos conceitos científicos com uso de software de matemática. *Cocar*, 7 (14), 53-65.

Quaresma, M., Ponte, J., Baptista, M. & Pereira, J. (2014). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional. In M. H. Martinho, Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.), *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 311 –325). Braga: Associação de

Professores de Matemática.

Quintas, S., & Oliveira, H. & Ferreira, R. (2009). O Conhecimento Didático em Estatística: Um Estudo Exploratório Com Professores de Matemática Do Ensino Secundário. In J. A. Fernandes, M. H. Marinho, F. Viseu & P. F. Correia (Orgs.), *Atas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 1-13). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Saraiva, M. J. & Ponte, J. P. (2003). O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Quadrante* , XII(2), 25-51

Segurado, I. & Ponte, J. P. (1998). Concepções sobre a Matemática e trabalho investigativo. *Quadrante*, 7 (2), 5-40.

Segurado, I. (2002). O que acontece quando os alunos realizam investigações matemáticas? In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 57-74). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Silver, E. A. & Stein, M. K. (1996). The QUASAR project: The 'revolution of the possible' in mathematics instructional reform in urban middle schools. *Urban Education*, 30, 476-521.

Stein, M.K. & Smith, M.S. (1998). *Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática.* Tradução do artigo publicado em Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4), 268-275.

Sousa, P. J. F (2013). *Ensino e Aprendizagem das Funções Racionais usando a calculadora gráfica: Um estudo realizado com alunos de Matemática A do 11.º ano de escolaridade*. Relatório de Estágio, Universidade do Minho.

Vale, I. & Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo. *Educação e Matemática*, 85, 14-22.

Valente, J. A. (1993). Diferentes Usos do Computador na Educação. In J. A. Valente (Org.), *Computadores e Conhecimento: repensando a educação* (pp. 1-23). Campinas, SP: Gráfica da UNICAMP.

Varandas, J.M. & Nunes, P. (1998). Actividades de Investigação: Uma Experiência no 10º Ano. In *Actas do ProfMat98* (pp. 175-178), Guimarães: Associação de Professores de Matemática.

Viseu, F. (2008). *A formação do professor de Matemática, apoiada por um dispositivo de interacção virtual no estágio pedagógico*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Viseu, F., Fernandes, A. & Gonçalves, M. I. (2009). O manual escolar na prática docente do professor de Matemática. In B. D. Silva, L. S. Almeida, A. Barca & M. Peralbo (Orgs.), *Actas* *do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia* (pp. 3178-3190). Braga: Universidade do Minho.

Viseu, F., Nogueira, D. & Santos, E. (2009). Como alunos do 9.º ano aprendem, com recurso à tecnologia, o tema ângulos numa circunferência. In *Actas do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia*. Braga: Universidade do Minho, 2009 ISBN- 978-972-8746-71-1.

Viseu, F. & Ponte, J. P. (2012). A formação do professor de Matemática, apoiada pelas TIC, no seu estágio pedagógico. *Bolema*, 26 (42A), 329-357.

Yeo, J. (2007). *Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment*. Singapore: National Institute of Education, Nanyang Technological University.

ANEXOS

ANEXO 1

(Questionário entregue aos alunos antes da intervenção pedagógica)

Questionário inicial

A tua opinião é importante para o estudo a realizar relativamente à aprendizagem da unidade de Trigonometria com recurso ao GeoGebra. Neste momento e porque já estás mais familiarizado com o software dinâmico GeoGebra, pretendo que me respondas às seguintes questões **justificando as tuas opções**:

Nome: ______________________________ . Idade:__________Sexo: □ Masculino □ Feminino

1. Em anos anteriores, os teus professores de Matemática utilizaram alguns *softwares* como o GeoGebra para te facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos?
____
____

2. A utilização do GeoGebra contribui para entenderes melhor o conteúdo de algumas tarefas?
____
____

3. Preferes que a exploração dos conceitos seja feita no quadro antes ou depois de utilizares o GeoGebra?
____
____

4. Gostarias que as aulas com GeoGebra fossem com mais frequência? Porquê?
____
____

5. Uma vez que o GeoGebra é gratuito, já alguma vez em casa resolveste alguma tarefa desenvolvida nas aulas?
____
____

6. O que dirias a um colega teu que nunca tenha usado o GeoGebra sobre o que se pode fazer com este *software*?
____
____

ANEXO 2

Questionário final

É importante a tua opinião para o estudo que estou a realizar relativamente à aprendizagem do tópico da trigonometria no triângulo retângulo com recurso ao GeoGebra. Para obter resultados válidos é da maior importância que respondas de forma ponderada a todas as questões que te são apresentadas a seguir. Comprometo-me a utilizar os dados apenas para efeitos da investigação e de forma anónima.

