Universidade do Minho
Instituto de Educação

Florbela de Almeida Correia Soutinho

A compreensão dos problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa por crianças do pré-escolar

setembro de 2015

A compreensão dos problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa por crianças do pré-escolar
Florbela de Almeida Correia Soutinho

UMinho|2015

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Florbela de Almeida Correia Soutinho

A compreensão dos problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa por crianças do pré-escolar

Tese de Doutoramento em Ciências da Educação
Especialidade em Educação Matemática

Trabalho realizado sob a orientação da
Prof. Doutora Ema Paula Botelho da Costa Mamede

setembro de 2015

Agradecimentos

Porque nesta caminhada não estive só, sinto-me profundamente grata:

À minha orientadora, Prof. Doutora Ema Mamede, por todo o acompanhamento, apoio absoluto, confiança e encorajamento, sobretudo nos momentos mais difíceis e de desânimo;

À Prof. Doutora Teresa Sarmento, por ter possibilitado o meu feliz encontro com a Prof. Doutora Ema Mamede;

Aos meus Pais, pelo seu amor incondicional, supremo apoio, força e suporte familiar, são o meu exemplo;

Ao Diogo e à Joana, pela compreensão, porque são sempre eles que ficam com a mãe "a meio tempo", numa presença ausente, quando investo academicamente;

Ao João, que assistiu de perto aos momentos de maior angústia, pela sua compreensão pela minha "ausência";

À minha "mana" Rosa, por toda a ajuda nos momentos mais críticos, ela esteve sempre lá.

Bem-haja!

A compreensão dos problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa por crianças do pré-escolar

RESUMO

Na maioria das teorias, o raciocínio aditivo antecede o raciocínio multiplicativo. Desconhecem-se, no entanto, estudos que comparem a interferência do raciocínio aditivo no raciocínio multiplicativo em crianças do pré-escolar. Durante muito tempo pensou-se que os problemas de estrutura multiplicativa só seriam resolvidos depois de dominados os de estrutura aditiva. Esta investigação pretende compreender a relação entre as duas estruturas de raciocínio em crianças do pré-escolar, tendo como objetivos perceber: 1) como é que elas raciocinam perante problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa; 2) como raciocinam quando lhes são apresentados alternadamente problemas de estrutura aditiva e multiplicativa; 3) se pode ser promovido o desenvolvimento destas estruturas de raciocínio; 4) se existe transferência de conhecimento de uma estrutura de raciocínio para outra; 5) os efeitos de uma intervenção centrada em determinada estrutura de raciocínio.

O Estudo 1 pretende avaliar a compreensão que as crianças de 4, 5 e 6 anos (N=180) têm de problemas de estrutura aditiva e multiplicativa. Seguindo uma metodologia quantitativa, analisa os seus desempenhos, estratégias e argumentos. O Estudo 2 centra-se na promoção do desenvolvimento dos raciocínios aditivo e multiplicativo das crianças de 5 e 6 anos (N=36). Adotando uma metodologia mista, procura perceber: como entendem elas os problemas de estrutura aditiva e multiplicativa quando lhes são apresentados alternadamente, sujeitos portanto ao efeito de contaminação; se existe transferência de conhecimento na resolução destes problemas; quais os efeitos de uma intervenção centrada no desenvolvimento dos raciocínios aditivo e multiplicativo. Pretende, ainda, analisar o raciocínio das crianças durante a intervenção.

Esta investigação sugere: a) que as crianças do pré-escolar resolvem com facilidade alguns problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa, quer sejam apresentados em conjunto, estando sujeitos a contaminação, ou separadamente; b) que recorrem a estratégias corretas e conseguem refletir sobre a sua ação, argumentando as suas opções; c) que não foi demonstrada a transferência de conhecimentos na resolução de problemas de estrutura aditiva para a multiplicativa nem da multiplicativa para a aditiva, sustentando a ideia de que estas duas formas de raciocínio são distintas o suficiente para serem consideradas domínios conceptuais separados. Sugere-se assim que as crianças do pré-escolar não necessitam de dominar a adição e a subtração antes de começarem a construir um raciocínio multiplicativo.

The understanding of additive and multiplicative structure problems of preschool children

ABSTRACT

According to most of the theories, the additive reasoning predates the multiplicative reasoning. However, are not known studies that compare the interference of the additive reasoning in multiplicative reasoning concerning preschool children. For a long time it was thought that the multiplicative structure problems would only be solved after achieving the additive structure problems. This research aims to understand the relationship between the two reasoning structures in preschool children, and particularly: 1) how preschool children reason towards additive and multiplicative structure problems; 2) how they reason when additive and multiplicative problems are presented alternately to them; 3) if the development of these reasoning structures can be promoted; 4) to notice if there is a transfer of knowledge from one reasoning structure to another; 5) the effects of an intervention focused in a particular reasoning structure.

Study 1 aims to evaluate the understanding of children of 4, 5 and 6 years old (N=180) about additive and multiplicative problems. Following a quantitative methodology, it analyzes their performance, strategies and arguments. Study 2 focuses on the promotion of the development of additive and multiplicative reasoning of children of 5 and 6 years old (N=36). Adopting a mixed methodology, it aims to comprehend: how they understand the additive and multiplicative problems when they are presented alternately, thus subjected to a contamination effect; if there is transfer of knowledge to solve additive and multiplicative problems; the effects of an intervention focused on the development of additive and multiplicative reasoning. Also, intends to analyze the reasoning of children during the intervention.

This research suggests: a) that preschool children solve easily some additive and multiplicative problems, whether they are presented to them together, subjected to a contamination effect, or separately; b) they apply correct strategies and manage to reflect on their actions, justifying their options; c) that it was not proved the transfer of knowledge to solve problems from additive to multiplicative structure, nor from multiplicative to additive structures, supporting the idea that these two ways of reasoning are distinct enough to be considered as conceptually separate domains. It’s therefore suggested that preschool children do not need to master addition and subtraction before they start building a multiplicative reasoning.

Índice

Listas de Abreviaturas

C - Controlo

EA – Estrutura Aditiva

EM – Estrutura Multiplicativa

GC – Grupo de Controlo

GEA – Grupo de Estruturas Aditivas

GEM – Grupo de Estruturas Multiplicativas

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Lista de Gráficos

Lista de Transcrições

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO

Introdução

A matemática assume-se como uma ciência essencial e insubstituível para o desenvolvimento cognitivo do indivíduo (Morgado, 1993), com destaque para a sua utilização na resolução dos problemas do dia-a-dia. Reconhecer a resolução de problemas como uma competência transversal e integradora de outras competências remete para a necessidade de refletir sobre a melhor altura para proporcionar às crianças determinadas experiências, assumindo que estas já possuem algumas competências matemáticas antes de iniciarem a instrução formal. É neste contexto que se enquadra a presente investigação, e que procura perceber como raciocinam as crianças do pré-escolar quando resolvem problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa.

Neste capítulo apresentam-se os fundamentos que sustentam a razão desta investigação e clarificam-se conceitos inerentes à problemática. Reflete-se sobre a matemática na educação pré-escolar, o conhecimento informal das crianças do pré-escolar, e o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo à luz da teoria dos campos conceptuais de Vergnaud. Apresenta-se ainda a pertinência do tema em estudo, identifica-se o problema em estudo e as questões de investigação levantadas. Por fim, apresenta-se resumidamente a estrutura desta tese.

1. A Matemática na educação pré-escolar

A Matemática constitui-se como uma forma de pensar, na qual se promovem processos e estratégias úteis (Morgado, 1993) e sabe-se, hoje, que as crianças possuem um conhecimento matemático que começa a ser construído muito antes da escolaridade formal. Importantes investigações têm sido conduzidas por psicólogos cognitivistas (ver Sternberg, 1977, 1990; Gardner, 1991), desenvolvimentistas (ver Vygotsky, 1994, 2007) e educacionais (ver Wittrock, 1992; Kamii, Lewis & Livingston, 1993; Woolfolk, 1995; Kamii & Joseph, 2005), bem como pela comunidade de educadores matemáticos (ver Fischbein, Deri, Nello, & Merino, 1985; Resnick, 1989; Kouba & Franklin, 1993; Nunes & Bryant, 1996), e não obstante as suas diferentes filiações, observa-se um consenso quanto à presença de um conhecimento matemático num nível implícito, e construído por cada criança, que começa muito antes da sua frequência da escola. Há quem defenda, ainda, que alguns dos elementos básicos do conhecimento de quantidades possam estar presente mesmo em crianças de 6 meses (Starkey, Spelke, & Gelman, 1990).

As crianças adquirem as diversas noções matemáticas, num nível básico, desde cedo, e à medida que vão crescendo, vão aprofundando os seus conhecimentos. Desde a infância que todas as crianças encontram pequenos objetos que manipulam, tocam e contam. Todas as crianças veem conjuntos, uns mais numerosos do que outros. As crianças ouvem os adultos a contar, veem os adultos a usar os números nas compras, veem números nos telefones, nas casas, nos autocarros, nas velas de aniversário. Os acontecimentos e fenómenos matemáticos parecem ser universais e estar presentes no mundo físico, de tal forma que mesmo os programas televisivos infantis não são indiferentes a esta realidade, e apresentam-se às crianças incentivando-as à contagem, à descriminação de grandezas, cores, quantidades e outras noções.

As pessoas pensam em termos matemáticos desde a comparação de grandezas, do reconhecimento de quantidade, à identificação de regularidades. Mas este pensamento matemático é operado de maneira informal e intuitiva, e raramente é formalizado fora da escola (Ginsburg & Seo, 1999). Já Piaget e Szeminska (1971) entendiam e definiam a origem da inteligência, incluindo a inteligência matemática, na infância. As crianças constroem as noções matemáticas enquanto se envolvem em atividades de jogo, jogos sensoriomotores, jogos de manipulação, construção simbólica, jogo simbólico e jogos de regras. O jogo favorece o envolvimento das crianças em situações de resolução de problemas e desenvolve o seu pensamento e procedimento matemático de maneira informal (Sarama & Clements, 2009). É assim importante o papel dos adultos, em especial dos docentes da educação pré-escolar, nas atividades que proporcionam às crianças, na atenção que prestam ao modo como as crianças vão construindo a sua relação com a matemática, presente nos jogos nas brincadeiras diárias, as questionam e as incentivam nessa relação. Da qualidade das experiências que lhe são proporcionadas depende o sucesso das aprendizagens futuras.

O National Council of Teachers of Mathematics (2008) considera que as ideias matemáticas que as crianças adquirem na educação pré-escolar constituem a base para todos os estudos matemáticos posteriores, pelo que o desenvolvimento de competências matemáticas nos primeiros anos é fundamental para o sucesso das aprendizagens futuras. A compreensão e os conceitos que as crianças adquirem nesta etapa motivam não só o seu desempenho, mas também a sua atitude face à matemática nos anos subsequentes. O Jardim de Infância constitui-se como um espaço por excelência de criação de oportunidades para desenvolver experiências imprescindíveis ao crescimento matemático. No Jardim de Infância, as crianças constroem e desenvolvem sentimentos sobre esta ciência, e sobre si na relação com esta. Elas vão-se apropriando de noções matemáticas partindo das vivências diárias e vão estruturando o seu pensamento (Silva & NEPE, 1997).

Acredita-se que muitos conceitos matemáticos se desenvolvem antes de a criança iniciar o ensino formal do 1.º ciclo. Elas utilizam noções matemáticas no seu dia-a-dia e são capazes de desenvolver conhecimentos matemáticos bastante complexos, como por exemplo a estimativa por comparação. Nas suas brincadeiras e atividades diárias, as crianças aprendem noções matemáticas: organizam e ordenam quando arrumam os jogos e brinquedos nas respetivas caixas; compreendem os princípios da contagem quando contam as presenças; identificam Regularidades quando repetem rimas, lengalengas e canções; raciocinam quando comparam, fazem construções e procuram solucionar um problema de encaixe; representam quando desenham para registar as suas ideias; usam a visualização espacial quando resolvem puzzles; tratam dados quando analisam o tempo durante o mês. Como tal, o papel do educador é fundamental para o estabelecimento da relação das crianças com a matemática, na resolução de problemas, considerando que as aprendizagens mais significativas resultam das experiências e materiais que levam as crianças a refletir e desenvolver o raciocínio matemático (NCTM, 2008).

Considerada a importância de desenvolver experiências e conceitos matemáticos desde a educação pré-escolar, o NCTM (2008) estabeleceu um conjunto de normas e competências matemáticas que deveriam ser desenvolvidas desde a educação pré-escolar até aos anos seguintes. Desde as normas de conteúdo, que descrevem os conteúdos que os alunos deverão aprender (números e operações, álgebra, geometria, medida, análise de dados e probabilidades), às normas de processo (resolução de problemas, raciocínio e demonstração, comunicação, conexões, representação), que enfatizam a forma como deverão ser adquiridos e utilizados os conteúdos referidos, o NCTM propõe conhecimentos e capacidades matemáticas que os alunos deverão adquirir desde o pré-escolar até ao fim da escolaridade obrigatória.

Também no caso específico de Portugal, o Ministério da Educação publicou documentos de apoio ao desenvolvimento da matemática nos Jardins de Infância, que explicitam e orientam a concretização das Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar, incidindo sobre o desenvolvimento do sentido do número e a organização de dados (Castro & Rodrigues, 2008), e sobre aspetos ligados à geometria e à medida (Mendes & Delgado, 2008). Na base da elaboração desses documentos firma-se a ideia de que o desenvolvimento matemático nos primeiros anos é fundamental para o sucesso de aprendizagens futuras. Em simultâneo, o Ministério da Educação tentou introduzir Metas de Aprendizagem também para a educação pré-escolar, onde era visível a importância da resolução de problemas e o desenvolvimento do raciocínio matemático. Apesar de muito relevante, esse documento não foi homologado e não faz parte dos documentos oficiais orientadores da prática docente na educação pré-escolar. Todavia, os educadores de infância ainda lhe reconhecem valor e continuam a tê-lo como referência particular nos documentos que produzem.

Alsina, Aymerich e Barba (2008) consideram que a matemática do Jardim de Infância não é um "*pre*, ni un *antes de*, ni un *parecido a*", mas antes um ponto de partida para a relação que a criança estabelece com os princípios matemáticos e a irá tornar mais feliz nesta sua relação com a matemática, e com mais capacidades na sua vida quotidiana. Elas aprendem através da exploração do seu mundo. A sua tendência natural é para estabelecer relações com o que as rodeia. Logo, partir do que as crianças sabem e relacionar esse saber matemático com outros conhecimentos, de forma a demonstrar a presença da matemática no quotidiano, permite que as crianças percebam que a matemática possibilita a observação, interpretação e representação do mundo que a rodeia. A aprendizagem matemática mais marcante resulta da exploração de problemas e de materiais que são do interesse das crianças. É a partir das suas experiências que as crianças dão sentido à matemática. A resolução de problemas deve ser o fundamento principal do desenvolvimento da matemática no Jardim de Infância, sendo que estes devem surgir de experiências vividas quer na escola, quer fora dela. Quando as situações problemáticas derivam de situações vividas e familiares das crianças, elas fazem sentido, e as crianças facilmente associam o seu conhecimento a outros tipos de situações.

Pólya afirmou-se como impulsionador da resolução de problemas como um processo estimulante em termos de capacidades cognitivas, envolvendo a mobilização integrada de conhecimentos, atitudes e capacidades. Este autor descreve a resolução de problemas em quatro etapas: a compreensão do problema, a conceção de um plano, a execução desse plano e a reflexão sobre o plano executado (1945). A resolução de problemas assume-se como essencial na matemática, de tal forma que se poderá afirmar que se aprende matemática resolvendo problemas, já que se mobilizam saberes anteriores para se chegar à solução, da mesma forma que se parte destes para desenvolver novas ideias matemáticas. A resolução de problemas assume-se assim como ponto de partida e de chegada do ensino da matemática (Ponte & Serrazina, 2000). A importância dada à resolução de problemas ultrapassa a conceção desta como um fim em si mesmo. Numa visão utilitária, a resolução de problemas possibilita o desenvolvimento de capacidades de pensamento e promove a procura criativa de soluções para os problemas do quotidiano.

As Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar preconizam a resolução de problemas como uma situação de aprendizagem em que a criança procura responder a questões de solução não imediata, levando-a a refletir, comunicar, explicar, justificar, reunir consensos, ou seja, pensar no como e no porquê (Silva & NEPE, 1997). No processo de resolução de problemas importa, mais do que as soluções corretas, desenvolver o raciocínio, estimulando as razões da solução. As competências iniciais de cálculo, definidas como emergência das operações por Castro e Rodrigues (2008), desenvolvem-se nas crianças em simultâneo com as suas competências de contagem. Para estas autoras, as crianças vão-se tornando progressivamente mais competentes, realizando cálculos mais complexos, à medida que o seu universo numérico aumenta, conseguindo estratégias de contagem mais flexíveis.

Ora, uma aprendizagem de qualidade resulta de experiências formais e informais proporcionadas às crianças em idade pré-escolar. E, realçando o preconizado pelo NCTM (2008), o facto de as crianças "não saberem" traduz mais a falta de oportunidades de aprendizagem, do que a ausência de capacidades. Já Gelman e Gallistel (1978) afirmavam que as capacidades que as crianças do pré-escolar possuem foram subestimadas durante muito tempo, o que vem a ser reforçado por Ginsburg e Seo (1999), que defendem que a matemática informal das crianças contém, num nível implícito, muitas das ideias matemáticas que os professores precisam de promover num nível formal e explícito.

2. Conhecimento informal das crianças do pré-escolar

Gelman e Gallistel (1978) afirmam que as crianças possuem estruturas elementares inatas, o que lhes permite, desde cedo, desenvolver as primeiras noções numéricas. Os autores apontam os processos da quantificação e da contagem como sendo as bases da aprendizagem informal, uma aprendizagem que decorre das suas vivências diárias e de forma intuitiva, através da perceção, defendendo que os primeiros conceitos numéricos e aritméticos são construídos a partir da capacidade de contagem. A partir desta, as crianças adquirem competências que possibilitam a comparação de quantidades e, em consequência, a resolução de problemas, recorrendo a estratégias de contagem que modelam o conteúdo do enunciado e as quantidades envolvidas.

Inicialmente, as crianças adquirem a compreensão de pequenos números, generalizando, posteriormente, esse conhecimento a quantidades mais numerosas. Segundo Gelman e Gallistel (1978), este facto deve-se à capacidade que elas apresentam de, através da perceção, identificarem semelhanças e diferenças entre conjuntos, e a sua cardinalidade em termos absolutos, admitindo a equivalência numérica entre quantidades. Este conhecimento permite-lhes reconhecerem que, quando as quantidades não satisfazem uma relação numérica de equivalência, ou seja, quando não têm o mesmo valor, uma assume-se como maior do que a outra. O mesmo é dizer que as crianças do pré-escolar entendem que, se dois números não são iguais, um será maior do que o outro. O que contraria a posição piagetiana que defende que, só a partir do momento em que a criança compreende o princípio da conservação e o princípio da inclusão hierárquica, é que começa a compreender o conceito de número (Piaget & Szeminska, 1971).

Piaget e Szeminska (1971) argumentam que as crianças falham nas tarefas de conservação porque elas não são capazes de tratar as quantidades como invariantes, quando sujeitas a transformações irrelevantes. A ideia destes autores é sustentada na tendência que as crianças do pré-escolar têm em responder pelas diferenças da aparência visual, sem atenderem às diferenças quantitativas. Contudo, contrariando esta opinião, Gelman e Gallistel (1978) haviam já observado que as crianças tão novas quanto as de 3 anos, e algumas de 2 anos e meio, comportam-se como se soubessem que a transformação da cor, ou a identidade dos objetos no conjunto, não altera o seu número. Da mesma forma, parece que as crianças dessa idade percebem que as transformações que envolvem a adição e subtração alteram o valor numérico de um conjunto, e que a adição e subtração se podem anular uma à outra, apesar de não terem, necessariamente, que ter a noção de que a adição de *x* elementos é anulada pela subtração dos mesmos *x* elementos. Gelman e Gallistel (1978) atribuem algumas capacidades para raciocinar sobre números às crianças do pré-escolar, afirmando que muitas características da aritmética formal encontram-se, de alguma forma, presentes no seu raciocínio numérico informal.

Ora, o conhecimento que a criança desenvolve diariamente, antes da escolaridade formal, é entendido por Baroody e Ginsburg (1986) como conhecimento informal. Este é definido como o conjunto implícito de princípios matemáticos que as crianças do pré-escolar dominam de forma intuitiva (Resnick, 1989), competências, conhecimentos e capacidades que as elas "carregam" para o processo de aprendizagem (Jonassen & Grabowski, 1993). O conhecimento informal desenvolve-se durante a idade pré-escolar e constitui a base da aquisição da matemática formal em contexto escolar (Fischbein, 1987; Treffers, 1987; Clements & Sarama, 2007).

Durante a idade pré-escolar, as crianças desenvolvem uma grande quantidade de conhecimento não numérico, como resultado da sua experiência diária, sobre quantidades (grande, pequeno, muito, pouco), e sobre relações, que usam para estabelecer comparações de tamanhos (um maior do que outro, uma mais baixa do que outra). A capacidade que as crianças têm, inicialmente, para raciocinar não numericamente sobre relações entre quantidades, proporciona-lhes esquemas relacionais que podem, posteriormente, usar para quantificar numericamente quer os materiais, quer mais tarde os números (Resnick, 1989). A estes raciocínios não numéricos, Resnick designa de esquemas protoquantitativos.

Um dos esquemas protoquantitativos de Resnick (1989) interpreta as transformações das quantidades. As crianças de 3 e 4 anos conseguem perceber que, tendo uma determinada quantidade de algo e acrescentando-lhe outra quantidade do mesmo, a quantidade inicial fica com mais (um prato de biscoitos, ao qual se juntam mais alguns biscoitos, fica com mais do que tinha inicialmente), e quando se retira da quantidade inicial uma determinada quantidade, aquela fica com menos do que tinha inicialmente (um prato de biscoitos do qual se retiram biscoitos, fica com menos do que tinha inicialmente). Da mesma forma, as crianças percebem que, se nada for tirado ou adicionado, a quantidade permanece a mesma. Com base neste conhecimento, Resnick (1989) admite que as crianças possam adquirir a conservação do número antes dos 7-8 anos, período definido por Piaget e Szeminska (1971) como o provável para esta aquisição.

Um outro esquema protoquantitativo identificado por Resnick (1989), presente no conhecimento matemático das crianças, é o esquema parte-todo. As crianças do pré-escolar sabem que, se cortarem uma determinada quantidade em partes, e se as juntarem de novo, esta nova quantidade fica igual à original. Também sabem que, se juntarem duas quantidades, tal resultará numa quantidade maior, e se a esta ainda juntarem uma terceira, esta ficará maior ainda, conseguindo estabelecer uma hierarquia aditiva. De uma maneira implícita, as crianças percebem a propriedade aditiva de quantidades, e este conhecimento protoquantitativo permite-lhes fazerem apreciações sobre a relação das partes e do todo. As crianças sabem, por exemplo, que um bolo é maior do que qualquer uma das suas fatias. Com base nestas apreciações, Resnick (1989) defende que as crianças do pré-escolar dominam um conjunto implícito de princípios sobre a relação parte-todo e a composição aditiva.

As estratégias que as crianças produzem revelam que elas são capazes de construir princípios matemáticos básicos, como a comutatividade, a complementaridade da adição e subtração e a associatividade, na forma intuitiva, muito antes de estas ideias serem apresentadas na escola. Quando, para resolverem o problema "A Rita tem 3 biscoitos, a sua mãe deu-lhe mais 5, quantos biscoitos tem agora?", as crianças procuram minimizar a quantidade de contagens que têm que realizar, e começam a contar a partir do número maior mencionado no enunciado do problema, invertendo a ordem das parcelas ("5, [conta mais 3] 6, 7, 8"), implicitamente estão a aplicar o princípio matemático da comutatividade da adição (Resnick, 1989).

Uma outra estratégia básica de contagem que as crianças usam e que demonstra que desenvolveram o conhecimento implícito dos princípios numéricos, mesmo antes de terem sido ensinados, é a resolução de problemas de subtração pela operação da adição. Quando as crianças têm que resolver o problema "O Rui tinha 6 bolachas, deu algumas ao João e ficou com 4. Quantas bolachas o Rui deu ao João?", e, com recurso à contagem, começam a partir do menor número, e vão adicionando números até atingir a quantidade maior do enunciado ("4 [contam mais dois até dizerem o número maior] 5, 6"), estão a converter um problema de subtração num problema de adição. As crianças usam este procedimento com base no seu conhecimento implícito da complementaridade da adição e subtração (Resnick, 1989). Segundo a autora, esta complementaridade, por sua vez, é fundamentada no princípio básico da composição aditiva, que assume que cada número é composto de outros números, e cada número pode ser decomposto em partes. Resnick defende que, através das estratégias que as crianças criam e usam para resolver problemas de subtração, pode-se observar a relação que elas estabelecem da contagem com o esquema protoquantitativo parte-todo, considerado como a versão inicial da composição aditiva.

Na resolução de problemas de adição e subtração, as crianças recorrem ao seu conhecimento da contagem para calcular a resposta, e não há evidências de que seja ensinado às crianças os princípios da contagem antes de irem para a escola. Elas são capazes de respeitar os princípios da contagem e usam esse conhecimento para resolverem, de uma maneira mais eficiente, problemas de adição e subtração (Resnick, 1989). Para Nunes, Bryant e Watson (2009), as crianças conseguem aprender a contar independentemente da compreensão de quantidades e das relações que se estabelecem entre elas, e o modo como elas usam a contagem reflete as alterações que se vão produzindo no desenvolvimento do seu raciocínio. Deixar de "contar todos" para "contar a partir de" é um sinal de que as crianças relacionam o seu conhecimento das relações parte-todo com a sequência de contagem. "Contar a partir de" é um sinal de abstração na relação parte-todo, e que abre caminho para resolverem muitos outros problemas, demonstrando compreenderem a composição aditiva do número.

Piaget era cético quanto à ideia de que as crianças pudessem compreender o conceito de número simplesmente pela aprendizagem do ato de contar. Os seus estudos concentraram-se na capacidade das crianças para raciocinarem com lógica sobre relações de quantidade, mais do que sobre a contagem. Ele argumenta que as crianças têm que compreender a relação inversa entre a adição e a subtração e também a composição aditiva dos números para entenderem verdadeiramente o número. Reconhecendo também o importante papel da lógica na aprendizagem matemática, Nunes e seus colaboradores (Nunes & Bryant, 1996; Nunes et al., 2009) identificam quatro aspetos fundamentais que as crianças devem respeitar: i) a lógica da correspondência (um-para-um e um-para-muitos); ii) a lógica da inversão; ii) a lógica da inclusão de classes e composição aditiva; iv) a lógica da transitividade.

Nunes e seus colaboradores (2009) reconhecem que a correspondência é essencial à contagem. Sem compreenderem a correspondência um-para-um, as crianças não entenderão a cardinalidade. Os autores consideram que, inicialmente, elas são muito mais competentes na aplicação da correspondência um-para-um quando partilham, do que quando comparam elementos de séries espaciais. Ora, a correspondência um-para-muitos, ela própria uma extensão do conhecimento que as crianças já têm sobre a correspondência um-para-um, é uma parte essencial da aprendizagem sobre a multiplicação. O que, segundo Nunes e colegas vem sendo ignorado, de tal forma que alguns pesquisadores e os professores ainda não consideram a correspondência um-para-muitos uma possível base para o raciocínio multiplicativo, devido ao senso comum de que este raciocínio estará alicerçado no conhecimento aditivo das crianças. No entanto, pesquisas recentes (ver Kaput & West, 1994; Park & Nunes, 2001) sugerem que ensinar as crianças em termos da correspondência um-para-muitos como forma de as introduzir na multiplicação seria muito mais eficaz do que ensinar a multiplicação como adição repetida.

A relação inversa tem uma grande importância na progressão das crianças na aprendizagem matemática. Perceber que a adição e a subtração da mesma quantidade deixa a quantidade inicial inalterada, é essencial no raciocínio aditivo das crianças. No entendimento de Piaget, a reversibilidade de pensamento permite às crianças passar de uma operação à outra e, desta forma, dominar a decomposição necessária à inclusão de classes. De acordo com Nunes et al. (2009), o entendimento flexível da relação inversa é um elemento essencial no raciocínio das crianças, quer seja na relação inversa adição/subtração, quer seja na multiplicação/divisão.

A compreensão da inclusão de classes e composição aditiva permite às crianças compararem números e compreenderem-nos como forma de expressar tanto relações como quantidades. Os números são constituídos por outros números, qualquer número é um conjunto de combinações de outros números e isso é conhecido por inclusão de classes. Esta forma de inclusão, também conhecida por composição aditiva do número, é a base de compreensão do número ordinal: todos os números na série numérica são o número que o precede mais um, o que se traduz na base da estrutura de 10. Para Nunes et al. (2009), compreender a lógica da inclusão de classes é fundamental para comparar números. Esta forma de compreensão permite às crianças perceber que um determinado número é *x* números mais do que aquele, por exemplo, que o número 9 é 4 mais do que o número 5. Este tipo de conhecimento possibilita às crianças entenderem os números como forma de expressar relações, tal como expressam quantidades.

A transitividade é um dos aspetos da lógica mais difícil de compreender por parte das crianças e, para Nunes et al. (2009), esta dificuldade persiste ao longo do 1.º ciclo. A dificuldade no uso das relações transitivas reside no facto de as crianças, mesmo as que frequentam os 1.º e 2.º anos do 1.º ciclo, ainda não entenderem a importância da repetição, como é que um número pode ser simultaneamente maior (ou menor) duplamente. Importa que as crianças reconheçam que todas as séries ordenadas, incluindo números e medidas, envolvem a lógica da transitividade, se a> b e b>c, então a> c.

É inegável o contributo de Piaget no que diz respeito à necessidade das crianças entenderem determinados princípios lógicos, importantes para a aprendizagem matemática. Contudo, a valorização que Piaget atribuiu às dificuldades das crianças nestes quatro aspetos, gera alguma controvérsia entre a comunidade científica, sobretudo no que se refere ao tempo que as crianças demoram a compreender alguns princípios lógicos. De acordo com Nunes et al. (2009), alguns dos modelos intuitivos que as crianças usam na resolução de problemas traduzem a compreensão de princípios lógicos e permite-lhes a apropriação de noções matemáticas. Por esta razão, os autores defendem que as crianças devem ser encorajadas a refletir sobre os seus modelos implícitos, perceber as situações-problema, reconhecer os invariantes presentes, ou seja, os seus significados, e desta forma encontrarem sentido para os conceitos matemáticos.

3. Teoria dos campos conceptuais

Piaget demonstrou que o conhecimento e a inteligência se desenvolvem por um longo período de tempo. No entanto, as suas conclusões derivam da análise do desenvolvimento das crianças em termos de capacidades gerais de inteligência, principalmente no que se refere à lógica. A necessidade de perceber melhor a aquisição e o desenvolvimento do conhecimento, levou Vergnaud a debruçar-se sobre as competências específicas das relações que se estabelecem na formação de conceitos matemáticos. Tal como Piaget, também Vergnaud (1988) considera que as conceções e as competências das crianças se desenvolvem através da vivência de numerosas situações, dentro e fora da escola, no decorrer de um longo período de tempo. É no confronto com as novas situações que as crianças usam o conhecimento adquirido em situações semelhantes, e tentam adaptá-lo às novas situações, adquirindo assim novos conceitos. Um conceito matemático só adquire sentido, para as crianças, através das múltiplas situações e da sua aplicabilidade na resolução de problemas. Vergnaud define o conceito como um conjunto de invariantes passíveis de serem aplicados na ação. A definição prática de um conceito matemático é, desta forma, o conjunto das situações que integram os tipos ou modelos das suas diferentes propriedades e os esquemas ou procedimentos que as crianças usam nessas situações.

Vergnaud (1996, 1997) sugere que o desenvolvimento do conceito deve ser entendido como um terno composto pelas situações, pelos invariantes e pela representação simbólica do próprio conceito. O conceito é, assim, descrito pela expressão "C=S+I+R", em que *S* é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito; *I* é o conjunto de invariantes, propriedades, objetos e relações reconhecidas e usadas pelas crianças para analisar e dominar essas situações e nos quais assenta a operacionalidade dos esquemas (o significado); *R* é o conjunto de representações simbólicas usadas para representar o conceito, as situações, as propriedades e os procedimentos (o significante). Analisar o desenvolvimento e a aplicação de um conceito carece necessariamente a consideração simultânea destes três planos.

As situações dão sentido aos conceitos matemáticos e são o que, em termos psicológicos se considera a realidade (Vergnaud, 1988), mas o sentido não está nas próprias situações. O sentido assume-se como uma relação das crianças com as situações e os significantes. São os procedimentos, esquemas sugeridos por uma situação ou por um significante que formam o sentido dessa situação ou desse significante para essas crianças. Por exemplo, o sentido da adição, para a criança, é o conjunto de esquemas e procedimentos que ela pode pôr em prática para tratar as situações que impliquem a ideia de adição, assim como o conjunto dos esquemas a que ela pode recorrer para realizar a operação com os símbolos que representam a adição.

No entanto, um simples conceito não se refere apenas a uma só situação e uma só situação pode não ser analisada apenas por um único conceito. Assim, Vergnaud (1982, 1983, 1996) introduz a noção de "campos conceptuais", definindo como o conjunto de problemas, situações, contextos, relações, estruturas, conteúdos, e operações de pensamento relacionados entre si e suscetíveis de serem interligados durante o processo de aquisição, cujo domínio requer a apropriação de vários conceitos de naturezas diferentes. Por exemplo, os conceitos de multiplicação, divisão, fração, razão, proporção, função linear, pertencem a um único mas amplo campo conceptual, o campo das "estruturas multiplicativas", que consiste em todas as situações que podem ser analisadas como problemas de proporção simples ou múltiplas, nos quais normalmente é necessário multiplicar ou dividir. Da mesma forma que conceitos de medida, adição, subtração, transformação, relações de comparação, pertencem a outro campo conceptual, também ele amplo, o campo das "estruturas aditivas", que abrange o conjunto das situações que, para serem tratadas, exigem uma adição, subtração ou a combinação de ambas as operações.

A teoria dos campos conceptuais considera o sentido das situações e dos símbolos como princípio pragmático do conhecimento. Vergnaud (1996) não concebe uma teorização da aprendizagem matemática apenas pelo seu carácter simbólico, nem tão pouco partindo apenas das situações. Um conceito não assume o seu sentido numa única classe de situações, da mesma forma que uma situação não se pode analisar apenas através de um conceito. É necessário considerar conjuntos de situações e de conceitos, analisando e classificando os tipos de relações que se estabelecem nas diferentes classes de problemas, os esquemas de tratamento, as diversas representações, quer linguísticas quer simbólicas, e os conceitos matemáticos que estruturam esses conjuntos.

Apesar da aprendizagem da matemática ser realizada de forma individual, Vergnaud (1996) considera que se podem observar regularidades na abordagem e tratamento que as crianças fazem da mesma situação, nas suas conceções sobre os objetos, suas propriedades e relações. A abordagem das situações permite definir uma classificação baseada na análise das tarefas cognitivas e nos procedimentos usados em cada uma dessas tarefas. Vergnaud (1996) considera que a teoria dos campos conceptuais surge como uma "psicologia dos conceitos", em que é atribuída uma importância primordial aos próprios conceitos matemáticos, ainda que o termo "estrutura" assuma um papel de destaque na definição de campo conceptual, esta designação não se identifica com a psicologia cognitivista de Piaget, centrada nas estruturas lógicas. Com efeito, se uma das ideias-chave no campo conceptual são as situações, outra é a dos conceitos e teoremas.

O campo conceptual das estruturas aditivas é, simultaneamente: o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias adições e subtrações; e o conjunto dos conceitos e teoremas que possibilitam a análise dessas situações como tarefas matemáticas, como sendo os conceitos de cardinal, de medida, de transformação temporal por aumento ou diminuição (ganhar ou perder), de relação de comparação quantificada (mais do que, menos do que), de composição binária de medidas (quantos são ao todo) (Vergnaud, 1982, 1996). Analogamente, o campo conceptual das estruturas multiplicativas é, ao mesmo tempo: o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões; e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem a análise dessas situações, como proporção (simples ou múltipla), fração, número racional, múltiplo (Vergnaud, 1982, 1988, 1996).

As competências matemáticas são sustentadas por esquemas organizadores da conduta. Vergnaud (1997) entende por esquema o conjunto de procedimentos que são realizados numa determinada classe de situações. Nestes esquemas em ação são observados os conhecimentos que as crianças têm, os elementos cognitivos que lhes permitem tornar a sua ação operatória. Os conceitos, apesar de construídos e operacionalizados na ação, raramente são explicados pelas crianças, não são explícitos nem oralmente expressos pelas crianças. Os conceitos em ação e os teoremas em ação são, segundo Vergnaud (1996), os conhecimentos contidos nos esquemas, designados também por invariantes operatórios, já que qualquer esquema baseia-se sempre numa conceptualização implícita. O teorema em ação pode ser visto na aplicação de um conjunto de problemas, constituindo a base do comportamento das crianças. Os teoremas em ação são, assim, definidos como a relação matemática tida em conta pelas crianças quando optam por uma operação ou uma sequência de operações para resolverem um problema.

Quando uma criança usa uma determinada estratégia na resolução de um problema, está a usar um teorema em ação, que não é ainda um teorema. Da mesma forma que, quando é capaz de repetir verbalmente um teorema, tal não é necessariamente um teorema em ação. Contudo, não se pode conceber um pensamento operacional sem a coordenação destes dois critérios. O conceito de teorema em ação é a melhor via para descrever e analisar o desenvolvimento das competências das crianças num campo conceptual, delinear filiações e ruturas. Vergnaud (1996, 2011) fala de filiações já que as novas competências apoiam-se, em parte, em competências adquiridas, e ruturas porque, por vezes, a tomada de consciência necessária à formação de uma nova competência exige que a criança deixe de lado ideias e formas de agir anteriores. Os teoremas em ação constituem também a melhor forma de analisar a relação entre o conhecimento intuitivo implícito e os teoremas matemáticos explícitos e os seus simbolismos.

Um conceito que não é operacional e concretizável não é realmente um conceito. Muito da aquisição dos conceitos pelas crianças decorre da escolha correta do cálculo para resolver problemas (Vergnaud, 1979). Na resolução dos problemas simples, as crianças deparam-se com inúmeras dificuldades conceptuais relacionadas com a escolha da operação correta. É em termos de esquemas que deve ser analisada a escolha das operações e dos dados adequados à resolução de um problema, para o qual existem diversas possibilidades de escolha.

O mesmo conceito pode estar envolvido em várias situações e tarefas, e não envolver o mesmo cálculo relacional. Vergnaud (1979, 1982) considera essencial distinguir dois tipos de cálculo para interpretar o comportamento das crianças face a problemas elementares: "cálculo relacional" e "cálculo numérico". O cálculo numérico refere-se às operações elementares de adição, subtração, multiplicação e divisão que as crianças têm que dominar para responder a um problema. Por cálculo relacional Vergnaud entende as operações de pensamento que são necessárias para manipular as relações envolvidas na situação, a transformação e composição das relações dadas na situação.

O cálculo numérico da subtração "24 - 6" pode estar envolvido em diferentes situações onde são requeridos diferentes cálculos relacionais. Vejam-se as seguintes situações:

a) O João tinha 24 bombons. Deu 6 à sua irmã. Com quantos ficou?
b) O João tinha alguns bombons, a sua mãe deu-lhe mais 6 e ele agora tem 24. Quantos bombons tinha no início?
c) O João tinha 24 bombons que comeu de manhã. A mãe deu-lhe mais alguns de tarde. O João tem, agora, menos 6 bombons do que de manhã. Quantos bombons lhe deu a mãe?

A situação (a) traduz a transformação de um estado inicial num estado final como resultado de uma subtração. A situação (b) reflete a transformação do estado final como resultado da adição que é operada sobre o estado inicial. A situação (c) expressa um cálculo relacional que reflete a composição de duas transformações, em que na primeira se verifica a transformação do estado inicial noutro estado decorrente de uma subtração, e a segunda transformação como resultado de uma adição resultando noutro estado final. Para as diferentes situações, o cálculo relacional é diferente, mas o cálculo numérico é o mesmo: a subtração de 6 a 24.

Muitas das dificuldades dos alunos não residem nos cálculos numéricos a efetuar, mas nos conceitos envolvidos na situação, o que vai condicionar a escolha do cálculo correto. Alguns problemas são mais fáceis de resolver do que outros, pois as crianças consideram alguns procedimentos mais naturais e intuitivos do que outros, quando o enunciado do problema reflete claramente a operação de pensamento necessária à resolução. Para Vergnaud (1979), a questão mais desafiante da educação matemática é estabelecer a ligação entre as situações aritméticas comuns e os conceitos matemáticos relevantes. Desta conexão depende o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e uma melhor compreensão de alguns conceitos mais sofisticados.

Para que se efetive a ligação entre situações e conceitos, Vergnaud recomenda que se atenda a quer à análise das situações, onde os números assumem três tipos de significados (quantidades, transformações e relações), quer aos diferentes tipos de representações simbólicas dessas situações matemáticas.

Vergnaud (1979) chama a atenção para a existência de, pelo menos, duas formas de representação: a representação simbólica, que obedece aos diferentes tipos de símbolos para o objetivo do estado matemático (elementos, operações, relações, classes, funções), sendo a que é considerada e mais aceite em termos matemáticos; e a representação do pensamento, onde não há referência a qualquer símbolo ou linguagem verbal. É a representação conceptual, uma espécie de inferência que se faz a partir do comportamento ou explicações das crianças quando resolvem os problemas. O significado do conceito deve ser analisado através de todos os aspetos comportamentais das crianças aquando da resolução de problemas, e não apenas através dos símbolos pelos quais elas tentam representar as situações. As duas referências, ação e comportamento e simbologia explícita, devem ser tidas em consideração e não entendidas como opositoras uma da outra.

Vergnaud (1996) considera que a definição pragmática do conceito remete para o conjunto das situações que fazem referência às suas diferentes propriedades, e o conjunto dos esquemas utilizados pelos sujeitos nessas situações. Para Vergnaud, a vantagem da abordagem pelas situações permite definir uma classificação de problemas de acordo com as tarefas cognitivas e os procedimentos para cada uma delas. Os problemas não são problemas de adição e subtração, ou multiplicação e divisão por si só, eles são definidos pelo tipo de raciocínio que requerem. O raciocínio aditivo refere-se ao raciocínio usado para resolver problemas onde a adição e subtração são as operações usadas para encontrar a solução, assim como o raciocínio multiplicativo diz respeito às situações onde a multiplicação e divisão são o recurso para encontrar a solução (Vergnaud, 1983; Behr, Harel, Post & Lesh, 1994).

Esta forma de pensar baseia-se no modo como as crianças aprendem matemática (Nunes et al., 2009) e prende-se com a estrutura dos problemas, mais do que nas operações aritméticas usadas para os resolver. Esta conceção assume que as ligações entre a adição e a multiplicação por um lado, e a subtração e a divisão por outro, são processuais, podendo-se multiplicar usando a adição repetida e dividir usando a subtração repetida. Todavia, estas duas formas de raciocínio são distintas o suficiente para serem considerados domínios conceptuais separados.

Thompson (1993) e Vergnaud (1979) afirmam que os raciocínios aditivo e multiplicativo têm diferentes origens e são diferentes na sua essência. Enquanto o raciocínio aditivo é usado quando quantidades do mesmo tipo são colocadas juntas, separadas ou comparadas, o raciocínio multiplicativo envolve duas variáveis numa relação fixa entre si. Esta diferença é significativa do ponto de vista conceptual. O raciocínio aditivo refere-se a situações em que o todo é igual à soma das partes. Por essa razão diz-se que o invariante conceptual do raciocínio aditivo é a relação parte-todo. Ao contrário, o invariante conceptual do raciocínio multiplicativo é a existência de uma relação fixa estre duas variáveis. Qualquer situação multiplicativa envolve duas quantidades numa relação constante entre si. Ao resolver problemas de raciocínio multiplicativo procura-se um valor numa variável que corresponda a um valor dado na outra variável. A relação constante estre as duas variáveis é que possibilita a dedução na resolução de problemas de raciocínio multiplicativo.

3.1. Raciocínio aditivo

O raciocínio aditivo é a análise lógica de problemas que envolvem a adição e subtração, cujos conceitos-chave implícitos se relacionam com a composição aditiva e com a relação inversa entre adição e subtração (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1994; Nunes & Bryant, 1996; Nunes, Campos, Magina & Bryant, 2005; Nunes et al., 2009). Usa-se o termo "raciocínio aditivo" porque embora as operações de adição e subtração sejam distintas, elas estão relacionadas com a mesma estrutura de raciocínio (Nunes et al., 2005).

O tipo de conhecimento que as crianças desenvolvem inicialmente parece estar relacionado com três tipos de ação: juntar mais elementos a um conjunto, retirar elementos de um conjunto, colocar em correspondência termo-a-termo os elementos de dois conjuntos (Nunes & Bryant, 1996). Segundo Piaget e Szeminska (1971), as crianças desenvolvem os esquemas de juntar e separar independentemente um do outro, sem compreender a relação que existe entre os dois, e conseguem uma compreensão mais avançada quando passam do conhecimento baseado em esquemas de ação para um conceito operatório de adição e subtração, coordenando os dois esquemas de forma a reconhecerem a relação inversa entre a adição e a subtração.

As crianças do pré-escolar têm um pensamento inicial da adição e da subtração fruto quer das suas experiências diárias, quer da presença destas em contexto de histórias. Vergnaud (1986) explica que a ideia primitiva que as crianças têm de adição é de aumento de uma quantidade, e de subtração é de decréscimo de uma quantidade, logo, são esperadas dificuldades quando elas têm que alargar as conceções que têm da adição e da subtração a outras classes de problemas e a outras relações. Ora, sendo o campo conceptual das estruturas aditivas o conjunto das situações que requerem a adição e subtração, e o conjunto dos conceitos e teoremas que servem para analisar essas situações, Vergnaud (1981, 1996) identifica seis relações de base, a partir das quais é possível conceber todos os problemas de adição e de subtração da aritmética comum:

1) A composição de duas medidas para formar uma terceira, expresso no exemplo "A Maria tem 3 berlindes na mão direita e 4 na mão esquerda. Ao todo ela tem 7 berlindes.";
2) A transformação de uma medida inicial numa medida final, que se traduz no exemplo "O Pedro tinha 17 berlindes antes do jogo. Perdeu 4 berlindes. Agora tem 13 berlindes.";
3) A relação de comparação entre duas medidas, que tem a sua expressão no exemplo "O Pedro tem 8 berlindes. Ele tem mais 5 do que o João. O João tem 3 berlindes.";
4) A composição de duas transformações, ilustrado pelo exemplo "O Pedro ganhou 6 berlindes de manhã, perdeu 9 berlindes à tarde. Ao todo ele perdeu 3 berlindes.";
5) A transformação de uma relação, que se traduz no exemplo "O Pedro deve 6 cromos ao Tomás, deu-lhe 4. O Pedro ainda lhe deve 2 cromos.";
6) A composição de duas relações, expressa no exemplo "O João tem 7 cromos a mais do que o Paulo. O Paulo tem 3 cromos a menos do que o Rui. O João tem 4 cromos a mais do que o Rui.".

A classificação estabelecida por Vergnaud (1996) resulta de considerações matemáticas e psicológicas: da dificuldade desigual entre os problemas de estruturas diferentes, e que apesar disso se resolvem através da mesma operação matemática; dos diferentes níveis de êxito nas várias classes de problemas, que podem ser produzidos a partir de uma mesma relação, dos procedimentos e representações simbólicas matemáticas utilizados pelas crianças; e da importância dos conceitos de transformação temporal e de relação, no processo de apropriação das situações de adição e de subtração.

As estruturas aditivas são um campo conceptual difícil. Compreender as estruturas aditivas é um processo demorado que começa com problemas simples de encontrar o resultado final e vai até à adolescência, com a subtração de transformações de sinal oposto (Vergnaud, 1982). De acordo com o autor, existem muitos exemplos de situações no campo conceptual das estruturas aditivas, o que carece de alguma atenção na escolha da operação. Vergnaud (2011, 2012) faz a distinção entre situações prototípicas e não prototípicas. As situações prototípicas caracterizam-se por requererem a operação que está mencionada no problema, são situações que dão sentido a essa operação; as não prototípicas caracterizam-se por requererem a operação inversa à que é mencionada no problema.

Existem duas situações prototípicas da adição, através das quais as crianças dão um primeiro sentido a esta operação: i) a reunião de duas partes num todo (por exemplo, "Numa sala estão 3 meninas e 4 meninos. Quantas crianças estão ao todo?"); ii) a transformação de uma quantidade inicial que resulta numa quantidade final (por exemplo, "O Pedro tinha 5 carrinhos, a sua prima deu-lhe mais 2. Quantos carrinhos o Pedro tem agora?"). Estas duas situações são as mais simples, contudo, elas dão origem a situações mais complexas que envolvem a subtração. Enquanto a primeira situação, reunião das partes num todo, possibilita apenas um caso de subtração, em que, conhecendo-se o todo e uma das partes pretende-se encontrar a outra parte (por exemplo, "Numa sala estão 7 crianças, ao todo. Três são meninas. Quantos meninos estão na sala?"), a segunda situação, transformação de uma quantidade noutra, origina quatro subtrações diferentes: 1) a transformação da quantidade inicial numa final pela diminuição da quantidade inicial, considerada como o protótipo da subtração (por exemplo "O João tinha 7 carrinhos, deu 2 à sua prima. Com quantos carrinhos ficou?"); 2) a procura de um aumento, caracterizado pelo estado final menos o estado inicial (por exemplo "O Manuel tinha 5 carrinhos, a Joana deu-lhe mais alguns e agora tem 7. Quantos carrinhos lhe deu a Joana?"); 3) a procura de uma diminuição caracterizada pelo estado inicial menos estado final (por exemplo “O Tomás tinha 7 livros, deu alguns à sua irmã, ficando com 5. Quantos livros deu à irmã?”); 4) e a descoberta de um estado inicial antes de um aumento (por exemplo “A Ana ganhou 2 bonecas da sua prima. Agora ela tem 7 bonecas. Quantos bonecas tinha a Ana no início?”).

A transformação de um estado inicial possibilita ainda a emergência de uma adição não prototípica (por exemplo, “Num jogo o Pedro perdeu 5 berlindes, agora tem 7. Quantos berlindes tinha antes de perder?”). A procura da quantidade inicial é uma situação delicada para muitas crianças até ao 3.º ano da escola básica e mesmo nos anos seguintes. Além de ser não prototípica, essa situação também entra em conflito com o sentido da transformação direta descrita na situação e que origina os protótipos da adição e da subtração: a perda de berlindes do Pedro conduz a uma subtração e não a uma adição; o ganho de bonecas da Ana conduz a uma adição e não a uma subtração. A operação que permite passar do estado final para o estado inicial é inversa da que permite passar do estado inicial ao final.

O desenvolvimento do raciocínio aditivo pode ser observado mesmo quando são apresentados problemas mais complexos, que exigem que os alunos utilizem raciocínios que vão além da aplicação direta dos seus esquemas de ação (Nunes et al., 2005). Vergnaud (1986) considera essencial reconhecer a variedade das classes possíveis, analisar a sua estrutura e identificar as operações de pensamento necessárias ao seu tratamento. Ainda que qualquer situação possa levar a uma combinação de relações, com elementos conhecidos e desconhecidos, e que têm expressão noutras tantas situações possíveis, no caso das estruturas aditivas, as relações de base a partir das quais podem ser pensados todos os problemas de adição e subtração têm uma estrutura ternária, ao contrário das estruturas multiplicativas, em que as relações de base mais simples são quaternárias.

3.2. Raciocínio multiplicativo

As classificações das situações de raciocínio multiplicativo variam consoante os autores, contudo, parece haver unanimidade nas características das situações multiplicativas: duas ou mais variáveis numa relação fixa entre si (Nunes et al., 2009; Thompson, 1994). Qualquer situação multiplicativa envolve duas quantidades que estão ligadas por uma relação que se mantem constante entre si. Mesmo que as duas quantidades sofram alterações, a relação entre elas permanece inalterável.

As situações que dão lugar ao raciocínio multiplicativo não envolvem ações de unir e separar, mas antes situações de correspondência de um-para-muitos, situações de relação entre variáveis ou co-variação, e situações de distribuição, divisão e divisão ao meio (Nunes & Bryant, 1996). Para estes autores, as situações de correspondência um-para-muitos são a base do conceito de proporção. Uma pessoa tem 2 pés, 2 pessoas terão 4 pés, 3 pessoas 6 pés, e assim sucessivamente. A relação que se estabelece entre pés e pessoas é constante, para cada pessoa existem 2 pés. Quando se aumenta o número de pessoas aumenta o número de pés na relação determinada pela correspondência estabelecida (1:2). A ação para manter uma proporção constante não é unir ou separar, mas replicar (ou o seu inverso). Replicar envolve adicionar a cada conjunto a quantidade correspondente, para que a correspondência invariável de um-para-muitos se mantenha. Por cada pessoa que se adiciona, adicionam-se 2 pés. Assim como o inverso, removem-se tantas unidades em cada conjunto, quantas as correspondentes para manter constante a proporção, neste caso por cada pessoa retiram-se 2 pés (e vice-versa, por cada 2 pés retira-se 1 pessoa). Uma proporção permanece constante quando é feita uma replicação, isto é, aumentando o número de pessoas, é aumentado o número de pés, mas a relação mantem-se sempre 1:2. Assim, a proporção não representa o número de objetos, mas sim a expressão da relação entre dois conjuntos (Nunes & Bryant, 1996).

As situações de co-variação compreendem as situações cujos números se referem a valores sobre variáveis, valores fracionários e não a conjuntos (Nunes & Bryant, 1996). Enquanto que na situação de correspondência de um-para-muitos a relação entre conjuntos é expressa por uma proporção, nas situações de co-variação, a relação é expressa por uma nova variável que estabelece a relação entre as duas, e permanece constante independentemente das alterações dessas variáveis. Um quilograma de laranjas custa 0,50€. Dois quilogramas de laranjas custarão 2€. As variáveis são definidas pelas laranjas e pelo preço, e a relação fixa é a relação "preço por quilograma". Aumentando uma variável, aumenta também a outra, aumentando o peso das laranjas, aumentará o seu custo, mas o preço por quilograma permanece constante. Esta situação, à semelhança da situação de correspondência um-para-muitos, pode também ela ser resolvida pela replicação, contudo, o tipo de quantidades envolvidas nesta situação é diferente da anterior. Na situação de co-variação os números envolvidos são fracionários, as quantidades são contínuas. Pode-se falar de meio quilograma de laranjas, mas não se pode referir meia pessoa.

Nas situações de distribuição, Nunes e Bryant (1996) consideram a existência de uma distribuição equitativa de um conjunto por um determinado número de grupos. Na distribuição, as crianças precisam de atender à relação de três variáveis: o número total do conjunto que vai ser distribuído, o número de grupos da distribuição e o número de elementos que resulta da distribuição, em cada grupo. Na distribuição há uma relação direta entre o número total do conjunto e o número de elementos por grupo. Por exemplo, na situação de distribuição de 20 doces por 4 crianças, cada criança recebe 5 doces. Aumentando o número de doces a distribuir, mantendo o número de crianças, a consequência será o aumento do número de doces por criança (passando de 20 doces para 30, cada criança vai receber não 5, mas 6 doces). Por outro lado, há uma relação inversa entre o número de grupos e o número de elementos em cada grupo. Considerando o mesmo exemplo, aumentando o número de crianças e mantendo o número de doces a distribuir, vai haver uma diminuição no número de doces por criança (os mesmos 20 doces, passando de 4 crianças para 5 crianças, cada uma vai receber não 5, mas 4 doces).

Ao contrário das situações de correspondência um-para-muitos, na situação de distribuição podem estar envolvidos números fracionários. A distribuição está relacionada com a possibilidade da quantidade a distribuir sofrer cortes sucessivos, o que origina uma transformação na relação entre o todo e as partes, ao contrário das situações de co-variação e de correspondência um-para-muitos. Um bolo partido em duas partes, se cada parte for novamente partida em duas, haverá quatro partes, se cada uma destas partes for outra vez partida em duas, resultarão oito partes e assim sucessivamente. A relação que se verifica entre o todo e as partes não é constante. O número de divisões sucessivas não tem o mesmo sentido do número de replicações sucessivas. Na situação de divisões sucessivas, o resultado não se forma numa relação permanente, mas sim numa relação crescente (2, 4, 8, 16, 32… partes), ao invés da relação que é sempre fixa nas situações de correspondência um-para-muitos e de co-variação (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14… pés), onde não há transformação na relação entre as variáveis.

Vergnaud (1983, 1996, 1997) esclarece que a análise das situações multiplicativas é profundamente diferente das situações aditivas. As relações de base mais simples que se estabelecem são quaternárias, uma vez que os problemas mais simples de multiplicação e divisão implicam a proporção simples de duas variáveis, uma relativamente à outra. Uma proporção é uma expressão de igualdade de duas relações, em que *a* está para *b* como *c* está para *d* (a / b = c / d).

As situações de proporcionalidade são a principal configuração das situações em que, necessariamente, há lugar a uma multiplicação, uma divisão, ou à sequência dessas operações. O modelo da lei binária de composição, que reflete a composição de duas quantidades, não permite identificar e relacionar algumas quantidades envolvidas nas situações de multiplicação e divisão, pelo que elas são entendidas, quase sempre, como relações entre 4 termos, logo, como situações de quarta proporcionalidade (Vergnaud, 1983). Na situação "O João comprou 4 bolos. Cada bolo custou 3€. Quanto gastou o João?", uma vez que bolos e euros não são quantidades da mesma espécie, as crianças poderão não entender como é que, adicionando bolos (1+1+1+1), o resultado será expresso em euros (12€). Esta situação é expressa numa relação de 4 termos, em que se considera o preço unitário (3€), a unidade (1 bolo), a totalidade dos bolos (4 bolos) e a totalidade de euros (12€). Segundo Vergnaud, esta relação de 4 termos permite gerar quatro classes de problemas elementares:

1) Multiplicação, onde se pretende obter o produto ("O João comprou 4 bolos. Cada bolo custou 3€. Quanto gastou o João?");
2) Divisão Partitiva, onde se pretende saber o número de elementos em cada grupo ("A professora quer partilhar 12 doces por 3 meninos. Quantos doces vai receber cada menino?");
3) Divisão por Quotas, onde é pedido o número de grupos da distribuição ("O Pedro quer dar 15 balões aos seus amigos. Cada amigo var recebe 5 balões. A quantos amigos ele vai dar balões?");

4) Quarto Proporcional, dada a relação, é solicitado o valor de um quarto elemento (“Na marmelada, a mãe coloca 1,5 Kg de açúcar por 2 kg de marmelos. Que quantidade de açúcar tem que colocar se quiser usar 7 Kg de marmelos?”).

Considerando o fator escalar como o número de replicações aplicado a ambos os conjuntos para manter a proporção constante (Nunes & Bryant, 1996), as crianças podem resolver os problemas de multiplicação recorrendo a dois procedimentos multiplicativos distintos em termos conceptuais. Atente-se à situação “O João comprou 4 bolos. Cada bolo custou 3€. Quanto gastou o João?”, e cujo esquema, de acordo com Vergnaud (1983) será expresso da seguinte forma (ver Figura 1):

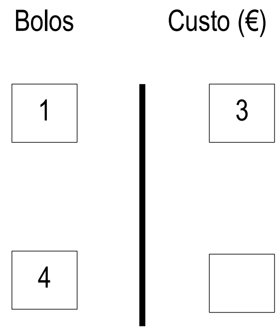


Figura 1: Problema de Multiplicação (Vergnaud, 1983, p.129).

As crianças podem resolver esta situação aplicando o fator escalar que liga as duas quantidades da mesma espécie às quantidades do outro tipo (Figura 2). Nos bolos, a relação que liga 1 bolo a 4 bolos é de 4 vezes, logo esse fator (x4) será aplicado ao custo. Nesta situação não se verifica nenhuma dimensão entre a razão das quantidades da mesma espécie, 4 bolos são 4 vezes 1 bolo, e o preço de 4 bolos são 4 vezes o preço de 1 bolo. Ou podem resolver esta mesma situação aplicando o fator da função, que consiste em transpor linearmente o fator escalar que liga 1 bolo ao seu preço (3€) e aplicar esse valor aos 4 bolos (

Figura *3*). Esta forma de atuar representa a propriedade isomórfica da função linear entre as duas quantidades de espécies diferentes, onde se estabelece, neste caso, uma dimensão de custo por unidade.

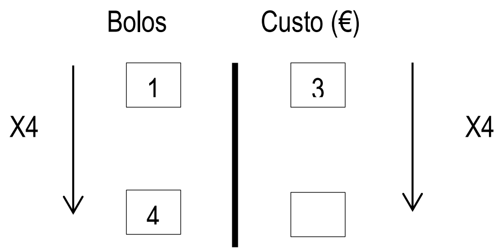


Figura 2: Resolução de problema de multiplicação aplicando o fator escalar (Vergnaud, 1983, p.130).

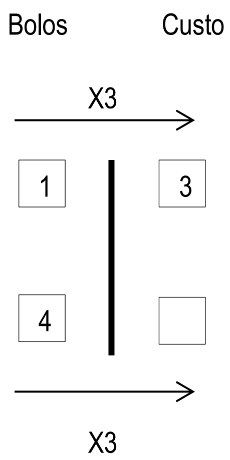


Figura 3: Resolução de problema de multiplicação aplicando o fator de função (Vergnaud, 1983, p.130).

O comportamento matemático das crianças, quando resolvem problemas, é expresso nos teoremas em ação, indicadores dos seus conceitos em ação. Em termos conceptuais, estes dois procedimentos são diferentes, apesar de, pela propriedade comutativa da multiplicação parecerem equivalentes. O raciocínio multiplicativo é assim entendido como a base da compreensão das crianças sobre relações proporcionais e funções lineares.

Estudos prévios sobre a compreensão da proporcionalidade indicam que as dificuldades com que as crianças se deparavam sobre o raciocínio proporcional parecem dever-se à sua falta de compreensão sobre o raciocínio multiplicativo. No entanto, presentemente surgem evidências de que, desde cedo, muitas crianças já têm um conhecimento informal que lhes permite resolver alguns problemas de raciocínio multiplicativo (ver Frydman & Bryant, 1988, 1994; Becker, 1993;

Nunes et al., 2007). Esse conhecimento informal, que as crianças usam para resolver problemas de multiplicação e divisão, apoia-se na correspondência de um-para-muitos. Também Piaget havia mostrado, em trabalhos pioneiros, que as crianças conseguem usar a correspondência um-para-muitos para formar conjuntos equivalentes, ainda que numa forma muito elementar (Piaget & Szeminska, 1971). Para este autor, a correspondência um-para-muitos que as crianças de 5 e 6 anos estabeleciam, era conseguida como resultado de um problema de duplicação, em que, por tentativa e erro, as crianças eram levadas a tornar múltipla a correspondência um-para-um.

Diferentes pesquisas investigaram a resolução de problemas simples de estrutura multiplicativa, por crianças com cerca de 6 anos, antes de lhes ter sido ensinada a multiplicação e divisão na escola, observando o uso da correspondência um-para-muitos na sua resolução. Quando o produto da situação é desconhecido, as crianças colocam as duas medidas em correspondência e encontram o produto pela contagem. Na situação "As 3 galinhas da quinta puseram 2 ovos cada uma." para saberem quantos ovos existem ao todo, as crianças atribuem a uma galinha 2 ovos, depois mais 2 ovos a outra galinha e mais 2 ovos à terceira galinha, e no fim contam os ovos todos. Quando a correspondência é desconhecida, as crianças partilham os elementos para encontrar a correspondência. Na mesma situação, sabendo que há 3 galinhas, e que ao todo há 6 ovos, mas desconhecendo o número de ovos que cada galinha põe, as crianças distribuem os ovos um-a-um equitativamente por cada uma das 3 galinhas (Nunes et al., 2009). O uso flexível da correspondência para construir conjuntos equivalentes é interpretado por Frydman e Bryant (1988) como indicação de que o procedimento que as crianças usam reflete a compreensão de como a correspondência um-para-muitos pode resultar em conjuntos equivalentes.

Analogamente ao que ocorre com as situações de raciocínio aditivo, no caso do raciocínio multiplicativo as crianças começam por perceber os esquemas de ação de correspondência um-para-muitos e de distribuição como independentes um do outro. À medida que vão avançando no seu conhecimento e desenvolvimento do raciocínio multiplicativo, elas vão coordenando esses esquemas de ação de forma a melhor resolverem os problemas de multiplicação e divisão (Nunes et al., 2005), e avançando para a resolução de problemas mais sofisticados.

Também nos problemas que envolvem o raciocínio multiplicativo há dificuldades desiguais, originadas quer pelos números envolvidos, quer pelos domínios aos quais a situação faz referência, dado que não se trata com igual facilidade problemas de proporcionalidade simples, como os de partilha e preço, e problemas de proporcionalidade múltipla, como os de consumo, produções, espaço, entre outros, ou mesmo os problemas de composição cartesiana.

A diversidade de casos pode, no entanto, ser identificada e considerada mediante os três grandes vetores da complexidade cognitiva, a estrutura dos problemas, os valores numéricos, e os domínios da situação e experiência (Vergnaud, 1996). O que vai desencadear, para Vergnaud (1983, 1988), três relações de base a partir das quais é possível definir todas as situações de raciocínio multiplicativo:

1) As situações de isomorfismo de medidas, cuja estrutura consiste na proporção direta de duas medidas, expresso no exemplo "O Nuno comprou 3 livros. Cada bolo custou 5 €. Ao todo o Nuno pagou 15€.";
2) As situações de produto de medidas, que consiste na composição cartesiana de duas medidas numa terceira, e tem expressão no exemplo "Três rapazes e 6 raparigas estão num baile. Todos os rapazes querem dançar com todas as raparigas. Conseguem-se formar 18 pares possíveis.";
3) As situações de proporção múltipla, onde se combinam duas proporções, uma medida é proporcional a duas medidas independentes, e traduz-se no exemplo "O consumo de leite numa escola é proporcional ao número de alunos e ao número de dias letivos".

Vergnaud (1988) sugere que a aprendizagem e a compreensão das estruturas multiplicativas se estendem por um longo período na experiência escolar, desde a compreensão das situações mais simples, como problemas simples de multiplicação e divisão, a problemas mais complexos como os de dupla proporção. A compreensão que as crianças têm das estruturas multiplicativas inicia-se informalmente, antes de entrarem na escola, em situações do dia-a-dia e com base nos esquemas de ação de correspondência um-para-muitos e distribuição. Pode-se assim considerar que as crianças compreendem algumas situações simples de raciocínio proporcional, conseguindo construir conjuntos equivalentes com base na relação fixa que se estabelece entre duas quantidades de natureza distinta.

4. Pertinência do tema

Atendendo à importância da resolução de problemas como uma competência transversal e integradora de outras competências matemáticas, surge a necessidade de apreciar em que momento poderão ser proporcionadas às crianças experiências que possibilitem o desenvolvimento do seu raciocínio aditivo e do raciocínio multiplicativo. Segundo o NCTM (2008), as experiências informais com as quatro operações devem iniciar-se na educação pré-escolar, pois o sentido das operações, enquanto conjunto das situações concretas em que, na sua resolução, se utilizam as operações aritméticas (Pires, 1994), promove a estrutura conceptual do procedimento de cálculo, quer mental, quer escrito.

Importa, então, perceber que conhecimento informal as crianças da educação pré-escolar dominam sobre as estruturas aditivas e as estruturas multiplicativas. Importa ainda perceber se estas estruturas de raciocínio se desenvolvem de forma independente uma da outra, ou se pelo contrário, o desenvolvimento das estruturas multiplicativas está dependente do conhecimento e desenvolvimento das estruturas aditivas.

Durante muito tempo pensou-se que as crianças só conseguiriam resolver problemas de estrutura multiplicativa depois de dominarem estruturas aditivas. Piaget e Inhelder (1975, 1995) assumiram a existência de uma fase aditiva preditiva do raciocínio multiplicativo, as crianças primeiro quantificam relações aditivas e só mais tarde conseguem estabelecer relações multiplicativas. Esta hipótese foi suportada por pesquisas sobre o desenvolvimento do raciocínio proporcional, onde se observava que muitos alunos apontavam soluções aditivas na resolução de problemas de proporção (ver Noelting, 1980a, 1980b; Hart, 1981, 1984; Karplus, Pulos, & Stage, 1983). Estudos mais recentes, onde foi observado que as crianças da mesma idade resolvem problemas de estrutura aditiva e alguns de estrutura multiplicativa, assumem o pensamento de Vergnaud (1983, 1988) e Thompson (1994) que defendem que o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo têm origens diferentes.

Estudos prévios foram desenvolvidos com crianças do pré-escolar, em contextos internacionais, tendo sido observado que elas conseguem resolver, com estratégias adequadas, problemas de estrutura aditiva (ver Carpenter & Moser, 1982; Riley, Greeno, & Heller, 1983; Nunes & Bryant, 1991), e alguns de estrutura multiplicativa (ver Frydman & Bryant, 1988; Becker, 1993;

Carpenter, Ansell, Franke, Fennema & Weisbeck, 1993), usando distintos esquemas de ação, sem antes terem recebido qualquer instrução formal sobre as operações aritméticas. Não são, no entanto, conhecidos estudos que analisem os desempenhos, estratégias e argumentos das crianças de pré-escolar na resolução de problemas de estrutura aditiva e multiplicativa, de acordo com todas as relações e sentidos possíveis desses mesmos tipos de problemas. Também em Portugal não foram realizados, em semelhante nível, estudos que permitam conhecer a realidade do desempenho das nossas crianças do pré-escolar.

Das pesquisas levadas a efeito com crianças do pré-escolar, em contextos internacionais, por investigadores que se debruçaram sobre a compreensão de estruturas aditivas e estruturas multiplicativas, não se registam estudos que explorem a relação entre problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa. Desconhece-se também se o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo depende da aquisição do raciocínio aditivo, uma vez que a multiplicação e divisão são operações ensinadas às crianças após o domínio da adição e da subtração, acreditando-se que as últimas são um pré-requisito para a compreensão das primeiras. Contudo, não foram realizados estudos que comparem os efeitos do raciocínio estabelecido na resolução de problemas de estrutura aditiva sobre os de estrutura multiplicativa de forma controlada, nem a interferência do raciocínio de uma sobre a outra com crianças em idade do pré-escolar, o que será explorado nesta investigação.

5. Problema em estudo

Esta investigação pretende compreender como é que as crianças do pré-escolar raciocinam quando resolvem problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa. Neste sentido, surgem as seguintes questões de investigação, e para as quais se procura resposta:

1) Compreender como raciocinam as crianças do pré-escolar perante problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa;

2) Compreender como raciocinam as crianças quando lhes são apresentados alternadamente problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa;

3) Perceber se pode ser promovido o desenvolvimento do raciocínio para resolver problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa;

4) Perceber se existe transferência de conhecimento na resolução de problemas de uma estrutura de raciocínio para outra.

5) Perceber os efeitos de uma intervenção centrada em problemas de determinada estrutura de raciocínio;

6. Organização da tese

Esta investigação encontra-se organizada em cinco capítulos. O capítulo I, “Introdução”, apresenta um quadro teórico-conceptual que clarifica alguns conceitos subjacentes ao conhecimento matemático das crianças do pré-escolar, e do desenvolvimento do raciocínio aditivo e raciocínio multiplicativo segundo a teoria dos campos conceptuais de Vergnaud. É ainda tratada a pertinência do tema em estudo, as questões de investigação levantadas e às quais se procura responder e a estrutura da tese.

No Capítulo II, “Revisão da Literatura”, faz-se um levantamento da investigação internacional produzida sobre a resolução de problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa, com sujeitos de idades compreendidas entre os 4 e os 16 anos. Apontam-se as conclusões de estudos que permitiram aos seus autores definir diferentes classificações de problemas, os níveis de dificuldade observados nos vários tipos de problemas, assim como a identificação de estratégias de resolução dos mesmos. Este capítulo organiza-se nas seguintes secções: Construção do pensamento matemático; Problemas de estrutura aditiva (classificação de problemas de estrutura aditiva; dificuldade dos problemas de estrutura aditiva; estratégias de resolução); problemas de estrutura multiplicativa (classificação de problemas de estrutura multiplicativa; dificuldade dos problemas de estrutura multiplicativa; estratégias de resolução); considerações finais, onde é apesentada uma síntese do estado da arte e se identificam aspetos que ficam por esclarecer e sobre os quais se procura resposta com a presente investigação.

O Capítulo III - Estudo 1 integra o estudo que se debruça sobre a compreensão que as crianças do pré-escolar têm sobre problemas de estrutura de raciocínio aditivo e multiplicativo. Neste capítulo faz-se um breve enquadramento ao estudo e apresentam-se as opções metodológicas. Descrevem-se e analisam-se os resultados obtidos sobre os desempenhos das crianças de 4, 5 e 6 anos na resolução de problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa apresentados separadamente, as suas estratégias e argumentos utilizados, seguindo o paradigma da investigação quantitativa. Por fim, apresenta-se a discussão dos resultados e as considerações finais inerentes ao estudo, e que levantam outras questões, que se pretendem ver respondidas no estudo seguinte.

O Capítulo IV - Estudo 2 compreende o estudo que é dedicado à promoção do desenvolvimento dos raciocínios aditivo e multiplicativo das crianças de 5 e 6 anos. Faz-se um enquadramento ao estudo realizado e apresentam-se as opções metodológicas tomadas. Seguindo uma metodologia de investigação mista, assume-se como um estudo quase-experimental, cujo objetivo é compreender como raciocinam as crianças do pré-escolar quando lhes são apresentados conjuntamente problemas de estrutura aditiva e multiplicativa, e perceber se pode ser promovido o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo. Descrevem-se e analisam-se os resultados obtidos, apresenta-se a discussão dos resultados e as considerações finais referentes a este estudo.

O Capítulo V - Conclusões apresenta as principais conclusões da investigação, tendo como referência o objeto de estudo e as questões de investigação traçadas. São ainda apresentadas as implicações educacionais da investigação realizada, reconhecidas limitações da investigação desenvolvida, e tecidas algumas recomendações para futuras pesquisas que abordem esta problemática.

CAPÍTULO II - REVISÃO DA LITERATURA

Introdução

Este capítulo procura apresentar uma visão sobre o estado da arte no âmbito do conhecimento dos raciocínios aditivo e multiplicativo. Integra as secções: Construção do raciocínio aditivo e raciocínio multiplicativo; Problemas de estrutura aditiva (classificação de problemas de estrutura aditiva; dificuldade dos problemas de estrutura aditiva; estratégias de resolução); Problemas de estrutura multiplicativa (classificação de problemas de estrutura multiplicativa; dificuldade dos problemas de estrutura multiplicativa; estratégias de resolução); Considerações finais, onde se colocam algumas questões decorrentes das investigações internacionais e se contextualiza a necessidade da presente investigação.

1. Construção do raciocínio aditivo e multiplicativo

De uma forma geral, o ensino de vários aspetos da matemática procede-se numa clara sequência lógica de tópicos, e com alguns aspetos claramente separados. As crianças primeiro aprendem a sequência numérica, depois, a escrever os números, e de seguida as operações aritméticas com a escrita dos números, primeiro a adição, depois a subtração, mais tarde aprendem a multiplicação e por fim a divisão (Fuson, 2004). O ensino das operações aritméticas começa anos antes do ensino das proporções e dos modelos matemáticos (Nunes et al., 2009). O sistema educativo português reflete esta sequencialidade no seu Programa de Matemática para o Ensino Básico. Nele é adotada uma estrutura curricular sequencial onde a aquisição de conhecimentos depende de outros adquiridos previamente com a introdução de temas de forma progressiva, e onde também a multiplicação e divisão surgem depois da adição e subtração (DGE, 2015).

A sequenciação no ensino das operações observa-se também nas características dos sujeitos das pesquisas. Na maior parte das investigações, as crianças que participam em estudos sobre multiplicação e divisão são mais velhas do que os sujeitos intervenientes em pesquisas sobre adição e subtração (Nunes et al., 2009). Na maioria das teorias (ver Karplus & Peterson, 1970;

Noelting, 1980a; Hart, 1981), o raciocínio aditivo antecede o raciocínio multiplicativo. Contudo, novas investigações (ver Kouba, 1989; Becker, 1993; Carpenter et al., 1993; Frydman & Bryant, 1988, 1994) parecem demonstrar que o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo são iniciados de maneira informal pelas crianças, antes de elas receberem formalmente instrução sobre as quatro operações aritméticas na escolaridade básica.

Olhando atrás, para as primeiras investigações sobre o raciocínio da criança, constata-se que Piaget foi o impulsionador da maioria das teorias ainda vigentes sobre a forma como as crianças constroem o seu conhecimento matemático. Defensor de que o desenvolvimento mental da criança surge como uma sucessão de grandes construções, em que cada uma prolonga a anterior, a reconstrói num novo plano, que depois é novamente ultrapassada por outra mais ampla, Piaget (1924) considera a divisão do desenvolvimento mental da criança em grandes estágios, em que cada uma das fases decorre da precedente (Piaget & Inhelder, 1995). Como tal, não é possível antecipar a aquisição de determinados conhecimentos sem antes estarem consolidados outros que lhes servirão de base. Nesse sentido, Piaget e Inhelder não consideram possível a compreensão da composição multiplicativa antes da composição aditiva.

A composição aditiva de classes, reunião das classes num agrupamento coerente de inclusão hierárquica, necessita, segundo Piaget e Szeminska (1971), que a criança tenha adquiridas as noções de invariância e conservação das totalidades numéricas, para conceber como permanentes as relações da parte e do todo e construir relações coerentes de inclusões. Ora, para estes autores, uma vez que ela não consegue pensar simultaneamente no todo e nas partes antes dos 7 anos, a composição aditiva de classes assume-se como uma grande dificuldade. Conceber o todo como resultante de uma composição aditiva das partes é entender a relação de inclusão, contudo, para Piaget, quando a criança pensa na parte esquece o todo, e vice-versa. Quando a criança pensa no todo, consegue representar as partes ainda não dissociadas, mas quando procura dissociar uma das partes, esquece o todo e não consegue tê-lo em consideração. Ela não consegue estabelecer uma hierarquia ou uma inclusão permanente entre o todo e as partes, assim que o todo se dissocia, as partes deixam de estar incluídas nele, da mesma forma que é muito difícil, para a criança até aos 6 anos, compreender que a classe total é maior do que a classe incluída.

A síntese aditiva das partes no todo só é possível de acordo com as construções intelectuais reversíveis operadas pelas crianças. A reversibilidade traduz-se por conceber as partes em função do todo e vice-versa, ou seja, efetuar a operação inversa tanto quanto a operação direta. A irreversibilidade do pensamento e da representação da criança impedem-na de conseguir passar de uma operação para outra, de dominar a decomposição necessária à compreensão da inclusão e das relações. O seu pensamento não tem mobilidade suficiente para conduzir as operações, para combiná-las e dissociá-las, para construir e reconstruir simultaneamente, o que, segundo Piaget, só se constitui por volta dos 7-8 anos (Piaget & Szeminska, 1971).

Para Piaget e Szeminska (1971), o término da composição aditiva é considerado quando a criança percebe a igualdade permanente das partes, entendidas como unidades, e a igualdade da sua soma como o todo inicial. Deste modo se compreende a passagem da composição aditiva à composição multiplicativa. Piaget e Szeminska consideram a composição multiplicativa como uma distribuição equivalente de elementos que se correspondem biunivocamente entre si, ou seja, considerando a multiplicação de "*a* x *b*", em que *a* pode ser entendido como um determinado número de grupos e *b* como o número de elementos em cada grupo, ou vice-versa (*a* pode ser entendido como o número de elementos em cada grupo e *b* como o número de grupos), que se correspondem em ambos os sentidos, numa relação equivalente.

Numa primeira fase, a criança não é capaz de perceber a correspondência termo-a-termo durável entre dois conjuntos de objetos, como tal, também não é capaz de compreender que esses conjuntos se mantêm correspondentes entre si quando correspondem a um terceiro conjunto. Logo, não é capaz de realizar multiplicações numéricas, mesmo sob a forma de duplicações. Piaget e Szeminska (1971) sustentam esta ideia com a reação da criança que, colocando 2 flores em cada uma das 10 jarras não consegue perceber que terá que ter 20 tubos para colocar, posteriormente, uma flor por tubo. Numa segunda fase, a criança começa por resolver o problema da duplicação, mas por tentativa e erro, não ainda por operação, ou seja, por uma multiplicação abstrata e imediata. Através de ensaios de tentativa e erro, descobre o resultado pela própria correspondência que, pouco a pouco, se torna múltipla. É nesta passagem da correspondência "1 para 1" para a correspondência de "2 para 1" que reside o progresso de uma fase para outra, em direção à multiplicação, ou seja, que se dá a passagem da fase aditiva para a fase multiplicativa. No entanto, apenas na terceira fase a criança consegue, pela compreensão imediata, perceber as relações de correspondência múltipla e são capazes de a generalizar, isto é, compreendendo a correspondência de "2 para 1", generalizam para outros valores como "3 para 1", "4 para 1", ou "5 para 1".

Piaget e Szeminska (1971) exemplificam estas conclusões com o trabalho desenvolvido com crianças de 4 e 5 anos, quando lhes é colocada a proposta de fazerem corresponder, primeiramente 10 flores a 10 jarras, numa correspondência de “1 para 1”, de seguida propõe que 20 flores sejam colocadas nas 10 jarras, desta vez estabelecendo a correspondência “2 para 1” e por fim propõe às crianças que coloquem as flores que estão nas jarras (20) em tubos, mas onde só cabe uma flor em cada um, e indaga sobre a quantidade de tubos que irão precisar, verificando que estes sujeitos não conseguem esta elasticidade de raciocínio. Conclui então que, enquanto a criança não consegue a reversibilidade de pensamento, não domina a composição aditiva, necessária à aquisição da composição multiplicativa.

Discípulo de Piaget, Vergnaud analisou como se processa o pensamento matemático da criança. Vergnaud (1979) sugere que o conhecimento está organizado em campos conceptuais, conjunto informal de situações, problemas, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento que estão intimamente relacionados, e que, para serem tratados, necessitam de procedimentos e representações de diferentes tipos, mas estreitamente interligados entre si (Vergnaud, 1982, 1983, 1988). Este autor defende que o desenvolvimento dos campos conceptuais se processa ao longo de um grande período de tempo, com experiência, maturidade e aprendizagem através das experiências do dia-a-dia dentro e fora da escola, e vai desde os 3-4 anos até, pelo menos, aos 15-16 anos para as estruturas aditivas, e desde os 7 anos até aos 18 anos para a compreensão das estruturas multiplicativas.

O seu contributo revelou-se importante dado que a estrutura dos campos conceptuais possibilita estudar a organização de ideias, conceptualizações e representações que se assumem interligadas, delinear os domínios do conhecimento, cobrindo uma diversidade de situações, tipos e níveis de análise da mesma classe de problemas. O campo conceptual das estruturas aditivas engloba todas as situações nas quais são usadas a adição ou subtração. O campo conceptual das estruturas multiplicativas consiste em todas as situações que podem ser analisadas como problemas de proporção simples ou múltiplas, nos quais normalmente é necessário multiplicar ou dividir.

Vergnaud (1981, 1982, 1986, 1988) considera que as estruturas aditivas e multiplicativas dizem respeito a esquemas e relações mentais diferentes, independentes portanto, tal como defendem Nunes et al. (2009). Parece, portanto, ser claro que o raciocínio aditivo se distingue do raciocínio multiplicativo, e são de tal forma distintos que são considerados domínios conceptuais separados. A relação conceptual entre a adição e a subtração, e entre a multiplicação e divisão remete para uma interpretação dos problemas baseada na sua estrutura. Assim, distinguem-se problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa.

2. Problemas de estrutura aditiva

Vários autores debruçaram-se sobre a capacidade e desempenho das crianças na resolução de problemas de adição e subtração. De uma forma geral consideraram que a criança torna-se capaz de resolver problemas simples de adição e subtração quando consegue coordenar essa atividade prática com a contagem (Fuson, 1992a; Nunes et al., 2009).

Piaget e Szeminska (1971) defendem que a compreensão das operações aritméticas tem origem nos “esquemas de ação” das crianças. Os autores entendem por esquemas de ação a representação da ação que a criança executa. Nesta representação, apenas os aspetos essenciais da ação têm importância, e não os objetos sobre os quais é exercida a ação. Piaget e Szeminska identificam três esquemas de ação relacionados com o raciocínio aditivo: juntar, retirar e estabelecer a correspondência termo-a-termo. A coordenação dos diferentes esquemas de ação do raciocínio aditivo é essencial à construção do conceito de adição e subtração, e necessários à resolução de problemas complexos. Enquanto as crianças não conseguirem coordená-los de forma a perceberem a relação inversa que se estabelece entre a adição e subtração, e realizarem mentalmente a relação que assegura a totalidade das partes compreendendo a síntese aditiva das partes num todo, não conseguirão passar para os conceitos operatórios. Este processo só é possível devido às construções reversíveis operadas pelas crianças, e a irreversibilidade do pensamento que elas apresentam antes dos 7 anos não lhes permite adquirir a capacidade da decomposição necessária à análise e síntese das relações.

Dados os primeiros passos sobre a compreensão do raciocínio aditivo, outros investigadores se seguiram a Piaget na pesquisa sobre o modo como as crianças pensam e resolvem problemas de estrutura aditiva. Groen e Parkman (1972) desenvolveram estudos no sentido de perceber os processos usados pelas crianças na adição de dois números inteiros, apresentando a 37 crianças com idades entre os 6 e 7 anos, do 1.º ano da escola básica da Califórnia, 55 problemas de adição com o resultado desconhecido, cuja soma seria inferior ou igual a 9. Os autores consideram que a adição de dois números inteiros é um processo reprodutivo e reconstrutivo. Reprodutivo na medida em que a criança, para realizar uma adição, aprendeu e memorizou uma associação entre os dois dígitos e a sua soma; e reconstrutivo, na medida em que a adição, estando associada a uma espécie de processo de contagem, envolve a aplicação de regras aprendidas, mais do que a memorização de factos numéricos. São identificados por Groen e Parkman cinco modelos de contagem usados na resolução de problemas de adição: i) *A Contagem Começa no Zero*, onde ambos os números são adicionados através de contagem um a um; ii) *A Contagem Começa no Algarismo Mais à Esquerda* no algoritmo e o algarismo mais à direita é adicionado, um a um; iii) *A Contagem Começa no Algarismo Mais à Direita* no algoritmo e o algarismo mais à esquerda é adicionado, um a um; iv) *A Contagem Começa no Algarismo Menor* e o algarismo maior é adicionado, um a um; v) *A Contagem Começa no Algarismo Maior* e o algarismo menor é adicionado, um a um.

Mais tarde, aplicando dois estudos experimentais a crianças do pré-escolar, de 4 e 5 anos, que já dominavam a contagem, Groen e Resnick (1977) acrescentaram uma nova estratégia de adição, às que haviam identificado: *Ambos os Conjuntos São Inicialmente Contados Separadamente*, as duas quantidades são posteriormente adicionadas e é contado o conjunto que resulta da adição. Nestes estudos, ambos com cinco crianças, foram propostos 24 problemas de adição, com o resultado desconhecido. Cada uma das parcelas continha números de 1 a 5 e a soma resultava numa quantidade inferior a 10.

Vergnaud e Durand (1976) consideram que a solução dos problemas de aritmética elementar é pouco estudada. Refletindo sobre a forma como as quatro operações básicas são apresentadas às crianças, constatam que o aspeto clássico ($a + b = c$; $a - b = c$; $a \times b = c$; $a \div b = c$) baseia-se na ideia da lei binária de composição, que entende os termos como sendo da mesma natureza, dando lugar a uma composição de duas medidas, isto é, que c resulta da composição de a e b. Estes autores constatam que essa conceção matemática não satisfaz as condições reais da subtração e da divisão. A subtração de a e b, enquanto números naturais, não resulta num número natural se a for inferior a b. Da mesma forma para a divisão não resultará um número natural se a não for múltiplo de b. Desta forma, Vergnaud e Durand introduzem a análise dos problemas segundo a sua estrutura. No caso dos problemas de estrutura aditiva, consideram que muitos problemas envolvem uma sequência temporal e os diferentes números implicados não podem ser apreciados num mesmo plano, dado que alguns representam estados e outros representam transformações. Distinguem, assim, cinco categorias de relações numéricas aditivas: I) Duas medidas combinam-se numa terceira; II) Uma transformação opera sobre uma medida para resultar numa medida; III) Duas transformações combinam-se numa terceira; IV) Uma transformação opera num estado relativo para resultar num outro estado relativo; V) Dois estados relativos combinam-se num terceiro.

Vergnaud e Durand (1976) consideram que, analisando os problemas segundo os seus esquemas e relações, adquire-se alguma compreensão sobre a dificuldade subjacente a determinado tipo de problemas. Num estudo que desenvolveram com 140 crianças francesas dos 6 aos 12 anos, e às quais propuseram problemas de estrutura aditiva, em duas situações de transformação (Uma transformação opera sobre uma medida para resultar numa medida; e Duas transformações combinam-se numa terceira), puderam observar que não existe uma só maneira de resolver um problema de determinada classe, estabelecendo a distinção entre cálculo numérico, operações aritméticas necessárias à resolução do problema, e cálculo relacional, operações de pensamento necessárias à interpretação e manipulação das relações envolvidas nos problemas. Consideraram ainda a existência de diferentes graus de dificuldade na resolução dos problemas. Estes autores observaram que os cálculos relacionais relativos à combinação de transformações (Transformação – Transformação - Transformação) são mais difíceis do que os cálculos relativos à aplicação de uma transformação sobre um estado (Estado – Transformação – Estado), sendo mesmo especialmente difíceis para as crianças da escolaridade básica (1.º Ciclo do Ensino Básico). Nos problemas em que ocorre uma transformação que altera um estado inicial num estado final, os autores referem existir uma maior dificuldade quando o estado inicial é desconhecido, comparativamente com o estado final desconhecido.

Carpenter, Hiebert e Moser (1981) ponderam a existência de um conhecimento informal nas crianças que lhes permite resolver, com estratégias adequadas, problemas de adição e subtração antes de receberem qualquer instrução sobre as operações. Nesse sentido, desenvolveram um estudo onde participaram 43 crianças dos dois primeiros anos da escolaridade básica dos Estados Unidos da América e onde procuraram, também, perceber quais os problemas mais difíceis e caracterizar as estratégias usadas pelas crianças. Carpenter et al. (1981) adotaram uma classificação baseada na estrutura semântica dos problemas, mas considerando a necessidade de introduzir novas categorias, distinguiram quatro classes de problemas: I) Juntar/Separar; II) Parte-Parte-Todo; III) Comparação; IV) Equalização.

Os problemas de Juntar/Separar consideram uma quantidade inicial que é transformada através de uma ação direta ou implícita e que origina outra quantidade. Os problemas de Parte-Parte-Todo representam uma relação estática que envolve duas quantidades distintas: a parte e o todo. Os problemas de Comparação envolvem a comparação de duas quantidades separadas. Os problemas de Equalização partilham características com os problemas Juntar/Separar e com os de Comparação, dois conjuntos são comparados, e a questão recai sobre quanto é que um conjunto precisa de ser alterado para ficar com o mesmo número do outro conjunto. A síntese da classificação de problemas adotada por Carpenter et al. (1981) é apresentada na Tabela 1.

Tabela 1 - Classificação de problemas de estrutura aditiva, adaptada de Carpenter, Hierbert e Moser (1981).

Tipos de problemas	Exemplo
Juntar/Separar	A Rita tem 5 rebuçados, o João deu-lhe 2. Quantos rebuçados tem a Rita agora? A Rita tem 5 rebuçados, deu 2 ao João. Quantos rebuçados tem agora a Rita?
Parte-Parte-Todo	O José tem 5 peixinhos vermelhos e dois dourados. Quantos peixinhos tem, ao todo, o José?
Comparação	O Tiago tem 5 cromos, o João tem 3. Quantos cromos tem o Tiago a mais do que o João?
Equalização	O Tiago tem 5 cromos, o João tem 3. Quantos cromos temos que dar ao João para que tenha a mesma quantidade que o Tiago?

No estudo que realizaram, Carpenter et al. (1981) propuseram às crianças 10 problemas de estrutura aditiva: dois problemas de Parte-Parte-Todo (um de adição e um de subtração), dois problemas de Comparação (um de adição e um de subtração), dois de Equalização (dois de subtração, um de aumento e um de diminuição) e quatro problemas de Juntar/Separar (dois com a transformação desconhecida, um com o início desconhecido e outro com o resultado desconhecido). Os resultados obtidos mostraram que os problemas de adição de Juntar e os problemas de Parte-Parte-Todo tiveram mais sucesso do que os restantes, sendo que 80% das crianças envolvidas chegaram ao resultado correto, e mais de 88% das crianças usaram a estratégia correta. Os problemas de Comparação foram considerados os mais difíceis, sendo que 23 crianças deram como resposta um dos números mencionados no enunciado do problema, errando a questão. Este estudo revelou ainda que as crianças não foram tão bem sucedidas nos problemas de subtração como nos de adição. Contudo, mais de metade das crianças conseguiu ter sucesso na resolução dos problemas de subtração, tendo sido usadas estratégias corretas por ¾ das crianças. Foram identificadas, pelos autores, estratégias de resolução distintas nos problemas de adição e subtração.

Na resolução dos problemas de adição observaram como estratégias:

i) *Contando Tudo*: usada com recurso à manipulação de blocos, dedos, ou mentalmente. Quando os blocos são usados, ambas as quantidades estão representadas e a união das duas quantidades é recontada, começando no um. Se a contagem é feita mentalmente ou com dedos, a sequência da contagem começa no um e termina quando o total das duas quantidades é encontrado.

ii) *Contando do Número Menor*: nesta estratégia, a contagem começa no número mais pequeno, no menor número dado no problema ou no sucessor desse.

iii) *Contando do Número Maior*: é semelhante à anterior, mas a contagem começa no número maior dado no problema ou no sucessor desse.

iv) *Facto Numérico*: a criança dá a resposta com o resultado de factos aditivos básicos conhecidos.

v) *Heurística*: esta estratégia é aplicada para gerar a solução a partir de factos numéricos básicos. Geralmente está baseada em dobros ou números cuja soma dá 10.

A contagem a partir do menor número dado e a partir do maior número dado foi a estratégia dominante nas crianças que usaram os dedos ou não fizeram uso de nenhuma modelação.

Para a subtração, Carpenter et al. (1981) identificaram quatro estratégias:

i) *Separar*: a quantidade maior é inicialmente representada e a quantidade menor é retirada desta. Quando a criança usa blocos, constrói o conjunto maior e retira deste, separando um a um, a quantidade dada no problema, contando de seguida os elementos que restaram, encontrando, desta forma, a resposta. Numa representação mais abstrata da mesma ação, a criança realiza uma contagem decrescente começando com o número maior dado. A sequência decrescente terá tantos números ditos quantos a quantidade menor mencionada no problema, sendo que o último número pronunciado na sequência da contagem, determina a resposta ao problema.

ii) *Separar Para*: esta estratégia é semelhante à anterior, no entanto, a quantidade que é separada não é a quantidade menor dita no problema, mas a criança vai retirando/separando os elementos até que reste a menor quantidade mencionada no enunciado. Quando ela usa objetos, constrói o conjunto maior e vai retirando elementos um a um, até que restem tantos quantos a menor quantidade mencionada no problema, contando de seguida os elementos que retirou para encontrar a resposta. Numa representação mais abstrata desta estratégia, a criança realiza a contagem decrescente começando no maior número mencionado e termina no menor número referido no problema, sendo a resposta a quantidade de números usados na sequência de contagem.

iii) *Juntar*: a criança começa com a menor quantidade mencionada no problema e constrói a maior quantidade. Usando blocos, ou objetos, a criança coloca a menor quantidade, adicionando a este conjunto, um a um, os objetos necessários para que este conjunto fique com o número de elementos correspondente à maior quantidade mencionada no problema. Para saber a resposta ao problema, ela conta o número de objetos adicionados. Uma forma mais abstrata desta estratégia é conseguida pela contagem. A criança começa a contagem no menor número dito no problema e continua a contagem até mencionar o maior número referido no enunciado, sendo a resposta obtida pela quantidade de números ditos na sequência da contagem.

iv) *Correspondência*: esta é uma estratégia só possível com objetos. A criança coloca as duas quantidades de objetos mencionadas no problema, estabelecendo a correspondência um-a-um entre os elementos dos dois conjuntos. Conta depois os elementos que ficam sem correspondência para obter a resposta.

Carpenter et al. (1981) observam que algumas estratégias modelam naturalmente a ação descrita no problema. Os problemas de Separar são facilmente resolvidos pela estratégia de

Separar, bem como a ação que está implícita nos problemas de Juntar, é maioritariamente modelada pela estratégia de *Juntar*. Mesmo a estratégia de *Correspondência* parece estar mais adequada para os problemas de Comparação de conjuntos. Já os problemas de Parte-Parte-Todo, em que não há nenhuma ação descrita, as estratégias de *Juntar* ou *Separar* não são as que modelam exatamente a relação entre as quantidades, nem mesmo a *Correspondência*. Ao contrário dos problemas de Equalização, uma vez que envolvem uma comparação e alguma ação implícita, todas as estratégias, *Juntar*, *Separar* e *Correspondência*, podem ser apropriadas. Assim, os problemas de Equalização aditiva podem ser resolvidos pela estratégia de *Correspondência* ou de *Juntar*, dado que envolvem uma comparação de duas quantidades e a decisão de resolução passa por adicionar ao conjunto menor determinada quantidade para ficar com a mesma quantidade do conjunto maior; os problemas de Equalização subtrativa, uma vez que envolvem remover elementos do conjunto maior para que este fique com o mesmo número de elementos que o conjunto menor, podem ser modelados pela estratégia de *Correspondência* ou pela estratégia de *Separar Para*.

Carpenter et al. (1981) concluem que os problemas verbais poderão ser o melhor meio para as crianças aprenderem a adição e subtração, mais do que usar estas operações como uma aplicação de algoritmos ensinados. Através dos problemas verbais contextualizados, as crianças desenvolverão a sua habilidade de analisar a estrutura dos problemas e desenvolver um conceito mais amplo das operações.

Também no Reino Unido, Hughes (1981, 1986) partilha da opinião de Carpenter et al. (1981) referindo que as crianças conseguem resolver alguns problemas simples de adição e subtração quando estes não lhes são apresentados em tarefas com códigos formais. Este autor defende que as crianças de 3, 4 e 5 anos têm mais sucesso quando resolvem os problemas que lhes são propostos com ajuda de materiais, mesmo que imaginados. Hughes (1981) desenvolveu um estudo com 60 crianças de 3, 4 e 5 anos do Reino Unido, propondo-lhes a resolução de problemas simples de adição e subtração. O seu objetivo era analisar a sua capacidade na resolução de problemas, com recurso a materiais como apoio, tendo concluído que as crianças têm mais sucesso nas tarefas que envolvem materiais concretos ou imaginados, especialmente envolvendo números pequenos, ao contrário das tarefas com código formal, sem material concreto que seja usado ou mencionado. Para este autor, estes resultados indicam que, se as crianças conseguem resolver com sucesso problemas simples de adição e subtração, certamente que elas compreendem a natureza da adição e subtração.