Idade: _______ anos.

Sexo: ☐ Masculino ☐ Feminino

1. Marca com **X** o teu grau de concordância a cada uma das afirmações utilizando a seguinte escala:

DT: Discordo Totalmente; **D**: Discordo; **I**: Indiferente; **CT**: Concordo Totalmente;**C**: Concordo.

Afirmações	**DT**	**D**	**I**	**CT**	**C**
O tema Trigonometria foi o tema que mais gostei de estudar neste ano letivo.					
O estudo de Trigonometria despertou o meu gosto de aprender Matemática.					
O estudo de Trigonometria permitiu-me reconhecer o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do dia-a-dia.					
Os tópicos deTrigonometria foram mais difíceis de compreender do que outros tópicos matemáticos que estudei este ano letivo.					
O trabalho em grupo favoreceu mais a minha aprendizagem de tópicos de Trigonometria do que o trabalho individual.					
No estudo de Trigonometria intervim na dinamização das atividades da aula.					
No estudo de Trigonometria manifestei responsabilidade pelo desenvolvimento das atividades das aulas					
O que aprendi sobreTrigonometria permite-me resolver problemas do dia-a-dia.					
No estudo de Trigonometria tive a oportunidade de estabelecer as razões trigonométricas (seno, cosseno, tangente) com a ajuda do GeoGebra.					
Tive a oportunidade de aplicar as razões trigonométricas na resolução de tarefas com a ajuda do GeoGebra.					
Descobrir por mim próprio os conteúdos matemáticos é mais motivante para a minha aprendizagem do que ser o professor a apresentar esses conteúdos.					
Aprendo mais quando o professor expõe os conteúdos do que ser eu a descobri-los.					
O estudo de tópicos de trigonometria com recurso ao GeoGebra despertou o meu interesse pela Matemática.					
A utilização do GeoGebra nas atividades das aulas fez-me pensar mais do que numa aula em que o professor expõe a matéria.					
As aulas em que utilizei o GeoGebraforam as que participei com mais empenho.					
O GeoGebra permitiu-me experimentar mais exemplos, conseguir distâncias e amplitudes de ângulos de uma maneira mais fácil do que em lápis e papel.					
Gostaria de aprender outros tópicos matemáticos com recurso ao GeoGebra.					
Aprendi melhor as razões trigonométricas quando combinei o papel e lápis com o GeoGebra do que quando trabalhei com papel e lápis.					
Tive a oportunidade de aplicar as razões trigonométricas de um ângulo agudo na resolução de tarefas sem a ajuda do GeoGebra.					

Tive a oportunidade de provar relações/resultados trigonométricas.					
Provar resultados matemáticos obrigou-me a pensar mais do que resolver exercícios e problemas.					

2. Que vantagens teve o GeoGebra na tua aprendizagem de tópicos deTrigonometria?

____

____

____

____

3. Que desvantagens teve o GeoGebra na tua aprendizagem de tópicos de Trigonometria?

____

____

____

____

4. Que dificuldades sentiste na tua aprendizagem de tópicos deTrigonometria?

____

____

____

____

5. Em que medida o GeoGebra contribuiu para a tua aprendizagem de tópicos de Trigonometria estudados?

____

____

____

____

Obrigada pela tua colaboração

ANEXO 3

Unidade: Trigonometria

Tópico

Relações entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo. Conhecimentos prévios: Determinação das razões trigonométricas de um ângulo agudo de um triângulo retângulo.

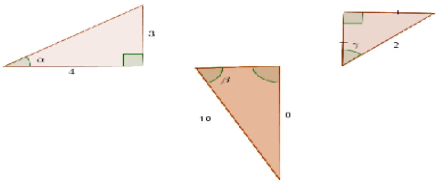
Objetivos

Estabelecer as relações entre as razões trigonométricas de um ângulo agudo($\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$).

Aplicar as relações entre as razões trigonométricas de um ângulo agudo na resolução de problemas.

Correção do trabalho de casa

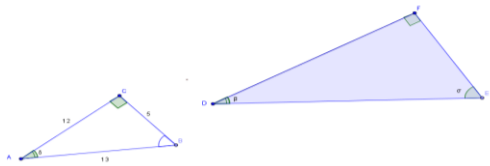
1. Observa as figuras.



Atendendo às medidas indicadas, determina os valores de:

a) senα cosα e tgα b) senβ cosβ e tgβ c) senγ cosγ e tgγ

2. Na figura estão representados os triângulos ABC e DEF. Sabe-se que DFE ≡ ACB e EDF ≡ BAC



2.1 Mostra que os triângulos são semelhantes.

2.2 Atendendo aos dados da figura, determina:

a) senβ cosβ e tgβ b) senα, cosα e tgα

Atividade Motivacional

A Maria e o João ao estudarem trigonometria constataram que existem relações entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo. A Maria considerou que a $\tan\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$. O João não concordou, dizendo que a $\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$. Na dúvida, os dois alunos procuraram averiguar que relações podem estabelecer entre as razões trigonométricas de um ângulo agudo. Que relações são essas?

Exploração

1. Determinação das razões trigonométricas do ângulo de 30° do seguinte triângulo retângulo:

Plano de Lição

Comentários

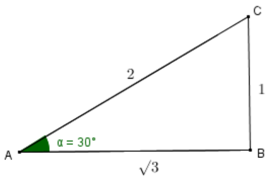
Unidade: Trigonometria no triângulo retângulo

Solicita-se aos alunos que trabalhem em pares. É fornecida uma cópia da ficha de trabalho. Seguidamente é explicado aos alunos o que se pretende da ficha.

Correção do trabalho de casa, pretende-se que os alunos provem a semelhança entre triângulos assim como determinar as razões trigonométricas de um ângulo, β α e γ

Pretende-se com esta tarefa reforçar razões trigonométricas.

O objetivo é estabelecer as relações trigonométricas entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo, procurando que sejam os alunos a explorar as tarefas propostas e a estabelecer tais relações. Com esta tarefa, pretendo que os alunos simulem, analisem e interpretem os resultados das razões trigonométricas de um determinado ângulo agudo α, com base num dado triângulo retângulo, assim como, estabelecer as relações entre essas razões trigonométricas.



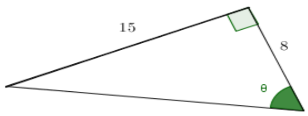
2. Solicitar a turma para completar a seguinte tabela:

A	Senα	cosα	Tgα	$\frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$	$sen^2\alpha + cos^2\alpha$
28°					
30°					
31°					
46°					

3. Provar que $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$ e que $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.
4. Mostra que 1+ 2senxcosx = $(\text{senx} + \text{cosx})^2$

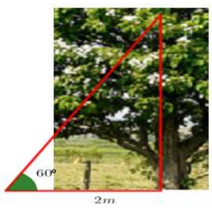
Prática

5. De um ângulo agudo, sabe-se que o senα= cosα= $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   Determina o valor da tangente de α
6. Considera o triângulo retângulo da figura. Determina o valor exato de 2senθ-tgθ



Trabalho de casa

A uma determinada hora do dia, uma árvore projetada no solo uma sombra de 2 metros de comprimento. Sabendo que o ângulo formado pelos raios solares com o plano do horizonte é 60°, determina a altura aproximada da árvore.



Tarefa Adicional

O André acha que é possível existir um ângulo agudo cujo seno seja $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e cujo cosseno seja 0,6. O André terá razão? Justifica.

Recursos

Cópias da atividade motivacional, manual escolar, caderno diário, quadro, canetas videoprojetor e site da turma.http://profmnoval.wix.com/9c#!

Em particular, determinar ângulo de 30° de um triângulo retângulo.