Os mesmos resultados são partilhados por Carpenter e Moser (1982), sobre o sucesso das crianças quando recorrem a materiais para apoiar o seu raciocínio na resolução de problemas, baseados num estudo que desenvolveram com crianças de 4 e 5 anos norte-americanas. Nessa pesquisa procuraram perceber o desempenho das crianças do pré-escolar na resolução de problemas de estrutura aditiva, recorrendo a materiais concretos como apoio à resolução das tarefas, bem como o seu desempenho relativo ao tamanho dos números usados (maior ou menor que 10). Estes autores concluem que as crianças desempenharam melhor as tarefas propostas quando recorreram a blocos como apoio na resolução dos problemas. Em problemas Parte-Parte-Todo, com números inferiores a 10, foi observado 78,5% de sucesso quando as crianças puderam usar blocos, e de 68% quando não puderam recorrer a material de apoio. Quando os números estavam acima de 10 e o uso de dedos se tornou complicado, o sucesso já desceu para 60,5% com recurso a blocos e 36,5% de respostas corretas sem o apoio de blocos. Nos problemas de Transformação, 42% das crianças de 4 anos e 61% das crianças de 5 anos acertaram com números grandes. Carpenter e Moser concluem que as crianças do pré-escolar resolvem com facilidade alguns problemas de Transformação e Combinação antes de terem conhecimento de factos aritméticos.

Vergnaud (1982) continua a interpretar os problemas de acordo, não só com a sua estrutura, mas com as operações de pensamento necessárias à sua resolução e acrescenta uma sexta categoria à classificação que havia sido anteriormente proposta por Vergnaud e Durand (1976): VI - Duas medidas são ligadas por um estado relativo (Relação Estática Ligando Duas Medidas). Vergnaud (1982, 1986) considera que qualquer situação pode referir-se a uma combinação de relações de base, com dados conhecidos e desconhecidos e identifica seis relações de base a partir das quais é possível considerar todos os casos de adição e subtração: I) Composição de Duas Medidas; II) Transformação Ligando Duas Medidas; III) Relação Estática Ligando Duas Medidas; IV) Composição de Duas Transformações; V) Transformação Ligando Duas Relações Estáticas; VI) Composição de Duas Relações Estáticas. Cada uma das classes de problemas pode ser subdividida em subclasses, refletindo as quantidades desconhecidas e a direção da relação descrita no problema, positiva ou negativa. Analisando mais pormenorizadamente cada uma das classes, Vergnaud ilustra cada tipo de problemas com diagramas, símbolos e notações especiais, conforme se pode observar na Figura 4.

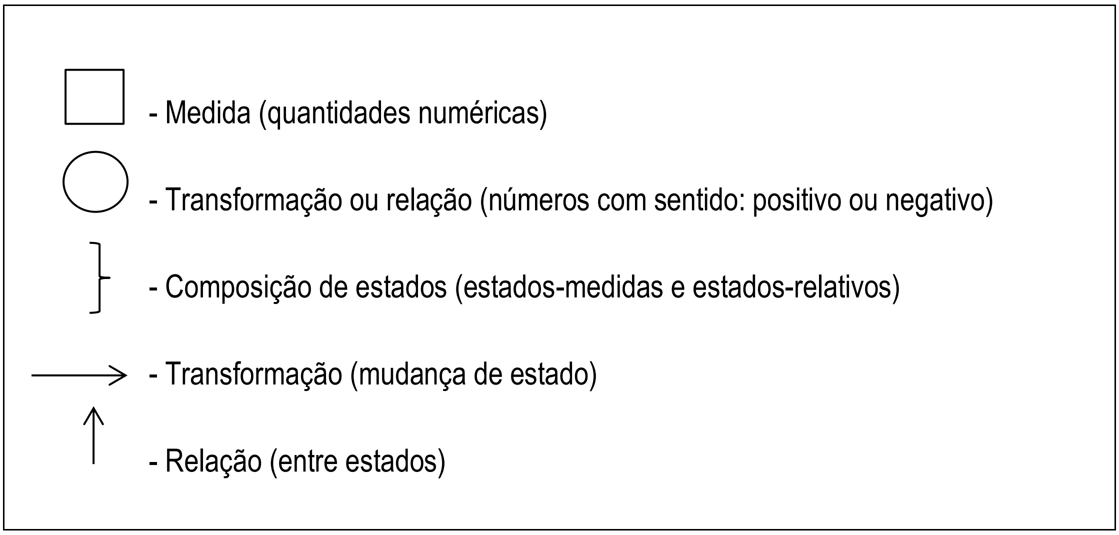


***Figura 4*:** Símbolos e notações das relações aditivas (Vergnaud, 1982; 1986).

I – Problemas de *Composição de Duas Medidas*

São aqueles em que duas partes são juntas, formando um todo (exemplo, "A Maria tem 3 flores na mão direita e 4 na mão esquerda. Ao todo ela tem 7 flores."). Este tipo de problemas traduz-se no seguinte esquema:

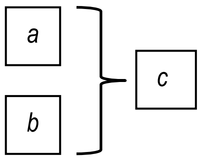


Figura 5: Representação dos problemas de Composição de Duas Medidas (Vergnaud, 1982).

Neste caso distinguem-se duas subclasses de problemas: 1) encontrar *c* sabendo *a* e *b;* 2) encontrar *a* ou *b* sabendo *c.*

II – Problemas de *Transformação Ligando Duas Medidas (Estado – Transformação – Estado)*

Estes problemas são caracterizados por um aspeto dinâmico, ou uma transformação no tempo, eles apresentam um estado inicial que depois é transformado por uma ação positiva ou negativa, dando origem a um estado final (exemplo, "O Pedro tinha 17 berlindes antes do jogo. Perdeu 4 berlindes. Agora tem 13 berlindes."). Traduz-se no seguinte esquema:

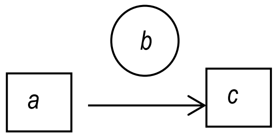


Figura 6: Representação dos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas (Vergnaud, 1982).

Esta categoria pode ser subdividida em seis subclasses de problemas, mediante a quantidade desconhecida (*a, b ou c*) e a direção da transformação (positiva ou negativa).

III – Problemas de *Relação Estática Ligando Duas Medidas (Estado – Relação – Estado)*

Estes problemas são os que apresentam duas medidas que são ligadas entre si por uma relação estática (exemplo, "O Pedro tem 8 berlindes. Ele tem mais 5 do que o João. O João tem 3 berlindes."). Tem expressão no seguinte esquema:

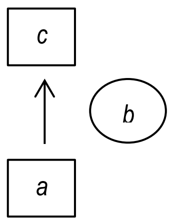


Figura 7: Representação dos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas (Vergnaud, 1982).

Também nesta classe podem-se ser identificadas seis subclasses, dependendo da quantidade desconhecida no problema (*a, b* ou *c*) e a direção da relação (positiva ou negativa).

IV – Problemas de *Composição de Duas Transformações (Transformação – Transformação – Transformação)*

Este tipo de problemas é caracterizado por duas transformações que são compostas originando outra transformação (exemplo, “O Pedro ganhou 6 berlindes de manhã, perdeu 9 berlindes à tarde. Ao todo ele perdeu 3 berlindes.”). O esquema que representa esta classe de problemas é o seguinte:

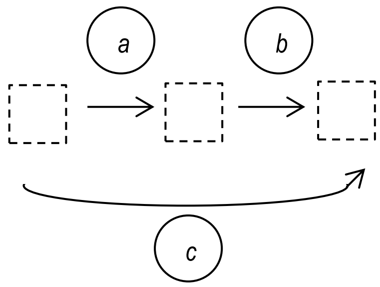


Figura 8: Representação dos problemas de Composição de Duas Transformações (Vergnaud, 1982).

Nesta classe de problemas há muitas subclasses. Podem-se encontrar três grandes subclasses dependendo da quantidade desconhecida (*a, b* ou *c*) e dentro de cada uma destas subclasses podem ser encontradas ainda mais oito em cada uma, dependendo das quantidades. Por exemplo, se *a* e *c* são conhecidos e se pretende encontrar o valor de *b*, obtém-se os seguintes casos, resumidos na Tabela 2.

Tabela 2 - Exemplo de representação da classe Composição de Duas Transformações (Adaptado de Vergnaud, 1982).

a e *c* conhecidos, *b* desconhecido				
	$a > 0$; $c > 0$	$a < 0$; $c < 0$	$a > 0$; $c < 0$	$a < 0$; $c > 0$
Valor de $a < c$				
Valor de $a > c$				

V- Problemas de *Transformação Ligando Duas Relações Estáticas (Relação – Transformação – Relação)*

São problemas que se caracterizam pelo aparecimento de uma nova relação estática na sequência da transformação de outra relação estática (exemplo, "O Pedro deve 6 cromos ao Tomás, deu-lhe 4. O Pedro ainda lhe deve 2 cromos."). O seguinte esquema traduz esta classe de problemas:

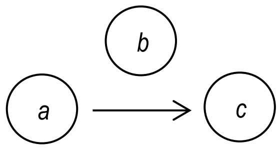


Figura 9: Representação dos problemas de Transformação Ligando Duas Relações Estáticas (Vergnaud, 1982).

Dentro desta classe há muitas subclasses, dependendo da quantidade desconhecida (*a, b* ou *c*) e dos valores (positivos ou negativos) de cada uma dessas quantidades.

VI – Problemas de *Composição de Duas Relações Estáticas (Relação – Relação – Relação)*

Neste tipo de problemas duas relações são compostas dando origem a outra relação (exemplos: (a) "O Pedro deve 8 cromos ao Tomás, mas o Tomás também lhe deve 6. Por isso o Pedro deve-lhe 2 cromos."; (b) "O João tem 7 cromos a mais do que o Paulo. O Paulo tem 3 cromos a menos do que o Rui. O João tem 4 cromos a mais do que o Rui."). Nesta classe não há uma ordem temporal, pelo que existem muitas representações possíveis da mesma situação.

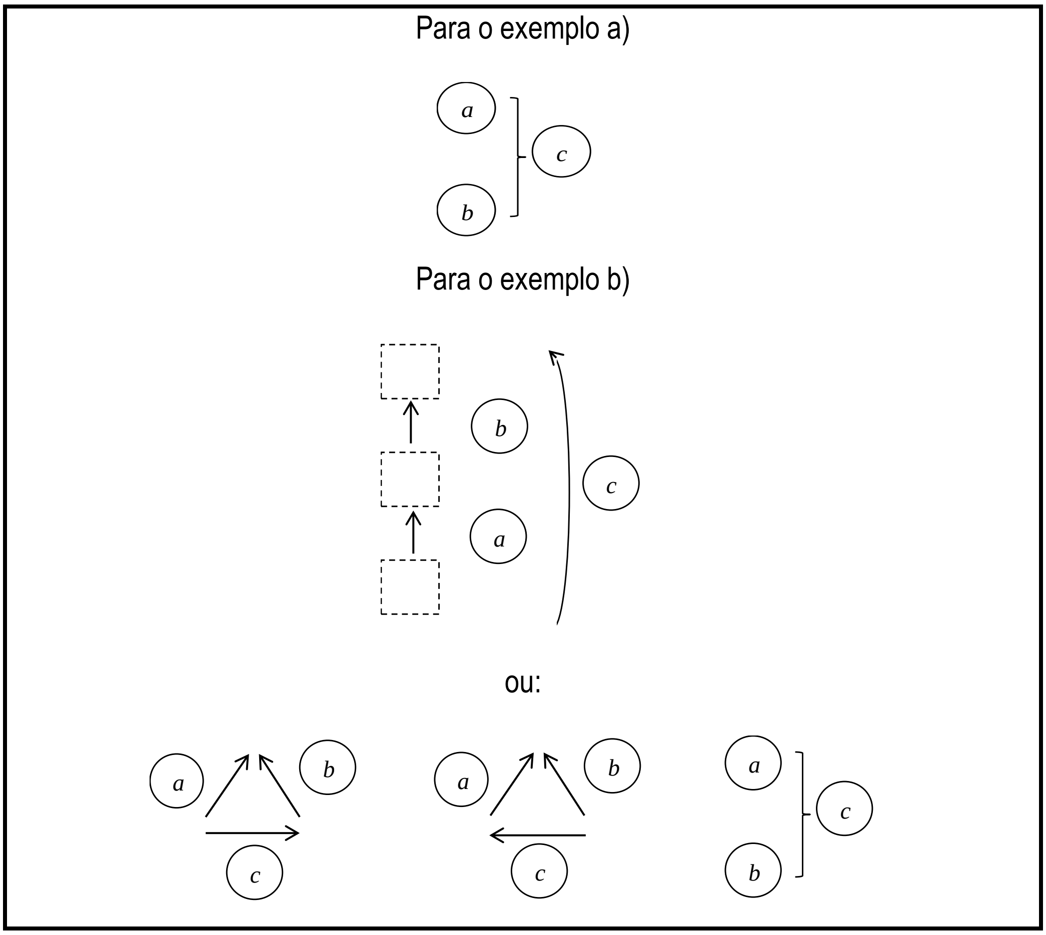


Figura 10: Representação dos problemas de Composição de Duas Relações Estáticas (Vergnaud, 1982).

À semelhança do que se verifica nas classes IV e V, também nesta categoria há três grandes subclasses de problemas, mediante a quantidade desconhecida (*a, b* ou *c*), que se subdividem em muitas outras.

Nestes seis tipos de problemas, Vergnaud (1982) engloba todos os problemas de adição e subtração. As razões para os diferentes esquemas desta classificação são de ordem psicológica e matemática, como tal, problemas que podem ser resolvidos pela mesma operação podem ter esquemas diferentes, logo, assumem níveis de dificuldade também diferentes. A dificuldade sentida pelas crianças, segundo o autor, dever-se-á à interpretação das relações e situações descritas nos problemas, traduzida pelo cálculo relacional.

Também Greeno (1978) e Riley, Greeno e Heller (1983) estudaram o desempenho das crianças na resolução de problemas de estrutura aditiva, mas com crianças com idades inferiores aos participantes no estudo de Vergnaud e Durand (1976). Riley et al. (1983) desenvolveram um estudo onde apresentaram problemas de Transformação (adição e subtração) a crianças do JI e do 1.º ano da escolaridade básica dos Estados Unidos da América, de 5, 6 e 7 anos, facultando-lhes blocos como apoio à resolução dos problemas propostos.

O problema de subtração com o resultado desconhecido teve a mesma taxa de sucesso que o problema de adição, também com o resultado desconhecido. As crianças do 1.º ano cometeram poucos erros neste tipo de problemas quando os números envolvidos eram pequenos e lhes era permitido usar blocos como apoio (87% de respostas corretas no problema de adição e 100% no problema de subtração). Os resultados apontam para a dificuldade nos problemas de Transformação aditiva com o transformador desconhecido, considerados mais difíceis do que os problemas de Transformação com o resultado desconhecido, nos quais a abordagem direta da situação conduz à solução correta, ainda que, neste caso, a adição que as crianças precisavam de fazer era exatamente a mesma. Neste tipo de problemas, Transformação aditiva com o transformador desconhecido, os resultados corretos das crianças do JI foi de 61% e de 56% para as crianças do 1.º ano, contrariamente aos valores apresentados em problemas de subtração direta, cujo desempenho foi de 100%. Nos problemas de Transformação com o início desconhecido, os problemas foram resolvidos corretamente apenas por 9% das crianças do JI e por 28% das crianças do 1.º ano.

Nos seus estudos, Riley, et al. (1983) basearam-se numa classificação de problemas segundo as situações semânticas descritas nos problemas de adição e subtração, resultando numa classificação onde são distinguidas três categorias: I) Problemas de Transformação; II) Problemas de Combinação; III) Problemas de Comparação.

A Transformação traduz uma situação dinâmica em que há a transformação do valor da quantidade inicial devido ao aumento de outra quantidade ("A Ana tem 4 doces, a Joana deu-lhe mais 2 e agora ela tem 6 doces.") ou diminuição de outra quantidade ("A Ana tem 6 doces, ela deu 2 à Joana, agora ela tem 4 doces."). A Combinação traduz uma situação estática que envolve duas quantidades consideradas quer em separado, quer combinadas ("O João tem 7 peixes no seu aquário, 3 são vermelhos e 4 são dourados."). A Comparação expressa uma situação estática, que envolve duas quantidades que são comparadas, com vista a encontrar a diferença entre elas (“A Carolina tem 3 bonecas, a Filipa tem 5. A Filipa tem 2 bonecas a mais do que a Carolina.”).

Dentro de cada categoria, Riley et al. (1983) distinguem ainda diferentes tipos de problemas dependendo: (a) da quantidade que é desconhecida, conforme se trate do resultado final, do elemento de transformação ou da quantidade inicial; (b) da direção da transformação, se se trata de aumento ou de diminuição; e (c) da relação comparativa nos problemas de comparação - mais ou menos, resultando, desta forma, um total de 14 tipos de problemas de adição e subtração, sintetizados na Tabela 3.

Tabela 3 - Classificação dos problemas de estrutura aditiva, adaptado de Riley, Greno e Heller (1983).

Tipo de problema	**Elemento desconhecido**	**Direção**	**Exemplo**
Transformação	Resultado	Aumento	A Ana tinha 3 doces. A Rita deu-lhe 5. Quantos tem agora a Ana?
		Diminuição	A Ana tinha 8 doces. Deu 5 à Rita. Quantos doces tem agora a Ana?
	Elemento de transformação	Aumento	A Ana tem 3 doces, a Rita deu-lhe alguns. Agora a Ana tem 8. Quantos doces lhe deu a Rita?
		Diminuição	A Ana tinha 8 doces, deu alguns à Rita. Agora a Ana tem 3 doces. Quantos doces ela deu à Rita?
	Início	Aumento	A Ana tinha alguns doces, a Rita deu-lhe 5. Agora a Ana tem 8 doces. Quantos doces tinha a Ana no início?
		Diminuição	A Ana tinha alguns doces, deu 5 à Rita. Agora a Ana tem 3 doces. Quantos doces tinha a Ana no início?
Combinação	Total do conjunto	-	A Ana tem 3 doces. A Rita tem 5 doces. Quantos doces têm ao todo?
	Subconjunto	-	A Ana e a Rita têm 8 doces ao todo. A Ana tem 3 doces. Quantos doces tem a Rita?
Comparação	Diferença	Mais	A Ana tem 8 doces. A Rita tem 5. Quantos doces tem a Ana a mais do que a Rita?

	Menos	A Ana tem 8 doces. A Rita tem 5. Quantos doces tem a Rita a menos do que a Ana?
Comparado	Mais	A Rita tem 3 doces. A Ana tem mais 5 doces do que a Rita. Quantos doces tem a Ana?
	Menos	A Ana tem 8 doces. A Rita tem menos 5 doces do que a Ana. Quantos doces tem a Rita?
Referente	Mais	A Ana tem 8 doces. A Ana tem mais 5 doces do que a Rita. Quantos doces tem a Rita?
	Menos	A Rita tem 3 doces. A Rita tem menos 5 doces do que a Ana. Quantos doces tem a Ana?

Analisando também o desempenho das crianças na resolução de problemas de estrutura aditiva, mas debruçando-se sobretudo nos problemas de Comparação e nas dificuldades que encontram, Hudson (1983) desenvolveu estudos com crianças americanas, dos 4 aos 7 anos. Num primeiro estudo, onde participaram 28 crianças de 6 e 7 anos, Hudson propôs-lhes problemas em que, metade deles foram apresentados como problemas de Comparação ("Quantos pássaros há a mais do que minhocas?") e a outra metade foi apresentada com uma pergunta que sugeria a aplicação da correspondência termo-a-termo ("Se todos os pássaros tentarem comer uma minhoca, quantos pássaros não conseguirão comer minhocas?"). Hudson observou 100% de respostas corretas para a questão "não conseguirão" e apenas 64% de respostas corretas à pergunta de Comparação. Este autor refere que as crianças não cometem erros aleatórios quando respondem a problemas de Comparação, e que a resposta errada típica é dada pelo número do conjunto maior, ou do conjunto menor que são mencionados no enunciado do problema, consoante se trate da questão "a mais", ou "a menos". Num segundo estudo, desta vez com 36 crianças de 4 e 6 anos, era-lhes pedido que respondessem a problemas semelhantes aos do primeiro estudo, e mais a um terceiro tipo de problemas, onde o termo comparativo não se referia a quantidades, mas a outros termos, por exemplo, o mais alto. Hudson observou que os problemas de Comparação obtiveram 17% e 25% de respostas corretas dadas pelas crianças de 4 e 6 anos respetivamente, e os problemas com a questão que sugeria o uso da correspondência termo-a-termo, 83% e 96%, respetivamente. Nos problemas de termo comparativo, em que não houve necessidade de quantificar a relação, o sucesso das crianças de 4 e 6 anos foi de 26% e 29% respetivamente, revelando-se superior aos resultados obtidos nos problemas comparativos onde o objetivo era quantificar a relação. Hudson conclui que é a expressão "quantos mais" que dificulta o problema, e não apenas a palavra "mais".

Numa outra perspetiva, e procurando perceber qual o efeito que a instrução inicial sobre problemas de adição e subtração tem nas estratégias de resolução de problemas, Carpenter, Hiebert e Moser (1983) desenvolveram um estudo com 43 crianças do 1.º ano da escolaridade básica dos Estados Unidos da América. Carpenter e os seus colaboradores propuseram às crianças, numa entrevista individual, seis problemas, dois de adição e quatro de subtração. Analisaram as suas estratégias e passados 2 meses de as crianças terem iniciado a aprendizagem sobre estas operações, voltaram a entrevistá-las individualmente, tendo analisado novamente as estratégias que usaram. Puderam concluir que, antes de iniciarem qualquer aprendizagem sobre a adição e subtração, as crianças conseguem, através da modelação da situação ou das relações descritas nos problemas, usar estratégias conducentes a respostas corretas. Elas apresentam um grande número de estratégias diferentes para a resolução de problemas de subtração, que representam as suas diferentes interpretações destes problemas. Segundo os autores, esta diversidade de estratégias parece sugerir que as crianças não têm a noção de que as diferentes estratégias podem ser usadas indistintamente para chegar ao mesmo resultado. Após a instrução sobre as operações, as crianças erraram mais problemas, passaram a procurar a operação correta para resolver os problemas, em vez de analisarem a estrutura semântica que lhes permitia modelar a situação. No caso da subtração, as crianças passaram a usar uma estratégia simples, em vez de usarem uma variedade de estratégias.

Carpenter et al. (1983) identificaram estratégias iniciais diferentes para a adição e para a subtração. Na adição registaram como estratégias: i) *Contar Tudo;* ii) *Contar a Partir do Primeiro;* iii) *Contar a Partir do Maior;* iv) *Factos ou Factos Derivados.* Na resolução de problemas de subtração observaram como estratégias: *Separar; Contagem Regressiva; Adicionar; Contagem Progressiva; Correspondência; Factos ou Factos Derivados* (Carpenter et al, 1983).

Posteriormente, num estudo longitudinal, realizado ao longo de 3 anos com 88 crianças dos Estados Unidos da América, do 1.º ao 3.º ano da escolaridade básica, Carpenter e Moser (1984) identificam diferentes níveis de estratégias usadas pelas crianças, de acordo com o tipo de problema e com a capacidade que vão adquirindo na resolução de problemas. O objetivo desse estudo foi a análise da capacidade das crianças na resolução de problemas de adição e subtração e as estratégias usadas por elas. Carpenter e Moser (1984) propuseram às crianças a resolução de seis problemas: um de Juntar (adição), um de Separar (subtração), um de Combinação (adição), um de Combinação (subtração), um de Comparação (subtração), e um de Juntar com a transformação desconhecida (subtração), todos representativos dos problemas que constavam nos textos dos manuais escolares. Cada problema foi apresentado segundo determinadas condições: variação no tamanho das quantidades (cada parcela tinha a quantidade entre 5 e 9, e a soma da quantidade entre 11 e 16); e a possibilidade de manipular ou não objetos. Os resultados sugerem que o tamanho das quantidades não influenciou a performance das crianças, nem foi determinante para a diversidade de estratégias. Sugerem ainda que as crianças começam por resolver problemas de Juntar e Separar e só posteriormente conseguem resolver problemas de Juntar com a transformação desconhecida.

Foi observado pelos autores três níveis de estratégias, quer para as estratégias de adição, quer para as estratégias de subtração: 1) estratégias baseadas na manipulação direta com dedos ou objetos; 2) estratégias baseadas na sequência de contagem; 3) estratégias baseadas na memorização de factos numéricos.

Nas estratégias da adição:

1. Estratégias baseadas na modelação direta
    i) *Contanto-Tudo*: ambos os conjuntos são representados usando objetos ou dedos e é contada a união dos dois conjuntos.
2. Estratégias baseadas na contagem
    i) *Contando do Primeiro*: a sequência de contagem inicia-se com o 1.º número dado no problema e continua contando o número de unidades representativas da 2.ª quantidade. A resposta é o último número da sequência.
    ii) *Contando do Maior*: a sequência de contagem inicia-se no maior dos dois números mencionados no problema e continua pelo número de unidades representativas do menor número do enunciado. A resposta é o último número da sequência de contagem.
3. Estratégias baseadas em factos numéricos
    i) *Memorização*: o facto numérico é imediatamente lembrado sem que haja lugar a qualquer contagem.

ii) *Factos Derivados*: um facto numérico é derivado a partir de um facto numérico recordado.

Nas estratégias de subtração:

1. Estratégias baseadas na modelação direta

i) *Separando*: um conjunto de elementos é construído, usando objetos ou dedos, correspondendo ao maior número do problema e é retirado deste o outro conjunto. A resposta é dada pelo número de elementos que resta.

ii) *Adicionando*: é construído um conjunto com a menor quantidade do problema e é adicionado a este conjunto elementos até que fique com a maior quantidade mencionada. A resposta é o número de elementos adicionado.

iii) *Correspondência*: ambos os conjuntos são construídos e colocados em correspondência termo-a-termo até que os elementos de um dos conjuntos se esgotem. A resposta é o número de elementos que fica sem correspondência.

2. Estratégias baseadas na contagem

i) *Contagem Regressiva De*: a contagem regressiva é iniciada no maior número do problema. A sequência de contagem tem tantos números quanto a quantidade do conjunto menor que foi mencionado no problema. A resposta é dada pelo último número da sequência de contagem.

ii) *Contando a Partir do Número Dado*: a contagem progressiva inicia-se no menor número do problema e continua até ser dito o maior número. A resposta é o número de passos na contagem.

Carpenter e Moser (1984) observaram que as estratégias de modelação direta deram lugar, gradualmente, a estratégias de contagem. Este estudo dá conta da variedade de estratégias que as crianças usam, diferentes consoante o tipo de problema, e de como elas mudam ao longo do tempo.

Depois de ter desenvolvido trabalhos sobre procedimentos de correspondência e contagem para a aquisição da conservação do número, com crianças de 4 e 5 anos (ver Secada, Fuson & Hall, 1983) e sobre a influência do número de elementos a contar e a habilidade de contagem no uso das regras de cardinalidade, com crianças de 3 e 4 anos (ver Fuson, Pergament, Lyons & Hall, 1985), Fuson (1986) procura perceber se as crianças conseguem aprender a subtração usando a estratégia “Contar até”, da menor quantidade para a maior. Os participantes deste estudo foram 110 alunos do 1.º ano, entre os 6 e 7 anos, de duas escolas de Chicago. Os professores das respetivas turmas participaram neste estudo, tendo recebido formação sobre a estratégia para a ensinarem. Foram propostos às crianças dois problemas de quatro tipos: três de subtração (comparação, retirar e equalização) e um de adição (juntar). Os resultados deste estudo levaram Fuson a concluir que as crianças do 1.º ano estão capazes de aprender a subtrair com a estratégia “contar até”. Elas usaram esta estratégia nos três tipos de problemas de subtração e a facilidade com que aprenderam a “contar até” sugere que as estruturas conceptuais necessarias para esta contagem já estão presentes ou estão em construção. Com este estudo, Fuson sugere também que a estratégia “contar até” na subtração é mais acessível do que “contar a partir de” na adição.

Fischbein, Deri, Nello e Merino (1985) haviam também entendido que um dos modelos intuitivos da subtração está relacionado com a ação “juntar para”. Enquanto que o modelo intuitivo da adição é juntar dois ou mais conjuntos separados de elementos para obter um conjunto dessa união. Para a subtração, pelo contrário, parece haver dois modelos intuitivos, conforme a situação descrita, um modelo é o de separar (“O João tem 10 berlindes, deu 4 ao Rui. Com quantos berlindes ficou?”), e o outro estará relacionado com o juntar para (“O João tem 6 berlindes. De quantos berlindes precisa para ficar com 10?”).

Estudos anteriores, como o de Groen e Parkman (1972), mostraram que as crianças mais novas resolvem problemas de adição quase sempre com a estratégia de contar a partir do número maior, adicionando a menor quantidade para obter o resultado. Procurando confirmar esta hipótese, Siegler (1987) desenvolveu um estudo com 22 crianças do Jardim de Infância (5 e 6 anos), 28 crianças do 1.º ano da escolaridade básica e 18 do 2.º ano, que entrevistou individualmente, propondo-lhes 45 problemas de adição, nove de cada um dos tipos. Estes problemas eram de cinco tipos: soma, soma ao quadrado, adição do maior, adição do menor e diferença. Siegler observou que as crianças usam variadas estratégias que lhes permitem respostas mais rápidas e eficientes. As estratégias observadas por Siegler neste estudo foram: i) *Memorização;* ii) *Contar do Maior;* iii) *Decomposição;* iv) *Contando Tudo.*

Siegler (1987) Verificou também que a rapidez e exatidão com que as crianças resolvem os problemas de adição aumentam com a idade e com a experiência. Registou também um aumento do uso de duas estratégias rápidas e eficientes, como a *Memorização* e a

Decomposição, e a diminuição do uso de estratégias mais lentas, como a estratégia *Contando Tudo*. Apesar da grande eficiência que a estratégia *Contar do Maior* demonstra face à estratégia *Contando Tudo*, Siegler observou ambas as estratégias foram usadas por 55% das crianças de 5 e 6 anos e por 11% das crianças do 1.º ano.

De Corte e Verschaffel (1987) estudaram as estratégias que as crianças de 6 anos usam para resolver os problemas de estrutura aditiva, e como estas estratégias se desenvolvem ao longo do 1.º ano de escolaridade e se essas estratégias são influenciadas pela estrutura dos problemas simples de adição e subtração. Tendo por base os estudos de Carpenter e Moser (1982, 1984), propuseram a 30 crianças de 6 anos oito problemas, quatro adições e quatro subtrações: quatro problemas de Transformação, dois de Combinação e dois de Comparação. De Corte e Verschaffel observaram que as crianças nesta idade conseguem resolver os problemas recorrendo a uma grande variedade de estratégias que nunca foram ensinadas, baseadas na estrutura semântica dos problemas. Os autores identificaram três níveis de estratégias: 1) estratégias materiais; 2) estratégias verbais; e 3) estratégias mentais. Identificaram, ainda, estratégias distintas para os problemas de adição e subtração.

De Corte e Verschaffel (1987) consideraram as seguintes estratégias para a adição (tomando como exemplo, o problema “O Pedro tem 5 maçãs, a Ana tem mais 8 do que o Pedro. Quantas maçãs tem a Ana?”):

1. Nas estratégias materiais
    - i) *Contar Tudo com Modelos*: a criança usa objetos ou dedos para construir as duas quantidades mencionadas no problema (5, 8) e conta a união das duas quantidades (13);
    - ii) *Correspondência Invertida*: a criança constrói um conjunto de objetos com a primeira quantidade mencionada no problema (5), de seguida constrói um segundo conjunto com a primeira quantidade mencionada no enunciado mais a segunda quantidade mencionada (5+8), depois conta os elementos do segundo conjunto que construiu (13).
2. Nas estratégias verbais
    - i) *Contar Tudo Começando no Primeiro*: a criança começa a contagem no número 1 (1, 2, 3, 4, 5), a sequência de contagem termina quando acaba de contar

todos os elementos (6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13). O último número da sequência de contagem é dado como resposta (13).

ii) *Contar Tudo Começando no Maior*: a criança começa a contar o número maior do problema iniciando a contagem no número 1 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), e continua a sequência de contagem até que tenha contado a quantidade menor dita no problema (9, 10, 11, 12, 13). A resposta é dada pelo último número da sequência de contagem (13).

iii) *Contar a Partir do Primeiro*: a criança inicia a sequência de contagem a partir do primeiro número mencionado no enunciado (5) e continua até enumerar a segunda quantidade do enunciado (6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13). O último número na sequência de contagem é dado como resposta (13).

iv) *Contar a Partir do Maior*: a criança inicia a contagem pelo maior número mencionado no problema (8) e continua a contagem até enumerar a menor quantidade do problema (9, 10, 11, 12, 13). O último número contado é dado como a resposta (13).

3. Nas estratégias mentais:

i) *Factos Numéricos Começando com o Primeiro*: a criança recorda factos anteriormente aprendidos, em que o primeiro termo mencionado da memorização é a primeira quantidade mencionada no problema (5+8=13).

ii) *Factos Numéricos Começando com o Maior*: a criança recorda factos da adição anteriormente aprendidos em que o primeiro termo é o maior número que é mencionado no problema (8+5=13).

iii) *Factos Derivados Começando com o Primeiro*: baseando a sua resposta em um ou mais factos memorizados, a criança começa com o primeiro número mencionado no enunciado (5+5=10, 10+3=13).

iv) *Factos Derivados Começando com o Maior*: baseando a sua resposta em um ou mais factos memorizados, a criança começa com o maior número mencionado no problema (8+2=10, 10+3=13).

Para a subtração (tomando como exemplo o problema “O Pedro tem 5 maçãs, a Ana tem 12 maçãs. Quantas maçãs tem a Ana a mais do que o Pedro?”), De Corte e Verschaffel (1987) registaram as seguintes estratégias:

1. Nas estratégias materiais:
   i) *Separar De*: usando objetos ou dedos, a criança constrói um conjunto correspondendo ao maior número dito no enunciado (12), de seguida retira tantos objetos quantos o menor número dito no problema (5). A resposta é dada pelo número de objetos que sobram (7).
   ii) *Separar Para*: a criança constrói um conjunto correspondendo ao maior número dito no problema (12) e vai retirando deste elemento até que fiquem os correspondentes ao menor número dito no enunciado (5). A resposta é dada pelo número de elementos que retirou (7).
   iii) *Juntar Para*: a criança constrói um conjunto com o número de elementos correspondendo ao menor número dito no problema (5) e vai adicionando elementos até ter tantos elementos quantos os que são mencionados como a quantidade maior do enunciado (12). A resposta é dada contando o número de elementos que adicionou (7).
   iv) *Correspondência*: a criança constrói dois conjuntos com as quantidades mencionadas no problema (5, 12) e coloca os elementos de ambos em correspondência termo-a-termo até esgotar os elementos de um dos conjuntos. A resposta é dada pela contagem do número de elementos que fica sem correspondência (7).
2. Nas estratégias verbais:
   i) *Contagem Regressiva De*: a criança inicia a contagem decrescente pelo maior número mencionado no problema (12) e conta regressivamente tantos números quanto a quantidade menor mencionada no problema (11, 10, 9, 8, 7). O último número da sequência de contagem corresponde à resposta (7).
   ii) *Contagem Regressiva Para*: a criança começa a contagem decrescente no maior número do enunciado do problema (12) e termina quando o menor número mencionado no problema é dito (11, 10, 9, 8, 7, 6, 5). A resposta é a quantidade de números ditos na contagem (7).
   iii) *Contando a Partir do Número Dado*: a criança inicia uma contagem progressiva pelo menor número mencionado no problema (5) e conta até dizer o maior número mencionado no enunciado (6, 7, 8, 9, 10, 11, 12). A resposta é a quantidade de números ditos na contagem (7).

3. Nas estratégias mentais:
    i) *Factos Numéricos de Subtração Direta*: a criança recorda de imediato um facto conhecido de subtração direta entre os dois números mencionados no problema (12-5=7).
    ii) *Factos Numéricos de Subtração Indireta*: a criança recorda um facto conhecido da subtração do qual fazem parte os dois números mencionados no problema (12-7=5).
    iii) *Factos Numéricos de Adição Indireta*: a criança recorda um facto conhecido da adição indireta entre os dois números mencionados no enunciado do problema (5 +7= 12).
    iv) *Factos Derivados de Subtração Direta*: baseada na memorização de um facto numérico, a criança encontra a resposta pela subtração do número menor (5) ao número maior (12) mencionado no problema (12-2-3=7).
    v) *Factos Derivados de Subtração Indireta*: baseada na memorização de factos numéricos, a criança encontra a resposta determinando que quantidade pode ser subtraída do número maior do enunciado (12), para dar o menor (5) número do problema (12-2=10, 10-5=5, a resposta: 2+5=7).
    vi) *Factos Derivados da Adição Indireta*: baseada na memorização de factos numéricos, a criança encontra a resposta determinando que quantidade pode ser adicionada ao número menor número do enunciado (5), para resultar no maior (12) número do problema (5+5=10, 10+2=12, a resposta: 2+5=7).

Neste estudo, De Corte e Verschaffel (1987) identificaram mais estratégias do que as que haviam sido identificadas nos estudos que lhes serviram de base (Carpenter & Moser, 1982; 1984), mas foi igualmente observado que as estratégias de resolução dos problemas são fortemente influenciadas pela estrutura semântica dos mesmos, bem como pela ordem pela qual as quantidades são mencionadas no enunciado. Foi constatado que a relação entre a estrutura semântica dos problemas de adição e subtração também se estende ao nível das estratégias mentais.

Willis e Fuson (1988) reconhecem, à semelhança de outros autores, que as estratégias das crianças se vão modificando. Primeiro as crianças recorrem a objetos para representar e resolver os problemas (ver Riley et al., 1983; Carpenter & Moser, 1984), mais tarde recorrem a estratégias mais sofisticadas de contagem, mas que derivam diretamente da representação da situação do problema (Carpenter & Moser, 1984) e numa fase posterior escolhem uma operação aritmética e usam estratégias mentais, factos numéricos ou algoritmos da adição e subtração quando está envolvido mais do que um dígito. Estes autores defendem que a resolução dos problemas de adição e subtração envolve pelo menos três aspetos: a representação da situação do problema, a escolha da estratégia para o resolver e o uso dessa estratégia. E referem que o método mais comum de ensinar, focado nas estratégias de solução e baseado em fórmulas com o máximo de dois dígitos, ignora a necessidade que as crianças têm em representar a situação do problema. Questionando este método, Willis e Fuson desenvolveram um estudo com 45 crianças do 2.º ano, com idades entre os 7 e 8 anos, de duas escolas de Chicago. O seu objetivo final era perceber quais dos 12 tipos de problemas apresentados está na Zona de Desenvolvimento Próximo dos alunos, quando estes problemas são apresentados com três dígitos. Propuseram aos alunos seis tipos de problemas de adição (problemas de Transformar para Mais - com o início, a transformação e o resultado desconhecidos; problemas de Pôr Junto/Combinação - com o todo desconhecido, com a 1.ª parte desconhecida, com a 2.ª parte desconhecida) e seis tipos de problemas de subtração (problemas de Transformar para Menos - com o início, a transformação e o resultado desconhecidos; e problemas de Comparar – com a diferença desconhecida, o grande desconhecido e o pequeno desconhecido). Os problemas apresentados foram adotados de Riley et al. (1983), porém, Willis e Fuson (1988) distinguem situações de adição e subtração, integrando os problemas de Comparar nas situações de subtração, ainda que esses problemas possam assumir ambos os termos "mais" e "menos". Estes problemas são apresentados na Tabela 4.

Os alunos foram previamente ensinados acerca da estrutura dos problemas e o respetivo esquema. Era-lhes solicitado que escrevessem o texto do problema e que nomeassem os três elementos de cada situação. Após a aplicação de um pré- e pós-teste, Willis e Fuson (1988) concluíram que os 12 tipos de problemas apresentados estão dentro da Zona de Desenvolvimento Próximo dos alunos do 2.º ano, referindo que estas crianças podem ser ensinadas a praticar estes tipos de problemas. Detetaram que os alunos tiveram mais dificuldade com os problemas que tinham uma estrutura subtrativa mas requeriam uma adição na resolução. Referem haver uma forte ligação entre o esquema dos problemas e a escolha correta da estratégia de resolução. Para além destas conclusões, observaram que designar os problemas segundo a sua categoria (Pôr Junto, Transformar e Comparar) poderá ajudar a distinguir a estrutura semântica dos diferentes problemas, já que a distinção que é feita entre problemas de "adição" e "subtração" gera confusão entre a estrutura dos problemas e a operação necessária à resolução.

Tabela 4 – Classificação de problemas de estrutura aditiva, adaptado de Willis e Fuson (1988).

	TIPO DE PROBLEMA	ELEMENTO DESCONHECIDO	EXEMPLO
SITUAÇÕES DE ADIÇÃO	Transformar Para Mais	Final	O João tem 3 berlindes. O Tomás deu-lhe mais 5. Quantos berlindes tem agora o João?
		Transformação	O João tem 3 berlindes. O Tomás deu-lhe mais alguns. Agora ele tem 8 berlindes. Quantos berlindes lhe deu o Tomás?
		Início	O João tem alguns berlindes. O Tomás deu-lhe mais 5. Agora ele tem 8. Quantos berlindes tinha o João no início?
	Pôr Junto	Todo	O João tem 3 berlindes. O Tomás tem 5. Quantos berlindes têm ao todo?
		1.ª Parte	O João e o Tomás têm 8 berlindes ao todo. O Tomás tem 3. Quantos berlindes tem o João?
		2.ª Parte	O João e o Tomás têm 8 berlindes ao todo. O João tem 3 berlindes. Quantos berlindes tem o Tomás?
SITUAÇÕES DE SUBTRAÇÃO	Transformar Para Menos	Final	O João tem 8 berlindes. Ele deu 5 ao Tomás. Quantos berlindes tem agora o João?
		Transformação	O João tem 8 berlindes. Ele deu alguns ao Tomás. Agora o João tem 3. Quantos berlindes deu ao Tomás?
		Início	O João tem alguns berlindes. Ele deu 5 ao Tomás. Agora o João tem 3 berlindes. Quantos berlindes tinha o João no início?
	Comparar	Diferença	O João tem 8 berlindes. Tomás tem 5. Quantos berlindes tem o João mais do que o Tomás?
		Grande	O João tem 3 berlindes. O Tomás tem mais 5 do que o João. Quantos berlindes tem o Tomás?
		Pequeno	O João tem 8 berlindes. Ele tem mais 5 do que o Tomás. Quantos berlindes tem o Tomás?

À semelhança de outros autores (ver Hudson, 1983), também Nunes e Bryant (1991) se debruçaram em particular sobre o desempenho das crianças na resolução de problemas de Comparação. No estudo que realizaram participaram 180 crianças brasileiras dos 5 aos 7 anos que resolveram, num pré- e num pós-testes, quatro problemas de Comparação, dois com a diferença desconhecida (“quanto A tem a mais do que B”) e dois com o referente desconhecido (“A tem 5 mais do que B, quanto tem B?”). Entre o pré- e o pós-testes decorreu uma intervenção por grupos, com feedback do investigador, onde foram propostos seis problemas de Comparação com a diferença desconhecida. Num dos grupos de intervenção os problemas eram resolvidos com base na correspondência termo-a-termo espacial, onde era visível a correspondência entre os conjuntos, num outro grupo os problemas eram resolvidos com base na correspondência termo-a-termo temporal, numa distribuição alternada de objetos, e um terceiro grupo funcionou como controlo. Os resultados indicam um maior sucesso no pós-teste do que no pré-teste em todos os grupos. No entanto, no grupo que teve intervenção com correspondência termo-a-termo espacial, as crianças melhoraram o seu desempenho quer nos problemas com a diferença desconhecida, quer nos problemas com o referente desconhecido. As crianças do pré-escolar deste grupo de intervenção tiveram um desempenho semelhante às crianças do 1.º ano dos restantes grupos onde não ocorreu uma intervenção com correspondência espacial. As crianças do 1.º ano do grupo de intervenção em correspondência termo-a-termo espacial obtiveram 78% de sucesso nas suas respostas, conseguindo resolver tanto os problemas de referente desconhecido como problemas com a diferença desconhecida. As crianças dos outros grupos apenas progrediram nos problemas nos quais tinham tido instrução, o que sugere a possibilidade de instrução de problemas de Comparação desde o pré-escolar.

Fuson (1992b) afirma que as crianças pequenas aprendem aspetos importantes de estratégias de comparação antes de entrarem para a escola. Com pelo menos 3 anos usam estratégias percetivas para comparar dois conjuntos e percebem que, adicionando algo a um conjunto ele fica com mais elementos, e retirando, ele fica com menos. As crianças usam estratégias transformacionais perante uma situação em que uma transformação é realizada, no entanto, segundo a autora, quando se comparam dois conjuntos estáticos, as estratégias aceitáveis são a correspondência e contagem.

A partir de estudos prévios que desenvolveu, Fuson (1992b) identifica níveis de estratégias, baseadas na contagem para as situações de adição e subtração. Esta autora sustenta que as crianças a partir do 1.º ano, 6-7 anos, constroem relações complexas entre os sentidos da sequência numérica, da contagem e da cardinalidade que lhes permite resolverem situações de adição e subtração de maneiras sofisticadas. As relações que estabelecem variam consoante a natureza da sequência numérica. As crianças podem usar simultaneamente vários níveis de contagens.

Inicialmente as crianças contam sem fazer a diferenciação das palavras que designam os números, a sequência é seguida como uma cadeia de palavras. No 1.º nível, que designa de Sequência Inquebrável, a contagem continua a ser feita sem quebras, mas pode ocorrer de três maneiras: as palavras/números são ditos diferenciados; as palavras/números são emparelhadas com objetos; a contagem dos objetos resulta num cardinal. Em qualquer caso, as crianças ainda contam todos os elementos. No 2.º nível, as crianças começam a ser capazes de contar a partir de qualquer ponto da sequência. Neste nível, designado por Fuson (1992b) de Cadeia Quebrada, as crianças não necessitam de contar todos os objetos ou de os ter todos visíveis, elas partem do cardinal de um dos números dados e prosseguem a sequência a partir desse número até ao número que vai determinar o número total. No 3.º nível, que a autora designa de Cadeia Numérica, não são usados objetos. A sequência numérica torna-se ela própria os objetos presentes nos termos da adição e da subtração, e os dedos, quando são usados, têm como única finalidade corresponder ao número de saltos efetuados na contagem. A sequência numérica começa no 1.º termo da situação, 1.ª quantidade, ou naquela que a criança escolher como sendo a 1.ª, e são ditas tantas palavras/números quantos os que são determinados pelo outro termo da situação. No 4.º e último nível de contagem, Cadeia Bidirecional como é designada por Fuson, as crianças constroem relações entre as diferentes situações que envolvem as partes e o todo, e conseguem separar em partes as quantidades, para uma melhor adição e subtração. Esta estratégia tem sido denominada por vários autores por factos derivados ou estratégias mentais.

Fuson (1992a, 1992b) refere que para a maioria das crianças a contagem decrescente é consideravelmente mais difícil do que a contagem crescente. As relações cardinais são mais difíceis de estabelecer na contagem decrescente. A autora dá conta que entre o 1.º e o 3.º nível as crianças fazem grandes progressos, a contagem deixa se ser feita com todos os elementos, e as crianças passam a contar a partir de. Em cada nível a contagem requer uma operação conceptual da construção de cada termo como identidade única, desde a perceção da unidade de cada elemento, no nível 1, em que cada objeto é contável, ao nível mais abstrato em que cada termo/parcela da situação pode ser separado e combinado fora da estrutura da situação, continuando dentro da situação, isto é, cada quantidade envolvida na situação pode ser decomposta numa combinação de números, que, combinados respondem à situação.

Thompson (1993) analisou a dificuldade que as crianças manifestam quando resolvem problemas complexos de estrutura aditiva, em que um ou mais itens do problema desempenham múltiplos papéis. Participaram neste estudo seis alunos americanos, do 5.º ano de escolaridade. Foi-lhes proposto que resolvessem 12 problemas ao longo de 4 dias, tendo sido apresentado a cada criança três problemas em cada dia. Os problemas propostos baseavam-se no seguinte esquema e nas suas derivações: "Tom, Fred e Rhoda puseram as suas maçãs num saco. Fred e Rhoda juntos tinham mais 97 maçãs do que Tom. Rhoda tinha 17 maçãs e Tom tinha 25. Quantas maçãs tinha Fred?". Após os 4 dias, e depois de aprenderem a representar relações, os alunos continuaram a entender os números envolvidos nos problemas em termos de quantidade. Thompson descreve a tensão de interpretação de números como quantidades ou como relações, como sendo a maior dificuldade dos alunos. A dificuldade que revelam em distinguir entre "diferença" como o resultado de uma subtração, e "diferença" como a relação entre duas quantidades em que uma que excede a outra.

Refletindo sobre a capacidade que as crianças têm de utilizar procedimentos informais para resolver alguns problemas de adição e subtração, Correa e Moura (1997) desenvolveram um estudo com o objetivo de perceber as estratégias de cálculo mental usadas pelas crianças do 1.º ciclo. Nesse estudo participaram 160 crianças brasileiras, do 1.º ao 4.º ano (40 crianças de cada ano de escolaridade), em que foram solicitadas a resolver 10 problemas de Transformação com o resultado desconhecido, de adição e subtração, com números de dois dígitos. As autoras identificaram cinco de estratégias de cálculo mental:

i) *Contagem*: a resolução é feita com base na sequência de contagem, progressiva ou regressiva, a partir de uma das quantidades. Nesta estratégia foram observados dois níveis de contagem, um mais elaborado do que o outro: o da representação mental, onde não se registou o uso de recursos externos, e o recurso aos dedos.

ii) *Composição*: a partir de um dos valores dados no problema, a criança vai juntando sucessivamente determinadas quantidades de forma a chegar à solução;

iii) *Decomposição*: a criança transforma o termo da soma ou da subtração na sua decomposição de números de modo a facilitar a operação;

iv) *Variação de Resultados*: exploração, ainda que intuitiva, das relações entre os termos da operação, através da compensação das quantidades;

v) *Recuperação de Memória*: uso de resultados previamente memorizados.

Correa e Moura (1997) puderam observar que as crianças demonstram um conhecimento intuitivo para resolver as tarefas, revelando uma compreensão do número e das suas propriedades, refletidas sob a forma de teoremas em ação.

Kamii e Dominick (1997) reforçam que as crianças inventam procedimentos para resolver problemas de adição e subtração e que o uso de algoritmos prejudica o desenvolvimento do pensamento matemático. Com o objetivo de evidenciar que os algoritmos prejudicam o desenvolvimento do sentido de número, Kamii e Dominick apresentam o estudo realizado numa escola do Alabama com alunos do 2.º, 3.º e 4.º anos, cujas idades se situam entre os 8 e 10 anos. Neste estudo comparam os resultados obtidos na resolução de três problemas de adição (no 2.º ano) e três de adição e subtração (no 3.º e 4.º ano). Entre os participantes, havia alunos que estavam a seguir uma aprendizagem baseada em algoritmos e outros cuja aprendizagem passava pela criação de estratégias próprias. Aos alunos era solicitado que resolvessem os dois primeiros problemas mentalmente e o último de forma escrita. Os melhores resultados foram obtidos pelas crianças que não usam os algoritmos, o que levou Kamii e Dominick (1997) a sugerir que o uso de algoritmos desencoraja os alunos a desenvolver o sentido de número e obriga-os a desistirem da sua própria maneira de pensar. Quando pensam por si próprios, estabelecem relações mentais necessárias a construção do sentido de número, tornam-se mais confiantes na sua capacidade matemática e avançam na construção de níveis de pensamento mais elaborados.

Baseados em estudos anteriores, seus e de outros autores, Carpenter, Fennema, Levi e Empson (1999) definiram detalhadamente de que forma alguns conceitos e competências se desenvolvem nas crianças nos primeiros anos. Neste trabalho, Carpenter et al. definem uma classificação para os problemas de estrutura aditiva e as estratégias possíveis de resolução para os problemas de adição e subtração. Os autores consideram quatro tipos de problemas: I)

Juntar; II) Separar; III) Parte-Parte-Todo; IV) Comparar. E distinguem várias classes de problemas, consoante a quantidade desconhecida em cada um, o que faz um total de 11 tipos diferentes de problemas, sintetizados na Tabela 5.

Tabela 5 - Classificação de problemas de estrutura aditiva, adaptado de Carpenter, Fennema, Levi e Empson (1999).

Tipo de problema	Quantidade desconhecida	Exemplo
Juntar	Resultado	A Rita tinha 5 balões, o Filipe deu-lhe mais 2. Quantos balões tem agora a Rita?
	Elemento de transformação	A Rita tinha 5 balões, o Filipe deu-lhe mais alguns e ela ficou com 7. Quantos balões lhe deu o Filipe?
	Início	A Rita tinha alguns balões, o Filipe deu-lhe mais 2 e agora ela tem 7. Quantos balões tinha a Rita no início?
Separar	Resultado	O Paulo tinha 8 lápis, deu 3 ao António. Com quantos lápis ficou o Paulo?
	Elemento de transformação	O Paulo tinha 8 lápis, deu alguns ao António e ficou com 5. Quantos lápis deu ao António?
	Início	O Paulo tinha alguns lápis, deu 3 ao António e ficou com 5. Quantos lápis tinha o Paulo no início?
Parte-Parte-Todo	Todo	Numa festa estão 4 meninos e 5 meninas. Quantas crianças estão ao todo na festa?
	Parte	Numa festa estão 9 crianças ao todo. Quatro são meninos. Quantas meninas estão na festa?
Comparar	Diferença	O Marco tem 3 bolas, o João tem 7. Quantas bolas tem o João a mais do que o Marco?
	Referido/ /Comparado	O Marco tem 3 bolas, o João tem mais 4 do que o Marco. Quantas bolas tem o João?
	Referente	O João tem 7 bolas, ele tem 4 bolas a mais do que o Marco. Quantas bolas tem o Marco?

Nos problemas de Juntar, uma quantidade é aumentada pela ação da outra, dando lugar a uma terceira, e podem-se observar três classes de problemas consoante a quantidade desconhecida no problema: o resultado, o elemento de transformação, o início.

Nos problemas de Separar verifica-se também a ocorrência de uma ação, mas neste caso a quantidade inicial é diminuída e não aumentada. Tal como nos problemas de Juntar, cada uma das três quantidades distintas do problema pode ser desconhecida: o resultado, o elemento de transformação e o início.

Nos problemas de Parte-Parte-Todo e nos de Comparar não há lugar a ações. Os problemas Parte-Parte-Todo envolvem uma relação estática entre um conjunto e os seus dois subconjuntos, neste caso não há nenhuma ação direta ou indireta sobre cada uma das quantidades, nem nenhuma transformação. Os dois conjuntos assumem-se equivalentes no todo. Aqui existem apenas duas classes de problemas, um problema em que são dadas as duas partes e se pergunta qual é o todo, e outra em que é dada uma das partes e o todo, e a pergunta recai sobre a outra parte.

Os problemas de Comparar envolvem uma relação estática entre os dois conjuntos distintos do problema, isto é, uma comparação entre as duas quantidades mencionadas no problema. Um conjunto é chamado de referente, pois é aquele que serve de comparação e é tido como referência, o outro conjunto é comparado àquele e denominado de referido ou comparado. A terceira quantidade do problema é o resultado da comparação, ou seja a diferença entre os dois conjuntos. Qualquer uma destas quantidades pode ser desconhecida, verificando-se assim três classes diferentes de problemas.

Cada um destes tipos representa um problema diferente para as crianças e elas usam diferentes estratégias para os resolver. Carpenter et al. (1999) observam que as estratégias das crianças se vão modificando à medida que elas vão desenvolvendo o seu raciocínio, e classificam e distinguem as estratégias pelo seu nível de abstração, identificando três tipos de estratégias: 1) estratégias de manipulação direta; 2) estratégias de contagem; 3) estratégias mentais.

As estratégias de manipulação direta caracterizam-se pela representação física de cada quantidade envolvida no problema e a sua ação ou relações que envolvem essas quantidades. Usando estratégias de contagem, as crianças reconhecem que não é necessário construir e contar os conjuntos, a resposta foca-se na própria sequência de contagem. O uso dos dedos pode servir apenas para não perder de vista os passos na sequência da contagem. Nas estratégias mentais a criança apela a factos numéricos memorizados, e à combinação de números que formam outros números, dominando a composição de determinado número pelas diferentes partes possíveis que o compõem.

Se no início as crianças necessitam da manipulação de objetos, à medida que vão ficando mais conhecedoras e experientes, as suas estratégias vão ficando cada vez mais abstratas e a manipulação direta com dedos ou objetos vai sendo substituída por estratégias de contagem imateriais, que por sua vez vão ser substituídas por estratégias com factos numéricos.

1. Nas estratégias de manipulação direta Carpenter et al. (1999) identificam as seguintes:
   - i) *Juntar Tudo*: as crianças dispõem os elementos dos dois conjuntos dados e contam todos os elementos para saberem o resultado.
   - ii) *Juntar Para*: as crianças fazem um conjunto com a quantidade menor mencionada no problema e vão-lhe adicionando elementos até que o novo conjunto atinja a quantidade maior dada no problema. A resposta é dada pelo número de elementos que adicionaram.
   - iii) *Separar De*: as crianças constroem e contam o conjunto maior, e retiram do conjunto inicial a quantidade menor indicada no problema. A resposta é obtida pelo número de elementos que restam.
   - iv) *Separar Para*: nesta estratégia os objetos são removidos a partir da quantidade maior até que o número de objetos neste conjunto inicial permaneça com a quantidade menor apresentada no problema, ou seja, as crianças fazem um conjunto com a maior quantidade mencionada no problema e vão retirando elementos um a um até que o conjunto inicial tenha a quantidade menor mencionada no problema, contando, de seguida os elementos que foram retirados. Muitas vezes as crianças realizam esta ação por tentativa e erro, retirando alguns e verificando depois se necessitam de retirar mais elementos.
   - v) *Correspondência*: as crianças constroem os dois conjuntos mencionados no problema e fazem corresponder cada um dos seus elementos, numa correspondência termo-a-termo, de forma a encontrarem a diferença entre os dois conjuntos, isto é, os elementos que ficam sem correspondência.

vi) *Tentativa e erro*: esta estratégia é usada por algumas crianças em problemas com início desconhecido, uma vez que, não podendo representar a quantidade inicial, eles se afiguram como de difícil resolução para as crianças. As crianças constroem um conjunto com a primeira quantidade dita no problema e vão adicionando alguns elementos e verificando se o conjunto inicialmente construído ficou com a quantidade maior mencionada no enunciado. Assim, vão corrigindo e conferindo a quantidade que vai ficando no conjunto inicial, até que o conjunto inicial, até que este fique com a quantidade maior indicada no problema. A solução passa pela quantidade que foi adicionada. ("A Rita tinha alguns livros. Ela comprou mais 3 e agora tem 8 livros. Quantos livros tinha no início?").

As estratégias de contagem são mais eficientes e abstratas do que a manipulação direta, as crianças reconhecem que não são necessários objetos e contam os elementos dos conjuntos descritos nos problemas. Quando as crianças contam mentalmente é difícil saber como é que elas sabem quando parar. Algumas crianças parecem contar com cadência rítmica, outras contam por grupos, outras usam os dedos, cujo objetivo, neste caso, é não perderem de vista o número a acrescentar, e não porque necessitem de algo físico.

2. Nas estratégias de contagem, Carpenter et al. (1999) definem cinco estratégias:
   i) *Contar a partir do primeiro*: as crianças contam a partir da primeira quantidade mencionada no problema e a sequência da contagem termina quando o número de elementos adicionado está completo. A resposta é encontrada pelo último número dito ("O João tinha 4 carros, e o pai deu-lhe 7 no seu aniversário. Quantos carros tem agora o João?", as crianças que usam esta estratégia contam " 4 [pausa], 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11" e respondem 11).
   ii) *Contar a partir do maior*: a contagem é iniciada a partir da quantidade maior mencionada no problema e termina quando é adicionado o menor número de elementos. Também nesta estratégia a resposta é encontrada pelo último número dito ("7 [pausa], 8, 9, 10, 11").
   iii) *Contar até*: As crianças começam a contagem pelo elemento menor apresentado no problema e vão contando até dizerem o número maior. A resposta é determinada pelo número de passos na contagem.

iv) *Contagem decrescente*: as crianças começam a contagem regressiva no maior número mencionado no problema e vão contando até terem efetuado tantos de passos na contagem quanto o menor número mencionado, respondendo o último número dito após a contagem regressiva.

v) *Contagem decrescente até*: é uma estratégia semelhante à anterior, a diferença reside no número onde pára a contagem. As crianças começam a contagem regressiva no maior número mencionado no problema e vão contando regressivamente até dizerem o número menor que é mencionado no problema, sendo a resposta o número de passos realizados na contagem.

Carpenter et al. (1999) consideram ainda existir um nível superior de abstração nas estratégias das crianças, as estratégias mentais, em que elas apelam a factos numéricos aprendidos e memorizados, não manipulando objetos nem usando a contagem para obter a solução. As crianças servem-se de combinações de números aprendidas, como por exemplo 3+3, 4+4 ou ainda outras 4+2, revelando que, mentalmente, dominam a decomposição de alguns números. Segundo os autores, a criança aprende primeiro situações de dobro (3+3, 4+4), e só depois outras combinações (3+2=5, 4+3=7). Quando a criança, perante o problema "A Ana tinha algumas amêndoas, deu 3 à sua mãe e ficou com 2. Quantas amêndoas tinha a Ana no início?", responde "5", sem manipular nenhum objeto, nem realizar nenhuma contagem, está a apelar ao seu conhecimento, já memorizado, de uma das formas de composição do número 5.

3. Carpenter et al. (1999) consideram como estratégias mentais:
   i) *Factos numéricos*: as crianças recorrem à memorização de combinações de números previamente aprendidos (3+3; 4+4; 2+2; 4+3; 2+3).
   ii) *Factos derivados*: as crianças servem-se de factos numéricos conhecidos para encontrar outras combinações de números ("6+7 é 1 a mais do que 6+6, logo, se 6+6 é 12, 6+7 é mais 1, é 13").

Carpenter et al. (1999) observam que as crianças modelam as ações e relações descritas nos problemas e usam estratégias distintas consoante cada um deles. Conceber a resolução dos problemas pela modelação das ações que lhe estão inerentes não serve apenas como base de estratégia para resolver as operações, mas permite, também, uma melhor estruturação do pensamento sobre a resolução de problemas nos primeiros anos de escolaridade. Permite ainda perceber onde reside a dificuldade que as crianças têm em resolver determinados problemas, que parecem ser simples aos olhos dos adultos.

Neste sentido, também Magina, Campos, Nunes e Gitirana (2001) desenvolveram um estudo com 782 crianças brasileiras, dos quatro anos de escolaridade do ensino básico, às quais propuseram 12 problemas de adição e subtração (dois de Composição, seis de Transformação e quatro de Comparação) envolvendo números pequenos. Com o objetivo de perceber a dificuldade das crianças na resolução dos problemas, Magina e colegas apresentam uma "re-leitura" da classificação dos problemas de estrutura aditiva propostos por Vergnaud, e definem subclasses de acordo com a sua complexidade para as categorias dos problemas que designam de Composição, Transformação e Comparação.

Os problemas de Composição englobam aqueles em que duas partes juntas formam o todo. Os problemas de Transformação são definidos como aqueles em que um estado inicial sofre uma transformação da qual resulta um estado final. Os problemas de Comparação referem-se aos que estabelecem uma relação que é criada entre duas quantidades, e que pode ser estática ou dinâmica, dependendo da apresentação da questão (se for pedida a quantificação da relação, este problema é assumido como um problema estático, quando é pedido uma das quantidades, sendo dada a relação, este problema já se assume como uma relação dinâmica).

As autoras classificam as situações por extensão, segundo o grau de complexidade cognitiva para as crianças, denominando como: Protótipos, 1.ª, 2.ª, 3.ª e 4.ª extensão. Atribuem a designação de Protótipo às situações problemáticas que apresentam menor complexidade, e 4.ª extensão às que apresentam um maior grau de complexidade. Assim, os problemas de Composição são subclassificados em Protótipos e 1.ª extensão; os problemas de Transformação podem ser Protótipos, de 1.ª e de 4.ª extensão; e os problemas de Comparação podem ser de 2.ª, 3.ª e 4.ª extensão.

As estruturas de problemas consideradas como as mais simples, protótipos, podem ser encontradas nos problemas de Composição e de Transformação. Nas situações mais simples de Composição, a quantidade desconhecida é o todo, e nessa situação a criança realiza o ato de juntar, reconhecendo que o todo é igual à soma das partes. O mesmo se passa relativamente aos problemas de Transformação, no protótipo, em que são dadas as quantidades iniciais e a transformação, e a quantidade desconhecida é o resultado, ou estado final.

As situações de 1.ª extensão podem ser encontradas nos problemas de Composição, em que a quantidade desconhecida é uma das partes, sendo dada a outra parte e o todo, e podem também ser observadas nos problemas de Transformação quando o elemento desconhecido é a transformação, conhecendo-se o estado inicial e o final.

As situações de 2.ª e 3.ª extensão encontram-se apenas nos problemas de Comparação. Nas situações de 2.ª extensão são dados o referente e a diferença, e a quantidade desconhecida é o referido. Nas situações de 3.ª extensão são dados o valor do referente e do referido, e o elemento desconhecido é a diferença entre eles.

As situações de 4.ª extensão são consideradas como as que possuem maior grau de complexidade, podendo ser encontradas nos problemas de Transformação com o início desconhecido, onde são dadas a quantidade final e a transformação; e nos problemas de Comparação, onde o elemento desconhecido é o referente, sendo dado o valor da diferença e a valor do referido. A Tabela 6 resume a classificação de problemas de estrutura aditiva segundo Magina et al. (2001).

Tabela 6 - Classificação de problemas de estrutura aditiva, adaptado de Magina, Campos, Nunes e Gitirana (2001).

	TIPO DE PROBLEMA				
	COMPOSIÇÃO	**TRANSFORMAÇÃO**		**COMPARAÇÃO**	
Níveis de complexidade	Elemento desconhecido	Elemento desconhecido	Situação	Elemento desconhecido	Situação
Protótipo	Todo	Estado final	Adição Subtração		
1.º extensão	Parte	Transformação	Adição Subtração		
2.ª extensão				Comparado	Adição Subtração
3.ª extensão				Diferença	Adição Subtração
4.ª extensão		Estado inicial	Adição Subtração	Referente	Adição Subtração

Assumindo a existência de diferentes níveis de complexidade cognitiva para as crianças, Magina e Campos (2004) realizaram posteriormente outro estudo, com 248 crianças brasileiras, também dos quatro anos de escolaridade, no sentido de identificar as suas competências na resolução dos problemas de estrutura aditiva. As autoras propuseram às crianças cinco situações-problema (dois de Composição, dois de Transformação e um problema de Comparação), e obtiveram resultados coincidentes com o estudo realizado por Magina et al. (2001). Em todos os problemas, a taxa de sucesso mais elevada foi observada nos alunos do 4.º ano, registando uma progressão nos resultados do 1.º para o 4.º ano. Os problemas que tiveram maior taxa de sucesso foram as situações de protótipo, problemas de Composição com o todo desconhecido, e problemas de Transformação com o resultado desconhecido, com resultados corretos acima de 70% nos alunos de 1.º ano. O problema onde foi detetado menor sucesso, foi o problema de Comparação, onde era necessário descobrir a diferença, situação de 3.ª extensão. As autoras verificaram apenas 15% de sucesso nos alunos do 1.º ano e 20% nos alunos do 2.º ano. O problema de Transformação com a transformação desconhecida (1.ª extensão) teve, da parte dos alunos do 1.º ano, 25% de acerto e 81% nos alunos do 4.º ano; e o problema de Composição (também de 1.ª extensão), mas que refletia um contexto de distâncias no enunciado, teve 27% de acerto nos alunos do 1.º ano e 51% nos do 4º ano. Desta investigação resulta que a capacidade que os alunos manifestam na resolução dos problemas varia consoante o tipo de problemas e os contextos descritos no enunciado.

Confirmando a dificuldade na resolução de problemas de Comparação por crianças de 6 anos, Nunes, Campos, Magina e Bryant (2005) verificam que este tipo de problemas se torna mais fácil quando a questão é colocada de forma dinâmica. Os autores registam um aumento do sucesso que passa de 50% para os 90% quando a questão deixa de ser apresentada de forma estática, e a pergunta muda de "quantas cadeiras há a mais?" para "quantas cadeiras temos que ir buscar para que todos os alunos se possam sentar?", como já havia sido demonstrado por Hudson (1983). Nunes e os seus colaboradores observaram que a solução à questão apresentada de forma dinâmica passará pela correspondência um-a-um entre cadeiras e alunos, em que os alunos verificam quantos elementos ficam sem correspondência. Esta solução, obtida pelo esquema de correspondência, leva normalmente a respostas acertadas. Ao resolver o problema dessa forma, os alunos mostram que sabem usar o esquema de ação da correspondência um-a-um do raciocínio aditivo.

Nunes et al. (2005) referem, ainda, que os problemas diretos, em que a situação descrita no enunciado remete diretamente para a operação aritmética, obtêm maior taxa de sucesso do que os problemas inversos, desde logo em crianças do 1.º ano. A percentagem de sucesso observada nos problemas diretos foi superior a 80%, contrariamente aos 40% de acerto nos problemas inversos. Esta diferença deve-se à forma como os problemas são entendidos e podem ser resolvidos. Enquanto que os problemas diretos podem ser resolvidos pela aplicação direta dos esquemas de juntar e de retirar, os problemas inversos exigem que os alunos compreendam a adição e a subtração como operações como inversas uma da outra. A situação descrita no problema pode narrar uma ação de juntar, logo, resolvida pela adição, mas sendo o elemento desconhecido a quantidade inicial, a solução passa pela subtração. Nunes e colegas sugerem que provavelmente menos de metade dos alunos do 1.º ano compreendem a relação inversa entre estas duas operações, relação que é compreendida pela quase totalidade dos alunos do 4.º ano. Os autores sugerem que promover o raciocínio aditivo implicará desenvolver a compreensão da coordenação dos seus esquemas de ação.

Kamii e Joseph (2005), fundamentando-se em Piaget (1980), discordam que a subtração se encontre no mesmo nível de dificuldade da adição. Estas autoras admitem a teoria de Piaget de que a subtração é desenvolvida depois da adição, atendendo à prevalência do aspeto positivo da ação sobre o aspeto negativo como uma característica das crianças da 1.ª infância. E recordam o estudo desenvolvido por Kamii, Lewis e Kirkland (2001) com 21 alunos do 1.º ano e 38 do 4.º ano a quem foi solicitado que resolvessem questões de adição e subtração. Quatro pares de questões (do tipo 4+4 e 8-4) eram apresentados aos alunos do 1.º ano e oito pares aos alunos do 4.º ano (do tipo 8+5 e 13-5). Em ambos os casos as questões de adição eram colocadas no início da entrevista e as de subtração no final. Os autores observaram que os alunos resolviam com sucesso quase todas as questões de adição, mas não todas as de subtração. Mais, observaram que nenhum aluno teve sucesso nos problemas de subtração sem ter obtido sucesso nos problemas de adição, o que levou Kamii, Lewis e Kirkland a concluírem que os alunos resolvem as diferenças a partir do conhecimento das somas, ou seja, os problemas de subtração são resolvidos a partir dos seus conhecimentos da adição.

2.1. Sobre a classificação de problemas de estrutura aditiva

Os estudos conduzidos pelos diferentes investigadores remetem para diversas classificações dos problemas de estrutura aditiva, umas mais distintas entre si do que outras. Baseados na estrutura semântica dos problemas, Carpenter et al. (1981) distinguem quatro tipos nos problemas de adição e subtração: Juntar/Separar; Parte-Parte-Todo; Comparação e Equalização (ver Tabela 1, pp. 42). Também baseados na estrutura semântica dos problemas, Riley et al. (1983) distinguem três tipos de problemas: Transformação, Comparação e Combinação e dentro de cada tipo, várias classes de problemas, consoante: (a) a quantidade desconhecida; (b) a direção da transformação; (c) a relação comparativa, o que perfaz um total de 14 classes de problemas diferentes (ver Tabela 3, pp. 53).

Apesar de terem uma denominação diferente, os três primeiros tipos de problemas são coincidentes, na estrutura, em ambas as classificações destes autores. Contudo, Carpenter et al. (1981) analisam os problemas considerando duas grandes dimensões em que os quatro tipos diferem. Uma baseia-se na descrição do problema, se o problema descreve uma relação estática ou dinâmica. No caso dos problemas de Juntar/Separar e nos problemas de Equalização há a descrição de uma ação, em que a quantidade inicial é transformada devido a uma ação que é descrita no problema, dando origem a uma terceira quantidade, enquanto que nos problemas de Parte-Parte-Todo e nos problemas de Comparação verifica-se uma relação estática entre as quantidades envolvidas. Uma outra dimensão que distingue os quatro tipos de problemas identificados por Carpenter et al. diz respeito às relações de inclusão de conjuntos. Nos problemas de Juntar/Separar e nos problemas Parte-Parte-Todo, duas das quantidades envolvidas nos problemas são necessariamente um subconjunto da terceira quantidade, enquanto que nos problemas de Comparação e Equalização uma das quantidades descritas no problema está completamente dissociada das outras duas.

Posteriormente, Carpenter et al. (1999) reconsideram a classificação definida por Carpenter et al. (1981) e definem uma nova categorização dos problemas, reformulando-as. Distinguem igualmente quatro tipos de problemas de acordo com os tipos de ação ou relações neles descritas, contudo separam os problemas de Juntar dos de Separar e já não diferenciam os problemas de Equalização. Assim, consideram os problemas de: Juntar, Separar, Parte-Parte-

Todo e Comparar. Continuam a ponderar a descrição do problema, se este descreve uma ação dinâmica ou uma relação estática, discriminando os problemas de Juntar e Separar dos problemas de Parte-Parte-Todo e Comparar.

Os problemas de Juntar e Separar envolvem uma ação, em que uma quantidade é aumentada a outra (nos problemas de Juntar) ou retirada de outra (nos problemas de Separar). Nos problemas de Parte-Parte-Todo e nos de Comparar não há lugar a ações. Os problemas Parte-Parte-Todo envolvem uma relação entre um conjunto e os seus dois subconjuntos, e os problemas de Comparar envolvem uma comparação entre dois conjuntos distintos. Dentro de cada tipo de problemas Carpenter et al. (1999) distinguem classes de problemas consoante a quantidade desconhecida, o que faz um total de 11 problemas distintos (ver Tabela 5). Esta classificação não difere muito das anteriores, na medida em que as categorias são consideradas em termos de situação-problema.

Willis e Fuson (1988) também definem uma classificação onde consideram a existência de quatro grandes tipos de problemas: Transformar para Mais; Pôr Junto; Transformar para Menos e Comparar. Atendendo ao elemento desconhecido na situação, estes quatro vão dar origem a 12 tipos de problemas. Aparentemente esta classificação é coincidente com a que Carpenter et al. (1999) vêm a definir, os problemas de Transformar para Mais correspondem aos problemas de Juntar de Carpenter e colegas, os problemas de Pôr Junto aos problemas de Parte-Parte-Todo, os problemas de Transformar para Menos correspondem aos problemas de Separar, e os problemas de Comparar mantêm a mesma designação em ambos os autores. Contudo, à exceção dos problemas de Transformação, que identificam e designam os mesmos elementos desconhecidos nas situações, Willis e Fuson distinguem três elementos desconhecidos nos problemas de Pôr Junto, diferenciando entre a 1.ª parte e a 2.ª parte. Para os outros autores, neste tipo de problemas apesar de existirem três elementos (o todo e duas partes) apenas uma parte é considerada como desconhecida, não havendo distinção entre elas. Nos problemas de Comparar, apesar de coincidentes os elementos que são desconhecidos na situação, Willis e Fuson consideram essa diferença em termos de dimensão das quantidades. A classificação que estes autores adotam nos seus estudos parece considerar não só a estrutura semântica dos problemas, e distinguem entre situações de adição e situações de subtração, como também parecem considerar a magnitude das quantidades envolvidas. Posteriormente, Fuson (2004) ao analisar o currículo dos Estados Unidos da América adota uma classificação baseada nos três grandes grupos identificados pela maioria dos autores, mas com designações diferentes. Os problemas de Comparação, Fuson designa de Pôr Junto/Tirar uma Parte, os problemas de Transformação nomeia de Juntar/Retirar, e aos problemas de Comparação atribui a designação de Comparar Mais/Comparar Menos.

Entre estas classificações verifica-se algum consenso, dado que, de uma forma geral, na sua estrutura são apresentadas situações em que ocorre: (a) transformação de quantidades, contempladas por designações como "Transformação", "Transformar para Mais" e "Transformar para Menos", "Juntar" e "Separar"; (b) composição de quantidades, designadas por situações de "Composição", "Pôr Junto/Tirar uma Parte" e "Parte-Parte-Todo"; (c) comparação de quantidades, consideradas por designações de "Comparação", "Comparar", "Comparar Mais/Comparar Menos" havendo, neste caso, uma dissociação de uma categoria que contempla os casos em que esta comparação, sendo estática, dá lugar a uma situação dinâmica e como tal, refletidas na classificação de problemas de "Equalização" de Carpenter et al. (1981).

Uma classificação diferente das anteriores é proposta por Vergnaud (1982, 1986, 1996, 1997) e baseia-se não só na estrutura dos problemas, mas também nas operações de pensamento necessárias para a sua resolução. Os problemas denominados de Composição de Duas Medidas, Transformação Ligando Duas Medidas e Relação Estática Ligando Duas Medidas (Vergnaud, 1982), assumem-se coincidentes, na sua estrutura, com os problemas, classificados por Riley et al. (1983), de Combinação, Transformação e Comparação, respetivamente. Ambos os autores descrevem o mesmo esquema de problemas com as mesmas classes, apesar das designações diferentes, de acordo com: (a) a quantidade desconhecida; (b) a direção positiva ou negativa da relação estabelecida no enunciado do problema.

Vergnaud (1982) debruçou-se ainda sobre tipos de problemas de estrutura aditiva mais complexos, com composições de transformações e de relações, correspondendo aos tipos IV, V e VI, por ele designados de Composição de Duas Transformações, Transformação Ligando Duas Relações Estáticas e Composição de Duas Relações Estáticas, respetivamente. Segundo Vergnaud (2011), estes tipos de problemas serão mais indicados a partir do 5.º ano de escolaridade, quando as crianças já têm mais de 10 anos. Não se encontram referências a estes tipos de problemas mais complexos nos trabalhos realizados pelos investigadores que refletiram sobre os problemas mais simples de estrutura aditiva.

Magina et al. (2001), pegando nas situações que Vergnaud (1997) designa de prototípicas da adição, como sendo a reunião de duas partes num todo e a transformação de uma quantidade inicial numa final, classificam os problemas em três tipos: Composição, Transformação e Comparação, e dentro destes situam as situações por níveis de complexidade, que denominam de extensões. Aos problemas mais simples é atribuída a designação de Protótipos, e aos mais complexos, problemas de 4.ª extensão.

As várias classificações propostas na literatura vão traduzindo sucessivas adaptações que os autores vão fazendo às classificações anteriores. Carpenter et al. (1999) vão reformulando definições anteriores de Carpenter e colaboradores (1981, 1982, 1983, 1984). Fuson (1992a) baseia-se em ideias de Carpenter e Moser (1982), de De Corte e Verschaffel (1987) e de Riley e Greeno (1988). Por seu lado, Magina et al. (2001) retoma ideias de Vergnaud (1997, 2011) no que diz respeito às situações prototípicas e define uma classificação onde distingue níveis de complexidade. Contudo, em termos de conteúdo de problemas, ou seja, na sua estrutura, parece haver alguma convergência, e os diversos autores concordam, na sua generalidade, na identificação dessas mesmas estruturas. As diferentes classificações reconhecem problemas cujas estruturas comportam a combinação das partes para resultar o todo, a transformação de um estado inicial num estado final, e a relação comparativa que se estabelece entre dois conjuntos.

Para além da identificação de grandes tipos de problemas, todos os autores identificam classes dentro dos problemas, de acordo com os elementos desconhecidos. Apesar de não haver total concordância na identificação dessas classes, todos os autores são unanimes em reconhecer que os elementos desconhecidos no problema originam diferentes níveis de complexidade. Assim, mais importante do que conhecer as diferentes classificações de problemas de estrutura aditiva existentes na literatura ao longo do tempo, importa reconhecer a importância da diversidade de problemas a propor às crianças e conhecer o grau de dificuldade que eles comportam. Perceber o impacto da classificação dos diferentes tipos de problemas de estrutura aditiva obriga a uma análise do grau de dificuldade que cada tipo de problema comporta.

2.2. Sobre a dificuldade dos problemas de estrutura aditiva

É consensual entre os diversos investigadores que a dificuldade que as crianças revelam na resolução dos problemas reside no modo como elas interpretam as relações descritas nos enunciados (Nunes et al., 2009). Problemas relativamente fáceis podem ser considerados pelas crianças como muito difíceis, se as relações matemáticas que se estabelecem nos problemas são pouco transparentes. O seguinte problema “A Ana tinha alguns copos, partiu 3 e agora tem 4. Quantos copos tinha no início?”, constitui um problema de Transformação onde o resultado final é dado, mas desconhece-se a quantidade inicial, afigurando-se como de difícil resolução para a criança. Este problema torna-se difícil porque a história trata de uma subtração mas a solução passa por uma adição, e as crianças têm que recorrer ao seu conhecimento sobre as relações inversas entre adição e subtração para resolverem o problema.

A classificação de problemas de estrutura aditiva de Magina et al. (2001) remete para a complexidade existente nos diferentes tipos de problemas, fruto das situações que são descritas e das relações que lhe são implícitas. Para estas autoras, os problemas mais simples são os de Composição, apesar de, dentro destes, haver diferenças consoante o elemento desconhecido, sendo os de menor complexidade, Protótipos, aqueles onde se pretende encontrar o todo. Também os problemas de Transformação com o estado final desconhecido são considerados de menor complexidade e também eles designados de Protótipos. Os que apresentam maior grau de complexidade são os problemas de Comparação, também estes com diferentes níveis de complexidade, consoante o elemento ausente no problema: com menor grau de complexidade aqueles cujo elemento referido é desconhecido, seguido dos que têm a diferença desconhecida e por último, e os mais complexos dentro dos problemas de Comparação, os que têm o referente desconhecido. Os problemas de Transformação também apresentam graus de complexidade cognitiva diferentes, mediante o elemento desconhecido, sendo o mais difícil e considerado com maior complexidade, aquele cujo estado inicial é desconhecido, sendo por isso de 4.ª extensão. Neste tipo de problemas, as crianças têm que recorrer ao seu conhecimento da relação inversa para poder chegar à solução correta.

Realizar a operação inversa é necessário nos problemas de Transformação com início desconhecido, tanto nas situações de adição como nas situações de subtração, e em ambos os casos, seguir os indícios linguísticos conduz ao erro. Riley et al. (1983) observaram que os problemas de Transformação com o início desconhecido foram resolvidos pelas crianças do pré-escolar, de 5 e 6 anos, apenas com uma taxa de sucesso de 9%, e por 28% das crianças do 1.º ano, ao invés das taxas de sucesso na ordem dos 100% apontados na resolução de problemas de Transformação, em que uma quantidade é adicionada ou subtraída de outra, e a solução era encontrada pela abordagem direta do problema.

Vergnaud (1982) refere que os problemas de Transformação Ligando Duas Medidas, com início desconhecido, são resolvidos um a dois anos depois dos problemas do mesmo tipo, e onde o elemento desconhecido é o resultado. E isto porque, segundo Vergnaud (1997), a dificuldade na resolução nestes problemas é conceptual, pois para além de a solução requerer a inversão da transformação, requer também que sejam claramente diferenciados os quatro conceitos em ação: o estado inicial, o estado final, a direção da transformação e a transformação inversa. Relativamente aos problemas de Composição de Duas Transformações, este autor refere ainda que eles são de tal forma complexos para as crianças, que estas ainda apresentam 75% de insucesso no 6.º ano. Vergnaud atribui esta dificuldade sentida pelas crianças não ao cálculo numérico ou operação numérica necessárias à resolução, mas à forma como as crianças entendem o problema. Perante os exemplos de problemas de: (a) Problema de Problema de Transformação Ligando Duas Medidas, com o resultado desconhecido "O João tem 3 *tazzos*, fez um jogo e ganhou 4. Quantos *tazzos* tem agora?"; (b) Problema de Transformação Ligando Duas Medidas, com o início desconhecido "O João perdeu 4 *tazzos* num jogo, ficando com 3. Quantos *tazzos* tinha antes de jogar?"; (c) Problema de Composição de Duas Transformações "O João fez dois jogos. No segundo jogo perdeu 4 *tazzos*. No final conta os *tazzos* e dá conta que ganhou 3 *tazzos*. O que se passou no primeiro jogo?", diferentes quanto à sua estrutura, a operação que as crianças têm que realizar é a mesma (3+4). No entanto, as crianças entendem estes problemas de forma diferente, isto porque a necessidade de realizar uma operação de pensamento baseada na propriedade inversa da adição e subtração aumenta consideravelmente o grau de dificuldade de resolução dos problemas. Apenas o primeiro exemplo pode ser resolvido pela abordagem direta da situação, ou seja, o problema refere uma adição e a solução passa pela realização de uma adição. Nos dois últimos exemplos trata-se de problemas de Transformação, nos quais a solução correta não é encontrada pela abordagem direta da situação (Nunes & Bryant, 1996; Nunes et al., 2009), sendo necessário realizar a operação contrária à que é descrita no problema.

Também os problemas de Combinação com o subconjunto desconhecido são assumidos como mais difíceis do que problemas de Combinação em que o elemento desconhecido é o total dos dois subconjuntos, uma vez que as crianças têm que realizar uma operação de pensamento apelando ao seu conhecimento da relação inversa. Para Piaget e Szeminska (1971), as crianças entre os 5 e os 8 anos de idade consideram difícil a compreensão da relação inversa porque não são capazes de realizar processos reversíveis. Elas não entendem que a adição (+8) é anulada pela subtração (-8) e só atingem o conceito operatório da adição e subtração quando coordenam os dois esquemas de ação de juntar e separar e reconhecem a relação inversa entre as duas operações (Nunes et al., 2005).

Parece ser claro, então, que a dificuldade dos problemas decorre da relação entre a situação descrita nos problemas e os esquemas mentais que as crianças necessitam de utilizar para os resolver (Nunes et al., 2009). Sobre este aspeto, Vergnaud (1976, 1982) observou que crianças de 6 anos conseguem resolver acertadamente muitos problemas (cerca de 50%) nos quais não há necessidade de efetuar nenhum cálculo relacional e a solução passa pela abordagem direta que é descrita no enunciado, ao contrário do fraco sucesso (cerca de 20%) na resolução de problemas onde a solução passa pela operação inversa à que é descrita no problema. À mesma conclusão chegaram Willis e Fuson (1988) com alunos de 7 e 8 anos. Os problemas que suscitaram maior dificuldade foram os que geraram um conflito entre a situação que era descrita no problema e a operação inversa necessária à sua resolução, o que se verificou com os problemas de Transformar com o início desconhecido e os de Pôr Junto (Combinação) com as partes desconhecidas. Também um dos tipos de problema de Comparação (com o elemento comparado desconhecido) se mostrou de grande dificuldade para os alunos de 7 e 8 anos.

Apesar das dificuldades que as crianças encontram na resolução de problemas de Transformação e Combinação, estes são considerados por elas bastante mais fáceis do que os problemas de Comparação (Brown, 1981), uma vez que estes últimos são problemas que envolvem uma relação estática que liga duas medidas e as crianças têm que pensar em relações ao invés de pensar em quantidades. As crianças entre os 8 e 10 anos conseguem, com facilidade, dizer “quantos berlindes tem o Rui, se começar o jogo com 5 berlindes, ganhar 3 no 1.º jogo, perder 2 no 2.º e ganhar 1 no último”. No entanto, se não souberem quantos berlindes o Rui tinha antes de iniciar os jogos, e lhes for perguntado se “ficou com mais ou menos berlindes quando acabou os jogos?”, as crianças consideram este segundo problema muito mais difícil.

Isto porque, apesar de lhes ser ensinado que “ganhar 3 berlindes no 1.º jogo” não significa ter 3 berlindes inicialmente, elas continuam a interpretar relações como se fossem quantidades (Nunes et al., 2009). Nos problemas de Transformação, as crianças podem, com facilidade, descobrir as ações que precisam de realizar para resolver um problema, ao contrário dos problemas que envolvem comparações, em que a conexão entre a situação e a operação que conduz à solução não fica imediatamente clara, porque nada é retirado ou adicionado de qualquer um dos conjuntos, antes é estabelecida uma relação entre os dois conjuntos.

As crianças desenvolvem um conceito inicial de adição e subtração relacionado com o juntar e retirar elementos de um conjunto, o que não é facilmente relacionado com a compreensão do número como medida de uma relação estática. As crianças do pré-escolar conseguem relacionar o número como a medida de conjuntos, as ações de retirar quantidades com a subtração e juntar quantidades com a adição. Conseguem também ter sucesso quando os números se referem ao tamanho dos conjuntos ou a transformações, mas o mesmo não se passa quando os números se referem a relações estáticas (Nunes & Bryant, 1996). A coordenação do seu conhecimento dos números com a compreensão das quantidades é ainda difícil para alunos do 1.º ciclo. Muitas crianças não distinguem claramente entre quantidades e relações quando se trata de números, e esta é uma das explicações para a sua dificuldade na resolução de problemas de Comparação.

Quando lhes é dado um problema de relações, as crianças interpretam-no como um problema de quantidades. Mesmo as crianças dos 7 aos 9 anos, ensinadas sobre quantificação de relações, ainda confundem quantidades e relações (Nunes et al., 2009). No seguinte problema “O Tomás, o André e a Ana colocaram os seus doces num saco. O Tomás e o André tinham mais 7 doces do que a Ana, o Tomás tinha 3 doces e Ana tinha 2. Quantos doces tinha o André?”, as crianças interpretam que o Tomás e o André tinham 7 doces (em vez de “tinham mais 7 doces”). Palavras “menos do que” sugerem uma solução através do retirar e “mais do que” sugerem um problema de juntar e se as crianças identificam superficialmente a estrutura do problema, incorrem em erro (Nunes & Bryant, 1996). Mas nos problemas de Comparação nada é retirado ou acrescentado, e a pergunta é apresentada numa forma estática (“O João tem 8 berlindes, o Tomás tem 3. Quantos berlindes tem o Tomás a menos do que o João?”). Porém, se a pergunta for transformada no sentido de saber quantos elementos é necessário juntar ao conjunto menor para que este fique com o mesmo número de elementos do conjunto maior (“Quantos berlindes temos que dar ao Tomás para que fique com o mesmo número de berlindes que o João?”), parece ser mais fácil para as crianças perceber o que precisam de fazer para resolver o problema, já que ele deixa de se apresentar numa forma estática e passa a assumir-se como um problema de Transformação. A criança deixa de pensar numa situação estática onde tem que quantificar a diferença, e é solicitada a pensar numa transformação que estabeleça a ligação das duas medidas estáticas (Nunes & Bryant, 1996). A esta conclusão chegou também Hudson (1983), referindo que a dificuldade não está na descodificação da palavra "mais" e "menos", nem no uso da correspondência termo-a-termo, mas sim na quantificação da relação, e na expressão "quantos a mais", "quantos a menos".

Carpenter et al. (1981) ao apresentarem o problema de Comparação "O Paulo tem 8 berlindes, a Ana tem 5. Quantos berlindes tem o Paulo a mais (ou a menos) do que a Ana?", no qual se pretende saber o valor da diferença, observaram que 53% das crianças do 1.º ano (6 anos) respondia a esta pergunta com a quantidade de berlindes que tinha o Paulo (8 berlindes). Este é o erro mais comum mencionado na literatura, a questão relacional é respondida com a quantidade mencionada no problema. A explicação para este erro não será a falta de conhecimento sobre a adição ou subtração, porque 85% dessas mesmas crianças usam corretamente estratégias de juntar e retirar para resolver problemas de Combinação e Transformação, mas estará relacionada com a interpretação que as crianças fazem da expressão comparativa. Vários estudos confirmam o mesmo tipo de erro nas respostas a problemas de Comparação (Riley et al., 1983; Hudson, 1983), quando é perguntado "quantos carros tem o Miguel a mais do que o João?", a resposta errada mais comum é dada pelo número do conjunto maior, da mesma forma quando questionadas sobre "quantos carros tem o João a menos do que o Miguel?", a resposta tipicamente errada é dada pelo número do conjunto menor. Os termos "mais" e "menos" são entendidos como termos comparativos, mas as crianças não conseguem relacionar esse conhecimento com uma estratégia para quantificar a diferença entre os dois conjuntos do problema, e falham na quantificação da diferença. Uma das possíveis explicações para tal, de acordo com Hudson (1983), é a forma como se expressa a relação. Quando se fala de quantidades diz-se "O Paulo ganhou berlindes", "O Paulo perdeu berlindes", o que faz das duas expressões, expressões opostas. Quando se fala de relações, as afirmações que eram opostas podem querer dizer a mesma coisa. Depois de ganhar 5 berlindes pode-se dizer que "o Paulo tem mais 5 berlindes" ou que, antes de ele ganhar os berlindes, "ele tinha menos 5 berlindes". Hudson observa que a forma como é expressa a comparação é o fator indutor do erro.

As crianças conseguem facilmente responder a questões sobre quantidades de conjuntos, porém, a dificuldade surge quando se usa a expressão “quantos estão a mais do que”, pois as crianças relacionam a palavra “mais” com adicionar, juntar. Esta dificuldade resulta, assim, da ambiguidade linguística, e não de qualquer falha na competência de estabelecer a correspondência entre dois conjuntos. Para Fuson (2004) a dificuldade que está subjacente aos problemas deve-se a três razões: 1) as crianças não conseguem representar fisicamente a quantidade “mais” e “menos” neste tipo de problemas; 2) a linguagem é complexa para as crianças; 3) é difícil perceber a direção que é dada numa comparação.

Lewis e Mayer (1981) referem ainda que os problemas de Comparação que têm o referente desconhecido (“O Paulo tem 8 berlindes. Ele tem 3 berlindes a mais do que a Ana. Quantos berlindes tem a Ana?”) são mais difíceis de resolver do que aqueles em que o sujeito da questão é também o sujeito da expressão da relação. O valor da relação é formulado pela expressão “a mais”, e a resposta é conseguida pela subtração, o que se traduz num problema de linguagem inconsistente, onde se verifica um esforço maior para processar a informação das duas expressões, o que poderá conduzir ao erro. Pelo contrário, as situações em que o sujeito da expressão da relação e o sujeito da questão é o mesmo (“A Ana tem 5 berlindes. O Paulo tem mais 3 do que a Ana. Quantos berlindes tem o Paulo?”) são mais facilmente interpretadas uma vez que a solução é apontada pela operação implícita na expressão de comparação. A mesma opinião é partilhada por Magina e colegas (2001) que consideram os problemas com o elemento comparado desconhecido como de menor complexidade, e os mais difíceis aqueles que têm o referente como elemento desconhecido, contrariamente à posição de Verschaffel e De Corte (1997), que entendem ser mais fáceis os problemas com a diferença desconhecida.

De acordo com Nunes et al. (2009), a complexidade dos problemas de Comparação resulta de três tipos de dificuldades: a dificuldade que as crianças têm em interpretar as afirmações de relação como tal, em vez de as interpretarem como declarações de quantidades; a dificuldade que têm em transformar declarações de relações em afirmações equivalentes que as ajude a pensar no problema de maneira diferente; a dificuldade que têm em combinar duas afirmações de relações numa terceira afirmação relacional sem cair na tentação de tratar o resultado como uma afirmação sobre quantidades. Nunes e os seus colaboradores referem ainda que este pensamento relacional envolve a construção de um modelo de situações-problema, e na escola as crianças têm pouca oportunidade de explorar as diferentes formas de resolução de problemas de relação, com vista a criar um modelo das situações. Para estes autores, perceber as relações entre quantidades é necessário à compreensão dos modelos matemáticos. Quando as crianças compreendem as relações quantitativas dos problemas, analisam corretamente as situações e resolvem-nos com estratégias adequadas.

2.3. Sobre as estratégias de resolução nos problemas de estrutura aditiva

As crianças usam estratégias para resolver os problemas de estrutura aditiva interpretando a situação que é descrita nos problemas. Desde Groen e Parkman (1972) que os procedimentos adotados pelas crianças na resolução de problemas de adição e subtração têm sido estudados, resultando daí, vários tipos de estratégias observadas e descritas pelos diferentes autores. Algumas estratégias descritas servem de base em estudos posteriores, emergindo novas categorizações que rebatem ou não as anteriores.

Groen e os seus colaboradores, ao analisarem a resolução de problemas de adição, identificaram inicialmente cinco modelos de contagem (Groen & Parkman, 1972) e posteriormente um 6.º modelo (Groen & Resnick, 1977). Não obstante o importante trabalho realizado por estes autores na definição de estratégias de resolução de problemas, este apenas faz referência a problemas de adição.

Mais completo do que os trabalhos antecessores, o estudo de Carpenter et al. (1981) dá conta da forma como as crianças do 1.º e 2.º ano da escolaridade básica resolvem problemas de adição e subtração sem terem recebido instrução formal sobre as operações e identificam cinco estratégias distintas para a adição e para a subtração, diferentes das descritas por Groen e Resnick (1977) e quatro estratégias para a subtração. Carpenter et al. (1981) observaram que algumas estratégias modelam naturalmente a situação que é descrita no problema. Os problemas de Separar são maioritariamente resolvidos pela estratégia de Separar, assim como os problemas que têm subjacente a ação de juntar são resolvidos pela estratégia Juntar. Os problemas de Comparação são resolvidos pela estratégia de Correspondência.

Num estudo posterior desenvolvido pelos mesmos autores (Carpenter et al., 1983), são identificadas estratégias diferentes das que haviam sido observadas, também baseadas na estrutura semântica dos problemas, mas com maior enfase na resolução dos problemas de subtração. Neste estudo, Carpenter e os seus colaboradores identificam também Factos Derivados, mas consideram-nos dentro da mesma categoria de Factos Numéricos.