Os alunos geram os valores através do GeoGebra para o preenchimento da tabela, calculando as razões trigonométricas. Nesta tarefa pretende-se que os alunos analisem os resultados de forma a interpretar as relações entre as razões trigonométricas calculadas.

Os alunos devem mostrar como chegar à igualdade, através da aplicação das relações trigonométricas.

Neste item, pretende-se que os alunos generalizem essas razões trigonométricas. Os alunos devem provar as relações, partindo das razões trigonométricas que já conhecem, $\tan\square = \frac{sen\square}{cos\square}$e $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

Tarefa retirada do manual.

Pretende-se que os alunos reforcem as relações trigonométricas a partir do valor das razões trigonométricas.

Na aula seguinte será corrigido o trabalho de casa, enfatizando-se as possíveis dificuldades dos alunos.

Com esta tarefa pretende-se que os alunos adaptem as razões trigonométricas à realidade, altura da árvore.

Esta tarefa, tem como objetivo reforçar as relações trigonométricas, em particular a fórmula fundamental da trigonometria, $sen2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

Tarefa retirada do caderno de atividades.

ANEXO 4

Unidade: Trigonometria no triângulo retângulo — Plano de Lição

Tópico

Tabelas e calculadorana determinação de razões trigonométricas de amplitudes de ângulos agudos.

Conhecimentos prévios

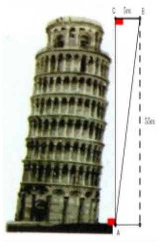
Identificação das razões trigonométricas de um dado ângulo agudo.

Objetivos

Utilizar tabelas trigonométricas e a calculadora na determinaçãodas razões trigonométricas de ângulos agudos.

Atividade Motivacional

Após a construção da Torre de Pisa concluiu-se que a parte mais alta da torre se separava da vertical cerca de 90 cm. Atualmente, esta separação é de 5m e a altura da torre é de 55m.Qual o ângulo formado pela torre com a vertical.

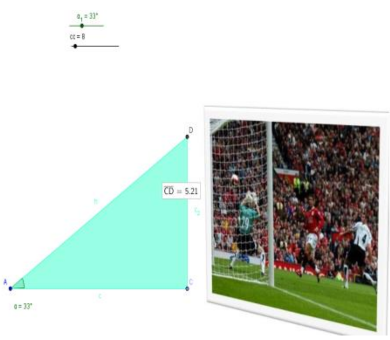


Exploração

1. Para desenvolver esta tarefa, chamei um aluno ao computador para, através do diálogo alunos e professor com recurso ao GeoGebra,estabelecer o processo que permite determinar a amplitude de um ângulo a partir do conhecimento do valor correspondente a uma das razões trigonométricas.
2. Seguidamente, é explicado à turma como calcular os valores aproximados das razões trigonométricas, assim como a medida da amplitude de ângulos, através da leitura dos valores de uma tabela ou através da máquina calculadora.
3. Os alunos, na sua ficha de trabalho, devem agora calcular analiticamente o que foi feito através do GeoGebra, que consiste calcular a amplitude do ângulo pretendido.

Prática

1. O Paulo e o Rui foram ver um jogo de futebol. Durante o jogo tiveram uma discussão porque o Paulo afirmava que o golo foi injustamente anulado e o Rui afirmava que a bola não entrou e por isso não podia ser golo. No fim do jogo, quando regressavam a casa, o Paulo continuando afirmar que deveria ser golo foram ver gravações que tinham feito com os seus telemóveis. Após alguns minutos, como não concordavam um com o outro, resolveram esperar e discutir o assunto no dia seguinte com mais colegas, pois estes poderiam ter tirado fotografias de mais longe ou mais perto, de outros ângulos. Como continuavam com a mesma discussão, o Paulo colocou a seguinte questão para esclarecer o assunto: nós estamos com estas incertezas porque estávamos longe da baliza, já pensaram se tirássemos a fotografia de uma distância menor, poderíamos ter mais certezas?



Comentários

No início da aula será feita a correção do trabalho de casa.

É fornecida uma cópia da ficha de trabalho aos alunos.

Com esta tarefa pretende-se que surjam momentos de discussão que ajudem os alunos a esclarecer as relações e as razões trigonométricas de um ângulo agudo, assim como a utilidade do *Software* GeoGebra.

Após a verificação da medida da amplitude do ângulo desconhecido α no GeoGebra, pretende-se validar analiticamente o valor da medida da amplitude do ângulo, usando a tabela ou máquina calcular.

Nesta tarefa, o aluno deve descobrir qual a amplitude do ângulo, que lhe permite uma melhor visualização da entrada da bola na baliza. Após essa verificação, os alunos devem analiticamente calcular a que distância a pessoa deve colocar-se para tirar a fotografia, de forma a esclarecer as possíveis incertezas.

Nesta tarefa pretende-se que o aluno em frente ao computador no GeoGebra, perceba que, alterando certos ângulos de visão, poderá ajudar de uma forma mais precisa e rápida

2. Utilizando a calculadora ou a tabela trigonométrica determina, com aproximação as duas centésimas decimais, sem 74°, cos13° e tg52°.

3. Determina β sabendo que:

a) $\text{sen}\beta = \frac{1}{2}$

b) $\cos\beta = 0{,}7071$

c) $\text{tg}\beta = \sqrt{3}$

d) $\text{sen}\beta = 0{,}9945$

Trabalho de Casa

Existirá algum ângulo β de modo que sen $\beta = \frac{3}{4}$ e $\cos\beta = \frac{1}{4}$

Tarefa Adicional

Pova que $\cos\alpha = \text{sen}\beta$

Recursos

Cópias da ficha de trabalho, caderno diário, quadro,canetas,videoprojetor e site da turma.

algumas incertezas, que resolvendo analiticamente não lhe será possível.

Com estas tarefas, pretende-se reforçar a prática de cálculo de valores e amplitudes através da tabela ou máquina de calcular.

Na aula seguinte será corrigido o trabalho de casa, enfatizando-se as possíveis dificuldades dos alunos.

Atividade retirada do manual escolar da página 161, exercício 21.

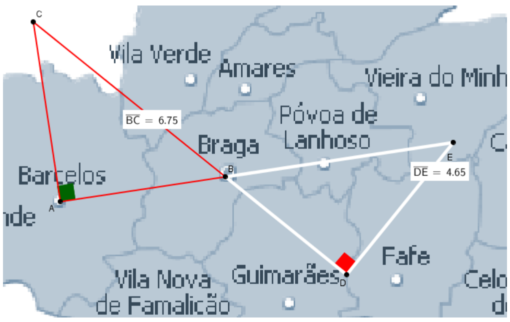
ANEXO 5

Unidade: Trigonometria no triângulo retângulo

Tópico
A trigonometria na resolução dos problemas.

Objetivos
Resolver problemas utilizando razões trigonométricas em contextos variados.

Tarefa1: Distâncias
Um grupo de 4 alunos de origem romena está a frequentar o 1.º ano de licenciatura em matemática em Braga. Estes alunos foram reencaminhados para duas famílias que se prontificaram em dar-lhes alojamento. Uma dessas famílias vive em **Guimarães** e recebeu 2 alunos e a outra vive em **Barcelos** e também recebeu 2 alunos. Estes alunos, como têm bolsa de estudo, é lhe exigido um documento para provar a distância percorrida do alojamento à universidade. Assim, e aplicando as razões trigonométricas, pretende-se:



c) Determinar a distância percorrida entre o alojamento e a universidade para cada um dos grupos.
d) Qual é o grupo de alunos que se encontra mais perto da universidade?

Exploração
4. Para desenvolver esta tarefa, cada grupo vai explorar e determinar as distâncias pretendidas. Os alunos devem descobrir a amplitude dos ângulos verticalmente opostos e a partir daí calcular as respetivas razões trigonométricas.
5. É dado alguns minutos para os alunos pensarem na tarefa. Quando a maioria dos grupos tiver terminado, os alunos desses grupos mostram como desenvolveram a tarefa para que assim surjam momentos de diálogo.
6. Seguidamente é feita uma síntese comparando os resultados obtidos.