Em estudos seguintes, Carpenter e Moser (1984) distinguem três níveis diferentes de estratégias usadas pelas crianças dos 6 aos 8 anos, continuando a fazer a distinção entre estratégias para a adição e estratégias para a subtração. Carpenter e Moser constatam que as estratégias das crianças se vão modificando à medida que elas vão aperfeiçoando os seus conhecimentos e desenvolvendo o seu raciocínio e reconhecem nas estratégias de factos numéricos o maior nível de abstração. Esta distinção dos três níveis de estratégias segundo o grau de abstração (estratégias de manipulação direta, estratégias de contagem, estratégias mentais) é posteriormente confirmado por Carpenter et al. (1999), mas já não diferenciam estratégias de resolução para problemas de adição e para problemas de subtração. Os autores consideram também uma nova classificação de problemas de estrutura aditiva onde não distinguem a adição e subtração como operações pertencentes a tipos de problemas diferentes. Carpenter et al. (1999) consideram que as crianças vão evoluindo no recurso a estratégias de níveis diferentes consoante a sua capacidade de resolver os problemas. Inicialmente recorrem a estratégias de manipulação direta, com a representação física de cada quantidade envolvida no problema, passando depois a estratégias de contagem, onde a resposta se foca na própria sequência de contagem e por último, fazem uso de estratégias mentais, com recurso a factos conhecidos previamente memorizados, não manipulando objetos nem usando a contagem para resolver os problemas propostos.

O mesmo número de níveis de estratégias já reconhecido por De Corte e Verschaffel (1987), apesar de lhes atribuírem denominações diferentes, foi considerado por Carpenter e colegas (1999). As estratégias materiais correspondem às estratégias de manipulação direta de Carpenter e colegas; as estratégias verbais às estratégias de contagem e as estratégias mentais mantêm a mesma designação em ambos os autores. Contudo, De Corte e Verschaffel (1987) distinguem estratégias para a adição e estratégias para a subtração, à semelhança dos primeiros estudos de Carpenter (ver Carpenter et al., 1981; Carpenter & Moser, 1984) e que lhes serviu de base para as investigações realizadas. Apesar disso, as estratégias identificadas não são coincidentes, no seu todo, com as anteriores de Carpenter e colegas (1981, 1984). De Corte e Verschaffel (1987) observaram, à semelhança dos autores anteriores, que as estratégias que as crianças de 6 e 7 anos usam são fortemente influenciadas pela estrutura semântica dos problemas, mesmo ao nível das estratégias mentais. São ainda influenciadas pela ordem em que são apresentadas as quantidades no enunciado dos problemas e pelo tamanho das quantidades envolvidas.

Fuson (1992b) reconhece, tal como Carpenter e Moser (1984) e De Corte e Verschaffel (1987), que as crianças evoluem na forma como resolvem as situações de adição e subtração. Contudo, baseada nas diferentes maneiras que as crianças a partir dos 6-7 anos têm de recorrer à sequência numérica da contagem, Fuson identifica não três mas quatro níveis de estratégias: Nível 1 - Sequência Inquebrável; Nível 2 - Cadeia Quebrada; Nível 3 - Cadeia Numérica; Nível 4 - Cadeia Bidirecional. Observam-se semelhanças entre o nível 1 e 2 com a estratégia de Manipulação Direta, onde a criança recorre a objetos. Também o nível 4 se assemelha à estratégia de Factos Numéricos, estratégia mais abstrata. Nestes níveis, Fuson (1992b) integra algumas das estratégias identificadas por outros autores, como as estratégias Contar Tudo, Contar a partir de, Contar até, Contagem regressiva.

A Tabela 7 apresenta uma síntese das estratégias utilizadas pelas crianças a partir dos 6-7 anos, identificadas pelos diversos autores na resolução de problemas de estrutura aditiva.

Tabela 7 - Estratégias identificadas pelos diversos autores na resolução de problemas de estrutura aditiva.

		AUTORES								
ESTRATÉGIAS		Groen e Parkman (1972)	Groen e Resnick (1977)	Carpenter Hiebert e Moser (1981)	Carpenter Hiebert e Moser (1983)	Carpenter e Moser (1984)	De Corte e Verschaffel (1987)	Fuson (1992b)	Correa e Moura (1997)	Carpenter Fennema, Levi e Empson (1999)
Estratégias de adição	Contagem começa no 0	X	X							
	Contagem começa no nº à esquerda	X	X							
	Contagem começa nº à direita	X	X							
	Contar a partir do	X	X	X		2				

	menor									
	Contar a partir do maior	X	X	X	X	2	2			2
	Contar a partir do 1				X	2	2			
	Contar tudo		X	X	X	1	1	1		1
	Facto numérico			X	X	3		3		3
	Facto derivado					3		3		3
	Heurística			X						
	Correspondência invertida						1			
	Contar a partir do maior começando no 1						2			
	Contar a partir do 1.º n.º mencionado						2	2		2
	FN começando no 1.º						3		X	
	FN começando no maior						3			
	FD começando no 1.º						3			
	FD começando no maior						3			
Estratégias de subtração	Separar			X	X	1	1			1
	Separar para			X			1			1
	Juntar			X	X	1				
	Correspondência			X	X	1	1			1
	Contagem regressiva				X	2	2	2		2
	Contagem progressiva				X					
	Factos derivados				X					
	Juntar para						1			1
	Contagem regressiva para						2			2
	FN de subtração direta						3			
	FN subtração indireta						3			
	FN adição direta						3			
	FN adição indireta						3			
	FD subtração indireta						3			
	FD adição indireta						3			
	Tentativa e erro									1

Contar até	2		2
Contagem		X	
Composição		X	
Decomposição		X	
Variação de resultados		X	

Estabelecendo algumas afinidades, para Groen e Parkman (1972) a estratégia *Contar tudo* tem a designação de “Ambos são contados em separado”; para De Corte e Verschaffel (1987), adquire a designação de “Contar tudo com modelos”. Para Carpenter e Moser (1984) e para De Corte e Verschaffel (1987) a estratégia *Contar a partir do menor* adquire a designação de “Contar a partir do número dado”. Para Fuson (1992b) a estratégia Contagem regressiva corresponde ao 3.º nível e a estratégia *Facto derivado* ao 4.º nível.

Da literatura é possível registar que as crianças usam variadíssimas estratégias na resolução dos problemas de adição e subtração. Há estratégias que são comuns à maioria dos autores, como é o caso das estratégias “Contar a partir do maior”, “Contar tudo”, “Separar, “Correspondência”, “Facto numérico”, apesar de, em alguns casos, adquirirem designações diferentes. Contudo, não se pode afirmar que, de uma forma geral, os diversos autores identificam as mesmas estratégias para os mesmos tipos de problemas. A partir dos estudos de 1984, os autores já começam a distinguir vários níveis de estratégias, consoante se trate de estratégias com recurso a objetos materiais (representado na Tabela 7 com o número 1), estratégias baseadas na sequência da contagem (representadas com o número 2), e estratégias mais abstratas, onde não há lugar nem à manipulação nem à contagem (representadas com o número 3). Fuson (1992b) e Carpenter et al. (1999) não distinguem estratégias para os problemas de adição e subtração. Carpenter e os seus colaboradores consideram que as crianças usam as estratégias baseadas na estrutura semântica dos problemas, não considerando estratégias distintas para essas operações, e Fuson baseia as estratégias na forma como as crianças usam a sequência numérica na contagem.

Fica assim claro que as crianças a partir dos 6-7 anos conseguem resolver, com uma grande variedade de estratégias, alguns problemas de estrutura aditiva com sucesso, sem lhes ter sido formalmente ensinado a adição e a subtração. E resolvem-nos baseadas nas situações descritas nos problemas. Contudo, não foi possível identificar estudos com participantes de idades inferiores aos 6-7 anos e que tivessem sido sujeitas aos mesmos tipos de problemas que as crianças mais velhas, para se aferir as estratégias usadas nestas idades. Não foi possível também identificar estudos que se debruçassem exaustivamente sobre as estratégias usadas pelas crianças nos problemas de Comparação, considerados pelos investigadores como sendo o tipo de problemas que gera maior dificuldade quando resolvidos por crianças de 6-7 anos.

2.4. Em síntese

O interesse suscitado pelas capacidades das crianças no uso do seu conhecimento informal levou muitos investigadores a debruçarem-se sobre a resolução de problemas de estrutura aditiva. É possível identificar estudos sobre a resolução de problemas, as estratégias usadas, a estrutura dos problemas e sobre o entendimento das crianças acerca das situações descritas nos enunciados. Tudo isto resultou em classificações diferentes dos problemas de estrutura aditiva, bem como na análise dos seus níveis de complexidade.

No entanto, e apesar de haver um trabalho interessante na identificação dos tipos de problemas, não se pode concluir que todos os estudos convirjam na mesma categorização, quer de estruturas, quer de designações. A maior parte dos estudos foca-se na classificação de problemas simples de estrutura aditiva, que podem ser resolvidos na escolaridade básica até ao 4.º ano. Sobre estes problemas, considerados problemas de Combinação, Transformação e Comparação (Riley et al., 1983; Magina et al., 2001), designados por Vergnaud (1982; 1986) de Composição de Duas Medidas, Transformação Ligando Duas Medidas e Relação Estática Ligando Duas Medidas, respetivamente, é possível encontrar várias classificações de diversos autores (ver Carpenter et al., 1999). Porém, não se conhecem, em igual medida, classificações para os problemas mais complexos que Vergnaud (1982; 1986) designa de Composição de Duas Transformações, Transformação Ligando Duas Relações Estáticas e Composição de Duas Relações Estáticas.

Sendo unanimemente reconhecido que as crianças resolvem os problemas de estrutura aditiva com base na interpretação das situações e relações que são descritas nos problemas, é por todos os investigadores aceite que a forma como as crianças percebem as relações nos problemas condiciona a facilidade na resolução. Problemas em que as situações que são descritas não são claras, poderão dificultar a sua resolução. É o caso dos problemas onde as crianças têm que recorrer ao conhecimento que têm da relação inversa das operações, ou problemas onde têm que atender e pensar em termos de relação ao invés de interpretarem os números descritos como quantidades.

Remetendo apenas para os tipos de problemas analisados pela maioria dos autores (problemas de Composição, Transformação e Comparação), parece ser unânime a opinião de que os problemas que as crianças consideram de mais fácil resolução são os problemas de Transformação com o resultado desconhecido. As crianças conseguem perceber, através do enunciado do problema, a estratégia que terão que usar para resolver o problema. Já quanto aos problemas de mais difícil resolução, considerados pelos investigadores como sendo os problemas de Comparação, porque as crianças têm que quantificar uma relação e não quantidades, não há pleno consenso quanto aos mais difíceis, determinado pelo elemento que é desconhecido. Enquanto que Magina et al. (2001), à semelhança de Lewis e Mayer (1981) consideram que os problemas de Comparação com o referente desconhecido são os mais difíceis, De Corte e Verschaffel (1987) consideram ser aqueles cujo elemento desconhecido é o elemento comparado.

Poder-se-á supor que alguma desta divergência se deve à idade dos participantes nos diferentes estudos. Enquanto que De Corte e Verschaffel (1987) trabalharam com crianças de 6 anos, nos estudos de Magina et al. (2001, 2004), os participantes foram crianças da 1.ª à 4.ª série (6 aos 10 anos). Assim como, nos estudos que abordaram outras questões, como as estratégias de resolução utilizadas pelas crianças, não é possível obter-se uma coerência nos seus resultados sobre os procedimentos das crianças. Alguns estudos refletiram apenas sobre problemas de adição (Groen & Parkman, 1972), outros sobre problemas de Comparação (Hudson, 1983; Nunes & Bryant, 1991; Nunes et al., 2005), outros ainda sobre o uso de estratégias de cálculo mental (Correa & Moura, 1997), ou então sobre o apoio ou não de materiais (Carpenter & Moser, 1982).

Esta divergência originou resultados distintos de estratégias para problemas de adição e para problemas de subtração. E outros, não considerando essa distinção relevante, identificaram níveis de estratégias segundo o grau de abstração implícito nos procedimentos das crianças. Facilmente se encontram descrições de estratégias de contagem até à exaustão, no entanto, no que se refere a problemas de Comparação, os procedimentos das crianças ficam-se pela descrição da estratégia de correspondência, não havendo uma exposição, com o mesmo nível de detalhe, na forma de contar e distribuir os materiais na atuação das crianças, mesmo reconhecendo que estas conseguem resolver este tipo de problemas antes de iniciarem a escolaridade formal e com estratégias adequadas.

3. Problemas de estrutura multiplicativa

Em trabalhos que desenvolveu sobre proporcionalidade (ver Inhelder & Piaget, 1958), Piaget e os seus colaboradores referem que este conceito apenas é dominado aos 10-11 anos, no entanto, afirmam que as crianças de 5-6 anos já conseguem produzir raciocínios elementares da correspondência de um-para-muitos, ainda que num plano intuitivo (Piaget & Szeminska, 1971). Piaget e Szeminska (1971) sustentam esta teoria com estudos em que propuseram às crianças a atribuição de ovos a 10 bonecas. Inicialmente, numa correspondência termo-a-termo, as crianças teriam que atribuir um ovo a cada boneca, posteriormente é-lhes dito que cada boneca deverá comer dois ovos e as crianças terão que colocar mais 10 oveiros sobre a mesa. Na generalização do seu conhecimento, sempre que lhes é sugerido três ou quatro ovos para cada uma das 10 bonecas, as crianças deverão ir buscar mais 10 oveiros por cada ovo que a boneca vai comer mais, para satisfazer a relação de mais um ovo para cada uma das 10 bonecas. Estes autores sugerem, assim, que as primeiras ideias que as crianças têm de multiplicação vêm do desenvolvimento do esquema de correspondência um-para-muitos, e posteriormente do seu uso em inferências transitivas.

No seguimento dos trabalhos de Piaget sobre o raciocínio multiplicativo, Hart (1980) desenvolveu uma importante pesquisa sobre o raciocínio proporcional. A sua análise recaiu sobre o desenvolvimento do raciocínio em alunos do ensino secundário do sistema educativo inglês, envolvendo alunos dos 13 aos 15 anos. Uma das tarefas consistiu na resolução do “Problema da Sopa de Cebola”. A partir de uma receita para oito pessoas, inquiriu os alunos sobre a quantidade dos ingredientes para quatro e para seis pessoas. Apenas um dos ingredientes era mencionado com um número fracionário (½ caneca de natas).

A grande maioria das respostas para a pergunta de "quatro pessoas" foi obtida pela estratégia de encontrar a metade, ou seja, pelo inverso da replicação. Os alunos entre os 13 e os 15 anos foram bem-sucedidos, mais de 90% das respostas foram corretas para cada uma das idades. A resposta à segunda pergunta, para "seis pessoas", foi também encontrada por replicação. Os sujeitos já tinham encontrado as quantidades para quatro pessoas, por isso encontraram metade das quantidades de quatro e adicionaram as quantidades de duas às quantidades de quatro. Apesar da percentagem de sucesso nesta segunda pergunta ser mais baixa do que na pergunta "para quatro pessoas", ainda assim variou entre 75% e 88% para cada uma das idades. A taxa de sucesso verificada neste problema caiu drasticamente quando tiveram que responder à quantidade necessária de natas para quatro e seis pessoas, pois a quantidade mencionada para oito pessoas era de ½. As respostas certas variaram entre 20% a 24% porque a aritmética para resolver este problema não era fácil uma vez que envolvia frações. A ideia de razão e de proporção é mais facilmente entendida pelos alunos quando a relação que se estabelece é de 2:1, sendo possível a resolução dos problemas baseada em estratégias aditivas.

Durante 4 ou 5 anos a equipa de investigadores de Vergnaud realizou estudos no sentido de analisar a evolução dos procedimentos estratégicos usados pelos alunos em situações de multiplicação, e comparar a complexidade dos problemas. Decorrente de uma pesquisa realizada com 120 crianças dos 12 aos 16 anos, Vergnaud (1977) depreendeu, através dos resultados desse estudo, que o procedimento escalar é mais usado do que o procedimento funcional. Vergnaud pôde ainda observar, num outro trabalho que desenvolveu com 84 crianças de 11 e 12 anos (ver Vergnaud, Ricco, Rouchier, Marthe & Metregiste, 1978) onde lhes apresentaram diferentes versões do mesmo tipo de problemas de estrutura multiplicativa, que alguns problemas eram mais fáceis de resolver do que outros. Vergnaud e os seus colaboradores (1978) reconhecem a existência de dois grandes tipos de problemas de estrutura multiplicativa: I) a estrutura de Isomorfismo de Medidas, onde há uma relação de proporcionalidade entre dois tipos de medidas, sendo que as suas quantidades podem ser contínuas (comprimento e volume) e discretas (número de objetos); II) e a estrutura de Produto de Medidas, onde é realizado o produto de duas medidas, uma pela outra, ou de produto cartesiano. Os problemas considerados mais fáceis foram os de proporção direta e alguns de dupla proporção, tendo sido resolvidos por 2/3 dos participantes desse estudo nas versões mais simples dos problemas, e por 1/3 dos sujeitos nas versões mais complexas. Os problemas que estavam relacionados com o volume foram considerados de grande complexidade, e por isso mais difíceis de resolver.

Ao analisar uma das situações de raciocínio multiplicativo, focado nas divisões sucessivas, Lima (1982) desenvolveu um estudo com crianças brasileiras dos 7 aos 13 anos cujo objetivo era perceber a sua compreensão sobre divisões ao meio de quantidades discretas. Para tal, propôs às crianças que verificassem e comparassem as quantidades de dois conjuntos (dois conjuntos de berlindes) que iam sendo sistematicamente divididos em duas partes (em chávenas de cores diferentes), mas em vezes diferentes: dois conjuntos de berlindes distribuídos de forma igual por duas chávenas brancas, posteriormente um dos conjuntos foi dividido em dois, sendo os berlindes colocados em duas chávenas azuis. De seguida os berlindes da chávena branca, que não tinham sido divididos, foram divididos em dois e novamente divididos em dois e colocados, cada quarta parte em chávenas vermelhas.

As crianças foram sendo solicitadas a comparar a quantidade de berlindes em cada chávena no fim de cada divisão ao meio e justificar a sua resposta. As crianças mais novas, de 7-8 anos tiveram dificuldade em comparar a equivalência de metades com aparências diferentes e não perceberam a relação das partes com o todo. As crianças de 8/9 anos revelaram conseguir relacionar o todo com as partes, contudo, manifestaram dificuldade em relacionar o corte original com os cortes posteriores. As crianças de 11 e 12 anos revelaram ainda dificuldade em relacionar as partes com o todo quando as equivalências se mostravam complexas. Lima (1982) explica este facto com o sentido das relações nas situações de cortes sucessivos. O número de divisões sucessivas atua num sentido diferente das replicações sucessivas. Enquanto que com a replicação não se verifica nenhuma transformação na relação entre as variáveis, com as divisões sucessivas ocorre uma transformação na relação parte-todo.

Vergnaud (1983) reconhece alguma complexidade nos problemas de estrutura multiplicativa. Este autor considera que todos os problemas de estrutura multiplicativa, mesmo os problemas mais simples de multiplicação e divisão, implicam uma relação quaternária, que compreende quatro termos: duas quantidades numa relação fixa entre si, cuja proporcionalidade origina uma nova quantidade, ou um terceiro termo. Com base na estrutura dos problemas e nas relações quaternárias presentes, Vergnaud redefine a classificação dos problemas de estrutura multiplicativa estabelecida anteriormente por Vergnaud et al. (1978) e identifica três grandes tipos: I) Isomorfismo de Medidas; II) Produto de Medidas; III) Proporção Múltipla.

I- Problemas de Isomorfismo de Medidas

Têm subjacente uma estrutura em que se verifica uma proporção simples entre duas medidas. Neste tipo de problemas, Vergnaud (1983) identificou quatro classes, mediante o elemento desconhecido na relação quaternária: i) Multiplicação; ii) Divisão de 1.º tipo ou Divisão Partitiva; iii) Divisão de 2.º tipo ou Divisão por Quotas; iv) Regra de três ou Quarto Proporcional.

Os problemas de Multiplicação são ilustrados pelo exemplo: "O Simão comprou 5 balões a 2€ cada um. Quanto pagou pelos 3 balões?" e têm a sua expressão na Figura 11, em que M_1 diz respeito ao número de balões e M_2 se refere ao custo dos balões.

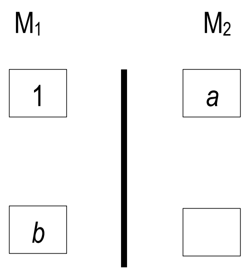


***Figura 11*:** Representação dos problemas de Isomorfismo de Medidas: Multiplicação (Vergnaud, 1983).

Os problemas de Divisão de 1.º tipo, ou Divisão Partitiva, ilustrados pelo exemplo "A Matilde quer partilhar 12 gomas por si e pelas suas duas amigas. Quantas gomas vai receber cada uma?", têm expressão na Figura 12, em que M_1 se refere ao número de crianças e M_2 se refere ao número de gomas.

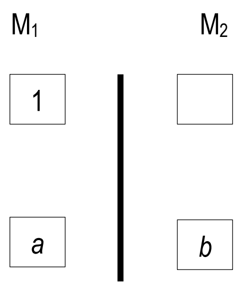


***Figura 12*:** Representação dos problemas de Isomorfismo de Medidas: Divisão de 1.º tipo ou Divisão Partitiva (Vergnaud, 1983).

Os problemas de Divisão de 2.º tipo, ou Divisão por Quotas, evidenciado pelo exemplo "A Matilde quer comprar batons. Ela tem 15€. Cada baton custa 5€. Quantos batons pode comprar?" é expresso pela Figura 13, sendo que M_1 diz respeito ao número de batons e M_2 ao custo dos batons.

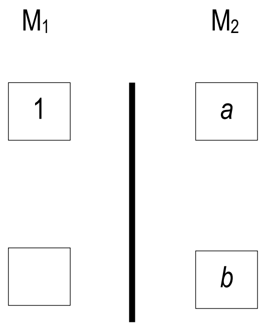


Figura 13**:** Representação dos problemas de Isomorfismo de Medidas: Divisão de 2.º tipo ou Divisão por Quotas (Vergnaud, 1983).

Os problemas de Regra de Três, ou Quarto Proporcional, são ilustrados pelo exemplo "Na marmelada, a mãe usa 1,5Kg de açúcar para 3 Kg de marmelos. De quanto açúcar precisa para fazer marmelada com 10 Kg de marmelos?" e retratam-se na Figura 14, sendo que M_1 é o peso dos marmelos e M_2 é o peso do açúcar.

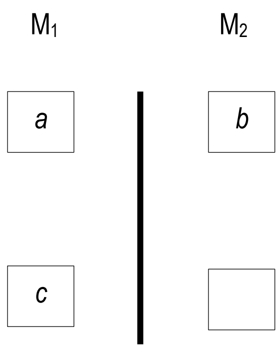


Figura 14**:** Representação dos problemas de Isomorfismo de Medidas: Regra de três ou Quarto Proporcional (Vergnaud, 1983).

Os problemas de Multiplicação e Divisão são a generalização dos problemas de Quarto Proporcional, no qual estão envolvidos quatro termos. São resolvidos com mais regularidade recorrendo às propriedades isomórficas de função linear, em que a dimensão que liga as medidas *a* e *b* é aplicada a *c* para determinar o valor em falta. Daí Vergnaud (1983) ter definido os problemas de Multiplicação e Divisão como problemas de Isomorfismo de Medidas, uma vez que a sua estrutura descreve uma proporção simples. Estes problemas são resolvidos com menos frequência pelas propriedades do coeficiente proporcional, onde é necessário perceber a relação que liga *a* a *c* e aplicar esse fator a *b* para encontrar o valor desconhecido. A estrutura dos problemas de Isomorfismo de Medidas distingue-se claramente da estrutura dos restantes tipos de problemas, problemas de Produto de Medidas e problemas de Proporção Múltipla.

II- Problemas de Produto de Medidas

Caracterizam-se pela composição cartesiana de duas medidas ("Na mesa estão 3 tipos de pães e 4 recheios para fazer sandwichs. Quantos tipos de sandwichs se conseguem fazer?"). Estes problemas têm pelo menos três variáveis envolvidas (o tipo de pão, o recheio, a sandwich), como tal, não podem ser representadas por estruturas de correspondência como os problemas de Isomorfismo de Medidas, mas antes por quadros de dupla entrada (ver Figura 15).

		Recheio			
		Manteiga (M)	Queijo (Q)	Fiambre (F)	Cacau (C)
Pão	Com sementes (S)	SM	SQ	SF	SC
	Branco (B)	BM	BQ	BF	BC
	D'avó (A)	AM	AQ	AF	AC

Sandwichs (12)

Figura 15: Representação dos problemas de Produto de Medidas (Vergnaud, 1983).

A diferença entre este tipo de problemas e os problemas de Isomorfismo de Medidas reside no tipo de medidas que resulta da composição das duas medidas. Nos problemas de Isomorfismo de Medidas, quando se multiplicam bolos por euros, o resultado é expresso em euros (uma das medidas), o que pode ser explicado pelo fator escalar, os euros resultam em euros, ou pelo operador de função, euros/bolos. No caso dos problemas de Produto de Medidas, o produto das duas medidas será uma terceira medida. No caso dos tipos de pães e recheios, o seu produto são as sandwichs, quando as medidas são, por exemplo, metros, o produto são metros quadrados. Podem ser identificadas duas classes deste tipo de problemas: Multiplicação e Divisão.

Nos problemas de Multiplicação são dadas as medidas e o objetivo é encontrar o produto dessas medidas. O problema "Qual é a área de uma sala que tem 4m de largura e 7m de comprimento?" pode ser observado na estrutura definida na Figura 16, sendo que M_1 corresponde à largura, M_2 ao comprimento, M_3 à área.

	M_2	
	a	
M_1		
b	X	
		M_3

***Figura 16*:** Representação dos problemas de Produto de Medidas: Multiplicação (Vergnaud, 1983).

Nos problemas de Divisão, é dado o valor do produto das medidas e o valor de uma das medidas, sendo objetivo encontrar o valor da outra medida. A dimensão da quantidade que se pretende encontrar é o quociente da dimensão do produto pela dimensão da outra medida. A estrutura desse problema é observada na Figura 17, e é ilustrado pelo exemplo "A área de um jardim retangular é de 150m^2. Sendo o seu comprimento de 30m, qual é a sua largura?", sendo que M_1 se refere à largura, M_2 ao comprimento e M_3 à área.

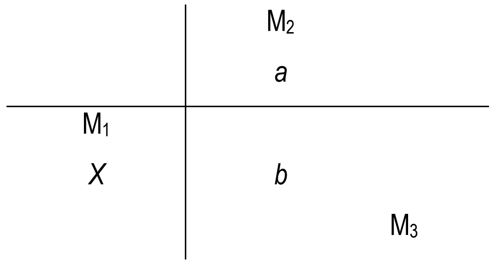


Figura 17: Representação dos problemas de Produto de Medidas: Divisão (Vergnaud, 1983).

III- Problemas de Proporção Múltipla

Estes problemas têm uma estrutura semelhante aos de Produto de Medidas: a terceira medida, M_3, é proporcional a duas medidas independentes, M_1 e M_2. As suas magnitudes têm o seu próprio significado e nenhuma delas pode ser reduzida ao produto das outras. Por exemplo, o consumo mensal de leite escolar é proporcional ao número de crianças que frequentam a escola e ao número de dias desse mês. Vergnaud (1983) identifica três classes principais nos problemas de Proporção Múltipla: i) Multiplicação; ii) Divisão de 1.º tipo; iii) Divisão de 2.º tipo.

Um exemplo de problemas de Multiplicação, “Uma família de 3 pessoas quer passar 10 dias num hotel. O custo por pessoa/dia é de 45€. Quanto vão pagar no total?”, pode ser ilustrado pela Figura 18, em que M_1 se refere ao número de dias, M_2 ao custo e M_3 ao número de pessoas.

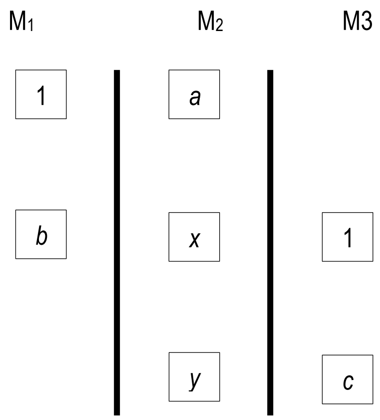


Figura 18: Representação dos problemas de Proporção Múltipla: Multiplicação (Vergnaud, 1983).

Nos problemas de Proporção Múltipla, um problema de Divisão de 1.º tipo envolve a descoberta do valor unitário, o que não se passa nos problemas de Produto de Medidas. Um exemplo que ilustra este tipo de problemas será “Um lar tem um consumo médio de 450 l de leite por mês (30 dias). O lar tem 20 crianças. Qual é o consumo médio de leite por criança por dia?” e pode ser representado pelo esquema da Figura 19.

		Tempo (dias)	
		1	30
Crianças	1	*X*	
	20		450 l
			Leite

Figura 19**:** Representação dos problemas de Proporção Múltipla: Divisão de 1.º tipo (Vergnaud, 1983).

Num problema de Divisão de 2.º tipo de Proporção Múltipla, pretende-se saber o valor de *x* (número de dias do mês), sabendo o valor unitário e o valor total. Usando o exemplo do problema descrito anteriormente, sabe-se o valor unitário e consumo total (consumo/dia x número de crianças x um determinado período de tempo), expresso do seguinte modo: “Um lar com 20 crianças tem um consumo diário por criança de 0,75l de leite. Qual a duração de 450 l de leite?” (ver Figura 20).

		Tempo (dias)	
		1	*X*
Crianças	1	0,75	
	20		450 l
			Leite

Figura 20**:** Representação dos problemas de Proporção Múltipla: Divisão de 2.º tipo (Vergnaud, 1983).

Fischbein, Deri, Nello e Marino (1985), baseados em estudos anteriores sobre a dificuldade que os alunos dos 12 aos 15 anos encontram quando resolvem problemas de multiplicação e divisão (Hart, 1980; Bell, Swan & Taylor, 1981) defendem que cada operação matemática tem implícito um modelo intuitivo e primitivo. À semelhança do que se passa na adição e subtração, Fischbein e colegas propõem modelos intuitivos também para a multiplicação e para a divisão, fundamentados nos estudos que realizaram. No estudo que desenvolveram com 628 alunos italianos, dos 10 aos 15 anos, Fischbein et al. (1985) propuseram a resolução em situação de aula de 42 problemas, dos quais 12 eram de multiplicação e 14 eram de divisão. Puderam concluir que o modelo intuitivo da multiplicação é a adição repetida, em que um determinado número de conjuntos com o mesmo número de elementos são colocados juntos ou adicionados (3X5 = 5+5+5 ou 3+3+3+3+3). Um fator é tomado como o operador (o número de conjuntos iguais) e o outro é o operando (a quantidade de cada conjunto). Porque o operador é sempre um número inteiro, a multiplicação necessariamente resulta numa quantidade maior. Um problema de multiplicação torna-se mais difícil quando o operador é um número decimal, o que contraria o modelo intuitivo da adição repetida, daí que a presença de um número decimal na estrutura do problema desempenhe um papel decisivo na escolha da operação correta.

Relativamente à divisão, Fischbein et al. (1985) concluíram que inicialmente há apenas um modelo intuitivo para esta operação, que é o modelo partitivo, um determinado conjunto (dividendo) é dividido em grupos (divisor) cujo número de elementos é o mesmo em todos os grupos. O dividendo deve ser maior do que o divisor e o divisor deve ser um número inteiro. O quociente (número de elementos em cada grupo) deve ser menor do que o dividendo. Com a instrução, os alunos adquirem um segundo modelo intuitivo, o modelo quotitivo. Neste modelo procura-se determinar quantas vezes uma determinada quantidade está contida numa quantidade maior que é dada. O dividendo deve ser maior do que o divisor. Se o quociente é um número inteiro, o modelo pode ser entendido como uma subtração repetida. Fischbein et al. mostraram que muitas das dificuldades dos alunos ocorrem quando lidam com conceitos e operações aritméticas cuja estrutura formal entra em conflito com os seus modelos intuitivos primitivos.

Nesher (1988) também se debruçou sobre a dificuldade que os alunos demonstram na resolução de problemas de estrutura multiplicativa. Entre os seus estudos, pode-se indicar os que desenvolveu no sentido de perceber o conhecimento implícito e o conhecimento explícito dos alunos acerca de problemas de multiplicação. Era solicitado aos alunos que compusessem um problema que pudesse ser resolvido através da multiplicação e outro que fosse resolvido por uma adição. Os alunos teriam ainda que explicar qual a operação que usariam para resolver um determinado problema dado (adição ou multiplicação). Um 1.º estudo foi realizado com 196 crianças dos 10 aos 12 anos, um 2.º estudo com 12 sujeitos dessa amostra e um 3.º estudo, replicando o estudo de Fischbein et al. (1985) com 467 crianças de 12 anos.

Nesher (1988) não se mostra concordante com a ideia de um modelo universal, primitivo e intuitivo da multiplicação, como foi sugerido por outras investigações. Os modelos observados nos seus estudos foram construídos, ou por questões linguísticas ou pela instrução. Porém, Nesher concorda com a existência de três grandes categorias de problemas de estrutura multiplicativa, ainda que lhes atribua uma designação própria. De acordo com a estrutura proposicional dos problemas e a estrutura semântica das relações neles envolvidos, Nesher identifica os seguintes tipos de problemas: I) Problemas que descrevem uma Regra de Mapeamento (adição repetida); II) Problemas de Comparação Multiplicativa; III) Problemas de Multiplicação Cartesiana.

Nos problemas que descrevem uma Regra de Mapeamento, a autora distingue entre a multiplicação e a divisão. Os problemas de multiplicação, considerados por diversos investigadores como os mais fáceis e denominados de “problemas de adição repetida” por alguns autores (Fischbein et al., 1985; Greer, 1992), têm subjacente a mesma estrutura: a cada grupo corresponde um determinado número de elementos que é igual em todos os grupos. No problema “O Daniel tem 3 prateleiras de livros. Cada prateleira tem 7 livros. Quantos livros tem ao todo o Daniel?”, a cada prateleira correspondem 7 livros, e em todas as prateleiras se verifica o mesmo número de livros. Este facto é designado por Nesher como a regra de mapeamento.

A diferença entre os problemas de multiplicação e os de divisão reside na questão que é colocada no problema. No caso da multiplicação, informa-se a regra de mapeamento (7 livros em cada prateleira) e questiona-se o total de objetos; no caso da divisão surgem dois cenários que dão origem a dois tipos de divisão: (a) ou se pede o número de grupos, sabendo o total e o número de elementos por grupo, isto é, sabendo-se a regra de mapeamento e considera-se uma divisão por quotas; (b) ou se pede a regra de mapeamento, sabendo-se o total e o número de grupos, considerando-se uma divisão partitiva.

Os problemas de Comparação Multiplicativa descrevem uma comparação entre dois conjuntos, representada pela expressão "tem *n* vezes a mais do que" ("O Daniel tem 3 gomas. A Rita tem 2 vezes mais gomas do que o Daniel. Quantas gomas tem a Rita?"). Nestes problemas observa-se uma determinada quantidade num grupo, tido como referente; e há uma função específica que relaciona cada elemento do conjunto referente a outro conjunto que é comparado. Ou seja, para cada goma do Daniel há exatamente duas gomas da Rita. A questão colocada recai na quantidade de elementos que existem no conjunto comparado.

Os problemas de Multiplicação Cartesiana envolvem a multiplicação de duas dimensões diferentes originando uma terceira. Há dois conjuntos independentes de objetos e a questão é colocada sobre o número total de objetos que resulta do cruzamento, pela multiplicação, entre cada elemento dos conjuntos ("A Rita tem 3 calções e 2 t-shirts. Quantas combinações diferentes ela consegue fazer com os calções e t-shirts?").

O primeiro tipo de problemas descrito por Nesher (1988), problemas que escrevem uma regra de mapeamento, é considerado como o tipo de problemas mais fáceis. A sua estrutura pode ser entendida como um procedimento repetido, em que se adiciona repetidamente um determinado número por determinadas vezes, obtendo-se a quantidade total. Os problemas de Multiplicação Cartesiana são considerados os mais difíceis, dado que não é explicitamente expresso no texto do problema o pressuposto que deve ser tido em consideração na sua resolução, que cada elemento de um conjunto deve ser cruzado com cada elemento do outro conjunto.

Descendo ao nível de crianças mais novas do que as participantes nos estudos descritos anteriormente, Frydman e Bryant (1988) procuram perceber o raciocínio de crianças de 4 e 5 anos quando presentes a situações de divisão e distribuição. Estes autores realizaram um estudo em que as crianças teriam que distribuir chocolates por dois recipientes, mas enquanto que um recipiente só aceitava chocolates duplos, o outro apenas aceitava chocolates unitários. Era condição que ambos os recipientes tivessem a mesma quantidade. As crianças teriam assim que dar ao recipiente que recebia duplos um chocolate duplo, enquanto que ao outro teriam que dar dois chocolates unitários, de forma a que, no final, ambos os recipientes tivessem a mesma quantidade. Apenas 4% das crianças de 4 anos e 70% das de 5 anos tiveram êxito nessa tarefa. A razão para esta diferença entre os dois grupos de idades é apontada por Frydman e Bryant como sendo devida à compreensão que as crianças de 5 anos têm da distribuição um-para-um. As crianças pequenas conseguem usar a correspondência um-para-muitos para criar conjuntos equivalentes e usam a distribuição, cujo procedimento comum é "um para ti, um para mim", distribuindo equitativamente os elementos numa correspondência um-a-um. Progressivamente vão-se tornando mais competentes na realização das correspondências de um-para-muitos e de equivalências. O uso flexível da correspondência para construir conjuntos equivalentes é interpretado por Frydman e Bryant (1988) como indicação de que o procedimento que as crianças usam reflete a compreensão de como a correspondência um-para-muitos pode resultar em conjuntos equivalentes.

Com o objetivo de perceber quais os fatores semânticos que são distinguidos nos problemas de divisão e multiplicação, e de que forma eles podem influenciar as estratégias das crianças, Kouba (1989) desenvolveu uma investigação com 128 crianças dos Estados Unidos da América, a frequentar o 1.º, 2.º e 3.º anos da escolaridade básica, participantes com idades entre os 6 e os 9 anos. Kouba propôs a cada criança que resolvesse, numa entrevista individual, 12 problemas (dois de multiplicação; quatro de divisão, metade de divisão partitiva e a outra metade de divisão por quotas; dois de adição; e quatro de subtração), que analisou, classificando as estratégias usadas pelas crianças na sua resolução segundo o tipo de ação utilizada e o nível de abstração. No seu estudo, Kouba explorou sobretudo os problemas de multiplicação e divisão.

Esta autora considera que há dois grandes fatores semânticos que caracterizam os problemas. Um fator é a natureza das quantidades envolvidas, o que origina três grandes tipos de problemas: Problemas Escalares ("A Maria tem 3 vezes mais doces do que a Joana."); Problemas de Produto Cartesiano ("Com 2 t-shirts e 3 calções o José consegue fazer 6 combinações de roupa."); e Problemas de Conjuntos Equivalentes ("O José tem 2 bolachas em cada prato, ele tem 3 pratos. Ao todo ele tem 6 bolachas."). No seu estudo, Kouba (1989) utilizou apenas problemas de Conjuntos Equivalentes. A autora, seguindo ideias de Kelley e Richert (1970) e de Vergnaud (1983), considera os outros tipos (Problemas Escalares e Produto Cartesiano) como muito difíceis para os alunos do 2.º ano.

O segundo fator semântico referido por Kouba (1989) diz respeito à quantidade que é desconhecida no problema. Também daqui decorrem três tipos de problemas: I) Problemas de Multiplicação, cujo produto é desconhecido; II) Problemas de Divisão de Medida, com o número de conjuntos desconhecido; III) Problemas de Divisão Partitiva, com o número de elementos em cada conjunto desconhecido.

Kouba (1989) refere que o contexto das relações que se estabelecem entre as quantidades usadas nos problemas é que os torna mais difíceis do que os problemas de adição e subtração. A correspondência de um-para-muitos é um dos fatores que contribui para a complexidade da multiplicação e divisão.

Debruçando-se sobre as estratégias usadas pelas crianças, Kouba (1989) distingue-as atendendo: (a) ao nível de abstração; (b) e ao uso ou não uso de objetos.

Segundo o grau de abstração, esta autora identifica cinco categorias: i) *Representação Direta;* ii) *Dupla Contagem;* iii) *Contagem Transacional;* iv) *Estratégia Aditiva ou Subtrativa;* v) *Factos Numéricos.*

A estratégia de *Representação Direta* reflete a estrutura do problema. A criança usa objetos para modelar a situação descrita no problema e numa espécie de contagem um a um calcula a resposta. Uma criança que usa os objetos como contagem, manipula todos os objetos referentes a todos os grupos, enquanto que uma criança que usa os objetos como referência, apenas manipula os elementos de um conjunto e serve-se desses objetos como referência, não necessitando de manipular mais. Algumas crianças começam a contagem desde o primeiro elemento do primeiro grupo, outras crianças começam a contagem com o número do primeiro conjunto, constituindo uma variação nesta estratégia.

A *Dupla Contagem* requer maior abstração, dado que envolve duas sequências de contagem. A criança começa a contar o número de objetos nos grupos e simultaneamente conta os grupos.

Quando usa a *Contagem Transacional,* também chamada de *contagem por múltiplos*, ou *contagem de X em X,* a criança calcula a resposta ao problema usando a sequência de contagem baseada nos múltiplos de um dos elementos do problema. Esta é uma estratégia que está relacionada mais estreitamente com a multiplicação, mais do que as restantes estratégias de representação direta.

Quando usa a *Estratégia Aditiva ou Subtrativa* a criança usa, claramente, a adição repetida ou subtração repetida, dizendo "cinco mais cinco são dez, mais cinco são quinze, e quinze mais cinco são vinte…".

Recorrendo a *Factos Numéricos,* a criança recorda a combinação apropriada da multiplicação ou divisão. Nesta categoria estão os factos derivados, factos que a criança não consegue de forma imediata calcular, mas que se serve de factos numéricos conhecidos para, a partir destes, encontrar a resposta. Por exemplo, a criança, para calcular 6X4 recorda que 5X4 são 20 e junta-lhe mais 4. A criança que recorre a esta estratégia não usa objetos.

Kouba (1989) classifica as estratégias ainda segundo o uso ou não de objetos físicos, e distingue entre: i) Objetos usados para representar unicamente os elementos em cada conjunto; ii) Objetos usados como contagens ou referências repetidas dos números mencionados nos problemas; iii) Objetos não usados.

Kouba (1989) observou que 43% das estratégias usadas pelas crianças eram apropriadas, e que as crianças de 6 e 7 anos que usaram estratégias adequadas, baseadas maioritariamente na correspondência ou na representação, total ou parcial. Poucas crianças usaram factos numéricos da multiplicação, sendo esta estratégia usada pelas crianças de 8 anos, alunos do 3.º ano, já detentores de instrução.

Também Mulligan (1992) estudou as estratégias que as crianças usam na resolução de problemas de multiplicação e divisão antes de lhes ser ensinado a resolver estas operações. Desenvolvendo um estudo longitudinal, durante dois anos, observou o desempenho de 70 crianças de Sydney, com idades entre os 8 e os 9 anos, a frequentar o 2.º e 3.º anos da escolaridade básica, bem como as estratégias usadas por elas. Mulligan propôs-lhes 10 estruturas de problemas, cinco de multiplicação (Adição Repetida, Razão, Fator Escalar, Área, Produto Cartesiano) e cinco de divisão (Divisão Partitiva, Razão, Fator Escalar, Divisão por Quotas, Subdivisão). Uma das conclusões a que chegou foi que 75% destas crianças se mostraram capazes de resolver problemas de multiplicação e divisão sem que tal lhes tivesse sido formalmente ensinado. O seu desempenho variou de acordo com a dificuldade inerente à estrutura do problema e ao tamanho dos números envolvidos. No entanto, não observou grandes diferenças de desempenho e de estratégias entre os problemas de multiplicação e de divisão, à exceção dos problemas de Produto Cartesiano e Fator Escalar.

Comparando o tamanho dos números, Mulligan (1992) pode observar que quando se tratava de números maiores, muitas crianças usavam estratégias de modelação direta e estratégias de contagem. De notar que 25% das crianças não conseguiram resolver dois ou mais dos 11 problemas mais fáceis em qualquer das entrevistas ao longo do tempo. Muitas destas crianças revelaram estratégias imaturas, escolhiam a operação pelo tamanho das quantidades envolvidas ou aplicavam factos numéricos incorretamente. Essas estratégias mostraram que as crianças eram incapazes de analisar as situações descritas e aplicar combinações de números.

Neste estudo, baseado no grau de abstração e no grau de modelação, Mulligan (1992) identificou três níveis básicos de estratégias: 1) Estratégias baseadas na modelação direta e na contagem, uso de objetos ou dedos; 2) Estratégias baseadas na contagem e na adição e subtração sem modelação direta; 3) Estratégias baseadas em factos numéricos ou factos derivados da adição ou multiplicação. A autora identifica estratégias para a multiplicação e para a divisão, embora se verifiquem estratégias comuns a ambos os problemas (ver Tabela 8).

Tabela 8 - Estratégias de resolução de problemas de estrutura multiplicativa (Mulligan, 1992).

NÍVEIS DE ESTRATÉGIAS	**ESTRATÉGIAS**	
	Multiplicação	**Divisão**
Nível 1 Modelação direta	Agrupamento e contando-tudo	Agrupamento e contando-tudo Distribuição um-a-um Correspondência um-para-muitos Agrupamento de tentativa e erro
	Agrupamento e dupla contagem	Agrupamento e dupla contagem
	Agrupamento e contagem de X em X	Agrupamento e contagem de X em X
	Aditiva e subtrativa: Adição repetida Subtração repetida Dobrando Encontrando o meio	Aditiva e subtrativa: Adição repetida Subtração repetida Dobrando Encontrando o meio
Nível 2 Sem modelação direta	Agrupamento e contando-tudo	Agrupamento e contando-tudo Distribuição um-a-um Correspondência um-para-muitos
	Agrupamento e dupla contagem	Agrupamento e dupla contagem
	Agrupamento e contagem de X em X	Agrupamento e contagem de X em X

	Aditiva e subtrativa: Adição repetida Subtração repetida Dobrando Encontrando o meio	Aditiva e subtrativa: Adição repetida Subtração repetida Dobrando Encontrando o meio
Nível 3	Factos numéricos da adição	Factos numéricos da adição
	Factos numéricos da multiplicação	Factos numéricos da multiplicação
Factos	Factos derivados da multiplicação	Factos numéricos da divisão
conhecidos		Factos derivados da multiplicação

i) *Agrupamento* - a criança forma grupos equivalentes representando as quantidades mencionadas no problema;

ii) *Contando-Tudo* - a criança conta todos os elementos um por um de forma a saber o resultado que pretende no problema;

iii) *Contagem De X em X* - a criança realiza a contagem segundo um determinado padrão ou sequência;

iv) *Dupla Contagem* - a criança vai contando o número de elementos em cada grupo e ao mesmo tempo conta o número de grupos;

v) *Adição Repetida* - a criança vai adicionando repetidamente o número que é mencionado no problema, verbalizando o termo "e", ou "mais";

vi) *Subtração Repetida* - a criança vai retirando repetidamente o número que é mencionado no problema, verbalizando a palavra "menos";

vii) *Dobrando* - a criança faz uso da adição de um padrão de duplicação empregando o termo "dobro";

viii) *Encontrando o Meio* - a criança divide a quantidade mencionada em dois grupos iguais, empregando o termo "metade" ou "partindo ao meio";

ix) *Distribuição Um-a-Um* - a criança forma grupos de objetos pela distribuição "um para A, um para B";

x) *Correspondência de Um-para-Muitos* - a criança faz corresponder um elemento a um grupo de elementos, ou vice-versa;

xi) *Agrupamento por Tentativa e Erro* – a criança faz uma estimativa de grupos equivalentes e vai alterando o tamanho do grupo ou número de grupos, até conseguir conjuntos equivalentes;

xii) *Factos Numéricos da Adição* - a criança menciona automaticamente e sem contagem factos conhecidos da adição (5 mais 5 é 10);

xiii) *Factos Numéricos da Multiplicação* - a criança menciona automaticamente e sem contagem factos conhecidos da multiplicação (dois 3 são 6);

xiv) *Factos Numéricos da Divisão* - a criança menciona automaticamente e sem contagem factos conhecidos da divisão (12 a dividir por 3 dá 4);

xv) *Factos Derivados* – a criança faz uso de um facto numérico, que derivou de outro facto numérico conhecido (5+6 é 1 mais do que 5+5, logo, 5+5 é 10, mais 1 é 11).

Bryant, Morgado e Nunes (1992) estudaram também o desempenho das crianças na resolução de problemas de multiplicação. Propuseram a 32 crianças inglesas de 8 e 9 anos a resolução de quatro problemas de multiplicação, dois dos quais eram de Correspondência Um-para-Muitos e outros dois de Produto Cartesiano. Os problemas foram apresentados às crianças juntamente com materiais que podiam usar, no entanto, enquanto um grupo de crianças tinha o material todo necessário, o outro tinha apenas uma parte. A maioria das crianças de 8 e 9 anos foi capaz de resolver os problemas de Correspondência Um-para-Muitos quando tinha todo o material disponível, mas as crianças de 8 anos tiveram menos de metade das respostas corretas quando tinham apenas uma parte dos materiais. Nos problemas de Produto Cartesiano nenhuma das crianças de 8 anos respondeu corretamente sem o apoio dos materiais necessários para encontrar a solução, e o seu desempenho com os materiais todos ainda não era significativamente diferente. Estes problemas mais complexos foram considerados ainda bastante difíceis para as crianças de 9 anos, que acertaram aproximadamente 55% das vezes quando não tinham os materiais todos presentes.

Greer (1992) entende que os problemas que envolvem a multiplicação e a divisão diferem consideravelmente. A sua complexidade depende da representação do problema e da escolha da operação aritmética necessária à sua resolução. No entanto, segundo o autor, as investigações sobre a multiplicação e divisão ainda não exploraram suficientemente o efeito do tipo de situação sobre a escolha da operação correta. Mais frequentemente se encontram, segundo Greer, investigações que analisam o efeito dos tipos de números envolvidos nos problemas. Decorrente dos seus estudos com crianças de 13 e 14 anos, Greer (1992) analisa as situações descritas nos problemas de estrutura multiplicativa e distingue entre: I) Situações Psicologicamente Não Comutativas; e II) Situações Psicologicamente Comutativas.

Nas Situações Não Comutativas, o multiplicador e multiplicando podem ser distinguidos, ou seja, uma das grandezas envolvidas na multiplicação é concebida como operando no outro para produzir o resultado. No que diz respeito à divisão, tal facto vai originar a distinção de dois tipos de divisão: a divisão pelo multiplicador (divisão partitiva) e a divisão pelo multiplicando (divisão por quotas).

Nas Situações Comutativas é impossível distinguir entre multiplicador e multiplicando, consequentemente não há dois tipos de divisão. A partir desta distinção, Greer (1992) definiu uma classificação para os problemas de estrutura multiplicativa, em que cada tipo de problemas pode ser modelado pela multiplicação, pela divisão partitiva e pela divisão por quotas. Desta forma, as 10 classes de problemas (Grupos Equitativos; Medidas Equitativas; Razão; Conversão de Medidas; Conversão Multiplicativa; Parte/Todo; Transformação Multiplicativa; Produto Cartesiano; Área Retangular; Produto de Medidas) dão origem a muitas formas diferentes de problemas, conforme se pode observar na Tabela 9.

Tabela 9 - Classificação de problemas de estruturas multiplicativas, adaptado de Greer (1992).

	Tipo de problemas	**Modelação**	**Exemplo**
Situações Não Comutativas	Grupos Equitativos	Problema de multiplicação	Três crianças têm 4 laranjas. Quantas laranjas há ao todo?
		Divisão partitiva	Doze laranjas são partilhadas equitativamente por 3 crianças. Quantas laranjas recebe cada criança?
		Divisão por quotas	Temos 12 laranjas e queremos dar 4 a cada criança. Quantas crianças irão receber laranjas?
	Medidas Equitativas	Problema de multiplicação	Três crianças têm, cada uma, 1,5l de leite. Quanto leite há ao todo?
		Divisão partitiva	Foi distribuído equitativamente 4,5l de leite por 3 crianças. Que quantidade de leite recebeu cada uma?

	Divisão por quotas	Temos 4,5l de leite para dar a crianças. Devemos dar 1,5 a cada uma. Quantas crianças vão receber leite?
Razão	Problema de Multiplicação	Uma bicicleta desloca-se a uma velocidade de 300m num minuto. Que distância percorre em 5 minutos?
	Divisão partitiva	Uma bicicleta desloca-se 1500m em 5 minutos. Qual é a sua velocidade por minuto?
	Divisão por quotas	Quanto tempo demora uma bicicleta a percorrer 1500m se se deslocar a 300m por minuto?
Medida de Conversão	Problema de Multiplicação	Uma polegada são 2,54 cm. Quanto é 3,1 polegadas em cm?
	Divisão partitiva	Se 3,1 polegadas são cerca de 7,84 cm. Quantos cm há em cada polegada?
	Divisão por quotas	Uma polegada são 2,54 cm. Quanto é 7,84 cm em polegadas?
Conversão Multiplicativa	Problema de Multiplicação	O ferro é 0,88 vezes mais pesado do que o cobre. Uma peça de cobre pesa 4,2 kg. Quanto pesará uma peça de ferro com o mesmo tamanho?
	Divisão partitiva	O ferro é 0,88 vezes mais pesado do que o cobre. Se uma peça de ferro pesar 3,7 kg, quanto pesará uma peça de cobre com o mesmo tamanho?
	Divisão por quotas	Se duas peças de ferro e cobre com o mesmo tamanho pesarem, respetivamente, 3,7 kg e 4,2 kg, quanto é que o ferro é mais pesado relativamente ao cobre?
Parte/Todo	Problema de Multiplicação	Uma escola passa, no exame, 3/5 dos seus alunos. Se fizeram exame 80 alunos, quantos passaram no exame?
	Divisão partitiva	Uma escola passa, no exame, 3/5 dos seus alunos. Se passaram no exame 48 alunos, quantos alunos fizeram exame?
	Divisão por quotas	Uma escola passou 48 alunos dos 80 que fizeram exame. Que fração de alunos passou no exame?
Transformação multiplicativa	Problema de Multiplicação	Um elástico pode ser esticado 3.3 vezes a sua medida inicial. Quanto medirá um elástico que mede 4.2m depois de esticado?
	Divisão partitiva	Um elástico pode ser esticado 3.3 vezes a sua medida inicial. Quando está completamente esticado, um elástico mede

			13.9m. qual é a sua medida inicial?
		Divisão por quotas	Um elástico de 4,2m pode ser esticado até medir 13,9m. Qual é o fator de prolongamento?
Situações Comutativas	Produto cartesiano	Problema de Multiplicação	Há 3 meninos e 4 meninas num baile. Todos os meninos querem dançar com todas as meninas. Quantos pares diferentes se podem formar?
		Divisão	Num baile podem ser formados 12 pares diferentes, dançando todos os meninos com todas as meninas. Havendo 3 meninos, quantas meninas estão no baile?
	Área retangular	Problema de Multiplicação	Um canteiro retangular mede 3,3m de comprimento e 4,2m de largura. Qual a área do canteiro?
		Divisão	Se um canteiro medir 13,9m^2, e o seu comprimento for de 3,3m, quanto mede de largura?
	Produto de medidas	Problema de Multiplicação	Um aquecedor gasta 3,3 kW de eletricidade, estando ligado 4,2 horas. Quantos kW/hora gasta?
		Divisão	Um aquecedor utiliza 3,3 kW por hora. Por quanto tempo ele pode ser usado quando gasta 13.9 kW-hora de eletricidade?

Considerando que o raciocínio multiplicativo está ao alcance das crianças do pré-escolar, Becker (1993) realizou estudos com crianças de 4 e 5 anos. Esta autora baseia-se em estudos anteriores (Sophian, 1988; Becker, 1989), que ressaltam que as crianças do pré-escolar compreendem a correspondência termo-a-termo entre conjuntos, mesmo que esses conjuntos não estejam visualmente disponíveis. Becker (1993) refletiu sobre a capacidade que as crianças têm de usar os números para raciocinar sobre situações de correspondência de um-para-muitos, sem que essa correspondência esteja visualmente disponível, contrariamente ao que sugerem Piaget e Szeminska (1971), de que só seria possível às crianças pequenas realizar a correspondência de um-para-muitos desde que essa correspondência estivesse percetível para elas.

Becker (1993) apresentou a 48 crianças do pré-escolar, dos 4 aos 5 anos, nos Estados Unidos, problemas de estrutura multiplicativa, cuja correspondência era de 2:1 e 3:1. Às crianças, tendo quatro bonecas diante de si, era-lhes solicitado que determinassem quantos bolos seriam precisos para dar dois ou três bolos a cada boneca, não os tendo sempre disponíveis para a contagem. Uma das conclusões a que Becker chegou foi que o desempenho das crianças mais velhas, de 5 anos, é superior ao das crianças mais novas, de 4 anos, e que a correspondência de 2:1 obtém mais sucesso do que a correspondência de 3:1, sendo que o número total de respostas certas no grupo das crianças de 5 anos foi de 81%. Os estudos de Becker mostram que muitas crianças do pré-escolar compreendem a correspondência de um-para-muitos. A sua compreensão dos números vai para além de situações de correspondência termo-a-termo. Para além disso, o sucesso das crianças de 5 anos demonstra que elas conseguem usar os números para antecipar uma distribuição sem objetos.

Também Carpenter et al. (1993) consideram que as crianças tão novas quanto as do pré-escolar têm capacidades de resolver uma grande variedade de problemas, mais do que foi descrito em estudos anteriores, e mesmo mais do que o próprio currículo escolar americano sugere. Tendo como referência o trabalho desenvolvido por Kouba (1989), Carpenter et al. (1993) realizaram um estudo com 70 crianças americanas do pré-escolar, de 5 e 6 anos, que entrevistaram individualmente. Apresentaram-lhes problemas de estrutura aditiva, estrutura multiplicativa, e outros, num total de nove problemas: três de adição e subtração, três de multiplicação e divisão e três de várias etapas e não rotineiras. As estratégias usadas pelas crianças foram classificadas em três níveis: 1) Estratégias de modelação direta, quando as crianças usavam objetos ou dedos para modelar a ação descrita no problema; 2) Estratégias de contagem, quando as crianças usavam a contagem progressiva e regressiva ou passos da contagem a partir dos números dados no problema; e 3) Factos derivados, quando as crianças recorriam a factos memorizados para dar a resposta ao problema. Os resultados desse estudo mostraram o notável sucesso das crianças na resolução de uma variedade de problemas, sucesso superior ao que foi registado no trabalho desenvolvido por Kouba (1989) com alunos do 3.º ano (8 anos). Cerca de 90% das crianças usaram a estratégia correta na maior parte dos problemas de subtração e multiplicação para conseguirem uma resposta acertada ao problema, e cerca de metade das crianças tiveram sucesso na maioria dos problemas mais difíceis. Quase metade das crianças usaram a estratégia correta para todos os problemas, e quase 2/3 resolveram corretamente mais de metade dos problemas. Este estudo sugere que as crianças do pré-escolar conseguem resolver uma grande variedade de problemas, incluindo problemas que envolvem a multiplicação e divisão, muito mais cedo do que tem sido presumido e que as estratégias que as crianças usam refletem a ação ou relações descritas nos problemas.

À semelhança do estudo de Becker (1993) sobre correspondências, Correa, Nunes e Bryant (1995) propuseram a crianças londrinas tarefas sobre a distribuição de doces por recipientes. As crianças, de 5, 6 e 7 anos, teriam que distribuir doces entre um determinado número de recipientes (cestos de coelhos), e antecipar os resultados dessa distribuição, dado não lhes ser permitido ver o que os investigadores colocavam nos cestos dos coelhos. O mesmo número de doces deveria ser partilhado por coelhos que frequentariam duas festas, mas em duas situações distintas: numa, o número de coelhos era o mesmo nas duas festas; na outra situação, o número de coelhos era diferente. Para cada uma dessas situações as crianças foram solicitadas a responder se os coelhos em ambas as festas receberiam o mesmo número de doces, e se não, em que festa os coelhos receberiam mais doces. Havia uma diferença significativa no nível de dificuldade dos dois problemas porque era necessário que as crianças percebessem a relação inversa entre quociente e divisor. As crianças cometeram poucos erros quando o número de coelhos era o mesmo, ou seja, o número de divisores era igual. Nas situações em que o número de coelhos era diferente, as respostas certas foram de 30%, 55% e 85% respetivamente para as crianças de 5, 6 e 7 anos. Correa et al. (1995) concluem que aproximadamente metade das crianças de 6 anos e a maioria de 7 anos poderia entender o efeito da relação inversa entre o quociente e o divisor, mesmo não sabendo calcular a divisão.

Este estudo foi posteriormente replicado, também com crianças de 5, 6 e 7 anos, com semelhantes resultados (Correa, Nunes, & Bryant, 1998). Era objetivo de Correa e seus colaboradores perceber se as crianças eram capazes de concluir a equivalência entre conjuntos que resultam da divisão no caso do mesmo dividendo e divisor, e a relação inversa entre o divisor e o quociente. Isto é, que quantos mais recipientes há, menos doces há em cada um. Cerca de dois terços das crianças de 5 anos, a maioria das crianças de 6 anos e todos os de 7 anos concluíram que os recipientes levam a mesma quantidade quando dividendo e divisor são iguais; 34%, 53% e 81% das crianças de 5, 6 e 7 anos respetivamente concluíram que quanto mais recipientes há, menos cabe em cada um. A maioria das crianças de 7 anos consegue compreender a relação inversa entre divisor e quociente.

Tal como fizeram para os problemas de estrutura aditiva, Carpenter et al. (1999) analisaram também os problemas de estrutura multiplicativa, com base em estudos realizados e procuraram estabelecer uma classificação de problemas e identificação de estratégias. Embora nem todos os problemas de multiplicação e divisão sejam resolvidos por agrupamento de elementos para formar conjuntos, ou pela partilha de elementos por conjuntos equivalentes, a discussão inicial sobre a multiplicação e a divisão considera que as quantidades podem ser agrupadas ou distribuídas em grupos equivalentes.

Carpenter et al. (1999) consideram, então, existir problemas de Agrupamento e de Partilha. Estes problemas envolvem três quantidades, podendo, qualquer uma delas, constituir-se como o elemento desconhecido no problema e determinando assim o tipo de problema. No problema "A Maria tem 5 caixas de bombons. Em cada caixa estão 3 bombons. Ao todo ela tem 15 bombons", as três quantidades referem-se: (a) ao número de caixas; (b) ao número de bombons em cada caixa; (c) ao número total de bombons. Quando o resultado (número total de bombons) é desconhecido, trata-se de um problema de Multiplicação, quando o número de grupos é desconhecido (número de caixas), trata-se de um problema de Divisão de Medida; quando a quantidade existente em cada grupo (número de bombons por caixa) é desconhecida, trata-se de um problema de Divisão Partitiva. São assim estabelecidas, por estes autores, três classes de problemas, dependendo do elemento desconhecido que se pretende encontrar (ver Tabela 10).

Tabela 10 - Problemas de Agrupamento e Partilha, adaptado de Carpenter, Fennema, Franke e Empson (1999).

Tipo de problema	Quantidade desconhecida	Descrição do problema
Multiplicação	Resultado	A Maria tem 5 caixas de bombons. Cada caixa tem 3 bombons. Quantos bombons tem ao todo a Maria?
Divisão de Medida	Grupos	A Maria tem 15 bombons. Ela colocou 3 bombons em cada caixa. Quantas caixas tem a Maria?
Divisão Partitiva	Elementos em cada grupo	A Maria tem 15 bombons distribuídos na mesma quantidade pôs 5 caixas. Quantos bombons estão em cada caixa?

De acordo com a estrutura dos problemas, Carpenter et al. (1999) diferenciam entre: I) Problemas Não Simétricos; e II) Problemas Simétricos. Os problemas Não Simétricos têm todos a mesma estrutura, envolvem situações de multiplicação, de divisão de medida e de divisão partitiva. Qualquer uma das três quantidades envolvidas nos problemas pode ser desconhecida, desempenhando um papel específico. Incluem-se neste tipo de problemas os de Agrupamento e Partilha, os problemas de Razão e os problemas de Comparações Multiplicativas.

Os Problemas de Razão, onde se incluem os problemas de preços, são mais difíceis para as crianças devido ao facto de não terem, necessariamente, que ter grupos contáveis de objetos. Também podem ser apresentados na forma de multiplicação, divisão de medidas e divisão partitiva, consoante o elemento ausente ("Um lavador de carros ganha 4 € por dia. Em 8 dias ele ganha 32 €"). O que diferencia este tipo de problemas dos problemas de Agrupamento e Partilha, é a razão existente entre as quantidades, mais do que o número de objetos. Neste caso, a razão são os euros/dia. Mas embora este tipo de problemas não descreva situações que envolvam quantidades discretas e objetos, as estratégias usadas pelas crianças podem ser as mesmas usadas nos problemas de Agrupamento e Partilha.

Os problemas de Comparação Multiplicativa envolvem a comparação de duas quantidades nas quais uma é descrita como múltipla da outra ("Uma laranja pesa 30g. Uma meloa pesa 8 vezes mais do que a laranja. Quanto pesa a meloa?"). A relação entre as quantidades é expressa pelo número de vezes em que uma é superior/inferior à outra, sendo que o número que quantifica esta relação não é uma quantidade reconhecível, a expressão "oito vezes mais" descreve a relação entre as quantidades mensuráveis.

Ao contrário dos problemas de Agrupamento e Partilha, em que as quantidades envolvidas têm papéis distintos (uma representa o número de grupos e a outra representa o número de elementos em cada um desses grupos), as duas quantidades mencionadas nos Problemas Simétricos não desempenham diferentes papéis. O facto de, neste tipo de problemas, as duas quantidades serem comutáveis, desempenharem idênticos papéis na resolução do problema, dá origem à multiplicação e apenas a um tipo de divisão. São aqui englobados os problemas de Área, Matrizes e Problemas de Combinação.

Nos problemas de Área, o comprimento e a largura desempenham o mesmo papel no cálculo da área de um retângulo, não fazendo diferença qual o elemento desconhecido ("Um jardineiro semeou relva num jardim que mede 6 metros de um lado e do outro 8 metros. Quantos metros quadrados de relva semeou o jardineiro?").

Os problemas de Matrizes, sendo problemas simétricos, só são entendidos pelas crianças como sendo de matrizes se tal for mencionado, uma vez que podem ser resolvidos com as estratégias de um problema de Agrupamento ("Para realizar um jogo foram colocadas 4 filas com 4 cadeiras em cada fila. Quantas cadeiras foram colocadas para o jogo?"). Estes problemas podem ser modelados diretamente de forma sistemática, construindo um determinado número de colunas com o mesmo número de objetos em cada coluna.

Os Problemas de Combinação envolvem a combinação dos elementos dos conjuntos dados ("Uma gelataria tem 3 tipos de cones e 4 sabores de gelados. Quantas combinações diferentes de gelados e cones se podem fazer?"). Cada um dos elementos desempenha o mesmo papel na interpretação do problema (ver Tabela 11).

Tabela 11 - Classificação de problemas de estrutura multiplicativa, adaptado de Carpenter, Fennema, Franke, Levi e Empson (1999).

Tipo de Problema		Exemplo
Não simétricos	Agrupamento/ Partilha	A Maria tem 5 caixas de bombons. Cada caixa tem 3 bombons. Ao todo ela tem 15 bombons.
	Razão /preço	Um lavador de carros ganha 4 € por dia. Em 8 dias ele ganha 32 €.
		Uma goma custa 2€, 5 gomas custarão 10€.
	Comparação multiplicativa	Uma laranja pesa 30g. Uma meloa pesa 8 vezes mais do que a laranja. A meloa pesa 240g.
Simétricos	Área	Um jardineiro semeou relva num jardim que mede 6 metros de um lado e 8 metros do outro. O jardineiro semeou 32 metros quadrados.
	Matrizes	Para realizar um jogo foram colocadas 4 filas com 4 cadeiras em cada fila. Para o jogo foram colocadas 16 cadeiras.
	Combinação	Uma gelataria tem 3 tipos de cones e 4 sabores de gelados. Podem-se fazer 12 combinações diferentes de gelados e cones.

À semelhança das estratégias identificadas na resolução de problemas de estrutura aditiva, Carpenter et al. (1999) identificam os mesmos três níveis de abstração nas estratégias de resolução de problemas de estrutura multiplicativa: 1) Estratégias de modelação direta; 2) Estratégias de contagem; 3) Estratégias mentais.

Nas estratégias de modelação direta, em que as crianças modelam a ação descrita no problema, Carpenter et al. (1999) reconhecem: i) *Estratégia de agrupamento;* ii) *Estratégia de medida;* iii) *Estratégia partitiva.*

Os autores debruçaram-se sobretudo sobre as estratégias de resolução dos problemas de Agrupamento e Partilha. Estas estratégias, modelando a ação descrita no problema, estão estreitamente associadas a determinado tipo de problema. Nos problemas de multiplicação, cujo resultado é desconhecido, as crianças fazem um A*grupamento* de objetos, colocando em grupos as quantidades mencionadas em cada grupo e por fim contam os objetos todos.

Nos problemas de Divisão de Medidas, cujo elemento desconhecido é o número de grupos no problema, as crianças vão construindo conjuntos com o número de elementos que é mencionado no problema e por fim contam o número de grupos que resultou. Esta estratégia é denominada de estratégia de *Medida.*

Nos problemas de Divisão Partitiva, o elemento desconhecido é o número de elementos em cada grupo. Também neste tipo de problemas as crianças vão construindo grupos, contudo, no final a contagem recai sobre o número de elementos em cada grupo, e não no número de grupos. As crianças vão colocando, em cada grupo, objetos um a um até esgotarem o número total de objetos mencionados no problema. Contando, de seguida, o número de objetos que tem cada grupo. Podem, ainda, colocar os objetos não um a um, mas colocar uma quantidade inicial e ir refinando as quantidades, de forma a conseguir o mesmo número de elementos nos grupos. A esta estratégia dá-se o nome de estratégia *Partitiva*.

Também nos problemas de estrutura multiplicativa, as crianças vão substituindo estratégias de modelação direta por estratégias de contagem. No entanto, é mais difícil o uso de estratégias de contagem no caso da multiplicação e divisão do que na adição e subtração.

Com frequência as estratégias de contagem envolvem a *Contagem De X em X.* Carpenter et al. (1999) referem que, na Contagem De X em X, as crianças conseguem realizá-la com maior sucesso com determinados números, como sejam o 3 e o 5, ao contrário do 7, por exemplo. Também muitas vezes a crianças iniciam com a Contagem De X em X, mas terminam Contando

Um a Um, misturando as duas estratégias de contagem. Muitas crianças usam estratégias de adição para resolver problemas de multiplicação e divisão. Mais do que *Contar De X em X*, algumas crianças podem adicionar repetidamente o número que representa os objetos em cada grupo. Para Carpenter et al. (1999) a *Contagem De X em X* mais não é do que a *Adição Repetida*, contudo, algumas crianças tendem a pensar na solução mais em termos de contagem, e outras, mais em termos de adição.

As estratégias de contagem são usadas também nos problemas de Divisão de Medidas, e as crianças realizam *Contagens De X em X*, no entanto, a resposta é dada pelo número de vezes que elas contam, adicionam ou subtraem. O mesmo não se passa nos problemas de Divisão Partitiva, em que é muito mais difícil utilizar estratégias de contagem para resolver problemas deste tipo, uma vez que o número de elementos em cada grupo é desconhecido. Geralmente as crianças recorrem à *Tentativa e Erro*.

De acordo com Carpenter et al. (1999), à semelhança do que se passa na adição e subtração, as crianças aprendem factos da multiplicação antes de outros, pela regularidade que lhes está implícita, como sejam os múltiplos de 5 e de 9. As crianças podem recorrer a factos conhecidos para, desses, derivar para outros factos. Geralmente, a estratégia de *Factos Derivados* envolve a combinação de factos numéricos conhecidos e a adição, ou a contagem a partir de. Por exemplo, para resolver problemas com o resultado desconhecido, em que a medida dos grupos é 6 e a quantidade em cada grupo é 7, a resposta com esta estratégia passará por a criança reconhecer que 5 vezes o 7 são 35, por isso juntará mais um 7, porque são 6 grupos e não 5, o que resulta em 42. As crianças podem, ainda, relacionar Factos Numéricos de Divisão com os Factos Numéricos de Multiplicação correspondentes. No problema "Há 7 pastilhas elásticas numa caixa. Quantas pastilhas elásticas haverá em 8 caixas?", as crianças, recorrendo a factos de divisão e multiplicação poderão responder "haveria 63 pastilhas se fossem 9 caixas, mas como só são 8, são 7 pastilhas menos. Logo serão 63 menos 7, o que dá 56 ao todo".

Com o objetivo de analisar a origem do conceito de multiplicação, Park e Nunes (2001) desenvolveram um estudo de intervenção com 42 crianças inglesas de 6 e 7 anos. Sabendo haver duas posições face à origem do conhecimento da multiplicação, uma que defende que a multiplicação tem origem no conhecimento da adição repetida (Fischbein et al., 1985; Steffe, 1994) e a outra que defende que a adição repetida é apenas um procedimento de resolução e que o conhecimento da multiplicação se baseia no esquema de correspondência de um-para-muitos (Piaget & Szeminska, 1971; Vergnaud, 1983; 1988; Nunes & Bryant, 1996), Park e Nunes comparam o sucesso das crianças na resolução de problemas de raciocínio multiplicativo após terem participado num de dois grupos de intervenção. O estudo envolveu um pré-teste e um pós-teste com oito problemas de estrutura aditiva e oito de estrutura multiplicativa. Na intervenção, um grupo de crianças foi ensinado a resolver os problemas de raciocínio multiplicativo usando a adição repetida; o outro grupo de crianças foi ensinado a resolver os problemas usando a correspondência um-para-muitos. O terceiro grupo, de controlo, resolveu problemas de adição e subtração, num período de tempo semelhante.

As crianças do grupo de correspondência um-para-muitos fizeram significativamente mais progressos na resolução de problemas de raciocínio multiplicativo do que as outras, o que revela claramente um maior sucesso quando as crianças aprendem segundo o esquema de ação apropriado. Este estudo, apesar de breve e necessitar, segundo as autoras, de ser replicado com um maior número de crianças, suporta a ideia de que a origem do conceito de multiplicação está no esquema de correspondência de um-para-muitos, mais do que no conceito da adição repetida.

Dando continuidade às suas investigações, e no sentido de analisar o desempenho e as estratégias usadas pelas crianças na resolução de problemas de divisão, Correa (2004) realizou dois estudos com crianças americanas, dos 6 aos 9 anos. O seu objetivo era analisar o desempenho destas quando usam apenas o cálculo mental. No primeiro estudo participaram 82 crianças e foi-lhes pedido que resolvessem tarefas de divisão partitiva: que repartissem uma determinada quantidade de blocos (4, 8, 12, 24) por um certo número de ursinhos (2 e 4), sendo pedido que respondessem quantos blocos cada urso receberia. No segundo estudo participaram 80 crianças e foi-lhes solicitado que resolvessem tarefas de divisão por quotas: eram apresentados às crianças blocos (4, 8, 12, 24), representando comida que deveria ser distribuída pelos ursinhos de peluche (2 e 4). O objetivo era determinar o número de ursinhos, consoante o número de blocos a ser distribuído. Correa (2004) conclui, pelos resultados obtidos nos dois estudos, que o sucesso na resolução das tarefas de divisão não está relacionado apenas com o tipo de divisão apresentado, mas também com as quantidades envolvidas. De um modo geral, os problemas de divisão partitiva foram resolvidos mais facilmente pelas crianças. Sugere, ainda, que as crianças tendem a modelar as relações descritas nos problemas, não só com o material concreto, mas através de estratégias mentais de cálculo, modelando as relações lógico-matemáticas estabelecidas pelos factos numéricos indicados nos problemas. Apenas quando são formalmente ensinadas sobre as operações de multiplicação e divisão é que as crianças usam preferencialmente as estratégias multiplicativas na resolução das tarefas.

Neste estudo, Correa (2004) seguiu a categorização de estratégias de Kouba (1989) e Mulligan (1992), contudo, teve necessidade de definir novas estratégias, identificadas na resolução dos problemas apresentados. Assim, Correa (2004) identificou como estratégias:

i) *Distribuição Um-a-Um* - a criança modela a situação através dos dedos, fazendo corresponder um número a cada dedo;
ii) *Recontagem das Quantidades já Apresentadas no Problema* - a criança vai colocando, uma a uma, as quantidades apresentadas no problema, até atingir o valor do dividendo.
iii) *Contagem a partir de um dado fator* - a criança conta sem interrupções, de X em X (2, 4, 6, 8).
iv) *Distribuição Um-para-Muitos* - a criança distribui os elementos em conjuntos com mais de uma unidade, ou seja, faz corresponder a um conjunto um determinado conjunto de elementos.
v) *Dupla Contagem* - a criança realiza duas sequências de contagem em simultâneo, por exemplo, enquanto diz "1, 2, 3, 4 [levanta um dedo e diz 1] 5, 6, 7, 8 [levanta outro dedo e diz 2].
vi) *Adição Repetida* - a criança adiciona um dos números do problema repetidamente, usando o termo "e" ou "mais".
vii) *Subtração Repetida* - a criança vai subtraindo um determinado valor repetidas vezes.
viii) *Metades* - a criança divide sucessivamente ao meio o valor mencionado.
ix) *Factos Multiplicativos* - a criança utiliza conhecimentos aprendidos sobre a multiplicação e divisão.
x) *Partição e Partição Associada com Produtos* - a criança decompõe o dividendo numa soma de números inteiros, de modo a facilitar a solução, por exemplo, quando pretende dividir 12 por 2, coloca 5 de cada lado e posteriormente junta 1 a cada 5.

Vários estudos foram sendo realizados sobre a multiplicação e a divisão, e as conclusões tendem a refletir a capacidade que as crianças têm em resolver corretamente estes problemas antes de receberem instrução sobre as operações. Pretendendo saber se o mesmo resultado é obtido quando estão envolvidas quantidades contínuas, Kornilaki e Nunes (2005) desenvolveram investigações nesse sentido. O seu objetivo era analisar se as crianças que percebem as relações lógicas entre os termos da divisão quando estão envolvidas quantidades discretas, conseguem aplicar o mesmo conhecimento quando as quantidades envolvidas são contínuas. Bem como se o seu desempenho difere em tarefas de divisão por quotas, quando envolvidos os princípios da equivalência e da inversão, com quantidades contínuas e discretas.

Num 1.º estudo, Kornilaki e Nunes (2005) apresentaram a 96 crianças londrinas dos 5 aos 7 anos, tarefas de divisão, em duas condições, cuja variação se verificava ao nível do número de divisores. Numa primeira condição, as crianças tinham que distribuir peixes (quantidades discretas) ou bolos de peixe (quantidades contínuas) a dois grupos de gatos, sendo o número de gatos igual nos dois grupos; numa segunda condição, também com peixes e com bolos de peixe, o número de gatos em cada grupo era diferente. Se as crianças percebessem a relação inversa entre divisor e quociente, elas poderiam perceber que quanto menos gatos houvesse, mais estes receberiam, independentemente da quantidade recebida ser contínua ou discreta. As autoras observaram que 62% de crianças de 5 anos, 84% das crianças de 6 anos e todas as de 7 anos responderam corretamente na condição do mesmo número de divisores; quando o dividendo era o mesmo e a quantidade dos divisores diferentes, a taxa de sucesso foi de 31%, 50% e 81% respetivamente para as crianças de 5, 6 e 7 anos. O nível de sucesso em cada condição foi semelhante para os dois tipos de quantidades, contínuas e discretas, o que levou a concluir que as crianças conseguem generalizar o seu conhecimento dos princípios da divisão ao tipo de quantidades, contínuas ou discretas.

O sucesso na condição de "igual divisor" sugere que a maioria das crianças de 5 anos consegue usar o princípio da equivalência, sendo que este foi superior ao obtido na condição de "diferente número de divisores", claramente mais difícil do que a primeira. Os resultados deste estudo foram concordantes com os resultados do estudo de Correa et al. (1998). A maioria das crianças de 7 anos consegue antecipar o resultado da distribuição, aplicando a relação inversa de divisor/quociente.

Kornilaki e Nunes (2005) realizaram um segundo estudo com a finalidade de perceberem se poderiam generalizar estes resultados à Divisão por Quotas. Neste estudo foram envolvidas mais 96 crianças, também dos 5 aos 7 anos. As tarefas apresentadas foram semelhantes, dois gatos e peixes/bolo de peixe, e sob as mesmas duas condições. Na condição dos quocientes iguais, ambos os gatos iriam distribuir dois peixes pelos amigos; na condição de quocientes diferentes, um gato daria dois peixes a cada amigo, o outro daria três peixes a cada amigo, sendo que a pergunta era "a quantos amigos eram distribuídos peixes?". A maioria das crianças obteve os mesmos resultados para as quantidades contínuas e para as quantidades discretas, o seu desempenho não foi afetado pelo tipo de quantidades envolvidas nas tarefas. No entanto, foi mais fácil para as crianças estabelecerem a relação inversa nos problemas de Divisão Partitiva do que nos problemas de Divisão por Quotas.

Os estudos documentados e desenvolvidos pelos diversos autores apontam para classificações diferentes de problemas de estrutura multiplicativa, quer decorrente das diferentes dificuldades na resolução, quer resultante das relações envolvidas nas situações descritas, quer ainda pelas variáveis envolvidas nos enunciados. Parece não ser possível, ainda, uma classificação universal e consensual entre a comunidade científica.

3.1. Sobre a classificação de problemas de estrutura multiplicativa

As características dos problemas de estrutura multiplicativa, baseados numa relação quaternária, como é definido por Vergnaud (1983), determinam uma clara distinção entre este tipo de problemas e os problemas de estrutura aditiva, sustentados numa relação de três termos. Desde logo associados a uma maior complexidade, os estudos que surgiram sobre o raciocínio multiplicativo tinham como participantes crianças mais velhas, a frequentar já a escolaridade obrigatória, e na maioria dos casos, a frequentar os ciclos seguintes ao 1.º ciclo.

Nos estudos desenvolvidos pelos diversos autores encontram-se classificações para os problemas de estrutura multiplicativa, no entanto, parece não ser fácil uma designação consensual, conforme se pode observar na Tabela 12, que resume classificações de problemas de estrutura multiplicativa presentes na literatura.

Tabela 12 - Classificação dos problemas de estrutura multiplicativa, de acordo com os seus autores.

Vergnaud (1983)	**Nesher (1988)**	**Kouba (1989)**	**Greer (1992)**	**Carpenter, Fennema, Levi e Empson (1999)**
Isomorfismo de Medidas • Multiplicação • Divisão partitiva • Divisão por quotas • Quarto proporcional	Regra de Mapeamento • Multiplicação • Divisão partitiva • Divisão por quotas	Conjuntos Equivalentes • Multiplicação • Divisão partitiva • Divisão de medidas	Situações Comutativas • Grupos Equitativos • Medidas Equitativas • Razão • Conversão de Medidas • Conversão Multiplicativa • Parte/Todo • Transformação multiplicativa	Problemas Não Simétricos • Agrupamento e partilha • Razão/preço • Comparação multiplicativa
Produto de Medidas • Multiplicação • Divisão	Multiplicação Cartesiana	Produto Cartesiano		
Proporção Múltipla • Multiplicação • Divisão partitiva • Divisão por quotas	Comparação Multiplicativa	Problemas Escalares	Situações Não Comutativas • Produto Cartesiano • Área Retangular • Produto de Medidas	Problemas Simétricos • Área • Matrizes • Combinação

Enquanto Vergnaud (1983) define uma classificação baseada nas relações que se estabelece na estrutura dos problemas, Nesher (1988) e Kouba (1989) classificam-nos segundo a estrutura semântica. Já Greer (1992), ao analisar as situações descritas nos problemas, distingue-os de acordo com as situações psicologicamente comutativas e não comutativas, onde engloba uma diversidade de 10 tipos de problemas. Carpenter et al. (1999) também baseiam a sua classificação na estrutura dos problemas, cujo enfoque se situa no papel que as quantidades envolvidas desempenham, se a quantidade que é desconhecida vai desempenhar o mesmo papel no problema, ou se pelo contrário, vai originar diferentes tipos de problemas.

Nesher (1988), à semelhança de Vergnaud (1983), reconhece a existência de três grandes categorias de problemas de estrutura multiplicativa, ainda que designados de maneiras diferentes: Problemas que descrevem uma Regra de Mapeamento, que correspondem aos problemas de Isomorfismo de Medidas de Vergnaud; Problemas de Multiplicação Cartesiana, correspondentes aos problemas de Produto de Medidas de Vergnaud; e Problemas de Comparação Multiplicativa, com correspondência aos problemas de Proporção Múltipla de Vergnaud. Nos problemas de Regra de Mapeamento, Nesher (1988) descrimina igualmente entre Multiplicação e dois tipos de Divisão, mas não considera os problemas que Vergnaud (1983) designa de Quarto Proporcional.

Kouba (1989) classifica os problemas segundo a sua estrutura semântica, e considera não só a natureza das quantidades envolvidas, mas também a quantidade desconhecida no problema, o que determina, à semelhança de Vergnaud (1983) e Nesher (1988), três grandes tipos de problemas: Conjuntos Equivalentes; Produto Cartesiano; e Problemas Escalares. Esta autora distingue, de igual forma, problemas de Multiplicação, Divisão de Medida e Divisão Partitiva dentro dos problemas de Conjuntos Equivalentes.

Greer (1992) apresenta uma classificação dos problemas em que distingue entre: (a) situações psicologicamente comutativas, em que não há distinção entre multiplicador e multiplicando, uma quantidade envolvida na multiplicação não vai operar na outra para obter o resultado, o que vai originar apenas um tipo de divisão; e (b) situações psicologicamente não comutativas, o multiplicador e o multiplicando são distintos, uma das grandezas da multiplicação é concebida para atuar como operando sobre a outra para produzir o resultado, o que vai gerar dois tipos de divisão: a divisão pelo multiplicador, ou divisão partitiva; e a divisão pelo multiplicando, ou divisão por quotas. Parece ser uma classificação que se assemelha à classificação de Carpenter et al. (1999), que distingue os problemas por: (a) situações simétricas, em que as duas quantidades envolvidas são comutáveis, desempenham iguais papéis na resolução do problema. Uma não opera sobra a outra como multiplicador e multiplicando para produzir o resultado, derivando daí apenas um tipo de divisão; e (b) situações não simétricas, em que todas as quantidades do problema desempenham papéis diferentes. Uma assume-se como multiplicador, ou número de grupos; a outra, o multiplicando ou número de elementos por grupo; e a terceira quantidade, o resultado de uma operando na outra. Daí resultam dois tipos de divisão, a Divisão Partitiva e a Divisão por Quotas.

Greer (1992) e Carpenter et al. (1999) conseguem encontrar uma classificação idêntica, apesar de lhes atribuírem designações diferentes. O que Greer apelida de situações psicologicamente comutativas e não comutativas, Carpenter e os seus colaboradores nomeiam de situações simétricas e não simétricas, respetivamente. Apesar de, dentro de cada situação, os tipos de problemas não serem coincidentes no seu todo. Nas situações não simétricas, Carpenter et al. (1999) incluem os problemas de: Agrupamento e Partilha; Razão/Preço; e Comparação Multiplicativa. Greer (1992), por seu lado, inclui neste tipo de situações os problemas de: Grupos Equitativos (que corresponde aos problemas de Agrupamento e Partilha de Carpenter et al.); Razão; Conversão Multiplicativa (que corresponde aos problemas de Comparação Multiplicativa, de Carpenter et al.); Medidas Equitativas; Medida de Conversão; Parte/Todo; e Transformação Multiplicativa. Nas situações simétricas, Carpenter et al. (1999) englobam os problemas de: Área; Matrizes; Combinação. Nas situações não comutativas, Greer (1992) insere os problemas de: Área Retangular; Produto de Medidas; e Produto Cartesiano (que corresponde aos problemas de Combinação de Carpenter e colegas).

Ainda que designados de forma diferente pelos autores, parece haver alguma semelhança entre algumas classificações sobre o mesmo tipo de problemas. Os problemas de Multiplicação, Divisão Partitiva e Divisão por Quotas encontram-se nas classificações de Vergnaud (1983), Nesher (1988), Kouba (1989), Greer (1992) e Carpenter et al. (1999). No entanto, o problema que Vergnaud identifica de Quarto Proporcional não é considerado por nenhum dos outros autores.

As classificações de problemas de estrutura multiplicativa que foram surgindo basearam-se na estrutura proposicional e semântica dos problemas, nas relações matemáticas estabelecidas entre as quantidades envolvidas, nas situações originadas pelo papel que as quantidades desempenham nos problemas. Mulligan (1992) define uma classificação diferente dos outros autores, na medida em que distingue entre problemas de Divisão e problemas de Multiplicação. Esta autora engloba, nos problemas de Multiplicação os problemas de: Adição Repetida; Razão; Fator Escalar; Área; Produto Cartesiano; e nos problemas de Divisão os problemas de: Divisão Partitiva; Razão; Fator Escalar; Divisão Por Quotas; Sub-Divisão.

Se parece não se observar um consenso total entre os investigadores quanto à classificação dos problemas de estrutura multiplicativa, já o mesmo não se pode dizer quanto ao impacto da estrutura dos problemas na sua resolução e na dificuldade que constitui para as crianças. Há problemas que, pela sua estrutura, são naturalmente considerados pelas crianças como mais difíceis de resolver do que outros.

3.2. Sobre a dificuldade dos problemas de estrutura multiplicativa

De acordo com Nunes e seus colaboradores (2009), a dificuldade na resolução dos problemas deriva da interpretação que as crianças fazem das ações e relações descritas nos problemas e das operações de pensamento necessárias à sua interpretação e resolução. A diversidade de procedimentos, na modelação dos problemas, sugere a presença de distintas operações de pensamento de acordo com os diferentes tipos de problemas.

Contrariamente ao campo das estruturas aditivas, não foi realizado, em semelhante nível, uma análise conceptual de situações de multiplicação e divisão em termos de dificuldade notada na resolução de problemas, consoante os diferentes tipos. Os estudos que surgiram, para além de envolverem participantes com idades muito dispares (entre os 4-5 anos e os 13-16 anos), tinham diferentes objetivos; ora procuravam perceber o efeito de determinado tipo de números na resolução dos problemas, quantidades contínuas *vs* quantidades discretas (Bell, Fischbein, & Greer, 1984; Kornilaki & Nunes, 2005), ora recaíam especificamente num determinado tipo de operação (Frydman & Bryant, 1988; Becker, 1993; Park & Nunes, 2001; Correa, 2004).

Apesar das diferentes classificações de problemas usadas pelos investigadores, é consensual que os problemas que envolvem "grupos iguais" e "medidas iguais" são sistematicamente designados como mais fáceis. Os problemas de Multiplicação, cujo modelo intuitivo e primitivo defendido por Fischbein et al. (1985) é a adição repetida, têm subjacente a mesma estrutura, a cada grupo corresponde um determinado número de elementos que é igual em todos os grupos. Daí a facilidade de resolução através de sucessivas adições de um determinado número por determinadas vezes, também reconhecida por Nesher (1988).

Wood (2001) considera que os problemas de Multiplicação com o resultado desconhecido ("A Matilde convidou 5 amigos para uma festa. Ela quer dar a cada amigo 3 balões. De quantos balões ela necessitará?") são considerados pelas crianças como mais fáceis de resolver, do que os problemas em que é necessário encontrar o número de grupos ("A Matilde tem 15 balões. Ela quer dar a cada amigo que vier à sua festa 3 balões. Quantos amigos vão receber balões?"). Estes últimos carecem de modelos diferentes para a sua resolução. Na construção inicial da divisão são definidos dois tipos de divisão: a Divisão Partitiva, onde é dado o valor a ser dividido e o número de grupos, e a pergunta recai sobre o número de elementos em cada grupo; e a Divisão por Quotas, sendo dada a quantidade inicial e o número de elementos por grupo, e a pergunta é sobre o número de grupos.

A característica partitiva tem sido considerada por alguns autores (ver Fischbein et al., 1985) como o modelo prototípico da divisão, o que se traduz na maior facilidade que as crianças revelam na sua resolução (Correa, 2004; Nunes et al., 2009). Mesmo crianças mais novas, de 5 e 6 anos, conseguem com facilidade estabelecer e usar a correspondência na divisão. Segundo Correa (2004) e Nunes e seus colaboradores (2009), as estratégias usadas nos problemas de divisão partitiva são dominadas mais cedo do que as estratégias usadas para resolver problemas de divisão por quotas, em que, para partilhar o total, as crianças terão que saber quantas distribuições é possível fazer, o que se traduz numa maior dificuldade de resolução nestes últimos. No entanto, relativamente a estes dois tipos de divisão, outros estudos há (ver Burton, 1992; Selva, 1998) que mostram não haver grandes diferenças no sucesso das crianças na resolução de problemas de Divisão Partitiva e Divisão por Quotas.

Os problemas que envolvem "Produtos Cartesianos" ou "Medidas de Conversão" são considerados mais difíceis de resolver (Hart, 1981; Mulligan, 1992; Fuson, 2004), mesmo para as crianças do 1.º e 2.º ano da escolaridade básica (Kelley & Richert, 1970; Vergnaud, 1983). Pois não é tacitamente expresso no enunciado do problema o pressuposto que deve ser tido em consideração na sua resolução, que cada elemento de um conjunto deve ser cruzado com cada elemento do outro conjunto. Reiterado pelo estudo desenvolvido por Bryant et al. (1992), os problemas de Produto Cartesiano foram considerados pelas crianças de 8 e 9 anos como mais difíceis de resolver, comparativamente com os problemas de Multiplicação, em que elas teriam que perceber a correspondência de um-para-muitos. Nenhuma das crianças de 8 anos respondeu corretamente a problemas de Produto Cartesiano sem o apoio de materiais necessários para encontrar a solução. Mesmo com materiais de apoio à resolução, o seu desempenho não foi significativamente diferente. Estes problemas mais complexos assumiram-se como bastante difíceis para as crianças de 9 anos que acertaram aproximadamente 55% das vezes em que não tinham os materiais todos presentes.

Piaget (1977) entende que a compreensão da multiplicação e da divisão significa uma transformação qualitativa no pensamento da criança, e que apenas ocorre após o domínio da composição aditiva. Já Nunes e Bryant (1996) são da opinião de que é difícil determinar quando e no contexto de que problemas é que as crianças começam a entender as relações proporcionais entre variáveis. Essa dificuldade relaciona-se com o facto de que as crianças podem usar a sua compreensão das situações de correspondência de um-para-muitos para resolver problemas que envolvem relações entre variáveis, sem necessariamente se tornarem cientes da relação funcional entre elas, usando muitas vezes a replicação. Das três situações multiplicativas do raciocínio multiplicativo (situações de correspondência de um-para-muitos, situações que envolvem relações entre variáveis, e situações que envolvem distribuição, divisão e divisões ao meio), Nunes e Bryant (1996) consideram que as mais simples são as de correspondência um-para-muitos. As situações de correspondência de um-para-muitos parecem estar ao alcance das crianças de 5 e 6 anos desde que, de acordo com Fuson (2004), a linguagem envolvida seja simples, os números sejam pequenos e as crianças tenham acesso a material para manipular as situações. No entanto, Becker (1993) alerta para o facto de que, dentro destas situações, a correspondência 3:1 parecer suscitar mais dúvidas do que a correspondência 2:1. Contudo, quer se trate de situações de 2:1 ou 3:1, parece que as crianças, a partir dos 5-6 anos conseguem encontrar estratégias que refletem os esquemas de correspondência um-para-muitos e de distribuição que lhes permitem resolver alguns problemas de estrutura multiplicativa.

3.3. Sobre as estratégias de resolução nos problemas de estrutura multiplicativa

No passado, os investigadores debruçaram-se sobre o desempenho e as estratégias das crianças na resolução dos problemas de multiplicação e divisão. Contudo, estes estudos tinham como sujeitos das investigações alunos mais velhos, com idades superiores a 11 anos (Vergnaud, 1983, 1988; Hart, 1980, 1984). Posteriormente, surgiram estudos que analisaram as estratégias das crianças mais novas, a partir dos 5, 6 anos, na resolução de problemas de multiplicação e divisão (Steffe, 1988; Kouba, 1989; Mulligan, 1992; Nunes & Bryant, 1996; Carpenter et al., 1999). Estes estudos observaram que as crianças conseguem resolver alguns problemas que envolvem as operações de multiplicação e divisão antes de estas lhes serem formalmente ensinadas, e resolvem-nos com estratégias de resolução corretas.

Segundo alguns autores (Kouba, 1989; Becker, 1993; Carpenter et al., 1999), os procedimentos das crianças na resolução de problemas de estrutura multiplicativa são influenciados pela estrutura semântica dos problemas, pelo desenvolvimento da contagem e pelas estratégias de agrupamento e da adição. À semelhança da adição e subtração, também para resolver problemas de multiplicação e divisão, as estratégias das crianças tendem a refletir a ação ou as relações descritas nos problemas. Surge, todavia, alguma controvérsia quanto à origem do conceito de multiplicação e o esquema que ela comporta. Enquanto que Fischbein et al. (1985) entendem que o modelo intuitivo da multiplicação é a adição repetida, em que conjuntos com o mesmo número de elementos são colocados juntos ou adicionados, Park e Nunes (2001) defendem a ideia de que a origem do conceito de multiplicação está no esquema de correspondência de um-para-muitos, mais do que no conceito da adição repetida. Fischbein et al. entendem a multiplicação como uma quantidade que é multiplicada *n* vezes. No entanto, reconhecem que a multiplicação se torna difícil de ser entendida enquanto tal quando os números envolvidos não são inteiros, pois entendendo a multiplicação como adição repetida, torna-se difícil para as crianças perceberem como é que uma quantidade é multiplicada por 0,63 vezes.

Fischbein et al. (1985) reconhecem, de igual forma, modelos intuitivos e primitivos para a divisão. Inicialmente as crianças aplicam o modelo partitivo, e posteriormente, através da instrução, passam a usar o modelo por quotas. O modelo partitivo como modelo intuitivo e primitivo da divisão foi criticado por Kouba (1989), que identifica três modelos intuitivos diferentes para a divisão partitiva: partilha por distribuição, partilha por separações repetidas e partilha por construções repetidas. Kouba reconhece ainda níveis de abstração nas estratégias, sugerindo: representação direta; dupla contagem; contagem transacional; estratégia aditiva ou subtrativa; e factos numéricos.

Ainda que se identifique alguma concordância nos níveis de abstração definidos por Kouba (1989) e por Carpenter e colegas (1993, 1999) e por Mulligan (1992), estes últimos apenas reconhecem três níveis nas estratégias, ainda que com designações diferentes entre si: estratégias de manipulação de objetos, designados de modelação direta por Mulligan; estratégias de contagem, ou estratégias sem modelação direta, para Mulligan; e estratégias mentais ou factos conhecidos para esta última. Segundo os autores, estes níveis de estratégias vão evoluindo, de acordo com o grau de abstração, à medida que as crianças vão ficando mais experientes e conhecedoras na resolução dos problemas. As estratégias de modelação direta, com recurso a materiais ou dedos para modelar as situações descritas nos problemas, dão lugar a estratégias de contagem, baseadas na sequência de contagem, e estas, progressivamente vão dando lugar a estratégias mentais, de memorização e recordação de combinações de números previamente aprendidas.

Mulligan (1992) estabelece uma comparação com os estudos de Kouba (1989) e identifica novas estratégias de resolução para os problemas de estrutura multiplicativa, em que distingue estratégias para a multiplicação e para a divisão. Por seu lado, Correa (2004), tendo por referência as estratégias definidas por Kouba (1989) e por Mulligan (1992), identifica outras para além das já definidas, e apesar de encontrar estratégias idênticas, como sendo a Distribuição Um-a-Um, Dupla Contagem, Adição Repetida, Subtração Repetida, Metades, e Factos Multiplicativos, não considera os diferentes níveis de estratégias consoante o grau de abstração implícita, propostos por Mulligan (1992) e também por Carpenter et al. (1993, 1999).

Parece não haver concordância total nem sobre os modelos intuitivos da multiplicação e divisão, nem sobre os níveis de estratégias, nem mesmo sobre as estratégias observadas para resolver os problemas de estrutura multiplicativa. Não é fácil encontrar uma matriz comum de estratégias para os problemas de estrutura multiplicativa. Parece, por sua vez, que as estratégias identificadas pelos autores estarão relacionadas com a seleção dos problemas que propõem às crianças, uma vez que não foram identificadas, nestes estudos, estratégias para a resolução de problemas de Produto de Medidas (Vergnaud, 1983), ou Produto Cartesiano, como designam outros autores (Kouba, 1989; Greer, 1992), ou outros mais complexos como os problemas de Proporção Múltipla, cuja resolução requer o domínio dos algoritmos.

3.4. Em síntese

O raciocínio multiplicativo é entendido como de mais difícil compreensão pelas crianças, quando comparado com o raciocínio aditivo (Hart, 1981; Vergnaud, 1983, 1997). Isto conduziu a diferentes perspetivas sobre quando é que as crianças começam a dominar as operações de pensamento necessárias à resolução de problemas de multiplicação e divisão. Os primeiros estudos que se encontram sobre raciocínio multiplicativo testam o raciocínio proporcional e são realizadas com crianças mais velhas, de 11, 13 e 16 anos (ver Hart, 1980, 1981; Vergnaud, 1983, 1988; Nesher, 1988). No entanto, Piaget sugere que as crianças de 6 anos começam a perceber a correspondência um-para-muitos, na sua forma mais elementar e ainda sem conclusão operatória (Piaget & Szeminska, 1971).

A partir de finais dos anos 80, observam-se estudos envolvendo crianças mais novas, de 4 e 5 anos (ver Frydman & Bryant, 1988), procurando analisar a forma como crianças tão novas quanto as desta idade entendem a distribuição. Surgem estudos com crianças de 5, 6 e 7 anos, centrados na compreensão de problemas de divisão (ver Correa et al., 1995, 1998; Kornilaki & Nunes, 2005) mas também nas estratégias das crianças quando resolvem problemas de divisão e multiplicação (ver Carpenter et al., 1993). Ainda assim, a maior parte dos estudos desenvolvidos sobre problemas de estrutura multiplicativa envolvem crianças que já frequentam a escolaridade básica, tendo algum contacto com a instrução formal sobre operações aritméticas (ver Kouba, 1989; Mulligan, 1992; Correa & Moura, 1997; Park & Nunes, 2001; Correa, 2004).

As investigações que se encontram com crianças de 5, 6, 7 e até 8 anos não vão além de problemas simples de multiplicação e divisão. Os estudos sobre proporções e raciocínio proporcional são desenvolvidos por crianças mais velhas, a partir dos 10 anos (ver Hart, 1980, 1981). O raciocínio proporcional, entendido como envolvendo o sentido de co-variância e multiplicações comparativas (Lesh, Post, & Behr, 1988), traduz-se numa maior complexidade e dificuldade de resolução para crianças mais novas (Hart, 1981; Vergnaud, 1988; Fuson, 2004) que não conseguem ainda perceber o princípio subjacente aos problemas proporcionais, a relação entre duas relações. Este facto parece justificar a ausência de investigações com participantes de idades inferiores a 10 anos sobre problemas de Quarto Proporcional, classe de problemas que Vergnaud (1983) inclui nos problemas de Isomorfismo de Medidas.

Parece, no entanto, ser unânime entre a comunidade académica, que as crianças conseguem, antes de iniciarem a instrução formal, resolver problemas simples de multiplicação e divisão estando implícita a correspondência um-para-muitos e a distribuição um-a-um. As estratégias de resolução dos problemas de estrutura multiplicativa dão conta que as crianças de 5 e 6 anos interpretam as relações e situações descritas no problema e procuram estratégias de resolução que traduzam essas mesmas situações, ainda que não seja possível observar uma matriz comum às estratégias de resolução.

Fica claro, pelos estudos desenvolvidos e pelas idades dos seus participantes, que há problemas mais difíceis de resolver do que outros, sendo os mais fáceis os problemas de Isomorfismo de Medidas, nas suas formas de Multiplicação, Divisão Partitiva e Divisão por Quotas, e os mais difíceis os problemas de Produto de medidas e Proporções Múltiplas (Vergnaud, 1983). E se parece haver algum consenso quanto a esta matéria, é evidente a falta de unanimidade quer na classificação de problemas de estrutura multiplicativa, quer na identificação das estratégias usadas pelas crianças. As estratégias identificadas pelos diferentes autores apenas dizem respeito a problemas simples de multiplicação e divisão (ver Kouba, 1989; Mulligan, 1992; Carpenter et al., 1993, 1999; Correa, 2004), ficando por perceber que estratégias as crianças usam quando resolvem problemas de Quarto Proporcional, ou mesmo problemas de Produto de Medidas (problemas de produto cartesiano, na designação de alguns autores). O que leva a inferir que muito ainda falta compreender acerca do raciocínio das crianças em relação aos problemas de estrutura multiplicativa.

4. Considerações finais

Sendo claro que as crianças a partir dos 5 anos conseguem resolver com sucesso alguns problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa, como resultado da aplicação dos esquemas de ação, fica por perceber como é que estas crianças refletem na sua resposta. Piaget (1967) defende que as crianças antes dos 10 anos não conseguem refletir sobre a sua ação, tendo muita dificuldade em explicar como conseguiram obter determinado resultado na resolução de problemas. Piaget alega que esta dificuldade se deve à sua incapacidade de introspeção, necessária à justificação lógica da explicação causal. Será, todavia, que as crianças que conseguem resolver corretamente os problemas de estrutura aditiva e multiplicativa não conseguem explicar o seu procedimento na procura e obtenção da resposta correta? Esta, e outras questões são levantadas quando se procura compreender como é que as crianças do pré-escolar resolvem os problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa.

Muitos estudos dão conta que as crianças de 5 e 6 anos conseguem resolver alguns problemas de estrutura aditiva quando envolvem situações de transformação e contam com algum sucesso (ver Groen & Resnick, 1977; Carpenter & Moser, 1982; Riley et al., 1983) No entanto, os estudos que têm como sujeitos crianças de 4 anos debruçam-se num ou noutro aspeto, ou num ou noutro tipo de problemas. Hughes (1981), no seu estudo com participantes de 4 anos apenas analisou a resolução de problemas simples de adição e subtração onde o enfoque era o uso ou não, de materiais. Carpenter e Moser (1982) debruçaram-se apenas sobre problemas de Parte-Parte-Todo e problemas de Transformação, enquanto Hudson (1983) apenas refletiu sobre problemas de Comparação com a diferença desconhecida, confrontando os resultados com situações em que estes problemas eram apresentados numa forma dinâmica. Assim, emerge a questão de como é que as crianças de 4 anos resolvem os problemas que parecem ter obtido algum sucesso em crianças de idades superiores?

Pesquisas realizadas com crianças do pré-escolar não estudaram todas as possibilidades dos problemas de Composição de Duas Medidas, Transformação Estática Ligando Duas Medidas e Relação Estática Ligando Duas Medidas, de acordo com todos os elementos desconhecidos e todas as possibilidades de direção da transformação ou da relação. Restam dúvidas quanto aos problemas considerados como os de mais difícil resolução para as crianças de 4, 5 e 6 anos, em todas as situações destes três tipos de problemas. Mesmo os problemas de Comparação analisados por Nunes e Bryant (1991), cujos participantes integravam crianças de 5 anos, apenas exploraram situações em que o elemento desconhecido era a diferença e o referente. Fica por perceber como é que as situações com o elemento comparado desconhecido são resolvidas. Na literatura não é consensual a complexidade neste tipo de problemas (ver Lewis & Mayer, 1981; Verschaffel & De Corte, 1997; Magina et al., 2001). Resolverão as crianças, com igual nível de sucesso, os problemas do mesmo tipo mas em que o elemento desconhecido varia?

Não se conhecem estudos que analisem simultaneamente o desempenho, as estratégias e os argumentos das crianças de 4, 5 e 6 anos nos problemas de Composição de Duas Medidas, Transformação Ligando Duas Medidas e Relação Estática Ligando Duas Medidas, da classificação de Vergnaud. Permanece ainda por esclarecer que estratégias são usadas pelas crianças quando resolvem problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, já que nos estudos desenvolvidos a estratégia identificada remete apenas para a correspondência. De que formas esta correspondência é por elas usada?

Os estudos que se conhecem sobre problemas de estrutura multiplicativa (ver Frydman & Bryant, 1988; Becker, 1993; Carpenter et al., 1993; Correa et al, 1998; Kornilaki & Nunes, 2005) apresentam algum sucesso de crianças de 5 e 6 anos no uso da correspondência de um-para-muitos, e de crianças de 4 e 5 anos distribuindo equitativamente em situações de divisão. Fica, contudo a dúvida sobre como é que reagem as crianças de 4, 5 e 6 anos perante as quatro classes dos problemas de Isomorfismo de Medidas. Não se conhecem estudos que analisem o desempenho das crianças do pré-escolar na resolução de problemas de Quarto Proporcional. Que estratégias utilizam? Conseguirão as crianças desta idade resolver problemas de Produto de Medidas? Sabe-se que este tipo de problemas apresenta uma complexidade superior aos problemas de Isomorfismo de Medidas, contudo, não se sabe se a sua resolução é possível por crianças do pré-escolar. Desconhecem-se também as estratégias que utilizadas na resolução deste tipo de problemas por crianças mais velhas e que conseguiram obter uma resolução acertada.

É notória a falta de convergência na classificação de problemas de ambas as estruturas de raciocínio. Esta classificação vai variando, não só consoante os autores, mas também ao longo dos anos, fruto do desenvolvimento de estudos. Nesta investigação, levada a cabo com crianças portuguesas de 4, 5 e 6 anos de idade, sobre a sua compreensão de problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa, adota-se a classificação de Vergnaud (1982, 1983), por se considerar a mais constante ao longo dos anos, a que melhor traduz a estrutura dos problemas e por isso permite uma melhor compreensão das operações de pensamento realizadas pelas crianças.

CAPÍTULO III – ESTUDO 1

Introdução

Este capítulo é dedicado ao Estudo 1, realizado com o propósito de conhecer como compreendem as crianças do pré-escolar os problemas de estruturas aditiva e multiplicativa. Para tal, tenta-se dar resposta a três grandes questões: 1) Qual o desempenho das crianças perante problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa; 2) Quais as estratégias que utilizam na resolução dos problemas que lhes são propostos; 3) Que argumentos usam para justificar as suas opções de resolução.

Neste capítulo faz-se um breve enquadramento ao estudo e apresentam-se as opções metodológicas. Descrevem-se e analisam-se os resultados obtidos, apresenta-se a discussão dos resultados e as considerações inerentes a este estudo.

1. Enquadramento

A literatura tem estudado o desempenho das crianças na resolução de problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa, ora com crianças mais velhas, a frequentar o ensino formal, ora com crianças desta idade, ainda antes de receberem qualquer instrução formal sobre operações matemáticas. Os estudos desenvolvidos em diferentes contextos ressaltam a capacidade que as crianças têm em resolver corretamente problemas de adição, subtração, multiplicação e divisão, antes ainda de estas operações lhes serem formalmente ensinadas (ver Carpenter et al., 1981; Riley et al., 1983; Becker, 1989, 1993; Carpenter et al., 1993; Frydman & Bryant, 1988, 1994; Correa et al., 1998; Nunes & Bryant, 1996, Nunes et al., 2005; Kornilaki & Nunes, 2005; Barth, Baron, Spelke, & Carey, 2009; Nunes et al., 2009) e com maior sucesso quando o seu procedimento é acompanhado de materiais para manipular as ações descritas nos problemas (Bryant et al., 1992; Carpenter & Moser, 1982; Hughes, 1981, 1986).

É ainda possível observar a realização de investigações sobre as estratégias que as crianças utilizam quando resolvem os problemas propostos, quer sejam problemas de estrutura aditiva (ver Groen & Parkman, 1972; Groen & Resnick, 1977; Carpenter et al., 1981; De Corte & Verschaffel, 1987; Carpenter et al., 1999; Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2012; Verschaffel, Bryant, & Torbeyns, 2012), quer sejam problemas de estrutura multiplicativa (ver Steffe, 1988; Becker 1989; Kouba, 1989; Mulligan, 1992; Nunes & Bryant, 1991; Carpenter et al., 1999).

Apesar dos estudos realizados, estes não se debruçaram simultaneamente sobre os desempenhos das crianças, as suas estratégias e os argumentos que as crianças utilizam para justificar as resoluções acertadas. Da mesma forma, não se encontram estudos com crianças destas idades, 4, 5 e 6 anos, que contenham tão grande variedade de problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa, abrangendo, desta forma, o maior número possível de tipos de problemas capazes de serem resolvidos por crianças do pré-escolar. Espera-se, neste estudo, que as crianças nele envolvidas sejam capazes, tal como as crianças dos estudos dos autores referenciados, de resolver problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa, utilizando estratégias adequadas a cada tipo de problema. Mais ainda, que sejam capazes de argumentar a sua resposta na resolução correta dos problemas propostos.

A literatura oferece várias classificações de problemas de estrutura aditiva que têm vindo a ser estudadas (ver Greeno, 1978; Riley et al., 1983; Carpenter & Moser, 1982; Fuson, 1992a, 1992b; Carpenter et al., 1999) e que se focam nos tipos de ação ou relações estabelecidas nos problemas. Uma classificação que se destaca é a de Vergnaud (1982, 1983), adotada neste estudo. Este autor distingue seis categorias de problemas de estrutura aditiva: Composição de Duas Medidas; Transformação Ligando Duas Medidas; Relação Estática Ligando Duas Medidas; Composição de Duas Transformações; Transformação Ligando Duas Relações Estáticas; Composição de Duas Relações Estáticas.

Contrariamente à adição e subtração, os tipos de problemas de estrutura multiplicativa não têm reunido consenso quanto à sua classificação (Nunes & Bryant, 1996; Verschaffel & De Corte, 1997), variando consoante: as relações estabelecidas entre as quantidades (Vergnaud, 1983); a natureza das quantidades envolvidas e a estrutura semântica dos problemas (Nesher, 1988; Kouba, 1989; Carpenter et al., 1999); e as situações psicologicamente comutativas e não comutativas (Greer, 1992). Contudo, à semelhança dos problemas de estrutura aditiva, a classificação que se adota neste estudo é a de Vergnaud (1983). Este autor identifica três tipos de problemas de estrutura multiplicativa: Isomorfismo de Medidas; Produto de Medidas; Proporção Múltipla.

À luz da teoria de Vergnaud (1982, 1983, 1988) o desenvolvimento dos campos conceptuais processa-se ao longo de um grande período de tempo, com experiência, maturidade e aprendizagem através das experiências do dia-a-dia dentro e fora da escola. Não se revestido do mesmo grau de complexidade, o desenvolvimento do campo conceptual das estruturas aditivas vai desde os 3-4 anos até pelo menos aos 15-16, e desde os 7 até aos 18 anos para a compreensão da estrutura multiplicativa. Neste estudo não serão usados todos os tipos de problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa por se entender, de acordo com investigações anteriores, não serem aplicáveis a crianças do pré-escolar.

2. Objeto de estudo

Os diversos estudos realizados apontam para a capacidade que as crianças do Pré-escolar têm, desde cedo, e antes de iniciarem a instrução formal, de resolver problemas de estrutura aditiva (EA) e problemas de estrutura multiplicativa (EM), usando estratégias de resolução corretas com recurso a objetos para manipular a ação descrita no problema, e em alguns casos até dispensando os materiais manipuláveis e recorrendo a estratégias de contagem. Contudo, pouco se sabe relativamente à compreensão de problemas de raciocínio aditivo e multiplicativo das crianças portuguesas em idade pré-escolar. Assim, este estudo procura compreender como raciocinam as crianças do pré-escolar perante problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa.

Assim, procura-se responder às seguintes questões:

1. Que desempenhos apresentam as crianças quando resolvem problemas de EA?
2. Que estratégias usam para resolver os problemas de EA?

3. Que argumentos apresentam para as opções tomadas na resolução de problemas de EA?
4. Que desempenhos apresentam as crianças resolvem problemas de EM?
5. Que estratégias usam para resolver os problemas de EM?
6. Que argumentos apresentam para as opções tomadas na resolução de problemas de EM?

3. Metodologia

Este estudo segue o paradigma da investigação quantitativa, paradigma orientado sobretudo para os resultados e sua generalização. A investigação quantitativa, assente na corrente positivista, entende a realidade como objetiva, previsível e controlável, baseada na observação dos factos e acontecimentos objetivos, e compreende um processo sistemático de recolha de dados observáveis e mensuráveis (Fortin, 2009). Pretende, na procura da explicação e controlo dos fenómenos, encontrar regularidades e leis através da objetividade dos seus procedimentos e quantificação de medidas (Almeida & Freire, 2003). A utilização de uma linguagem mais matemática permite sistematizar e trabalhar a análise dos fenómenos de modo a constituir um novo conhecimento (Minayo & Sanches, 1993). Na análise do fenómeno, interessa sobretudo o estudo das partes que o constituem, a decomposição dos seus elementos e a identificação das relações entre as partes (Norwood, 2000).

O objetivo da investigação quantitativa é estabelecer factos, evidenciar as relações entre as variáveis, eliminando, tanto quanto possível, as variáveis estranhas que possam afetar os resultados da investigação. Os dados são recolhidos metodicamente, os participantes escolhidos criteriosamente, procura-se verificar hipóteses, predizer resultados de causa e efeito ou verificar proposições teóricas. Em suma, assumindo a realidade como estática, o método quantitativo procura explicar, predizer e estabelecer relações de causa e efeito generalizáveis a outras populações ou contextos (Fortin, 2009). A objetividade, o controlo e a generalização são as principais características desta metodologia. A possibilidade de generalização permite que o conhecimento seja útil e valioso numa maior diversidade de situações, ainda que, com isso, haja lugar a um afastamento da especificidade e singularidade do fenómeno (Moreira, 2006).

No presente estudo, procurando perceber e medir o desempenho, estratégias e argumentos das crianças, optou-se pelo método de pesquisa por inquérito, seguindo o seu princípio básico que defende que, se se quer saber como as pessoas pensam, pergunta-se-lhes (Christensen, Johnson, & Turner, 2011). A principal característica da investigação quantitativa não experimental é que não há manipulação de qualquer variável independente. É um tipo de investigação descritiva cuja finalidade visa fornecer uma descrição exata de um determinado fenómeno ou situação, ou descrever o sentido das relações que se estabelecem entre as variáveis. As abordagens não experimentais mais sofisticadas procuram identificar as relações causais entre as variáveis dependentes e independentes, e o controlo de variáveis estranhas identificadas pelo investigador (Christensen et al., 2011).

De acordo com Christensen et al. (2011), a pesquisa por inquérito é um tipo de investigação não experimental que visa perceber e medir a opinião, crenças, atividades e atitudes dos sujeitos, o que se entendeu ser o mais adequado aos objetivos deste estudo. À semelhança do que refere Creswell (2003), a pesquisa por inquérito fornece uma descrição quantitativa ou numérica de tendências, atitudes ou opiniões de uma população, através do estudo de uma amostra dessa mesma população. E é a partir do resultado da amostra que o investigador generaliza ou tira conclusões sobre a população. Realizados com o propósito de responderem a questões de “quantos?” e “quanto?” como fase preliminar de muitos estudos, servem posteriormente para responder a questões de “quem” e “porquê”, informação imprescindível para compreender porque determinado fenómeno ocorre, podendo produzir generalizações e previsões.

A pesquisa por inquérito, sendo útil em estudos exploratórios, descritivos, preditivos e em alguns casos explanatórios, recorrendo a um bom procedimento de medida, consegue analisar as relações entre as variáveis, fazer predições e determinar como diferem os grupos e subgrupos envolvidos na pesquisa. Frequentemente os investigadores usam a investigação não experimental para identificar a existência de determinados fatores e as relações existentes entre si. Este conhecimento é posteriormente usado para formular hipóteses para serem usadas quer em formas mais avançadas de pesquisa quantitativa não experimental, quer numa investigação experimental (Christensen et al., 2011).

A metodologia quantitativa, com aplicação às ciências sociais, usa como instrumento de investigação preferencial o questionário. Este instrumento é utilizado para transformar em dados a informação ou o conhecimento que é transmitido diretamente pelo sujeito. As questões são apresentadas numa ordem lógica e os enviesamentos são quase impossíveis. Este instrumento garante não só a uniformidade na apresentação das questões, assegurando a constância de apresentação de respondente para respondente, a natureza impessoal do instrumento e por último, um meio rápido e pouco dispendioso de obtenção de dados. A sua eficácia é normalmente verificada com a aplicação, junto de uma amostra muito reduzida da população-alvo, de um pré-inquérito, permitindo descobrir os defeitos do questionário e fazer as correções que se impõem (Fortin, 2009), o que se verificou também neste estudo, com a eliminação de algumas questões e ajustamento de linguagem.

Este instrumento não está isento de limitações. Tratando-se, como refere Tuckman (2000), de um instrumento de auto-registo, está intrinsecamente relacionado com a capacidade de expressão escrita do sujeito, pelo que Oliveira (1994) sugere como uma das limitações à aplicação do questionário, a dificuldade de ser respondido por indivíduos com menor nível cultural. No presente estudo os sujeitos não dominam o código escrito, como tal, podendo ser uma das limitações detetadas ao uso do questionário, foi opção apresentar esse instrumento sob a forma de entrevista, apresentada da mesma forma a todos os intervenientes.

3.1. Os participantes

Os participantes desta investigação foram 180 crianças dos 4 aos 6 anos, a frequentar a educação pré-escolar pública em Portugal, em agrupamentos de escolas dos distritos de Viseu e Aveiro. Os Encarregados de Educação das crianças participantes, as educadoras de infância dos Jardins de Infância envolvidos e respetivos Diretores dos Agrupamentos de Escolas deram autorização para a realização deste estudo (ver Anexo 3, pp. 489).

Metade das crianças (4 anos, n=30; 5 anos, n=30; 6 anos, n=30) participaram na resolução de tarefas de estrutura aditiva – EA - e a outra metade (4 anos, n=30; 5 anos, n=30; 6 anos, n=30) participaram na resolução de tarefas de estrutura multiplicativa - EM. As Tabelas 13 e 14 ilustram a média das idades das crianças que participaram neste estudo.

Tabela 13 - Média das idades (desvio padrão) dos participantes do estudo que resolveram problemas de estrutura aditiva (EA).

	PARTICIPANTES		
EA	**4 anos (n = 30)**	**5 anos (n=30)**	**6 anos (n=30)**
Média	4,06	5,04	6,01
Desvio padrão	(.03)	(.03)	(.02)

Tabela 14 - Média das idades (desvio padrão) dos participantes do estudo que resolveram problemas de estrutura multiplicativa (EM).

	PARTICIPANTES		
EM	**4 anos (n = 30)**	**5 anos (n=30)**	**6 anos (n=30)**
Média	4,05	5,04	6,01
Desvio padrão	(.04)	(.03)	(.02)

3.2. *Design* de investigação

A divisão dos participantes em dois grupos, onde foram apresentados problemas de estruturas de raciocínio distintas, teve como finalidade saber o que entendem as crianças sobre estruturas aditivas e sobre estruturas multiplicativas.

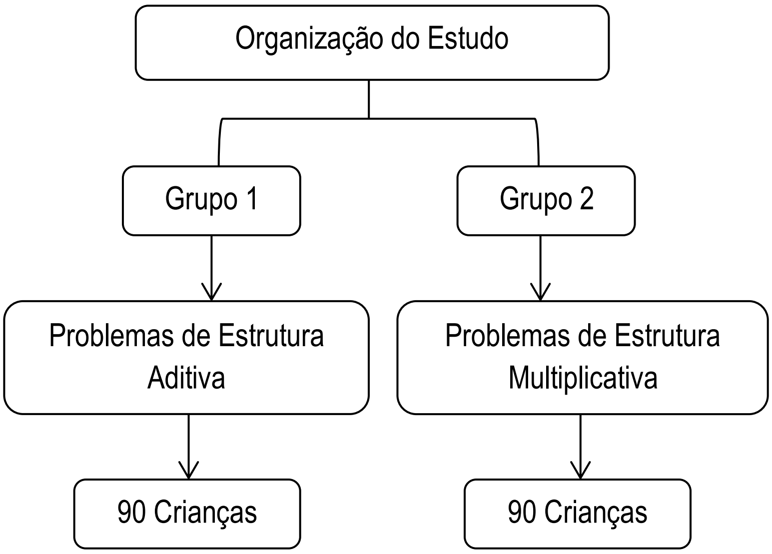


Figura 21: Organização do Estudo 1.

As crianças, organizadas em dois grupos, foram sujeitas a uma entrevista de resolução individual com problemas de raciocínio distintos (ver Figura 21), com o propósito de perceber que desempenhos obtêm em problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa, isoladamente.

3.3. As tarefas

As tarefas propostas às crianças procuraram ser diversificadas abrangendo diferentes tipos de problemas. Nas tarefas de estrutura aditiva foram considerados problemas de Composição de Duas Medidas, Transformação Ligando Duas Medidas e Relação Estática Ligando Duas Medidas. Da classificação de Vergnaud adotada neste estudo foram excluídos os problemas de Composição de Duas Transformações, Transformação Ligando Duas Relações Estáticas e Composição de Duas Relações Estáticas, por se considerar não apropriadas a crianças desta faixa etária, de difícil resolução, elas têm que perceber o número como medida de uma relação estática e efetuarem cálculos relacionais difíceis para crianças tão pequenas (Vergnaud, 1982; Nunes & Bryant, 1996).

Ao grupo de crianças às quais foram propostos problemas de estrutura aditiva, Grupo 1, foi-lhes sugerido que resolvessem 28 problemas (4 de Composição de Duas Medidas, 12 de Transformação Ligando Duas Medidas e 12 de Relação Estática Ligando Duas Medidas). Em cada tipo de problemas atendeu-se, ainda, ao elemento desconhecido e à direção da transformação ou da relação presente nos problemas, conforme se observa nas Figuras 22 a 24.

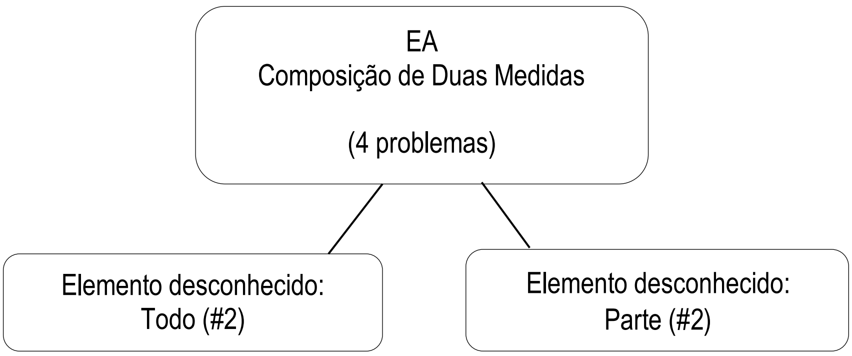


Figura 22: Número de problemas de Composição de Duas Medidas.

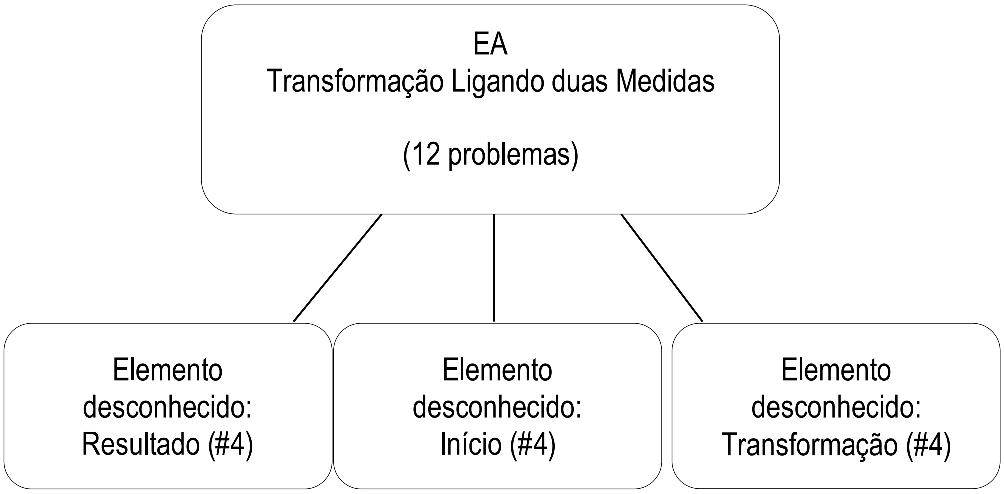


Figura 23: Número de problemas de Transformação Ligando Duas Medidas.

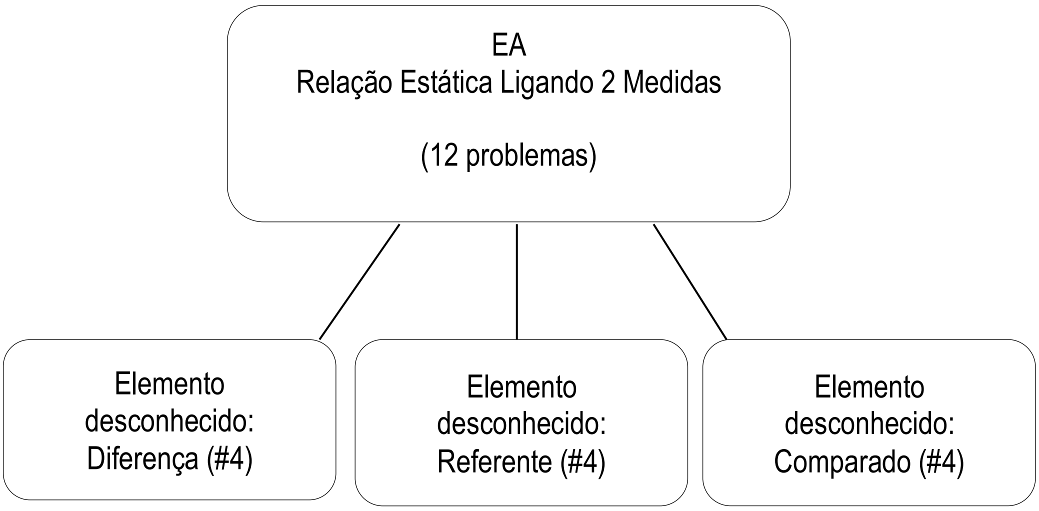


Figura 24: Número de problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas.

As Tabelas 15 a 18 apresentam um exemplo de cada tipo de problemas de estrutura aditiva proposto às crianças durante as entrevistas individuais (adaptados de Vergnaud, 1982, 1986; Riley et al., 1983; Carpenter et al., 1999).

Tabela 15 - Problemas de Composição de Duas Medidas apresentados às crianças do Grupo 1 - estrutura aditiva (EA).

PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA		
Tipo de Problema	**Elemento Desconhecido/ Direção**	**Exemplo**
Composição de Duas Medidas	Todo	A cadelinha da Inês teve cachorrinhos. Ela teve 5 brancos e 3 castanhos. Quantos cachorrinhos teve, ao todo, a cadelinha da Inês?
	Parte	O Paulo tem 7 brinquedos, 5 estão fora da caixa. Quantos estão dentro da caixa?

Tabela 16 - Problemas de Transformação Ligando Duas Medidas apresentados às crianças do Grupo 1 - estrutura aditiva (EA).

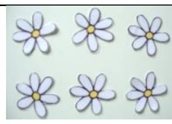
PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA			
Tipo de Problema	**Elemento Desconhecido/ Direção**		**Exemplo**
Transformação Ligando Duas Medidas	Resultado	Adição	A mãe da Francisca deu-lhe 4 coelhinhos de chocolate. Mais tarde deu-lhe mais 3. Quantos coelhinhos tem agora a Francisca?
		Subtração	O Rui tinha 7 rebuçados, deu 5 à sua irmã. Quantos tem agora?
	Transformação	Adição	O bibe da Maria tinha 4 botões. A mãe coseu mais alguns. Agora o bibe tem 6. Quantos botões coseu a mãe?
		Subtração	O Paulo tinha 5 rebuçados, comeu alguns e ficou com 3. Quantos rebuçados comeu?
	Início	Adição	A Joana tinha algumas bonecas, a tia deu-lhe mais 3 e agora ela tem 8. Quantas bonecas tinha a Joana no início?
		Subtração	A Ana tinha alguns rebuçados, deu 3 à sua mãe e ficou com 2. Quantos rebuçados tinha a Ana no início?

Tabela 17 - Problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas apresentados às crianças do Grupo 1 - estrutura aditiva (EA).

PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA			
Tipo de Problema	**Elemento Desconhecido/ Direção**		**Exemplo**
Relação Estática Ligando Duas Medidas	Diferença	Adição	Numa casa há 7 portas e 3 chaves. Quantas portas há a mais do que chaves?
		Subtração	Numa festa o Tiago recebeu 5 carrinhos e o Rui recebeu 2 aviões. Quantos aviões há a menos do que carros?
	Comparado	Adição	A Maria tem 3 flores. A Rita tem mais 2 do que a Maria. Quantas flores tem a Rita?
		Subtração	A Laura tem 5 bonecas. A Rosa tem menos 2 do que a Laura. Quantas bonecas tem a Rosa?
	Referente	Adição	O Paulo tem mais 2 carros do que o Tiago. O Tiago tem 4. Quantos carros tem o Paulo?
		Subtração	O João tem menos 2 balões do que o Miguel. O Miguel tem 7 balões. Quantos balões tem o João?

Tabela 18 - Problemas de estrutura aditiva (EA) apresentados às crianças do Grupo 1.

PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA			
TIPO DE PROBLEMA	**EXEMPLO**		**MATERIAIS**
Composição de Duas Medidas	A cadelinha da Inês teve cachorrinhos. Ela teve 5 brancos e 3 castanhos. Quantos cachorrinhos teve, ao todo, a cadelinha da Inês?	5+3=?	
	O Paulo tem 7 brinquedos, 5 estão fora da caixa. Quantos estão dentro da caixa?	7=5+?	

Transformação Ligando Duas Medidas	A mãe da Francisca deu-lhe 4 coelhinhos de chocolate. Mais tarde deu-lhe mais 3. Quantos coelhinhos tem agora a Francisca?	4+3=?	
	O Rui tinha 7 rebuçados, deu 5 à sua irmã. Quantos tem agora?	7-5=?	
	O bibe da Maria tinha 4 botões. A mãe coseu mais alguns. Agora o bibe tem 6. Quantos botões coseu a mãe?	4+?=6	
	O Paulo tinha 5 rebuçados, comeu alguns e ficou com 3. Quantos rebuçados comeu?	5-?=3	
	A Joana tinha algumas bonecas, a tia deu-lhe mais 3 e agora ela tem 8. Quantas bonecas tinha a Joana no início?	?+3=8	
	A Ana tinha alguns rebuçados, deu 3 à sua mãe e ficou com 2. Quantos rebuçados tinha a Ana no início?	?-3=2	
Relação Estática Ligando Duas Medidas	Numa casa há 7 portas e 3 chaves. Quantas portas há a mais do que chaves?	7 e 3	
	Numa festa o Tiago recebeu 5 carrinhos e o Rui recebeu 2 aviões. Quantos aviões há a menos do que carros?	5 e 2	
	A Maria tem 3 flores. A Rita tem mais 2 do que a Maria. Quantas flores tem a Rita?	3 +2	
	A Laura tem 5 bonecas. A Rosa tem menos 2 do que a Laura. Quantas bonecas tem a Rosa?	5 -2	
	O Paulo tem mais 2 carros do que o Tiago. O Tiago tem 4. Quantos carros tem o Paulo?	+2 4	
	O João tem menos 2 balões do que o Miguel. O Miguel tem 7 balões. Quantos balões tem o João?	-2 7	

Nas tarefas de estrutura multiplicativa foram considerados os problemas de Isomorfismo de Medidas e Produto de Medidas, ficando por considerar os problemas de Proporção Múltipla, por não se considerar este tipo de problemas adequado a crianças de pré-escolar, sendo de difícil resolução até por crianças de 8 anos (Bryant et al., 1992). Às crianças que integraram o Grupo 2, cuja proposta recaía sobre problemas de estrutura multiplicativa, foi-lhes solicitado que resolvessem 12 problemas (oito de Isomorfismo de Medidas e quatro de Produto de Medidas), atendendo ainda ao elemento desconhecido em cada tipo, conforme mostram as Figuras 25 e 26.

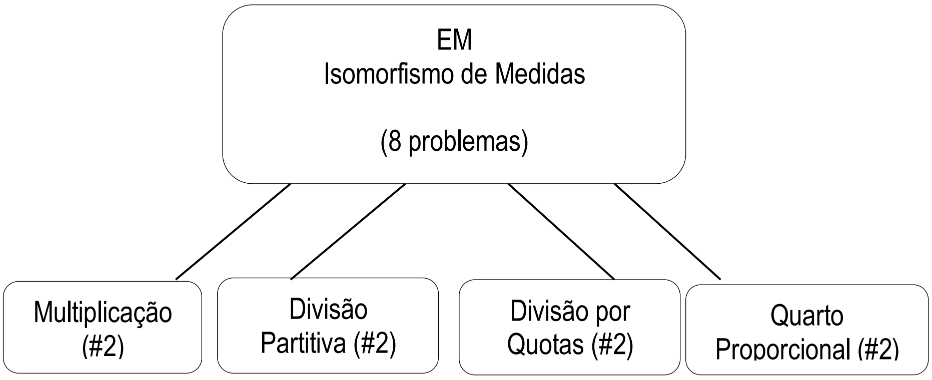


Figura 25: Número de problemas de Isomorfismo de Medidas.

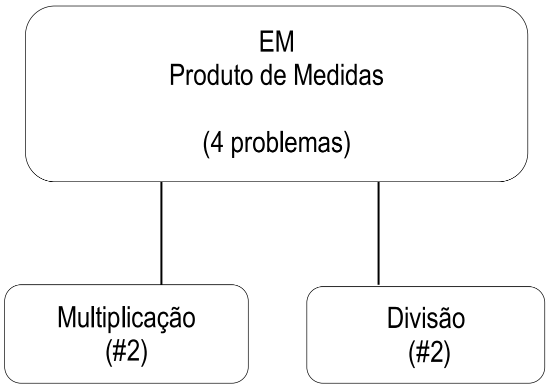


Figura 26: Número de problemas de Produto de Medidas.

As Tabelas 19 a 21 retratam exemplos de problemas de estrutura multiplicativa (adaptados de Vergnaud, 1983; Nesher, 1988; Nunes et al., 2005) apresentados às crianças neste estudo.

Tabela 19 - Problemas de Isomorfismo de Medidas apresentados às crianças do Grupo 2 - estrutura multiplicativa (EM).

PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA		
Tipo de Problema	**Elemento Desconhecido**	**Exemplo**
Isomorfismo de Medidas	Multiplicação	Nesta rua há 3 casinhas. Em cada casinha moram 2 coelhinhos. Quantos coelhinhos moram, ao todo, nas 3 casinhas?
	Divisão Partitiva	Tens estes grãos de milho (12) para dar a 3 pintainhos. Todos têm que comer a mesma quantidade. Quantos grãos de milho vai comer cada pintainho?
	Divisão por Quotas	O Pedro tem estes balões (15) para dar aos amigos. Cada amigo vai receber 3 balões. A quantos amigos ele vai dar balões?
	Quarto Proporcional	Quando faço sopa para mim (1 pessoa) coloco 2 batatas. Se eu quiser fazer sopa para 3 pessoas, quantas batatas tenho que colocar?

Tabela 20 - Problemas de Produto de Medidas apresentados às crianças do Grupo 2 - estrutura multiplicativa (EM).

PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA		
Tipo de Problema	**Elemento Desconhecido**	**Exemplo**
Produto de Medidas	Multiplicação	Três meninos e 2 meninas estão num baile. Todos os meninos querem dançar com todas as meninas. Quantos pares se conseguem fazer?
	Divisão	A Rosa consegue vestir 6 roupas diferentes com 3 saias e algumas camisolas. De quantas camisolas ela precisa?

Tabela 21 - Problemas de estrutura multiplicativa apresentados às crianças do Grupo 2 – estrutura multiplicativa (EM).

PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA			
TIPO DE PROBLEMA	**EXEMPLO**		**MATERIAIS**
Isomorfismo de Medidas	Nesta rua há 3 casinhas. Em cada casinha moram 2 coelhinhos. Quantos coelhinhos moram, ao todo, nas 3 casinhas?	3X2=?	
	Tens estes grãos de milho (12) para dar a 3 pintainhos. Todos têm que comer a mesma quantidade. Quantos grãos de milho é que vai comer cada pintainho?	12:3=?	
	O Pedro tem estes balões (15) para dar aos amigos. Cada amigo vai receber 3 balões. A quantos amigos ele vai dar balões?	15:?=3	
	Quando faço sopa para mim (1 pessoa) coloco 2 batatas. Se eu quiser fazer sopa para 3 pessoas, quantas batatas tenho que colocar?	1 – 2 3 - ?	
Produto de Medidas	Três meninos e 2 meninas estão num baile. Todos os meninos querem dançar com todas as meninas. Quantos pares se conseguem fazer?	3X2=?	
	A Rosa consegue vestir 6 roupas diferentes com 3 saias e algumas camisolas. De quantas camisolas ela precisa?	6=3X?	

Houve a preocupação de que todas as crianças resolvessem igual número de problemas de cada tipo, dois problemas de cada tipo, o que resultou em diferente número de problemas propostos em cada grupo de crianças. A diferença na quantidade dos problemas propostos, em cada estrutura de raciocínio deve-se à classificação adotada, de Vergnaud (1982, 1983), que aponta para várias classes de problemas dentro de cada tipo, com número diferente, consoante: (a) o elemento desconhecido dentro do problema; (b) a direção da transformação ou da relação, positiva ou negativa; (c) das relações que se estabelecem, no caso dos problemas de estrutura multiplicativa.

3.4. Os procedimentos adotados

O questionário foi aplicado sob a forma de entrevista estruturada, com final aberto. As entrevistas decorreram no Jardim de Infância que as crianças frequentavam, numa sala cedida para esse efeito, uma vez que era pretensão da investigadora que as crianças estivessem num ambiente o mais familiar possível, de forma a não haver constrangimentos por um ambiente estranho que pudessem comprometer os resultados.

Os participantes responderam às mesmas questões, apresentadas pela mesma ordem, de forma a aumentar a possibilidade de comparar resultados (Tuckman, 2000). A ordem das questões foi pré-estabelecida, igual para todas as crianças, determinada em função do grau de dificuldade relatado em estudos prévios realizados com crianças de outras idades. Assim, na aplicação dos questionários, os problemas apresentados seguiram a ordem pré-definida (ver Anexo 1, pp. 435-447).

A entrevista foi aplicada com recurso a histórias e à concretização com materiais. Foram disponibilizados, desde o início da entrevista, materiais manipuláveis alusivos às tarefas para concretizar os problemas propostos, caso as crianças assim o entendessem. A entrevistadora colocava os materiais necessários à resolução de cada problema em cima da mesa, para que a criança os explorasse livremente e não constituíssem um fator distrator no decorrer da resolução. Posteriormente, a entrevistadora apresentava o enunciado do problema sob a forma de história e solicitava à criança a descoberta da resposta.

Ao longo da resolução a entrevistadora não emitia qualquer juízo de valor, verbal ou expressivo, para não influenciar nem condicionar o pensamento da criança. Era garantido que esta tinha entendido o enunciado, e caso mostrasse ter esquecido as quantidades envolvidas no problema, a entrevistadora relembrava o problema.

Quando a criança chegava a um resultado, a entrevistadora solicitava-lhe que explicasse o seu procedimento e justificasse o melhor possível a sua resposta. As questões “como fizeste?” e “porque dizes que é …?” eram colocadas em todos os problemas e a todas as crianças, independentemente do resultado estar correto ou incorreto.

No Grupo 1 (EA), cada criança foi desafiada a resolver 4 problemas de Composição de Duas Medidas, 12 problemas de Transformação Ligando Duas Medidas e 12 problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, no âmbito dos problemas de restrutura aditiva. No grupo 2 (GEM), cada criança foi solicitada a resolver 8 problemas de Isomorfismo de Medidas e 4 problemas de Produto de Medidas. Atendendo ao elevado número de problemas propostos de estrutura aditiva, cada criança foi entrevistada em dois momentos, com um dia de intervalo entre o 1.º momento e o 2.º, para todas as crianças que resolveram este tipo de problemas, tendo cada entrevista demorado aproximadamente de 20 minutos.

3.5. A recolha de dados

A recolha de dados foi efetuada com recurso a uma câmara de vídeo e a notas de campo da investigadora. Com crianças tão pequenas, quanto as participantes neste estudo, não seria possível recolher os dados o mais completamente possível sem recorrer a imagens de vídeo, como forma de registar todos os detalhes dos seus desempenhos e verbalizações. As crianças de pré-escolar usam variadas linguagens para expressar o seu pensamento, desde verbalizações completas, às monossilábicas, passando pelos gestos e expressões. A câmara de vídeo, apesar das suas limitações, como a restrição do campo visual, e captação de ruídos (ver Roschelle, Jordan, Greeno, Katzenberg, & Del Carlo, 1991), assume-se como uma ferramenta que consegue captar os detalhes necessários para a recolha de dados. Como complementaridade, a investigadora recorreu a notas pessoais (Savoie-Zajc, 2003). Para além de salvaguardarem a recolha de informação em caso de avaria técnica do instrumento de vídeo, permitem o registo de aspetos que se pretendem ver esclarecidos pela criança, além de que possibilitam também um registo das reações das crianças durante a entrevista, das expressões verbais e não-verbais portadoras de mensagem e que, por limitação do campo visual da câmara de vídeo ou alteração da postura das crianças, podem não ficar registados com a videografia.

3.6. Validade

Uma pesquisa possui validade externa quando possibilita a generalização dos resultados obtidos, para outros indivíduos. Os problemas que integraram as propostas neste estudo foram adaptados de outros, aplicados por investigadores em estudos internacionais. Assim, foi passado um teste piloto para aferir os termos e linguagem dos problemas, de forma a serem ajustados às crianças do pré-escolar da realidade nacional. Daqui resultaram alguns ajustes, quer na linguagem, quer no tipo de problemas a apresentar às crianças.

A validade externa considera, ainda, a relação que existe entre os resultados dos participantes num item do teste e o seu desempenho numa outra situação, fora do teste. Em situações de investigação sobre o desempenho dos participantes, recorre-se, geralmente, e conforme o grupo de sujeitos, às suas avaliações escolares (Almeida & Freire, 2003). Nesta investigação, atendendo à idade dos participantes e porque às crianças em idade pré-escolar não é possível obter a sua avaliação em termos quantitativos, recorreu-se a uma avaliação das educadoras acerca do seu raciocínio. Desta forma, a validade externa foi garantida pela correlação estabelecida entre os resultados no teste e a avaliação do raciocínio das crianças feita pelas suas educadoras, atendendo ao que era esperado para cada nível etário. Numa escala de tipo Likert, cujos valores variaram entre 1 (*raciocínio muito abaixo da média*) e 5 (*raciocínio muito acima da média*), as educadoras classificaram o raciocínio de cada criança, mediante a sua avaliação do conhecimento que detinham dela no seu contacto diário. Foi estabelecida uma correlação entre as variáveis, do que o teste de correlação de Spearman indica a existência de uma correlação positiva forte, ρ=0,8, p<.001, para os problemas de estrutura aditiva como para os problemas de estrutura multiplicativa, indicando que, quanto melhor é avaliado o raciocínio das crianças, de acordo com o que é esperado para o seu nível etário, melhor é o seu desempenho nas tarefas apresentadas. Foi usado o teste de correlação de Spearman uma vez que distribuição do nível dos resultados das crianças viola os pressupostos da normalidade, tanto nos problemas de estrutura aditiva, como nos problemas de estrutura multiplicativa.

A validade interna, capacidade que o instrumento utilizado tem para medir o que efetivamente pretende medir (Almeida & Freire, 2003), e a homogeneidade dos itens do questionário, foi obtida avaliando a consistência interna dos problemas apresentados, em cada estrutura de raciocínio, com recurso à estatística através do cálculo do coeficiente alfa de Cronbach.

3.7. Análise dos dados

Os dados recolhidos foram analisados com recurso ao software de estatística Statistical Package for Social Sciences (SPSS), versão 20.

4. Resultados

A análise dos resultados organiza-se em duas grandes partes. Uma primeira parte, centrada na análise dos resultados dos problemas de estrutura aditiva, procura dar resposta às questões: (a) que desempenhos apresentam as crianças; (b) que estratégias usam para resolver os problemas apresentados; (c) que argumentos utilizam para as opções tomadas na sua resolução. Uma segunda parte, focada na análise dos resultados dos problemas de estrutura multiplicativa, procura responder às questões: (a) que desempenhos apresentam as crianças; (b) que estratégias usam na resolução dos problemas propostos; (c) que argumentos utilizam para justificar as suas opções na resolução.

Assim, este item começa por analisar os desempenhos, estratégias e argumentos dos problemas de estrutura aditiva, seguindo-se uma análise análoga para os problemas de estrutura multiplicativa.

4.1. Análise dos resultados dos problemas de estrutura aditiva

Com vista a avaliar a consistência interna dos problemas de estrutura aditiva realizados com as crianças, aplicou-se o teste estatístico alfa de Cronbach, tendo-se obtido um valor de α=0.92, o que corresponde a uma consistência interna excelente (ver George & Mallery, 2003), sendo então possível proceder à análise dos itens do questionário de estrutura aditiva.

4.1.1. Desempenho das crianças na resolução dos problemas propostos

Para cada criança foram contabilizadas as resoluções certas e erradas em cada problema, de acordo com a classificação adotada: Composição de Duas Medidas, Transformação Ligando Duas Medidas e Relação Estática Ligando Duas Medidas, atribuindo 1 valor a cada resposta certa e 0 a cada resposta errada. A Tabela 22 resume a média das proporções das respostas certas e o desvio padrão dos problemas de estrutura aditiva propostos de acordo com a idade.

Os problemas em que as crianças demonstraram maiores taxas de sucesso na sua resolução, em todas as idades, foram os problemas de Composição de Duas Medidas e de Transformação Ligando Duas Medidas. Os problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas foram os mais difíceis de resolver por crianças desta idade.

Tabela 22 - Média das proporções (desvio padrão) das respostas corretas das crianças na resolução dos problemas de estrutura aditiva.

	MÉDIA (desvio padrão)		
TIPO DE PROBLEMAS	**4 anos** (n=30)	**5 anos** (n=30)	**6 anos** (n=30)
Composição Ligando Duas Medidas	.41 (.29)	.48 (.25)	.74 (.22)
Transformação Ligando Duas Medidas	.42 (.21)	.51 (.23)	.72 (.19)
Relação Estática Ligando Duas Medidas	.06 (.15)	.13 (.19)	.37 (.31)

A estatística descritiva sugere diferenças no desempenho das crianças nos diferentes tipos de problemas propostos sobre estrutura aditiva. Os problemas de Composição de Duas Medidas e os de Transformação Ligando Duas Medidas parecem ser mais acessíveis do que os de Relação Estática Ligando Duas Medidas. Também sugere que as crianças mais velhas têm um desempenho superior às mais novas nos três tipos de problemas.

4.1.1.1. De acordo com o tipo de problema

Uma análise do número de problemas resolvidos corretamente, de acordo com a idade, permite ter uma ideia sobre o sucesso que as crianças dos 4 aos 6 anos apresentam na resolução dos diferentes tipos de problemas de estrutura aditiva aqui analisados. Percebe-se que os problemas com menor taxa de sucesso são os problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas e parece não ser difícil para as crianças destas idades a resolução de problemas de Composição de Duas Medidas e de Transformação Ligando Duas Medidas. Os Gráficos 1 a 3 apresentam, respetivamente, a distribuição do número de respostas certas para cada tipo de problemas apresentado, de acordo com a idade. Consegue-se perceber a diferença de desempenho das crianças nos diferentes tipos de problemas, e a sua variabilidade de acordo com a idade.

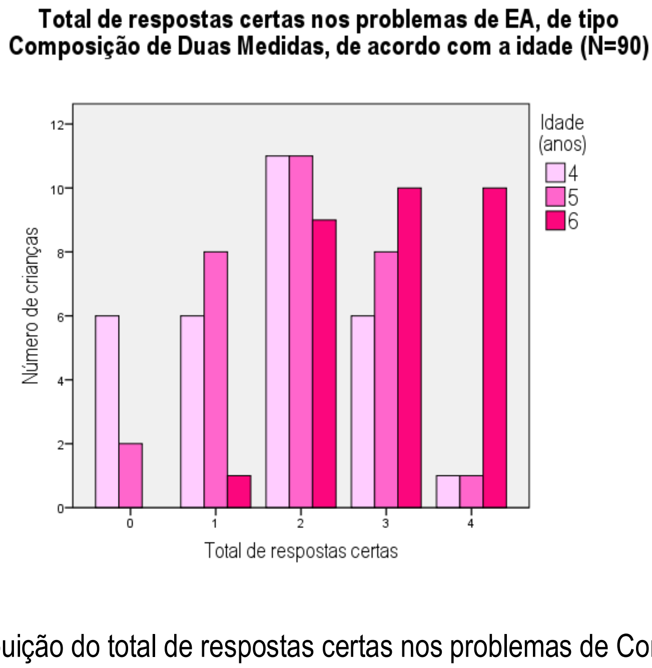


Gráfico 1: Distribuição do total de respostas certas nos problemas de Composição de Duas Medidas, de acordo com a idade.

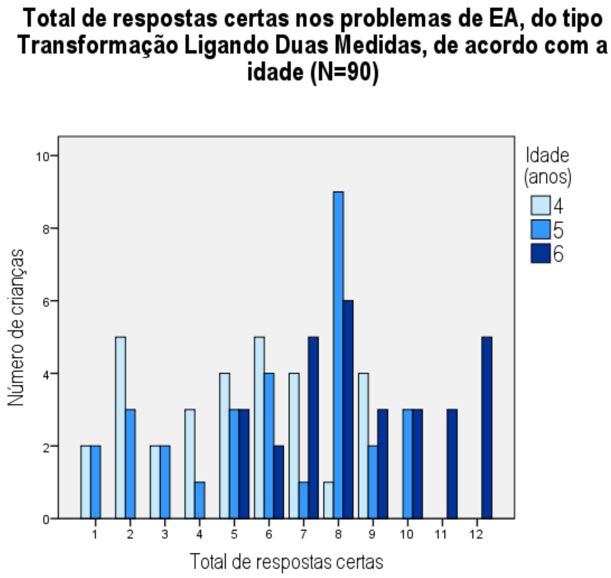


Gráfico 2: Distribuição do total de respostas certas nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas, de acordo com a idade.

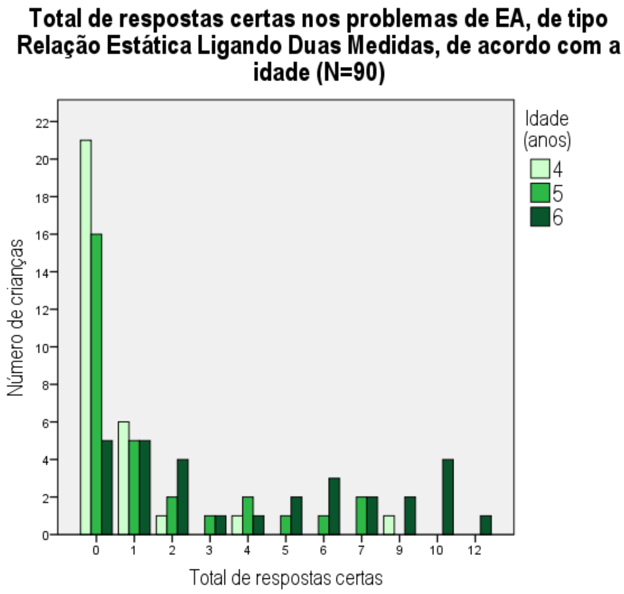


Gráfico 3: Distribuição do total de respostas certas nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, de acordo com a idade.

Nos problemas de Composição de Duas Medidas, observa-se que a maior parte das crianças de 6 anos acertou mais de metade dos problemas e salienta-se uma criança de 4 anos que acertou a totalidade das tarefas propostas para este tipo de problema. Ainda assim, seis crianças desta idade não acertaram nenhum problema deste tipo. De referir ainda que a maioria das crianças de 5 anos resolveu com sucesso pelo menos metade dos problemas propostos.

Nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas, verifica-se que todas as crianças de 4 e 5 anos conseguiram resolver corretamente pelo menos um problema deste tipo e as crianças de 6 anos resolveram corretamente pelo menos 5 problemas. Observa-se que quatro crianças de 4 anos resolveram com sucesso 75% dos problemas apresentados, cinco crianças de 6 anos acertaram 100% dos problemas propostos e metade das crianças de 5 anos responderam corretamente a mais 50% dos problemas propostos.

Os problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas foram os que obtiveram menor taxa de sucesso, sendo considerados os mais difíceis de resolver por crianças desta idade. Apesar do baixo sucesso observado em todas as idades, variando entre os 6%, os 13% e os 37% para os 4, 5 e 6 anos respetivamente, dá-se conta de uma criança de 4 anos que conseguiu resolver corretamente nove dos 12 problemas apresentados, o que corresponde a 75% dos problemas propostos, e nove crianças de 6 anos que resolveram corretamente mais de metade dos problemas, havendo mesmo uma criança desta idade que apresentou 100% de resoluções corretas em todos os problemas propostos.

Avaliou-se a normalidade das distribuições recorrendo ao teste Kolmogorov-Smirnov, e a homogeneidade de variâncias recorrendo ao teste de Levene, dos resultados obtidos nos problemas de estrutura aditiva. Optou-se por recorrer a testes não paramétricos devido à violação das condições de normalidade e homogeneidade das variâncias. A distribuição dos desempenhos das crianças difere significativamente da distribuição normal, para os problemas de Composição de Duas Medidas (K-S (90) = 0.179, p <.001), Transformação Ligando Duas Medidas (K-S (90) = 0.115, p <.05), e Relação Estática Ligando Duas Medidas (K-S (90) = 0.292, p <.001).

Considerando a violação do pressuposto da normalidade da distribuição dos resultados, recorrer-se-á a testes estatísticos não paramétricos. Apesar de considerados, correntemente, como menos potentes do que os seus correspondentes testes paramétricos, os testes estatísticos não paramétricos assumem-se como mais robustos quando não se verificam os pressupostos de aplicação dos testes paramétricos (Marôco, 2010).

Para avaliar se existem diferenças significativas no desempenho das crianças, nos diversos tipos de problemas de estrutura aditiva, de acordo com a idade, recorreu-se ao teste não paramétrico de Kruskal-Wallis, teste utilizado para comparar as distribuições de duas ou mais variáveis em duas ou mais amostras independentes (Marôco, 2010), verificando o efeito de uma variável sobre outra (Pestana & Gageiro, 2000).

O teste de amostras independentes de Kruskal-Wallis sugere a existência de diferenças significativa no desempenho das crianças, em todos os tipos de problemas, de acordo com a idade: nos problemas de Composição de Duas Medidas, $\chi^2_{kw}(2) = 21.159$, $p<.001$; nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas, $\chi^2_{kw}(2) = 22.484$, $p<.001$; e nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, χ^2_{kw} (2) = 24.454, $p<.001$. A diferença estatisticamente significativa verifica-se entre os 4 e os 6 anos (problemas de Composição de Duas Medidas, χ^2_{kw} = -28,050, $p<.001$; problemas de Transformação Ligando Duas Medidas, χ^2_{kw}= -31,233, $p<.001$; problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, χ^2_{kw}= -30,617, $p<.001$) e entre os 5 e os 6 anos (problemas de Composição de Duas Medidas, χ^2_{kw}= -23,150, $p<.05$; problemas de Transformação Ligando Duas Medidas, χ^2_{kw}= -20,717, $p<.05$; problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, χ^2_{kw}= -21,733, $p<.05$). Entre os 4 e os 5 anos não se verificam diferenças estatisticamente significativas, em nenhum dos tipos de problemas (problemas de Composição de Duas Medidas, χ^2_{kw}= -4,900, n.s; problemas de Transformação Ligando Duas Medidas, χ^2_{kw}= -10,517, n.s; problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, χ^2_{kw}= -8,883, n.s).

Os resultados sugerem que o tipo de problema afeta a compreensão da situação apresentada e, consequentemente, o raciocínio aditivo da criança, influenciando o seu desempenho nessa resolução. O estudo da relevância das diferenças de desempenho das crianças, de acordo com o tipo de problema, requer mais análise. Estudos sugerem que a complexidade dos problemas depende da interpretação que as crianças fazem das relações que são estabelecidas nos problemas. Apontam também que o elemento que é desconhecido no problema determina a operação de pensamento necessária à sua resolução. Enunciados que refiram claramente a operação requerida para a solução são considerados mais fáceis do que aqueles em que é necessário o reconhecimento da relação inversa entre as operações. Importa perceber as diferenças de desempenho das crianças nos três tipos de problemas de estrutura aditiva, de acordo com o elemento desconhecido.

4.1.1.2. De acordo com o elemento ausente

No sentido de perceber se as crianças resolviam com igual sucesso os problemas propostos, de acordo com o elemento ausente em cada tipo, conduziu-se uma análise mais detalhada, em cada tipo de problemas de estrutura aditiva.

O caso dos problemas de Composição de Duas Medidas

Apesar da facilidade com que as crianças resolveram os problemas de Composição de Duas Medidas, assumem-se como mais difíceis de resolver os problemas cujo elemento desconhecido é a parte, observando-se um maior número de crianças de todas as idades a errar todos os problemas de Composição de Duas Medidas com a parte desconhecida (10 crianças de 6 anos, 18 de 5 anos e 22 de 4 anos), conforme é possível observar nos Gráficos 4 e 5. Observa-se que os problemas de Composição de Duas Medidas com o todo desconhecido foram resolvidos com grande sucesso pela maioria das crianças. Apenas 10 crianças, das 90 participantes não conseguiram resolver nenhum problema deste tipo, sendo que dessas, sete tinham 4 anos.

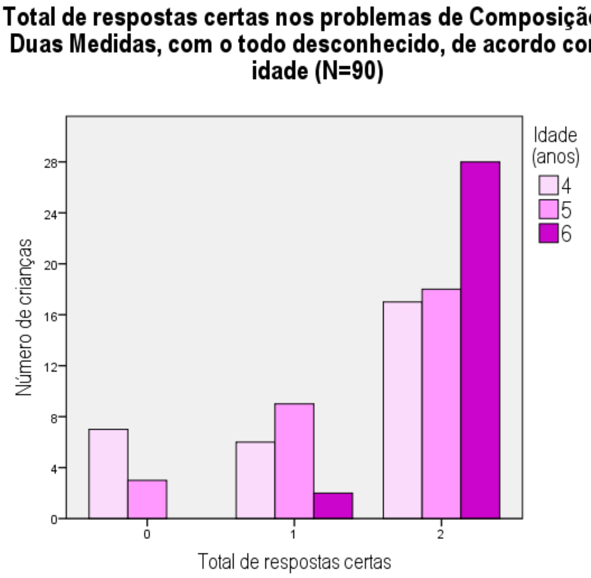


Gráfico 4: Distribuição do total de respostas certas nos problemas de Composição de Duas Medidas, com o todo desconhecido, de acordo com a idade.

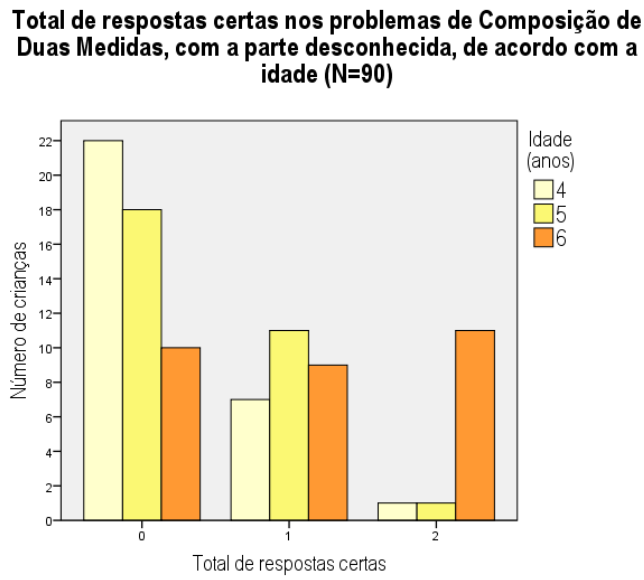


Gráfico 5: Distribuição do total de respostas certas nos problemas de Composição de Duas Medidas, com a parte desconhecida, de acordo com a idade.

Foi conduzido o teste de amostras independentes de Kruskal-Wallis para aferir a influência da idade no desempenho das crianças na resolução de problemas deste tipo, de acordo com o elemento ausente. Verificou-se que o desempenho das crianças difere de acordo com a idade, tanto nos problemas de Composição de Duas Medidas com o todo desconhecido ($\chi^2_{kw}(2)$ = 14.678, p<.05), como nos problemas de Composição de Duas Medidas com a parte desconhecida ($\chi^2_{kw}(2)$ = 12.256, p<.05), sendo que as crianças que têm melhor desempenho são as de 6 anos. As diferenças de desempenho estatisticamente significativas verifica-se entre os 4 e os 6 anos e entre os 5 e os 6 anos, independentemente de qual o elemento desconhecido neste tipo de problemas (p<.05). Entre os 4 e os 5 anos não se verificam diferenças significativas de desempenho de acordo com o elemento ausente, (com o todo desconhecido, χ^2_{kw}= -5,133, n.s.; com a parte desconhecida, χ^2_{kw} = -3,133, n.s.).

O caso dos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas

Neste tipo de problemas, os que obtiveram maiores níveis de sucesso foram os problemas cujo elemento ausente era o resultado, registando níveis de acerto de 100% em todas as idades, como se pode observar nos Gráficos 6 a 8.

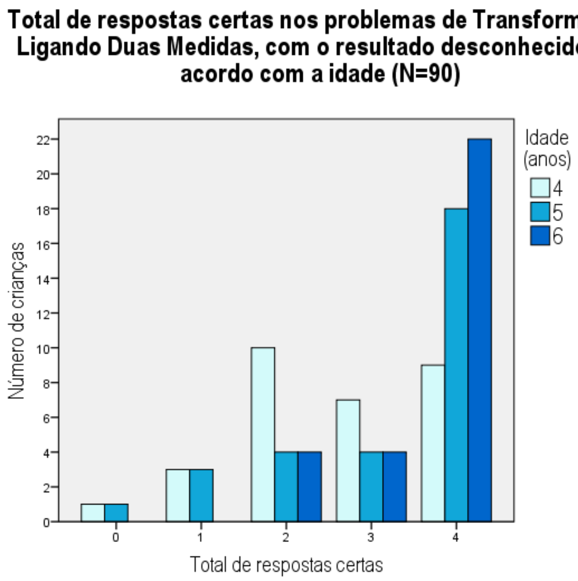


Gráfico 6: Distribuição do total de respostas certas nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas, com o resultado desconhecido, de acordo com a idade.

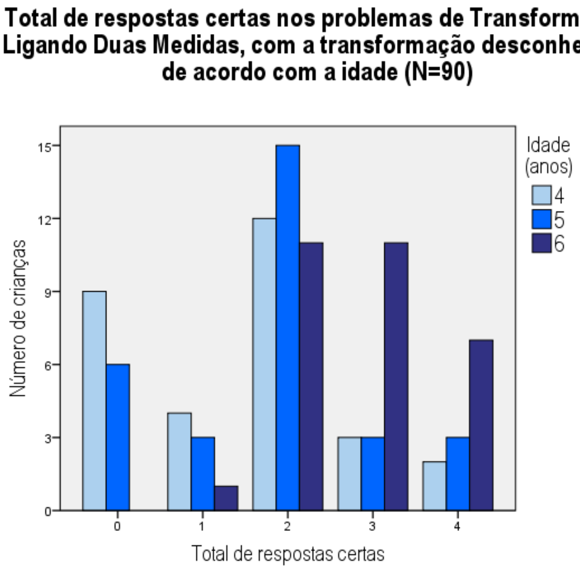


Gráfico 7: Distribuição do total de respostas certas nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas, com a transformação desconhecida, de acordo com a idade.

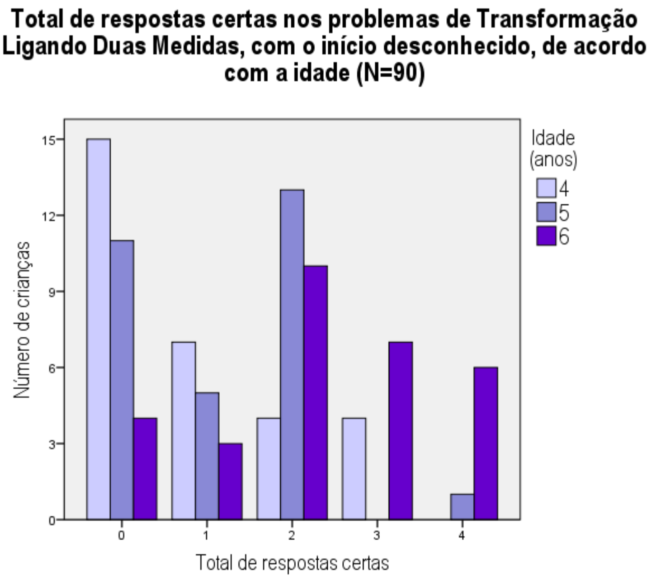


Gráfico 8: Distribuição do total de respostas certas nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas, com o início desconhecido, de acordo com a idade.

Os problemas com o início desconhecido foram aqueles onde se observaram maiores taxas de insucesso, sobretudo nas crianças de 4 anos, sendo que metade destas crianças não conseguiu responder corretamente a nenhum dos problemas deste tipo. Mais de 1/3 das crianças de 5 anos erraram todos estes problemas e 50% das crianças de 6 anos acertaram pelo menos metade deles. Apenas 20% das crianças de 6 anos resolveram corretamente a totalidade dos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com o início desconhecido.

Nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com a transformação desconhecida as crianças acertaram pelo menos metade dos problemas propostos. E apesar de se registarem casos de crianças de 4 e 5 anos a errarem todos estes problemas, também se observam crianças de 4, 5 e 6 anos a resolver corretamente todos estes problemas propostos com a transformação desconhecida.

Independentemente do elemento desconhecido neste tipo de problemas, o desempenho foi afetado pela idade dos participantes, de acordo com o teste de Kruskal-Wallis (nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com o resultado desconhecido, $\chi^2_{kw}(2) = 12.045$, $p<.05$; nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com o início desconhecido, $\chi^2_{kw}(2) = 18.085$, $p<.05$; e nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com o elemento de transformação desconhecido, $\chi^2_{kw}(2) = 19.573$, $p<.05$). Nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com o resultado desconhecido, verificam-se diferenças de desempenho estatisticamente significativas apenas entre os 4 e os 6 anos ($\chi^2_{kw} = -21,100$, $p<.05$).

Tanto nos problemas com a transformação desconhecida como nos problemas com o início desconhecido, a diferença estatisticamente significativa regista-se no desempenho das crianças de 5 e 6 anos (nos problemas com a transformação desconhecida, $\chi^2_{kw}=-21,367$, $p<.05$; nos problemas com o início desconhecido, $\chi^2_{kw}=-20,650$, $p<.05$), e entre os 4 e os 6 anos (nos problemas com a transformação desconhecida, $\chi^2_{kw}=-26,983$, $p<.001$; nos problemas com o início desconhecido, $\chi^2_{kw}=-26,250$, $p<.001$). Entre os 4 e os 5 anos não se verificam diferenças estatisticamente significativas de desempenho nos problemas mencionados (com a transformação desconhecida, $\chi^2_{kw} = -5,617$, n.s.; com o início desconhecido, $\chi^2_{kw} = -5,600$, n.s.).

O caso dos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas

Este tipo de problemas foi o que apresentou menores níveis de sucesso, quando comparado com os problemas de Composição de Duas Medidas e os de Transformação Ligando Duas Medidas. No entanto, em todos os grupos etários houve crianças que resolveram corretamente este tipo de problemas, independentemente do elemento desconhecido (ver Gráficos 9 a 11).

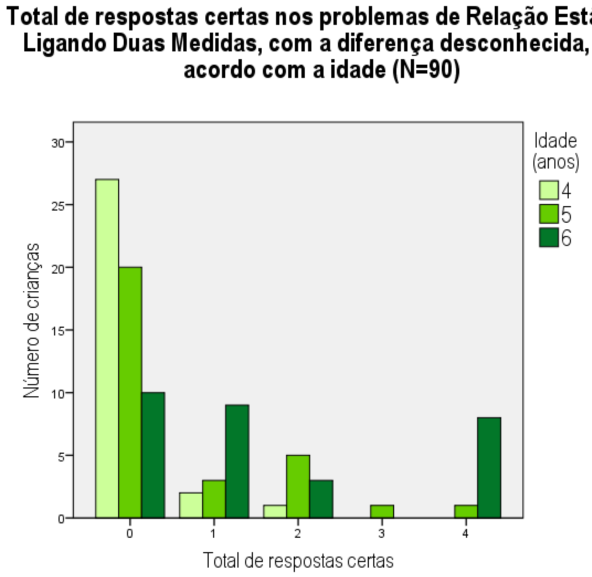


Gráfico 9: Distribuição do total de respostas certas nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, com a diferença desconhecida, de acordo com a idade.

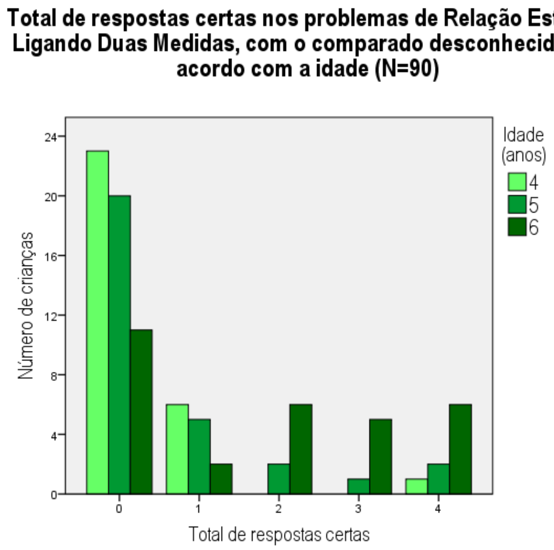


Gráfico 10: Distribuição do total de respostas certas nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, com o comparado desconhecido, de acordo com a idade.

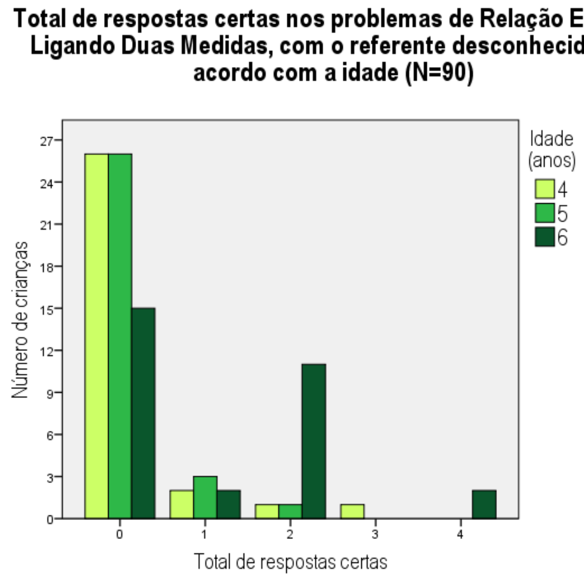


Gráfico 11: Distribuição do total de respostas certas nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, com o referente desconhecido, de acordo com a idade.

Neste tipo de problemas, os que apresentaram maiores taxas de sucesso foram os problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas com o elemento comparado desconhecido. Aqui se observam 36 crianças, das 90 participantes, a resolverem corretamente os problemas propostos. Os que foram considerados como mais difíceis, dado o pouco sucesso nas respostas foram os problemas com o referente desconhecido. Apenas 23 crianças, das 90, conseguiram resolver alguns dos problemas propostos. Ainda assim, consegue-se observar duas crianças de 6 anos que conseguiram resolver todos os problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas com o referente desconhecido. No entanto, este valor de acerto da totalidade dos problemas propostos é inferior aos problemas com o comparado desconhecido (onde seis crianças de 6 anos, duas de 5 anos e uma de 4 anos conseguiram resolvê-los com 100% de sucesso) e aos problemas com a diferença desconhecida (onde oito crianças de 6 anos e uma de 5 anos resolveram corretamente todos os problemas deste tipo).

À semelhança do que foi anteriormente realizado, importa perceber se a idade das crianças afeta de forma distinta o seu desempenho, mediante o elemento ausente. De acordo com o teste de Kruskal-Wallis, pode-se observar que o desempenho das crianças é influenciado pela idade, independentemente do elemento desconhecido, crianças mais velhas, de 6 anos, têm melhor desempenho do que as crianças mais novas, 4 e 5 (diferença desconhecida, $\chi^2_{kw}(2) = 21.229$, $p<.001$; comparado desconhecido, $\chi^2_{kw}(2) = 15.664$, $p<.001$; referente desconhecido, $\chi^2_{kw}(2) = 16.000$, $p<.001$).

Independentemente do elemento desconhecido nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, não se registam diferenças estatisticamente significativas de desempenho entre as crianças de 4 e 5 anos. Estas ocorrem entre os 4 e os 6 anos (diferença desconhecida, $\chi^2_{kw}= -26{,}617$, $p<.001$; comparado desconhecido, $\chi^2_{kw}= -22{,}583$, $p<.001$; referente desconhecido, $\chi^2_{kw}= -18{,}133$, $p<.05$); e entre os 5 e os 6 anos (diferença desconhecida, $\chi^2_{kw}= -15{,}533$, n.s.; comparado desconhecido, $\chi^2_{kw}= -17{,}117$, n.s.; referente desconhecido, $\chi^2_{kw}= -17{,}567$, $p<.05$).

Em suma, após uma análise aos resultados das crianças nos diferentes tipos de problemas de estrutura aditiva, pode-se concluir que: i) O tipo de problemas afeta o desempenho das crianças, o sucesso na resolução dos problemas de Composição de Duas Medidas e de Transformação Ligando Duas Medidas é superior ao que é observado nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas. Por sua vez, os problemas de Composição de Duas Medidas parecem ser mais fáceis de resolver do que os de Transformação Ligando Duas Medidas; ii) Da mesma forma, o elemento ausente no problema faz variar o desempenho das crianças. Nos problemas de Composição de Duas Medidas, os problemas considerados pelas crianças como mais simples têm o todo desconhecido. Nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas, os mais simples são os que têm o resultado desconhecido, e os que foram considerados pelas crianças como mais difíceis, aqueles cujo início era desconhecido. Nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, os que obtiveram mais sucesso foram os problemas com o elemento comparado desconhecido, e aqueles onde as crianças mais falharam foram os problemas com o referente desconhecido; iii) O desempenho das crianças é afetado, ainda, pela idade, os mais velhos têm um desempenho superior aos mais novos em todos os tipos de problemas, não havendo diferenças significativas entre as crianças de 4 e 5 anos.

Procurando conhecer melhor como raciocinam as crianças nos diferentes tipos de problemas, analisaram-se as estratégias por elas adotadas, bem como os argumentos apresentados quando procuravam justificar as suas respostas.

4.1.2. Estratégias de resolução dos problemas de estrutura aditiva

Analisaram-se as estratégias observadas durante a resolução das tarefas que conduziram a respostas corretas, considerando-se a categorização de estratégias à luz da que é apresentada por Carpenter et al. (1999). No entanto, sempre que necessário, foi criada uma nova categoria de modo a contemplar todos os casos observados neste estudo. Da análise conduzida, faz sentido distinguir três grandes grupos: estratégias de manipulação direta, estratégias de contagem e estratégias com factos numéricos.

As estratégias de manipulação direta refletem a manipulação dos objetos pelas crianças, formando os conjuntos com as quantidades enunciadas nos problemas; as estratégias de contagem são aplicadas quando a criança resolve, pela contagem, o problema proposto, sem a manipulação dos objetos; as estratégias com factos numéricos são consideradas quando a criança apela a factos conhecidos já memorizados, ou seja, quando domina a composição de determinado número pelas diferentes partes possíveis que o compõem, a combinação de números que formam outros números. Foi criada a categoria "Inconclusivo" para os casos em que as estratégias usadas pelas crianças não conseguem determinar uma forma de atuar, contudo, conduziram a respostas corretas. A Tabela 23 regista o tipo de estratégias usadas pelas crianças na resolução dos problemas apresentados e que conduziram a respostas corretas.

Tabela 23 - Tipo de estratégias observadas nos problemas de estrutura aditiva, de acordo com a idade.

	TIPO DE PROBLEMAS								
	Composição de Duas Medidas			Transformação Ligando Duas Medidas			Relação Estática Ligando Duas Medidas		
TIPO DE ESTRATÉGIAS	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)
Manip. Direta	100	84.7	67.5	86.8	81.6	72.6	57.1	71.1	68.2
Contagem	-	6.8	11.1	0.7	3.8	10.1	9.5	11.1	20.4
Factos Numér.	-	5.1	18	1.3	6.5	10.8	-	8.9	3.8
Inconclusivo	-	3.4	3.4	11.2	8.1	6.5	33.4	8.9	7.6

A análise aos dados da Tabela 23 sugere que, à medida que a idade das crianças vai aumentando, diminui o recurso às estratégias de manipulação direta. Por seu lado, aumenta o recurso a estratégias mais abstratas, como as estratégias de contagem ou estratégias com factos numéricos, o que se verifica em todos os tipos de problemas. As crianças de 5 e 6 anos já resolvem muitos problemas recorrendo a estratégias de contagem e estratégias com factos numéricos, e, em alguns casos, o recurso a estas últimas é superior ao uso de estratégias de contagem. A maior percentagem de estratégias inconclusivas e das quais resultaram respostas corretas, situam-se no grupo das crianças de 4 anos.

O procedimento das crianças carece de mais análise, pelo que se conduziu uma observação mais detalhada às estratégias em cada um dos tipos identificados.

4.1.2.1. Sobre as estratégias de manipulação direta

Nas estratégias de manipulação direta, que consistem na manipulação de objetos pelas crianças, consideraram-se as seguintes categorias: *Juntar Tudo; Juntar Para; Separar de; Separar Para; Correspondência termo a termo; Correspondência Para; Correspondência Separando; Correspondência Juntando; A-Mais Correspondência.*

A categoria "*Juntar Tudo*" integra os casos em que a criança dispõe os elementos dos dois conjuntos dados e conta todos para saber o resultado; (exemplo, no problema "A cadelinha da Inês teve cachorrinhos: 5 branquinhos e 3 castanhos. Quantos cachorrinhos teve a cadelinha da Inês?" a criança coloca o conjunto dos cães brancos e o conjunto dos cães castanhos, conta todos e responde o resultado da contagem "oito") (ver *Figura 27*).

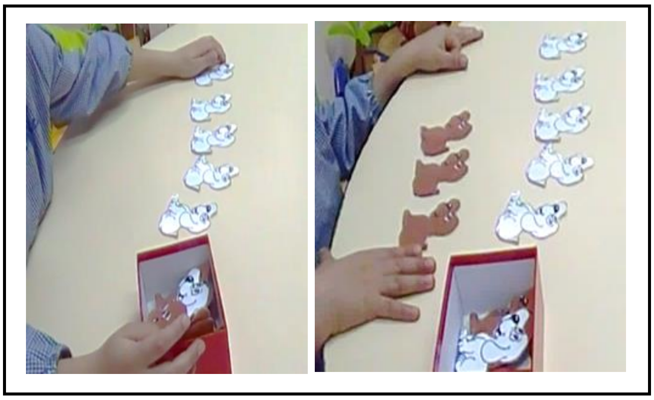


Figura 27: Categoria "Juntar Tudo".

A categoria "*Juntar Para*" contempla os casos em que a criança faz um conjunto com a quantidade inicial e vai adicionando elementos até que o novo conjunto atinja a quantidade total dada no problema. A resposta é dada contando os elementos adicionados ao conjunto inicial; (exemplo, no problema "O Pedro apanhou 3 gafanhotos na relva e mais alguns na areia. Agora ele tem 5 gafanhotos. Quantos gafanhotos apanhou na areia?", a criança coloca o conjunto de três gafanhotos, quantidade mencionada inicialmente e junta mais dois gafanhotos até perfazer cinco elementos no total, quantidade total mencionada no problema, e conta de seguida os que adicionou) (ver Figura 28).

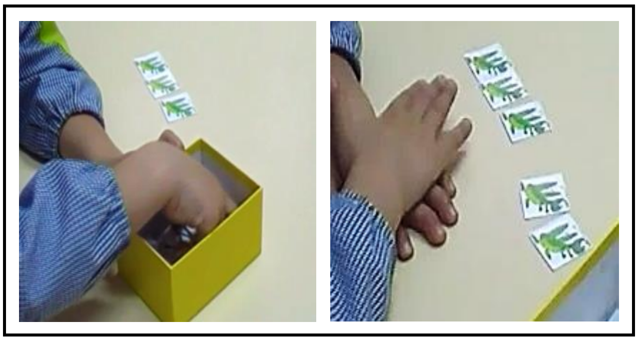


Figura 28: Categoria “Juntar Para”.

A categoria “*Separar de*” contempla os casos em que a criança coloca um conjunto com a quantidade maior mencionada no problema, que corresponde ao resultado, e retira deste a quantidade menor dita, contando os elementos que sobram para saber a resposta; (exemplo, no problema “A Maria tinha 6 flores, deu 2 à sua mãe. Quantas flores tem ela agora?”, a criança coloca seis flores, a quantidade maior que é mencionada no problema, e retira deste conjunto as duas flores, que correspondem à quantidade menor mencionada, contando, de seguida, as flores que restam) (ver Figura 29).

***Figura 29**: Categoria* “Separar De”.

A categoria “*Separar Para*” refere-se à estratégia em que a criança faz o conjunto maior dito no enunciado e retira os elementos necessários até deixar ficar a quantidade menor mencionada no problema. A resposta é encontrada pela quantidade que foi retirada; (exemplo, no problema “A mãe do Pedro fez 7 bolos para a festa. O Pedro comeu alguns em segredo e agora a mãe só tem 4 bolos para pôr na mesa. Quantos bolos comeu o Pedro?", a criança coloca um conjunto de 7 bolos (ver Figura 30), a quantidade maior mencionada no problema, e retira os elementos necessários para que fiquem apenas quatro bolos, a quantidade menor mencionada, contando de seguida os bolos que retirou).

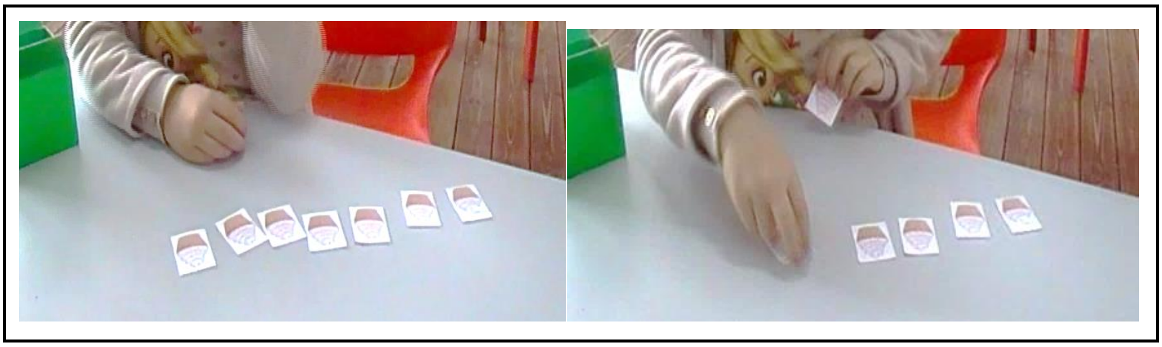


Figura 30: Categoria "Separar Para".

A categoria *"Correspondência termo a termo*", usada para resolver problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, contempla os casos em que a criança coloca os elementos dos dois conjuntos em correspondência um-a-um, até que os elementos de um dos conjuntos se esgote e ela possa contar os elementos sobrantes, de forma a encontrar a diferença; (exemplo, no problema "Na sala da Bela há 5 meninos e 9 meninas. Quantas meninas há a mais do que meninos?", a criança coloca nove meninas em linha, e em seguida coloca cinco meninos por cima das meninas, em correspondência um-a-um e conta as meninas que não têm correspondência) (ver Figura 31**Erro! A origem da referência não foi encontrada.**).

Figura 31: Categoria "Correspondência termo a termo".

A categoria "*Correspondência Para*" contempla os casos em que a criança coloca os dois conjuntos mencionados no problema, mas sem estabelecer a correspondência um-a-um. No segundo conjunto, a criança conta a quantidade mencionada no primeiro conjunto, ou seja, o mesmo número de elementos do primeiro conjunto e retira o excedente, contando quantos elementos retirou; (exemplo, no problema "Numa casa há 7 portas e 3 chaves. Quantas portas há a mais do que chaves?", a criança coloca sete portas e três chaves, correspondentes aos dois conjuntos mencionados no problema, de seguida conta três portas, correspondente ao número existente de chaves e conta as portas que restam, não estabelecendo para tal correspondência um-a-um) (ver Figura 32).

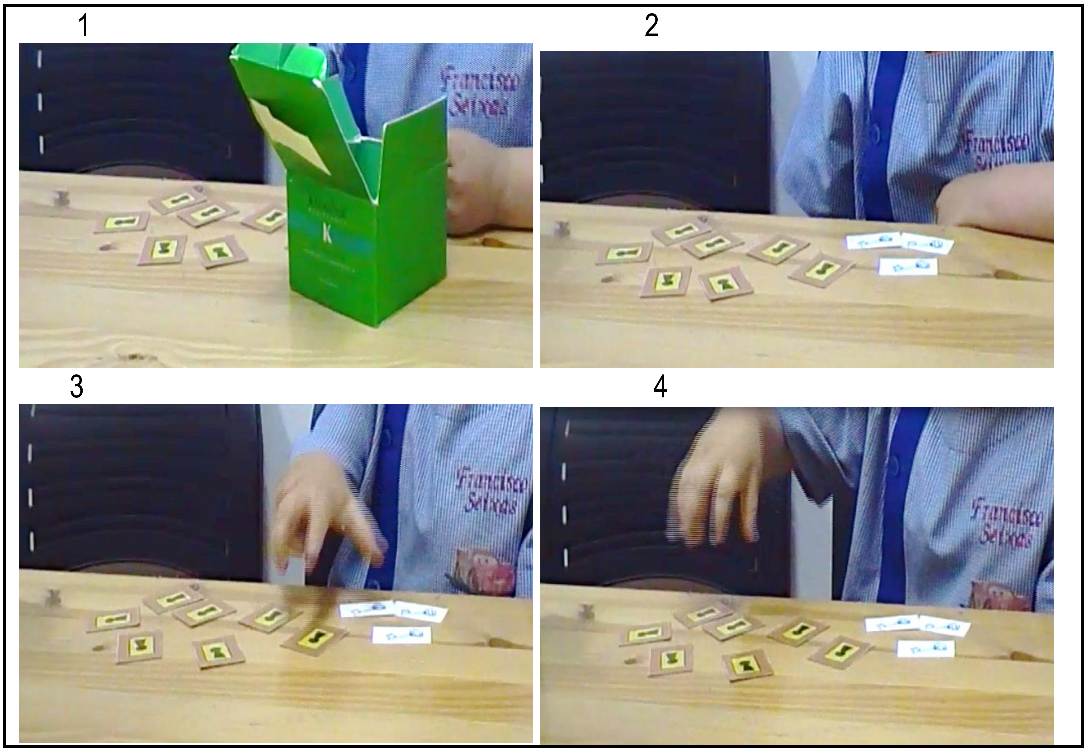


Figura 32: Categoria "Correspondência Para".

A categoria "*Correspondência Separando*" foi criada para contemplar os casos em que a criança, na resolução dos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, faz corresponder um-a-um os elementos de um conjunto ao do outro, mas deixa em aberto/vazio, a diferença. A resposta é encontrada contando os elementos do conjunto menor; (exemplo, no problema "A Bruna tem na mochila 3 bananas a menos do que a Rosa, que tem 7.Quantas bananas tem a

Bruna na mochila?", a criança coloca 7 bananas, que é a quantidade mencionada como referência, a quantidade do elemento comparado, e estabelece a correspondência um-a-um com as 4 bananas, quantidade que corresponde ao referente, e verifica o número de bananas que não têm correspondência) (ver Figura 33).

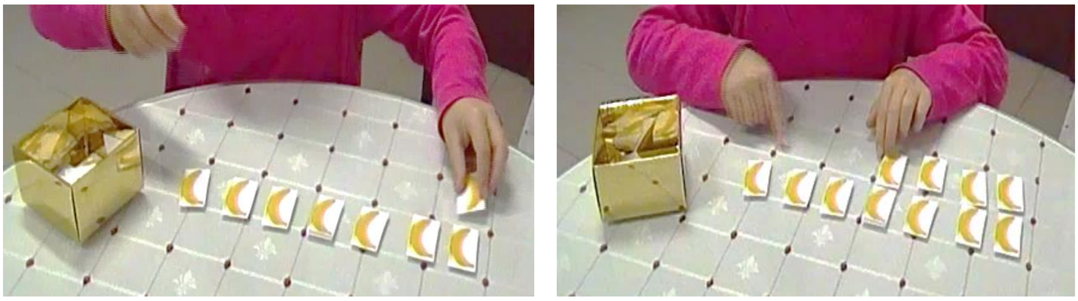


Figura 33: Categoria "Correspondência Separando".

A diferença entre esta estratégia e a estratégia de Correspondência termo a termo é que, nesta última, a criança é conhecedora das quantidades dos dois conjuntos e a sua atividade consiste em colocar as duas quantidades em correspondência, enquanto que na *Correspondência Separando* a criança vai colocando os elementos do segundo conjunto, que não sabe quantos são, em correspondência com o primeiro conjunto, tendo em atenção e contando os elementos que ficam sem correspondência. Quando os elementos que ficam sem correspondência tiverem a quantidade mencionada no problema, e que corresponde à diferença, a criança pára de colocar elementos no segundo conjunto e verifica quantos colocou.

A categoria "*Correspondência Juntando*" foi criada para contemplar os casos em que, para resolver problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, a criança estabelece a correspondência um-a-um entre os dois conjuntos e adiciona a diferença ao segundo conjunto, sendo a resposta encontrada pela quantidade do conjunto maior; (exemplo, no problema "A Maria tem 3 flores. A Rita tem mais 2 do que a Maria. Quantas flores tem a Rita?", a criança coloca três flores que correspondem à quantidade mencionada de um dos conjuntos e coloca um outro conjunto de flores por cima do primeiro, em correspondência um-a-um e adiciona a este último mais duas flores, que corresponde à diferença entre os conjuntos, contando de seguida as flores que estão no conjunto maior) (ver Figura 34).

Figura 34: Categoria "Correspondência Juntando".

A categoria "*A-Mais Correspondência*" foi criada para considerar os casos em que, na resolução dos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, a criança coloca o primeiro conjunto, de seguida coloca, num plano superior e fora de correspondência, a diferença, ou seja, os que estão a mais, a seguir coloca os elementos do outro conjunto em correspondência um-a-um com o primeiro e conta o conjunto maior; (exemplo, na resolução do problema "A mamã deu à Joana 4 bolos para o lanche e deu ao Diogo mais 2 do que à Joana. Quantos bolos deu ao Diogo?", a criança coloca quatro bolos em linha, que corresponde ao número de elementos do primeiro conjunto, de seguida coloca dois bolos na fila acima e fora do espaço de correspondência correspondentes à diferença, por último coloca em correspondência um-a-um os quatro bolos que restam ao segundo conjunto, completando a fila onde já estavam os dois bolos que representavam a diferença, e conta este último conjunto) (ver Figura 35).

Figura 35: Categoria "A-Mais Correspondência".

A Tabela 24 ilustra as estratégias de manipulação direta utilizadas pelas crianças na resolução de problemas de estrutura aditiva e que resultaram em respostas corretas.

Tabela 24 - Estratégias de manipulação direta observadas nas resoluções certas nos problemas de estrutura aditiva, de acordo com a idade.

ESTRATÉGIAS DE MANIPULAÇÃO DIRETA	TIPO DE PROBLEMAS								
	Composição de Duas Medidas			Transformação Ligando Duas Medidas			Relação Estática Ligando Duas Medidas		
	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)
Juntar Tudo	82	79.6	71.7	48.5	43.3	36.5	25	3.1	2.2
Juntar Para	-	-	3.3	4.5	5.3	9.5	-	-	-
Separar De	12	18.4	16.7	33.3	32.7	34.4	16.7	15.6	12.2
Separar Para	6	2	8.3	13.7	18.7	19.6	-	-	-
Correspondência termo a termo	-	-	-	-	-	-	8.2	34.5	15.6
Correspondência Para	-	-	-	-	-	-	16.7	3.1	13.3
Correspondência Separando	-	-	-	-	-	-	16.7	25	23.3
Correspondência Juntando	-	-	-	-	-	-	16.7	3.1	5.6
A-Mais Correspondência	-	-	-	-	-	-	-	15.6	27.8

As estratégias de manipulação direta usadas pelas crianças parecem variar, não de acordo com a idade, mas sobretudo consoante o tipo de problemas. Nos três grupos etários, as crianças recorrem à mesma variedade de estratégias, escolhendo estratégias diferentes de acordo com o tipo de problemas que pretendem resolver. Verifica-se também que as estratégias de correspondência são apenas usadas nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas e não nos outros. Tal facto parece indicar que a distinção é feita segundo o número de conjuntos envolvidos no problema. Nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, as crianças usam maioritariamente estratégias de correspondência, em que manipulam dois conjuntos distintos, estabelecendo, de alguma forma, uma correspondência entre ambos, enquanto que nos problemas de Composição de Duas Medidas e Transformação Ligando Duas Medidas a manipulação é feita num só conjunto, onde juntam ou separam elementos.