Tarefa 2: Ângulos
Os 4 alunos ao fim de semana estão sempre mais disponíveis, por isso prontos a ajudar. Uma das famílias (casa de Barcelos), pensou em construir no terraço da sua casa uma sala de convívio. Para isso, houve necessidade de construir uma rampa para assim transportar o material de construção. Porém, este casal tinha de, antecipadamente, enviar um protótipo das medidas estabelecidas nessa construção. De imediato, os alunos se prontificaram a fazê-lo. Pretende-se através do GeoGebra determinar:

a) o comprimento aproximado da rampa, com uma inclinação entre 35°, 40° sabendo que o terraço está a 4,20m do solo.

Exploração
1. Para desenvolver esta tarefa, os alunos deverão construir o triângulo para determinar o valor aproximado da inclinação da rampa (como refere o

Plano de Lição

Comentários

Os alunos nesta aula vão trabalhar em grupo. Cada grupo, possui um computador e é constituído por 5 alunos. Esta Tarefa vai ser explorada no *software* GeoGebra. É fornecida uma cópia da ficha de trabalho aos alunos a cada grupo.

No início da aula será feita a correção do trabalho de casa, proposto na aula anterior. Encontra-se em anexo a este plano de aula.

Com esta tarefa pretende-se que os alunos compreendam como aplicar as razões trigonométricas em problemas reais, aplicando o GeoGebra.

Após o cálculo das distâncias pretendidas no GeoGebra, pretende-se validar analiticamente as distâncias assim como a medida da amplitude dos ângulos.

Nesta tarefa, o aluno deve descobrir a inclinação da rampa, através do GeoGebra. Pretende-se que os alunos percebam as vantagens e desvantagens de usar um software dinâmico na resolução das tarefas.

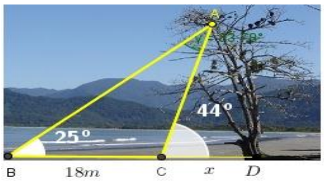
enunciado), sendo já conhecido a amplitude do ângulo.

2. Terminada a tarefa, o aluno de um grupo vai mostrar o trabalho explorado de forma a incentivar o diálogo com os restantes alunos.

Com estas tarefas, pretende-se reforçar as razões e as relações trigonométricas em contextos reais.

Tarefa 3: Ângulos (Sem GeoGebra)

O João pretende determinar a altura de uma árvore. Para tal, efetuou algumas medições que registou no esquema seguinte. Determine a altura da árvore. (Apresenta o resultado arredondado às décimas)



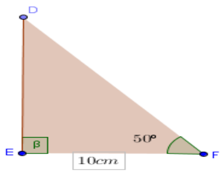
Tarefa 4: (Sem GeoGebra)

O André acha que é possível existir um ângulo agudo cujo seno seja $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e cujo coseno seja 0,6. O André terá razão?

Com estas tarefas desenvolvidas sem GeoGebra, para além de reforçar o conteúdo lecionado, pretende-se que o aluno perceba melhor as vantagens do GeoGebra.

Trabalho de Casa

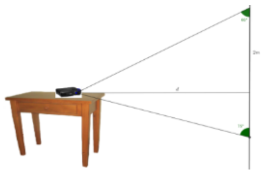
Considera o triângulo retângulo DEF. Utilizando a informação fornecida pela tabela, determina, com aproximação às centésimas, o perímetro do triângulo.



Na aula seguinte será corrigido o trabalho de casa, enfatizando-se as possíveis dificuldades dos alunos.

Tarefa Adicional

1. O professor de Ciências Naturais da Beatriz apresentou à sua turma um documentário sobre as alterações climáticas que têm ocorrido no planeta Terra. O esquema representa a projeção feita pelo professor. Determina a distância d (em metros), a que se encontra o projetor da tela de projeção. Apresenta todos os cálculos que efetuares e indica o resultado aproximado às décimas.



Com esta tarefa, pretende-se que o aluno perceba que para ângulos diferentes também tem visualizações diferentes. Esta tarefa, vem reforçar os conteúdos lecionados em aulas anteriores.

Recursos

Cópias da ficha de trabalho, caderno diário, quadro,canetas,videoprojetor e site da turma.

http://profmnoval.wix.com/9c#!