4.1.2.2. Sobre as estratégias de contagem

Nas estratégias de contagem foram consideradas as categorias: *Contando do Primeiro; Contando do Maior; Contando do Menor; Contando Até; Contagem Decrescente; Contagem Decrescente Até.*

A categoria "*Contando do Primeiro*" contempla os casos em que a criança conta a partir da primeira quantidade mencionada no problema e a sequência de contagem termina quando o número de elementos adicionado está completo; (no problema "Numa árvore estavam 3 macaquinhos em pé e 4 de cabeça para baixo. Quantos macaquinhos estão ao todo na árvore?", a criança explica que "já tinha 3 [mostra 3 dedos, faz uma pausa e prossegue depois a contagem levantando os restantes dedos] 4, 5, 6, 7").

A categoria "*Contando do Maior*" contempla os casos em que a contagem é iniciada a partir da quantidade maior mencionada no problema; (na resolução do mesmo problema, a criança diz "estavam 4, e depois contei assim: 5 [levanta um dedo], 6 [levanta outro dedo], 7 [levanta outro dedo e pára]").

A categoria *"Contando do Menor"* abrange os casos em que a criança começa a contagem na quantidade menor que é mencionada no problema e termina quando adiciona o número maior dito no enunciado; (na resolução do problema anteriormente descrito, a criança diz: "estavam 3 [faz uma pausa e continua a contagem a partir desse número] 4 [levanta um dedo], 5 [levanta outro dedo], 6 [levanta outro dedo], 7 [levanta o 4.º dedo] ").

A categoria "*Contando Até*" considera os casos em que a criança começa a contagem pelo elemento menor apresentado no problema, e vai contando até dizer o número maior apresentado, sendo a resposta determinada pelo número de passos na contagem; (no problema "A Joana tinha algumas bonecas, a tia deu-lhe mais 3 e agora ela tem 8. Quantas bonecas tinha a Joana no início?", a criança refere "ela tinha 3, estas já desapareceram [mostra os 3 dedos que depois volta a baixar], 4 [levanta um dedo], 5 [levanta outro dedo], 6 [levanta outro dedo], 7 [levanta outro dedo], e 8 [levanta o último dedo], 5 [refere mostrando os 5 dedos levantados] ”).

A categoria “*Contagem Decrescente*” contempla os casos em que a criança realiza a contagem regressiva, menciona tantos passos na contagem quantos a quantidade que é retirada, e responde o último número dito; (no problema “A Rosa tem 8 morangos colocados em 2 taças. Uma taça tem 5 morangos, quantos morangos tem a outra taça?”, a criança diz “8 [pausa], 7 [mostra a mão com os dedos abertos e baixa um dedo], 6 [baixa outro dedo], 5 [baixa outro dedo], 4 [baixa outro dedo], 3 [baixa outro dedo e neste momento tem a mão toda fechada] 3, são 3”).

A categoria “*Contagem Decrescente Até*” compreende os casos em que a criança realiza a contagem regressiva, mas a contagem pára quando o menor número mencionado no problema é dito, e a resposta é obtida pelo número de passos na contagem; (no problema “A mãe do Pedro fez 7 bolos para a festa. O Pedro comeu alguns em segredo e agora a mãe só tem 4 bolos para pôr na mesa. Quantos bolos comeu o Pedro?”, a criança levanta 7 dedos e vai baixando um a um até ter baixado os 4 dedos, enquanto faz a contagem decrescente “7 [pausa e baixa um dedo], 6 [baixa um dedo], 5 [baixa outro dedo], 4 [baixa outro dedo e deixa 3 dedos levantados], são 3”).

A Tabela 25 regista as estratégias de contagem usadas pelas crianças para resolverem os problemas propostos e que resultaram em respostas corretas.

Tabela 25 - Estratégias de contagem observadas nas resoluções certas nos problemas de estrutura aditiva, de acordo com a idade.

	TIPO DE PROBLEMAS								
	Composição de Duas Medidas			**Transformação Ligando Duas Medidas**			**Relação Estática Ligando Duas Medidas**		
ESTRATÉGIAS DE CONTAGEM	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)
Contando do Primeiro	-	50	20	-	28.6	15.4	-	-	-
Contando do Maior	-	50	40	100	42.8	26.9	100	60	40.7
Contando do Menor	-	-	-	-	28.6	7.7	-	-	-
Contando Até	-	-	20	-	-	38.5	-	40	59.3
Contagem Decrescente	-	-	20	-	-	3.8	-	-	-
Contagem Decrescente Até	-	-	-	-	-	7.7	-	-	-

O recurso a estratégias de contagem é mais frequente em crianças de 6 anos e ocorre nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas. No entanto, é de notar o recurso a este tipo de estratégias por crianças tão novas quanto as de 4 e 5 anos, apesar de revelar percentagens baixas, quando comparadas com as de manipulação direta (ver Tabela 24). É de salientar ainda o uso da Contagem Decrescente por crianças de 6 anos, estratégia que, de acordo com Fuson (1992b) é mais difícil, e por isso, pouco habitual em crianças tão pequenas.

4.1.2.3. Sobre as estratégias com factos numéricos

Nas estratégias com factos numéricos as crianças apelam a factos e combinações aprendidos, não manipulam objetos nem usam a contagem para resolver os problemas propostos.

A categoria "*Factos Numéricos*" contempla os casos em que as crianças servem-se de combinações de números aprendidas, como por exemplo 3+3, 4+4 ou ainda outras 4+2, e que revela que mentalmente dominam a decomposição de alguns números; (quando a criança perante o problema "A Ana tinha algumas amêndoas, deu 3 à sua mãe e ficou com 2. Quantas amêndoas tinha a Ana no início?", responde "5", sem manipular nenhum objeto, nem realizar nenhuma contagem, e acrescenta "porque 2 mais 3 é 5".

A categoria "*Factos Derivados*" compreende os casos em que as crianças se servem de factos numéricos conhecidos para encontrar outras combinações de números; (quando a criança, resolvendo o problema "A Rosa tem 8 morangos colocados em 2 taças. Uma taça tem 5 morangos, quantos morangos tem a outra taça?", responde "3" e acrescenta para explicar "porque metade de 8 é 4 e se tem 5 já roubou 1 ao de 3" [o seu raciocínio pode ser traduzido da seguinte forma: 8 = 4 + 4, logo se um grupo tem mais 1, o outro tem menos 1, se o grupo que tinha 4 tem menos 1, fica com 3].

A Tabela 26 mostra as estratégias com factos numéricos usadas pelas crianças na resolução dos diferentes tipos de problemas de estrutura aditiva e das quais resultaram respostas corretas.

Apesar das estratégias com Factos Numéricos ser considerada como uma estratégia abstrata (Carpenter et al, 1999), mais abstrata do que as estratégias de contagem, é notório o seu uso pelas crianças deste estudo, pois as suas idades não vão além dos 6 anos. Importa ainda salientar o recurso à estratégia "Factos Derivados" por crianças de 5 anos, pouco usual em crianças desta idade.

Tabela 26 - Estratégias com factos numéricos observadas nas resoluções certas nos problemas de estrutura aditiva, de acordo com a idade.

	TIPOS DE PROBLEMAS								
	Composição de Duas Medidas			**Transformação Ligando Duas Medidas**			**Relação Estática Ligando Duas Medidas**		
ESTRATÉGIAS COM FACTOS NUMÉRICOS	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)
Factos Numéricos	-	66.7	100	100	100	100	-	75	100
Factos derivados	-	33.3	-	-	-	-	-	25	-

4.1.3. Argumentos na resolução dos problemas propostos

As explicações das crianças às respostas corretas foram consideradas na análise como forma de perceber em que medida conseguem justificar o seu raciocínio. A argumentação foi analisada considerando as categorias de argumentos “Válidos”, “Parcialmente Válidos”, “Inválidos” e “Sem Argumentos”.

Os argumentos “Válidos” consideram os casos em que a explicação atende a todas as quantidades envolvidas no problema; (quando a criança depois de ter dado a resposta “8” na resolução do problema “A cadelinha da Inês teve cachorrinhos: 5 branquinhos e 3 castanhos. Quantos cachorrinhos teve a cadelinha da Inês?”, justifica “porque 5 mais 3 dá 8”).

Os argumentos “Parcialmente Válidos” consideram os casos em que a criança atende a uma parte do problema e a sua explicação não é completa; (quando, perante o problema “O Rui tinha 7 rebuçados, deu 5 à sua irmã. Quantos tem agora?”, responde acertadamente “2”, mas argumenta a sua resposta apenas da seguinte forma “porque deu 5 à irmã”).

Os argumentos considerados “Inválidos” foram atribuídos aos casos em que, tendo a criança resolvido corretamente o problema, apresenta uma justificação inconclusiva ou descontextualizada; (no problema “A mãe do Pedro fez 7 bolos para a festa. O Pedro comeu alguns em segredo e agora a mãe só tem 4 bolos para pôr na mesa. Quantos bolos comeu o Pedro?”, a criança responde corretamente mas argumenta “porque ele queria”, ou “porque sim”).

A categoria “Sem Argumento” foi considerada nos casos em que a criança, tendo dado uma resposta correta não consegue verbalizar a sua explicação, ficando calada ou respondendo “não sei” quando confrontada com a justificação da sua resposta.

A Tabela 27 regista o tipo de argumento apresentado pelas crianças para justificar a sua resposta certa, de acordo com a idade.

Tabela 27 - Tipo de argumento usado na resolução correta dos problemas de estrutura aditiva, de acordo com a idade.

	TIPO DE PROBLEMAS								
	Composição de Duas Medidas			**Transformação Ligando Duas Medidas**			**Relação Estática Ligando Duas Medidas**		
ARGUMENTOS	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)
Válido	40	63.8	75.3	32.2	51.6	73.1	42.8	51.1	72
Parcialmente Válido	4	1.7	2.2	7.2	4.4	6.1	4.8	2.2	7.6
Sem argumento	40	25.9	12.4	33.6	19	7.3	33.3	15.6	3.8
Inválido	16	8.6	10.1	27	25	13.5	19.1	31.1	16.6

Como é esperado, as crianças que revelam maior percentagem de argumentos “Válidos” são as de 6 anos. Verifica-se que a percentagem deste tipo aumenta consoante aumenta a idade, contudo, é de registar que mesmo as crianças de 4 anos procuram justificar de forma válida as suas opções na resolução dos problemas, alcançando valores máximos de 42,8 %. Não se esperavam percentagens muito elevadas nas crianças de 4 e 5 anos devido à dificuldade que têm em se expressar de forma clara e coerente nestas idades. Mesmo em crianças de 6 anos não seria de esperar percentagens tão elevadas de argumentação válida, devido à dificuldade que, segundo Piaget (1967), a criança tem em refletir sobre a resolução dos problemas, não conseguindo realizar de forma alguma a introspeção do seu raciocínio. Contudo, o que se observa é uma elevada percentagem de argumentos “Válidos”, acima dos 50% em crianças de 5 e 6 anos, e acima dos 30% em crianças ainda mais novas como as de 4 anos.

Analisando os valores apresentados na categoria “Sem Argumento” verifica-se que esta percentagem se situa acima dos 33% no grupo das crianças de 4 anos e abaixo dos 26% em crianças de 5 anos. Tal parece indicar que as crianças preferem ficar caladas do que dar uma resposta que não justifique corretamente a solução acertada do problema.

De uma forma geral, das diferentes categorias encontradas para a argumentação, aquela que apresenta menores valores percentuais são os argumentos “Parcialmente Válidos”. De considerar que estas crianças, tendo dado respostas corretas, conseguem articular parte da informação, para justificar a sua resposta.

4.2. Análise dos resultados dos problemas de estrutura multiplicativa

De maneira a avaliar a consistência interna dos problemas de estrutura multiplicativa realizados com as crianças, foi aplicado o teste estatístico alfa de Cronbach, tendo-se obtido um valor de α=0.81, o que corresponde a uma consistência interna boa (ver George & Mallery, 2003), sendo desta forma possível proceder à análise dos itens do questionário dos resultados dos problemas de estrutura multiplicativa.

4.2.1. Desempenho das crianças na resolução dos problemas propostos

Para cada criança foram contabilizadas as resoluções certas e erradas nos problemas de Isomorfismo de Medidas e nos problemas de Produto de Medidas, tendo sido atribuído o valor de 1 a cada resposta certa e 0 a cada resposta errada. Apenas foram considerados estes dois tipos de problemas de estrutura multiplicativa atendendo às idades das crianças, e considerando estudos anteriores (ver Kelley & Richert, 1970; Hart, 1981; Vergnaud, 1983; Mulligan, 1992; Bryant et al., 1992; Fuson, 2004) que apontavam para a dificuldade na resolução de outros tipos de problemas com crianças mais velhas.

Uma análise ao número de problemas resolvidos corretamente permite perceber que estes não são resolvidos com igual sucesso pelas crianças dos 4 aos 6 anos. Percebe-se ainda, que os problemas que obtêm maior taxa de sucesso são os problemas de Isomorfismo de Medidas, e que os problemas de Produto de Medidas se afiguram como muito difíceis para todas as crianças, sobretudo para as de 5 anos, que não conseguem nenhuma resposta correta aos problemas propostos. A Tabela 28 apresenta a média da proporção das respostas certas e o desvio padrão dos problemas de estrutura multiplicativa propostos, de acordo com a idade.

Tabela 28 - Média das proporções (desvio padrão) das respostas certas das crianças na resolução de problemas de estrutura multiplicativa.

	MÉDIA (desvio padrão)		
TIPO DE PROBLEMAS	4 anos (n=30)	5 anos (n=30)	6 anos (n=30)
Isomorfismo de Medidas	.22 (.22)	.41 (.29)	.63 (.29)
Produto de Medidas	.04 (.09)	.00 -	.05 (.16)

Os problemas de estrutura multiplicativa em que as crianças mostraram maiores taxas de sucesso na sua resolução, em todas as idades, foram os de Isomorfismo de Medidas. Os problemas de Produto de Medidas foram os mais difíceis de resolver, registando-se uma percentagem de 0% de acerto nas crianças de 5 anos.

A estatística descritiva sugere diferenças de desempenho nos diferentes tipos de problemas, afigurando-se como os de mais fácil resolução os problemas de Isomorfismo de Medidas e os mais difíceis para crianças desta idade, os problemas de Produto de Medidas. Parece, ainda, haver diferenças de desempenho consoante a idade das crianças. As crianças de 6 anos têm melhores resultados do que as restantes.

4.2.1.1. De acordo com o tipo de problema

A análise do número de problemas de estrutura multiplicativa, resolvidos corretamente pelas crianças, permite ter uma ideia do sucesso que estas apresentam nos diferentes tipos. Parece ser mais fácil para as crianças resolverem com sucesso problemas de Isomorfismo de Medidas, ao contrário de problemas de Produto de Medidas, onde apresentam elevadas taxas de insucesso, observando-se apenas cinco crianças de 4 anos e cinco de 6 anos que conseguiram chegar a resultados corretos.

Os Gráficos 12 e 13 apresentam a distribuição do número de respostas certas nos problemas de estrutura multiplicativa, para cada tipo de problema apresentado, de acordo com a idade.

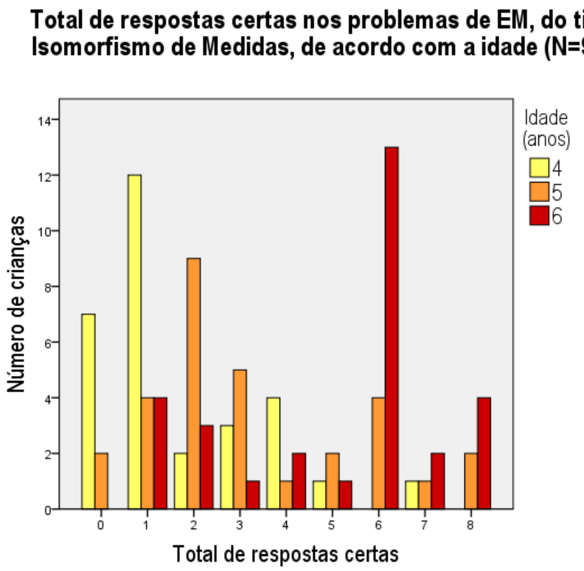


Gráfico 12: Distribuição do total de respostas certas nos problemas de Isomorfismo de Medidas, de acordo com a idade.

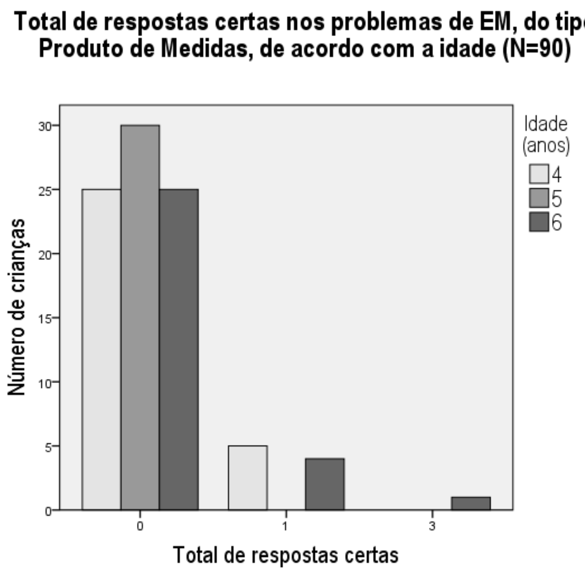


Gráfico 13: Distribuição do total de respostas certas nos problemas de Produto de Medidas, de acordo com a idade.

Nos problemas de Isomorfismo de Medidas é possível observar-se que seis crianças conseguiram resolver corretamente todos os problemas propostos. De salientar a existência de crianças de 4 anos a resolverem com sucesso quase a totalidade dos problemas apresentados. Das 90 crianças participantes, apenas nove não conseguiram resolver nenhum dos problemas propostos de Isomorfismo de Medidas. Nos problemas de Produto de Medidas, 10 crianças, das 90 participantes, conseguiram resolver acertadamente pelo menos um dos problemas deste tipo.

Foi analisada a normalidade da distribuição e homogeneidade de variâncias recorrendo ao teste de Kolmogorov-Smirnov e de Levene, respetivamente, tendo-se verificado que a distribuição do nível de desempenho das crianças difere da distribuição normal (K-S (90) = 0.192, p<.001). Considerando a violação do pressuposto da normalidade da distribuição dos resultados, e à semelhança da análise dos problemas de estrutura aditiva, recorrer-se-á a testes estatísticos não paramétricos. A distribuição dos desempenhos das crianças difere significativamente da distribuição normal, nos problemas de Isomorfismo de Medidas (K-S (90) = 0.183, p <.001) e nos problemas de Produto de medidas (K-S (90) = 0.511, p <.001).

Para avaliar a existência de diferenças significativas no desempenho das crianças, nos diversos tipos de problemas de estrutura multiplicativa, de acordo com a idade, recorreu-se ao teste não paramétrico de Kruskal-Wallis.

O teste de amostras independentes de Kruskal-Wallis sugere a existência de diferenças significativas no desempenho das crianças apenas nos problemas de Isomorfismo de Medidas (χ^2_{kw}(2) = 25.349, p<.001). Estas diferenças verificam-se entre todas as idades: entre crianças de 4 e 5 anos (χ^2_{kw} = -17,567, p<.05), entre crianças de 5 e as de 6 anos (χ^2_{kw}= -15,967, p<.05), e entre as de 4 e 6 anos, (χ^2_{kw}=-33,533, p<.001), registando-se um melhor desempenho para as crianças mais velhas. Nos problemas de Produto de Medidas, o desempenho das crianças não é afetado pela idade (χ^2_{kw}(2) = 5.558, n.s.).

Os resultados sugerem que o tipo de problema afeta a compreensão da situação apresentada e, consequentemente, o seu desempenho nessa resolução. O estudo da relevância das diferenças de desempenho das crianças, em cada tipo de problema, requer mais análise. Considerando que cada tipo de problema se subdivide em classes, determinadas pelo elemento que se assume desconhecido no problema e sobre o qual recai a pergunta, importa perceber se as crianças resolvem com igual nível de sucesso problemas que são diferentes.

4.2.1.2. De acordo com o elemento ausente

Procurou-se perceber se o desempenho das crianças em cada tipo de problema variava de acordo com o elemento desconhecido apresentado nos problemas. Procurou-se perceber também se o seu desempenho nestas situações variava de acordo com a idade.

Os problemas assumem diferentes designações consoante o elemento desconhecido, tanto nos de Isomorfismo de Medidas como nos de Produto de Medidas. O elemento que está ausente no enunciado denuncia a estrutura do problema, conferindo-lhe as designações que se conhecem, de multiplicação, divisão e outras.

O caso dos problemas de Isomorfismo de Medidas

A análise descritiva dos problemas de Isomorfismo de Medidas sugere diferenças nos desempenhos das crianças consoante o elemento ausente do problema. Os problemas de Multiplicação parecem ser de mais fácil resolução, em todas as idades. Pelo contrário, os problemas de Quarto Proporcional assumem-se como mais difíceis, com resultados inferiores. Contudo, é de salientar o sucesso alcançado nestes problemas, que se situa acima dos 33% em crianças de 6 anos e nos 20% em crianças de 5 anos. De notar que cinco crianças de 6 anos (em 30), e duas de 5 anos conseguiram resolver corretamente a totalidade dos problemas de Quarto Proporcional. Os Gráficos 14 a 17 apresentam a distribuição das respostas corretas nos problemas de Isomorfismo de Medidas, de acordo com o elemento ausente, e a idade dos participantes.

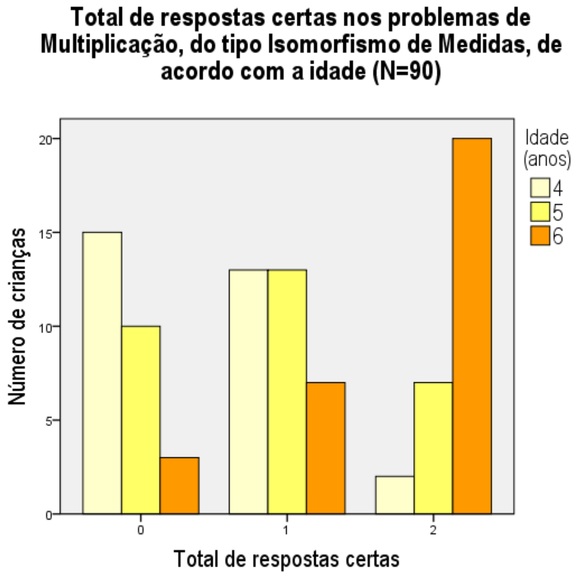


Gráfico 14: Distribuição do total de respostas certas nos problemas de Multiplicação, de Isomorfismo de Medidas, de acordo com a idade.

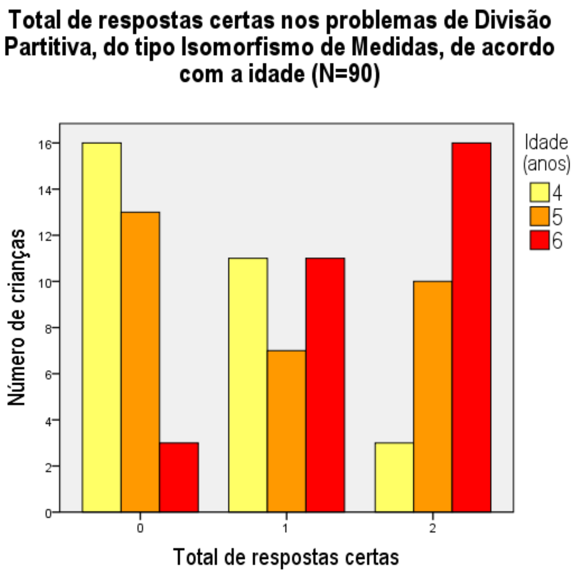


Gráfico 15: Distribuição do total de respostas certas nos problemas de Divisão Partitiva, de Isomorfismo de Medidas, de acordo com a idade.

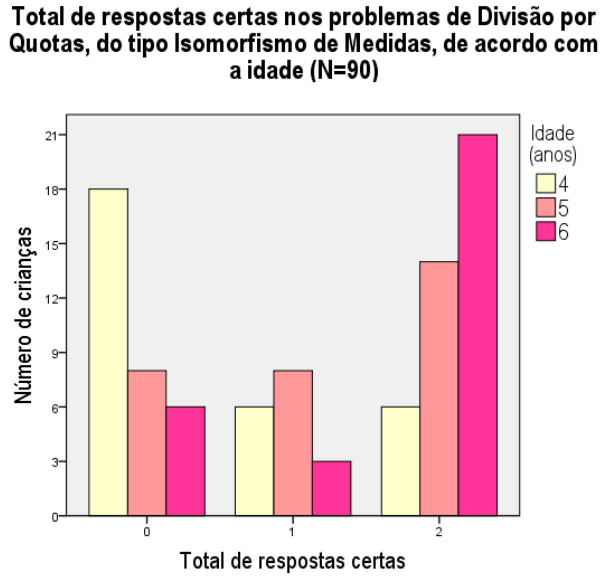


Gráfico 16: Distribuição do total de respostas certas nos problemas de Divisão por Quotas, de Isomorfismo de Medidas, de acordo com a idade.

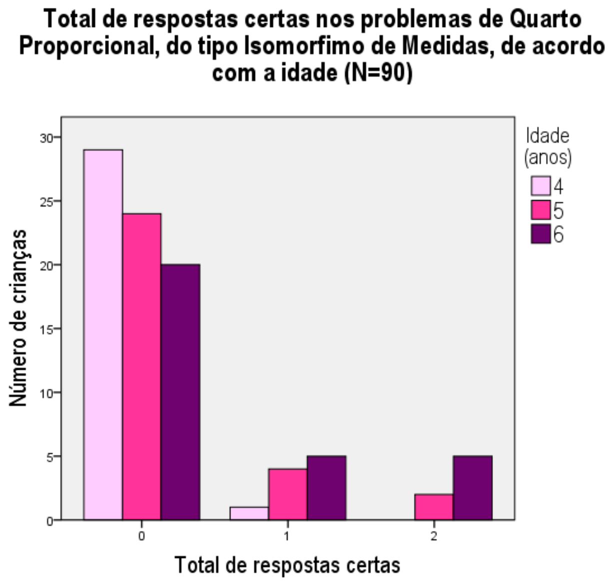


Gráfico 17: Distribuição do total de respostas certas nos problemas de Quarto Proporcional, de Isomorfismo de Medidas, de acordo com a idade.

Relativamente aos problemas de Multiplicação, observa-se que cerca de 1/3 das crianças resolveram corretamente a totalidade dos problemas propostos, sendo que destas, a maioria são crianças de 6 anos. Quanto aos problemas de Divisão, os que, globalmente, obtiveram maior sucesso foram os problemas de Divisão por Quotas. Quase metade das crianças resolveram corretamente a totalidade dos problemas apresentados, sendo que destas, seis crianças tinham 4 anos, 14 de 5 anos, e 21 de 6 anos. Nos problemas de Divisão Partitiva, 1/3 das crianças resolveu com sucesso a totalidade dos problemas. É possível observar a existência de crianças de 4 anos a responder corretamente à totalidade destes problemas de Divisão.

Da análise realizada, parece que o desempenho das crianças na resolução dos problemas de Isomorfismo de Medidas varia consoante o elemento desconhecido no problema. Parece também que a idade influencia, de alguma forma, os resultados na resolução dos problemas apresentados. Para verificar tal ocorrência, conduziu-se uma análise mais rigorosa, com recurso ao teste de amostras independentes de Kruskal-Wallis.

Nos problemas de Multiplicação, o desempenho das crianças regista diferenças estatisticamente significativas de acordo com a idade (χ^2_{kw}(2) = 24.375, *p*<.001) e ocorrem entre os 4 e os 6 anos (χ^2_{kw}= -30,800, *p*<.001), e entre os 5 e os 6 anos (χ^2_{kw}= -20,550, *p*<.05). As crianças de 6 anos têm um desempenho superior e estatisticamente significativo ao desempenho das crianças de 4 e 5 anos. Entre os 4 e os 5 anos não se verificam diferenças estatisticamente significativas (χ^2_{kw} = -10,250, n.s.).

Nos problemas de Divisão Partitiva, também o desempenho das crianças varia consoante a idade (χ^2_{kw} (2)=16.761, *p*<.001), verificando-se diferenças estatisticamente significativas entre as crianças de 4 e 6 anos (χ^2_{kw}= -25,783, *p*<.001), e entre as crianças de 5 e 6 anos (χ^2_{kw}= -15,967, *p*<.05). As crianças de 6 anos revelaram um desempenho superior às restantes, sendo esta diferença considerável. Entre as crianças de 4 e 5 anos não se registam, à semelhança dos problemas de Multiplicação, diferenças de desempenho estatisticamente significativas (χ^2_{kw}= -9,817, n.s).

Também nos problemas de Divisão por Quotas se verificam diferenças de desempenho estatisticamente significativas, de acordo com a idade (χ^2_{kw}(2) = 15.681, *p*<.001), mas contrariamente ao que foi observado nos problemas anteriores, estas diferenças observam-se entre as crianças de 4 e 5 anos (χ^2_{kw}= -15,900, *p*<.05) e entre as crianças de 4 e 6 anos (χ^2_{kw} = -24,300, *p*<.001), com um desempenho inferior registado no grupo das crianças de 4 anos. Entre as crianças de 5 e de 6 anos não foram consideradas como estatisticamente significativas as suas diferenças de desempenho (χ^2_{kw} = -8,400, n.s.).

Nos problemas de Quarto Proporcional, o desempenho das crianças também varia de acordo com a idade (χ^2_{kw} (2)=9.115, *p*<.05), mas as diferenças estatisticamente significativas observam-se apenas entre os 4 e os 6 anos (χ^2_{kw} = -13,867, *p*<.05), com melhores desempenhos para as crianças de 6 anos e piores as crianças de 4 anos. O desempenho das crianças de 5 anos não se assume como significativamente em termos estatísticos, nem quando comparado com o desempenho dos 4 anos (χ^2_{kw} = -7,483, n.s.), nem quando a comparação é feita com o desempenho das crianças de 6 anos (χ^2_{kw} = -6,383, n.s.).

Parece que as crianças mais velhas, de 6 anos, têm melhores desempenhos do que as crianças de 4 e 5 anos. No entanto, situações há, como a dos problemas de Divisão por Quotas, em que o desempenho das crianças de 5 anos não difere significativamente do das crianças de 6 anos. Nos problemas de Quarto Proporcional, as crianças de 6 anos apresentam um desempenho significativamente superior aos das de 4 anos. Aliás, em todos os problemas propostos, o desempenho das crianças de 4 e de 6 anos difere significativamente, com melhores resultados para as crianças mais velhas.

O caso dos problemas de Produto de Medidas

Apesar de revelarem valores muito baixos de sucesso, os problemas de Produto de Medidas apresentam diferentes resultados consoante o elemento ausente, isto é, consoante se trate de um problema de Multiplicação ou de Divisão. A análise descritiva deste tipo de problemas sugere diferenças, não só de acordo com o elemento desconhecido, mas também consoante a idade das crianças (ver Gráficos 18 e 19).

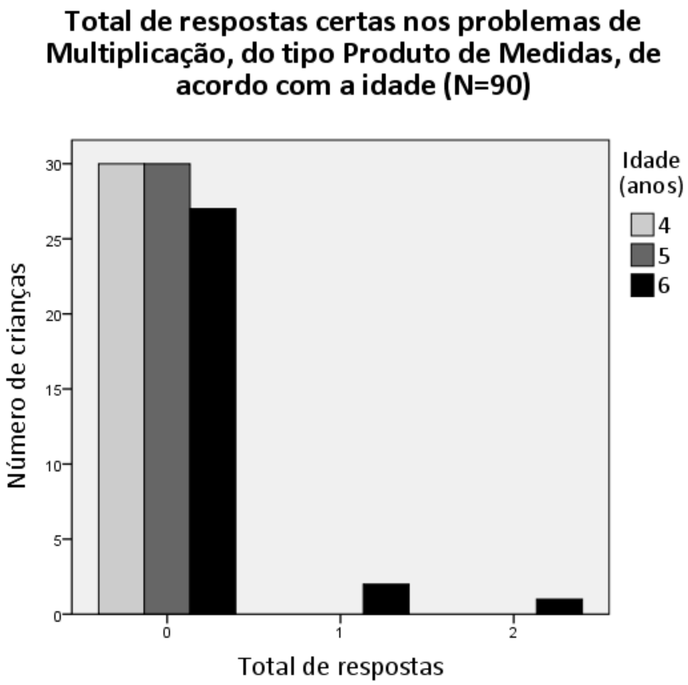


Gráfico 18: Distribuição do total de respostas certas nos problemas de Multiplicação, de Produto de Medidas, de acordo com a idade.

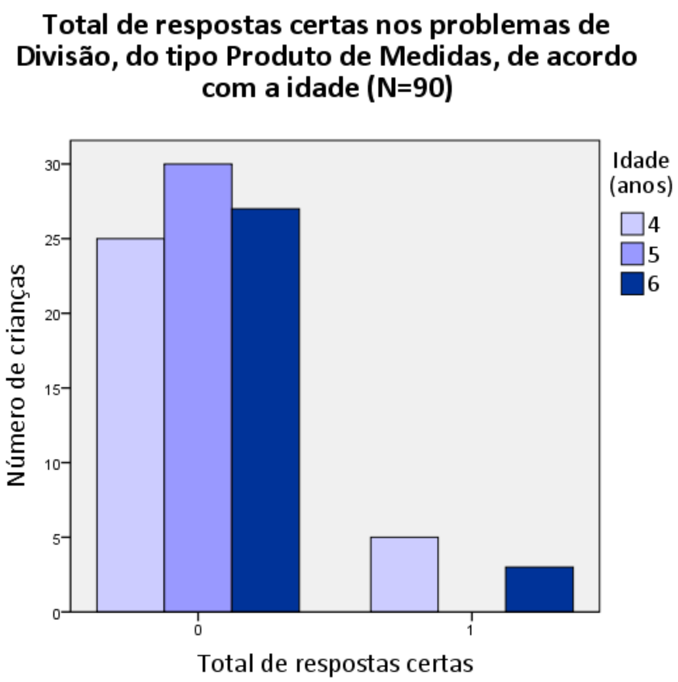


Gráfico 19: Distribuição do total de respostas certas nos problemas de Divisão, de Produto de Medidas, de acordo com a idade.

Os problemas que conseguiram mais sucesso foram os de Divisão, chegando a verificar-se a existência de oito crianças a resolverem corretamente este tipo de problemas, inclusivamente crianças de 4 anos. Nenhuma criança conseguiu resolver corretamente todos os problemas propostos. De notar que, apesar dos problemas de Multiplicação terem sido os que constituíram mais dificuldade para os participantes, gerando quase a totalidade de insucesso, observam-se duas crianças que resolvem metade destes problemas e uma criança que consegue resolver todos os que lhe são propostos.

Uma análise estatística com recurso ao teste de Kruskal-Wallis faz perceber que a idade dos participantes afeta o seu desempenho nos problemas de Multiplicação, (χ^2_{kw}(2) = 6.136, p<.05). Porém não são significativas as diferenças entre os níveis etários dos participantes, dado que apenas as crianças de 6 anos responderam acertadamente, ao contrário do que se observa nos problemas de Divisão, em que não se registam diferenças significativas no desempenho dos participantes (χ^2_{kw}(2) = 5,155, n.s.).

Em suma, os problemas de estrutura multiplicativa onde as crianças apresentam maior facilidade na sua resolução são os problemas de Isomorfismo de Medidas. O seu desempenho varia consoante o elemento desconhecido no problema. Os problemas de Multiplicação parece serem de mais fácil resolução do que os restantes, seguido dos problemas de Divisão por Quotas, com níveis de sucesso superiores aos problemas de Divisão Partitiva. Os problemas de Quarto Proporcional, os de maior dificuldade. O desempenho na resolução dos problemas de Isomorfismo de medidas varia, ainda, de acordo com a idade dos participantes. As crianças mais velhas têm melhores desempenhos do que as crianças mais novas. No entanto, é de ressaltar que, no caso dos problemas de Produto de Medidas, houve problemas (de Divisão) que foram resolvidos corretamente por crianças de 4 anos enquanto as de 5 anos não o conseguiram. Não obstante, os problemas de Produto de Medidas assumem-se como de maior dificuldade, o que teve expressão nos níveis de sucesso apresentados.

Diferentes resultados remetem para diferentes interpretações dos problemas e das relações neles estabelecidas. Assim, importa analisar como é que as crianças interpretaram os problemas que lhes foram apresentados, que estratégias adotaram que traduziram a sua interpretação dos problemas.

4.2.2. Estratégias de resolução dos problemas de estrutura multiplicativa

As estratégias observadas durante a resolução dos problemas apresentados e que produziram respostas corretas foram analisadas, tendo sido possível identificar estratégias coincidentes com as que foram assinaladas nos estudos de Mulligan (1992) e Carpenter et al. (1999). Sempre que necessário, foram criadas novas categorias para contemplar todas as estratégias utilizadas pelas crianças e observadas neste estudo.

À semelhança do que foi observado nos problemas de estrutura aditiva, também na resolução dos problemas de estrutura multiplicativa propostos foi possível observar o recurso a: estratégias de manipulação direta, em que a criança manipula objetos formando conjuntos com as quantidades mencionadas nos problemas; estratégias de contagem, em que a resolução do problema é efetuada pela contagem e não pela manipulação de objetos; e estratégias com factos numéricos, onde a criança apela a factos e combinações previamente conhecidos. Foi também, aqui, criada a categoria *Inconclusiva,* aplicada nos casos em que as estratégias usadas pelas crianças não determinam uma forma de atuação, apesar de terem conduzido a uma resposta correta. A Tabela 29 regista o tipo de estratégias usadas pelas crianças e que produziram respostas acertadas.

Tabela 29 - Tipo de estratégias observadas nos problemas de estrutura multiplicativa, de acordo com a idade.

	TIPO DE PROBLEMAS					
	Isomorfismo de Medidas			**Produto de Medidas**		
TIPO DE ESTRATÉGIAS	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)
Manipulação Direta	88.6	72.4	78	100	-	71.4
Contagem	3.8	9.2	6.7	-	-	-
Factos Numéricos	5.7	15.3	12	-	-	-
Inconclusivo	1.9	3.1	3.3	-	-	28.6

A análise à Tabela 29 sugere que todas as crianças recorrem, maioritariamente, a estratégias de manipulação direta, sendo superior o recurso a este tipo de estratégia em crianças de 4 anos. Verifica-se que, para além de recorrerem a estratégias de manipulação direta, as crianças fazem também uso de estratégias com factos numéricos, optando por esta estratégia em detrimento de estratégias de contagem. Mesmo as crianças de 4 anos recorrem a este tipo de estratégia para resolver corretamente problemas de estrutura multiplicativa, estratégia que é considerada na literatura (ver Kouba, 1989; Carpenter et al., 1999; Mulligan, 1992) como de maior grau de abstração. Importa ainda notar que as crianças de 5 anos são, de todas, as que recorrem em menor percentagem a estratégias de manipulação direta, resolvendo muitos dos problemas de estrutura multiplicativa usando estratégias com factos numéricos.

4.2.2.1. Sobre as estratégias de manipulação direta

Nas estratégias de manipulação direta foram consideradas as seguintes categorias: *Agrupamento e Contando-Tudo; Agrupamento e Dupla Contagem; Agrupamento por Tentativa e Erro; Agrupamento até Esgotar Hipóteses; Correspondência de Um-para-Muitos; Estratégia de Medida; Distribuição Um-a-Um; Adição Repetida com Manipulação; Replicação; Visualização.*

A categoria "*Agrupamento e Contando-tudo"* integra os casos em que a criança forma grupos equivalentes representando as quantidades mencionadas no problema e conta todos os elementos um por um, de forma a saber o resultado; (no problema "Quando faço sopa para mim - 1 pessoa - coloco 2 batatas. Se eu quiser fazer sopa para 3 pessoas, quantas batatas tenho que colocar?", a criança faz 3 grupos de 2 batatas, conforme o problema, e conta as batatas, uma a uma, para saber o resultado) (ver Figura 36).

Figura 36: Categoria “Agrupamento e Contando-Tudo ”.

A categoria “*Agrupamento e Dupla Contagem”* contempla os casos em que a criança faz os grupos mencionados no problema, realizando simultaneamente duas contagens: conta o número de elementos em cada grupo, ao mesmo tempo que vai contando o número de grupos. A resposta é dada com o número de conjuntos feitos; (no problema “O Pedro tem 15 balões para dar a alguns amigos. Cada amigo vai receber 3 balões. A quantos amigos ele vai dar balões?”, a criança vai fazendo grupos de 3, contando os 3 balões a colocar em cada grupo, ao mesmo tempo que vai contando os grupos de balões que vai fazendo. No final, quando coloca o último conjunto de balões responde imediatamente “5”, correspondendo ao número total de conjuntos e à ultima contagem feita) (ver Figura 37).

Figura 37: Categoria “Agrupamento e Dupla Contagem”.

A categoria “*Agrupamento por Tentativa e Erro”* abrange os casos em que a criança faz uma estimativa do número de elementos em cada grupo, de modo a formar grupos equivalentes, e vai alterando o tamanho do grupo até conseguir conjuntos com o mesmo número de elementos; (no problema “A Rita vai arrumar 15 livros em 3 prateleiras. Quantos livros ficam em cada prateleira?”, a criança prevê que o número de livros em cada prateleira seja 6, e vai construindo os grupos de acordo com a sua estimativa, no entanto, ao verificar que os livros que lhe restam não são suficientes para colocar 6 livros em todos os grupos, vai refinando o tamanho dos grupos até que estes tenham a mesma quantidade de livros) (ver Figura 38).

Figura 38: Categoria "Agrupamento por Tentativa e Erro".

A categoria "*Agrupamento até Esgotar Hipóteses*" foi criada para integrar os casos em que, perante um problema de Produto de Medidas, a criança vai fazendo conjuntos com os objetos do problema, até esgotar todas as hipóteses possíveis, muitas vezes repetindo combinações que depois ficam sem efeito após verificar a sua repetição, e sem atender a um critério de combinação ou à tabela onde são apresentados os dados do problema; (no problema "Três meninos e 2 meninas estão num baile. Todos os meninos querem dançar com todas as meninas. Quantos pares se conseguem fazer?", a criança vai fazendo pares com os meninos e as meninas presentes, até esgotar as hipóteses de pares e eliminando os que vai repetindo, até chegar ao número máximo possível de pares (ver Figura 39). Neste caso, a criança não atende ao número de meninos e de meninas, e a contagem que realiza é a contagem dos pares no final da resolução).

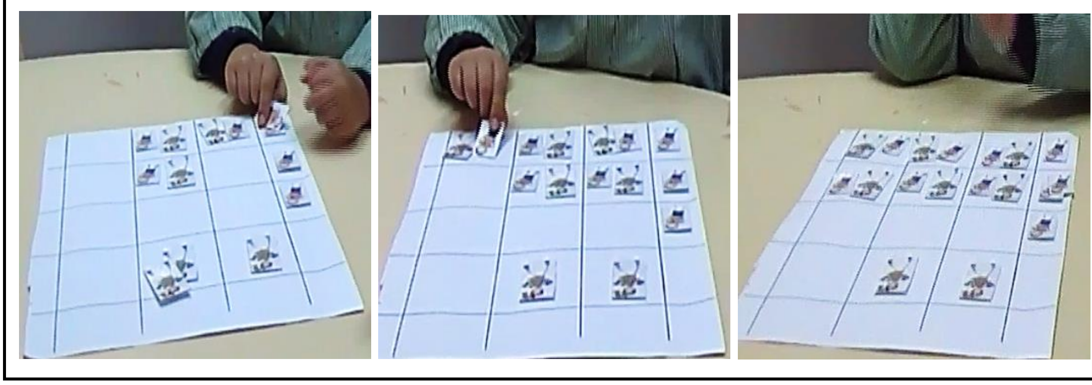


Figura 39: Categoria "Agrupamento até Esgotar Hipóteses".

A categoria *"Correspondência de Um-para-Muitos"* engloba os casos em que a criança faz corresponder um elemento a um determinado conjunto de elementos, e no final conta os elementos todos para saber a resposta; (no problema "Numa rua há 3 casinhas. Em cada casinha moram 2 coelhinhos. Quantos coelhinhos moram, ao todo, nas 3 casinhas?", a criança faz corresponder 2 coelhos a cada casa, no final conta o número total dos coelhos, dando essa quantidade como resposta) (ver Figura 40).

Figura 40: Categoria "Correspondência de Um-para-Muitos".

Na categoria "*Estratégia de Medida"*, a criança vai construindo conjuntos com o número de elementos que é mencionado no problema, até esgotar a quantidade total mencionada no problema, e por fim conta o número de conjuntos que obteve; (no problema "A Mara tem 12 livros num baú para emprestar às suas amigas. Cada amiga vai receber 4 livros. A quantas amigas a Mara vai emprestar livros?", a criança vai dispondo 4 livros em fila, correspondendo aos 4 livros que a Mara vai dar às amigas, até esgotar os 12 livros, quantidade total, no final conta os conjuntos que fez, isso é, as filas de livros, obtendo a resposta "3") (ver Figura 41).

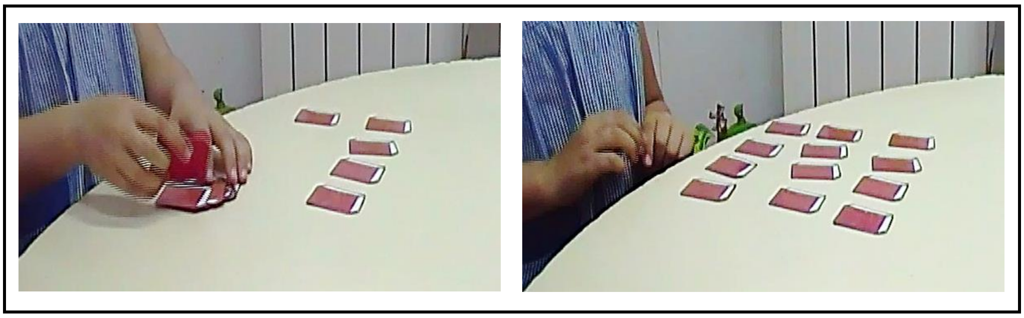


Figura 41: Categoria "Estratégia de Medida".

Na categoria “*Distribuição Um-a-Um”* estão englobados os casos em que a criança vai distribuindo, um-a-um, a quantidade total mencionada no problema, pelo número de conjuntos dado, numa distribuição “um para A, um para B”, e a resposta é definida pelo número de objetos em cada conjunto; (no problema “Tens estes grãos de milho (12) para dar a 3 pintainhos. Todos têm que comer a mesma quantidade. Quantos grãos de milho vai comer cada pintainho?”, a criança distribui um-a-um os grãos de milho por 3 grupos até esgotar o total de grãos de milho, e no fim conta quantos grãos de milho estão em cada grupo) (ver Figura 42).

Figura 42: Categoria “Distribuição Um-a-Um”.

A categoria “*Adição Repetida com Manipulação”* integra os casos em que a criança vai adicionando, repetidamente, o número que é mencionado no problema, verbalizando o termo “e”, ou “mais”; (no problema “Quando faço sopa para mim - 1 pessoa - coloco 2 batatas. Se eu quiser fazer sopa para 3 pessoas, quantas batatas tenho que colocar?” a criança vai colocando 2 batatas enquanto diz “temos 2 batatas só para ti”, coloca mais 2 batatas e diz “mais 2 para outra pessoa, já temos 4 batatas”, coloca mais 2 batatas e termina dizendo “mais 2, agora temos 6”) (ver Figura 43).

Figura 43: Categoria “Adição Repetida com Manipulação”.

A categoria *"Replicação"* foi criada para integrar os casos em que a criança, para resolver um problema de Quarto Proporcional, identifica o operador escalar e copia, duplicando, o modelo visual para encontrar a resposta; (no problema "Para fazer 2 taças de pudim coloco 3 colheres de açúcar. Se eu quiser fazer 4 taças de pudim, quantas colheres de açúcar tenho que colocar?", a criança identifica "4 taças de pudim" como o dobro das que são apresentadas, pelo que coloca na mesa mais 2 pudins e a quantidade de colheres de açúcar que lhe estão associadas, contando, por fim, todas as colheres de açúcar, quantidade pedida no problema) (ver Figura 44).

Figura 44: Categoria "Replicação".

Ainda na manipulação direta, foi criada a categoria "*Visualização*", que compreende os casos em que a criança responde e justifica a sua resposta pelo que vê nas tabelas apresentadas, sem realizar nenhuma operação de cálculo; (no problema "A Rosa consegue vestir 6 roupas diferentes com 3 saias e camisolas. De quantas camisolas precisa?", a criança responde "2" e aponta dizendo "uma verde e uma vermelha") (ver Figura 45).

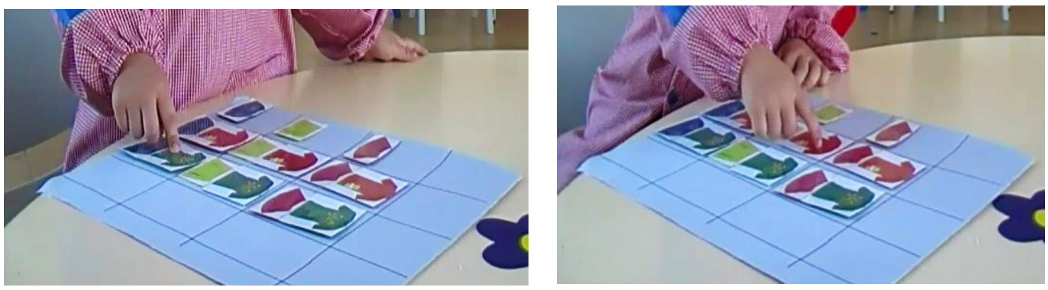


Figura 45: Categoria "Visualização".

A Tabela 30 ilustra as estratégias de manipulação direta usadas pelas crianças, na resolução de problemas de estrutura multiplicativa, e que resultaram em respostas corretas.

Tabela 30 - Estratégias de manipulação direta observadas nas resoluções certas dos problemas de estrutura multiplicativa, de acordo com a idade.

	TIPO DE PROBLEMAS					
	Isomorfismo de Medidas			**Produto de Medidas**		
ESTRATÉGIAS DE MANIPULAÇÃO DIRETA	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)
Agrupamento por Tentativa e Erro	27.7	25.4	26.5	-	-	-
Medida	34	45	35.9	-	-	-
Correspondência Um-para-Muitos	10.6	12.7	17.1	-	-	20
Agrupamento e Contando-Tudo	12.8	4.2	3.4	-	-	-
Distribuição Um-a-Um	8.5	8.5	10.3	-	-	-
Replicação	-	-	3.4	-	-	-
Agrupamento e Dupla Contagem	2.1	2.8	2.6	-	-	-
Adição Repetida com Manipulação	4.3	1.4	0.8	-	-	-
Agrupamento até Esgotar Hipóteses	-	-	-	-	-	60
Visualização	-	-	-	100	-	20

À semelhança do que se verificou nos problemas de estrutura aditiva, as estratégias utilizadas pelas crianças parecem variar de acordo com o tipo de problemas apresentado. Há estratégias usadas apenas nos problemas de Produto de Medidas, como seja a "*Visualização*" ou o "*Agrupamento até Esgotar Hipóteses*", o que sugere que não é tão fácil para as crianças desta idade, o cálculo nos problemas de Produto de Medidas como nos problemas de Isomorfismo de Medidas, levando-as a recorrerem a estratégias visuais, não atendendo aos eixos da tabela onde são apresentados os dados.

Parece não haver uma estratégia associada a determinada idade. As crianças usam a estratégia que melhor lhes serve para resolverem corretamente os problemas propostos, independentemente da sua idade. Do que se observa, parece haver um padrão semelhante, em todas as idades, na escolha de estratégias, o que resulta na estratégia mais e menos usada. Aquelas pelas quais as crianças menos optaram, nos problemas de Isomorfismo de Medidas, foram o Agrupamento e Dupla Contagem e a Adição Repetida com Manipulação. A estratégia de manipulação direta a que as crianças mais recorreram foi a estratégia de Medida e a estratégia de Agrupamento por Tentativa e Erro, o que parece indicar que estas duas estratégias de manipulação direta são as que melhor serviram às crianças para resolver, respetivamente, problemas de divisão e de multiplicação.

4.2.2.2. Sobre as estratégias de contagem

Nas estratégias de contagem foram consideradas as categorias: *Dupla Contagem; Adição Repetida.* A categoria "*Dupla Contagem*" contempla os casos em que a criança, sem manipular diretamente os objetos, realiza duas contagens em simultâneo, ela vai contando o número de elementos em cada grupo, ao mesmo tempo que conta o número de grupos; (no problema "Para fazer 2 taças de pudim coloco 3 colheres de açúcar. Se eu quiser fazer 4 taças de pudim, quantas colheres de açúcar tenho que colocar?", a criança conta as colheres de açúcar "1, 2, 3" [aponta para os pudins enquanto diz] "2", [continua a contagem:] "4, 5, 6" [aponta novamente para os dois pudins e diz:] "4", a criança conta simultaneamente as colheres de açúcar enquanto vai contando os pudins) (ver Figura 46).

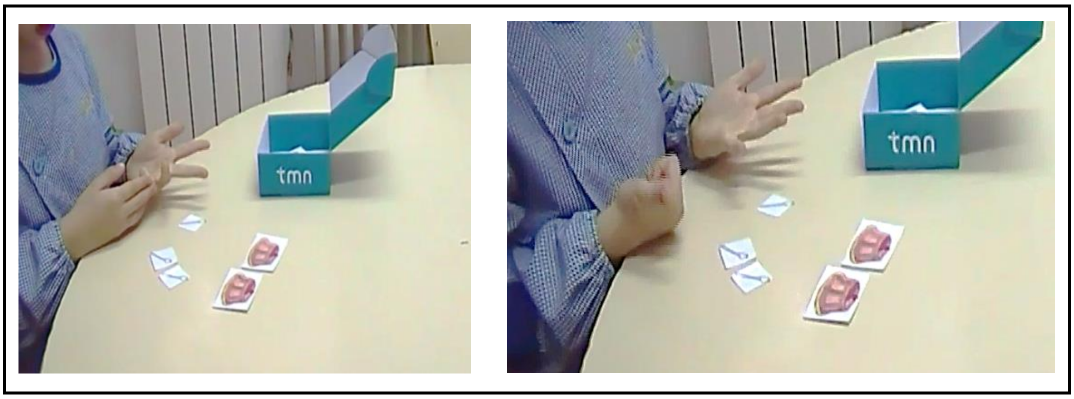


Figura 46: Categoria "Dupla Contagem".

A categoria "*Adição Repetida"* integra os casos em que a criança, sem recorrer à manipulação de objetos, vai adicionando repetidamente o número que é mencionado no problema, tantas vezes quantos os indicados no problema, verbalizando o termo "e", ou "mais", respondendo o produto da soma; (no problema "Numa rua há 3 casinhas. Em cada casinha moram 2 coelhinhos. Quantos coelhinhos moram, ao todo, nas 3 casinhas?", a criança diz "2 mais 2 mais 2, seis").

A Tabela 31 regista as estratégias de contagem utilizadas pelas crianças, na resolução de problemas de estrutura multiplicativa, e que resultaram em respostas corretas.

Tabela 31 - Estratégias de contagem observadas nas resoluções certas dos problemas de estrutura multiplicativa, de acordo com a idade.

	TIPO DE PROBLEMAS					
	Isomorfismo de Medidas			**Produto de Medidas**		
ESTRATÉGIAS DE CONTAGEM	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)
Dupla Contagem	50	44.4	10	-	-	-
Adição repetida	50	55.6	90	-	-	-

As estratégias de contagem apenas foram usadas pelas crianças nos problemas de Isomorfismo de Medidas. Ambas as estratégias identificadas, no tipo de estratégias de contagem, foram usadas pelas crianças independentemente da sua idade. É de notar como crianças tão novas como as de 4 anos conseguem recorrer a este tipo de estratégia para resolver corretamente problemas de Isomorfismo de Medidas.

4.2.2.3. Sobre as estratégias com factos numéricos

Como já anteriormente mencionado, e tal como se verificou na resolução dos problemas de estrutura aditiva, também as crianças que resolveram acertadamente problemas de estrutura multiplicativa usaram estratégias com factos numéricos, recorrendo a combinações de números já aprendidos. No presente estudo, as crianças recorreram a "*Factos Numéricos da Adição"*, estratégia que engloba os casos em que a criança menciona automaticamente, e sem contagem, factos conhecidos da adição; (no problema "A Mara apanhou 2 joaninhas. Cada joaninha tem 4 pintinhas. Quantas pintinhas têm ao todo as 2 joaninhas?", a criança responde, sem contar, nem manipular objetos, "8, porque eu sei que 4 mais 4 é 8"). A Tabela 32 mostra as estratégias com factos numéricos utilizadas pelas crianças na resolução dos diferentes tipos de problemas propostos e das quais resultaram respostas corretas.

Tabela 32 - Estratégias com factos numéricos observadas nas resoluções certas dos problemas de estrutura multiplicativa, de acordo com a idade.

	TIPO DE PROBLEMAS					
	Isomorfismo de Medidas			**Produto de Medidas**		
ESTRATÉGIAS COM FACTOS NUMÉRICOS	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)
Factos Numéricos Adição	100	100	100	-	-	-

"Factos Numéricos da Adição" foi a única estratégia mental identificada na resolução correta dos problemas de estrutura multiplicativa, daí a percentagem mencionada na Tabela 32. No entanto, importa salientar os dados que constam na Tabela 29, onde se observa um maior recurso a este tipo de estratégia em crianças de 5 anos, chegando a ser um valor superior ao que se refere às crianças de 6 anos. As estratégias com factos numéricos são as que requerem maior grau de abstração, contudo, e apesar deste facto, salienta-se o uso deste tipo de estratégia por parte de crianças tão novas quanto as de 4 anos.

4.2.3. Argumentos na resolução dos problemas propostos

De forma a perceber em que medida as crianças eram capazes de explicar o seu raciocínio, foram também analisadas as suas justificações. A argumentação foi analisada considerando as categorias de argumentos "Válidos", "Parcialmente Válidos", "Inválidos" e "Sem Argumentos".

Os argumentos "Válidos" consideram os casos em que a explicação dada pela criança atende a todas as quantidades envolvidas no problema; (quando, no problema "A Rita vai arrumar 15 livros em 3 prateleiras. Quantos livros ficam em cada prateleira?", a criança responde "5 em cada prateleira" e argumenta "porque em cada grupo estão 5, e nas prateleiras tinha que dividir e não sobrar nenhum, então estão 5".

Os argumentos "Parcialmente Válidos" consideram os casos em que a criança atende a uma parte do problema e a sua explicação não é completa; (quando, depois de responder "3" ao problema "A Mara tem 12 livros num baú para emprestar às suas amigas. Cada amiga vai receber 4 livros. A quantas amigas a Mara vai emprestar livros?", a criança argumenta a sua resposta de uma forma incompleta "porque são 4".

Os argumentos considerados "Inválidos" foram atribuídos aos casos em que a justificação é inconclusiva e descontextualizada não servindo como justificação para a resposta correta do problema; (quando a criança responde acertadamente "5" ao problema "O Pedro tem 15 balões para dar a alguns amigos. Cada amigo vai receber 3 balões. A quantos amigos ele vai dar balões?", e argumenta a sua resposta com a seguinte justificação "porque são muitos".

A categoria "Sem Argumento" foi considerada nos casos em que a criança, tendo dado uma resposta correta, perante a necessidade de justificar a sua resposta, não consegue verbalizar a sua explicação, ficando calada ou respondendo "não sei".

A Tabela 33 regista o tipo de argumento apresentado pelas crianças para justificar a opção que conduziu a respostas certas, de acordo com a idade.

Tabela 33 - Argumentos registados nas resoluções certas dos problemas de estrutura multiplicativa, de acordo com a idade.

	TIPO DE PROBLEMAS					
	Isomorfismo de Medidas			**Produto de Medidas**		
ARGUMENTOS	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)
Válido	41.5	54.1	63.4	60	-	28.6
Parcialmente válido	3.8	4.1	3.3	-	-	-
Sem argumento	18.9	12.2	8	20	-	71.4
Inválido	35.8	29.6	25.3	20	-	-

Era espectável que crianças pequenas, de 4, 5 e 6 anos, manifestassem alguma dificuldade em expressar de forma válida o seu raciocínio na resolução dos problemas propostos. No entanto, o que se verifica são percentagens consideráveis de argumentos "Válidos", em ambos os tipos de problemas, mesmo em crianças de 4 anos. Importa também salientar que, dos problemas de Produto de Medidas resolvidos corretamente, 60% tiveram uma explicação válida por parte de crianças de 4 anos. As crianças de 6 anos não apresentaram argumentos "Parcialmente Válidos" neste tipo de problemas, o que poderá querer indicar que, tratando-se de problemas considerados como muito difíceis para crianças em pré-escolar, elas preferissem ficar caladas do que dar uma justificação que não fosse coerente com a sua resolução correta.

5. Discussão de resultados

Era objetivo deste estudo perceber com raciocinam as crianças que frequentam o pré-escolar quando lhes são apresentados problemas de estrutura aditiva, à luz da classificação de Vergnaud (1981), que desempenhos revelam, que estratégias de resolução utilizam para os resolver corretamente e de que argumentos se servem para justificar a sua opção na resposta. Era igualmente objetivo deste estudo a análise das mesmas questões relativas a problemas propostos de estrutura multiplicativa, segundo a classificação de Vergnaud (1983). Que desempenhos apresentam as crianças do pré-escolar na resolução de problemas de estrutura multiplicativa, a que estratégias recorrem quando resolvem corretamente os problemas propostos, e que argumentos utilizam na justificação da sua resposta.

Os resultados obtidos neste estudo, com crianças portuguesas que frequentam a educação pré-escolar, são convergentes com estudos anteriores, realizados com crianças desta idade noutros países, apesar de estudos anteriores não terem sido realizados com o mesmo propósito deste estudo. Estudos anteriores não abordaram tanta variedade e esta quantidade de problemas com crianças de 4, 5 e 6 anos, nem tão pouco procuraram, simultaneamente, analisar as estratégias e os argumentos dados pelas crianças na resolução das tarefas.

Contudo, é de salientar que os resultados de estudos realizados em contextos internacionais demonstram o sucesso das crianças na resolução de problemas de raciocínio aditivo (ver Hughes, 1981; Carpenter et al., 1981; Carpenter & Moser, 1982; Hudson, 1983; Riley et al., 1983; Briars & Larkin, 1984; De Corte & Verschaffel, 1987; Carpenter et al., 1993) e em problemas de raciocínio multiplicativo (ver Carpenter et al., 1993; Nunes & Bryant, 1996; Carpenter et al., 1999; Nunes et al., 2009), antes de terem, ainda, recebido qualquer instrução formal sobre as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Os sucessos alcançados nos vários estudos, e também neste, não deixam dúvida de que muitas crianças pequenas começam a escolaridade com conhecimentos que lhes permitem resolver com sucesso problemas de raciocínio aditivo e multiplicativo.

Os resultados desta investigação demonstraram que as crianças de 4, 5 e 6 anos conseguem resolver problemas práticos de adição, subtração, multiplicação e divisão não obstante o grau de sucesso poder estar dependente de alguns fatores, como a idade (crianças de 6 anos conseguem melhores resultados do que crianças de 4 anos), e o tipo de problemas que lhes é apresentado.

No que diz respeito a problemas de estrutura aditiva, a investigação (ver Carpenter & Moser, 1982; Riley et al., 1983; De Corte & Verschaffel, 1987; Magina et al., 2001) mostra que os problemas de combinação e de transformação (designados por Vergnaud de Composição de Duas Medidas e Transformação Ligando Duas Medidas, respetivamente) são muito mais fáceis do que os de comparação (Relação Estática Ligando Duas Medidas), uma vez que, neste último tipo de problemas, as crianças estão a trabalhar com relações entre quantidades. Assim, a dificuldade destes problemas reside no modo como as crianças interpretam as relações aritméticas envolvidas nos problemas (Nunes et al., 2009). Problemas relativamente fáceis podem ser considerados pelas crianças como muito difíceis se as relações matemáticas nelas estabelecidas são pouco transparentes. Tal acontece quando se verifica a necessidade de realizar uma operação de pensamento baseada na propriedade inversa da adição e subtração, o que aumenta consideravelmente o grau de dificuldade de resolução dos problemas (Nunes & Bryant, 1996), confirmado pelos índices de acerto menores registados nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com o início desconhecido.

Outro motivo justificativo para a diferença de desempenho nos problemas de estrutura aditiva apresentados poderá estar relacionado com as dificuldades linguísticas que as crianças sentem na interpretação de um problema, o que acontece no caso dos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, cuja linguagem apresentada induz a criança ao erro. Nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas, as crianças podem, com facilidade descobrir as ações que precisam de realizar para resolver um problema, ao contrário dos problemas que envolvem relações estáticas ligando duas medidas, em que a conexão entre a situação e a operação que conduz à solução não fica imediatamente clara, porque nada é retirado ou adicionado de qualquer um dos conjuntos, condicionando desta forma o grau de dificuldade e o sucesso na resolução dos problemas apresentados. Não sendo objetivo deste estudo analisar o erro nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, pode, contudo, entender-se que os níveis de sucesso mais baixos neste tipo de problemas se devem às dificuldades apontadas na literatura e que sugerem que as crianças não conseguem relacionar o conhecimento que têm do conceito de "mais" e de "menos" com uma estratégia para quantificar comparações, corroborando resultados obtidos por Hudson (1983) e Carpenter et al. (1981).

Dentro dos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, Magina et al. (2001) distinguem graus de complexidade, consoante o elemento ausente, sendo que os mais complexos são os que têm o referente como elemento desconhecido. No estudo aqui apresentado, também foram estes os problemas que apresentaram menores taxas de sucesso nos grupos das crianças de 5 e 6 anos. Magina et al. (2001) apontam os problemas com o elemento comparado desconhecido como mais difícil, o que se veio também aqui a verificar, sendo estes problemas os que tiveram menor percentagem de resoluções corretas.

De uma forma geral, em todos os tipos de problemas de estrutura aditiva não há diferenças significativas no desempenho das crianças de 4 e 5 anos, o que sugere que é a partir dos 6 anos que as crianças ficam capazes de resolver, com elevado sucesso, os problemas dos três tipos apresentados. No entanto, é de salientar que é possível a sua resolução por crianças com idades inferiores.

Relativamente aos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com o resultado desconhecido, as diferenças só são significativas entre as crianças de 4 e 6 anos. Poderá este facto sugerir que este tipo de problemas, uma vez que não implica o conhecimento da relação inversa entre adição e a subtração seja mais fácil de interpretar, logo de perceber a operação expressa na relação estabelecida entre as quantidades (Vergnaud, 1986), reconhecida portanto como uma situação prototípica (Vergnaud, 2011). Por outro lado, estas situações estarão mais presentes no dia-a-dia das crianças, dentro e fora do Jardim de Infância, o que lhes confere maior familiaridade de linguagem e interpretação das relações presentes. Serão por isso mais exploradas em contexto de histórias e vivências de Jardim de Infância, ou estarão simplesmente dentro das suas capacidades cognitivas, o que Vygotsky (2007) considera como o nível atual de desenvolvimento? Estes resultados sugerem que as crianças de 6 anos conseguem facilmente resolver este tipo de problemas, no entanto, este conhecimento é também acessível às crianças de idades inferiores, inclusivamente, a resolução de problemas mais complexos, como os problemas com a transformação e o início desconhecidos. A dificuldade que sentem não estará relacionada com os cálculos numéricos que precisam de realizar, mas com a interpretação das ações e relações descritas nos problemas e escolha das operações de pensamento necessárias à resolução.

O sucesso inferior nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas parece dever-se à dificuldade em estabelecerem e realizarem um cálculo relacional para as ações descritas nos problemas, e não à sua incapacidade em calcular numericamente de forma a encontrar o resultado. Para resolver corretamente estes problemas, as crianças de 4, 5 e 6 anos conseguiram usar um leque muito diversificado de estratégias, ainda não identificadas na literatura. Os autores que se debruçaram sobre as estratégias de resolução de problemas de estrutura aditiva (ver Carpenter & Moser, 1984; De Corte & Verschaffel, 1987; Willis & Fuson, 1988; Correa & Moura, 1997; Carpenter et al., 1999) consideram apenas "Correspondência" como a estratégia de resolução para os problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas.

Do que é dado observar nos procedimentos dos participantes deste estudo, não há uma só forma de estabelecer a correspondência entre os elementos de dois conjuntos. A criança atende aos diferentes papéis que são desempenhados pelas quantidades referidas no enunciado e manipula-as de acordo com as relações estabelecidas. Quando a criança resolve um problema com o referente desconhecido e cria uma estratégia onde coloca o conjunto tido como referência e vai estabelecendo uma correspondência termo a termo entre esses elementos e os elementos do conjunto que se pretende conhecer, mas deixando desde logo em aberto a diferença que é mencionada entre as duas quantidades (denominada aqui de Correspondência Separando), revela que percebe que uma das quantidades pertence a um conjunto, e a outra quantidade mencionada estabelece a relação entre os dois conjuntos. Da mesma forma que, para resolver um problema com o comparado desconhecido, cria uma estratégia diferente. Ela coloca uma fila de elementos com a quantidade mencionada no problema correspondente a um dos conjuntos, e em seguida coloca num outro plano e fora da correspondência, os elementos da expressão "mais dois", correspondendo à diferença entre os dois conjuntos, e por último estabelece a correspondência dos elementos do novo conjunto (denominada aqui como "A-Mais Correspondência"). Com este procedimento a criança revela que percebe que uma das quantidades se refere a um dos conjuntos e a outra quantidade se refere à relação entre os dois conjuntos. As diferentes estratégias de resolução dos problemas de Relação Estática Ligando

Duas Medidas remetem para a forma como as crianças os interpretam e a análise que fazem às relações que são estabelecidas entre os números do enunciado.

Relativamente aos problemas de estrutura multiplicativa, a investigação já realizada (ver Kelley & Richert, 1970; Vergnaud, 1983; Fischbein et al., 1985; Greer, 1992; Nesher, 1988; Mulligan, 1992; Fuson, 2004) salienta a facilidade com que as crianças resolvem problemas de multiplicação e divisão que envolvem "grupos iguais" e "medidas iguais" - problemas de Isomorfismo de Medidas para Vergnaud (1983) - ao contrário de problemas que envolvem "produtos cartesianos" ou "medidas de conversão" – problemas de Produto de Medidas segundo a designação de Vergnaud. Apesar de estudos prévios terem sido desenvolvidos com crianças mais velhas, o estudo aqui documentado converge com estes resultados, observando-se níveis de acerto nos problemas de Produto de Medidas muito inferiores aos valores de sucesso nos problemas de Isomorfismo de Medidas.

Os problemas de multiplicação/divisão têm subjacente a mesma estrutura: a cada grupo corresponde um determinado número de elementos que é igual em todos os grupos, assumindo-se como de multiplicação ou divisão consoante a questão que é colocada. Os problemas de multiplicação, denominados por alguns autores (Greer, 1992; Fischbein et al., 1985) como "problemas de adição repetida", são considerados como os mais fáceis de resolver, dado que a sua estrutura pode ser entendida como um procedimento repetido (Nesher, 1988), em que se adiciona consecutivamente um determinado número, obtendo-se a quantidade total. Já no caso dos problemas de divisão, são consensualmente definidos dois tipos de divisão: Divisão Partitiva em que, dada a quantidade total e o número de grupos, questiona-se sobre o valor de cada grupo; e a Divisão por Quotas em que, dada a quantidade total e o tamanho dos grupos, questiona-se sobre o número de grupos.

Em consonância com investigações internacionais descritas na literatura, as crianças portuguesas envolvidas neste estudo não revelaram dificuldade em resolver as tarefas propostas de multiplicação e divisão, conseguindo, com facilidade, usar a correspondência em situações de multiplicação e divisão. Ainda nos problemas de Isomorfismo de Medidas, mas sobre problemas de Quarto Proporcional, verifica-se que, à semelhança do que é referido (ver Nunes & Bryant, 1996), a dificuldade que as crianças têm em determinar as relações proporcionais entre as variáveis é colmatada, muitas vezes, por estratégias de replicação, sem necessariamente se mostrarem cientes da relação funcional existente entre as variáveis. Contudo, estes problemas afiguraram-se como mais difíceis de resolver pelas crianças, em todos os grupos etários, com insucesso quase total no grupo das crianças de 4 anos, e percentagens baixas nos grupos das crianças de 5 e 6 anos.

Tal como na literatura (ver Hart, 1981; Mulligan, 1992; Bryant et al., 1992; Fuson, 2004), também neste estudo os problemas de Produto de Medidas assumiram-se como os mais difíceis de resolver pelos sujeitos. Segundo Nunes et al. (2009), a dificuldade na resolução dos problemas deriva da interpretação que as crianças fazem das ações e relações descritas nos problemas, e neste caso, não é tacitamente expresso no problema o pressuposto de que cada elemento de um conjunto deve ser cruzado com cada elemento do outro conjunto. Kelley e Richert (1970) e Vergnaud (1983) referem que os problemas que refletem um produto cartesiano são considerados como muito difíceis para crianças de 7 e 8 anos. Também no estudo desenvolvido por Bryant et al. (1992) nenhuma das crianças de 8 anos respondeu acertadamente a este tipo de problemas e apenas 55% das crianças de 9 anos responderam corretamente, quando não dispunham de material de apoio à resolução. Ainda que a taxa de sucesso observada neste estudo nos problemas de Produto de Medidas se situe abaixo dos 20%, pode-se considerar que é possível, a crianças dos 4 aos 6 anos, resolveram estes problemas, com apoio de materiais.

De uma forma geral, as crianças de 4, 5 e 6 anos conseguem resolver alguns problemas de estrutura multiplicativa, sobretudo problemas de Isomorfismo de medidas, ainda que o seu desempenho seja influenciado pela idade. A diferença que não se regista significativa entre as crianças de 4 e 5 anos leva a supor que é a partir dos 6 anos que elas se tornam mais competentes para resolver a maioria destes problemas. No entanto, não se pode negar a percentagem média de sucesso (acima dos 40% relativa ao desempenho das crianças de 5 anos e acima dos 60% nas de 6 anos), o que é revelador da sua capacidade de resolver problemas de Multiplicação, Divisão Partitiva, Divisão por Quotas e alguns casos, problemas de Quarto Proporcional, recorrendo para tal a estratégias específicas e adequadas a cada tipo de problema.

As investigações realizadas com crianças, que ainda não iniciaram a instrução formal sobre as operações e a resolução de problemas (ver Carpenter et al., 1981; De Corte & Verschaffel, 1987; Kouba, 1989; Mulligan, 1992; Carpenter et al., 1999; Correa & Moura, 1997), identificaram um conjunto semelhante de estratégias usadas pelas crianças, e que se vão modificando à medida que elas vão desenvolvendo o seu raciocínio. Se no início as crianças recorrem à manipulação de objetos para resolverem os problemas propostos, à medida que vão ficando mais competentes, as suas estratégias vão ficando cada vez mais abstratas, e a manipulação direta, com dedos ou objetos, vai sendo substituída por estratégias de contagem, mais abstratas, que por sua vez vão ser substituídas por estratégias com factos numéricos.

Nos problemas de estrutura multiplicativa foi possível observar que, nos problemas de Produto de Medidas, as estratégias que se registaram foram apenas estratégias relacionadas com a visualização dos dados apresentados, enquanto que nos problemas de Isomorfismo de Medidas houve uma maior variedade de estratégias, escolhidas pelas crianças de acordo com a estrutura dos problemas apresentados. Essa variedade mostrou-se de acordo com o tipo de problema e da ação descrita nele, mais do que da idade das crianças.

No presente estudo, o tipo de estratégia mais observada, em todas as idades, quer nos problemas de estrutura aditiva, quer nos problemas de estrutura multiplicativa, foi a manipulação direta. No entanto, as crianças de 4 e 5 anos fizeram uso também de estratégias consideradas de maior abstração, como as estratégias de contagem e estratégias com factos numéricos. Apesar da investigação apresentada por outros autores referir que as crianças começam por recorrer a estratégias de manipulação direta e só mais tarde, e mais capazes, começam a usar estratégias mais abstratas como as de contagem e com factos numéricos, é notório o recurso a estratégias de contagem, mesmo por crianças de 4 anos. Todavia, é de referir que os estudos apresentados acerca do uso de estratégias na resolução de problemas, quer de estrutura aditiva, quer de estrutura multiplicativa, foram realizados com crianças a partir dos 6 anos. Mesmo estudos realizados com crianças do pré-escolar (ver Correa, Nunes, & Bryant, 1995) não analisaram as estratégias de problemas propostos em ambas as estruturas de raciocínio, abrangendo os diversos tipos de problemas, de acordo com todas as situações possíveis de acordo com o elemento ausente e a direção das transformações e relações. Assim, os resultados apresentados não deixam dúvidas de que as crianças conseguem, desde muito cedo, resolver problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa antes das operações que lhe estão associadas lhes serem formalmente ensinadas, modelando as ações descritas nos problemas e procurando estratégias distintas de acordo com o tipo de problema.

Pode-se também depreender que as crianças estão cientes do que fazem ao resolver as tarefas propostas, tal é comprovado pela argumentação que usam para justificar as suas respostas e as opções tomadas na escolha das estratégias usadas. As elevadas percentagens de argumentos válidos (acima dos 60% nos problemas de estrutura multiplicativa e dos 70% nos problemas de estrutura aditiva) que são registadas no grupo das crianças de 6 anos dão conta de que elas resolvem, com consciência, os problemas que lhes são propostos.

Quando uma criança de 6 anos justifica a resposta correta que dá ao problema de Quarto Proporcional (em que se pretende saber quantas colheres de açúcar levam 4 pudins, sabendo que 2 pudins levam 3 colheres de açúcar) da seguinte forma: "então, aqui estão 2 pudins, esta colher é para este [coloca debaixo da figura do pudim uma colher], esta é para este [coloca debaixo do 2.º pudim outra colher] e esta colher é meia para este e para este [coloca a 3.ª colher por baixo mas no meio dos dois pudins], agora mais 2 são 4 [pudins]. São 6 colheres, um para este [coloca uma colher debaixo do 3.º pudim], outra para os 2, meia [coloca outra colher por baixo entre o 3.º e o 4.º pudim, balançando o dedo para um e para outro quando refere a "meia"] e outro para este [coloca a 6.ª colher debaixo do 4.º pudim] 6. Porque 3 se nós fizermos 2 [pudins], mas agora mais 3 para cada um [pretende referir conjunto de 2 pudins] ", não se pode afirmar que esta criança não reflete sobre a ação que realizou, ou sobre a elaboração do seu pensamento. Este foi um exemplo dos vários argumentos válidos observados neste estudo. Reveste-se de notável importância atendendo à dificuldade que caracteriza o problema, em que as relações estabelecidas não são de fácil compreensão, uma vez que esta criança teria que perceber 2 pudins como 1 conjunto e estabelecer a correspondência 3:1, 3 colheres para 1 conjunto.

É espectável que crianças mais novas, de 4 anos e algumas de 5 anos, tenham mais dificuldade em se expressar e demonstrar a forma como raciocinaram para resolver os problemas que lhes foram propostos, devido à sua ainda pouca maturidade de expressão. Contudo, é interessante verificar a percentagem de argumentos "Válidos", quer nos problemas de estrutura aditiva, quer nos problemas de estrutura multiplicativa, acima dos 40% na justificação das crianças de 4 anos e acima dos 51% dados pelas crianças de 5 anos. Estes dados parecem contrariar o que é defendido por Piaget (1967), que afirma uma completa ausência de introspeção antes dos 7-8 anos de idade. Este autor defendia que as crianças antes dos 7 anos de idade não sentem necessidade de justificar as suas opções, e manifestam muita dificuldade em explicar como resolvem os problemas e chegam à solução, revelando uma inconsciência de pensamento diante de si próprio e das suas ações. Não sabendo como justificar o seu procedimento, a criança parte da solução obtida, como se já a soubesse previamente e justifica com um meio mais ou menos arbitrário de encontrar o resultado, nem sempre coincidente com a ação desenvolvida por ela.

Ora, neste estudo verifica-se que muitas crianças de 6 anos e algumas de 5 e 4 anos revelam uma capacidade de introspeção relativa ao seu procedimento e têm consciência das relações elaboradas pelo seu pensamento para encontrar o resultado correto, comprovado pela percentagem de argumentos "Válidos". Quando observados e comparados estes valores com os argumentos "Parcialmente Válidos" e "Sem Argumentos", pode-se considerar que as crianças, tendo consciência de terem resolvido corretamente o problema apresentado, preferem ficar caladas do que darem uma justificação que não corresponda ao seu resultado. Isto poderá indicar que as crianças que apresentaram este tipo de argumentos começam a ensaiar a introspeção do seu raciocínio.

Não é possível comparar estes resultados com pesquisas realizadas anteriormente dado o carácter inovador do estudo. Nos estudos realizados por outros autores com crianças em idade pré-escolar, sobre a resolução de problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa (ver Carpenter & Moser, 1982; Riley et al., 1983; Hughes, 1981, 1986; Becker, 1989, 1993; Carpenter et al., 1993; Frydman & Bryant, 1994; Nunes & Bryant, 1991, 1996; Barth et al., 2009), não foram reportados os argumentos apresentados pelas crianças na resolução dos mesmos. Espera-se que, de acordo com a capacidade manifestada por crianças desta idade na justificação do seu pensamento, possam resultar pesquisas que procurem saber mais sobre este aspeto.

6. Considerações finais

Era objetivo deste estudo aferir a compreensão de estrutura aditiva e multiplicativa de crianças do pré-escolar, procurando perceber como raciocinam perante problemas que lhes são apresentados de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa. Desta forma, foram analisados os desempenhos das crianças na resolução de problemas de estruturas aditiva e multiplicativa separadamente, bem como as estratégias que usaram para resolver os problemas propostos e os argumentos apresentados que conduziram a respostas corretas. Tal como em investigações levadas a cabo nos outros países com crianças dos 5 aos 7 anos, era esperado que o sucesso das crianças na resolução dos problemas variasse consoante o tipo de problemas apresentados, o que se veio a confirmar.

Deste estudo ressalta que as crianças dos 4 aos 6 anos conseguem resolver, com sucesso, muitos problemas de estrutura aditiva e multiplicativa. Resulta também que a resolução dos problemas tem diferentes taxas de sucesso, sendo, nos problemas de estrutura aditiva, os problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas aqueles onde os níveis de sucesso são mais baixos, e nos problemas de estrutura multiplicativa, os problemas de Produto de Medidas os que apresentam baixas taxas de sucesso. Contudo, em todos os tipos de problemas registam-se respostas corretas por parte das crianças de 4 e 6 anos, havendo a registar a ausência de respostas corretas no grupo de 5 anos nos problemas de Produto de Medidas. Observa-se ainda que crianças tão novas quanto as deste estudo usam estratégias adequadas para resolver corretamente os problemas, e são muitos os casos em que se observa o recurso a estratégias de contagem e estratégias com factos numéricos, tendo consciência do que fazem e como fazem, argumentando validamente as suas respostas, revelando alguma introspeção do seu pensamento.

Psicólogos e matemáticos defenderam, durante muito tempo, que a multiplicação só podia ser entendida depois de dominada a adição e subtração (Nunes et al., 2009). Ainda hoje, no ensino das operações aritméticas, se começa pela adição e subtração e posteriormente passa-se à multiplicação e divisão. Também é frequente as pesquisas sobre multiplicação e divisão serem realizadas com crianças mais velhas do que as que envolvem adição e subtração. Consequentemente, a maioria das teorias defende que o raciocínio aditivo precede o raciocínio multiplicativo. No entanto, parece não ser bem assim. Desde já há indicadores que sugerem que estruturas aditivas e estruturas multiplicativas podem desenvolver-se em simultâneo, ainda que diferenciadamente.

Depois de conhecer o que as crianças portuguesas do pré-escolar podem fazer sobre problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa, podem estas estruturas de raciocínio ser estimuladas ou não? Pode o estímulo na compreensão de estruturas aditivas interferir na compreensão de estruturas multiplicativas? Ou o estímulo na compreensão de estruturas multiplicativas interferir na de estruturas aditivas? Em Portugal não se realizaram, ainda, estudos suficientes no sentido de ver esclarecidas algumas questões que se prendem com a forma como as crianças em idade pré-escolar raciocinam sobre estas ideias, e como tal subsiste a noção de que outros estudos se poderão realizar no sentido de:

1. Perceber o que as crianças do pré-escolar são capazes de fazer quando lhes são apresentados conjuntamente problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa;
2. Entender como pode ser promovido o desenvolvimento dos raciocínios aditivo e multiplicativo;
3. Compreender como evolui a capacidade das crianças resolverem estas tarefas ao longo do tempo, que alterações se verificam no seu desempenho, nas estratégias que utilizam e nos argumentos que empregam.

CAPÍTULO IV – ESTUDO 2

Introdução

Este capítulo é dedicado ao Estudo 2, realizado com o propósito de compreender o raciocínio das crianças do pré-escolar quando lhes são apresentados alternadamente problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa, e de perceber a possibilidade da promoção dos raciocínios aditivo e multiplicativo. Procura responder às seguintes questões: 1) Como raciocinam as crianças para resolver problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa, quando estes lhes são apresentados conjuntamente, de forma alternada? 2) Poderá ser promovido o desenvolvimento do raciocínio para resolver problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa, em crianças do pré-escolar? 3) Existirá transferência de conhecimento entre a resolução de problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa? 4) Quais os efeitos de uma intervenção centrada na resolução de problemas de estruturas de raciocínio distintas no desempenho das crianças?

Neste capítulo faz-se um breve enquadramento ao estudo levado a efeito e apresentam-se as opções metodológicas. Descrevem-se e analisam-se os resultados obtidos, apresenta-se a discussão dos resultados e as considerações deste estudo.

1. Enquadramento

Alguns autores, entre eles Piaget (Piaget & Szeminska, 1971; Piaget, 1977), defendem que o raciocínio aditivo se desenvolve antes do raciocínio multiplicativo, o que ainda hoje de certa forma é aceite, dado que a multiplicação e a divisão só são ensinadas depois das operações da adição e subtração. Piaget explica a superior dificuldade da multiplicação e divisão argumentando que essas operações representam uma transformação qualitativa importante no pensamento das crianças, pelo que é necessário que se verifique uma qualquer transformação maior no seu pensamento para que elas consigam compreender e realizar estas operações. Para além disso, é apontada a ideia de que alguns aspetos da adição constituem a base da multiplicação, pois uma forma de resolver problemas multiplicativos é através da adição repetida, o mesmo se assumindo para a subtração e a divisão. Porém, de acordo com alguns autores (ver Vergnaud, 1983; Thompson, 1994; Nunes et al., 2009), entender a multiplicação como uma forma complicada da adição é uma forma muito redutora de perceber o raciocínio multiplicativo.

Antes das crianças aprenderem a multiplicação e divisão formalmente, elas já dominam esquemas de ação que usam para resolver problemas de raciocínio multiplicativo, distintos dos esquemas de ação a que recorrem para resolver problemas de raciocínio aditivo, como foi possível dar-se conta nos resultados obtidos no Estudo 1. Os estudos desenvolvidos por diversos investigadores apontam no sentido de as crianças, antes de receberem qualquer instrução formal sobre as operações, conseguirem resolver com estratégias adequadas problemas de adição, subtração, multiplicação e divisão. Estratégias essas que nunca lhes foram ensinadas e que revelam a capacidade que elas têm em utilizar esquemas de ação distintos consoante se trate de problemas de adição e subtração, ou problemas de multiplicação e divisão (ver Kornilaki & Nunes, 2005; Frydman & Bryant, 1988; Becker, 1993; Carpenter et al., 1993; Nunes & Bryant, 1996). O que sugere que as crianças não necessitam de dominar a adição e subtração antes de começarem a construir um raciocínio multiplicativo.

No entanto, dos estudos observados, e apesar de se encontrarem poucos realizados com crianças do pré-escolar envolvendo as quatro operações (ver Carpenter et al., 1993; Park & Nunes, 2001), estes não foram efetuados com o propósito de perceber o efeito de uma estrutura de raciocínio sobre a outra, quando apresentados conjuntamente problemas de estrutura aditiva e multiplicativa. Não se conhecem, também, os efeitos de uma intervenção centrada na resolução de problemas em estruturas de raciocínio distintas, isto é, os efeitos de uma intervenção centrada na resolução de problemas de estrutura aditiva sobre o raciocínio multiplicativo, e, de igual forma, os efeitos de uma intervenção centrada na resolução de problemas de estrutura multiplicativa sobre o raciocínio aditivo das crianças.

Dado que este estudo é decorrente dos resultados do Estudo 1, não foram usados todos os tipos de problemas constantes no estudo anterior, por se considerarem ou de muito fácil resolução, ou, pelo contrário, de muito difícil resolução para crianças desta idade. Neste Estudo 2 foram excluídas as crianças de 4 anos, tendo em conta a diferença significativa de desempenho entre as crianças de 4 e 6 anos em todos os tipos de problemas do Estudo 1.

2. Objeto de estudo

Decorrente das conclusões do Estudo 1, levado a cabo com 180 crianças de 4, 5 e 6 anos a frequentar a educação pré-escolar em Portugal, ficam por esclarecer algumas questões, e que se pretendem ver clarificadas neste segundo estudo. Parece não haver ainda, em Portugal, dados suficientes que permitam perceber como raciocinam as crianças quando lhes são apresentados cumulativamente problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa, estando desta forma os participantes estão sujeitos a um efeito de contaminação de raciocínio; e se pode ser potenciado o desenvolvimento destas estruturas de raciocínio, pelo que tal constitui o propósito deste segundo estudo.

Assim, são objetivos deste estudo:

1. Compreender como raciocinam as crianças quando lhes são apresentados conjuntamente problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa;
    a. Conhecer os desempenhos apresentados pelas crianças na resolução de problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa quando estes lhes são apresentados conjuntamente;
    b. Conhecer as estratégias que as crianças usam na resolução dos problemas apresentados;
    c. Conhecer os argumentos que as crianças apresentam na resolução desses problemas.
2. Perceber se pode ser promovido o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo em crianças do pré-escolar.
3. Perceber se existe transferência de conhecimento na resolução de problemas de uma estrutura de raciocínio para outra.
4. Perceber os efeitos de uma intervenção centrada em problemas de determinada estrutura de raciocínio;
    a. Analisar os desempenhos das crianças durante a intervenção;
    b. Analisar os argumentos das crianças durante a intervenção.

3. Metodologia

Este estudo segue uma metodologia de investigação mista (Creswell, 2003) articulando métodos de investigação quantitativa e qualitativa, encarados aqui como complementares e seguindo o *design* que o mesmo autor denomina de métodos mistos sequenciais, ou *two-phase design*. Pretende-se usufruir, num mesmo estudo, das vantagens oferecidas por ambos os métodos de investigação, analisando, numa primeira fase, os dados seguindo uma abordagem quantitativa e numa segunda fase utilizando métodos qualitativos para compreender o comportamento dos sujeitos.

Ainda que alguns autores considerem estas duas abordagens completamente dissociadas uma da outra, considerando o método quantitativo do domínio das ciências físicas e o método qualitativo das ciências humanas (ver Howe, 1988; Denzin & Lincoln, 1994; Tashakkori & Teddlie, 1998), estas podem ser vistas como complementares ou mesmo simbióticas (Poeschl, 2006). As limitações de um método podem ser contrabalançadas pela potência do outro (Minayo & Sanches, 1993), numa complementaridade que permite um conhecimento mais completo do fenómeno estudado. Desta forma, no decorrer de uma investigação, e mediante as questões que se pretendem ver respondidas, se irão intercalar momentos de investigação qualitativa com momentos de investigação quantitativa, atendendo à robustez e limitações de cada um dos métodos (Serapioni, 2000).

Este segundo estudo, Estudo 2, decorrente dos resultados do Estudo 1, assume-se como um estudo quase-experimental. De acordo com Zimmey (1961), o método experimental, designado em psicologia por experiência científica, é uma observação objetiva de fenómenos que são obrigados a ocorrer em situações severamente controladas e em que um dos fatores é manipulado, enquanto os outros são controlados ou mantidos como invariáveis. Os métodos experimentais são criados de forma a assegurar o maior controlo possível na investigação das causas, estabelecendo meios de controlo, como a manipulação, o controlo e a randomização (Fortin, 2009). O investigador tenta eliminar os fatores além da variável independente. Submete um grupo de participantes a uma intervenção de maneira a manipular a variável definida. Através do controlo procura reduzir ao máximo os enviesamentos que podem colocar em risco a investigação. Para tal, é criado um grupo de participantes que não são sujeitos à intervenção e com os quais vai ser possível comparar os resultados da variável em estudo (Cook & Campbell, 1979; Tuckman, 2000). É necessário ainda que os grupos, experimental e de controlo, tenham indivíduos com os mesmos predicados, de forma a que as características individuais dos participantes esteja em ambos os grupos, conseguido pela randomização, técnica de escolha para criar grupos inicialmente equivalentes (Finger & Rand, 2003; Pitts, Prost, & Winters, 2005; Fortin, 2009).

Os dados deste estudo serão analisados, numa primeira fase, segundo a metodologia quantitativa, procurando perceber os efeitos da intervenção nos resultados obtidos. Numa segunda fase, segundo o paradigma qualitativo, será analisada a intervenção levada a efeito neste estudo nos grupos de participantes. Mais do que pretender estabelecer relações de causalidade e predizer fenómenos, a abordagem qualitativa é aqui percebida como a interpretação e compreensão do comportamento dos sujeitos, isto é, compreender o processo pelo qual as crianças constroem os significados, e descrever em que consistem esses mesmos significados do ponto de vista dos participantes (Bogdan & Biklen, 1994). A ênfase no processo, mais do que no produto, é uma das características essenciais da abordagem qualitativa e que permitirá realizar uma análise de como determinados conceitos começam a fazer parte do raciocínio das crianças, descrevendo e interpretando os dados em toda a sua riqueza, neste caso, o modo como as crianças estruturam o seu pensamento quando resolvem os problemas que lhes são propostos.

É importante perceber como raciocinam as crianças quando estão a resolver um problema, mais do que o resultado dessa resolução. A análise de processos é sempre mais significativa e contem mais informação do que a descrição dos resultados. A análise qualitativa dos processos cognitivos e da aprendizagem requer a observação das transformações que ocorrem, a interpretação do significado das ações e dos processos mentais. Com esta interpretação não se pretende construir regras e leis passíveis de generalização, aplicáveis a todos os indivíduos. Antes se procura identificar os significados em situações específicas, tendo em conta o contexto em que ocorrem (Meira, 1994). O modelo interpretativo microgenético permite um maior nível explicativo das atitudes dos indivíduos. Esta abordagem interpretativa reconhece que as ações são ricas em conteúdos semânticos, todas as atitudes, os comportamentos, as comunicações verbais e não-verbais ganham significados consoante os contextos específicos (Packer & Mergendoller, 1989).

O desenvolvimento cognitivo do indivíduo, para Piaget (1973), é promovido pela transmissão social, a conjugação das relações interpessoais com os fatores mentais concorre para a construção progressiva das operações cognitivas. Ocorrendo o confronto de ideias e pensamentos entre os indivíduos, produzem-se dúvidas, e a necessidade de defender o ponto de vista de cada um gera, desta forma, o desenvolvimento do raciocínio lógico através da interação social do pensamento (Piaget, 1924). Através desta interação social que as crianças estabelecem é possível o desenvolvimento cognitivo desde que, para tal, elas possuam determinadas capacidades cognitivas que permitam a ocorrência de um "conflito sociocognitivo" (Perret-Clermont, 1978), ou seja, um processo de reestruturação intelectual e um progresso no seu desenvolvimento, fruto de pequenos confrontos e pontos de vista diferentes na aquisição do que é aprendido. Para tal, é necessário, segundo Perret-Clermont, que as crianças em pequenos grupos realizem tarefas sob a orientação do adulto. Vygotsky (1994) enfatiza a importância do papel do outro enquanto ser social na construção do conhecimento. O processo da aprendizagem inclui o que aprende, o que ensina e a relação entre eles. Assim, na intervenção, serão propostos problemas às crianças, numa entrevista semidirigida, permitindo que os participantes estruturem o seu pensamento em torno da resolução dos problemas, ao mesmo tempo que o investigador levantará questões que vão no sentido de incentivar o aprofundamento de aspetos importantes que ficariam omissos, caso a entrevista fosse não diretiva (Albarelo et al., 2005).

3.1. Os participantes

Participaram neste estudo 36 crianças de 5 e 6 anos (5 anos, n=18; 6 anos, n=18), a frequentar um Jardim de Infância público de um agrupamento de escolas de Viseu, cujas características eram semelhantes às das crianças do Estudo 1. Os Encarregados de Educação das crianças participantes, as educadoras de infância e o Diretor do Agrupamento de Escolas deram autorização para a realização deste estudo (ver Anexo 3, pp. 489). A Tabela 34 ilustra a média das idades das crianças que participaram neste estudo, em cada grupo etário.

Tabela 34 - Média das idades (desvio padrão) dos participantes do Estudo 2.

EA	PARTICIPANTES	
	5 anos (n=18)	**6 anos (n=18)**
Média	5,06	6,03
Desvio padrão	(.03)	(.02)

Estas crianças residem na área urbana e as suas famílias trabalham no sector terciário, com um nível socioeconómico médio. Integram quatro grupos/turmas diferentes do mesmo Jardim de Infância, mas que interagem entre si em diversos momentos do dia. São crianças estimuladas, que frequentaram o Jardim de Infância público desde os 3 anos de idade, e antes disso estiveram integradas em creches. Desde os 3 anos que pertencem ao mesmo grupo/turma, com a mesma educadora, em grupos heterogéneos, de idades compreendidas entre os 3 e os 6 anos. São grupos de 20 crianças, com redução de número de alunos por turma devido à existência de crianças abrangidas pelo Decreto-Lei n.º 3/2008 de 7 de janeiro.

As suas educadoras têm entre os 25 e 30 anos de serviço, com formação especializada na Escola Superior de Educação, ao nível de Licenciatura e Mestrado. São educadoras cooperantes com a Escola Superior de Educação de Viseu, recebendo estagiárias do curso de Educação Pré-Escolar no decurso dos últimos 3 anos letivos. Considera-se este aspeto importante na medida em que as crianças desta investigação usufruem de tarefas estimulantes e significativas, em todos os domínios ao longo do ano letivo.

3.2. *Design* da investigação

A estrutura deste estudo é apresentada na Figura 47. Contempla um pré-teste, a intervenção e um pós-teste. Todas as crianças participaram de um pré-teste, seguido de um período de intervenção e de um pós-teste.

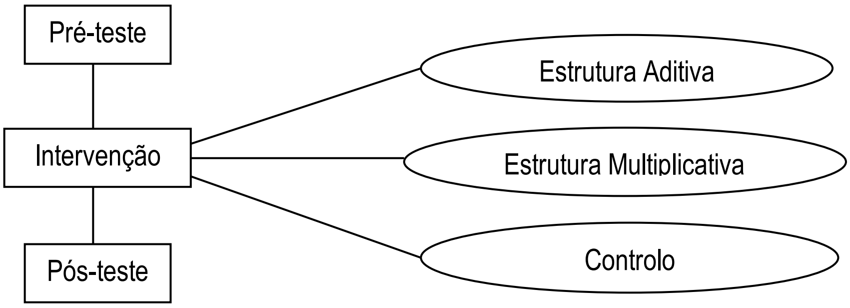


***Figura 47*:** Estrutura do Estudo 2.

Com o objetivo de perceber o efeito de uma intervenção sobre o desempenho das crianças nos problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa, este *design* de investigação (pré-teste - pós-teste) é o que melhor serve o propósito deste estudo. As variáveis em causa são medidas duas vezes, antes e após uma intervenção, o que permite uma comparação inter e intra-participantes, isto é, permite não só a comparação do desempenho dos grupos de participantes sujeitos à intervenção com o grupo de controlo no pós-teste, como também a comparação do desempenho das crianças antes e depois da intervenção, em todos os grupos. Tendo os participantes sido repartidos aleatoriamente por grupos e as suas respostas avaliadas após uma manipulação experimental, assume-se que as diferenças observadas são o reflexo do efeito da intervenção, uma vez que o procedimento da randomização reduz a disparidade das características iniciais dos participantes (Greenhoot, 2003; Fortin, 2009). O investigador consegue mais facilmente, com um *design* "pré-teste – pós-teste", detetar os efeitos de uma intervenção, uma vez que foram testados previamente os níveis ou desempenhos iniciais para que se possa estabelecer uma comparação e avaliar as mudanças produzidas pelo efeito da intervenção.

Os pré- e pós-testes foram semelhantes na sua estrutura, sendo cada um constituído por 28 problemas. Ambos os testes foram apresentados numa entrevista individual a todas as crianças, partida em dois momentos. Esta entrevista foi constituída por 18 problemas de estrutura aditiva (EA), 6 problemas de estrutura multiplicativa (EM) e 4 problemas de controlo (C). Garantiu-se a apresentação às crianças do mesmo número de problemas dentro de cada tipo, de acordo com o elemento ausente, a direção da transformação, e as relações que se estabelecem, no caso dos problemas de estrutura multiplicativa. Assim, cada criança resolveu dois problemas de cada tipo. A Tabela 35 resume os tipos de problemas e os números neles envolvidos apresentados no pré- e no pós-teste.

Tabela 35 - Tipos de problemas apresentados no pré- e no pós-teste.

TIPO DE PROBLEMA		ELEMENTO DESCONHECIDO	QUANTIDADES ENVOLVIDAS	
			1.ª Sessão	2.ª Sessão
EM	Isomorfismo de Medidas	Divisão por Quotas	15÷3=?	12÷?=4
EA	Transformação Ligando Duas Medidas	Transformação (adição)	5+?=8	3+?=5
		Transformação (subtração)	5-?=3	7-?=4
EM	Isomorfismo de Medidas	Multiplicação	3x2=?	2x4=?
EA	Transformação Ligando Duas Medidas	Início (subtração)	?-6=2	?-2=4
		Início (adição)	?+3=7	?+2=5
EM	Isomorfismo de Medidas	Divisão Partitiva	12÷3=?	15÷3=?
EA	Composição de Duas Medidas	Parte	7=4+?	8=2+?
	Relação Estática Ligando Duas Medidas	Comparado (adição)	3 e +2	4 e +2
		Comparado (subtração)	5 e -2	5 e -3
C	Geometria	Regularidades	------	------
EA	Relação Estática Ligando Duas Medidas	Diferença (adição)	7 e 4	5 e 8
		Diferença (subtração)	5 e 2	6 e 2
C	Geometria	Polígonos	------	------

Os diferentes tipos de problemas foram apresentados alternadamente às crianças, seguindo uma ordem aleatória mas igual para todas as crianças de forma a conhecer também o efeito de contaminação dos diferentes tipos de raciocínio na resolução dos problemas. A ordem de apresentação dos problemas no pré-teste foi a seguida também no pós-teste.

No momento de intervenção, as crianças foram distribuídas por três grupos, que trabalhariam numa só condição, estrutura aditiva (EA), estrutura multiplicativa (EM) e tarefas de controlo (C), conforme ilustra a Figura 48. Em cada grupo de intervenção, os participantes foram divididos em grupos de quatro elementos cada, de forma a estimular mais facilmente a discussão aquando da resolução dos problemas.

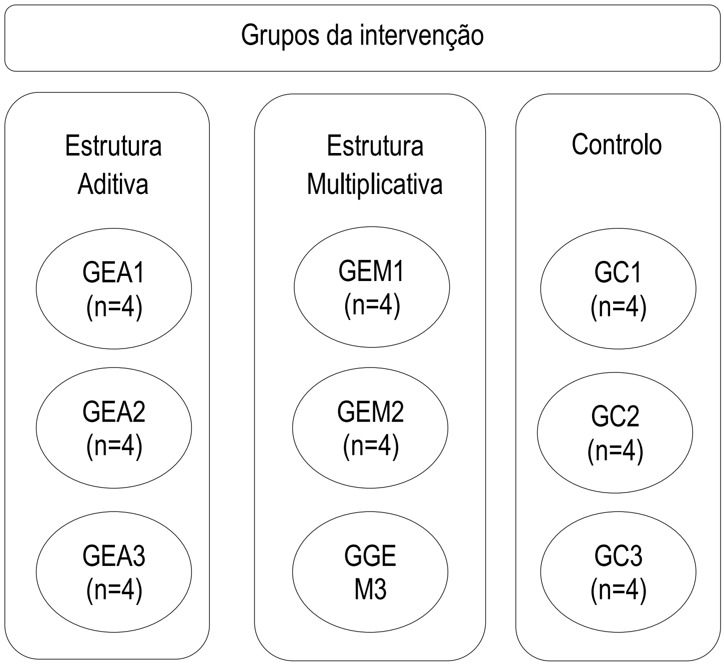


Figura 48: Constituição dos grupos de intervenção.

Assim, para cada condição constituíram-se três grupos: EA1, EA2 e EA3 que designam, respetivamente, os grupos 1, 2 e 3 que trabalharam em problemas de estrutura aditiva; os grupos EM1, EM2 e EM3, os grupos 1, 2 e 3 que trabalharam em problemas de estrutura multiplicativa; e C1, C2 e C3, os grupos de controlo 1, 2 e 3, respetivamente.

Foi garantido que os grupos fossem semelhantes entre si, não só em número mas em idade e níveis de desempenho. Procurou-se que, em cada um dos pequenos grupos houvesse duas crianças de 5 anos e duas de 6 anos, bem como semelhança nos níveis de desempenho registados com base nos resultados do pré-teste. Cada grupo foi constituído por uma criança com bom desempenho e outra com pior desempenho, dentro de cada idade. Todos os grupos foram constituídos por mais do que uma criança da mesma sala/turma, para que estivesse facilitada a interação natural entre elas, embora todas as crianças estivessem já familiarizadas entre si devido a atividades e convívios diários.

3.3. As tarefas

As tarefas apresentadas às crianças nos pré- e pós-testes procuraram ser diversificadas abrangendo os diferentes tipos de problemas de estrutura aditiva e multiplicativa, tendo sido escolhidos para este estudo, os tipos de problemas que, no Estudo 1 obtiveram entre 20% e 80% de sucesso (ver Estudo 1). Esta opção teve como referência os quartis observados nos níveis de sucesso do Estudo 1. Procurou-se criar um instrumento que garantisse uma diversidade de resoluções aos problemas apresentados, e exequível nas sessões previstas, para crianças desta idade.

Assim, nos problemas de estrutura aditiva foram considerados: i) Composição de Duas Medidas, com a parte desconhecida; ii) Transformação Ligando Duas Medidas, com o início e o elemento de transformação desconhecidos; iii) Relação Estática Ligando Duas Medidas, com a diferença e o elemento comparado desconhecidos. Nos problemas de estrutura multiplicativa foram considerados: iv) Isomorfismo de Medidas, tendo sido selecionados os problemas de Multiplicação, de Divisão Partitiva e Divisão por Quotas. Foram apresentados problemas de geometria que se constituíram como tarefas de controlo. Nestas tarefas foram tidos em conta problemas e materiais que habitualmente fazem parte do quotidiano das crianças, como problemas que envolvem Regularidades e sequências, assim como a exploração das figuras geométricas do Tangram.

3.3.1. As tarefas do pré- e do pós-teste

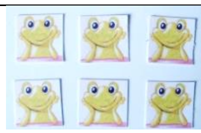
Nas tarefas do pré- e do pós-teste garantiu-se o mesmo número de problemas dentro de cada tipo, de acordo com o elemento ausente, a direção da transformação, e as relações que se estabelecem, no caso dos problemas de estrutura multiplicativa. Assim, cada criança resolveu dois problemas de cada tipo. A Tabela 36 resume a distribuição do número de problemas de cada tipo aplicados no Estudo 2.

Tabela 36 - Número de problemas de cada tipo utilizados no Estudo 2.

	TIPO DE PROBLEMA	ELEMENTO DESCONHECIDO	NÚMERO DE PROBLEMAS	
Estrutura Aditiva	Composição de Duas Medidas	Parte		2 Problemas
	Transformação Ligando Duas Medidas	Transformação	(Adição)	2 Problemas
			(Subtração)	2 Problemas
		Início	(Adição)	2 Problemas
			(Subtração)	2 Problemas
	Relação Estática Ligando Duas Medidas	Diferença	(Adição)	2 Problemas
			(Subtração)	2 Problemas
		Comparado	(Adição)	2 Problemas
			(Subtração)	2 Problemas
Estrutura Multiplicativa	Isomorfismo de Medidas	Elemento desconhecido:	(Multiplicação)	2 Problemas
			(Divisão Partitiva)	2 Problemas
			(Divisão por Quotas)	2 Problemas
Controlo	Geometria	Regularidades		2 Problemas
		Polígonos		2 Problemas

As Tabelas 37 a 39 apresentam os problemas propostos às crianças no pré-teste do Estudo 2, adaptados de Vergnaud (1981, 1982, 1983), Riley et al. (1983), Nesher (1988), Carpenter et al. (1999) e Nunes et al. (2005), usando a classificação de Vergnaud (1982, 1983).

Tabela 37 - Problemas de estrutura aditiva apresentados às crianças no pré-teste.

ESTRUTURA ADITIVA (PRÉ-TESTE)			
TIPO DE PROBLEMA	**PROBLEMA**		**MATERIAIS**
Composição de Duas Medidas	A mãe da Rita está a preparar um tabuleiro de bolos para o forno. Ela fez 7 bolos. Quatro já estão no tabuleiro e os outros ainda estão na banca para lá colocar. Quantos estão na banca?	7=4+?	
Transformação Ligando Duas Medidas	Num lago estavam 5 rãs. Chegaram mais algumas e agora já lá estão 8. Quantas rãs vieram juntar-se às que já lá estavam?	5+?=8	
	O Paulo tinha 5 balões, mas rebentaram alguns e agora ele só tem 3 balões. Quantos balões rebentaram?	5-?=3	
	O Pedro apanhou algumas flores no jardim para dar à mãe. Perto de casa apanhou mais 3. Quando chegou ao pé da mãe deu-lhe 7 flores. Quantas flores apanhou no jardim?	?+3=7	
	A Maria tinha algumas saias no armário. Foram 6 para lavar e agora só lá tem 2. Quantas saias tinha a Maria no armário, antes de irem para lavar?	?-6=2	
Relação Estática Ligando Duas Medidas	Na sala da Bela há 7 meninos e 4 cadeiras. Quantos meninos há a mais do que cadeiras?	7 e 4	
	Na lancheira da Rita estão 5 bananas e 2 morangos. Quantos morangos estão a menos do que bananas?	5 e 2	

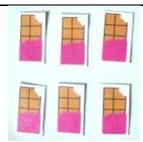
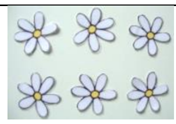
	O Pedro tem 3 chocolates. A Inês tem mais 2 do que o Pedro. Quantos chocolates tem a Inês?	3 +2	
	A Ana tem 5 flores. A Sofia tem menos 2 do que a Ana. Quantas flores tem a Sofia?	5 -2	

Tabela 38 - Problemas de estrutura multiplicativa apresentados às crianças no pré-teste.

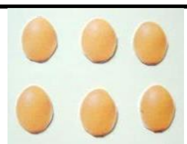
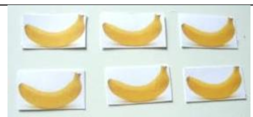
ESTRUTURA MULTIPLICATIVA (PRÉ-TESTE)			
TIPO DE PROBLEMA	**PROBLEMA**		**MATERIAIS**
Isomorfismo de Medidas	A Joana tem 3 galinhas. Cada galinha pôs 2 ovos. Quantos ovos puseram, ao todo, as 3 galinhas?	3X2=?	
	O Tiago vai dar 12 bananas a 3 macacos. Todos têm que comer a mesma quantidade. Quantas bananas vai comer cada macaco?	12÷3=?	
	A professora tem 15 rebuçados para dar aos meninos. Cada menino vai receber 3 rebuçados. A quantos meninos a professora vai dar rebuçados?	15÷?=3	

Tabela 39 - Problemas de controlo apresentados às crianças no pré-teste.

CONTROLO (PRÉ-TESTE)		
TIPO DE PROBLEMAS	**PROBLEMA**	**MATERIAIS**
Regularidades	Continua o friso apresentado: 	
Tangram	Identifica as figuras que têm 3 bicos. 	

As tarefas apresentadas às crianças no pós-teste foram idênticas às que haviam sido apresentadas no pré-teste, com alteração do contexto, mas preservando as quantidades envolvidas e a sequência de aplicação dos problemas, para desta forma melhor aferir a evolução de desempenho entre os dois testes. As Tabelas 40 a 42 apresentam os problemas propostos no pós-teste, adaptados dos mesmos autores.

Tabela 40 - Problemas de estrutura aditiva apresentados às crianças no pós-teste.

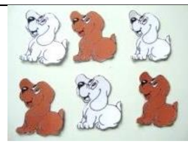
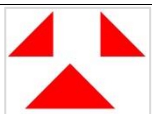
ESTRUTURA ADITIVA (PÓS-TESTE)			
TIPO DE PROBLEMA	**PROBLEMA**		**MATERIAIS**
Composição de Duas Medidas	A Maria tem 8 bonecas, mas só 2 estão arrumadas dentro da caixa. Quantas estão cá fora?	8=2+?	
Transformação Ligando Duas Medidas	O João tinha 3 moedas. Fez anos e os primos deram-lhe mais algumas. Agora o João já tem 5 moedas. Quantas moedas lhe deram os primos?	3+?=5	
	A Mara tinha 7 bolachas. Deu algumas ao irmão e agora só tem 4. Quantas bolachas deu ao irmão?	7-?=4	
	O Tiago tinha alguns iogurtes na mochila. A mãe pôs-lhe mais 2 e ele ficou com 5. Quantos iogurtes tinha no início?	?+2=5	
	No jardim estavam alguns coelhos. Começou a chover e 2 foram embora. Ficaram lá 4. Quantos coelhos estavam no jardim, antes de começar a chover?	?-2=4	
Relação Estática Ligando Duas Medidas	A Ana tem 5 camisolas e 8 saias. Quantas saias estão a mais do que camisolas?	5 e 8	
	O Pedro tem 6 bolachas e a Bela tem 2 bolachas. Quantas bolachas tem a Bela a menos do que o Pedro?	6 e 2	
	O João tem 4 cachorros. A Maria tem mais 2 do que tem o João. Quantos cachorros tem a Maria?	4 +2	
	A Rita tem 5 bolos, o Pedro tem menos 3 bolos do que a Rita. Quantos bolos tem o Pedro?	5 -3	

Tabela 41 - Problemas de estrutura multiplicativa apresentados às crianças no pós-teste.

ESTRUTURA MULTIPLICATIVA (PÓS-TESTE)			
TIPO DE PROBLEMA	**PROBLEMA**		**MATERIAIS**
Isomorfismo de Medidas	A Maria tem 2 bolos. Em cada bolo ela pôs 4 morangos a enfeitar. Quantas morangos ela pôs ao todo nos 2 bolos?	2X4=?	
	Na oficina, o Rui vai arrumar 15 rodas em 3 caixas. As caixas têm todas a mesma quantidade de rodas. Quantas rodas ficam em cada caixa?	15÷3=?	
	A mãe tem 12 bolachas para dar aos seus filhos. Cada filho vai receber 4 bolachas. A quantos filhos a mãe vai dar bolachas?	12÷?=4	

Tabela 42 - Problemas de controlo apresentados às crianças no pós-teste.

CONTROLO (PÓS-TESTE)		
TIPO DE PROBLEMA	**PROBLEMA**	**MATERIAIS**
Regularidades	Completa a sequência atendendo à forma:	
Tangram	Usando as peças do Tangram (2 triângulos pequenos e 1 médio), faz um novo triângulo.	

3.3.2. As tarefas da intervenção

As tarefas de intervenção, num total de 12 problemas, foram organizadas prevendo quatro sessões em cada grupo. Em cada sessão foram apresentados às crianças três problemas específicos de cada estrutura de raciocínio, com vista à sua resolução discutida em grupo. As sessões foram organizadas por grau de dificuldade, do mais fácil para o mais difícil.

As tarefas apresentadas às crianças que participaram no grupo de estrutura aditiva contemplaram 4 problemas de Composição de Duas Medidas, 4 problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com início desconhecido e 4 problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com o elemento de transformação desconhecido.

As tarefas apresentadas no grupo de crianças que trabalharam problemas de estrutura multiplicativa contemplaram 4 problemas de Divisão Partitiva, 4 de Multiplicação, e 4 de Divisão por Quotas, todos os problemas de Isomorfismo de Medidas.

As tarefas apresentadas às crianças que participaram no grupo de controlo consistiram em tarefas de geometria, 4 problemas de Regularidades, 4 problemas com o Tangram e 4 problemas com o Geoplano.

Procurou-se o mesmo número de problemas em todos os grupos de intervenção, pelo que foram excluídos da intervenção os problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, de estrutura aditiva. Porém, considerou-se importante perceber se, mesmo não sendo trabalhados no momento de intervenção, o facto de as crianças trabalharem outros problemas provocaria alterações de desempenho neste tipo de problemas quando comparados os resultados do pré- e do pós-teste.

As Tabelas 43 a 45 ilustram os tipos de problemas apresentados às crianças em cada tipo de grupo de intervenção, adaptados dos mesmos autores (Vergnaud, 1981, 1982, 1983; Riley et al., 1983; Nesher, 1988; Carpenter et al., 1999; Nunes et al., 2005).

Tabela 43 - Problemas apresentados na intervenção ao grupo que trabalhou sobre estrutura aditiva (EA).

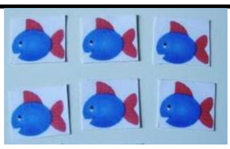
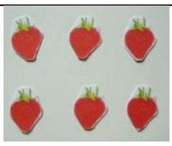
PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA		
TIPO DE PROBLEMA	**PROBLEMA**	**MATERIAIS**
Composição de Duas Medidas (Parte desconhecida)	A Rita e o João foram à pesca e pescaram, ao todo 7 peixes. A Rita pescou 4. Quantos peixes pescou o João?	
	A Teresa e o Rui ganharam 9 rebuçados. A Teresa ganhou 6 rebuçados. Quantos rebuçados ganhou o Rui?	
Transformação Ligando Duas Medidas (Transformação desconhecida)	O Xico tinha 2 morangos num cesto, a avó deu-lhe mais alguns e ele ficou com 6. Quantos morangos lhe deu a avó?	
	A Eva levava 9 ovos numa cesta, deixou cair a cesta e partiram-se alguns. Chegou a casa só com 3 ovos. Quantos ovos se partiram?	
Transformação Ligando Duas Medidas (Início Desconhecido)	Na casinha das bonecas estavam algumas meninas a brincar e juntaram-se mais 3 meninas. Agora estão lá 5. Quantas meninas estavam a brincar na casinha das bonecas, no início?	
	A professora tinha alguns lápis, deu 6 aos meninos e ficou com 2. Quantos lápis tinha no início?	

Tabela 44 - Problemas apresentados na intervenção ao grupo que trabalhou sobre estrutura multiplicativa (EM).

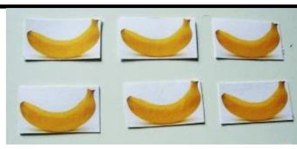
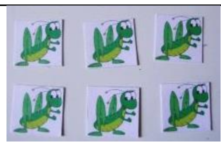
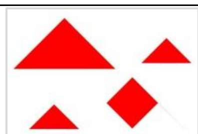
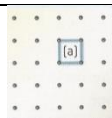
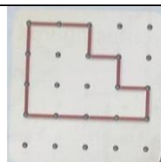
PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA		
TIPO DE PROBLEMA	**PROBLEMA**	**MATERIAIS**
Divisão Partitiva	O macaco Xico escondeu 12 bananas nos 3 bolsos das suas calças. Um bolso não pode ter mais bananas que o outro. Quantas bananas escondeu em cada bolso?	
	A Sara tem 10 chocolates para dar a 5 meninos. Quantos chocolates vai receber cada menino, se todos receberem a mesma quantidade?	
Multiplicação	O Alexandre foi à garagem do tio e encontrou 3 bicicletas sem rodas. Cada bicicleta terá que ter 2 rodas. Quantas rodas são necessárias para compor as bicicletas todas?	
	O Luís tem 3 caixas de lápis. Cada caixa tem 4 lápis. Quantos lápis tem, ao todo, o Luís?	
Divisão por Quotas	O Luís tem uma coleção de gafanhotos. Ele tem 12 gafanhotos colocados em caixas. Cada caixa tem 3 gafanhotos. Quantas caixas têm gafanhotos?	
	A professora tem 12 meninos na sua turma e ela quer sentar os meninos em grupos nas mesas. Cada mesa vai ter 4 meninos. De quantas mesas precisa?	

Tabela 45 - Problemas apresentados na intervenção ao grupo de controlo (C).

PROBLEMAS DE CONTROLO		
TIPO DE PROBLEMA	**PROBLEMA**	**MATERIAIS**
Regularidades	Continua o friso apresentado 	
	Descobre o intruso 	
Tangram	Cobre a casa com as peças do Tangram 	
	Com 3 triângulos e 1 quadrado, constrói um novo quadrado	
Geoplano	Constrói um quadrado sem pinos no interior	
	Constrói no Geoplano a figura que é apresentada no papel	

3.4. Os procedimentos adotados

3.4.1. Aplicação do pré- e do pós-teste

O pré- e o pós-teste foram aplicados a cada criança individualmente, sob a forma de entrevista, com recurso a histórias e à concretização com materiais. Decorreu ao longo de 3 semanas cada um, conforme mostra a Tabela 46.

Tabela 46 - Calendarização do pré- e pós-teste.

CALENDARIZAÇÃO					
	segunda-feira	**terça-feira**	**quarta-feira**	**quinta-feira**	**sexta-feira**
21 a 24 abril	21	22	23	24	Feriado
28 abril a 2 maio	28	29 PRÉ-TESTE	30	Feriado	2
5 a 9 maio	5	6	7	8	9
12 a 30 maio	Intervenção				
3 a 7 junho	3	4	5	6	7
10 a 14 junho	10	11 PÓS-TESTE	12	13	14
17 a 21 junho	17	18	19	20	21

Em cada entrevista foi apresentado às crianças uma bateria de 28 problemas, englobando problemas de estrutura aditiva, problemas de estrutura multiplicativa e problemas de controlo. Foram disponibilizados, desde o início das tarefas, materiais manipuláveis alusivos às histórias para concretizar os problemas propostos e ajudar na sua resolução, caso a criança assim o pretendesse. A entrevista foi estruturada (Bogdan & Biklen, 1994), sendo que a ordem das questões foi pré-estabelecida, igual para todas as crianças, seguindo o grau de dificuldade, do mais fácil para o mais difícil, e que consta do guião previamente definido (ver Anexo 2A, pp. 455-464 e Anexo 2C, pp. 478-487).

As entrevistas decorreram no Jardim de Infância que as crianças frequentavam, numa sala cedida para esse efeito, para que as crianças permanecessem num ambiente que lhes fosse familiar. Pretendia-se que as crianças não sentissem ansiedade causada por um ambiente estranho, o que poderia comprometer o seu desempenho. Atendendo ao elevado número de problemas propostos (28), cada criança foi entrevistada em dois momentos, dois dias consecutivos. Cada entrevista demorou aproximadamente 15 minutos e teve o mesmo tipo de problemas em cada momento, com a mesma ordem de apresentação nas duas sessões.

Na apresentação de cada problema da entrevista do pré- e do pós-teste, e antes de principiar o enunciado, a entrevistadora colocou à disposição das crianças o material necessário à sua resolução. Naturalmente curiosas, a sua tendência era para explorarem os materiais, sem atenderem à sua finalidade. Assim, a entrevistadora optou por apresentar primeiro o material para que este não constituísse, *à posteriori*, um fator distrator relativamente ao problema. De seguida, era apresentada a história do problema, que as crianças resolviam com recurso ao material presente, ou com outro tipo de estratégia. Se, ao longo da resolução, as crianças mostrassem terem já esquecido as quantidades envolvidas, a entrevistadora relembrava o problema, transmitindo-o da mesma forma. No decorrer da resolução a entrevistadora não emitia qualquer juízo de valor, nem verbal, nem de maneira expressiva, de modo a não condicionar o pensamento da criança.

Quando as crianças davam uma resposta, a entrevistadora solicitava-lhes que explicassem como fizeram para resolver o problema, o seu procedimento, e a justificação para a sua resposta. Essas questões "como fizeste?" e "porque dizes que é …?" eram colocadas em todos os problemas e a todas as crianças, independentemente do resultado estar correto ou incorreto. Apesar de não haver qualquer sugestão no raciocínio da criança na resolução do problema, no final da resposta dada pelas crianças, a entrevistadora insistia para que elas mostrassem e explicassem, o melhor que conseguiam, o seu procedimento e justificação da solução apontada por si.

3.4.2. Procedimentos adotados na intervenção

A intervenção ocorreu na semana seguinte à aplicação do pré-teste, com a duração total de 3 semanas, tendo uma semana de intervalo (ver Tabela 47).

Tabela 47 - Calendarização da intervenção.

CALENDARIZAÇÃO					
	Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira
12 a 16 de maio	EA1 EA2 EA3 C2 C3	EM1 EM2 EM3 C1	EA1 EA2 EA3 C2 C3	EM1 EM2 EM3 C1	
19 a 23 de maio					
26 a 30 de maio	EA1 EA2 EA3 C2 C3	EM1 EM2 EM3 C1	EA1 EA2 EA3 C2 C3	EM1 EM2 EM3 C1	

Todos os participantes estiveram sujeitos ao mesmo intervalo de tempo entre as sessões. A intervenção foi planeada em quatro sessões, organizadas por grau de dificuldade, dos problemas mais fáceis para os mais difíceis, tendo por base os resultados do Estudo 1. As duas primeiras sessões de intervenção foram realizadas na 1.ª semana de intervenção, espaçadas com um dia de intervalo entre si. A 2.ª semana foi de pausa, não havendo qualquer intervenção junto das crianças. As últimas duas sessões realizaram-se na 3.ª semana da intervenção, espaçadas igualmente de um dia de intervalo entre si. Cada sessão teve a duração entre 12 e 17 minutos.

Em cada sessão foram trabalhados três problemas. O mesmo tipo de problemas foi explorado duas vezes em cada semana, em todos os grupos de intervenção. Cada criança trabalhou, em grupo, o mesmo tipo de problemas quatro vezes, num total de 12 problemas (ver Anexo 2B, pp. 465-477).

As tarefas foram propostas a cada grupo de crianças numa entrevista semidirigida, seguindo a mesma ordem em todos os grupos. O problema era inicialmente apresentado às crianças, ainda sem material à disposição, para que a sua atenção se focalizasse na história do problema e no objetivo da resposta, ou seja, qual o elemento ausente no problema e sobre o qual recaía a pergunta. Após uma primeira apresentação era colocado em cima da mesa o material disponibilizado para a concretização e manipulação dos dados do problema. Em seguida, era novamente apresentado o problema para relembrar as quantidades de cada parcela, já que as crianças participantes são tão novas e passíveis de dispersar a sua atenção com elementos distratores como os materiais. Cada criança resolveria o problema proposto e explicitaria aos colegas o que fez, como fez e porque fez. Procurou-se que cada criança conseguisse resolver o problema, mesmo que todos os colegas já tivessem encontrado a solução e esta precisasse de ajuda acrescida da investigadora ou de mais materiais. Ao longo da resolução de cada problema, a investigadora ia colocando questões no sentido de as crianças irem desenvolvendo o seu raciocínio. Estas questões procuravam que as crianças clarificassem a interpretação que faziam do problema, os seus procedimentos e devida argumentação.

Uma semana após ter terminado as sessões de intervenção, realizou-se a entrevista individual a todas as crianças, com a aplicação do pós-teste. As tarefas, semelhantes às do pré-teste, incluíam problemas de estrutura aditiva, multiplicativa e problemas de geometria.

3.5. A recolha de dados

A recolha de dados foi efetuada com recurso a uma câmara de vídeo e a notas de campo da investigadora, de modo a melhor registar e estudar detalhes que de outra forma poderiam ser descurados.

O registo em vídeo apresenta-se como uma ferramenta única para a investigação microgenética, ao captar a infinidade de ações comunicativas que são levadas a cabo através dos gestos e expressões faciais. Contudo, e dado que o registo em vídeo não se constitui por si só como um instrumento completo, devido não só à limitação da perceção do campo visual, mas também à captação de muitos ruídos indesejados à investigação (Roschelle et al., 1991), a investigadora recorreu também a notas pessoais (Savoie-Zajc, 2003) como forma de complementar a informação que foi sendo recolhida.

As notas de campo assumem-se como ferramentas de registo das observações e reflexões complementares decorrentes do processo de investigação. Elas afirmam-se como um relato escrito do que o investigador vê, ouve e experiencia no decorrer da recolha os dados (Bogdan & Biklen, 1994). As notas que a investigadora recolhe ao longo da entrevista permite reter as informações mais importantes, anotar aspetos que pretende ver clarificados, para além de que permitem salvaguardar a recolha de informação em caso de avaria técnica dos instrumentos de vídeo. As notas pessoais recolhidas em campo possibilitam a visualização para além do evidente e do óbvio (Halmenschlager, 2001), permitem um registo detalhado das atitudes e reações das crianças durante a sua intervenção e participação nas entrevistas, captar e registar o contexto, os sentidos e os significados dos gestos, das expressões não-verbais, expressões faciais, portadoras de mensagem (Savoie-Zajc, 2003) e que, devido a movimentações da postura das crianças, podem não ficar registados com a videografia.

3.6. Validade

A validade interna foi obtida avaliando a consistência interna dos problemas apresentados, em cada teste, através do cálculo do coeficiente Alfa de Cronbach para cada um dos testes aplicados.

Os testes adaptados neste estudo, e anteriormente aplicados por investigadores em realidades internacionais (ver Vergnaud, 1982, 1983; Riley et al., 1983; Carpenter et al., 1999), foram previamente testados com as crianças portuguesas com recurso a testes piloto, sendo que os seus resultados garantem a validade externa deste instrumento. A validade externa foi, ainda, garantida pela correlação estabelecida entre a avaliação do raciocínio das crianças feita pelas suas educadoras, atendendo ao que era esperado para cada nível etário, e os resultados no pré-teste. As educadoras classificaram o raciocínio de cada criança, numa escala de tipo Likert, cujos valores variaram entre 1 (*raciocínio muito abaixo da média*) e 5 (*raciocínio muito acima da média*), mediante o seu conhecimento da criança decorrente das atividades próprias do seu contacto diário. Foi estabelecida uma correlação entre as variáveis, verificando-se uma correlação positiva forte ($r=0,8$, $p<0.01$), segundo o teste de correlação de Pearson, indicando que a avaliação das educadoras sobre as crianças participantes na intervenção está de acordo com o seu desempenho nas tarefas apresentadas.

3.7. Análise dos dados

Os dados do pré- e do pós-teste foram analisados com recurso ao software de Estatística Statistical Package for Social Sciences (SPSS) versão 20. Os dados da intervenção foram analisados seguindo métodos qualitativos.

4. Resultados

É objetivo deste estudo compreender como é que as crianças do pré-escolar raciocinam quando resolvem, simultaneamente, problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa. Para tal, procura-se perceber os seus desempenhos, estratégias e argumentos estando sujeitas ao efeito de contaminação de raciocínio, quando problemas de estrutura aditiva e multiplicativa são apresentados alternadamente. Pretende-se também perceber se pode ser promovido o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo em crianças do pré-escolar. Neste sentido, analisam-se os desempenhos, as estratégias e os argumentos das crianças na resolução de problemas de estrutura aditiva e multiplicativa, antes e depois de uma curta intervenção para promover o seu raciocínio neste âmbito. O estudo procura ainda perceber se existe transferência de conhecimento na resolução de problemas de uma estrutura de raciocínio para outra. Por fim, o estudo procura perceber os efeitos de uma intervenção centrada em problemas de determinada estrutura de raciocínio, tentando analisar os desempenhos, as estratégias e os argumentos das crianças durante a intervenção.

A análise dos resultados organiza-se em quatro grandes partes. Uma primeira parte, centrada na análise dos resultados do pré-teste, procura perceber como é que as crianças desta idade (5 e 6 anos) compreendem os problemas de estrutura aditiva e multiplicativa quando lhes são apresentados alternadamente, respondendo às questões: (a) que desempenhos apresentam; (b) que estratégias usam para resolver os problemas propostos; (c) que argumentos utilizam para as opções tomadas na sua resolução. A segunda parte recai sobre a análise dos resultados do pós-teste. Procura perceber como é que as crianças compreendem os problemas propostos de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa, depois de submetidas a uma intervenção, procurando saber da possibilidade de promover o desenvolvimento do raciocínio de estruturas aditiva e multiplicativa em crianças do pré-escolar. Para tal, procura-se a resposta às questões: (a) que desempenhos apresentam no pós-teste; (b) que estratégias usam para os resolver; (c) que argumentos utilizam para justificar as opções tomadas na resolução. A terceira parte tenta perceber se existe transferência de conhecimentos de uma estrutura de raciocínio para outra, isto é, se uma intervenção centrada nos problemas de estrutura aditiva promove o desempenho na resolução de problemas de estrutura multiplicativa, e vice-versa. Por último, na quarta parte da análise apresentada nesta secção resulta a análise da intervenção que ocorreu entre o pré- e o pós-teste, com a finalidade de perceber o raciocínio das crianças na resolução dos problemas, durante a intervenção a que estiveram sujeitas sobre uma determinada estrutura de raciocínio.

4.1. Como raciocinam as crianças quando lhes são apresentados conjuntamente problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa, de forma alternada?

Com vista a avaliar a consistência interna dos problemas apresentados e realizados com as crianças no pré-teste, aplicou-se o teste estatístico alfa de Cronbach, tendo-se obtido um valor de $\alpha=0.86$, o que corresponde a uma consistência interna boa (ver George & Mallery, 2003), sendo possível a análise dos itens do questionário.

4.1.1. Desempenho das crianças na resolução de problemas no pré-teste

Para cada criança foram contabilizadas as resoluções certas e erradas em cada problema, atribuindo 1 valor a cada resposta certa e 0 a cada resposta errada. A análise ao número de problemas resolvidos corretamente, de um total de 28 problemas propostos, possibilita uma ideia acerca do sucesso que as crianças de 5 e 6 anos têm na resolução de problemas de estrutura aditiva e multiplicativa, quando estes lhes são apresentados simultaneamente. A média do total de respostas certas no pré-teste é de 14.9 com um desvio padrão de 5.7.

A média das repostas corretas ronda os 50% dos problemas apresentados às crianças. Considerando o coeficiente de dispersão, constata-se que a variabilidade das respostas é elevada. Encontra-se uma criança a acertar a totalidade dos problemas, bem como 2 crianças que apenas acertam 5 dos problemas propostos. Metade das crianças acertam mais de metade dos problemas propostos e apenas 3 crianças não chegam a ter sucesso para além dos 25% dos problemas apresentados.

As tarefas apresentadas às crianças abrangiam problemas de estrutura aditiva, problemas de estrutura multiplicativa e problemas de controlo. No sentido de perceber se o seu desempenho variava de acordo com a estrutura de raciocínio e com o tipo de problemas apresentado, foram analisados os níveis de desempenho das crianças, de acordo com o tipo de problema, em cada estrutura de raciocínio. Porque os problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa não existem em igual número, foram calculadas proporções de respostas corretas em cada condição. A Tabela 48 resume a média da proporção de respostas certas e o desvio padrão dos problemas propostos no pré-teste, de acordo com o tipo de estrutura de raciocínio presente no problema.

Tabela 48 - Média das proporções (desvio padrão) do número de respostas corretas das crianças no pré-teste, de acordo com o tipo de estrutura de raciocínio.

TIPO DE ESTRUTURA DE RACIOCÍNIO	**MÉDIA (desvio padrão)**
Estrutura Aditiva (EA)	.52 (.23)
Estrutura Multiplicativa (EM)	.38 (.31)
Controlo	.79 (.18)

Os problemas que obtiveram maior taxa de sucesso foram os problemas de controlo, o que já era esperado, dado que este tipo de tarefas está presente no quotidiano das crianças. No entanto, e porque as tarefas de controlo surgem, neste estudo, como uma forma de reduzir o efeito das variáveis estranhas que possam prejudicar a validade dos resultados do estudo, fornecendo um ponto de comparação para avaliar a transformação ocorrida nas variáveis dependentes do estudo e validar as hipóteses de causalidade (Fortin, 2009; Christensen et al., 2011), não serão alvo de análise. A análise detalhada dos resultados do pré-teste irá focalizar-se apenas nos problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa. Salienta-se o elevado coeficiente de dispersão que se verifica sobretudo nos problemas de estrutura multiplicativa, o que indica uma grande variedade de desempenhos, que vão dos 0% de sucesso aos 100% (ver Gráficos 20 a 22).

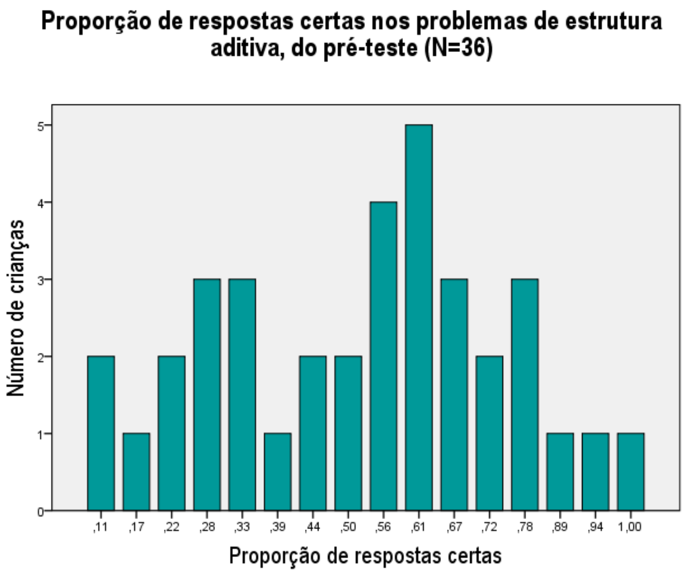


Gráfico 20: Distribuição da proporção das respostas certas nos problemas de estrutura aditiva, do pré-teste.

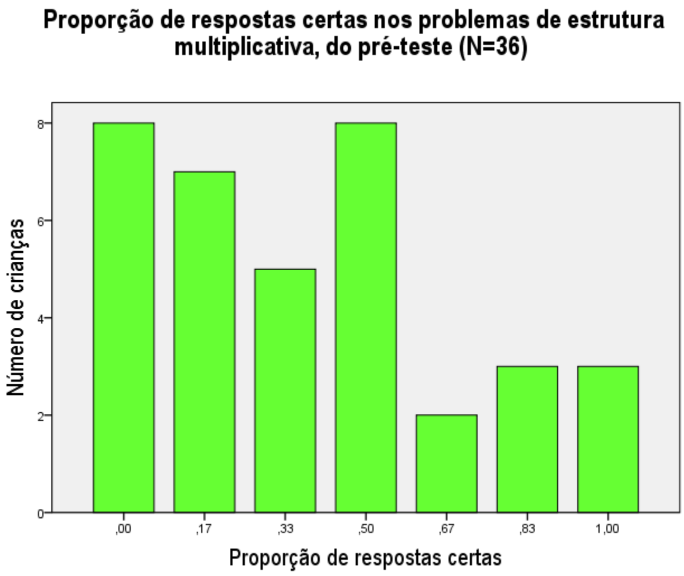


Gráfico 21: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de estrutura multiplicativa, do pré-teste.

Gráfico 22: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de controlo, do pré-teste.

Uma análise descritiva sugere melhores desempenhos nos problemas de estrutura aditiva do que nos problemas de estrutura multiplicativa. Ainda assim, o sucesso das crianças nos problemas de estrutura aditiva não é muito elevado, pois apresenta percentagens que não vão muito além dos 50%. Cerca de 53% das crianças conseguiram resolver corretamente pelo menos metade dos problemas de estrutura aditiva, enquanto que apenas 44% resolveram com sucesso pelo menos metade dos problemas de estrutura multiplicativa. No entanto, destas, três crianças responderam corretamente à totalidade dos problemas propostos.

Foi avaliada a normalidade das distribuições dos resultados do pré-teste em cada estrutura de raciocínio, de acordo com o teste de Kolmogorov-Smirnov. A distribuição do nível de desempenho das crianças difere significativamente do nível de distribuição normal nos problemas de estrutura multiplicativa, K-S (36) = 0.165; $p<.05$ e nos problemas de controlo, K-S (36)= 0.272; $p<.001$. A exceção ocorre nos problemas de estrutura aditiva, K-S (36) = 0.111; n.s. No entanto, não estando assegurados os pressupostos da normalidade, e sendo uma amostra pequena (Marôco, 2010; Pestana & Gageiro, 2000), optou-se pela análise estatística com recurso a testes não paramétricos. Apesar dos testes não paramétricos serem tradicionalmente considerados menos robustos do que os testes paramétricos, tal não se verifica quando as amostras são de pequenas dimensões e quando os pressupostos da normalidade são violados, sendo que estes testes mantêm a sua potência (Marôco, 2010).

A diferença de desempenho das crianças, nos problemas de estrutura aditiva e nos problemas de estrutura multiplicativa, foi avaliada com recurso ao teste estatístico não paramétrico de Wilcoxon, verificando-se que estas diferenças são estatisticamente significativas, W=131.500, p<.05. Assim, parece ser de mais fácil resolução os problemas de estrutura aditiva do que os de estrutura multiplicativa. Apesar de participarem neste estudo crianças de idades diferentes, a distribuição da proporção dos resultados do pré-teste não difere consoante a idade dos participantes, de acordo com o teste não paramétrico de Mann-Whitney (problemas de estrutura aditiva, U=208, n.s.; problemas de estrutura multiplicativa, U=205,5, n.s.; problemas de controlo, U=169, n.s.), pelo que os resultados serão analisados sem atender à idade dos participantes.

Foi conduzida, ainda, uma análise no sentido de perceber se, em cada estrutura de raciocínio, as crianças resolvem com igual sucesso os diferentes tipos de problemas apresentados. A Tabela 49 apresenta a média e o desvio padrão das proporções de respostas corretas nos problemas de estrutura aditiva, de acordo com o tipo de problema.

Tabela 49 - Média das proporções (desvio padrão) das respostas certas nos problemas de Estrutura Aditiva, de acordo com o tipo de problema.

ESTRUTURA ADITIVA (EA)	
TIPO DE PROBLEMA	**Média (desvio padrão)**
Composição de Duas Medidas	.67 (.34)
Transformação Ligando Duas Medidas	.56 (.23)
Relação Estática Ligando Duas Medidas	.45 (.31)

Os problemas de Composição de Duas Medidas apresentam maiores níveis médios de sucesso, enquanto que os que revelam menores níveis médios de respostas corretas são os problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas. É de referir que, em todos os tipos de problemas encontram-se crianças que acertam todos dos tipos de problemas propostos, havendo a registar 16 crianças com 100% de sucesso nos problemas de Composição Ligando Duas Medidas e quatro nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas. Apesar de este último tipo de problemas ter menor média de sucesso, e ser considerado mais difícil, há mais crianças a acertar a totalidade destes problemas do que nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas, em que apenas uma criança acertou todos os problemas deste tipo.

Também é de referir que, embora se registem quatro casos a errarem todos os problemas de Composição Ligando Duas Medidas, 44% das crianças acertaram mais de metade dos problemas propostos. Nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas, só se regista o caso de uma criança que não consegue resolver nenhum destes problemas, enquanto 53% resolve mais de metade deles. Nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, 39% dos participantes resolveu mais de metade dos problemas propostos, enquanto duas crianças não conseguiram responder corretamente a nenhum dos problemas deste tipo. Os Gráficos 23Gráfico 23 a 25 mostram a distribuição das proporções de respostas corretas nos problemas de estrutura aditiva, de acordo com o tipo de problema.

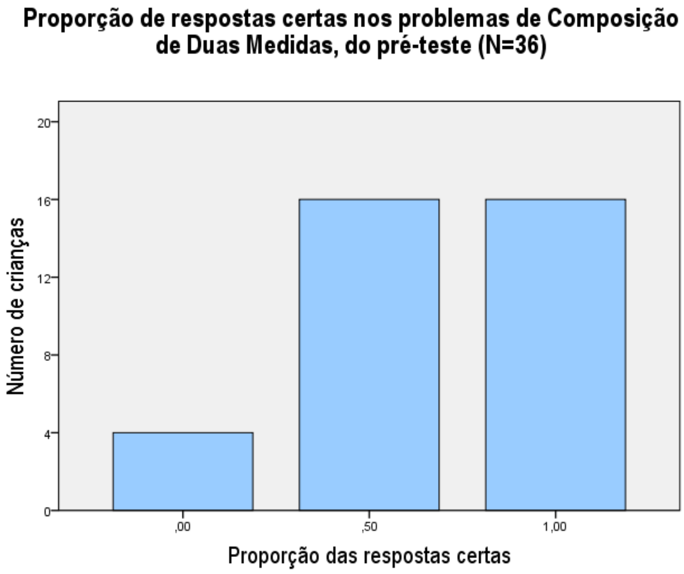


Gráfico 23: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de Composição de Duas Medidas, no pré-teste.

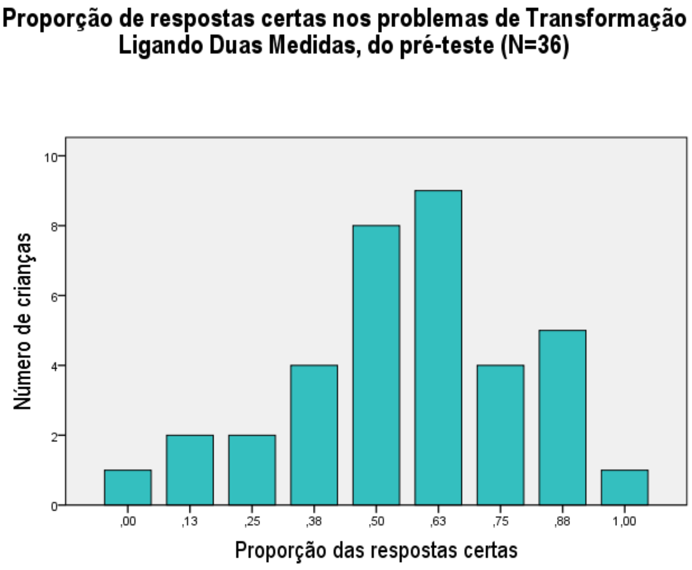


Gráfico 24: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas, no pré-teste.

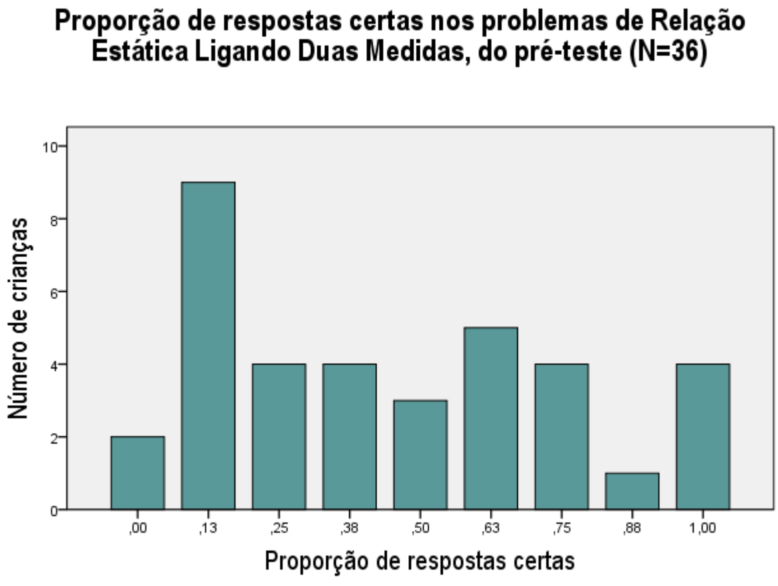


Gráfico 25: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, no pré-teste.

As diferenças de desempenho foram analisadas com o teste estatístico de Friedman, tendo-se registado que o desempenho das crianças nos problemas de Composição de Duas Medidas é significativamente superior ao seu desempenho nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, χ^2_F (2) =12.956; *p*<.05.

Os problemas de estrutura multiplicativa também registam níveis diferentes de sucesso consoante se trata de problemas de Multiplicação, Divisão Partitiva ou Divisão por Quotas. A Tabela 50 apresenta a média e o desvio padrão da proporção de respostas corretas aos problemas de estrutura multiplicativa, de acordo com o tipo decorrente do elemento desconhecido.

Tabela 50 - Média das proporções (desvio padrão) das respostas certas nos problemas de Estrutura Multiplicativa, de acordo com o tipo de problema.

ESTRUTURA MULTIPLICATIVA (EM)	
TIPO DE PROBLEMA	**Média (desvio padrão)**
Multiplicação	.51 (.42)
Divisão Partitiva	.29 (.40)
Divisão por Quotas	.33 (.41)

Os problemas de Multiplicação apresentam-se com níveis médios de sucesso superiores aos restantes problemas, o que sugere que este tipo de problemas é mais fácil de resolver por crianças desta idade. No entanto, verifica-se um elevado coeficiente de dispersão em todos os tipos de problemas. Embora a análise descritiva sugira mais facilidade na resolução dos problemas de multiplicação, estes também apresentam 1/3 das crianças a errarem todos os problemas deste tipo. Os problemas de Divisão Partitiva, considerados mais difíceis, registam 61% das crianças com 0% de respostas corretas e nos problemas de Divisão por Quotas 56% dos participantes não conseguiram ter sucesso neste tipo de problemas. Os Gráficos 26 a 28 apresentam a distribuição da proporção de respostas corretas nos problemas de Multiplicação, Divisão Partitiva e Divisão por Quotas.

Gráfico 26: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de Multiplicação, do pré-teste.

Gráfico 27: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de Divisão Partitiva, do pré-teste.

Gráfico 28: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de Divisão por Quotas, do pré-teste.

Não obstante haver registo de crianças que não conseguem resolver nenhum dos problemas de estrutura multiplicativa, em todos os tipos de problemas há crianças a responderem corretamente à totalidade dos problemas que lhes foram propostos. Nos problemas de Multiplicação, são 13 as crianças que têm 100% de sucesso, nos problemas de Divisão Partitiva são sete crianças, e oito nos problemas de Divisão por Quotas.

Conduzido o teste de Friedman para avaliar as diferenças no desempenho das crianças, constata-se haver diferenças significativas nos três tipos de problemas ($\chi^2_F(2)$ =8.107; p<.05), com desempenhos significativamente superiores nos problemas de Multiplicação. Embora os valores médios observados nos problemas de Divisão Partitiva e de Divisão por Quotas sejam muito próximos, a análise estatística revela que o desempenho nos problemas de Divisão Partitiva é significativamente inferior.

Ainda que se verifiquem percentagens baixas de sucesso nos problemas de estrutura multiplicativa, parece não ser difícil para algumas crianças de 5 e 6 anos resolverem corretamente problemas de Multiplicação, Divisão Partitiva e Divisão por Quotas. Parece também que, apesar dos problemas de estrutura aditiva se apresentarem com diferentes graus de dificuldade, as crianças conseguem ter algum sucesso nos problemas de Composição de

Duas Medidas, Transformação Ligando Duas Medidas e problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas. Elas resolvem os problemas modelando as ações descritas nos enunciados, usando estratégias possibilitadoras da resolução. Importa perceber se a apresentação conjunta de problemas de estruturas de raciocínio diferentes condiciona de alguma forma os procedimentos usados pelas crianças, ou se pelo contrário, tal não constitui um fator de conflito à escolha da melhor estratégia para cada tipo de problema.

4.1.2. Estratégias de resolução dos problemas do pré-teste

Na sua generalidade, as crianças conseguiram usar estratégias adequadas para resolver os problemas propostos e conducentes a resultados corretos. Foi levada a cabo uma análise das estratégias usadas pelas crianças na resolução de problemas de estrutura aditiva e multiplicativa, tendo sido possível observar o mesmo tipo de estratégias observadas no Estudo 1: estratégias de manipulação direta, estratégias de contagem, estratégias com factos numéricos (ver pp. 176 e 203). Para além destas, foi ainda possível observar estratégias que, apesar de terem conduzido a respostas corretas, não revelam uma forma clara de atuar por parte das crianças e que foram designadas por *inconclusivas*, quer nos problemas de estrutura aditiva quer nos de estrutura multiplicativa. A Tabela 51 apresenta o tipo de estratégias utilizadas pelas crianças na resolução dos problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa propostos no pré-teste.

Tabela 51 - Tipo de estratégias observadas na resolução dos problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa, do pré-teste.

	TIPO DE ESTRUTURA DE RACIOCÍNIO	
TIPO DE ESTRATÉGIA	EA (%)	EM (%)
Manipulação direta	66	80.6
Contagem	5	5.6
Factos Numéricos	15.3	5.6
Inconclusivo	13.7	8.2

Fazendo uma análise à Tabela 51 pode-se constatar que as crianças usaram maioritariamente estratégias de manipulação direta, tanto nos problemas de estrutura aditiva, como nos problemas de estrutura multiplicativa. É notório o uso que as crianças fazem de estratégias com factos numéricos para resolverem corretamente os problemas propostos, chegando este tipo de estratégia, no caso dos problemas de estrutura aditiva, a ser superior às estratégias de contagem (ver Gráfico 29).

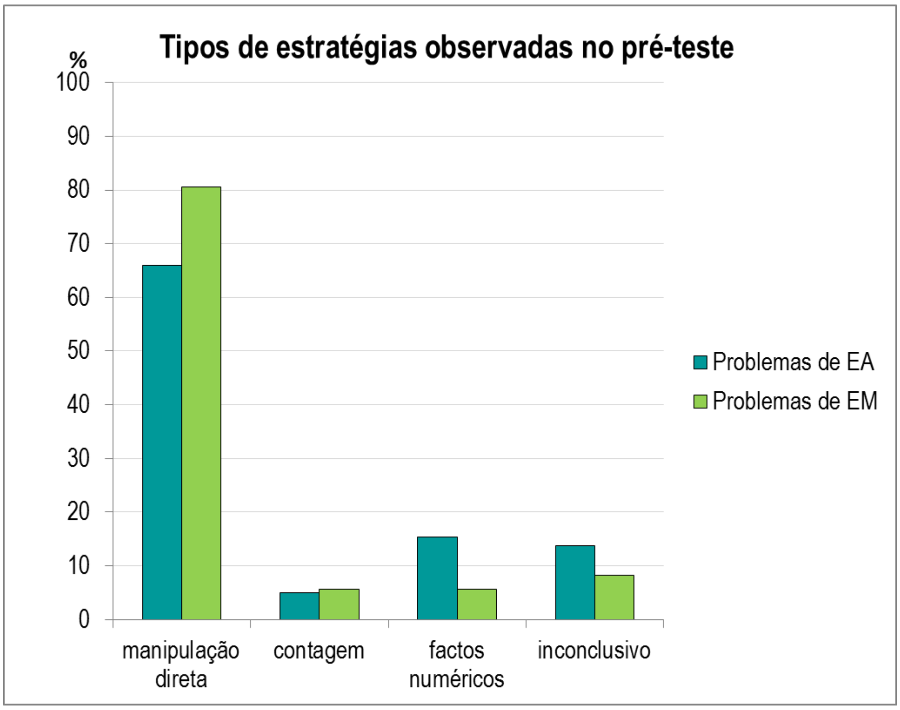


Gráfico 29: Tipos de estratégias observadas no pré-teste.

Analisou-se separadamente cada tipo de estratégia, em cada estrutura de raciocínio, de forma a perceber um pouco mais sobre a forma de atuar dos participantes neste estudo, quando resolvem os problemas propostos. As Tabelas 52 e 53 apresentam as estratégias de manipulação direta observadas na resolução correta dos problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa.

Tabela 52 - Estratégias de manipulação direta observadas nas resoluções certas dos problemas de estrutura aditiva apresentados no pré-teste.

PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA	
ESTRATÉGIAS DE MANIPULAÇÃO DIRETA	**(%)**
Juntar Tudo	8
Juntar Para	5.4
Separar De	36.9
Separar Para	20
Correspondência termo a termo	7.6
Correspondência Para	19.1
Correspondência Até	1.3
Correspondência Separando	1.3
Correspondência Juntando	0.4

Tabela 53 - Estratégias de manipulação direta observadas nas resoluções certas dos problemas de estrutura multiplicativa apresentados no pré-teste.

PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA	
ESTRATÉGIAS DE MANIPULAÇÃO DIRETA	**(%)**
Agrupamento Tentativa e Erro	26.2
Estratégia de Medida	23.1
Correspondência Um-para-muitos	1.5
Agrupamento e Contando Tudo	32.3
Distribuição Um-a-um	7.7
Agrupamento e Dupla Contagem	4.6
Adição Repetida	4.6

Observa-se uma clara diferenciação entre as estratégias usadas na resolução dos problemas de estrutura aditiva e as que são usadas na resolução dos problemas de estrutura multiplicativa. Não há estratégias comuns usadas em ambas as estruturas de raciocínio. Continuam a observar-se várias formas de correspondência na resolução de problemas de estrutura aditiva, à semelhança do que havia sido registado no Estudo 1.

O mesmo se passa relativamente às estratégias de contagem. As crianças usam estratégias diferentes, consoante se trata de problemas de adição e subtração ou multiplicação e divisão. Mesmo a "Adição repetida", estratégia relacionada com a adição, é usada como estratégia de resolução apenas nos problemas de estrutura multiplicativa, tanto nas estratégias de contagem como nas de manipulação direta. As Tabelas 54 e 55 apresentam as estratégias de contagem usadas na resolução de problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa.

Tabela 54 - Estratégias de contagem observadas nas resoluções certas dos problemas de estrutura aditiva apresentados no pré-teste.

PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA	
ESTRATÉGIAS DE CONTAGEM	(%)
Contando do Maior	55.6
Contando Até	16.7
Contagem Decrescente	22.2
Contagem Decrescente Até	5.5

Tabela 55 - Estratégias de contagem observadas nas resoluções certas dos problemas de estrutura multiplicativa apresentados no pré-teste.

PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA	
ESTRATÉGIAS DE CONTAGEM	(%)
Agrupamento e Dupla Contagem	60
Adição Repetida	40

As estratégias com factos numéricos são o único tipo de estratégias no qual é possível observarem-se estratégias comuns a ambas as estruturas de raciocínio (ver Tabela 56). De salientar o recurso a Factos Numéricos da Subtração por crianças tão novas quanto as de 5 e 6 anos, tendo em conta que as estratégias com factos numéricos são consideradas como as que requerem um maior nível de abstração, de acordo com Mulligan (1992) e Carpenter et al. (1999). A Tabela 56 apresenta as estratégias com factos numéricos usadas na resolução de problemas e estrutura aditiva e multiplicativa.

Tabela 56 - Estratégias com factos numéricos observadas nas resoluções certas nos problemas apresentados no pré-teste.

ESTRATÉGIAS COM FACTOS NUMÉRICOS	**TIPO DE ESTRUTURA DE RACIOCÍNIO**	
	EA (%)	**EM** (%)
Factos Numéricos da Adição	90.2	100
Factos Numéricos da Subtração	0.8	-

Parece não ser difícil para as crianças de 5 e 6 anos resolverem problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa quando estes lhe são apresentados alternadamente. As distintas estratégias que utilizam são reveladoras de que o facto de resolverem conjuntamente problemas de diferentes estruturas de raciocínio não condiciona o seu procedimento e parece não comprometer o sucesso do seu desempenho. As suas estratégias revelam a interpretação das ações expressas nos enunciados dos problemas. A apresentação alternada de problemas de estrutura aditiva e multiplicativa não gera conflito no seu pensamento e elas conseguem, de igual forma, recorrer a estratégias mais abstratas do que a simples manipulação direta. No entanto, as respostas das crianças e a sua justificação para a escolha de determinado procedimento foram também analisadas, no sentido de compreender mais acerca da validade da sua resposta.

4.1.3. Argumentos de resolução dos problemas do pré-teste

Após a resolução do problema e da resposta das crianças, foi-lhes solicitado que justificassem a sua solução. Assim, foram analisados os argumentos apresentados pelas crianças, e que resultaram de respostas corretas, tendo em conta serem ou não argumentos passíveis de justificar a sua resolução acertada. Desta forma, e à semelhança do que foi feito na análise do Estudo 1, os argumentos das crianças foram categorizados como: i) argumentos "Válidos", quando a explicação que é dada atende a todas as partes do problema; ii) argumentos "Parcialmente Válidos", nos casos em que a justificação dada fica incompleta, não atendendo a todas as partes do problema; iii) argumentos "Inválidos", quando a criança, resolvendo corretamente, não argumenta de forma considerável ou o seu argumento é descontextualizado; e iv) "Sem Argumento", quando a criança fica calada ou responde "não sei" ao ter que justificar a sua resolução correta. A Tabela 57 regista o tipo de argumento apresentado pelas crianças na explicação da sua opção de resposta e que produziram respostas certas, de acordo com a idade.

Tabela 57 - Tipo de argumento dado na resolução correta dos problemas propostos no pré-teste.

	TIPO DE ESTRUTURA DE RACIOCÍNIO	
ARGUMENTOS	**EA** (%)	**EM** (%)
Válido	63.7	59.9
Parcialmente Válido	6.9	10.7
Sem Argumento	4.4	6.1
Inválido	25	26.3

Os valores dos argumentos “Válidos” são indicadores de que as crianças compreendem os problemas e interpretam as ações descritas nos enunciados. Resolvendo-os de forma correta, conseguem verbalizar a opção tomada na resolução. A percentagem de argumentos “Válidos”, quer para os problemas de estrutura aditiva (acima dos 63%), quer para os de estrutura multiplicativa (cerca de 60%), é reveladora da consciência que as crianças têm do processo de resolução. Seria, de certa forma espectável que crianças desta idade, 5 e 6 anos, manifestassem dificuldade em refletir sobre a sua ação, não justificando a sua resposta nem a opção tomada na procura da resolução (ver Piaget, 1967). Contudo, o que se verifica é que, tanto nos problemas de estrutura aditiva como nos de estrutura multiplicativa, os argumentos “Válidos” são superiores aos restantes. Um olhar para a percentagem de argumentos “Parcialmente Válidos”, superior à percentagem “Sem Argumento” remete para um ensaio da reflexão sobre a ação por parte das crianças, já que elas procuram argumentar e articular parte da informação.

4.2. Pode ser promovido o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo em crianças do pré-escolar?

Para perceber se pode ser promovido o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo analisaram-se os desempenhos, as estratégias e os argumentos das crianças aquando da resolução dos problemas do pré- e pós-testes.

A consistência interna dos problemas propostos às crianças no pós-teste foi avaliada segundo o teste estatístico alfa de Cronbach. Apresentando um valor de α=0.89, a consistência interna foi considerada boa (ver George & Mallery, 2003), revelando-se possível a análise dos itens do questionário.

4.2.1. Desempenho das crianças na resolução dos problemas do pós-teste

Os resultados de cada resposta foram analisados tendo sido atribuído 1 valor a cada resposta certa e 0 a cada resposta errada, num total de 28 respostas para cada criança. Foi calculada a média e o desvio padrão do total de respostas certas nos problemas propostos no pós-teste, sendo possível observar-se que, globalmente, houve mais sucesso nos resultados do pós-teste do que os resultados obtidos anteriormente no pré-teste. A Tabela 58 apresenta a média e o desvio padrão das respostas corretas dos problemas apresentados no pré- e pós-testes.

Tabela 58 - Média (desvio padrão) das respostas certas aos problemas apresentados no pré- e pós-teste.

	RESULTADOS CORRETOS	
	PRÉ-TESTE	**PÓS-TESTE**
Média Desvio padrão	14.9 (5.7)	19 (5.9)

Globalmente, observam-se melhores desempenhos no pós-teste (uma média de 19 respostas corretas em 28) do que no pré-teste. O desvio padrão sugere uma menor variabilidade das respostas das crianças, havendo uma aproximação à média.

Através da análise descritiva dos resultados do pós-teste, é possível observar que apenas 6 crianças responderam corretamente a menos de 50% dos problemas propostos, sendo que já foi possível observar 2 crianças a acertar 100% dos problemas propostos e 4 crianças a acertar quase a totalidade, conforme se observa nos Gráficos 30 e 31.

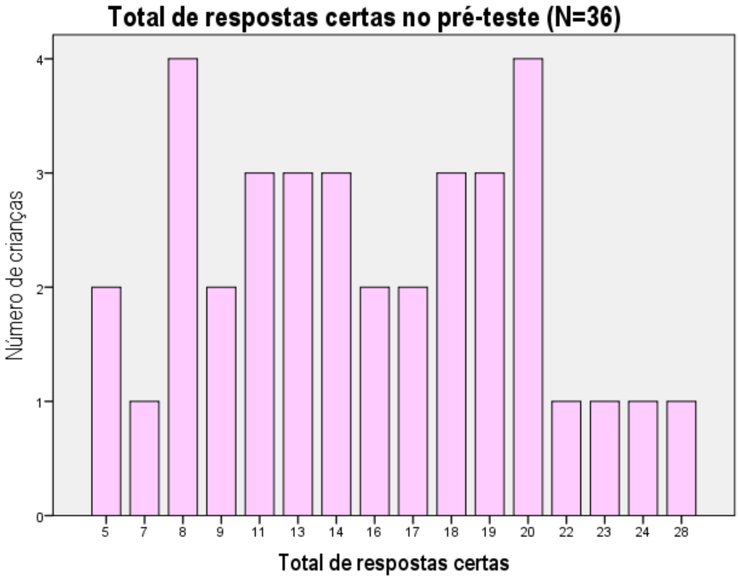


Gráfico 30 - Distribuição das respostas certas no pré-teste.

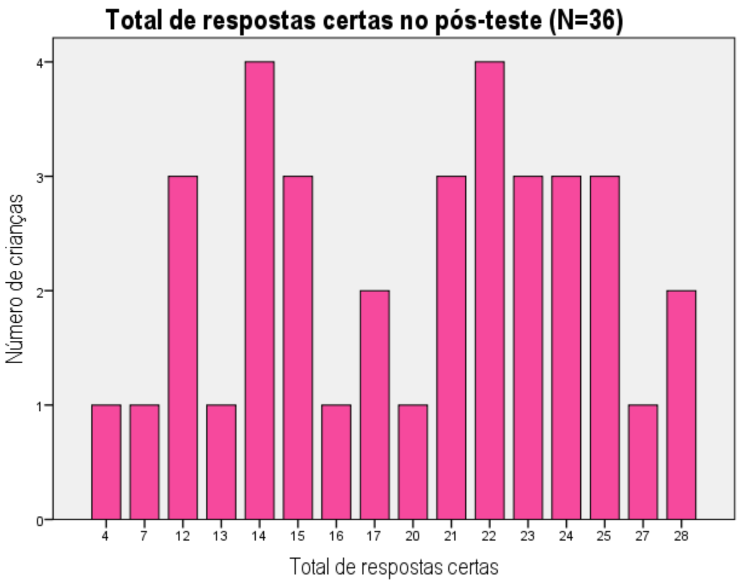


Gráfico 31 - Distribuição das respostas certas no pós-teste.

À semelhança do pré-teste, os problemas propostos às crianças no pós-teste eram compostos por 18 problemas de estrutura aditiva, 6 de estrutura multiplicativa e 4 problemas de controlo. Sabendo que o seu desempenho foi melhor no pós-teste, afigura-se necessária uma análise aos desempenhos das crianças de acordo com a estrutura de raciocínio, no sentido de perceber se elas se comportaram de igual forma perante problemas de estruturas diferentes. A Tabela 59 resume a proporção média das respostas certas e o desvio padrão no pré- e pós-testes de acordo com a estrutura de raciocínio.

Tabela 59 - Média das proporções (desvio padrão) das respostas certas das crianças no pré- e pós-testes.

TIPO DE ESTRUTURA DE RACIOCÍNIO	**MÉDIA (desvio padrão)**	
	Pré-teste	Pós-teste
Estrutura Aditiva (EA)	.52 (.23)	.66 (.24)
Estrutura Multiplicativa (EM)	.38 (.31)	.61 (.31)
Controlo	.79 (.18)	.85 (.19)

A média das proporções das respostas corretas que as crianças conseguiram no pós-teste é superior à que havia sido registada no pré-teste, em todas as estruturas de raciocínio. A proporção média de sucesso foi superior a 60% em todos os tipos de problemas. Observa-se um aumento considerável da média relativa aos problemas de estrutura multiplicativa, de 38% para 61%. Também o desvio padrão diminuiu em todas as condições, o que é indicador de uma menor variabilidade de desempenhos das crianças.

Ainda que os problemas de estrutura multiplicativa continuem a ser aqueles onde há mais variabilidade de desempenhos, o seu valor diminuiu do pré- para o pós-teste. Diminui de 8 para 1 o número de crianças com todas as respostas erradas nos problemas de estrutura multiplicativa, e aumenta de 6 para 16 o número de crianças que acerta quase a totalidade dos problemas, elevando-se de 3 para 8 o número de crianças que responde corretamente a 100% dos problemas deste tipo no pós-teste. O Gráfico 32 apresenta a distribuição de respostas corretas nos problemas de estrutura multiplicativa registados no pré- e no pós-testes.

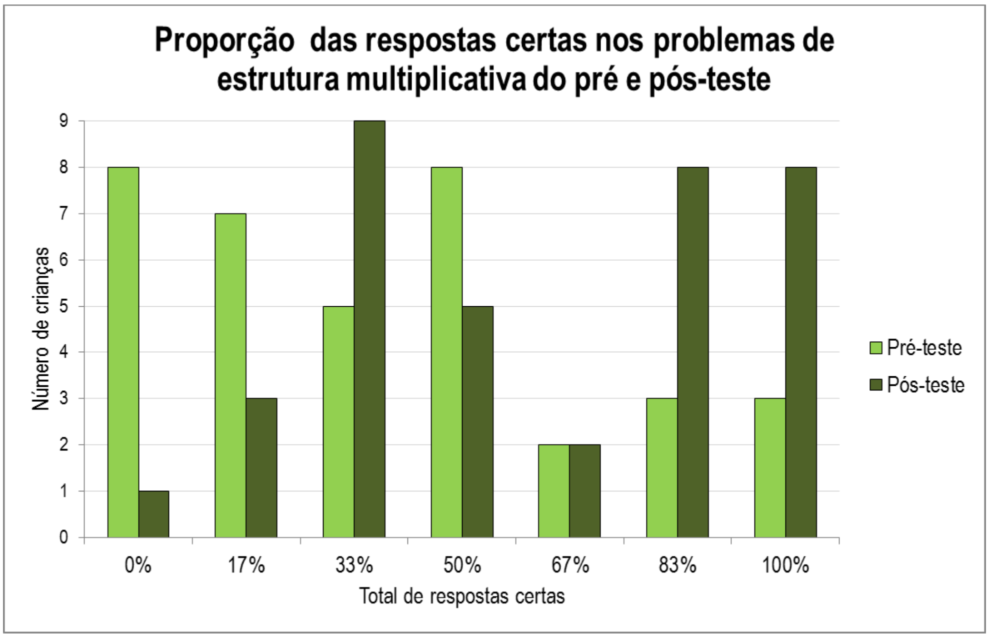


Gráfico 32: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de estrutura multiplicativa, do pré- e do pós-testes.

Nos problemas de estrutura aditiva, diminuiu de 14 para 9 o número de crianças que apresentaram sucesso em menos de metade dos problemas propostos, aumentando para 3 o número de crianças que teve acima de 89% de respostas corretas neste tipo de problemas no pós-teste, sendo que dessas, 2 conseguiram resolver corretamente todos os problemas de estrutura aditiva. O Gráfico 33 apresenta a proporção de respostas certas nos problemas de estrutura aditiva registadas no pré- e no pós-testes.

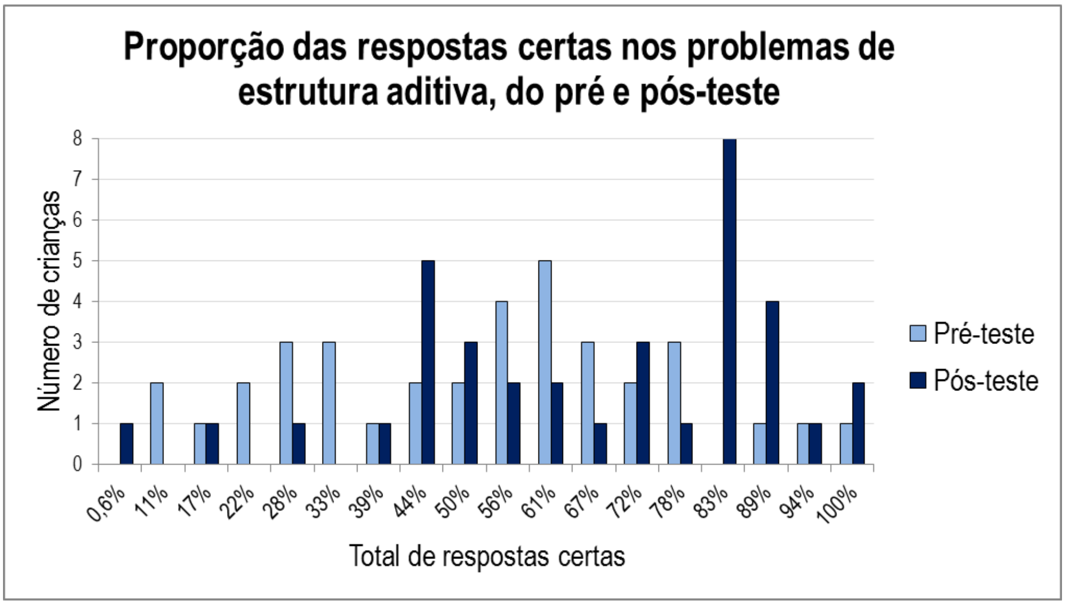


Gráfico 33: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de estrutura aditiva, do pré- e do pós-teste.

A análise descritiva sugere diferentes desempenhos entre o pré- e o pós-testes em todas as estruturas de raciocínio, com melhores desempenhos no pós-teste. Sugere também melhores resultados nos problemas de estrutura aditiva do que nos problemas de estrutura multiplicativa. Contudo, carece de mais análise perceber se essas diferenças são estatisticamente significativas.

A normalidade das distribuições dos resultados do desempenho das crianças no pós-teste, em cada estrutura de raciocínio, foi avaliada com o teste de Kolmogorov-Smirnov (problemas de estrutura aditiva, K-S (36) = 0.187; $p<.05$; problemas de estrutura multiplicativa, K-S (36) = 0.209; $p<.001$; problemas de controlo, K-S (36) = 0.315; $p<.001$), evidenciando desvios da normalidade. Assim, de acordo com Marôco (2010) e com Pestana e Gageiro (2000), a análise estatística irá recorrer a testes não paramétricos atendendo à violação dos pressupostos da normalidade.

A diferença de desempenhos das crianças nos problemas de estrutura aditiva e multiplicativa foi avaliada com recurso ao teste não paramétrico de Wilcoxon, tendo-se verificado que não são significativas as diferenças que ocorrem entre os resultados de estruturas diferentes, W=169.500; n.s. Foi anteriormente observado, na análise dos resultados do pré-teste, que tanto os problemas de estrutura aditiva como os de estrutura multiplicativa apresentam diferentes níveis de sucesso consoante o tipo de problema (ver pp. 261-266). No pré-teste, os problemas de Composição de Duas Medidas foram os que representaram menor dificuldade na resolução, atendendo à percentagem média mais elevada, quando comparado com os problemas de Transformação Ligando Duas Medidas e Relação Estática Ligando Duas Medidas. Analogamente, para os problemas de estrutura multiplicativa, o sucesso mais elevado foi observado nos problemas de Multiplicação.

Importa assim perceber quais os níveis de sucesso nos pré- e pós-testes, de acordo com o tipo de problema; quais os mais fáceis e mais difíceis de resolver por crianças desta idade. A Tabela 60 apresenta a média e o desvio padrão das proporções de respostas certas nos problemas de estrutura aditiva, do pré-e pós-testes, de acordo com o tipo de problema.

Tabela 60 – Média das proporções (desvio padrão) das respostas certas nos problemas de estrutura aditiva, no pré- e pós-testes, de acordo com o tipo de problema.

ESTRUTURA ADITIVA (EA)		
TIPO DE PROBLEMA	**Média (desvio padrão)**	
	Pré-teste	Pós-teste
Composição de Duas Medidas	.67 (.34)	.96 (.14)
Transformação Ligando Duas Medidas	.56 (.23)	.73 (.23)
Relação Estática Ligando Duas Medidas	.45 (.31)	.51 (.36)

Uma análise aos diferentes tipos de problemas, apresentados às crianças no pós-teste, sugere que o tipo de problemas de estrutura aditiva mais fácil para as crianças resolverem continuam a ser os de Composição de Duas Medidas, com percentagens de acerto muito próximo dos 100%, e os de mais difícil resolução, os de Relação Estática Ligando Duas Medidas, ainda assim, com uma percentagem média de sucesso superior a 50%. Tanto nos problemas de Composição de

Duas Medidas como nos de Transformação Ligando Duas Medidas, a variabilidade dos desempenhos das crianças é muito próxima da média.

Nos problemas de Composição de Duas Medidas, apenas três crianças acertaram 50% dos problemas propostos, sendo que as restantes (33 crianças) acertaram a totalidade dos problemas deste tipo. Nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas também se regista uma melhoria face aos desempenhos do pré-teste, havendo 26 crianças que resolveram com sucesso pelo menos 75% dos problemas deste tipo propostos no pós-teste. Os problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas foram corretamente resolvidos na sua totalidade por cinco crianças, e 16 crianças conseguiram resolver pelo menos metade destes. Os Gráficos 34 a 36 ilustram a distribuição da proporção de respostas corretas no pós-teste, nos problemas de estrutura aditiva, de acordo com o tipo de problema.

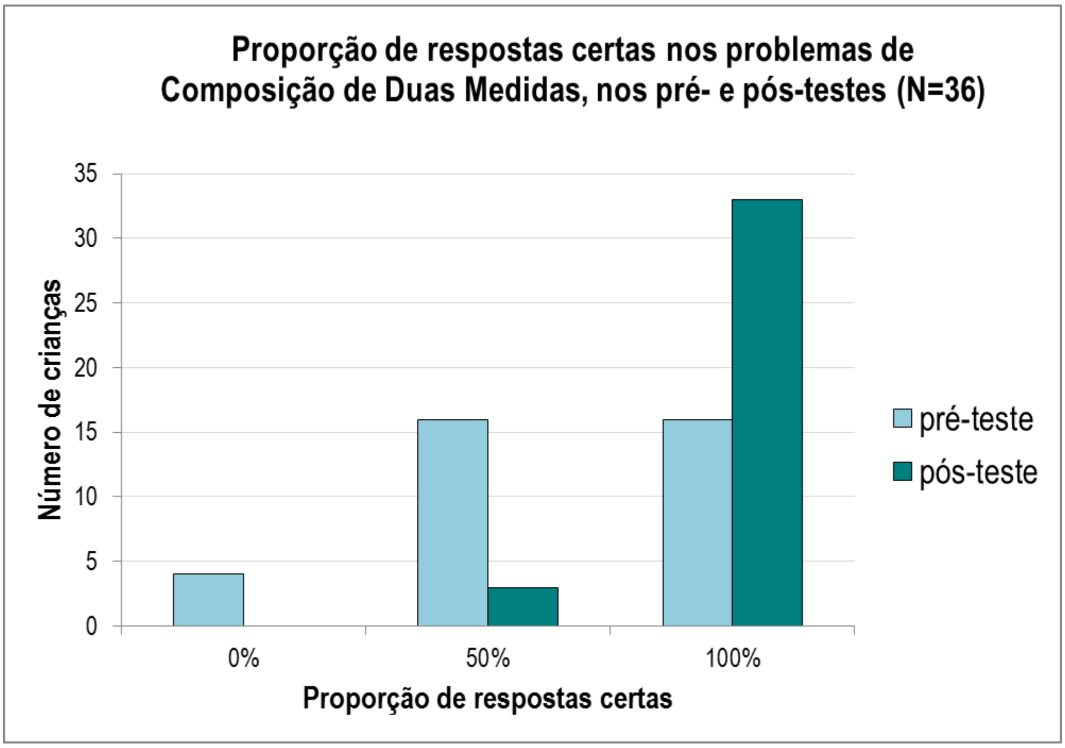


Gráfico 34 - Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de Composição de Duas Medidas, no pré- e pós-testes.

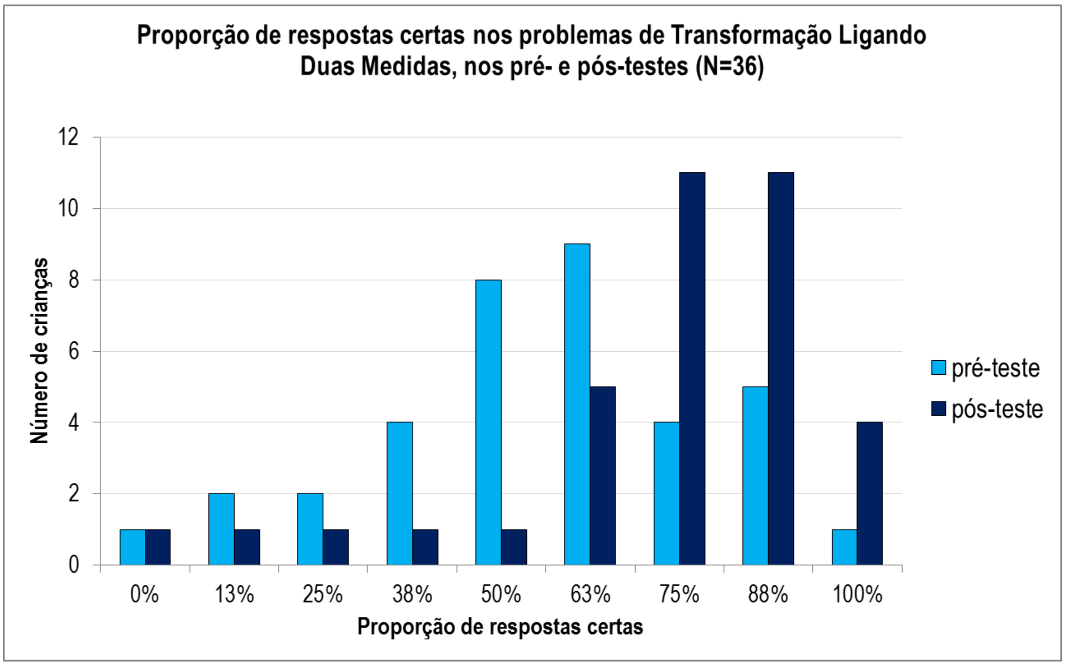


Gráfico 35: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas, no pré- e pós-testes.

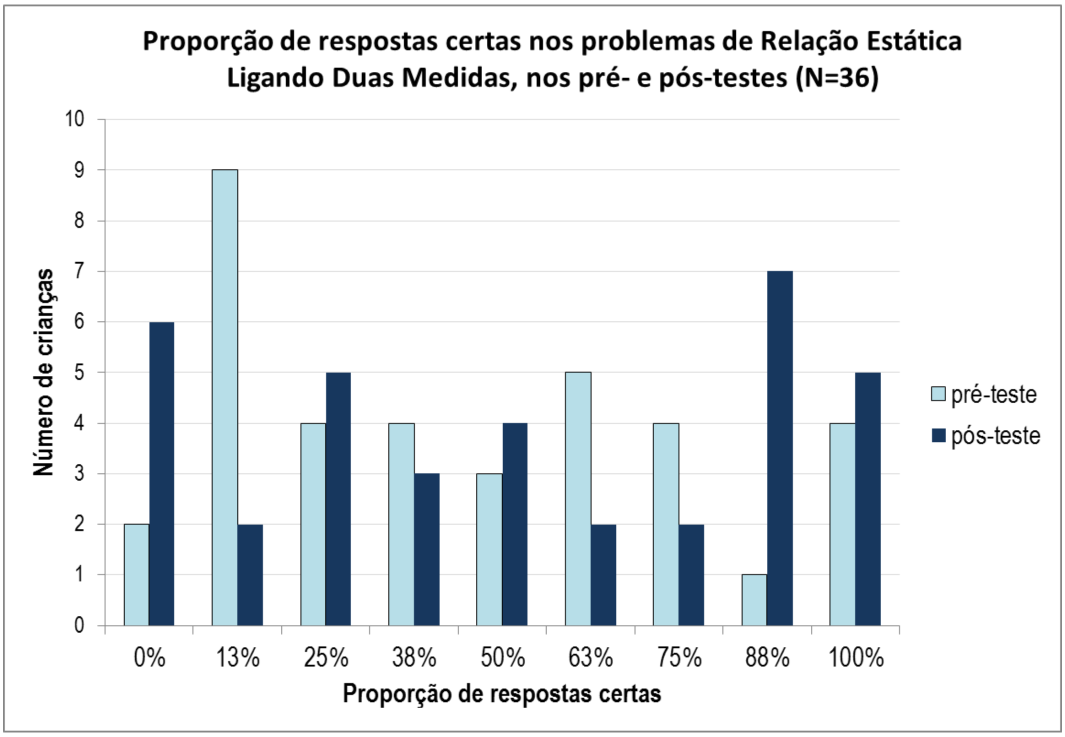


Gráfico 36 - Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, no pré- e pós-testes.

A análise estatística, com recurso ao teste não paramétrico de Friedman permite perceber que há diferenças significativas entre os diferentes tipos de problemas, χ^2_F(2)= 46.409; p<.001. Porém, estas não são significativas entre os problemas de Transformação Ligando Duas Medidas e os de Relação Estática Ligando Duas Medidas. Elas ocorrem entre os problemas de Composição de Duas Medidas e os de Transformação Ligando Duas Medidas, e entre os problemas de Composição de Duas Medidas e os de Relação Estática Ligando Duas Medidas, com desempenhos significativamente superiores para os primeiros. Quando comparados os desempenhos em cada tipo de problema, entre o pré- e o pós-teste, verificam-se significativas diferenças nos problemas de Composição de Duas Medidas, W=153.000; *p*<.001, e nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas, W=356.000; *p*<.001. Apesar da melhoria verificada nos resultados do pós-teste dos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, ainda não é significativa, relativamente aos resultados do pré-teste.

Nos problemas de estrutura multiplicativa, os problemas que apresentam maiores percentagens médias de sucesso, e por isso considerados como de mais fácil resolução, continuam a ser, no pós-teste, os problemas de Multiplicação. Os que apresentam menores percentagens de sucesso no pós-teste são os problemas de Divisão por Quotas, o que não é coincidente com o que foi observado no pré-teste, em que os problemas que registaram menores níveis de sucesso foram os problemas de Divisão Partitiva. A Tabela 61 apresenta a média e o desvio padrão das proporções de respostas corretas nos problemas de estrutura multiplicativa, no pós-teste, de acordo com o tipo de problema.

Tabela 61 - Média das proporções (desvio padrão) das respostas certas nos problemas de estrutura multiplicativa, do pós-teste, de acordo com o tipo de problema.

ESTRUTURA MULTIPLICATIVA (EM)		
TIPO DE PROBLEMA	**Média (desvio padrão)**	
	Pré-teste	Pós-teste
Multiplicação	.51 (.42)	.83 (.32)
Divisão Partitiva	.29 (.40)	.54 (.40)
Divisão por Quotas	.33 (.41)	.46 (.48)

É possível observar uma melhoria de desempenho em todos os tipos de problemas. Enquanto que no pré-teste os valores médios não iam além dos 50%, no pós-teste os problemas de Multiplicação registam um aumento acima dos 80%. Mesmo os problemas de Divisão por Quotas situam-se perto dos 50%. Nos problemas de Multiplicação, diminuiu de 12 para 3 o número de crianças a errar todos os problemas, havendo um aumento para mais do dobro das crianças (27) a resolver corretamente todos os problemas de Multiplicação. Nos problemas de Divisão Partitiva reduziu para mais de metade (de 22 para 10) o número de crianças que não conseguiram ter sucesso em nenhum desses problemas, enquanto que cerca de metade dos participantes tiveram 100% de sucesso neste tipo de problemas. Também nos problemas de Divisão por Quotas aumentou quase para metade dos participantes, o número de crianças que conseguiu resolver corretamente a totalidade dos problemas deste tipo, passando de 8 para 15 crianças. Os Gráficos 37 a 39 ilustram a distribuição da proporção de respostas corretas nos problemas de estrutura multiplicativa no pós-teste, de acordo com o tipo de problema.

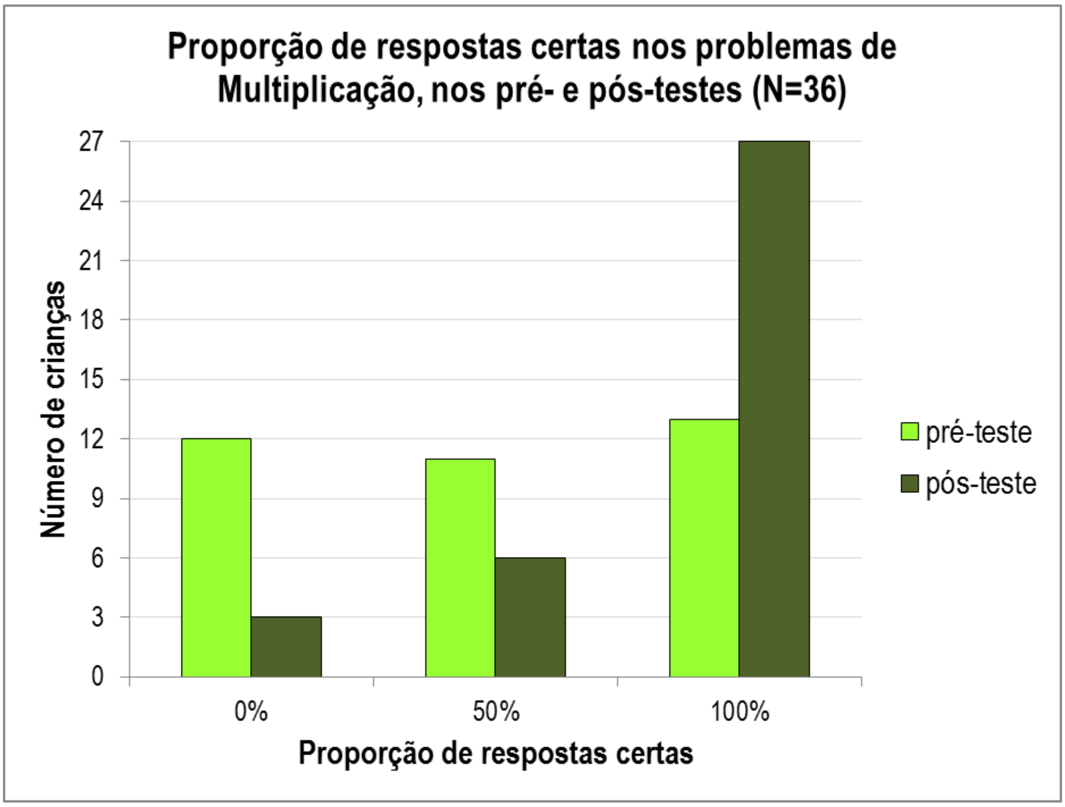


Gráfico 37: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de Multiplicação, no pré- e pós-testes.

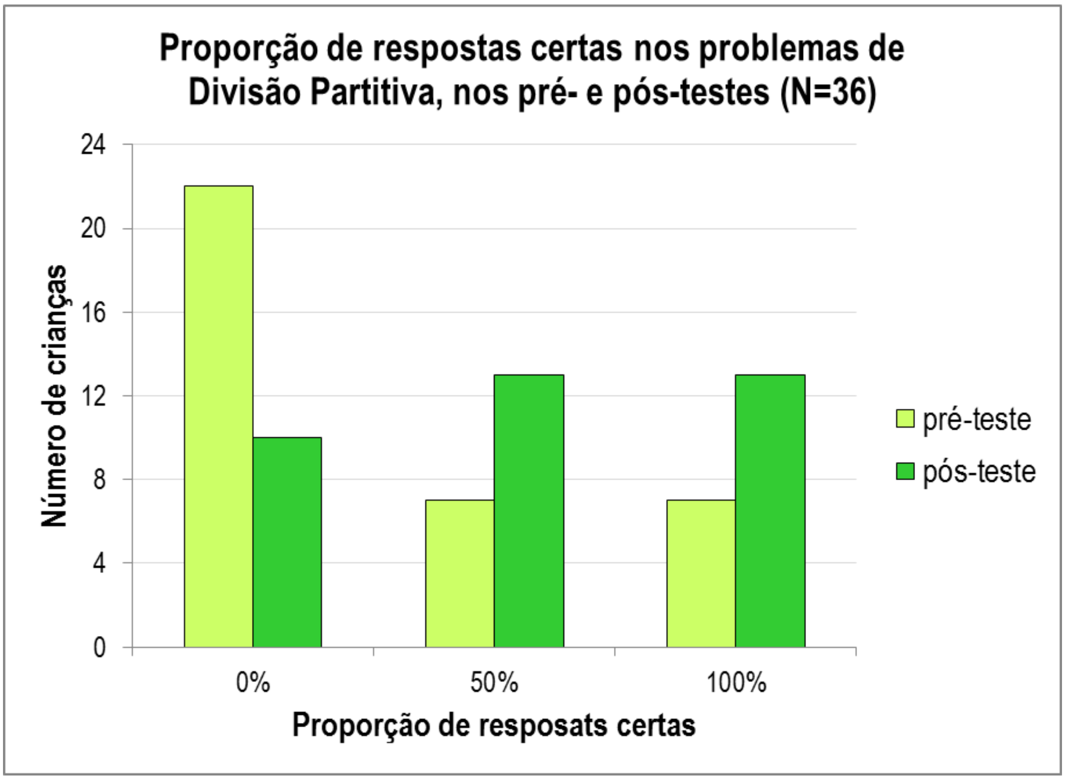


Gráfico 38: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de Divisão Partitiva, no pré- e pós-testes.

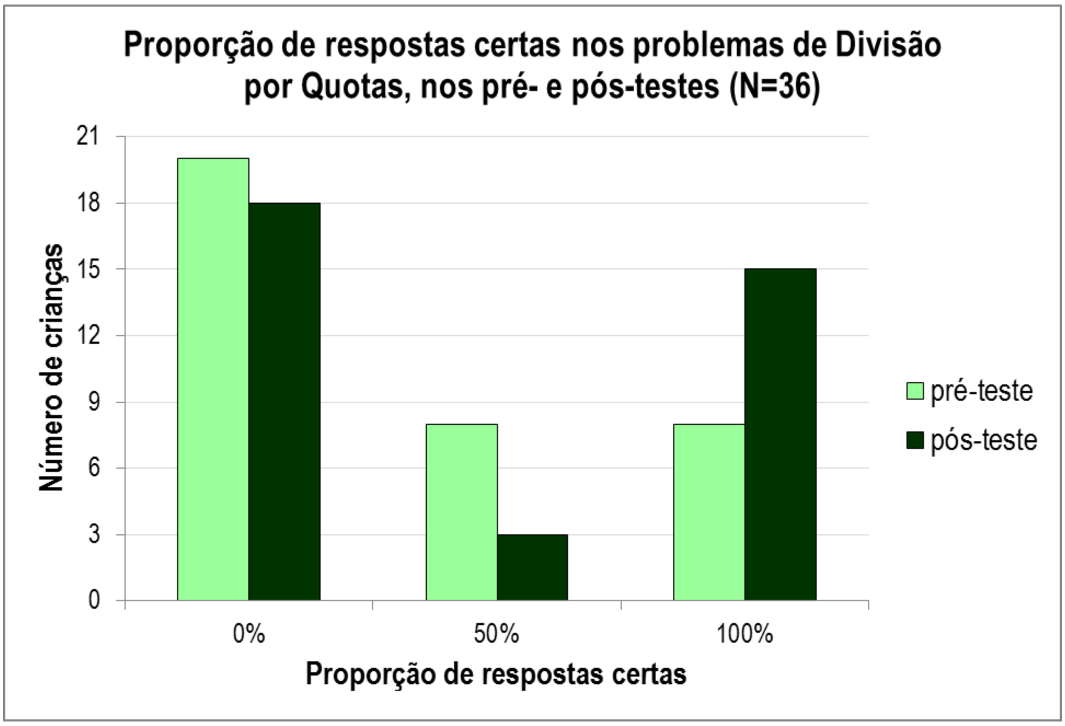


Gráfico 39: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de Divisão por Quotas, no pré- e pós-testes.

De acordo com o teste de Friedman, as diferenças de sucesso que se observam nos problemas de estrutura multiplicativa são estatisticamente significativas, mas apenas entre os problemas de Multiplicação e os de Divisão por Quotas, χ^2_F (2) = 14.953; p<.05, com melhores desempenhos nos problemas de Multiplicação. As crianças revelaram melhores desempenhos no pós-teste do que no pré-teste, mas, de acordo com o teste de Wilcoxon, as diferenças que se verificam entre os desempenhos do pré- e do pós-testes só são significativas nos problemas de Multiplicação, W=196.000; *p*<.001, e nos problemas de Divisão Partitiva, W=197.000; *p*<.05.

Globalmente, foi observado um desempenho melhor na resolução dos problemas do pós-teste do que nos problemas apresentados no pré-teste. De notar que, quando foi proposto às crianças a resolução dos problemas no pós-teste, elas já haviam sido sujeitas a uma intervenção, onde foram explorados problemas de estruturas distintas. Importa agora perceber os efeitos dessa intervenção no desempenho das crianças.

4.2.2. Estratégias das crianças na resolução dos problemas do pós-teste

As estratégias que as crianças utilizaram e que geraram respostas corretas foram também analisadas no pós-teste, tendo sido encontrado o mesmo tipo de estratégias do pré-teste. Assim, identificaram-se estratégias de manipulação direta, estratégias de contagem e estratégias com factos numéricos, e ainda estratégias que foram denominadas de *inconclusivas*. As crianças recorreram maioritariamente a estratégias de manipulação direta para resolverem os problemas propostos. A Tabela 62 mostra o tipo de estratégias utilizadas pelas crianças no pós-teste, de acordo com o tipo de estrutura do problema.

Tabela 62 - Tipo de estratégias observadas na resolução dos problemas do pós-teste.

	TIPO DE ESTRUTURA DE RACIOCÍNIO	
TIPO DE ESTRATÉGIA	**EA** (%)	**EM** (%)
Manipulação direta	82.8	96.2
Contagem	3.5	1.4
Factos numéricos	8.3	2.3
Inconclusivo	5.5	1.7

As estratégias de manipulação direta foram as mais utilizadas pelas crianças para resolver corretamente quer os problemas de estrutura aditiva, quer os de estrutura multiplicativa, seguido das estratégias com factos numéricos. Quando estes valores são comparados com os que foram obtidos na resolução dos problemas do pré-teste, observa-se um aumento do recurso a estratégias de manipulação direta, em ambas as estruturas de raciocínio e, por conseguinte, uma diminuição dos outros tipos de estratégias utilizadas pelas crianças (ver Gráfico 40). No pós-teste, os problemas de estrutura multiplicativa são resolvidos quase na sua totalidade por estratégias de manipulação direta. Verificou-se, ainda, uma diminuição de estratégias inconclusivas no pós-teste, o que sugere algum efeito da intervenção no procedimento das crianças, como a clarificação da forma de resolver corretamente os problemas propostos.

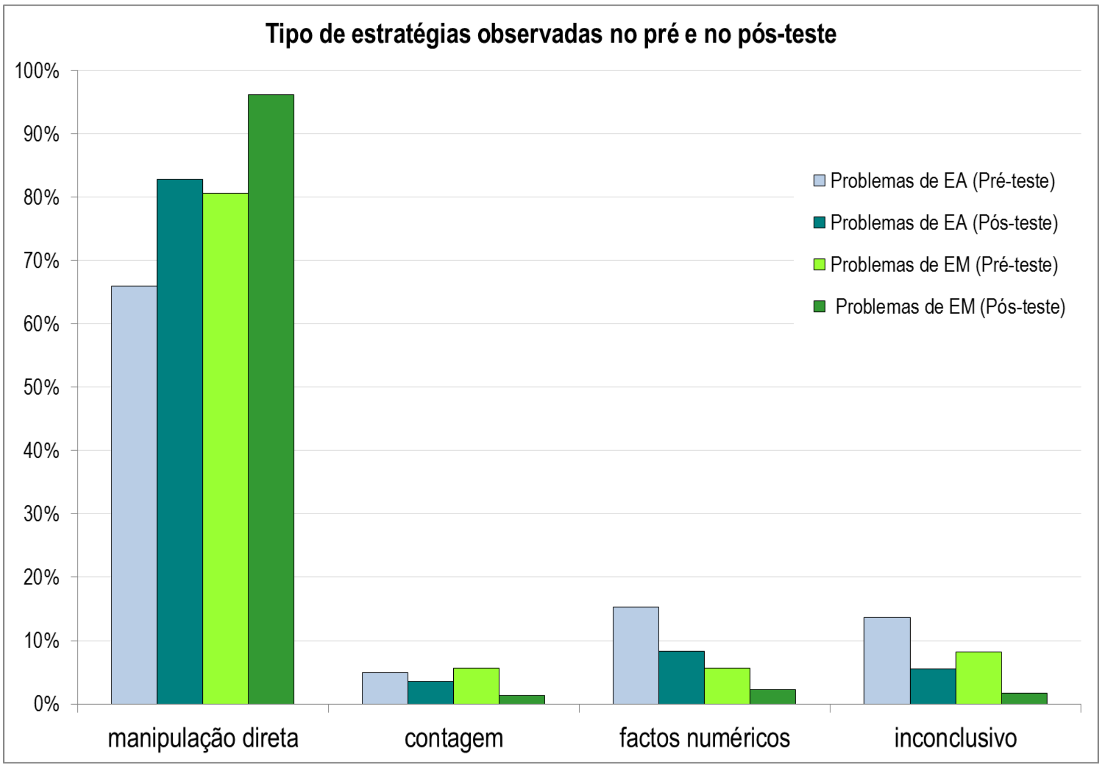


Gráfico 40: Tipo de estratégias observadas na resolução correta dos problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa, no pré- e no pós-teste.

Parece, ainda, e à semelhança do que se havia observado também no pré-teste, que o recurso a determinado tipo de estratégia (manipulação direta, contagem e factos numéricos) não estará dependente da estrutura de raciocínio dos problemas propostos, uma vez que não se observa que as crianças recorram a determinado tipo de estratégia para resolver problemas de estrutura aditiva, em detrimento de outro tipo de estratégia para resolver os problemas de estrutura multiplicativa. No entanto, esta análise carece de ser mais aprofundada, em cada tipo de estratégia, no sentido de melhor compreender a ação das crianças, na resolução de problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa. As Tabelas 63 e 64 apresentam as estratégias de manipulação usadas pelas crianças nas respostas corretas dos problemas de estrutura aditiva e nos problemas de estrutura multiplicativa do pós-teste.

Tabela 63 - Estratégias de manipulação direta observadas nas resoluções certas dos problemas de estrutura aditiva apresentados no pós-teste.

PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA	
ESTRATÉGIAS DE MANIPULAÇÃO DIRETA	**(%)**
Juntar Tudo	11.3
Juntar Para	12.7
Separar De	36.9
Separar Para	15.5
Correspondência termo a termo	10.1
Correspondência Para	6.2
Correspondência Até	2.5
Correspondência Separando	2.3
Correspondência Juntando	2.5

Tabela 64 - Estratégias de manipulação direta observadas nas resoluções certas dos problemas de estrutura multiplicativa apresentados no pós-teste.

PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA	
ESTRATÉGIAS DE MANIPULAÇÃO DIRETA	**(%)**
Juntar Tudo	1.6
Separar De	0.8
Agrupamento Tentativa e Erro	25.2
Estratégia de Medida	26.8
Correspondência Um-para-muitos	35.4
Agrupamento e Contando Tudo	2.4
Distribuição Um-a-um	3.1
Adição Repetida	4.7

De uma forma geral, as crianças usam diferentes estratégias de manipulação direta quando resolvem problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa. Há estratégias claramente usadas apenas nos problemas de estrutura aditiva, como as estratégias de correspondência termo-a-termo, e estratégias usadas exclusivamente em problemas de estrutura multiplicativa, como todas as que envolvem agrupamentos e distribuição.

Contrariamente às estratégias usadas pelas crianças no pré-teste, é possível observar-se, ainda que em percentagens baixas, o recurso às mesmas estratégias para resolver problemas de estrutura aditiva e multiplicativa, como é o caso das estratégias de manipulação direta "Juntar Tudo" e "Separar De". Poderá ser um indicador de que, de alguma forma, as crianças estabelecem uma relação processual entre duas operações diferentes, como a multiplicação e a adição e entre a divisão e a subtração. Situação que se verifica também quando as crianças resolvem os problemas com estratégias mais abstratas, como quando recorrem a estratégias com factos numéricos, conforme mostra a Tabela 65, que apresenta as estratégias com factos numéricos usadas nos problemas do pós-teste.

Tabela 65 - Estratégias com factos numéricos observadas nas resoluções certas nos problemas apresentados no pós-teste.

ESTRATÉGIAS COM FACTOS NUMÉRICOS	TIPO DE ESTRUTURA DE RACIOCÍNIO	
	EA (%)	**EM** (%)
Factos Numéricos da Adição	94.3	100
Factos Derivados	5.7	-

A estratégia "Factos Numéricos da Adição" é utilizada para resolver problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa. Segundo Carpenter et al. (1999), quando usam estratégias mentais como as estratégias com factos numéricos, as crianças apelam a combinações de números previamente aprendidos, sendo que, segundo estes autores, as crianças aprendem primeiro situações de dobro. Ora, parece, mais uma vez, que quando resolvem alguns problemas de estrutura multiplicativa, as crianças entendem a multiplicação como a adição repetida, em termos processuais. Esta situação não se verifica quando as crianças recorrem a estratégias de contagem. As estratégias deste tipo são usadas pelas crianças de forma diferenciada, conforme se trata de problemas de estrutura aditiva, ou de problemas de estrutura multiplicativa. A Tabela 66 regista as estratégias de contagem usadas pelas crianças na resolução de problemas de estrutura aditiva e multiplicativa.

Tabela 66 - Estratégias de contagem observadas nas resoluções certas nos problemas apresentados no pós-teste.

	TIPO DE ESTRUTURA DE RACIOCÍNIO	
ESTRATÉGIAS DE CONTAGEM	**EA** (%)	**EM** (%)
Contando do Primeiro	6.7	-
Contando do Maior	53.3	-
Contando do Menor	20	-
Contando Até	13.3	-
Contagem Decrescente	6.7	-
Adição Repetida	-	100

No pós-teste foi registada uma menor variedade de estratégias. Algumas das que haviam sido observadas na resolução dos problemas do pré-teste não foram presenciadas na resolução dos problemas apresentados no pós-teste. Foi o caso da estratégia de manipulação direta “Agrupamento e Dupla Contagem”, das estratégias de contagem “Contagem Decrescente Até” e “Agrupamento e Dupla Contagem”, e da estratégia com factos numéricos “Factos Numéricos da Subtração”. Este facto poderá estar relacionado com o efeito da intervenção, dado que as crianças participaram nas sessões em grupo, o que poderá ter provocado alguma homogeneização dos procedimentos e menos criatividade de estratégias para encontrar a resposta correta no pós-teste.

Parece que as crianças conseguem, com alguma facilidade, interpretar a história do problema e descobrir estratégias para a sua resolução. Elas escolhem a estratégia que melhor lhes serve para resolverem acertadamente os problemas apresentados, sobretudo de acordo com o tipo de estrutura de raciocínio, independentemente da operação que está explícita no problema. Parece também que essa escolha é consciente e elas conseguem refletir na ação o seu pensamento e a compreensão das situações descritas nos enunciados. Ainda assim, carece de análise a argumentação dada pelas crianças na justificação da sua resposta, quando correta.

4.2.3. Argumentos na resolução dos problemas propostos no pós-teste

Os argumentos que as crianças usaram para validar as suas respostas, quando resolveram corretamente os problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa propostos no pós-teste, foram analisados segundo as mesmas categorias já relatadas anteriormente (Válidos, Parcialmente Válidos, Sem Argumento, Inválidos) e são apresentados na Tabela 67.

Tabela 67 - Tipo de argumento dado na resolução correta dos problemas de estrutura aditiva e multiplicativa, propostos no pós-teste.

	TIPO DE ESTRUTURA DE RACIOCÍNIO	
	EA	**EM**
ARGUMENTOS	(%)	(%)
Válido	65.3	60.7
Parcialmente Válido	8.3	10.6
Sem Argumento	4.7	6.6
Inválido	21.7	22.1

A grande percentagem de argumentos "Válidos", acima dos 60% em ambos os tipos de estrutura de problemas, parece indicar que as crianças compreendem o que lhes é pedido quando resolvem os problemas propostos. Era previsível que as crianças de 5 e 6 anos não conseguissem argumentar com clareza as suas respostas, não só atendendo à sua imaturidade para verbalizarem corretamente o seu pensamento, mas, como defende Piaget (1977), pela dificuldade que as crianças desta idade têm em refletir sobre a sua ação. No entanto, o que se verifica são valores consideráveis de justificações válidas, acima dos 60% nos problemas considerados mais difíceis, problemas de estrutura multiplicativa, e superior a 65% nos problemas de estrutura aditiva. Quando comparados com os valores apresentados no pré-teste, observa-se um aumento de argumentos "Válidos" no pós-teste, e consequentemente, uma diminuição dos argumentos "Inválidos". Também se nota um ligeiro aumento de argumentos "Parcialmente Válidos", o que parece indicar que algumas crianças que argumentavam de forma inválida a sua resposta começam a ensaiar uma explicação válida, mas ainda não o conseguem completamente. Este facto reflete uma maior consciencialização do processo efetuado pelas crianças na resolução, provavelmente fruto da intervenção a que estiveram sujeitas, o que conduz a uma outra questão: como raciocinam as crianças ao resolverem problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa? A procura de resposta a esta questão remete para uma análise à intervenção conduzida.

4.3. Existirá transferência de conhecimentos na resolução dos problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa?

Era também objetivo deste estudo perceber se existe transferência de conhecimento na resolução dos problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa. Se os conhecimentos adquiridos na intervenção numa determinada estrutura de raciocínio são transferidos para a resolução de problemas de outra estrutura de raciocínio. As crianças participaram em grupos de intervenção diferenciados onde trabalharam apenas numa estrutura de raciocínio, ou seja, cada criança participou em sessões de intervenção onde foram abordados problemas de uma só estrutura (ou estrutura aditiva, ou estrutura multiplicativa, ou tarefas de controlo) que foram explorados e resolvidos em pequeno grupo.

As crianças não foram todas sujeitas ao mesmo tipo de problemas, logo, participando de grupos de intervenção diferentes, estiveram sujeitas à exploração de problemas de diferentes estruturas de raciocínio. Afigurou-se importante perceber de que forma o desempenho das crianças que integraram o grupo de intervenção de estrutura aditiva (EA) registou ou não uma melhoria significativa de desempenho nos problemas de estrutura aditiva do pós-teste, e como foi o desempenho destas mesmas crianças nos problemas de estrutura multiplicativa e nos de controlo. E o mesmo para as crianças que integraram os grupos de intervenção de estrutura multiplicativa (EM) e grupo de controlo (C). De que forma os seus desempenhos sofreram alterações significativas nos problemas do tipo da estrutura de raciocínio trabalhada na intervenção, e nos outros problemas, onde não houve intervenção. Assim, além de analisar possíveis mudanças de desempenho em cada condição, interessa ainda perceber se os desempenhos das crianças que foram submetidas a uma intervenção sobre estrutura aditiva melhoraram o seu desempenho do pós-teste nos problemas de estrutura multiplicativa, e o mesmo para as crianças que foram sujeitas à intervenção sobre estrutura multiplicativa, se o seu desempenho melhorou significativamente nos resultados do pós-teste nos problemas de estrutura aditiva. Isto é, interessa perceber se crianças a trabalhar em condições distintas manifestam transferência de conhecimento de um tipo de estrutura de raciocínio para a resolução de problemas de uma estrutura de raciocínio diferente.

I - Crianças que trabalharam problemas de estrutura aditiva (GEA)

Uma análise aos desempenhos das crianças que participaram do grupo de intervenção sobre estrutura aditiva aponta para uma melhoria dos resultados do pós-teste em todos os tipos de estruturas de raciocínio. A Tabela 68 apresenta a média e o desvio padrão das proporções das respostas certas no pré- e pós-testes das crianças que integraram o grupo de intervenção em EA.

Tabela 68 - Média das proporções (desvio padrão) dos resultados no pré- e pós-testes das crianças que integraram o grupo de intervenção em estrutura aditiva (GEA).

INTERVENÇÃO EM ESTRUTURA ADITIVA		
	Média (desvio padrão)	
TIPO DE PROBLEMA	**Pré-teste**	**Pós-teste**
Estrutura Aditiva	.54 (.24)	.75 (.25)
Estrutura Multiplicativa	.43 (.35)	.67 (.31)
Controlo	.85 (.20)	.92 (.12)

Observa-se que os desempenhos das crianças que receberam intervenção sobre problemas de EA registaram, no pós-teste, valores médios superiores a 65%, chegando mesmo a ultrapassar os valores médios de 75% e 90% de sucesso nos problemas de estrutura aditiva e problemas de controlo, respetivamente. O desvio padrão diminuiu nos problemas de estrutura aditiva e multiplicativa, o que parece indicar que o desempenho destas crianças se aproximou dos valores médios no pós-teste, reduzindo a sua variabilidade.

Os problemas de estrutura aditiva registaram, desde o pré-teste, a existência de 100% de sucesso. Mas, enquanto que no pré-teste 5 crianças não conseguiram resolver mais do que 50% destes problemas, no pós-teste apenas se verifica 1 caso que não chega aos 50%. A quase totalidade das crianças consegue acertar pelo menos 56% dos problemas deste tipo. Os Gráficos 40 e 41 apresentam a distribuição da proporção das respostas corretas nos problemas de estrutura aditiva, no pré- e pós-testes, das crianças que integraram o GEA, grupo de intervenção em EA.

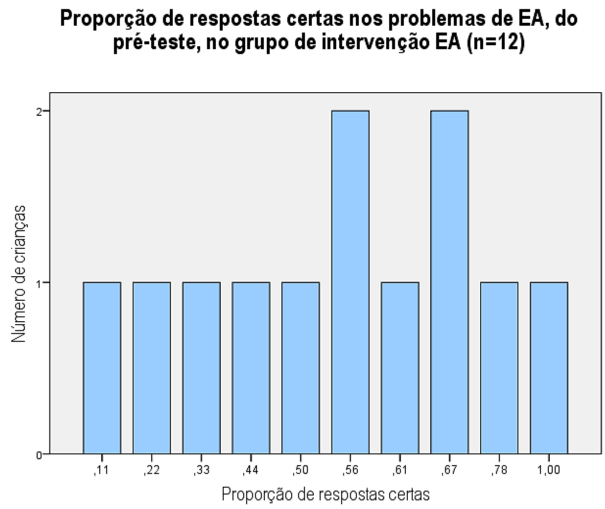


Gráfico 41: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de estrutura aditiva, do pré-teste, no grupo de intervenção GEA.

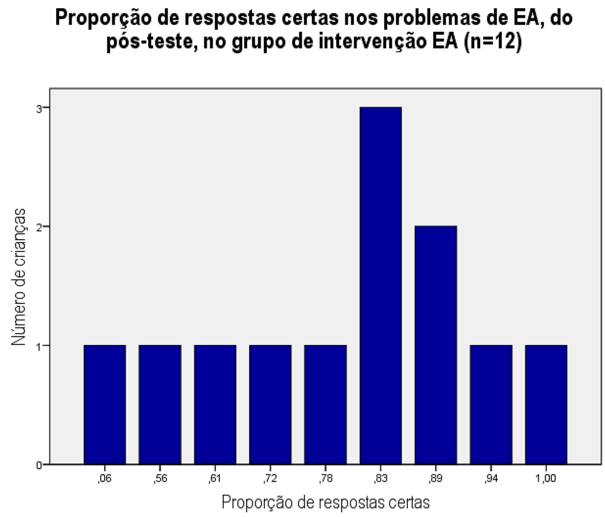


Gráfico 42: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de estrutura aditiva, do pós-teste, no grupo de intervenção GEA.

Quando estas crianças resolvem problemas de estrutura multiplicativa, o seu desempenho assume-se melhor nos problemas do pós-teste. Aumenta de quatro para oito o número de participantes que conseguem resolver mais de metade dos problemas propostos. Também reduz de dois para um o número de crianças que não conseguem resolver corretamente nenhum deste tipo de problemas. Os Gráficos 42 e 43 mostram a distribuição da proporção de respostas corretas nos problemas de estrutura multiplicativa, do pré- e pós-teste, do GEA, grupo de crianças que tiveram intervenção sobre EA.

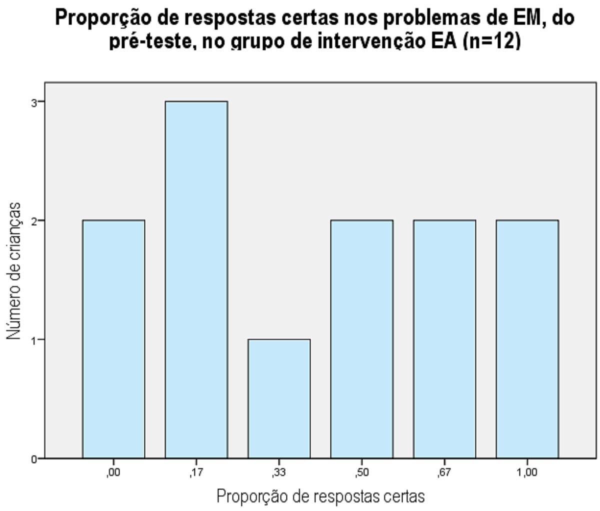


Gráfico 43: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de estrutura multiplicativa, do pré-teste, no grupo de intervenção GEA.

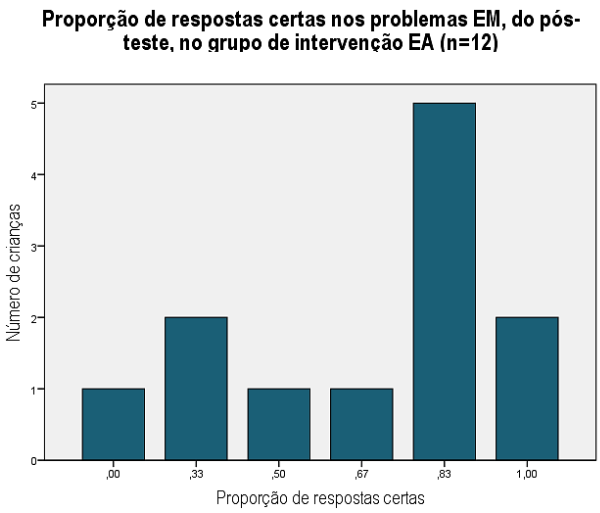


Gráfico 44: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de estrutura multiplicativa, do pós-teste, no grupo de intervenção GEA.

O desempenho destas crianças na resolução de problemas de controlo é melhor também no pós-teste. Já não se verificam casos de crianças a acertar só metade dos problemas, como duas crianças no pré-teste. Todas as crianças acertaram pelo menos 75% dos problemas propostos (ver Gráficos 44 e 45).

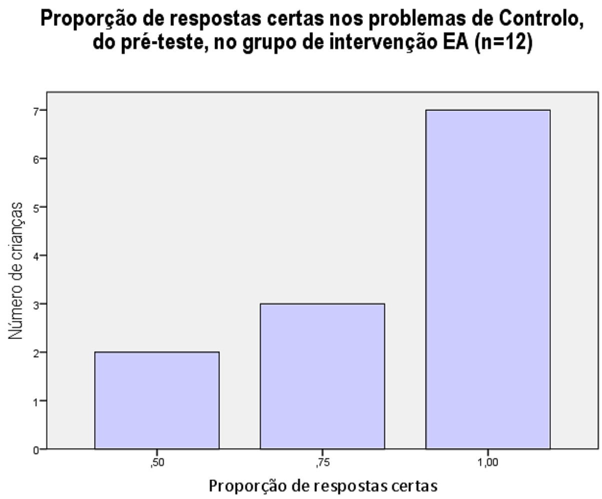


Gráfico 45: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de controlo, do pré-teste, no GEA, grupo de intervenção em EA.

Gráfico 46: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de controlo, do pós-teste, no GEA, grupo de intervenção em EA.

O Teste de Wilcoxon permite perceber se as diferenças observadas no desempenho das crianças no pós-teste, após uma intervenção centrada em problemas de estrutura aditiva, diferem significativamente do seu desempenho antes dessa intervenção. Registaram-se diferenças estatisticamente significativas entre os resultados do pré- e pós-teste tanto nos problemas de estrutura aditiva, W = 64.500; $p<.05$, como nos problemas de estrutura multiplicativa, W = 60.000; $p<.05$. A significativa melhoria de desempenho não se registou apenas nos problemas sobre os quais haviam recebido intervenção.

II – Crianças que trabalharam problemas de estrutura multiplicativa (GEM)

Procedeu-se também à análise das respostas certas, no pré- e pós-testes, das crianças que participaram no grupo de intervenção sobre problemas de estrutura multiplicativa (GEM). A Tabela 69 regista os valores médios dos resultados que estas crianças obtiveram no pré- e pós-testes.

Tabela 69 - Média das proporções (desvio padrão) dos resultados no pré- e pós-testes das crianças que integraram o grupo de intervenção em estrutura multiplicativa (EM).

INTERVENÇÃO EM ESTRUTURA MULTIPLICATIVA		
	Média (desvio padrão)	
TIPO DE PROBLEMA	**Pré-teste**	**Pós-teste**
Estrutura Aditiva	.45 (.22)	.55 (.21)
Estrutura Multiplicativa	.40 (.31)	.61 (.31)
Controlo	.77 (.23)	.77 (.25)

No pós-teste as crianças conseguiram ter um sucesso médio superior a 55%. Apenas nos problemas de controlo não se verifica uma melhoria de desempenho. Os problemas de estrutura multiplicativa, estrutura de raciocínio sobre a qual incidiu a intervenção, foram os que obtiveram maior percentagem média de sucesso, superior aos problemas de estrutura aditiva, situação que era contrária no pré-teste.

Já não se registam crianças a errarem todos os problemas de estrutura multiplicativa, o que acontecia no pré-teste. Reduz de sete para cinco o número de casos de crianças que não atingem os 50% de respostas corretas neste tipo de problemas, e já se observam três crianças a responder corretamente à totalidade dos problemas de estrutura multiplicativa (ver Gráficos 46 e 47). Enquanto que o valor máximo de sucesso nos problemas de estrutura multiplicativa, no pré-teste foi de 83%, após a intervenção neste tipo de problemas, o valor máximo de sucesso atingiu os 100%.

Gráfico 47: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de estrutura multiplicativa, do pré-teste, no GEM, grupo de intervenção em EM.

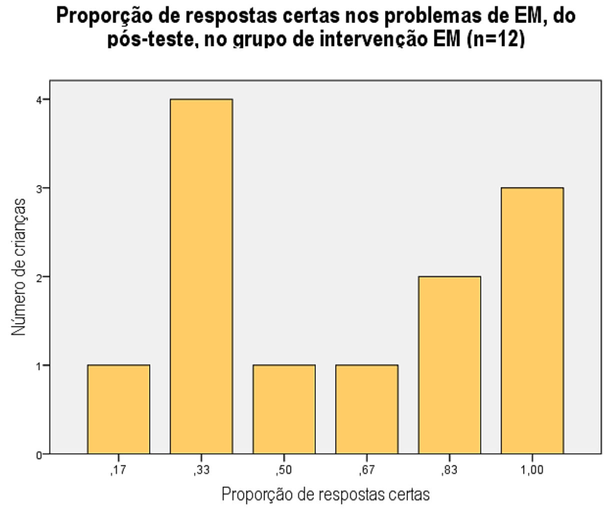


Gráfico 48: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de estrutura multiplicativa, do pós-teste, no GEM, grupo de intervenção em EM.

Quando as crianças do grupo GEM que estiveram sujeitas à intervenção sobre EM, resolvem problemas de estrutura aditiva, o seu desempenho, apesar de superior no pós-teste, não se revela tão bom como quando resolvem problemas de estrutura multiplicativa. Não se observa 100% de sucesso nos problemas de estrutura aditiva nem no pré- nem no pós-teste. Ainda assim registam-se melhorias após uma intervenção (ver Gráficos 48 e 49). Aumenta de 6 para 8 o número de crianças que resolvem pelo menos metade dos problemas deste tipo e o valor máximo de sucesso chega aos 83%, em vez dos 77% do pré-teste.

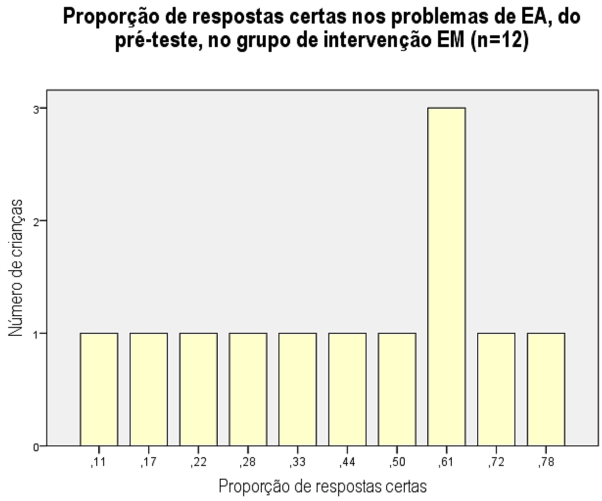


Gráfico 49: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de estrutura aditiva, do pré-teste no grupo de intervenção GEM.

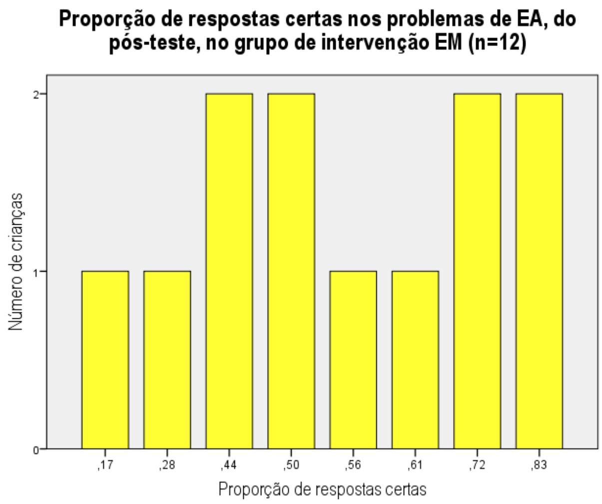


Gráfico 50: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de estrutura aditiva, do pós-teste no grupo de intervenção GEM.

Os desempenhos das crianças nos problemas de controlo apresentam poucas alterações do pré- para o pós-teste. Ainda assim, aumenta de 4 para 5 o número de crianças que acerta a totalidade destes problemas no pós-teste. Mantêm-se, no entanto, os mesmos valores máximos e mínimos de sucesso observados no pré- e no pós-teste (ver Gráficos 50 e 51).

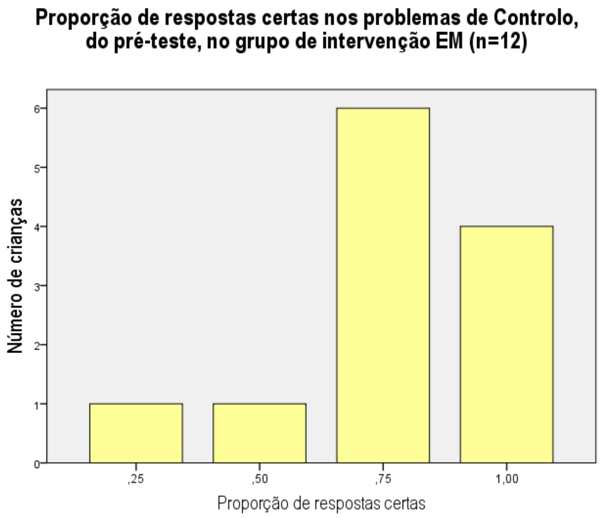


Gráfico 51: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de controlo, do pré-teste, no GEM, grupo de intervenção em EM.

Gráfico 52: Proporção de respostas certas nos problemas de controlo, do pós-teste, no GEM, grupo de intervenção em EM.

As crianças que integraram o GEM melhoraram os seus desempenhos tanto nos problemas de estrutura multiplicativa, sobre os quais incidiu a intervenção, como nos problemas de estrutura aditiva. De acordo com o Teste de Wilcoxon, confirma-se a existência de diferenças significativas nos desempenhos do pré- e do pós-teste nos problemas de estrutura aditiva, W = 50.000; p<.05, e nos problemas de estrutura multiplicativa, W = 42.000; p<.05, com desempenhos significativamente superiores no pós-teste. Nos problemas de controlo não se registam diferenças estatisticamente significativas do pré- para o pós-teste, W = 18.000; n.s., apesar dos níveis de sucesso neste tipo de problemas ser superior aos restantes.

III – Crianças que trabalharam problemas de controlo (C)

O desempenho das crianças que integraram o grupo de controlo (GC) da intervenção foi igualmente analisado, e comparados os seus desempenhos no pré- e pós-testes, em todos os tipos de problemas. A Tabela 70 apresenta a média e desvio padrão dos resultados do pré- e do pós-teste das crianças que fizeram parte do grupo de intervenção de controlo.

Tabela 70 - Média das proporções (desvio padrão) dos resultados no pré- e pós-testes das crianças que integraram o grupo de intervenção de controlo (GC).

INTERVENÇÃO EM PROBLEMAS DE CONTROLO		
	Média (desvio padrão)	
TIPO DE PROBLEMA	Pré-teste	Pós-teste
Estrutura Aditiva	.58 (.23)	.68 (.22)
Estrutura Multiplicativa	.31 (.31)	.56 (.32)
Controlo	.75 (.11)	.85 (.17)

As crianças que participaram no grupo C, à semelhança das que foram sujeitas a intervenções específicas nas estruturas de raciocínio, obtiveram melhores resultados no pós-teste do que no pré-teste, em todos os tipos de problemas. Os seus desempenhos médios passaram a estar acima dos 56%, valor registado nos problemas de estrutura multiplicativa e que no pré-teste se situou nos 31%. Apenas se observa alguma variabilidade de respostas neste tipo de problemas, ainda que bastante inferior ao observado no pré-teste.

Já não se observam crianças a errar todos os problemas de estrutura multiplicativa, como no pré-teste e aumentou de um para três o número de crianças com 100% de sucesso. Enquanto que no pré-teste 7 crianças não conseguiram responder a pelo menos metade dos problemas de estrutura multiplicativa, no pós-teste esses casos diminuem para 5. Os Gráficos 52 e 53 mostram a distribuição das proporções de respostas corretas nos problemas de estrutura multiplicativa, do pré e pós-testes, das crianças que participaram no grupo de intervenção de controlo.

Gráfico 53: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de estrutura multiplicativa, do pré-teste, no grupo de intervenção C.

Gráfico 54: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de estrutura multiplicativa, do pós-teste, no grupo de intervenção C.

As crianças do grupo C também revelaram melhores desempenhos nos problemas de estrutura aditiva no pós-teste. Enquanto que no pré-teste a percentagem máxima de acerto foi de 94%, no pós-teste, já uma criança apresenta 100% de sucesso neste tipo de problemas (ver Gráficos 54 e 55). Mantém-se o mesmo número de crianças com percentagens de acerto abaixo dos 50%, mas enquanto que a percentagem mínima de respostas corretas no pré-teste é de 28%, no pós-teste já ascende a 39%.

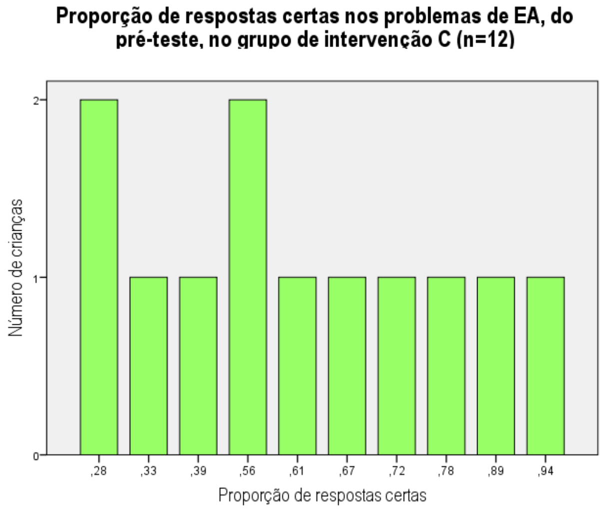


Gráfico 55: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de estrutura aditiva, do pré-teste, no grupo de intervenção C.

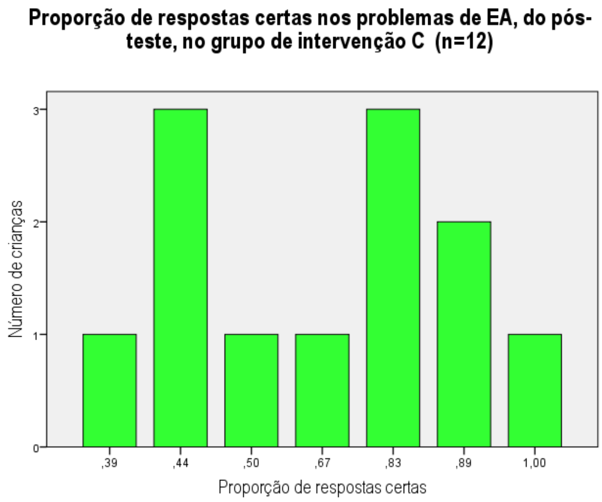


Gráfico 56: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de estrutura aditiva, do pós-teste, no grupo de intervenção C.

Também nos problemas de controlo observam-se diferenças entre os desempenhos do pré- e do pós-testes. Neste último, metade das crianças obteve 100% de respostas corretas nos problemas de controlo, enquanto que no pré-teste apenas 1 criança tinha conseguido esse resultado (ver Gráficos 56 e 57). As crianças que fizeram parte do grupo de controlo e foram expostas a atividades de geometria realizaram, também elas, aprendizagens neste âmbito, o que lhes permitiu ter mais sucesso no pós-teste em tarefas deste tipo.

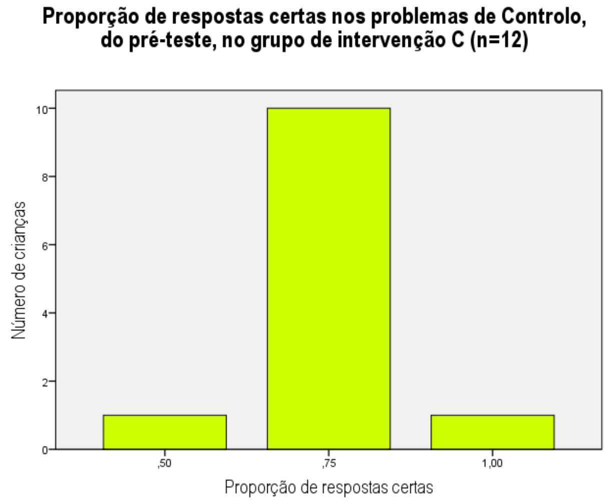


Gráfico 57: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de controlo, do pré-teste, no grupo de intervenção C.

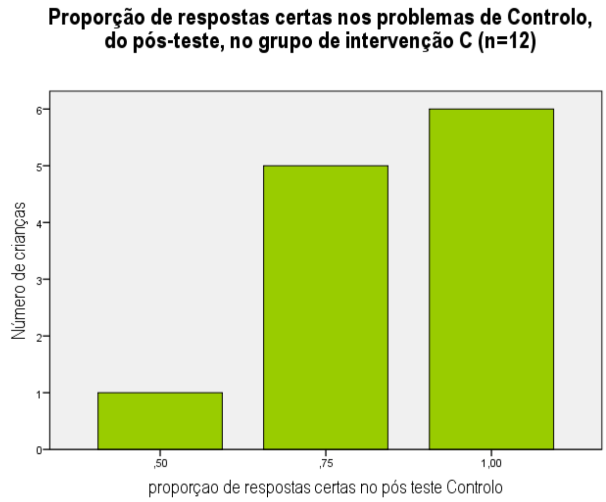


Gráfico 58: Distribuição da proporção de respostas certas nos problemas de controlo, do pós-teste, no grupo de intervenção C.

Estes resultados refletem uma melhoria de desempenho no pós-teste. Mas, contrariamente às crianças dos outros grupos, esta melhoria parece não ser proveniente de uma intervenção em determinada estrutura de raciocínio. As crianças do grupo de controlo não foram sujeitas à intervenção com problemas de estrutura aditiva nem problemas de estrutura multiplicativa, e registaram percentagens mais elevadas de sucesso no pós-teste do que no pré-teste, em todos os tipos de problemas.

No sentido de perceber se as diferenças de desempenho que as crianças demonstraram entre o pré- e o pós-teste são significativas, também no grupo de crianças que integrou o grupo C, recorreu-se ao teste estatístico não paramétrico de Wilcoxon. Registaram-se diferenças de desempenho estatisticamente significativas entre o pré- e o pós-teste nos problemas de estrutura aditiva, W=51.000; p<.05, e nos problemas de estrutura multiplicativa, W=51.000; p<.05, indicando um desempenho significativamente superior no pós-teste na resolução de problemas de estrutura aditiva. Também neste caso não se registam diferenças estatisticamente significativas nos desempenhos das crianças entre o pré- e pós-testes nos problemas de controlo, W=24.000; n.s., apesar deste tipo de problemas ter sido explorado na intervenção com este grupo de participantes.

Em suma, todas as crianças, independentemente da intervenção a que estiveram sujeitas, registaram uma melhoria acentuada nos problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa. As crianças que trabalharam problemas de estrutura aditiva melhoraram o seu desempenho nos problemas de estrutura aditiva, mas também nos de estrutura multiplicativa. As crianças que trabalharam problemas de estrutura multiplicativa melhoraram o seu desempenho em problemas deste tipo, mas também em problemas de estrutura aditiva. No entanto, importa também considerar que as crianças que não trabalharam nenhuma destas condições na intervenção melhoraram também o seu desempenho em ambas as estruturas de raciocínio. Regista-se, desta forma, uma melhoria transversal, em todos os grupos, não identificada claramente como decorrente de uma transferência de conhecimentos, mas provavelmente derivada de um desenvolvimento pessoal e das interações a que foram submetidas. Considera-se igualmente necessário perceber se houve alterações na forma de atuar das crianças quando resolveram estes problemas no pós-teste, e perceber ainda a que tipo de estratégias recorreram as crianças para obter sucesso.

4.4. Análise dos efeitos da intervenção centrada em problemas de determinada estrutura de raciocínio

Avaliar os efeitos de uma intervenção centrada no desenvolvimento do raciocínio aditivo e do raciocínio multiplicativo era outra das questões de investigação deste estudo. Percebendo inicialmente o que as crianças conseguem fazer ao resolverem problemas de estrutura aditiva e multiplicativa, quando estes tipos de problemas lhes são apresentados separadamente, percebendo-se o que as crianças conseguem fazer na resolução de problemas variados (estrutura aditiva, multiplicativa, controlo), apresentados alternadamente, com raciocínios sujeitos a contaminação resultante das resoluções de uns problemas para os outros, pretende-se avaliar o desempenho das crianças na resolução de problemas do seu grupo de intervenção, onde trabalharam apenas uma estrutura de raciocínio, ou nenhuma (no caso das crianças do grupo de controlo).

Os dados obtidos através de câmara de vídeo foram revistos, transcritos e analisados, assim como as notas pessoais recolhidas em campo pela investigadora. Dado que as entrevistas semidirigidas decorreram em grupo, foi pretensão que todas as crianças conseguissem chegar à resolução correta, mais do que avaliar se conseguiam ou não um resultado acertado. Numa primeira fase, os dados foram analisados tendo em consideração o modo como cada uma resolvia o problema, se o resolvia de forma autónoma ou se, pelo contrário, nem sequer o resolvia mesmo depois de explorado pelo grupo.

De modo a melhor perceber a evolução nos desempenhos, apresenta-se uma análise comparativa individual dos 36 participantes, da sua abordagem aos 12 problemas apresentados em cada estrutura de raciocínio e tarefas de controlo, de acordo com o tipo de problema determinado pelo elemento desconhecido. Esta análise é feita tendo em consideração que a cada criança foram propostos quatro problemas de cada tipo, e é codificada pela forma como as crianças chegam ao resultado final do problema, se de forma autónoma ou se, pelo contrário, nem sequer o realizam, segundo a seguinte categorização:

S (Sozinha) - A criança consegue resolver o problema proposto sozinha e através da sua argumentação percebe-se que compreendeu o que fez (ver Figura 49). Por exemplo, no problema “O Tomás quer colocar 8 botões em 4 camisas. Uma camisa não pode ter mais botões que a outra. Quantos botões vai ter cada camisa?”, a criança vai distribuindo os botões por 4 grupos até que todos os grupos tenham a mesma quantidade de botões, e responde: “já sei, são 2 em cada. Se são 4 grupos… eu vi que eram 4 camisas, fiz 4 grupos e deu 2 botões em cada grupo” (criança 14).

Figura 49: A criança resolve o problema proposto sozinha.

I (Imitando) – A criança consegue resolver o problema com a estratégia adequada depois de observar um dos colegas a iniciar o procedimento, e argumenta corretamente, de forma que se percebe que sabe como fez (ver Figura 50). Por exemplo, no problema “A Joana viu que no lago estavam 2 rãs. Cada rã tem 4 patas. Quantas patas contou a Joana?”, a criança observa a colega enquanto esta inicia o procedimento e, resolve também ela o problema, argumentando a sua resolução de forma válida e consciente afirmando: “ao todo 8. Primeiro tirei das tampinhas as rãs, 2, e as patas, 8. Porque quando uma rã tem 4 patas, depois fica 4 mais 4 são 8” (criança 19).

Figura 50: A criança realiza o problema com imitação.

A (Ajudada) – A criança resolve o problema, mas necessita de ajuda adicional. Esse auxílio pode ser material, adicional àquele que foi disponibilizado na introdução da situação, ou procedimental, beneficiando da explicação/sugestão verbal da investigadora ou de um colega (ver Figura 51).

Por exemplo, no problema "O Tomás quer colocar 8 botões em 4 camisas. Uma camisa não pode ter mais botões que a outra. Quantos botões vai ter cada camisa?", a criança necessitou das tampas das caixas para fazer a distribuição dos botões pelas 4 caixas representativas das 4 camisas. Só depois de ter recorrido a este material é que conseguiu perceber uma das estratégias adequadas, neste caso agrupamento por tentativa e erro. No fim da resolução consegue responder "2 botões em cada camisa" (criança 23).

Figura 51: A criança necessita de ajuda para resolver o problema.

N (Não resolveu) – A criança fica a observar os colegas desde o início e não resolve o problema, por opção, apesar de ter os materiais à sua disposição (ver Figura 52).

Por exemplo, após a apresentação do problema “A mãe tinha algumas meias no estendal a secar. Apanhou 2 que já estavam secas e deixou lá 5 que ainda estavam molhadas. Quantas meias havia no estendal, no início?”, a criança retira alguns dos materiais e fica olhando os colegas, não realiza nenhum procedimento conducente a uma resolução, nem responde às questões que são colocadas neste problema a todos os elementos do grupo (criança 5).

Figura 52: A criança não resolve o problema.

Ao longo das sucessivas sessões notou-se uma evolução comportamental. Esta progressão foi cronológica, paralela ao desenvolvimento das sessões, e específica aos tipos de problema. As Tabelas 71 a 76 registam as abordagens das crianças aos problemas apresentados, ora de acordo com o tipo de problema e o elemento desconhecido, ora de acordo com a sucessão temporal das sessões de intervenção.

4.4.1. As crianças que trabalharam problemas de estrutura aditiva (GEA)

De uma forma geral, as crianças que fizeram parte do grupo de intervenção que trabalhou EA, GEA, melhoraram a sua autonomia na resolução dos problemas que lhes foram sendo propostos. No decorrer das sessões deixaram de estar tão dependentes de materiais adicionais ou da ajuda de outro, abandonando a resolução por imitação. No último problema de cada tipo, quase todas as crianças atingiram a resolução de forma autónoma, o que sugere que foram realizando aprendizagens e melhorando as suas capacidades de resolução, em cada tipo de problemas propostos, Transformação Ligando Duas Medidas com a transformação e o início desconhecidos, e Composição de Duas Medidas, com a parte desconhecida. Verificam-se algumas exceções, como é o caso das crianças 4, 7, 8 e 10 (ver Tabela 71).

Tabela 71 - Abordagem das crianças aos problemas propostos ao longo das sessões, de acordo com o tipo de problema de estrutura aditiva apresentado.

Problemas / Crianças	Problemas de Estrutura Aditiva											
	Transformação desconhecida				**Início desconhecido**				**Parte desconhecida**			
	1.º	**2.º**	**3.º**	**4.º**	**1.º**	**2.º**	**3.º**	**4.º**	**1.º**	**2.º**	**3.º**	**4.º**
1	S	S	I	S	I	S	S	S	A	A	I	S
2	S	S	S	S	S	I	S	S	S	S	S	S
3	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
4	S	S	S	S	S	A	S	I	A	A	I	A
5	I	I	I	S	S	S	S	N	S	S	S	S
6	A	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
7	S	I	S	I	A	I	S	S	I	I	S	I
8	N	N	S	A	A	A	A	A	N	A	A	A
9	A	S	S	S	A	I	I	S	A	A	S	S
10	I	I	S	S	I	A	N	S	A	N	S	I
11	S	S	S	I	S	S	S	S	S	I	I	S
12	N	A	I	S	S	A	S	S	A	A	A	S

Estas crianças revelaram irregularidades de evolução na abordagem aos problemas, de acordo com o tipo de problemas. Entende-se por “irregular” a inconstante e variável abordagem das crianças aos problemas, ora resolvem sozinhas um tipo de problema, ora de seguida já necessitam da ajuda de materiais adicionais, ou resolvem por imitação os problemas do mesmo tipo.

A criança 5 conseguiu, na sua globalidade, melhorar a sua prestação, realizando o último problema de cada tipo de forma completamente autónoma, à exceção dos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com o início desconhecido, que não foi resolvido. Das crianças que mostraram uma abordagem irregular na execução dos problemas propostos, de acordo com o tipo de problemas e elemento desconhecido, apenas as crianças 4 e 10 mantiveram a sua postura de irregularidade ao longo da sucessão das sessões de intervenção. As crianças 7 e 8 foram melhorando a sua abordagem aos problemas propostos, ao longo dos dias. A criança 7 conseguiu, nas duas últimas sessões, resolver a maior parte dos problemas sozinha, recorrendo à imitação apenas para resolver dois problemas. A criança 8, que nas duas primeiras sessões foi incapaz de chegar à resolução, nas seguintes, com ajuda, foi assertiva.

É possível observar que, de um modo geral, as crianças foram-se tornando mais autónomas na resolução dos problemas propostos no decorrer da intervenção (ver Tabela 72). Se nas duas primeiras sessões elas necessitavam de mais ajuda, quer da parte da entrevistadora, quer de materiais adicionais, nas duas últimas sessões já conseguem resolver os problemas propostos sozinhas. Também se pode verificar que, à exceção das crianças 5 e 10, que falharam a resolução de um problema, todas as crianças conseguiram resolver os problemas a partir da 3.ª sessão. A Tabela 72 apresenta a abordagem das crianças aos problemas de EA, ao longo da intervenção, de acordo com a sequência temporal das sessões.

Tabela 72 - Abordagem das crianças aos problemas de estrutura aditiva propostos ao longo da intervenção, de acordo com a sucessão temporal das sessões.

Problemas de Estrutura Aditiva												
	1.ª Sessão			**2.ª Sessão**			**3.ª Sessão**			**4.ª Sessão**		
Problemas / Crianças	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º	11.º	12.º
1	S	S	I	S	A	A	I	S	S	S	I	S
2	S	S	S	I	S	S	S	S	S	S	S	S
3	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
4	S	S	S	A	A	A	S	S	S	I	I	A
5	I	I	S	S	S	S	I	S	S	N	S	S
6	A	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
7	S	I	A	I	I	I	S	I	S	S	S	I
8	N	N	A	A	N	A	S	A	A	A	A	A
9	A	S	A	I	A	A	S	S	I	S	S	S
10	I	I	I	A	A	N	S	S	N	S	S	I
11	S	S	S	S	S	I	S	I	S	S	I	S
12	N	A	S	A	A	A	I	S	S	S	A	S

Atendendo a que cada criança resolveu 4 problemas de cada tipo, e foi possível verificar-se evolução no seu desempenho, são aqui apresentadas evidências desse progresso, em cada um dos tipos de problemas propostos. Dado o *continuum* verificado na evolução dos seus desempenhos, adquire maior visibilidade a comparação entre o 1.º e o 4.º problema, que cada criança resolveu.

Problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com a transformação desconhecida

Na 1.ª sessão, apresentou-se o problema de Transformação Ligando Duas Medidas com a transformação desconhecida "A Joana tinha 4 bonecas, a mãe deu-lhe mais algumas e ela ficou com 6. Quantas bonecas lhe deu a mãe?".

Após a apresentação do problema as crianças retiram seis bonecas, dispondo-as numa fila (ver Figura 53.1), primeiro quatro e depois as que faltam para as seis, ou seja, duas (ver Figura 53.2).

Crianças (da esquerda para a direita): **12, 2, 11, 1**

Figura 53.1: Resolução do 1.º problema de Transformação Ligando Duas Medidas com a transformação desconhecida.

Crianças (da esquerda para a direita): **12, 2, 11, 1**

Figura 53.2: Resolução do 1.º problema de Transformação Ligando Duas Medidas com a transformação desconhecida.

A criança 12 foi a única que não retirou inicialmente cinco bonecas para resolver o problema, ficando a observar os colegas. Posteriormente, e no final da explicação da criança 11, a criança 12 corrigiu a quantidade de bonecas que tinha colocado à sua frente (ver Figura 53.3).

Crianças (da esquerda para a direita): **12, 2, 11, 1**

Figura 53.3: Resolução do 1.º problema de Transformação Ligando Duas Medidas com a transformação desconhecida.

A criança 2 mantem as suas bonecas numa disposição indistinta, e frequentemente tapadas com as mãos, o que poderá sugerir alguma insegurança ou vergonha dos colegas. A Transcrição 1.1 resume o diálogo entre as crianças e a investigadora.

Investigadora	Então, quantas bonecas lhe deu a mãe?
Criança 12	[coloca 5 bonecas na mesa] A mim deu-me 1.
Crianças 2 e 11	A mim deu 2. [a criança 1 ainda está a fazer quando a criança 11 argumenta:]
Criança 11	Porque se ela tinha 4, para dar 6, a mãe tinha que lhe dar 2 [e mostra de seguida com as bonecas como fez, mostrando que primeiro pôs 4 e depois

	pôs mais 2 bonecas].
Investigadora	Como é que tu fizeste? Primeiro puseste quais?
Criança 11	[aponta as 4 bonecas] Estas, que foi as que disseste primeiro.
Investigadora	E o que fizeste a seguir?
Criança 11	Tirei mais 2 bonecas que era para dar o número seis.
Criança 12	[mantem-se calado a observar o procedimento da colega].
Investigadora	Todos fizeram desta forma?
Criança 12	[vai buscar mais 1 boneca] Falta-me a mim.
Investigadora	Porquê?
Criança 12	[não responde e olha para os colegas].

Transcrição 1.1 – Diálogo do grupo de crianças na resolução do 1.º problema de Transformação Ligando Duas Medidas, com a transformação desconhecida – EA.

Na 3.ª sessão foi apresentado o 4.º problema de Transformação Ligando Duas Medidas com a transformação desconhecida "Estavam 10 macacos numa árvore. Foram-se embora alguns e ficaram 3. Quantos macacos foram embora?".

Depois da apresentação do problema, todas as crianças retiram os 10 macacos para efetuar a resolução, à exceção da criança 1, que tenta usar os dedos (ver Figura 54.1).

Crianças (da esquerda para a direita): **1, 11, 2, 12**

Figura 54.1: Resolução do 4.º problema de Transformação Ligando Duas Medidas com a transformação desconhecida.

Esta criança desiste de usar os dedos poucos segundos depois e opta por ir buscar macacos, que coloca em dois planos à medida que os retira da caixa, sete macacos em cima e três em baixo. Todas as crianças iniciam a resolução do problema com uma disposição diferente das suas figuras (ver Figura 54.2).

Crianças (da esquerda para a direita): **1, 11, 2, 12**

***Figura 54.2*:** Resolução do 4.º problema de Transformação Ligando Duas Medidas com a transformação desconhecida.

A criança 11 retira os 10 macacos da caixa e depois coloca-os em dois planos, cinco macacos em cima e cinco em baixo, retirando posteriormente sete macacos. A criança 2, à medida que retira os 10 macacos coloca-os logo em dois planos, com uma disposição diferente, sete em baixo e três em cima. A criança 12 retira os 10 macacos e coloca-os em monte, que depois dispõe em linha para solucionar o problema proposto. Apesar da criança 2 ser a 1.ª a mostrar a resolução do problema (ver Figura 54.2), mantem-se calada, e é a criança 12 que primeiramente responde e justifica o seu procedimento. Enquanto isso, a criança 11 vai movimentando os seus macacos, mudando a disposição, mas sempre em dois grupos, um de sete macacos e outro de cinco. A criança 1 volta a recorrer aos dedos para explicar a sua estratégia de resolução (ver Figura 54.3).

Crianças (da esquerda para a direita): **1, 11, 2, 12**

Figura 54.3: Resolução do 4.º problema de Transformação Ligando Duas Medidas com a transformação desconhecida.

A Transcrição 1.2 descreve o diálogo entre a investigadora e o grupo de crianças na resolução deste problema.

Investigadora	Quantos macacos é que se foram embora?
Criança 2	[separa os 7 macacos num monte, tapa-os com a mão e deixa 3 à mostra. De seguida olha para a investigadora mas mantem-se calada].

Criança 12	[retira 10 macacos, dispõe-nos em linha, contando baixinho:] 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [pausa] 8, 9, 10. [conta de seguida silenciosamente os 3 primeiros e reinicia esta contagem a partir do 4.º elemento da fila] Foram 7 embora.
Investigadora	Porque é que dizes que foram 7 embora?
Criança 12	Porque eu contei estes aqui e deu 7 [aponta a fila de macacos a partir do 4.º elemento].
Investigadora	Porque é que contaste a partir destes [aponta os 3 primeiros macacos] e contaste depois estes [aponta os restantes 7]?
Criança 12	Porque alguns foram embora e ficaram esses 3.
Criança 2	[enquanto o seu colega dá a explicação, ela tapa os 3 macacos, deixando já os 7 macacos à mostra].
Investigadora	[dirige-se à criança 2] Explica como fizeste.
Criança 2	Eu contei os 7 macacos e depois ficaram 3.
Investigadora	[questiona a criança 1] Tu começaste por fazer com os dedos, e depois fizeste com os macacos. Como é que tu fizeste?
Criança 1	[conta enquanto levanta os dedos] 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [permanece com 3 dedos por levantar].
Investigadora	E esses dedos [aponta os que não foram levantados]?
Criança 1	São os macacos que não foram embora.

Transcrição 1.2 – Diálogo do grupo de crianças na resolução do 4.º problema de Transformação Ligando Duas Medidas, com a transformação desconhecida – EA.

Durante a resolução do 1.º problema, a criança 12 mantem-se observadora e não consegue argumentar o motivo pelo qual necessitou de ir buscar mais uma boneca. A sua disposição inicial das figuras para a contagem obedeceu a uma fila alinhada. Quando a criança 12 resolve o 4.º problema deste tipo, já não necessita de organizar as suas figuras numa fila direita alinhada para visualizar a contagem de 10 elementos, antes a organiza desta forma quando está a proceder à estratégia conducente a uma resolução correta. Também não necessitou de observar nenhum colega para encontrar um procedimento correto e consegue argumentar a sua resposta. Mesmo quando a investigadora continua a exploração deste problema com os outros elementos do grupo, a criança 12 vai respondendo acertadamente. Enquanto que no 1.º problema tinha sido o último a colocar as seis bonecas e ainda assim não conseguiu explicar porque precisava daquela quantidade, neste último problema foi o primeiro a dar a resposta correta, o que sugere que esta criança aprendeu um procedimento de resolução conducente ao resultado certo, mostrando que, neste caso, consegue perceber a composição aditiva das partes no todo.

A criança 2, que no 1.º problema mostrou alguma timidez tapando todas as suas figuras enquanto os colegas procuravam a resolução, no último problema foi a 1.ª a mostrar a resposta correta, no entanto só responde quando a investigadora a questiona diretamente, o que poderá ser um indicador da sua personalidade mais tímida. Contudo, parece ter havido algum progresso, pois já consegue explicar a estratégia que usou.

Quanto à criança 1, o recurso aos dedos que ela tenta fazer para resolver o problema e posteriormente para justificar a sua resposta sugere que pretende abandonar a estratégia manipulativa, contudo, ainda se baralha com as quantidades, o que a leva a ser mais ponderada na sua opção e resposta.

O comportamento absorto da criança 11 na resolução do último problema parece indicar que esta criança considerou ser de tal forma fácil este problema que não é necessário acrescentar nada ao que os seus colegas disseram. Esta sugestão baseia-se na rápida resolução do 1.º problema e estratégia acertada em ambos os problemas comparados, em que no último ela movimenta as suas figuras em dois grupos separados com as quantidades corretas em cada um, e quando questionada como fez responde simplesmente “igual”.

Problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com o início desconhecido

Os problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com o início desconhecido começaram a ser trabalhados também na 1.ª sessão, com o problema “Na casinha das bonecas estavam algumas meninas a brincar e juntaram-se mais 3 meninas. Agora estão lá 5. Quantas meninas estavam a brincar na casinha das bonecas, no início?”.

Após a apresentação do problema, todas as crianças retiram cinco bonecas, à exceção da criança 9 que retira seis bonecas, em que duas estão separadas das quatro bonecas por um pequeno intervalo (ver Figura 55.1).

Crianças (da esquerda para a direita): **9, 10, 4, 5**

Figura 55.1: Resolução do 1.º problema de Transformação Ligando Duas Medidas com o início desconhecido.

Com as suas figuras, todas as crianças, à exceção da criança 5, fazem uma fila de bonecas. A criança 4 guarda duas das suas figuras na mão, tendo três na mesa. Todas ficam paradas, à espera de mais indicações, e como parece não ter sido claro o enunciado do problema, a investigadora repete-o. À medida que vai ouvindo, a criança 5 mexe as suas figuras, separando-as em dois grupos, três bonecas para um lado e duas para o outro (ver Figura 55.2) e responde corretamente, enquanto a criança 9 teima convictamente uma resposta incorreta, e permanece nessa convicção até a corrigir com a explicação dada pela colega (ver Figura 55.3).

Crianças (da esquerda para a direita): **9, 10, 4, 5**

Figura 55.2: Resolução do 1.º problema de Transformação Ligando Duas Medidas com o início desconhecido.

Crianças (da esquerda para a direita): **9, 10, 4, 5**

Figura 55.3: Resolução do 1.º problema de Transformação Ligando Duas Medidas com o início desconhecido.

As outras duas crianças assistem à discussão entre a criança 9 e a criança 5. A Transcrição 2.1 mostra o diálogo estabelecido entre o grupo e a investigadora na resolução deste problema.

Investigadora	[enuncia o problema novamente] Na casinha das bonecas estavam algumas meninas a brincar, vieram três.
Criança 5	[afasta 3 bonecas do conjunto inicial].
Investigadora	E juntaram-se lá, às que já lá estavam.
Criança 5	[junta as 3 meninas que tinha afastado às 2 restantes, que tinham ficado, formando de novo um conjunto de 5 elementos].
Investigadora	E ficaram lá cinco. Quantas é que estavam lá no início?
Crianças 5 e 10	[a criança 10 separa 2 meninas do grupo das 5, e diz em simultâneo com a criança 5:] Duas.
Criança 9	Três.
Criança 5	Duas.
Criança 9	Três.
Criança 5	Duas.
Criança 9	Três.
Investigadora	[questionando a criança 5] Porque dizes que estavam lá 2 meninas?
Criança 5	[afasta 3 meninas para o lado com a mão, deixando do lado esquerdo 2 meninas] Porque juntaram-se mais 3 [junta as 3 meninas às outras 2] e ficaram 5 [mostra as 5 meninas depois de juntar 3], e antes de lá estarem 3 só estavam 2.
Criança 9	[argumenta a sua posição:] Estão 3, e juntaram-se 3, dá 5 [dá conta do seu erro de contagem inicial e que determinou a resposta errada e corrige] ah… 2 mais 3 dá 5.
Criança 4	[ri-se do colega, e a investigadora questiona o que é que ela pensa].

Investigadora	Então, … [diz o nome da criança 4] e tu como fizeste, como pensaste?
Criança 4	Então, tinha 2 e para ficar 5 era mais 3. Para ficar 5 tinha que ser mais estas 3 [mostra as meninas separadas em dois grupos].

Transcrição 2.1 - Diálogo do grupo de crianças na resolução do 1.º problema de Transformação Ligando Duas Medidas, com o início desconhecido – EA.

Na 4.ª sessão foi apresentado o último problema de Transformação Ligando Duas Medidas com o início desconhecido "A mãe tinha algumas meias no estendal a secar. Apanhou 2 que já estavam secas e deixou lá 5, que ainda estavam molhadas. Quantas meias havia no estendal, no início?".

Logo que o material é disponibilizado, as crianças começam a retirar meias para resolverem o problema. A criança 10 coloca de imediato cinco em linha e vai buscar mais duas meias que coloca em baixo. A criança 9 vai retirando meias da caixa e colocando em linha, até ter um total de sete meias. A criança 4 começou por tirar duas meias, e depois tirou cinco, que colocou num plano superior (ver Figura 56.1).

Crianças (da esquerda para a direita): **10, 5, 4, 9**

Figura 56.1: Resolução do 4.º problema de Transformação Ligando Duas Medidas com o início desconhecido.

Antes que as crianças 4 e 5 tivessem concluído o procedimento, as crianças 9 e 10 respondem acertadamente e em simultâneo, e a criança 5 fica parada, não terminando a resolução. A criança 4 continua a resolução e responde acertadamente, antes da criança 9 explicar a sua estratégia, com movimentos em que afasta e junta as figuras consoante o seu discurso (ver Figuras 56.2 e 56.3).

Crianças (da esquerda para a direita): **10, 5, 4, 9**

Figura 56.2: Resolução do 4.º problema de Transformação Ligando Duas Medidas com o início desconhecido.

Crianças (da esquerda para a direita): **10, 5, 4, 9**

Figura 56.3: Resolução do 4.º problema de Transformação Ligando Duas Medidas com o início desconhecido.

Na Transcrição 2.2 apresenta-se um resumo do diálogo ocorrido entre a investigadora e o grupo, durante a resolução do último problema proposto de Transformação Ligando Duas Medidas com o início desconhecido.

Criança 10	[retira 5 meias da caixa e diz baixinho enquanto retira mais 2 meias] Preciso de mais 2.
Investigadora	Quantas meias estavam lá no início?
Crianças 9 e 10	Sete.
Criança 4	[continua a dispor as suas figuras e a contá-las, colocando-as em dois planos]. São 7.
Investigadora	[dirige-se à criança 9] Porque é que dizes que são 7?
Criança 9	Porque eu contei.
Investigadora	Contaste o quê?
Criança 9	[separa as 7 meias em dois grupos, no mesmo plano, 5 de um lado e 2 do outro] Primeiro contei estas [mostra as 5 meias], depois contei estas [mostra o grupo das 2 meias].
Investigadora	Porque é que primeiro contaste essas 5?
Criança 9	Porque eram as que ainda estavam molhadas, e com estas [junta o grupo das 2 meias] faziam 7 [mostra as meias todas juntas] e quando tirou estas [afasta de novo 2 meias] ficavam 5.
Investigadora	[dirige-se à criança 10] Como fizeste? Tu também disseste logo 7.
Criança 10	Fiz igual ao … [menciona o nome da criança 9].
Criança 4	Também fiz igual ao … [diz o nome da criança 9].

Criança 5	[depois de ser dada a resposta pelas duas crianças que inicialmente tinham mostrado mais dificuldade de resolução, desmotiva-se da sua própria resolução].

Transcrição 2.2 - Diálogo do grupo de crianças na resolução do 4.º problema de Transformação Ligando Duas Medidas, com o início desconhecido – EA.

No 1.º problema as crianças dispõem num mesmo plano as figuras seguidas para realizarem a contagem inicial, já no último recorrem à separação inicial das quantidades inerentes ao problema, o que resulta numa resolução mais rápida. As duas crianças que, no 1.º problema, foram as que tiveram mais dificuldade na interpretação, contagem e resolução, são as primeiras a resolver o 4.º problema. Na demonstração da sua resolução e da estratégia usada acompanham o seu discurso com a movimentação das figuras, seguindo a narrativa do enunciado. Este facto só acontecia com uma criança no 1.º problema, a criança 5, que demonstrou ter um raciocínio mais rápido e que se desmotivou no 4.º problema quando a solução já havia sido encontrada.

Parece que as crianças começam a ficar mais seguras de si. Ao longo da resolução dos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com o início desconhecido não se verifica a resolução por imitação e cada criança defende o seu ponto de vista, tal como se observa no 1.º problema quando as crianças 9 e 5 defendem respostas diferentes. De acordo com o desempenho da criança 5 em problemas anteriores, a interpretação que é feita da sua desistência no último problema poderá estar relacionada com alguma frustração de ter sido ultrapassada na rapidez da resposta.

No decorrer da intervenção, a linguagem argumentativa das crianças torna-se mais esclarecedora, como se pode observar na linguagem da criança 9, que usa expressões como “tirou” e “juntaram-se”. No entanto, também se observa, por parte de crianças que resolveram acertadamente problemas anteriores, mais falta de argumentação, e recorrem a respostas do género “fiz igual ao… [nome do colega] ”. Este facto poderá indicar que as crianças aceitam a estratégia do colega como a mais correta, e explicada de forma tão clara que não necessita de correções. Por outro lado, sugere que as crianças começam a perceber facilmente este tipo de problemas e resolvem-nos com tanta facilidade que não vêm necessidade em argumentar o que por si já assumem como óbvio.

Problemas de Composição de Duas Medidas com a parte desconhecida

O 1.º problema de Composição de Duas Medidas com a parte desconhecida, “A Rita e o João foram à pesca e pescaram, ao todo 7 peixes. A Rita pescou 4. Quantos peixes pescou o João?”, foi apresentado na 2.ª sessão.

Após a apresentação do problema, todas as crianças tiraram sete peixes, à exceção da criança 1 que tirou ambas as quantidades mencionadas no problema. Foi necessária a intervenção da investigadora para que a criança 1 percebesse que só podia ter sete peixes para conseguir resolver corretamente o problema, pois a estratégia que ela estava a usar era juntar ambas as quantidades do enunciado (ver Figura 57.1).

Crianças (da esquerda para a direita): **11, 2, 1, 12**

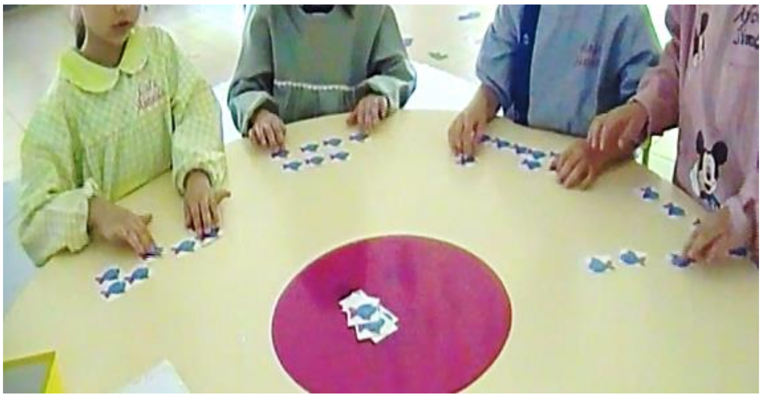


Figura 57.1: Resolução do 1.º problema de Composição de Duas Medidas com a parte desconhecida.

Logo de início, a criança 2 dispôs os seus peixes em dois planos, três em cima e quatro em baixo, a criança 11 colocou-os de forma indistinta na mesa, enquanto a criança 12 formava uma fila direita. Depois de perceber o "todo" e o que era pretendido, a criança 1 foi a 1.ª a responder corretamente, enquanto as crianças 11 e 2 separam, tapando, quatro peixes e respondem com a quantidade visível (ver Figura 57.2).

Crianças (da esquerda para a direita): **11, 2, 1, 12**

Figura 57.2: Resolução do 1.º problema de Composição de Duas Medidas com a parte desconhecida.

A criança 11 é a 1.ª a avançar com a justificação do seu raciocínio. Enquanto isso, a criança 12 mantem-se a observar os colegas e necessita da ajuda dos presentes e de materiais adicionais para compreender o problema (ver Figura 57.3). O resumo dos diálogos que se produziram entre a investigadora e o grupo são apresentados na Transcrição 3.1.

Crianças (da esquerda para a direita): **11, 2, 1, 12**

Figura 57.3: Resolução do 1.º problema de Composição de Duas Medidas com a parte desconhecida.

Criança 11	A Rita tinha 7 [questiona enquanto retira peixes da caixa]?
Investigadora	Não. Ao todo os dois meninos pescaram 7. [a criança 1 vai colocando uma 2.º fila de peixes, acima dos 7 que já estavam em linha e a investigadora interpela-o:] Ó … [diz o nome da criança], vais precisar desses? Ao todo os dois meninos levaram para casa 7 peixes no balde, e desses, 4 eram da Rita. [a criança 1 coloca o excedente na caixa deixando apenas a fila de 7 peixes] O que queremos saber é quantos peixes é que são do João.
Criança 1	Três [não movimenta nenhum peixe].
Crianças 2 e 11	Três [a criança 2 coloca ambas as mãos em cima das duas quantidades já separadas, 4 debaixo de uma mão e 3 debaixo da outra; a criança 11 separa 4 peixes do grupo de 7].
Investigadora	Como é que vocês sabem que são 3, como fizeram?
Criança 11	[adianta-se aos colegas respondendo:] Porque se a Rita pescou 4 então o João tinha que pescar 3.
Investigadora	Explica como fizeste.
Criança 11	Tirei os 4 da Rita e depois contei 3.
Investigadora	Então deixa ver se percebi… se tirarmos os peixes da Rita ficam os peixes de quem?
Crianças 1, 2 e 11	Do João.
Investigadora	E são os peixes do João que nós queremos saber. Quantos são os peixes do João [dirige-se à criança 12]?
Criança 12	Sete, para mim é 7.
Criança 2	Três!
Investigadora	A … [diz o nome da criança 2] está a dizer-te que são 3. [dirige-se à

	criança 2:] Explica ao teu colega…
Criança 2	Esses todos são da Rita e do João, a Rita tinha 4 e depois ficaram 3. A Rita ficou com 4 e o João ficou com 3.
Investigadora	Põe os peixinhos da Rita aqui [a investigadora dá uma tampa à criança 12 e ela coloca 4 peixes lá dentro], ela tem 4, os outros são do João, quantos é que são do João?
Criança 12	Três [diz olhando para os que ficaram na mesa, depois de ter colocado 4 peixes na tampa].

Transcrição 3.1 - Diálogo do grupo de crianças na resolução do 1.º problema de Composição de Duas Medidas, com a parte desconhecida – EA.

Na 4.ª sessão foi apresentado o 4.º problema de Composição de Duas Medidas “A Teresa e o Rui ganharam 9 rebuçados. A Teresa ganhou 6 rebuçados. Quantos rebuçados ganhou o Rui?”.

Depois da apresentação do problema todas as crianças retiraram sete rebuçados, colocando-os num monte. Enquanto a criança 11 confirma a quantidade, a criança 12 separa imediatamente seis rebuçados (ver Figura 58.1) e responde acertadamente ao problema, com argumentação.

Crianças (da esquerda para a direita): **12, 2, 11, 1**

Figura 58.1: Resolução do 4.º problema de Composição de Duas Medidas, com a parte desconhecida.

As restantes continuam o procedimento de separar as partes do todo, e respondem, também elas, ao que é solicitado. A criança 2, depois de dispor os nove rebuçados em fila, separa seis, e fá-lo retirando de uma só vez os seis rebuçados, três debaixo de cada mão (ver Figura 58.2), e dá a resposta com muita segurança.

Crianças (da esquerda para a direita): **12, 2, 11, 1**

Figura 12.2: Resolução do 4.º problema de Composição de Duas Medidas, com a parte desconhecida.

A criança 1 também separa de uma só vez seis rebuçados, enquanto a criança 11 vai separando um a um até ter seis, dispondo-os numa fila. Esta última dá a resposta ainda antes de concluir o procedimento. A explicação que ela dá posteriormente sobre a forma como resolveu o problema (ver Figura 58.3) não é coincidente com o procedimento usado por ela, que responde "três" quando ainda está a dispor os seis rebuçados em linha.

Crianças (da esquerda para a direita): **12, 2, 11, 1**

Figura 58.3: Resolução do 4.º problema de Composição de Duas Medidas, com a parte desconhecida.

A Transcrição 3.2 resume o diálogo ocorrido entre a investigadora e o grupo na resolução deste problema.

Criança 12	[enquanto os colegas estão a contar os seus rebuçados] Então estes são da Teresa [separa 6 rebuçados dos 9 que havia tirado] e estes são do Rui [aponta os 3 rebuçados que ficaram à parte].
Criança 2	[conta 6 rebuçados e separa, dizendo:] Tem 3.
Criança 1	Consigo tirar 6 [de uma só vez separa 6 rebuçados dos restantes]. Três.
Criança 11	[vai separando 6rebuçados formando com eles uma fila enquanto diz:] Tem 3, 3!
Investigadora	Então quantos rebuçados é que são do Rui?
Crianças 2 e 11	Três!
Investigadora	Como é que vocês fizeram?

Criança 11	Eu pus os rebuçados todos assim [mostra a fila de rebuçados] e depois contei os que a Teresa tinha e os que o Rui tinha.
Investigadora	Contaste os que a Teresa tinha e separaste?
Criança 11	Não.
Investigadora	Então?
Criança 11	Fiz assim: [coloca a mão a dividir a fila de rebuçados, 6 de um lado e 3 do outro].
Criança 2	Eu tirei 9 e depois contei 6 e ficaram 3.

Transcrição 3.2 - Diálogo do grupo de crianças na resolução do 4.º problema de Composição de Duas Medidas, com a parte desconhecida – EA.

O desempenho destas crianças no último problema foi muito mais rápido do que no 1.º. Mesmo a criança 12 que tinha demorado a compreender este tipo de problema quando ele foi trabalhado a 1.ª vez, necessitando da explicação individual da investigadora e de material adicional, foi a 1.ª criança a resolver o último problema e com um procedimento adequado. A criança 1, que tinha tido mais dificuldades em perceber que a quantidade maior mencionada no problema correspondia ao "todo", e que daí seria necessário separar em partes, já realizou sem qualquer dificuldade a decomposição do todo nas partes, conseguindo rapidamente chegar ao procedimento e resposta correta no último problema.

As crianças já não necessitam de colocar os objetos todos numa fila direita para realizar a contagem inicial. Elas recorrem a esta disposição apenas no procedimento e como facilitador da execução, como se pode observar da explicação dada pela criança 11 na resolução do último problema. O facto da criança 11 mostrar uma explicação não completamente coincidente com o seu procedimento de execução, poderá indicar que, no momento da resolução o seu pensamento é mais rápido do que a sua concretização com os materiais, já que ela responde acertadamente e consegue argumentar com validade. A explicação que ela dá colocando a mão a separar as duas quantidades que se mantêm numa fila ordenada, quando não foi assim que ela procedeu, sugere alguma preocupação em ser clara na sua exposição, de forma que todos a percebam.

Ao longo da intervenção, o desempenho destas crianças foi-se aperfeiçoando e refinando, com execuções mais rápidas e seguras. Como evidências deste facto, é a atitude da criança 1, que já anteriormente tinha tentado resolver com maior abstração os problemas, procurando a rejeição da manipulação direta. Neste último problema, ela separa de uma só vez, sem confirmar com a contagem, os seis rebuçados, o que sugere um maior domínio do reconhecimento das quantidades presentes sem contagem, recorrendo ao *subtizing*. Também a forma como a criança 2 separa os seis rebuçados, de imediato e com recurso também ao *subtizing,* retirando três numa mão e três na outra, poderá sugerir uma compreensão mais complexa da decomposição dos números que está subjacente ao princípio da estratégia de Factos Numéricos. Se por um lado pode ser interpretado como o domínio da compreensão de que 3+3+3 é 9, em que retirando dois grupos de três fica um 3.º grupo que corresponde à quantidade desconhecida, por outro lado pode ser interpretado como o conhecimento de um duplo Facto Numérico: primeiro o 9 é entendido como 3+6, ao que se segue o entendimento de que esse 6 que é retirado e que corresponde a uma das partes do todo, resulta de 3+3, ficando então a outra parte, o outro grupo de três rebuçados. Não só é um comportamento revelador de alguma complexidade, como se observa que esta criança consegue demonstrar segurança na sua explicação. Ela não necessita que a investigadora a interpele para mostrar que usou uma estratégia diferente da sua colega, a criança 11.

Nota-se assim que, globalmente, houve evolução na compreensão e interpretação não só deste tipo de problemas, como dos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas, já anteriormente analisados. Pela interpretação da alteração comportamental das crianças na resolução das tarefas propostas, e pela compreensão do seu raciocínio, foi possível observar-se o efeito da intervenção ao longo das sessões. Resultou dessa interpretação a identificação de categorias reveladoras de alteração e progresso de comportamentos, quer em termos de desempenho, quer em termos de linguagem e argumentação, indicadoras do efeito produzido pela intervenção.

A postura das crianças e a sua autonomia foram sofrendo modificações ao longo das sessões, verificando-se uma alteração da posição da criança face à investigadora e aos colegas. No decorrer de toda a intervenção, a maioria das crianças foi procurando resolver individualmente o problema proposto, indo ao encontro da resposta pretendida. Apenas uma criança demonstrou ter maiores dificuldades e fica parada, sem imitar os colegas, à espera de ajuda da investigadora ou dos próprios colegas, com indicação de procedimentos.

Gradualmente deixa de se verificar a dependência dos elementos do grupo da resposta da criança que se destaca quer pela sua rapidez, quer pela correção da sua resposta. Todas as crianças procuraram resolver os problemas sozinhas. Aquelas que, no decorrer do seu procedimento escutam a resposta dada por um colega, ou a ignoram ou então observam-no apenas, mas não tendem a transformar o seu pensamento. Por vezes procuram descobrir, na disposição das suas figuras, a resposta ouvida do colega, aceitando-a como uma hipótese a considerar. Quando tal não acontece, por erro de qualquer um deles, defendem a sua resolução, mesmo que errada.

A sua atenção durante a apresentação dos problemas é acompanhada de gestos indicadores de tentativas de memorização das quantidades mencionadas nos problemas. As crianças vão mostrando com os dedos as quantidades ouvidas à medida que vão conhecendo o problema. Ao longo da intervenção, a resolução dos problemas começa a ser, por parte de algumas crianças, cada vez mais rápida, com recurso a estratégias eficientes, logo menos morosas. Este facto leva a que, depois de constatarem o seu resultado como correto, mostram-se mais distraídas da explicação geral que é dada às crianças com mais dificuldades de resolução ou de interpretação do problema.

A forma como as crianças manipulavam os materiais, a rapidez com que respondiam e a estratégia que usavam, sugerem também alterações ao nível da abstração e do raciocínio. Dá-se conta, sobretudo em duas crianças, da evolução no desempenho, passando de uma atitude mais demorada na execução e com necessidade de uma explicação acrescida no início da intervenção, para um desempenho mais rápido. Estas chegam, em muitas situações, a ser as primeiras a resolverem os problemas propostos.

Mesmo relativamente à manipulação dos materiais disponibilizados, ocorreram algumas alterações. Durante a apresentação dos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com o início desconhecido, notou-se que algumas crianças passaram a movimentar as figuras, deslizando-as na mesa em função da narrativa do problema e em consonância com esta. Fixavam as figuras com os dedos e deslizavam-nas para fora ou para dentro do conjunto total de figuras quando era mencionado no problema “juntaram-se”, ou “ainda lá ficaram”, consoante o que era narrado. Esta simulação com os materiais parece demonstrar um pensamento que dá importância, não só às transformações matemáticas do problema, mas também às transformações temporais implícitas e que parecem ocupar parte do esforço mental naquele momento. Também no momento da explicação as crianças movimentam as figuras para fora ou para dentro do conjunto total conforme pretendem referir “vieram”, “saíram”, “depois chegaram”, assim demonstrando, mas não verbalizando completamente, o seu raciocínio.

Ao longo das sessões algumas crianças foram abandonando estratégias manipulativas com as figuras e passaram a usar mais as estratégias com factos numéricos e estratégias de contagem com recurso aos seus dedos. As crianças que mantiveram o uso de estratégias de manipulação direta com os materiais à disposição, ao colocar as figuras sobre o tampo da mesa dispõem-nas, cada vez mais ao longo das sessões, em dois planos distintos (superior e inferior). Desta forma, destacam de modo diferenciado as quantidades envolvidas nos problemas. Nota-se evolução neste aspeto já que anteriormente colocavam as figuras numa só linha e iam separando ou juntando, no mesmo plano, as quantidades. Este procedimento tornou-as mais rápidas e eficientes já que passam a evitar repetidas contagens.

Nos problemas de Composição de Duas Medidas com a parte desconhecida era mencionado no enunciado a quantidade referente ao todo e a quantidade referente a uma das partes, o que inicialmente induzia ao erro na interpretação do problema. Algumas crianças começavam por dispor em cima da mesa as figuras correspondentes às duas quantidades referidas. Aparentemente não entendiam que a maior quantidade dita se referia ao total, ao “todo”, e que o valor menor dito fazia parte dessa quantidade maior. Foi necessário a intervenção da investigadora, e de forma individual em alguns casos, para que essas crianças deixassem de persistir no erro e conseguissem resolver autonomamente e com sucesso os últimos problemas deste tipo. A noção do “todo” como o conjunto das partes traduzida na expressão “ao todo” presente nos problemas de Composição de Duas Medidas parece ter constituído inicialmente alguma dificuldade na interpretação deste tipo de problemas, o que não aconteceu com o “todo” expresso nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas.

A dificuldade que as crianças revelaram na resolução dos problemas residiu no modo como elas interpretaram as relações neles estabelecidas. Assim, parece ser mais fácil para as crianças interpretarem a noção do “todo” nos problemas onde há transformação de quantidades, do que nos problemas onde não é claro a operação que têm que realizar e não há nenhuma transformação envolvida no enunciado do problema. Contudo, e apesar de parecer que a noção de "todo" não é claramente assumida pelas crianças dado que elas não usam por sua iniciativa o termo "todos" e optam por apontar e dizer "contei estes", "contei as meias", quando questionadas se no seu procedimento contavam uma parte ("só estas") ou se contavam o total ("todas"), respondiam com segurança que contavam "todos". O conceito do todo como o somatório das partes foi ficando mais consolidado à medida que as crianças foram trabalhando problemas de Composição de Duas Medidas.

O vocabulário que foi sendo usado pelas crianças na argumentação de alguns problemas de estrutura aditiva é revelador da evolução que se foi produzindo ao longo das sessões de intervenção no raciocínio das crianças. Há termos que estão mais presentes no seu dia-a-dia, com facilidade as crianças referiam, desde o início da intervenção, expressões como "tirei", "ficaram", "juntaram-se". No decorrer da intervenção começam a usar termos como "esses todos", "separei", "juntei", "somei", o que tornou a argumentação mais imediata e aparentemente mais explícita. A argumentação dos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas, com o elemento de transformação desconhecido, foi a mais fácil, clara, rápida e assertiva, com recurso a vocabulário explícito e de uso diário "tirei", "juntei". Já os problemas do mesmo tipo com o início desconhecido e os problemas de Composição de Duas Medidas, apesar de terem sido resolvidos corretamente pelas crianças, foram com mais dificuldade argumentados por estas. Com prontidão, as crianças respondiam "fiz como a … [indicavam a criança que tinha resolvido e explicado em primeiro lugar]". Parece que o poder de argumentação das crianças, nos problemas considerados mais difíceis, é menor, e nem todas conseguem com clareza verbalizar o que concretizaram pela manipulação. Contudo, reconhecem na explicação dos colegas a lógica da sua atuação.

Com o decorrer das sessões, as crianças foram-se revelando pouco argumentativas, com respostas curtas e com mais momentos de silêncio face ao questionamento. As suas explicações foram mais contidas, mais pensadas e em menor número nas últimas sessões, coincidentes com os problemas descritos como sendo os menos argumentados. Considerando o aumento de sucesso nas respostas de todos os elementos do grupo e a rapidez na execução, no decorrer das sessões, poder-se-á sugerir que as crianças começam a entender como óbvia a resposta, e sendo aparentemente tão lógica que lhes parece ser suficiente mostrar como procederam, movimentando as suas figuras numa repetição da estratégia usada. Ao longo das sessões, e à medida que as crianças foram diminuindo o seu investimento na argumentação, foram aumentando o recurso ao manuseamento das figuras em simultâneo com a explicação dos procedimentos adotados na resolução. Tendo em consideração a progressão da autonomia das crianças, o aumento da rapidez na execução e resposta dada, a diminuição do investimento na argumentação verbal em primazia de uma maior manipulação das figuras para explicar o procedimento, parece que as crianças foram considerando os problemas cada vez mais fáceis de resolver e tão óbvios que não careciam de grandes explicações para se fazerem compreender.

4.4.2. As crianças que trabalharam problemas de estrutura multiplicativa (GEM)

Globalmente, as crianças que trabalharam problemas de estrutura multiplicativa, na intervenção, foram apresentando evolução na sua abordagem aos problemas propostos, de acordo com o tipo de problema, este decorrente do elemento desconhecido. As crianças conseguiram, pelo menos no último problema de cada tipo (Divisão por Quotas, Multiplicação e Divisão Partitiva), resolvê-lo de forma completamente autónoma. No entanto, observam-se mais dois casos de irregularidades nas abordagens das crianças que trabalharam este tipo de problemas, do que os que foram registados no grupo das crianças que foram sujeitas à intervenção sobre problemas de estrutura aditiva.

As crianças 13 e 18 mantiveram irregularidades na abordagem, dentro de cada tipo de problema proposto. A criança 16, apesar de apresentar também uma abordagem irregular já não necessita de ajuda para resolver o último problema de Divisão por Quotas e de Multiplicação. As crianças 17, 20 e 22 revelaram algum progresso na sua abordagem, em cada tipo de problema, no entanto, registaram-se algumas exceções. A criança 17 só conseguiu resolver o 2.º problema de Divisão Partitiva sozinha, necessitando de ajuda nos restantes; as crianças 20 e 22, apesar da oscilação entre a resolução autónoma e resolução com ajuda, necessitaram de auxílio para resolver o último dos problemas de Multiplicação (ver Tabela 73).

Tabela 73 - Abordagem das crianças aos problemas propostos ao longo das sessões, de acordo com o tipo de problema de estrutura multiplicativa apresentado.

Problemas / Crianças	Problemas de Estrutura Multiplicativa											
	Divisão por Quotas				**Multiplicação**				**Divisão Partitiva**			
	1.º	**2.º**	**3.º**	**4.º**	**1.º**	**2.º**	**3.º**	**4.º**	**1.º**	**2.º**	**3.º**	**4.º**
13	A	A	I	A	A	I	I	A	A	I	A	I
14	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
15	A	S	A	I	A	S	S	S	A	A	S	S
16	A	A	I	I	A	A	A	S	I	I	S	I
17	S	S	S	S	S	S	A	S	A	S	A	A
18	I	A	S	I	I	A	A	S	S	S	S	A
19	I	A	A	S	S	S	S	S	A	S	S	S
20	I	A	S	S	S	S	A	A	A	S	I	S
21	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
22	I	S	A	S	S	I	S	A	A	I	A	S
23	A	A	S	S	S	S	S	S	A	S	A	S
24	A	N	A	S	A	S	S	S	A	I	I	S

Dos casos identificados de crianças que mostraram uma abordagem irregular aos problemas de estrutura multiplicativa apresentados, destacam-se as crianças 16, 20 e 22. Estas crianças evoluíram na resolução, no decorrer da intervenção, segundo a sequência temporal em que ocorreram as sessões. A criança 16 conseguiu resolver sozinha, de forma completamente autónoma, dois problemas na última sessão. Apesar da irregularidade observada ao longo das sessões, as crianças 20 e 22 conseguiram resolver sozinhas o último dos 12 problemas propostos. A Tabela 74 mostra a abordagem das crianças aos problemas de estrutura multiplicativa, de acordo com a sequência temporal em que decorreram as sessões de intervenção.

Tabela 74 - Abordagem das crianças aos problemas de estrutura multiplicativa propostos ao longo da intervenção, de acordo com a sucessão temporal das sessões.

Problemas de Estrutura Multiplicativa												
	1.ª Sessão			**2.ª Sessão**			**3.ª Sessão**			**4.ª Sessão**		
Problemas / Crianças	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º	11.º	12.º
13	A	A	A	I	A	I	I	A	I	A	A	I
14	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
15	A	S	A	S	A	A	A	I	S	S	S	S
16	A	A	A	A	I	I	I	I	A	S	S	I
17	S	S	S	S	A	S	S	S	A	S	A	A
18	I	A	I	A	S	S	S	I	A	S	S	A
19	I	A	S	S	A	S	A	S	S	S	S	S
20	I	A	S	S	A	S	S	S	A	A	I	S
21	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
22	I	S	S	I	A	I	A	S	S	A	A	S
23	A	A	S	S	A	S	S	S	S	S	A	S
24	A	N	A	S	A	I	A	S	S	S	I	S

De uma forma geral, parece ter havido, em cada tipo de problema de estrutura multiplicativa, progresso na abordagem e na execução das crianças, resultado da exploração em grupo dos 4 problemas trabalhados de cada tipo. Uma análise comparativa entre o 1.º e o último problema de Divisão por Quotas, Multiplicação e Divisão Partitiva apresenta evidências dessa evolução nas crianças que trabalharam problemas de estrutura multiplicativa, durante a intervenção.

Problemas de Divisão por Quotas

Na 1.ª sessão apresentou-se o 1.º problema de Divisão por Quotas "O João tem 8 bolachas para colocar em cestos. Cada cesto vai ter 2 bolachas. De quantos cestos precisa o João?".

Após a apresentação do problema, todas as crianças retiram as oito bolachas que são mencionadas. A criança 14 é a única que vai formando uma fila de bolachas à medida que as vai retirando e contando, todas as outras retiram e colocam num monte. Enquanto as crianças 24 e 13 confirmam a contagem, a criança 14 agrupa de imediato as oito bolachas em grupos de duas e responde à questão que é colocada ainda antes dos seus colegas terminarem o procedimento (ver Figura 59.1).

Crianças (da esquerda para a direita): **24, 14, 13, 23**

Figura 59.1: Resolução do 1.º problema de Divisão por Quotas.

Perante a resposta dada pela criança 14, as outras crianças param de resolver o problema e fixam-se numa das quantidades mencionadas no enunciado, afirmando repetidamente essa quantidade como sendo a resposta. Estas crianças não chegaram a concluir o procedimento com as bolachas e é necessário a intervenção da investigadora com material adicional para que a crianças 24 resolva o problema e perceba a explicação que a criança 14 deu (ver Figuras 59.2 e 59.2).

Crianças (da esquerda para a direita): **24, 14, 13, 23**

Figura 59.2: Resolução do 1.º problema de Divisão por Quotas.

Crianças (da esquerda para a direita): **24, 14, 13, 23**

Figura 59.3: Resolução do 1.º problema de Divisão por Quotas.

As crianças 13 e 23 vão observando a criança 24 a resolver o problema com as tampas das caixas e, por imitação, fazem grupos de duas com as suas bolachas (ver Figura 59.4).

Crianças (da esquerda para a direita): **24, 14, 13, 23**

Figura 59.4: Resolução do 1.º problema de Divisão por Quotas.

A Transcrição 4.1 resume o diálogo entre o grupo de crianças e a investigadora na resolução do 1.º problema de Divisão por Quotas.

Criança 14	Eu já sei, eu já sei. Eu já tenho 2, mais 2, mais 2, mais 2, é 4.
Investigadora	Então de quantos cestos é que o João vai precisar?
Crianças 13, 24 e 23	Dois, dois.
Criança 14	É 4.
Criança 24	Dois.
Investigadora	[dirige-se à criança 24] Tu dizes que vai precisar de 2, tens aqui 2 cestos [entrega-lhe as tampas de caixas que ela havia dito serem necessárias]. Porque é que dizes que vai precisar de 2?
Criança 23	Vai precisar só de 1.
Criança 24	[vai distribuindo aos pares as bolachas que tem na mão, mas como lhe sobram bolachas, tenta redistribuir as sobrantes pelos mesmos 2 cestos].
Investigadora	[relembra] Olha, em cada cesto ele vai ter 2 bolachas. Precisas de mais cestos?
Criança 24	[acena que sim].
Investigadora	[entrega-lhe mais 2 tampas de caixas].
Criança 24	[coloca 2 bolachas em cada tampa, mas permanece calada face às perguntas da investigadora].
Investigadora	Então de quantos cestos é que ele vai precisar?
Criança 14	Eu já sei, é 4!

Investigadora	Explica lá porque dizes que são 4.
Criança 14	Porque eu primeiro fiz os grupos [segura 2 bolachas em cada mão] e depois vi que eram só precisos 4.
Investigadora	Porque é que fizeste grupos de 2?
Criança 14	Porque tu disseste que em cada cesto ia haver 2 (bolachas).
Criança 23	[começa a dispor as suas bolachas, fazendo grupos de 2 bolachas até esgotar as que tem e conta os grupos, verificando que são 4 grupos] São 4.
Criança 13	[distribui as suas bolachas pelas tampas que a investigadora lhe deu para resolver o problema].

Transcrição 4.1 – Diálogo do grupo de crianças na resolução do 1.º problema de Divisão por Quotas – EM.

Na 3.ª sessão foi apresentado o último problema de Divisão por Quotas "A professora levou 10 meninos para andar nos carrinhos da Feira. Em cada carrinho vão andar 2 meninos. Quantos carrinhos vão ter meninos?".

Imediatamente depois da apresentação do problema, todas as crianças retiram da caixa 10 figuras, colocando-as em monte, a criança 23 inicia a organização das suas figuras em fila para responder à questão do problema (ver Figura 60.1).

Crianças (da esquerda para a direita): **14, 23, 13, 24**

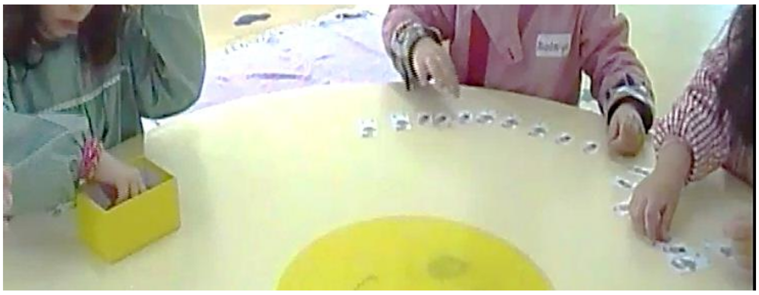


Figura 60.1: Resolução do 4.º problema de Divisão por Quotas.

Esta é a 1.ª criança a resolver o problema, agrupando as suas figuras em pares e contando depois o número de grupos que se formaram (ver Figuras 60.2 e 60.3).

Crianças (da esquerda para a direita): **14, 23, 13, 24**

Figura 60.2: Resolução do 4.º problema de Divisão por Quotas.

Crianças (da esquerda para a direita): **14, 23, 13, 24**

Figura 60.3: Resolução do 4.º problema de Divisão por Quotas.

Enquanto a criança 23 explica como resolveu o problema, as crianças 13 e 24 agrupam os seus meninos aos pares e resolvem, também elas, o problema, sem atenderem às explicações do colega (ver Figura 60.4). A criança 14, que havia sido a primeira a resolver o 1.º problema deste tipo não desiste de encontrar a solução por si, mesmo depois do seu colega ter dado a resposta e ter explicado como fez.

Crianças (da esquerda para a direita): **14, 23, 13, 24**

Figura 60.4: Resolução do 4.º problema de Divisão por Quotas.

A Transcrição 4.2 resume o diálogo estabelecido entre as crianças do grupo e a investigadora, na resolução deste problema.

Investigadora	Quantos carrinhos é que estavam com meninos?
Criança 23	Acho que eram 5 [faz uma pausa e exclama] é 5!
Investigadora	Porque dizes que eram cinco?
Criança 23	Porque contei em grupos de 2 e deu 5.
Investigadora	Deu cinco quê?
Criança 23	Cinco carros [e conta enquanto aponta os grupos formados] 1, 2, 3, 4, 5.
Crianças 13 e 24	[agrupam as suas figuras em pares mas permanecem caladas].

Investigadora	Foi assim que tu fizeste também [Dirige-se à criança 14]?
Criança 14	Eu pus os 10 meninos e depois fiz grupos de 2 e depois contei: [aponta os grupos enquanto conta] 1, 2, 3, 4, 5.

Transcrição 4.2 – Diálogo do grupo de crianças na resolução do 4.º problema de Divisão por Quotas – EM.

No 1.º problema de Divisão por Quotas apresentado, a criança 23 necessitou de observar os colegas a resolver o problema e de ver essa execução com material adicional, como as tampas das caixas, ao passo que, no último problema foi muito rápida na resolução, chegando a ser a primeira criança a responder acertadamente, sem material adicional e sem qualquer ajuda. Apesar da criança 23 ter sido a primeira a responder e de ter chegado à resposta adequada antes dos colegas concluírem o seu procedimento, estes não deixam de resolver o problema e procuram a melhor estratégia para o fazer, mesmo já tendo sido dada a resposta.

Enquanto que no 1.º problema houve mais crianças a necessitarem de explicações individualizadas e de material suplementar, no último problema já não houve necessidade de recorrer a este material e a execução tornou-se muito mais rápida. Verifica-se que todas as crianças deixaram de necessitar da fila organizada para efetuarem a contagem das quantidades quando retiravam as figuras da caixa e a sua disposição na mesa é mais descuidada. Não se prendem tanto tempo com a arrumação das figuras, o que exprime uma maior atenção sobre a estratégia mais rápida e eficiente para a resolução do problema apresentado.

Problemas de Multiplicação

Na 1.ª sessão foi também apresentado o 1.º problema de Multiplicação "O Alexandre foi à garagem do tio e encontrou 3 bicicletas sem rodas. Cada bicicleta terá que ter 2 rodas. Quantas rodas são necessárias para compor todas as bicicletas?".

Após a apresentação do problema, e enquanto duas das crianças do grupo tiravam as rodas necessárias à resolução, a criança 15 responde imediatamente "duas", sem qualquer manipulação, repetindo essa quantidade, que havia sido mencionada no enunciado. Mas como vê os seus colegas debruçados sobre as rodas, faz o mesmo, retirando apenas duas rodas (as que havia dito). A criança 16, que observa a criança 15, retira apenas duas rodas e repete o que havia sido dito pelo colega (ver Figura 61.1).

Crianças (da esquerda para a direita): **22, 15, 16, 21**

Figura 61.1: Resolução do 1.º problema de Multiplicação.

Entretanto, sem manipular qualquer figura, a criança 21 dá a resposta correta, e perante o confronto da criança 15, que continua a afirmar que são duas rodas, retira então aos pares, seis rodas. Também a criança 22 vai retirando as rodas, duas a duas, e coloca-as numa fila direita, agrupando-as posteriormente e de forma visível em três grupos de duas rodas. A criança 15 altera a resposta para “quatro”, retirando mais duas rodas, imitado pela criança 16 que também retira mais duas rodas (Figura 61.2).

Crianças (da esquerda para a direita): **22, 15, 16, 21**

Figura 61.2: Resolução do 1.º problema de Multiplicação.

A criança 15 precisa de ouvir novamente o enunciado do problema para perceber as quantidades envolvidas e retira mais duas rodas, ficando com seis. Mas só com a explicação do seu colega, a criança 21, que usa materiais adicionais a pedido da investigadora (ver Figuras 15.3 e 15.4), é que compreende as relações envolvidas no problema e resolve corretamente o 1.º problema de Multiplicação apresentado (Figura 61.3 e 61.4).

Crianças (da esquerda para a direita): **22, 15, 16, 21**

Figura 61.3: Resolução do 1.º problema de Multiplicação.

Crianças (da esquerda para a direita): **22, 15, 16, 21**

Figura 61.4: Resolução do 1.º problema de Multiplicação.

A Transcrição 5.1 resume o diálogo entre as crianças e a investigadora no decorrer da resolução.

Investigadora	[termina de enunciar o problema]
Criança 15	Duas.
Criança 21	Seis.
Criança 16	Duas.
Criança 15	São 2! [afirma enquanto retira 2 rodas]
Investigadora	O … [diz o nome da criança 21] já nos vai explicar porque é que diz que são 6 e tu [para a criança 15] também.
Criança 15	[retira mais 2 rodas] Ah, são 4, são 4 porque eu andei em 4 rodinhas.
Investigadora	[repete o enunciado do problema:] O Alexandre foi à garagem do tio e encontrou 3 bicicletas. Só que essas bicicletas não tinham rodas. E

	cada bicicleta terá que ter 2 rodas.
Criança 15	São 2 rodas.
Investigadora	São 2 rodas em cada bicicleta. [dá tampas à criança 21 para que ela mostre como pensou, usando as tampas como bicicletas] Explica como pensaste.
Criança 21	Tirei 2 [coloca 2 rodas numa tampa] e só dava para 1 (bicicleta), tirei mais outras [coloca mais 2 rodas noutra tampa] e dava para 2 (bicicletas), tirei mais 2 [coloca as últimas 2 rodas na 3.ª tampa] e dava para 3 (bicicletas).
Investigadora	Então, quantas rodas é que são precisas?
Crianças 22, 15 e 21	Seis.
Criança 16	[Permanece calada e por imitação vai colocando rodas conforme os seus colegas as dispunham em grupos de 2].
Investigadora	Então o que tiveram que fazer para saber que eram 6 rodas?
Criança 15	Quatro rodas… Não. Duas rodas são para 1 bicicleta [separa 2 rodas para a frente], mais outras rodas, 2, são para outra bicicleta [separa mais 2 rodas e dispõe por baixo das anteriores] para a bicicleta 2, e estas é para a bicicleta 3 [coloca o último grupo de 2 rodas por baixo das anteriores].

Transcrição 5.1 – Diálogo do grupo de crianças na resolução do 1.º problema de Multiplicação – EM.

Na 4.ª sessão foi trabalhado o último problema de Multiplicação "A Rita quer comprar 3 bonecas. Cada boneca custa 2 moedas. Quantas moedas custam as 3 bonecas?".

Logo que a investigadora apresentou os materiais para resolver o problema, todas as crianças retiraram seis moedas. A criança 22 ia repetindo "seis, seis, seis" enquanto retirava as seis moedas. Logo que tinha as seis moedas juntas, a criança 15 apressou-se a expor o seu raciocínio, com ânsia de ser a 1.ª a resolver o problema, enquanto as dispunha na mesa (ver Figura 62.1).

Crianças (da esquerda para a direita): **15, 21, 22, 16**

Figura 62.1: Resolução do 4.º problema de Multiplicação.

Enquanto que todos os elementos do grupo dispuseram na vertical as seis moedas, em grupos de dois, a criança 16 foi a única a colocar as moedas na horizontal, dispondo-as aos pares apenas quando o seu colega explicava o seu procedimento (ver Figuras 62.2 e 62.3). A Transcrição 5.2 apresenta o resumo do diálogo entre as crianças e a investigadora na resolução do último problema de Multiplicação.

Crianças (da esquerda para a direita): **15, 21, 22, 16**

Figura 62.2: Resolução do 4.º problema de Multiplicação.

Crianças (da esquerda para a direita): **15, 21, 22, 16**

Figura 62.3: Resolução do 4.º problema de Multiplicação.

Criança 22	Seis, 6, 6 [repete baixinho enquanto tira as moedas da caixa 2 a 2].
Investigadora	Quantas moedas é que a Rita tem que pedir à mãe para comprar as 3 bonecas?
Criança 15	[no momento em que tira as 6 moedas da caixa diz apressadamente] Custam 2, porque aqui estão 2, aqui também e aqui também e são 3 bonecas, a Rita quer comprar 3 bonecas [responde enquanto os colegas ainda estão a tirar as moedas para ser a 1.ª].
Investigadora	Calma! Então quantas moedas é que a Rita tem que pedir à mamã?
Criança 16	[Conta as moedas que tinha disposto em linha]
Todas	Seis [em coro].
Investigadora	[dirige-se à criança 15] Então explica como fizeste.
Criança 15	Com estas [aponta 2 moedas] compra 1, com mais estas [aponta mais 2 moedas] 2, e com estas [aponta as outras 2] compra 3. [a criança 16 vai dispondo as suas moedas na vertical, 2 a 2 à medida que o colega vai

	explicando o seu procedimento].

Transcrição 5.2 - Diálogo do grupo de crianças na resolução do 4.º problema de Multiplicação – EM.

No 1.º problema, a criança 15, não percebendo o raciocínio da criança 21, que responde "seis rodas", tenta aproximar a sua resposta inicial de "duas", à quantidade dita pelo colega e responde com a quantidade "quatro". Depreende-se que, na procura de ajustar a sua resposta à do colega (a quem reconhece melhor desempenho), aumenta de "duas" para "quatro". Numa tentativa de justificação para uma quantidade que não está segura de ser certa, recorre a vivências pessoais que, no seu íntimo, fundamentam a alteração da resposta. Esta atitude é aqui interpretada como "pessoalização" dos dados do enunciado (entende-se por "pessoalização" a apropriação e modificação dos dados de um determinado problema por aproximação à realidade pessoal significativa). A sua bicicleta tem quatro rodinhas, logo, no problema apresentado faz sentido a quantidade "quatro" que é dita por si. No último problema já não se observa a pessoalização das situações matemáticas, nem o recurso a material adicional por parte de nenhuma criança.

O desempenho das crianças no último problema foi muito mais rápido do que no 1.º. As crianças já não estiveram dependentes do colega que se destacava por ter um desempenho mais rápido e eficiente, mas procuraram resolver o problema sozinhos e sem recurso à imitação, o que se verifica sobretudo nas crianças 15 e 16. Estas necessitaram de mais explicações e ajuda no 1.º problema e conseguiram autonomamente resolver o último problema proposto. No caso da criança 15, ela consegue chegar à resolução correta do 4.º problema quase em simultâneo com as crianças que tinham resolvido o 1.º problema sem dificuldade, as crianças 22 e 21.

Enquanto que no 1.º problema a criança 15 repete uma das quantidades mencionadas no problema como sendo a resposta ao que se pretende, e afirma convictamente essa quantidade não aceitando de imediato a resposta da criança 21 como a resposta correta, já na resolução do último problema ela só avança com uma resposta quando retira as moedas, ao mesmo tempo que vai verbalizando o seu raciocínio. Ainda que a sua resposta seja dada primeiramente com uma das partes do problema, dizendo que "custa duas moedas", ela acaba por concluir o seu raciocínio com o todo que é pedido, "seis […], Com estas compra uma, com mais estas, duas e com estas compra três", interpretado como 2+2+2 o que dá seis. A rapidez imediata da retirada da quantidade total, e que corresponde ao elemento desconhecido, sugere também que as crianças resolveram o último problema com uma estratégia mais abstrata de Factos Numéricos (2+2+2 é seis), e recorreram às moedas como forma de dar por concluída a resolução do problema, ou para explicar o seu raciocínio.

Também a criança 16 revelou evolução na sua abordagem tendo retirado prontamente seis moedas, no último problema. Ela não fica dependente das outras crianças para retirar da caixa as figuras que necessitava, o que é visível até na disposição em que ela as coloca, na horizontal, diferente dos colegas. Sendo ambos problemas de Multiplicação onde se pretendia o número total de elementos, as crianças mostraram um comportamento diferente até na forma como retiram imediatamente as figuras. Enquanto que no 1.º problema as crianças vão retirando duas rodas, depois mais duas e por fim mais duas, consoante o número de bicicletas (número de grupos), no último problema as seis moedas são retiradas de imediato. O facto de estarem envolvidas as mesmas quantidades pode ter constituído um fator facilitador na resolução, no entanto, é notório que as crianças foram conseguindo perceber a estrutura do problema e as relações implícitas entre as quantidades.

Problemas de Divisão Partitiva

O 1.º problema de Divisão Partitiva foi apresentado na 2.ª sessão. Tinha como enunciado "O macaco Xico escondeu 12 bananas nos 3 bolsos das suas calças. Um bolso não pode ter mais bananas que o outro. Quantas bananas escondeu em cada bolso?".

Após a apresentação do problema, todas as crianças retiraram 12 bananas sem a preocupação de as colocar em linha para realizar a contagem, à exceção da criança 20 que fez duas filas de bananas. A criança 17 inicia a resolução do problema tentando distribuir as bananas nos bolsos do seu bibe (ver Figura 63.1).

Crianças (da esquerda para a direita): **17, 19, 18, 20**

Figura 63.1: Resolução do 1.º problema de Divisão Partitiva.

Verificando que os seus bolsos não são suficientes, a criança 17 pega nas tampas de caixas que estavam à disposição e começa a colocar, numa distribuição um-a-um, as bananas nas três tampas, para resolver o problema. As crianças 19 e 18 olham para ela numa atitude de observação de estratégia (ver Figura 63.2).

Crianças (da esquerda para a direita): **17, 19, 18, 20**

Figura 63.2: Resolução do 1.º problema de Divisão Partitiva.

A criança 19 pede tampas de caixas para realizar o mesmo procedimento, enquanto a criança 18 começa uma distribuição semelhante mas na mesa, dispondo as bananas em filas de três (ver Figura 63.3), contudo parece não perceber quantas bananas ficará em cada bolso, desfaz a sua disposição e reorganiza as bananas em três grupos de quatro bananas cada um, enquanto a criança 20 espera que lhe deem tampas para resolver o problema usando o procedimento de distribuição um-a-um (ver Figura 63.4).

Crianças (da esquerda para a direita): **17, 19, 18, 20**

Figura 63.3: Resolução do 1.º problema de Divisão Partitiva.

Crianças (da esquerda para a direita): **17, 19, 18, 20**

Figura 63.4: Resolução do 1.º problema de Divisão Partitiva.

Posteriormente, quando a colega 17 lhe oferece as tampas, a criança 18 pega em cada grupo de bananas e coloca-o em cada uma das tampas, sem as contar para confirmar as quantidades que ficam em cada tampa. A Transcrição 6.1 apresenta o resumo dos diálogos entre as crianças do grupo e a investigadora, na resolução do 1.º problema de Divisão Partitiva.

Criança 19	Já tenho 12 [enquanto olha a criança 17 a resolver o problema].
Investigadora	Já? E agora? Ele tem 3 bolsos para esconder as bananas.
Criança 19	Quero bolsos.
Investigadora	[dá tampas de caixas à criança 19].
Criança 17	Quatro, vai pôr em cada bolso 4. [As crianças 19 e 18 estão a resolver o problema, enquanto a criança 20 observa as colegas].
Criança 19	São 4 bananas.
Investigadora	Queres os bolsos? [dirige-se à criança 20]
Criança 20	[acena que sim e inicia o procedimento].
Criança 17	Dá bolsos à … [a criança 17 pede á investigadora para dar tampas à criança 18]. São 4 em cada um.
Investigadora	[enquanto dá as tampas à criança 18] Querem explicar como fizeram?
Criança 19	Pus 1 em cada [mostra com a mão o gesto da distribuição], depois pus 2 em cada, depois pus 3 em cada, depois pus 4 em cada [à medida que vai dizendo vai mostrando o gesto da distribuição] e acabou as bananas.
Investigadora	E porque é que fizeste assim?
Criança 19	Porque se eram 3 bolsos e cada bolso tinha 4 bananas, porque se não tivesse 4 bananas o bolso não ficava cheio [querendo dizer “com a mesma

	quantidade”].

Transcrição 6.1 - Diálogo do grupo de crianças na resolução do 1.º problema de Divisão Partitiva – EM.

Na 4.ª sessão foi apresentado o 4.º problema de Divisão Partitiva “A Rita tem 6 morangos para colocar em 3 bolos. Um bolo não pode ter mais morangos que outro. Quantos morangos a Rita vai colocar em cada bolo?”.

Após a apresentação do problema todas as crianças retiraram da caixa seis morangos que dispõem em linha, iniciando autonomamente a resolução do problema: a criança 17 pega em três tampas e coloca dois morangos em cada tampa; a criança 18 separa os seus morangos em dois grupos, três morangos para cada lado; as crianças 20 e 19, depois de terem os seis morangos, separam-nos em grupos de dois, resultando três grupos (ver Figura 64.1).

Crianças (da esquerda para a direita): **19, 17, 18, 20**

Figura 64.1: Resolução do 4.º problema de Divisão Partitiva.

Questionada sobre a disposição dos seus morangos, em dois grupos de três morangos, a criança 18 mantem-se calada, e quando lhe são entregues as tampas para que possa explicar, coloca dois morangos de cada vez em cada uma das três tampas (ver Figura 64.2), respondendo corretamente ao problema. A Transcrição 6.2 resume o diálogo ocorrido entre as crianças e a investigadora durante a resolução deste problema.

Crianças (da esquerda para a direita): **19, 17, 18, 20**

Figura 64.2: Resolução do 4.º problema de Divisão Partitiva.

Investigadora	[perante a disposição dos morangos da criança 18, em 2 grupos de 3 morangos, a investigadora tenta saber mais sobre o seu procedimento, dizendo:] São 3 bolos que a Rita tem. [a criança 18 mantem-se em silêncio e a investigadora entrega-lhe tampas de caixas e pede:] Quantos morangos é que a Rita vai pôr em cada bolo? Mostra-me como fizeste.
Crianças 17 e 18	Dois [a criança 18 coloca 2 morangos em cada tampa, responde ao mesmo tempo que a colega mas mantem-se calada o resto do tempo].
Investigadora	Porque é que dizes que são 2?
Criança 17	Porque eu contei os morangos dos bolos.
Investigadora	E como é que tu fizeste?
Criança 17	Eu tirei os morangos e depois pus de 2 em 2.

Investigadora	E tu [dirige-se à criança 18], como fizeste?
Criança 18	[Não responde].

Transcrição 6.2 - Diálogo do grupo de crianças na resolução do 4.º problema de Divisão Partitiva – EM.

O último problema de Divisão Partitiva teve uma resolução muito mais rápida do que o 1.º. As crianças mostraram-se muito mais seguras de si. As crianças 19 e 20, que solicitaram as tampas das caixas para resolverem o 1.º problema, já não recorreram a este material adicional para separar os seus morangos por grupos. Também a forma como o fizeram, separar dois morangos de cada vez, sem realizarem a distribuição um-a-um, sugere o conhecimento de um facto numérico (6 = 2+2+2). O recurso da criança 17 às tampas de caixas no último problema poderia sugerir que esta criança ainda está dependente de materiais adicionais sem os quais não chega ao procedimento e resolução corretos. Contudo, a sua explicação "pus de dois em dois" parece indicar que ela tem conhecimento da quantidade exata que vai colocar em cada grupo, e que o recurso ao material adicional poderá ser uma questão de segurança.

O que se observa na resolução que a criança 18 faz dos problemas de Divisão Partitiva poderá indiciar uma execução errada por parte desta, sobretudo no último problema, uma vez que ela faz dois grupos de três elementos e não justifica a disposição dos seus morangos. No entanto, quando lhe são entregues as tampas de caixas para explicar o seu procedimento, mostra uma disposição igual à dos colegas. Se se tiver em consideração que no 1.º problema esta criança conseguiu colocar as suas bananas numa disposição 4X3, e que posteriormente alterou para três grupos visíveis de quatro elementos, poder-se-á inferir que a sua disposição dos morangos, no último problema, em dois grupos de três morangos significa igualmente três grupos de dois elementos. Esta forma de atuar sugere alguma compreensão da composição multiplicativa por parte desta criança, e mais segura no último problema, pois só alterou a disposição dos elementos por grupo quando lhe foi entregue as tampas das caixas. Parece que esta criança necessita dos materiais adicionais apenas para fazer compreender o seu raciocínio, uma vez que tem alguma dificuldade, por razões de personalidade, em verbalizá-lo e demonstrar a sua compreensão inicial da composição multiplicativa.

Neste tipo de problema, as crianças já usam a expressão “em cada”, contudo, no último problema, estão menos argumentativas e usam respostas mais curtas. Considerando o tempo de execução e a resposta correta, o facto de estarem menos argumentativas poderá indicar que as crianças já não sentem necessidade de explicar com pormenores a sua estratégia uma vez que, por um lado, todos os elementos do grupo conseguem chegar autonomamente à resolução correta, por outro, começa a ser intuitivo para as crianças que este tipo de problemas se resolve com estratégias onde é visível a correspondência um-para-muitos que não carece de uma explicação exaustiva.

As alterações que se foram gerando no comportamento das crianças são indicadoras do efeito produzido pela intervenção, e podem, à semelhança da análise efetuada nos grupos das crianças que trabalharam problemas de estrutura aditiva, ser categorizados em termos de comportamento, desempenho e linguagem.

Ao longo das sessões as crianças que necessitavam de mais ajuda para resolver os problemas, deixaram de estar dependentes da criança mais interventiva e passaram a estar mais debruçadas sobre a mesa e sobre os próprios materiais, procurando de forma autónoma a melhor estratégia para solucionar o problema proposto. Durante a apresentação dos problemas notou-se, em todas as crianças, uma atenção mais dirigida para a própria resolução, que se revelou por uma diminuição das “respostas-eco”, isto é, situações em que as crianças repetem, como resposta, a última quantidade ouvida na apresentação do problema, ou a resposta errada de um colega que se adiantou.

Logo nas primeiras sessões as crianças aprendem a distinguir a resposta correta de um dos colegas e, ainda que na sua postura ao longo das sessões pareçam menos atentos ao exemplo e explicação desse colega, tomam-no como regulador da sua ação, adotando *à posteriori* as mesmas estratégias de resolução dos problemas, ou manipulando as suas figuras no sentido de encontrarem respostas mais próximas ao resultado que ouviram. Esta mudança comportamental parece revelar uma estratégia de aprendizagem útil e não totalmente identificada como a imitação enquanto cópia da mesma posição das figuras no espaço. Ao longo das sessões verificou-se que as crianças foram abandonando progressivamente a imitação, procurando resolver de forma autónoma os problemas apresentados, numa atitude de busca de resolução individual e algo competitiva.

Ao longo das sessões notou-se um desprendimento de comportamentos que demonstravam pessoalização ou valorização emocional das histórias matemáticas. Acontecem em menor número as interpelações fora do contexto ou referências pessoais transpostas para os enunciados, por exemplo, quando a criança refere "quatro rodas porque eu andei em quatro rodinhas (a minha bicicleta tem quatro rodas)", ou ainda uma outra situação em que a importância é atribuída não ao resultado do problema mas ao aspeto prático de sentar todas os elementos envolvidos no problema "precisa de 11 cadeiras para sentar todos (porque nós estamos todos sentados)".

O recurso às figuras disponíveis desde o início do problema e a material adicional, como as tampas de caixas, vai diminuindo, com exceção de uma ou outra criança. Regista-se um menor uso dos esquemas completos. Se nos primeiros problemas as crianças sentiam necessidade de compor a figura da rã com a cabeça e as patas representando completamente a correspondência de um-para-muitos, ou seja, os elementos por grupo e o próprio grupo, nos últimos problemas elas agrupam apenas os morangos ou os botões em zonas não delimitadas, afastadas com intencionalidade de demarcar os grupos imaginados, mas sem uma linha fronteira real. As crianças passam a manipular apenas o número de elementos de cada grupo, sem necessidade de representar o próprio grupo. Por vezes a resposta correta é dada sem o recurso a qualquer material, ou é antecipada à manipulação. O raciocínio das crianças foi ficando mais rápido e abstrato, com recurso a estratégias de Factos Numéricos. Algumas crianças começam a demonstrar a compreensão da composição multiplicativa. A correspondência um-para-muitos na relação 4:1 revelou-se, desde o início das sessões, como a mais difícil de executar. No final das sessões de intervenção, algumas crianças demonstraram evolução na antecipação da dificuldade de resolução onde constava esta relação e adotaram estratégias para lidar com a mesma assertivamente, nomeadamente questionando repetidamente sobre um dos fatores (número de elementos por grupo ou número de grupos), ou solicitando logo o uso de materiais adicionais.

Nos problemas de Divisão por Quotas, em que é apresentado à criança o número total de elementos e o número de elementos por grupo, recaindo a questão sobre o número de grupos, a maioria das crianças pega na totalidade das figuras e agrupa-as em seguida. Este procedimento mantem-se ao longo das sessões, porém, no início a contagem era quase sempre subordinada a uma fila perfeita e ordenada das figuras alinhadas. Ao longo das sessões este "ritual" foi desaparecendo, a contagem mantem-se, por vezes com alinhamentos, outras vezes com disposições mais ou menos retangulares, e em outras situações aleatórias.

Nos problemas de Multiplicação, em que é apresentado à criança o número de grupos e o número de elementos por grupo, e se procura saber o total de elementos, a maioria das crianças pega no número de figuras correspondente ao número de elementos por grupo e vai dispondo por aglomerados que depois junta para saber o total. Esta situação mantem-se mas é cada vez mais explicada com expressões como "contei todos", "contei o todo", "juntei tudo e contei". Se, no início da intervenção algumas das crianças com execuções menos assertivas, apesar de concretizarem com a estratégia adequada, apenas retinham na verbalização uma parte do problema, nomeadamente a quantidade de elementos em cada grupo (quando era pedido o todo), nas últimas sessões estas crianças completavam as suas verbalizações e atendiam a todas as partes do problema.

Ao longo das sessões dois termos matemáticos passaram a ser usados pelas crianças com mais regularidade e com crescente interpretação. O termo "ao todo" foi adquirido por todas as crianças. Nalguns casos verifica-se que o "ao todo" servia também para referir quantidades parcelares, "em cada todo" (leia-se "em cada grupo"). A expressão "em cada um" causou maior conflito e gerou um prolongamento da duração de algumas sessões, pois durante a intervenção deu-se conta que grande parte das crianças não a entendiam. No princípio da intervenção apenas três crianças usam a expressão "em cada". Estas crianças eram também as mais eficientes nos raciocínios. Ao longo das sessões dá-se conta que as restantes crianças se vão apropriando do significado, já que reagem estrategicamente em função do que ouvem, embora oralmente continuem a não usar a expressão "em cada", prolongando muitas vezes e de forma rebuscada o seu discurso (por exemplo, a criança 22 ao ensinar o seu colega 16 "ele em vez de pôr dois e pôr só um grupo com quatro lápis, tem que pôr mais lápis para ficar três grupos de quatro […] porque são três caixas", leia-se: "tem que pôr mais lápis em cada grupo, para que cada um fique com quatro lápis"). Em contrapartida, a palavra "grupos" passa a ser sempre usada.

4.4.3. As crianças que trabalharam problemas de controlo (GC)

À semelhança das crianças que participaram nos grupos de intervenção sobre problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa, também as crianças que integraram o grupo de controlo e que realizaram tarefas de geometria, mostraram evolução na sua execução e abordagem aos problemas apresentados. Verifica-se que, de uma forma geral, a maioria das crianças evoluiu na sua abordagem aos problemas propostos dentro de cada tipo de problema. As crianças foram abandonando resoluções por imitação ou a ajuda de outro, progredindo na abordagem. Os problemas onde se verificou um maior número de crianças a terem uma resolução completamente autónoma foram os que trataram os Regularidades, apesar de se registarem três casos de não resolução. Registam-se, também, alguns casos de oscilações na resolução, sobretudo observadas dentro de cada tipo de problema. As crianças 25, 26 e 30 mostraram irregularidades apenas nos problemas com o Tangram. As crianças 33 e 34 já oscilaram na abordagem dos problemas de Regularidades e Tangram, enquanto na criança 35 esta foi observada nos problemas com o Tangram e com o Geoplano. A Tabela 75 apresenta a abordagem das crianças às tarefas de controlo apresentadas, de acordo com o tipo de problema.

Tabela 75 - Abordagem das crianças aos problemas propostos ao longo das sessões, de acordo com o tipo de problema de controlo apresentado.

Problemas / Crianças	Problemas de Controlo											
	Regularidades				**Tangram**				**Geoplano**			
	1.º	**2.º**	**3.º**	**4.º**	**1.º**	**2.º**	**3.º**	**4.º**	**1.º**	**2.º**	**3.º**	**4.º**
25	S	S	S	S	S	I	S	A	I	A	A	A
26	S	S	S	S	S	A	S	I	A	A	A	A
27	S	S	S	S	S	S	S	S	S	A	S	S
28	S	S	S	I	S	A	S	S	S	A	A	S
29	S	N	I	S	S	S	S	S	A	A	I	S
30	S	S	S	S	S	A	S	A	S	S	S	S
31	S	N	S	S	A	A	A	I	S	A	A	S
32	S	N	S	S	I	I	S	S	S	S	S	S
33	S	I	A	S	S	A	A	S	S	A	S	A
34	S	I	I	S	I	A	S	S	S	A	S	A
35	S	S	S	S	S	S	I	A	S	A	S	A
36	S	S	S	S	S	S	S	S	I	A	A	S

Quando o tipo de abordagem é apresentada, não de acordo com o tipo de problema, mas mediante os dias de intervenção, onde os tipos de problemas estão alternados, a imagem que ressalta é de uma irregularidade mais acentuada (ver Tabela 76). Aparentemente as crianças oscilam mais nas abordagens, entre problemas que resolvem sozinhas e outros em que necessitam de ajuda. Tal poderá significar que as dificuldades que as crianças revelam, e que se traduzem no tipo de abordagem, são específicas de cada tipo de problema apresentado. Esta dificuldade não é esbatida no decorrer das sessões, uma vez que uma análise transversal dos 12 problemas ao longo da sucessão temporal não mostra progresso na abordagem. A Tabela 76 mostra a abordagem das crianças aos problemas de controlo, ao longo das sessões de intervenção, de acordo com a sequência temporal.

Tabela 76 - Abordagem das crianças aos problemas de controlo propostos ao longo da intervenção, de acordo com a sucessão temporal das sessões.

Problemas de Controlo												
	1.ª Sessão			2.ª Sessão			3.ª Sessão			4.ª Sessão		
Problemas / Crianças	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º	11.º	12.º
25	S	S	S	I	I	A	S	S	S	A	A	A
26	S	S	S	A	A	A	S	S	S	I	A	A
27	S	S	S	S	S	A	S	S	S	S	S	S
28	S	S	S	A	S	A	S	I	S	S	A	S
29	S	N	S	S	A	A	I	S	S	S	I	S
30	S	S	S	A	S	S	S	S	S	A	S	S
31	S	N	A	A	S	A	S	S	A	I	A	S
32	S	N	I	I	S	S	S	S	S	S	S	S
33	S	I	S	A	S	A	A	S	A	S	S	A
34	S	I	I	A	S	A	I	S	S	S	S	A
35	S	S	S	S	S	A	S	S	I	A	S	A
36	S	S	S	S	I	A	S	S	S	S	A	S

Assim, parece que a evolução que se verifica, na forma como as crianças resolveram os problemas de geometria que lhes foram apresentados, ocorre dentro de cada tipo de problema. Globalmente, as crianças vão progredindo na forma como resolvem os problemas ao longo dos 4 dias, culminando com a resolução do último problema de forma completamente autónoma.

As irregularidades que se observam na abordagem das crianças dentro das tarefas de Regularidades, Tangram e Geoplano, não evoluem para resoluções autónomas quando observadas pela sucessão temporal, ao longo dos 4 dias em que ocorreu a intervenção. Este facto poderá indicar que as aprendizagens que as crianças realizaram nos problemas de geometria se concluem em si mesmas, dentro de cada tipo de problema. O facto de se tornarem autónomas na resolução de problemas de Regularidades não significa manifestamente uma resolução autónoma em problemas de Tangran ou Geoplano, trabalhados *à posteriori*. Provavelmente, o caso das crianças onde não foi tão evidente a evolução, onde foram observadas irregularidades na execução, necessitariam de trabalhar mais esses problemas específicos para ser claramente evidente a sua aprendizagem. A evolução que as crianças registaram, em cada tipo de problema proposto, sugere também uma análise à sua abordagem e execução entre o 1.º e o último problema de cada tipo.

Problemas sobre Regularidades

Na 1.ª sessão foi apresentado o 1.º problema de regularidades, onde era solicitado às crianças que continuassem o friso que estava iniciado, e que continha círculos e triângulos alternados.

Após a apresentação da atividade, todas as crianças, na sua vez, foram colocando as peças, seguindo a disposição inicial das figuras geométricas (ver Figura 65.1).

Crianças (da esquerda para a direita): **30, 29, 31, 32**

Figura 65.1: Resolução do 1.º problema de Rgularidades.

Quando questionadas sobre a razão de tal continuidade argumentaram corretamente a sequência (ver Figura 65.2), ainda que não denominassem corretamente o nome das figuras geométricas, nomeando de “bola” o círculo. A Transcrição 7.1 resume o diálogo entre as crianças e a investigadora durante a resolução desta atividade.

Crianças (da esquerda para a direita): **30, 29, 31, 32**

Figura 19.2: Resolução do 1.º problema de Regularidades.

Investigadora	Porque é que estão a pôr assim? Porque estão a continuar assim?
Criança 29	Porque estamos a fazer…
Criança 31	Um friso.
Investigadora	O que é isso?
Criança 31	É para continuar igual.
Criança 30	Com as mesmas figuras.
Investigadora	Quais figuras?
Criança 29	A bola.
Criança 30	Círculos e triângulos.
Investigadora	E porque é que puseram assim?
Criança 29	Porque é assim.

Investigadora	Assim como?
Crianças 29	Um triângulo, depois bola.

Transcrição 7.1 - Diálogo do grupo de crianças na resolução do 1.º problema de Regularidades – C.

O último problema de Regularidades foi apresentado na 3.ª sessão. Depois de colocado um friso na mesa, com círculos e retângulos alternados, as crianças teriam que descobrir dois intrusos. A investigadora iniciou o friso com a colocação das figuras geométricas, um círculo alternado com um retângulo, enquanto as crianças observavam com atenção no sentido de perceberem as figuras envolvidas (ver Figura 66.1).

Crianças (da esquerda para a direita): **32, 30, 31**

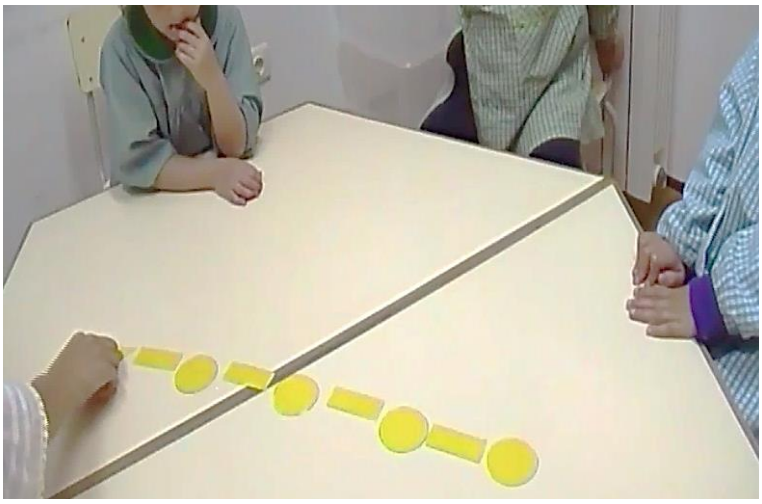


Figura 66.1: Resolução do 4.º problema de Regularidades.

Rapidamente, quando surgiu o 1.º triângulo, todas as crianças o identificaram como um intruso. No momento em que a investigadora coloca o 2.º triângulo, é igualmente identificado como não fazendo parte da sequência de figuras geométricas que estava a ser apresentada (ver Figura

66.2). A Transcrição 7.2 resume o diálogo entre as crianças e a investigadora durante a resolução do último problema de Regularidades.

Crianças (da esquerda para a direita): **32, 30, 31**

Figura 66.2: Resolução do 4.º problema de Regularidades.

Criança 30	[Diz enquanto a investigadora coloca o 1.º triângulo] ah, já sei, é o triângulo.
Crianças 32 e 31	É o triângulo [apontam para o triângulo grande].
Investigadora	São dois intrusos [continua o friso colocando o 2.º triângulo].
Criança 30	É este, é o grande e o pequenino [aponta para os triângulos, ao mesmo tempo das outras crianças].
Investigadora	E porque é que são os dois triângulos?
Crianças 32 e 30	É porque não são retângulos nem círculos.

Transcrição 7.2 - Diálogo do grupo de crianças na resolução do 4.º problema de Regularidades – C.

A participação e argumentação foi muito mais ativa na última atividade e com correção na linguagem. Enquanto que na primeira atividade proposta as crianças conseguiram realizá-la com sucesso mas não denominavam corretamente as figuras geométricas, na última já não havia dúvida na nomeação das mesmas. No 1.º problema de Regularidades, a criança 32 realizou a atividade mas manteve-se calada, sem argumentar nem corrigir a criança que não tinha designado corretamente o círculo. Já no último problema, esta criança mostrou-se mais interventiva, usando na sua explicação a identificação correta das figuras geométricas, nomeadamente o "círculo", que tinha sido mencionado como "bola" no 1.º problema. Esta atitude da criança 32 sugere progresso na denominação correta das figuras geométricas. Se a sua mudez no 1.º problema leva a inferir que esta criança não sabe o nome desta figura, ou não está certa o suficiente para corrigir a criança 29 quando ela designa "bola", no último problema é claro a certeza do seu domínio do nome das figuras geométricas.

Problemas com o Tangram

O 1.º problema de polígonos envolvendo o Tangram foi trabalhado também na 1.ª sessão. A tarefa consistia na descoberta de três peças do Tangram que cobrissem a área do triângulo grande.

Depois de serem disponibilizadas a cada criança as peças do Tangram, e de perceberem a explicação do que era pretendido, iniciaram a resolução da atividade. Apesar de, no início, a investigadora ter exemplificado a tarefa com o preenchimento da área de outra figura (um quadrado pequeno), a criança 35 demorou um pouco mais a compreender o objetivo, sendo necessário uma pequena ajuda da investigadora, uma vez que ela estava a colocar peças ao lado do triângulo que se pretendia preenchido (ver Figura 67.1).

Crianças (da esquerda para a direita): **35, 25, 36, 26**

Figura 67.1: Resolução do 1.º problema de Tangram.

A criança 25 foi a 1.ª a resolver este problema, sem qualquer dificuldade, ajudando a criança 36 a descobrir a peça que lhe faltava colocar (o quadrado pequeno) e que estava a constituir um obstáculo à resolução (ver Figura 67.2).

Crianças (da esquerda para a direita): **35, 25, 36, 26**

Figura 21.2: Resolução do 1.º problema de Tangram.

As outras duas crianças, apesar de demorarem um pouco mais, conseguiram, sem recorrer à imitação dos colegas, e de forma autónoma, resolver corretamente a tarefa proposta, descobrindo duas formas diferentes de cobrir a área do triângulo grande (ver Figura 67.3). Elas não só identificaram que tinham usado figuras geométricas diferentes no preenchimento, como conseguiram designá-las, à exceção do paralelogramo, que nenhuma criança parecia conhecer.

Crianças (da esquerda para a direita): **35, 25, 36, 26**

Figura 67.3: Resolução do 1.º problema de Tangram.

A Transcrição 8.1 mostra o resumo do diálogo entre as crianças e a investigadora no decorrer da resolução do problema proposto.

Criança 35	Não sei se consigo.
Investigadora	Põe (as peças) em cima do triângulo.
Criança 36	Eu sei, só tenho aqui um pequeno problema. [a criança 25 aponta-lhe a peça que falta] Ah, já sei! Já fiz!
Criança 25	Já fizemos [aponta-se a si e à criança 36].
Criança 26	Fácil! [diz quando coloca a última peça]
Criança 35	Fácil! Era só usar os triângulos [pausa] é diferente… [diz quando olha para as figuras geométricas usadas pelo seu colega]

Investigadora	Já todos fizeram? Sim, usaram peças diferentes…
Crianças 35 e 36	Usei dois triângulos pequeninos e um quadrado.
Investigadora	Mas o [menciona a criança 26] usou outras peças.
Criança 26	Dois triângulos e um… não sei como se chama.
Investigadora	Um paralelogramo?
Criança 26	Dois triângulos e um paralelogramo.

Transcrição 8.1 - Diálogo do grupo de crianças na resolução do 1.º problema de Tangram – C.

Na 4.ª sessão foi apresentado o último problema de geometria com as peças do Tangram. As crianças teriam que construir um novo quadrado com as quatro peças dadas (três triângulos e um quadrado).

Depois das crianças compreenderem a atividade que teriam que desenvolver, começaram, através de várias tentativas, a procurar a forma para construírem um quadrado com as figuras do Tangram que lhes foram dadas. A criança 26 foi a 1.ª a terminar (ver Figura 68.1), nem necessitar de qualquer ajuda por parte da investigadora.

Crianças (da esquerda para a direita): **26, 35, 25, 36**

Figura 68.1: Resolução do 4.º problema de Tangram.

A criança 35, depois de ter recebido uma pequena ajuda da investigadora, com indicação da posição de um dos triângulos pequenos, conseguiu também ela resolver o problema (ver Figura 68.2) e vai ajudar a criança 25 a colocar a última peça, e que estava a constituir a sua dificuldade (ver Figura 68.3).

Crianças (da esquerda para a direita): **26, 35, 25, 36**

Figura 68.2: Resolução do 4.º problema de Tangram.

Crianças (da esquerda para a direita): **26, 35, 25, 36**

Figura 68.3: Resolução do 4.º problema de Tangram.

A criança 36 conseguiu realizar a atividade depois de observar a ajuda prestada pela criança 35 à 25. A Transcrição 8.2 resume o diálogo que ocorreu entre as crianças e a investigadora na resolução do último problema trabalhado com o Tangram.

Investigadora	Se juntarem essas peças todas que vos dei, um quadrado, 2 triângulos pequeninos e outro triângulo maior, conseguem fazer outro quadrado.
Criança 35	Outro?
Criança 25	Já está [mostra a sua figura, mas ainda não um quadrado].
Criança 35	Hahr! [mostra irritação com o triângulo pequeno, por não conseguir encontrar a posição adequada]
Investigadora	[dirige-se à criança 25:] Conseguiste? Está quase, vê lá que precisas de acertar aí umas coisitas. [debruça-se para a criança 35 e indica-lhe como deve colocar o triangulo:] Vou-te dar uma pista.
Criança 26	Eu já fiz! Olha aqui [diz para a criança 35].
Criança 35	Já vi [olha para a criança 26 e termina o quadrado]. Eu já fiz, também já fiz. Eu ajudo-te [diz para a criança 25]. É assim, [ajuda-a a colocar uma peça] tem que ser assim. [a criança 36 observa os colegas]
Criança 26	Eu ajudo o … [menciona a criança 36]
Criança 36	Não. Já sei, eu já sei [diz enquanto termina a resolução].

Transcrição 8.2 - Diálogo do grupo de crianças na resolução do 4.º problema de Tangram – C.

Na última atividade proposta, sendo a 4.ª desse tipo, foi possível observar que as crianças que demoraram menos a resolvê-la foram as que tinham demorado mais no 1.º problema de polígonos com as peças do Tangram. O grau de dificuldade desta última é superior à 1.ª, já que não havia um quadrado de base para a nova construção. Contudo, as crianças que conseguiram descobrir o procedimento adequado no 1.º problema através de muita experimentação e manipulação das figuras, foram as mais eficientes neste último problema proposto. Tal facto sugere uma aprendizagem através da experimentação e manipulação do Tangram. Parece que quanto mais tempo de manipulação tiverem, mais hábeis ficam para a realização de novas construções. Em nenhuma destas atividades as crianças demonstraram dificuldade na identificação das figuras geométricas apresentadas, à exceção do paralelogramo.

Problemas com o Geoplano

Na 2.ª sessão foi trabalhado o 1.º problema de polígonos com recurso ao Geoplano. A tarefa proposta às crianças consistia na construção de um quadrado sem pinos no seu interior.

Logo que a atividade foi explicada às crianças, todas iniciam a tarefa, à exceção da criança 34, que fica a observar a criança 27. Esta é a 1.ª a conseguir colocar o elástico fazendo o que havia sido proposto, seguida da criança 28 que também conseguiu passado pouco tempo (ver Figura 69.1).

Crianças (da esquerda para a direita): **34, 28, 33, 27**

Figura 69.1: Resolução do 1.º problema com o Geoplano.

A criança 34 inicia então a atividade conseguindo realizar o que lhe foi solicitado. Perante a dificuldade da criança 33, a sua colega criança 28 dá-lhe uma indicação que a ajuda a concretizar a atividade (ver Figura 69.2). A Transcrição 9.1 resume o diálogo entre as crianças e a investigadora no decorrer da resolução do problema proposto.

Crianças (da esquerda para a direita): **34, 28, 33, 27**

Figura 69.2: Resolução do 1.º problema com o Geoplano.

Investigadora	Têm que fazer um quadrado, mas não pode ficar nenhum pino no meio.
Criança 27	Já está [a criança 34 observa esta colega].
Criança 28	Já está.
Investigadora	[dirige-se à criança 34] Então… [diz o seu nome]?
Criança 33	Ai!
Criança 28	[volta-se para a criança 33] Queres que te ajude? [entretanto a criança 34 faz o quadrado]. Tens que fazer um quadrado pequeno [mostra com os dedos no Geoplano].
Criança 33	Consegui!

Transcrição 9.1 - Diálogo do grupo de crianças na resolução do 1.º problema de Geoplano – C.

O último problema de polígonos trabalhado com o uso do Geoplano foi apresentado na 4.ª sessão de intervenção e consistia em reproduzir uma figura apresentada em papel, na placa do Geoplano.

Assim que as crianças tiveram o material disponível para a atividade, todas se dispuseram a fazê-la autonomamente, aceitando a sugestão da investigadora para iniciarem a construção da figura por baixo, e contando os pontos na imagem que lhes tinha sido distribuída (ver Figura 70.1).

Crianças (da esquerda para a direita): **28, 34, 33, 27**

Figura 70.1: Resolução do 4.º problema com o Geoplano.

A criança 27 foi a 1.ª a concluir a tarefa, depois de uma pequena correção da investigadora para que a sua figura ficasse completamente certa. A criança 33, devido ao grau de dificuldade da atividade, desmotivou, ficando a observar a resolução das colegas (ver Figura 70.2), necessitando de um estímulo acrescido e da ajuda da criança 27 para concretizar a atividade (ver Figura 70.3).

Crianças (da esquerda para a direita): **28, 34, 33, 27**

Figura 70.2: Resolução do 4.º problema com o Geoplano.

Crianças (da esquerda para a direita): **28, 34, 33, 27**

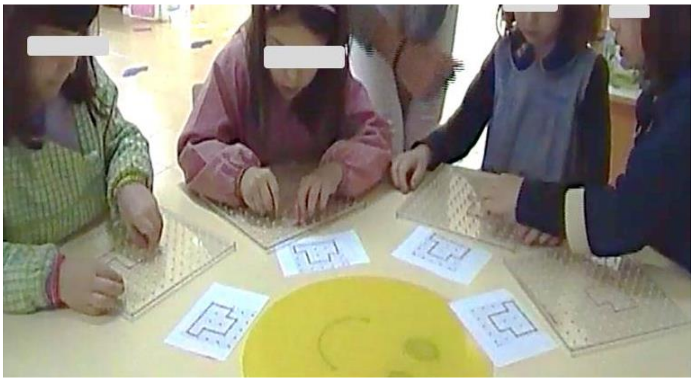


Figura 70.3: Resolução do 4.º problema com o Geoplano.

Enquanto isto, as outras duas crianças permaneceram concentradas no seu desempenho. A criança 28 terminou de imediato, sem qualquer ajuda, seguida das crianças 34 e 33, esta última já satisfeita com o produto do seu desempenho. A Transcrição 9.2 resume o diálogo que se estabeleceu entre as crianças e a investigadora enquanto resolviam o problema proposto.

Investigadora	Comecem por baixo, é mais fácil. [dirige-se à criança 27] Estás a ir bem, mas aqui [aponta no Geoplano] só precisas de subir 1.
Criança 27	Já fiz.
Investigadora	[dirige-se à criança 33 que ficou parada a observar as colegas] Vamos fazer? Olha, quantos tens aqui em baixo?
Criança 27	[atenta no diálogo entre a investigadora e a criança 33, responde:] 5.
Investigadora	Cinco. [dirige-se à criança 27] Ajudas a … [diz o nome da criança 33]? E agora quantos (pinos) é que sobe?
Criança 27	Quantos sobe?
Criança 33	Três [começa a fazer com a ajuda da criança 33].
Criança 27	Agora tens que tirar este e pôr ali [aponta no Geoplano].
Investigadora	[dirige-se à criança 28 que entretanto terminou] Já está, perfeito.
Criança 34	Já está!
Criança 33	[termina e mostra à criança 27] Olha aqui!

Transcrição 9.2 - Diálogo do grupo de crianças na resolução do 4.º problema de Geoplano – C.

Apesar do grau de dificuldade ser superior na última atividade proposta, todas as crianças, à exceção da criança 33 se mostraram motivadas para a sua concretização de forma autónoma. Ainda assim, esta mostrou-se muito satisfeita por ter conseguido, com as indicações e ajuda da colega, terminar a tarefa sozinha. Depois de perceberem o procedimento para chegarem à concretização da tarefa, conseguiram, sem grande ajuda da investigadora, terminar a tarefa em tempo adequado. É possível observar que, à semelhança do que ocorreu nos grupos das crianças que trabalharam problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa, também as crianças que trabalharam problemas de geometria manifestaram evolução no seu desempenho. As crianças foram-se tornando mais autónomas, apesar do grau de dificuldade dos problemas se complexificar à medida que iam sendo trabalhados, dentro de cada tipo. Considerando as mesmas categorias para as alterações que se foram produzindo e observando no comportamento das crianças ao longo das sessões, verifica-se melhorias no seu comportamento, desempenho e linguagem.

Ao longo das sessões e em cada tipo de problemas explorado, as crianças foram ficando mais independentes e autónomas. Apesar dos problemas de irem tornando mais complexos, elas procuravam ser as primeiras a resolvê-los. Enquanto que no 1.º problema é possível observar uma maior exploração dos materiais pelas crianças, não se importando com o tempo de resolução das tarefas, à medida que as sessões vão decorrendo e os problemas vão exigindo o mesmo material, elas vão adquirindo alguma competitividade e procuram ser as primeiras a resolvê-los. Esta exploração inicial permitiu-lhes um maior domínio e maior rapidez de execução. As crianças que necessitaram de mais ajuda nos primeiros problemas não aceitam facilmente a colaboração dos colegas quando estes terminam primeiro, entendendo essa ajuda como “não saberem resolver”. Observa-se também que as crianças menos interventivas no 1.º problema, assumem-se mais participativas nos últimos, e usam de linguagem correta, revelando maior firmeza e segurança na resolução.

Algumas crianças estavam, pela primeira vez, a contactar com alguns destes materiais, sobretudo o Geoplano. Se no início houve alguma dificuldade em perceberem o que era pretendido com um ou outro problema, nas últimas sessões já todas dominavam os conceitos implícitos em cada tarefa. As noções espaciais foram fazendo parte da linguagem das crianças, o que indica que elas foram realizando aprendizagem, da mesma forma que o nome das figuras geométricas. Se no início algumas crianças ficavam caladas não nomeando ou corrigindo os colegas quando estes referiam de forma errada as figuras geométricas, nos últimos problemas já eram as primeiras a responder e a designar corretamente as figuras envolvidas.

Se as tarefas propostas requeriam, da parte das crianças, muita manipulação dos materiais, foi na linguagem usada que foi possível observar a aprendizagem de noções e conceitos. Desde logo as figuras geométricas, que nos primeiros problemas se apresentavam com nomes desconhecidos, como o paralelogramo, ou o círculo tomado por “bola”, ao longo das sessões as crianças vão-se apropriando do nome das figuras, identificando claramente e nomeando o triângulo, o círculo, o quadrado. Mesmo noções de grande e pequeno passam a fazer parte da linguagem das crianças com mais frequência para distinguir os materiais em causa. Da mesma forma, quando resolvem problemas de polígonos com o Geoplano, conseguem interpretar a figura que lhes é dada para reproduzirem no tabuleiro e darem indicações aos colegas para a resolução, usando termos espaciais como "sobe", "direita", "para cima", "desce". Isto poderá ser um indicador da interiorização desses conceitos, que passaram a fazer parte da linguagem corrente das crianças e que reflete também o seu raciocínio.

5. Discussão de resultados

Este estudo decorreu ao longo de 4 meses. Os seus resultados apontam para um desempenho das crianças melhor no pós-teste do que no pré-teste. Parece claro que à medida que elas se vão desenvolvendo e amadurecendo, fruto também das interações sociais com indivíduos mais experientes (Wood, 2001), vão desenvolvendo o seu raciocínio e conhecimento, o que resulta em todo o conhecimento informal que a criança domina, antes de iniciar a escolaridade formal.

Foram observados valores de sucesso diferentes consoante o tipo de problema proposto. Problemas de estrutura aditiva conseguiram melhores resultados do que problemas de estrutura multiplicativa. O contexto das relações estabelecidas entre as quantidades que estão envolvidas nos problemas de estrutura multiplicativa torna estes problemas mais difíceis de resolver do que os problemas de adição e subtração. Enquanto que o raciocínio aditivo apresenta a diferença entre as quantidades, o raciocínio multiplicativo reflete uma relação fixa entre as quantidades (Vergnaud, 1983; Nunes & Bryant 1996; Nunes et al., 2009), o que conduz a níveis de dificuldade diferentes na interpretação e resolução dos problemas. Embora as crianças pequenas (4, 5 e 6 anos) consigam, com alguma facilidade, adicionar e subtrair recorrendo a objetos concretos, e mesmo partilhar e dividir quantidades pequenas com relativo sucesso (ver Frydman & Bryant, 1988), a dificuldade aumenta quando têm que compreender relações. Até que as crianças percebam as relações entre os números e as quantidades, elas não conseguem usar o seu conhecimento das quantidades para apoiar a sua compreensão dos números e vice-versa. De acordo com Nunes et al. (2009), elas precisam de compreender que quantidades e números não são a mesma coisa. Pode-se usar os números como medida das quantidades, mas não se pode pensar nas quantidades se não se tiver uma medida para elas (Nunes et al., 2009). A compreensão do número implica percebê-lo para além do seu lugar na sequência de contagem, os significados que ele pode assumir, entre eles, a magnitude de uma relação entre quantidades. A este respeito, Piaget e Inhelder (1958, 1975) assumem que as crianças primeiro pensam em quantificar relações aditivas e só mais tarde pensam em relações multiplicativas. Esta conceção presume a existência de uma fase aditiva na solução de problemas de raciocínio multiplicativo, antes de as crianças serem capazes de perceber a ligação das duas variáveis pela relação multiplicativa. Estudos recentes sugerem outra interpretação, e com os quais convergem os resultados desta investigação. Se as crianças de 5 e 6 anos conseguem resolver problemas simples de estrutura multiplicativa tal como resolvem problemas de estrutura aditiva, então parece não existir uma fase aditiva que precede o raciocínio multiplicativo. Ambos os tipos de raciocínio, na sua forma mais simples, parecem estar, em simultâneo, ao alcance das crianças, contrariamente ao que defendiam Piaget e Inhelder (1958, 1975).

Thompson (1994) e Vergnaud (1983) sugerem que o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo têm diferentes origens, devendo ser considerados independentes um do outro. Se nos problemas de raciocínio aditivo as situações são analisadas a partir do princípio de que o todo é igual à soma das partes, os problemas de raciocínio multiplicativo são definidos pelo facto de envolverem duas ou mais medidas ligadas por uma relação fixa entre si. Como tal, nos problemas de estrutura aditiva, querendo saber o valor do todo, somam-se as partes, querendo saber o valor de uma parte, subtrai-se a outra parte ao todo, querendo comparar duas quantidades, retira-se à parte maior a quantidade menor e verifica-se o que sobra. Já nos problemas de estrutura multiplicativa, em que qualquer situação envolve duas variáveis e a relação fixa entre elas, qualquer uma das quantidades envolvidas pode assumir-se como o elemento desconhecido, resultando em esquemas de pensamento diferentes para resolver os problemas (Vergnaud, 1983). O elemento desconhecido é, assim, um fator importante e determinante, para as crianças que ainda não receberam instrução formal sobre as operações, para encontrar a solução dos problemas de estrutura multiplicativa (Nunes et al., 2009). O elemento desconhecido neste tipo de problemas determinará se se trata de uma multiplicação ou de uma divisão, e de que tipo, logo irá determinar qual a operação de pensamento e o esquema de ação necessários para a sua resolução, ou a correspondência um-para-muitos, ou a distribuição.

Neste estudo, apesar dos resultados do pós-teste terem apresentado níveis significativamente superiores, em todos os tipos de problemas, continuam a verificar-se diferenças consoante o tipo de problema. Os problemas que parece terem sido mais fáceis de resolver, por todos os participantes, foram os de Composição de Duas Medidas, e os de mais difícil resolução os de Relação Estática Ligando Duas Medidas. Tal facto não é surpreendente, já que estudos prévios conduzidos por vários autores, e realizados com crianças mais velhas a frequentar a escolaridade básica (ver Carpenter et al., 1981; Hudson, 1983; Verschaffel & De Corte, 1997; Nunes et al., 2009) apontam os problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas como sendo os mais difíceis. É notório, contudo, o conjunto de estratégias que as crianças inventam nesta investigação para resolver os problemas deste tipo. Tal como recorrem a uma variedade de procedimentos para juntar e separar quantidades, também as estratégias de correspondência observadas dão conta de várias formas de estabelecer a correspondência entre dois conjuntos. Este facto é revelador da interpretação que as crianças fazem das relações que se estabelecem entre as quantidades envolvidas nos problemas.

Os resultados do estudo aqui apresentado sugerem que a dificuldade que as crianças encontram não estará relacionada com a sua capacidade de realizar a operação aritmética inerente ao problema, antes residirá na interpretação que elas fazem das relações que estão implícitas no enunciado, e consequentemente, no raciocínio que precisam de estabelecer para resolverem, com sucesso os problemas propostos. A esse respeito, Nunes e Bryant (1996) argumentam que, na resolução de problemas de estrutura aditiva e multiplicativa, a operação de pensamento que é necessário fazer pode aumentar, ou não, o grau de dificuldade do problema. Problemas relativamente fáceis de resolver podem assumir-se como muito difíceis se as relações estabelecidas forem pouco transparentes para as crianças.

Se, na resolução dos problemas, as crianças tiverem que recorrer ao seu conhecimento da relação inversa entre a adição e a subtração, em vez de recorrerem à abordagem direta da situação, o grau de complexidade do problema aumenta. Piaget e Szeminska (1971) afirmam que as crianças entre os 5 e os 8 anos consideram difícil a compreensão da relação inversa porque não são capazes de realizar processos reversíveis, não entendendo que a adição de um determinado valor é cancelada pela subtração desse mesmo valor. Outro fator que poderá contribuir para um entendimento menos claro do problema é a interpretação que as crianças fazem da estrutura do problema e dos números presentes. Nunes e Bryant (1996) argumentam que, se as crianças identificam superficialmente a estrutura do problema e não distinguem claramente um problema de relações, como é o caso dos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, interpretam-no como um problema de quantidades. Isto vai provocar a sua incapacidade de relacionar o conhecimento que têm de "mais" e "menos" com uma estratégia para quantificar comparações, originando o erro. Também no estudo deste capítulo verificou-se que a dificuldade na resolução dos problemas de estrutura aditiva residiu no modo como as crianças interpretaram as relações envolvidas nos problemas (Nunes et al., 2009), o que conduziu a resultados melhores nos problemas de Composição de Duas Medidas, e a resultados com taxas inferiores de sucesso nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas.

À semelhança do que já foi observado nos problemas de estrutura aditiva em estudos prévios (ver Vergnaud, 1982; Magina et al., 2001; Nunes et al., 2009), também nos problemas de estrutura multiplicativa a dificuldade na resolução dos problemas deriva da interpretação que as crianças fazem das ações e relações descritas nos problemas e das operações de pensamento necessárias à sua interpretação e resolução. A diferença de procedimentos na modelação dos diferentes tipos de problemas sugere a presença de diferentes operações de pensamento, de acordo com os tipos de problemas, logo dando origem a diferentes graus de facilidade na resolução dos mesmos.

Considerados como de mais fácil resolução por vários autores (ver Wood, 2001; Magina & Campos, 2004; Nunes et al., 2009), os problemas de Multiplicação, do tipo Isomorfismo de Medidas, foram também aqui os que obtiveram maiores taxas de sucesso, tanto no pré- como no pós-teste. Já os problemas de Divisão Partitiva e Divisão por Quotas apresentaram resultados diferentes no pré-teste e no pós-teste. A característica partitiva da divisão, considerada por alguns autores como o modelo prototípico da divisão, traduz uma maior facilidade de resolução por parte das crianças (Fischbein et al., 1985; Correa, 2004; Nunes et al., 2009). As estratégias usadas nos problemas de Divisão Partitiva são dominadas mais cedo do que as estratégias usadas para resolver problemas de Divisão por Quotas, em que, para partilhar o total, as crianças terão que saber quantas distribuições é possível fazer. No entanto, relativamente a estes dois tipos de divisão, outros estudos há (ver Burton, 1992; Selva, 1998) que mostram não haver diferença significativa no sucesso das crianças na resolução de problemas de Divisão Partitiva e Divisão por Quotas. A este respeito, os resultados deste estudo parecem sustentar ambas as ideias. Se no pré-teste os problemas de Divisão Partitiva foram os que obtiveram menores taxas de sucesso, aparentemente contrariando a facilidade caracterizada pelo modelo prototípico da divisão, no pós-teste as percentagens mais baixas de resolução acertada situaram-se nos problemas de Divisão por Quotas. Os resultados dos problemas de Divisão Partitiva apresentam uma melhoria significativa no pós-teste, provavelmente devido aos efeitos da intervenção ocorrida.

Parece não ser difícil para as crianças de 5 e 6 anos resolverem, com sucesso, alguns problemas de adição, subtração, multiplicação e divisão, antes de estas operações serem formalmente ensinadas. Para tal, as crianças interpretam as ações descritas nos problemas e recorrem aos esquemas de ação (Piaget, 1971) para os resolver: ao esquema de juntar, retirar e colocar em correspondência nos problemas de estrutura aditiva, e aos esquemas de colocar em correspondência de um-para-muitos e distribuir equitativamente nos problemas de estrutura multiplicativa. Segundo Piaget e Szeminska (1971), no caso do raciocínio aditivo, as crianças desenvolvem os esquemas de ação de juntar e retirar como sendo independentes, sem compreenderem a relação que existe entre os dois esquemas. Elas só conseguem passar para os conceitos operatórios quando percebem a relação inversa que se estabelece entre a adição e subtração, o que, para estes autores, não é possível antes dos 7 anos, tal como não conseguem realizar mentalmente a relação que assegura a totalidade das partes, nem compreender a síntese aditiva das partes num todo, processo que só é possível devido às construções reversíveis operadas pelas crianças. A irreversibilidade do pensamento que as crianças apresentam antes dos 7 anos não lhes permite adquirir a capacidade da decomposição necessária à análise e síntese das relações. A tese de Piaget é rebatida por vários autores, entre eles Nunes e Bryant (1996), que argumentam que as crianças antes dos 7 anos já conseguem perceber a reversibilidade das operações, entendendo a adição e subtração como operações inversas uma da outra, o que permite às crianças, mesmo com 5 anos, resolver problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com elementos ausentes, como o início e o elemento de transformação. Neste estudo, crianças com 5 e 6 anos revelam conseguir resolver, com relativa facilidade, este tipo de problemas, resolvendo com sucesso mais de 70% dos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas. Nestes, constavam problemas com o início e a transformação desconhecida, onde havia necessidade de apelar à relação inversa entre a adição e a subtração para encontrar a solução.

Se para Piaget (1977) as crianças não conseguiam a irreversibilidade do pensamento antes dos 7 anos, entender a multiplicação e a divisão significa uma transformação qualitativa no seu pensamento. Em trabalhos que desenvolveu sobre proporcionalidade, Piaget refere que este conceito apenas é dominado aos 10-11 anos (Inhelder & Piaget, 1958), no entanto, afirma que as crianças de 5-6 anos já conseguem produzir raciocínios elementares da correspondência de um-para-muitos (Piaget & Szeminska, 1971). Nunes e Bryant (1996) declaram a correspondência de um-para-muitos como a base para o conceito de proporção, em que os conjuntos variam de quantidade na mesma proporção e mantendo entre si essa relação. Este raciocínio é diferente do raciocínio aditivo uma vez que não se trata de unir, mas de replicar, mantendo invariável a correspondência de um-para-muitos.

Ora, como já se observou nos resultados desta investigação, e apesar de os problemas de estrutura multiplicativa apresentarem resultados inferiores aos problemas de estrutura aditiva, é possível as crianças destas idades resolverem com sucesso problemas de Isomorfismo de Medidas, de Multiplicação e Divisão, em determinadas situações. É também possível que o seu desempenho melhore nos diferentes tipos de problemas depois de estabelecerem interações com outros mais capazes, o que permite um estímulo do raciocínio multiplicativo.

Segundo Vygotsky (2007), se as crianças se encontrarem num nível cognitivo capaz de ser potenciado, o que o autor designa por “zona de desenvolvimento proximal”, elas conseguem adquirir outras capacidades e habilidades. Através das interações que a criança estabelece com outros elementos da sua cultura mais experientes, vai desenvolvendo as suas funções psicológicas superiores, como a sua capacidade de atenção, memória e pensamento reflexivo. Estas funções, de origem sociocultural, emergem através das interações que a criança estabelece com os indivíduos mais experientes e que já adquiriram, por experiência, essas habilidades e capacidades. No entanto, e de acordo também com o mesmo autor, tal só é possível se o desenvolvimento das crianças se encontrar na zona de desenvolvimento proximal, o que Vygotsky considera a distância entre o nível de desenvolvimento real da criança e o nível de desenvolvimento potencial, motivado pela solução de problemas com a ajuda de um adulto ou de colegas mais capazes.

Assim, parece ser possível potenciar o conhecimento informal que as crianças parecem demonstrar na resolução dos problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa, através de uma intervenção centrada nas diferentes estruturas de raciocínio. Este estudo verificou que, após uma intervenção, todas as crianças melhoraram os seus desempenhos, independentemente do foco da sua intervenção. Tal facto é revelador de que as crianças conseguem ser estimuladas e apresentar melhores resultados quando interagem com alguém mais experiente e com mais capacidades, desenvolvendo o seu raciocínio e apurando a sua capacidade para resolver problemas. Mesmo as crianças que estiveram sujeitas a tarefas de controlo revelaram melhores resultados nos problemas de estrutura aditiva e multiplicativa no pós-teste, quando comparados com os resultados do pré-teste.

Em todos os grupos de intervenção foram significativas as diferenças de desempenho ocorridas nos problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa, antes e depois da intervenção. Contrariamente, estas diferenças já não foram significativas nos problemas de controlo, apesar de resultados superiores após a intervenção. As crianças que participaram no grupo de intervenção EA tiveram melhores resultados no pós-teste nos problemas de estrutura aditiva, mas também nos problemas de estrutura multiplicativa. Tal facto foi igualmente observado para as crianças dos grupos de intervenção EM e mesmo crianças do grupo C, grupo de controlo. Estas crianças melhoraram significativamente nos seus desempenhos em todos os problemas, e não apenas nos problemas da estrutura sobre a qual incidiu a sua intervenção.

De uma forma geral, as crianças conseguem ter sucesso na resolução de problemas de estrutura multiplicativa, e com resultados superiores no pós-teste, mesmo não tendo participado no grupo de intervenção sobre EM, o que leva a supor não existir uma fase aditiva que precede a fase multiplicativa, contrariamente ao que era defendido por Piaget e Inhelder (1958, 1975). Parece sim, que as relações que se estabelecem entre as quantidades envolvidas nos problemas de estrutura multiplicativa assumem-se mais complexas, logo levam estes problemas a serem considerados mais difíceis.

Tal como sugerem Nunes e colaboradores (2009), parece que a dificuldade que as crianças têm em dominarem explicitamente as relações entre quantidades, em pensarem e tratarem relações, é a causa da dificuldade na resolução de problemas de estrutura multiplicativa. Para estes autores, é difícil para as crianças adquirirem conhecimento sobre relações entre quantidades e operar sobre relações. Mesmo depois de aprenderem a representar relações, elas continuam a interpretar os resultados das relações como se de quantidades se tratasse, tanto nas relações multiplicativas como nas aditivas.

Os resultados deste estudo sugerem, todavia, que é possível minimizar algumas dificuldades na resolução dos problemas, não só de estrutura multiplicativa, como nos de estrutura aditiva. Os resultados significativamente superiores no pós-teste apontam para a possibilidade de promover e desenvolver o raciocínio através da interação entre pares e com outros mais capazes. Atendendo de uma forma particular para os problemas de estrutura aditiva, observa-se que as crianças melhoraram o seu desempenho em todos os tipos de problemas, com relevância para os problemas de Composição de Duas Medidas e Transformação Ligando Duas Medidas, que registou uma melhoria estatisticamente significativa no pós-teste. No entanto, os problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas, que não constaram dos problemas explorados na intervenção do grupo GEA, obtiveram melhores resultados também no pós-teste, ainda que esta diferença não fosse significativamente superior. O que poderá indicar que na interação que as crianças estabelecem ocorrem transformações no seu raciocínio que lhes permite despertar uma série de funções que se encontram num estado de maturação na zona imediatamente próxima do desenvolvimento (Vygotsky, 2007).

Ao longo da intervenção, as crianças foram-se tornando mais autónomas, procurando resolver os problemas recorrendo o menos possível à imitação dos colegas ou a material adicional àquele que estava à sua disposição. Também foram afastando a interpretação pessoal dos problemas propostos, focalizando-se nas quantidades envolvidas e não em realidades pessoais. A contagem das quantidades foi-se tornando cada vez mais eficiente e a colocação dos materiais deixou de ser tão estruturada, passando a apresentar uma forma mais eficaz e conducente a contagens mais rápidas, inclusivamente de visualização. Os seus desempenhos tornaram-se mais rápidos e com maior recurso a estratégias com factos numéricos, sobretudo no grupo de intervenção sobre problemas de estrutura aditiva. O vocabulário das crianças começou a integrar expressões como “em cada”, “ao todo”, até aí usadas apenas por algumas, com sentido e compreensão do seu significado. Foi notório, ao longo da intervenção, alterações significativas de comportamento, quer em termos de melhoria de desempenho, quer em termos de linguagem e argumentação, e indicadoras do efeito produzido pela intervenção.

6. Considerações finais

Compreender como raciocinam as crianças do pré-escolar quando lhes são apresentados alternadamente problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa, como pode ser promovido o seu desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo e perceber se pode haver transferência de conhecimento na resolução de problemas de estruturas distintas eram os objetivos deste estudo. Para tal, procurou-se responder a algumas questões, como: (a) perceber como é que as crianças do pré-escolar entendem os problemas de estrutura aditiva e multiplicativa quando estes lhes são apresentados conjuntamente, sujeitos portanto a um efeito de contaminação; (b) perceber se existe transferência de conhecimento na resolução de problemas de estrutura aditiva e multiplicativa; (c) conhecer os efeitos de uma intervenção centrada no desenvolvimento dos raciocínios aditivo e multiplicativo em crianças do pré-escolar.

Desta forma, foram analisados os desempenhos das crianças na resolução de problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa, apresentados conjuntamente na mesma entrevista. Foram analisados os seus resultados, as estratégias usadas pelas crianças que conduziram a respostas corretas e os argumentos apresentados por elas para validar a sua resposta. Verificou-se que as crianças resolvem com alguma facilidade problemas de estrutura aditiva e multiplicativa, recorrendo a estratégias adequadas e de tal forma variadas, que integram desde estratégias em que manipulam os objetos, a estratégias mais abstratas em que apelam a factos numéricos já conhecidos e memorizados, sem contagem nem manipulação. Foi ainda constatado que as crianças de 5 e 6 anos percebem os problemas apresentados, procuram a melhor estratégia para a sua resolução e argumentam o melhor possível a opção tomada, eliminado a ideia de que as resoluções apresentadas para os problemas propostos foram casuais.

A apresentação conjunta de problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa num mesmo teste tinha como propósito perceber o efeito de uma estrutura de raciocínio sobre a outra, estando os participantes sujeitos ao efeito de contaminação de raciocínio. As respostas das crianças a esta proposta sugerem a compreensão das diferentes estruturas de raciocínio como campos conceptuais distintos. O conhecimento que têm de problemas de uma determinada estrutura parece não influenciar a resolução de problemas da outra estrutura de raciocínio, não havendo efeito de uma sobre a outra. A apresentação conjunta de problemas de ambas as estruturas de raciocínio não constituiu um fator de conflito, e as estratégias que as crianças usaram foram disso exemplo. Elas recorreram a estratégias específicas e distintas para resolver cada tipo de problemas e conseguiram argumentar de forma válida as opções tomadas.

Perante os resultados do pré-teste, foram selecionados alguns tipos de problemas para integrarem as tarefas a serem apresentadas na intervenção aos diferentes grupos. Foram constituídos grupos de intervenção que trabalharam apenas uma estrutura de raciocínio, grupo de estrutura aditiva, grupo de estrutura multiplicativa, e grupo de controlo, e foi analisado o raciocínio das crianças durante a intervenção recorrendo à metodologia qualitativa, através do modelo interpretativo microgenético. As crianças foram demonstrando evolução, não só no seu desempenho, mas também no seu raciocínio e na verbalização das suas ações. Tornaram-se mais rápidas e eficientes na resolução dos problemas propostos e revelaram aquisições de conceitos específicos de cada estrutura de raciocínio.

O efeito da intervenção foi notado nos resultados do segundo teste (pós-teste), idêntico ao primeiro (pré-teste) quer no tipo de problemas quer nas quantidades envolvidas, garantindo as mesmas condições do pré-teste. O pós-teste foi apresentado com o propósito de comparar os resultados das crianças após terem participado da intervenção onde trabalharam uma determinada condição. Os desempenhos do pós-teste foram igualmente avaliados em termos de resultados, estratégias e argumentos dos resultados corretos. As crianças conseguiram melhorar significativamente o seu desempenho, quer nos problemas de estrutura aditiva, quer nos de estrutura multiplicativa, e com valores médios muito próximos entre os problemas de estruturas de raciocínio diferentes. Observou-se, ainda, evolução não só em termos de estratégias usadas, mas em termos de argumentação. O aumento de argumentos "Válidos" no pós-teste sugere que houve uma maior consciencialização do processo de resolução, decorrente do contexto da intervenção que possibilitou novas aprendizagens, descartando assim a possibilidade das crianças terem registado níveis de sucesso de forma aleatória na resolução dos problemas.

A interação social torna possível o desenvolvimento cognitivo das crianças, desde que possuam determinadas capacidades cognitivas que permitam o conflito sociocognitivo (Perret-Clermont, 1978), o mesmo será dizer, desde que sejam conhecidas as funções que se encontram em maturação e que definem a zona imediatamente próxima do desenvolvimento (Vygotsky, 2007). O confronto das novas situações impele as crianças a usarem o conhecimento adquirido em situações semelhantes e a adaptá-lo às novas situações, adquirindo novos conceitos (Vergnaud, 1988). Este estudo sugere que o raciocínio das crianças pode ser potenciado no sentido de lhes proporcionar experiências de resolução de problemas, através das interações com indivíduos mais experientes e capazes e que já adquiriram essas habilidades e competências. Considerando que a criança aprende quando tem a possibilidade de imitar, e só consegue imitar o que se encontra incluído na zona das suas próprias potencialidades intelectuais, a zona de desenvolvimento próximo é o que determina o domínio das transições acessíveis à criança, e que lhe permite passar do que pode fazer ao que não pode (Vygotsky, 2007). Ora, dos resultados deste estudo, emerge como possível a promoção do desenvolvimento do raciocínio aditivo e também do raciocínio multiplicativo, simultaneamente.

Piaget e Inhelder (1995) não creem ser possível a compreensão da composição multiplicativa antes da composição aditiva. Defensor do desenvolvimento por estágios, Piaget não considera ser possível antecipar a aquisição de determinados conhecimentos sem antes estarem consolidados outros que lhes servirão de base. Para este autor, a criança tem que dominar completamente a composição aditiva para que passe à composição multiplicativa. Enquanto ela não consegue a reversibilidade de pensamento, não domina a composição aditiva, e por conseguinte, não é capaz de compreender a composição multiplicativa enquanto distribuição equivalente de elementos que se correspondem biunivocamente entre si (Piaget & Szeminska, 1971).

No entanto, os resultados deste estudo parecem apontar no sentido contrário ao que é defendido por Piaget (1977), uma estrutura de raciocínio não tem efeito sobre a outra. Não foi claramente identificada a transferência de conhecimentos na resolução de problemas de estruturas de raciocínio diferentes, o que poderá significar, como defende Vergnaud (1983), que os problemas de multiplicação e divisão por um lado, e os problemas de adição e subtração por outro, implicam distintos esquemas de ação na sua compreensão e resolução. Apesar da ligação processual entre a adição e a multiplicação, estas duas formas de raciocínio são distintas o suficiente para serem considerados domínios conceptuais separados.

Quando os participantes deste estudo recorrem a estratégias para resolver problemas de estrutura aditiva diferentes daquelas que usam quando resolvem os problemas de estrutura multiplicativa, mostram usar esquemas de ação específicos de cada estrutura de raciocínio. Nos problemas de estrutura aditiva os esquemas de ação das crianças refletiram a ação de juntar, retirar e colocar em correspondência, ilustrando o invariante conceptual do raciocínio aditivo: a relação parte-todo. Nos problemas de estrutura multiplicativa os seus esquemas de ação retrataram as ações de distribuir e colocar em correspondência de um-para-muitos, expressando a existência de uma relação fixa entre duas variáveis, o invariante conceptual do raciocínio multiplicativo.

O conhecimento que as crianças detinham sobre problemas de estrutura aditiva parece não ter favorecido a resolução dos problemas de estrutura multiplicativa, e vice-versa. As crianças entenderam a estrutura dos problemas, em cada tipo de problemas, como problemas de estruturas de raciocínio distintas, recorrendo a estratégias específicas de cada uma. Para Piaget, as crianças só conseguiriam perceber a estrutura dos problemas de raciocínio multiplicativo depois de dominarem a composição aditiva implícita nos problemas de estrutura aditiva. Porém, este estudo sugere que as crianças resolvem paralelamente problemas de ambas as estruturas de raciocínio, ainda que com níveis de sucesso diferentes, o que significa que tanto o raciocínio aditivo como o raciocínio multiplicativo, nas suas formas mais simples, parecem estar simultaneamente ao alcance das crianças do pré-escolar.

CAPÍTULO V – CONCLUSÕES

Introdução

Este capítulo apresenta as conclusões ao trabalho de investigação que foi desenvolvido com o propósito de compreender como é que as crianças do pré-escolar raciocinam perante problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa. Para tal foram desenvolvidos dois estudos: um primeiro, o Estudo 1, com a finalidade de perceber os desempenhos, estratégias e argumentos das crianças quando resolvem problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa; e um segundo, o Estudo 2, que teve como finalidade a promoção do raciocínio aditivo e do raciocínio multiplicativo.

O presente capítulo organiza-se da seguinte forma: primeiramente são apresentadas as conclusões dos estudos realizados e as implicações educacionais que daí poderão advir. São ainda reconhecidas as limitações deste trabalho de pesquisa e são tecidas algumas sugestões para futuras investigações que abordem esta temática.

1. Conclusões da investigação

Piaget foi uma forte influência na teorização sobre a forma como as crianças constroem o seu conhecimento matemático, tendo daí advindo uma sucessão de conteúdos matemáticos que não poderiam ser "ensinados" sem antes estarem consolidados outros sobre os quais o novo conhecimento iria assentar. Tal foi o caso da multiplicação e divisão, desde sempre ensinadas na escola do 1.º ciclo após estarem bem consolidadas as operações aritméticas da adição e da subtração.

Contudo, investigações recentes têm vindo a sugerir que o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo são de tal forma distintos nos seus esquemas e relações mentais, independentes portanto, que devem ser considerados domínios conceptuais separados (Vergnaud, 1982, 1986, 1988; Nunes et al., 2009). Os estudos levados a efeito por diferentes autores (ver Frydman &

Bryant, 1988; Carpenter et al., 1993; Correa, 1995; Correa et al., 1998; Kornilaki & Nunes, 2005), indicam ainda que o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo são iniciados de maneira informal pelas crianças, antes de elas receberem formalmente instrução na escolaridade básica sobre as quatro operações aritméticas.

A diversidade de estratégias retratadas pelos investigadores reflete os múltiplos procedimentos das crianças na busca da resposta correta aos problemas que lhes são propostos. As crianças conseguem usar estratégias diversificadas e distintas, para os problemas estrutura aditiva, e para os problemas de estrutura multiplicativa, sofrendo influência da estrutura semântica dos problemas.

Não obstante as situações aditivas estarem presentes mais frequentemente, no dia-a-dia das crianças em idade pré-escolar, as situações multiplicativas não lhes são desconhecidas, e assumem até um certo grau de familiaridade que lhes possibilita entenderem problemas simples de multiplicação e divisão, conforme se reconhece nos resultados de investigações internacionais (ver Frydman & Bryant, 1988; Kouba, 1989; Carpenter et al., 1993; Kornilaki & Nunes, 2005). Todavia, a investigação internacional realizada e retratada no Capítulo II, Revisão da Literatura, levanta algumas questões sobre o raciocínio de crianças de 4, 5 e 6 anos quando resolvem problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa, e que se pretendem ver respondidas com a presente investigação.

Desta forma, surge a necessidade de perceber que compreensão têm as crianças do pré-escolar sobre problemas de estrutura aditiva e multiplicativa; como raciocinam quando lhes são apresentados conjuntamente, de forma alternada, problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa; e como pode ser promovido o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo nestas crianças. Foram, assim, desenhados dois estudos para responder aos objetivos desta investigação. Em cada estudo foram levantadas questões de investigação para as quais se procura, em seguida, apresentar as respostas.

1.1. Como raciocinam as crianças do pré-escolar perante problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa?

O Estudo 1 procurou compreender como é que as crianças de 4, 5 e 6 anos resolvem problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa; em virtude de ser um estudo inter-participantes, as crianças foram distribuídas por dois grupos, cada um sujeito apenas a uma condição, não estando sujeitas ao efeito de contaminação.

1.1.1. Problemas de Estrutura Aditiva

Relativamente ao desempenho das crianças quando resolvem problemas de estrutura aditiva, à semelhança de investigações realizadas nos outros países com crianças dos 5 aos 7 anos, era esperado que o sucesso das crianças na resolução dos problemas variasse consoante o tipo de problemas apresentados e a idade, sendo que crianças mais velhas têm melhores resultados do que crianças mais novas. Ainda que dentro de cada tipo de problemas se registem sucessos diferentes provenientes da interpretação que as crianças fazem das ações e relações descritas nas situações, de uma forma geral pode-se anuir que os problemas mencionados na literatura como mais difíceis, foram também aqui reconhecidos como tal.

Nos problemas de estrutura aditiva, os problemas considerados como mais fáceis foram os problemas de Transformação Ligando Duas Medidas para as crianças de 4 e 5 anos e os problemas de Composição de Duas Medidas para as crianças de 6 anos. As elevadas percentagens médias de acerto das crianças de 6 anos, quer nos problemas de Composição de Duas Medidas (74%), quer nos problemas de Transformação Ligando Duas Medidas (72%) leva a supor que, mesmo os problemas considerados na literatura como mais difíceis de resolver (problemas de Composição de Duas Medidas com a parte desconhecida e problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com o início desconhecido) foram resolvidos com relativa facilidade pelas crianças desta idade. A dificuldade na resolução destes tipos de problemas é apontada por Piaget e Szeminska (1971) como sendo devida à incapacidade que as crianças possuem, antes dos 7-8 anos, de uma reversibilidade de pensamento que lhes permita perceber uma operação como inversa da outra. Ora, para resolver problemas de Composição de Duas Medidas com a parte desconhecida e problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com o início desconhecido, as crianças teriam que, ao interpretar a situação descrita no problema, procurar a operação inversa da que é mencionada no enunciado, realizando uma operação de pensamento baseada na propriedade inversa da adição e da subtração, o que aumenta consideravelmente o grau de dificuldade dos problemas (Nunes & Bryant, 1996). Vergnaud (1986) chega mesmo a considerar que os problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com o início desconhecido são resolvidos um a dois anos após os problemas do mesmo tipo e onde o elemento desconhecido é o resultado ou o elemento de transformação.

Os problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas foram considerados mais difíceis pelas crianças de todas as idades. Esta situação não surpreende, uma vez que são vários os motivos estudados e apontados na literatura que justificam o erro das crianças na resolução deste tipo de problemas. Para além da dificuldade que elas encontram quando têm que quantificar relações em vez de quantificarem conjuntos (Nunes et al., 2009), há aspetos linguísticos que induzem ao erro. Desde logo a interpretação que as crianças fazem da situação descrita. Neste tipo de problemas, nada é retirado ou acrescentado de qualquer um dos conjuntos, e a questão relacional que é colocada às crianças é interpretada como uma questão de quantidades. Elas têm dificuldade em relacionar o seu conhecimento dos termos “mais” e “menos” com estratégias para quantificar relações. Porém, e apesar dos níveis de sucesso neste tipo de problemas se mostrarem baixos, os valores obtidos no presente estudo com crianças de 6 anos (37%) consegue situar-se acima dos valores resultantes dos estudos de Hudson (1983) e de Magina e Campos (2004), cujos resultados corretos nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas foram de 25% e 15% respetivamente, com crianças da mesma idade.

Em relação às estratégias usadas pelas crianças, pode dizer-se que as crianças resolvem problemas de estrutura aditiva recorrendo a uma grande variedade de estratégias, tendo sido identificados os mesmos níveis de estratégias definidos por Carpenter et al. (1999), estratégias de modelação direta, estratégias de contagem e estratégias com factos numéricos. Observou-se que, à medida que as crianças avançam na idade, progridem também no tipo de estratégia usada, diminuindo o seu recurso a estratégias de manipulação direta e aumentando o recurso a estratégias mais abstratas.

Apesar da maioria das estratégias usadas pelas crianças neste estudo terem sido estratégias onde manipularam objetos que tinham à sua disposição, é interessante observar que crianças tão novas quanto as de 4 anos tenham resolvido problemas recorrendo a estratégias de contagem (10% de problemas resolvidos com este tipo de estratégia) e mesmo a estratégias com factos numéricos (1,3%). Para Carpenter et al. (1999), as crianças vão evoluindo no uso de estratégias, estratégias de modelação direta vão dando lugar a estratégias mais abstratas como as de contagem e estas, por sua vez, dão lugar a outras ainda mais abstratas, estratégias com factos numéricos. Ora, não podendo ser generalizado, importa no entanto considerar que é possível crianças de 4 anos usarem estratégias mais abstratas do que a simples modelação direta.

Tal como há uma grande variedade de procedimentos que as crianças adotam para resolver problemas de Composição de Duas Medidas e Transformação Ligando Duas Medidas, também inventam muitas formas de atuar que melhor, e de uma forma mais eficiente, as conduz ao resultado correto nos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas. A maior parte destes problemas foram resolvidos com diferentes estratégias de correspondência, identificadas nos procedimentos das crianças e ainda não descritos nos estudos observados de outros autores. O que sugere que, tal como não há uma só estratégia de juntar e de separar quantidades, também há mais do que uma maneira de estabelecer a correspondência entre dois conjuntos de elementos.

Piaget (1967) defende que as crianças, antes dos 7-8 anos de idade, não conseguem refletir sobre a sua ação, logo não conseguem argumentar as opções tomadas, quer de procedimentos, quer do resultado do problema. Para este autor, as crianças antes destas idades, como não sentem a necessidade da justificação lógica, não desenvolveram a introspeção do seu raciocínio, por isso não sabem explicar como procederam para encontrar uma resposta aos problemas. Ainda que se aceite a definição de Piaget sobre a introspeção como uma tomada de consciência em segundo grau, porque pressupõe não só a tomada de consciência das relações elaboradas pelo pensamento, mas também o próprio trabalho desse pensamento, o presente estudo demonstrou que as crianças antes dos 10 anos, e mesmo antes dos 7-8 anos, conseguem refletir sobre a elaboração do seu pensamento.

Relativamente aos argumentos que as crianças apresentam para justificar as respostas corretas aos problemas propostos, em todos os problemas as crianças teriam que responder por que motivo tinham dado determinada resposta. Posteriormente, cada um destes argumentos foi categorizado como argumentos “Válidos”, “Parcialmente Válidos”, “Inválidos” e “Sem Argumentos”.

Os argumentos “Válidos” foram registados com elevadas percentagens, mesmo em crianças de 4 anos, onde se observaram níveis de cerca de 40%. Como já era esperado, as crianças de 4 anos têm menor poder de argumentação, devido à imaturidade linguística própria da sua idade, bem como alguma inibição. No entanto, os valores observados são surpreendentes. Já no que se observa nos argumentos das crianças de 6 anos, registam-se valores de argumentos “Válidos” acima dos 72% nos problemas de estrutura aditiva. As percentagens de argumentos “Parcialmente Válidos” e “Sem Argumentos” observadas nos problemas de estrutura aditiva depois de uma resposta correta, sugerem que as crianças, cientes da sua resposta ser adequada ao problema apresentado, e em alguns casos conseguindo justificar parte do problema, preferem ficar caladas do que responder algo que seja desconexo com o seu pensamento e a sua ação. Tal facto poderá indiciar um início de introspeção do raciocínio. O que parece contrariar a posição defendida por Piaget (1967), os resultados deste estudo apontam para a capacidade que muitas crianças de 6 anos e algumas de 5 e 4 anos têm para refletir sobre a sua ação, fazendo uma introspeção do seu raciocínio.

1.1.2. Problemas de Estrutura Multiplicativa

Este estudo debruçou-se de igual forma sobre a resolução de problemas de estrutura multiplicativa. Analisou também problemas que ainda não haviam sido estudados com crianças de 4, 5 e 6 anos, como os problemas de Quarto Proporcional e os problemas de Produto de Medidas. Da literatura em contextos internacionais e com crianças mais velhas, salienta-se a dificuldade na resolução de problemas de Produto de Medidas e mesmo problemas que envolvem relações proporcionais (ver Hart, 1981; Bryant et al., 1992; Fuson, 2004). Vergnaud (1983) considera que os problemas de Produto de Medidas são difíceis mesmo para crianças de 7 e 8 anos. No estudo desenvolvido por Bryant et al. (1992) nenhuma criança de 8 anos respondeu corretamente a problemas de Produto de Medidas sem o apoio de materiais, e mesmo com materiais o seu desempenho neste tipo de problemas não variou. A dificuldade das crianças na resolução de problemas de Produto de Medidas é justificada pela interpretação que as crianças fazem da situação, já que no problema não é explicitamente mencionado que cada elemento de um conjunto deve ser cruzado com cada elemento do outro conjunto para que, dessa forma, se chegue ao resultado correto. Esta falta de informação tácita conduz a um aumento do grau de dificuldade.

Assim, respondendo à questão sobre o desempenho das crianças em problemas de estrutura multiplicativa, e ainda que os problemas de Isomorfismo de Medidas tenham obtido, no presente estudo, melhores resultados do que os problemas de Produto de Medidas, sustenta-se a possibilidade de estes últimos serem também resolvidos por crianças de 4 e 6 anos, ainda que tenham apresentado percentagens muito mínimas de sucesso.

Nos problemas de Isomorfismo de Medidas, as taxas de desempenho das crianças de 6 anos está perto dos 100% de sucesso, e mesmo as crianças de 4 e 5 anos apresentam valores acima dos 40% e dos 57% respetivamente, o que é revelador da capacidade que as crianças destas idades têm para resolver corretamente problemas de multiplicação e divisão antes do ensino formal. A exceção a estes valores, e também já previsto por estudos levados a efeito com crianças mais velhas (ver Nunes & Bryant, 1996) são os desempenhos das crianças de 4, 5 e 6 anos a problemas de Quarto Proporcional. Estudos realizados com crianças mais velhas, com idades a partir dos 10 anos (ver Hart, 1981; Vergnaud, 1983, 1988; Nesher, 1988) revelaram a dificuldade que elas têm em perceber situações de proporção, justificado pelo facto do raciocínio proporcional ser entendido como envolvendo o sentido de co-variação. Isto reflete uma maior complexidade e dificuldade de resolução para crianças mais novas que não conseguem ainda perceber o princípio subjacente aos problemas proporcionais (Hart, 1981; Vergnaud, 1988; Fuson, 2004). Ainda assim, e porque não foram realizados estudos suficientes sobre problemas deste tipo com crianças do pré-escolar, salienta-se o sucesso que as crianças de 5 e 6 anos tiveram na resolução de problemas de Quarto Proporcional, registando-se 20% e 33% de respostas certas, respetivamente.

Os problemas de Quarto Proporcional e os problemas de Produto de Medidas foram considerados de maior complexidade, o que converge com estudos realizados com crianças de idades superiores a 10 anos. As crianças do pré-escolar ainda não recorrem aos algoritmos ou formas escritas para resolver os problemas apresentados, no entanto, tal facto não é impeditivo de uma resolução correta.

Sobre as estratégias de resolução das crianças quando resolvem problemas de estrutura multiplicativa, Nunes e Bryant (1996) referem que as dificuldades que as crianças têm em determinar as relações proporcionais que são estabelecidas nas situações são ultrapassadas por estratégias de replicação. Tal facto veio a verificar-se também neste estudo, em que as crianças, para resolverem problemas de Quarto Proporcional, recorreram à replicação como uma das estratégias para encontrar a solução adequada.

As crianças inventam estratégias no sentido de resolverem mais facilmente os problemas propostos. Para resolver problemas de Produto de Medidas, inventaram a estratégia "Agrupamento até Esgotar Hipóteses", em que vão fazendo todos os pares possíveis até esgotar todas as hipóteses. Da mesma forma, através da "Visualização", procuram perceber os elementos que não se repetem, nos problemas de divisão de Produto de Medidas, e que, apesar de mais difíceis, não são impossíveis de serem realizados por crianças dos 4 aos 6 anos.

Porque, em certa medida, a idade das crianças o determina, o tipo de estratégia mais usado foi a manipulação direta, com procedimentos corretos de agrupamento, de correspondência de um-para-muitos e de distribuição um-a-um. Não obstante, é de salientar o recurso a estratégias com factos numéricos da adição para resolver os problemas de estrutura multiplicativa, com percentagens mais elevadas do que as que foram observadas em estratégias de contagem. Pode, tal facto, indiciar que as crianças percebem alguma relação processual entre a adição e a multiplicação. Mais, poderá indicar, sobretudo, que as crianças percebem a propriedade isomórfica presente na razão escalar mencionada no problema.

Parece que as crianças de 4, 5 e 6 anos conseguem resolver conscientemente os problemas que lhes foram apresentados, mesmo problemas mais difíceis como os problemas de Quarto Proporcional e problemas de Produto de Medidas. A convicção com que o fizeram foi possível de ser observada não só nos procedimentos que utilizaram, alguns ainda não identificados na literatura, mas também nos argumentos que utilizaram para justificar as opções tomadas.

Os argumentos apresentados pelas crianças para justificar a sua resposta correta nos problemas de estrutura multiplicativa foram analisados, com o intuito de conhecer melhor o seu raciocínio na resolução dos mesmos. Segundo Piaget (1967), até aos 7-8 anos verifica-se uma completa ausência de introspeção. Ao pensamento da criança falta a necessidade lógica, ela tem dificuldade em manipular a justificação lógica causal, explicado pela inconsciência do pensamento diante de si próprio. Segundo este autor, para explicar como procedeu para encontrar a resolução de um problema, a criança parte do resultado obtido, como se já o soubesse previamente, e justifica com um meio mais ou menos arbitrário de encontrar o resultado, nem sempre correspondendo ao que realmente foi manipulado e realizado por ela. Ora, os dados obtidos neste estudo sobre a argumentação das crianças de 4, 5 e 6 anos aos problemas de estrutura multiplicativa que resolveram corretamente sugerem outra opinião. A percentagem de argumentos "Válidos" (com uma média de 46%), superiores à percentagem de argumentos "Inválidos", remete para uma nova abordagem da capacidade que as crianças têm na reflexão sobre a sua ação.

Não é possível comparar estes resultados com outros já trabalhados, uma vez que os estudos dos autores que se debruçaram sobre a resolução de problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa com crianças em idade pré-escolar (ver Carpenter & Moser, 1982; Riley et al., 1983; Becker, 1989, 1993; Carpenter et al., 1993, 1999; Nunes & Bryant, 1991, 1996; Barth et al., 2009) não abordaram os argumentos dados pelas crianças na resolução dos problemas. Fica, porém, a ideia de que é possível as crianças de 4, 5 e 6 anos realizarem a introspeção do seu raciocínio, argumentando e justificando a resposta correta com determinado procedimento de resolução.

1.2. Como raciocinam as crianças quando lhes são apresentados conjuntamente problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa?

O Estudo 2 assumiu-se como um estudo quase-experimental, e analisou, entre outros aspetos, o que as crianças de 5 e 6 anos são capazes de fazer quando lhes são apresentados conjuntamente problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa. Assim, foi realizado um estudo intra-participantes em que cada criança respondeu a problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa apresentados de forma alternada, para que se pudesse aferir sobre o efeito de contágio de raciocínio na resolução de problemas.

Tomando como referência os resultados do Estudo 1, que mostrava a facilidade com que as crianças resolviam os problemas quando estes diziam respeito apenas a uma estrutura de raciocínio, havia que perceber o seu comportamento quando tinham que resolver cumulativamente problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa. Poderia haver algum conflito na interpretação da situação descrita nos problemas, contudo, o facto de lhes terem sido apresentados alternadamente problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa não influenciou a eficácia da sua resolução. As crianças recorreram a estratégias diversificadas, desde a manipulação direta, à estratégia com factos numéricos, e conseguiram demonstrar no seu procedimento os esquemas de ação inerentes a cada estrutura de raciocínio. Nos problemas de estrutura aditiva mantiveram o recurso ao esquema de juntar, retirar e colocar em correspondência. Nos problemas de estrutura multiplicativa evidenciaram os esquemas de correspondência de um-para-muitos e de distribuição. O que sugere não ter ocorrido conflito na interpretação dos dados, nem na escolha de procedimentos conducentes à resolução correta dos problemas. Os argumentos “Válidos” afastam a possibilidade da casualidade das respostas.

1.3. Pode ser promovido o desenvolvimento do raciocínio para resolver problemas de estrutura aditiva e de estrutura multiplicativa?

Para perceber se pode ser promovido o raciocínio das crianças em idade pré-escolar para resolução de problemas de estrutura aditiva e multiplicativa mediram-se os desempenhos das crianças antes e depois de uma curta intervenção criada com essa finalidade. Os resultados após a intervenção foram melhores em todos os tipos de problemas. Contudo, verificou-se alguma diferença, ainda que pequena, na percentagem média de sucesso entre os problemas de estrutura aditiva e os problemas de estrutura multiplicativa, sugerindo que os primeiros parecem ser mais acessíveis às crianças do que os últimos. É de salientar, porém, que a diferença que se verifica é apenas de 61% para 66% depois da intervenção, diferença manifestamente inferior à que havia sido registada nos resultados antes da intervenção, com 52% de sucesso nos problemas de estrutura aditiva e 38% para os problemas de estrutura multiplicativa.

Apesar de se verificarem grandes taxas de sucesso depois da intervenção, continuam a observar-se diferenças consoante o tipo de problemas, em ambas as estruturas de raciocínio. Nos problemas de estrutura aditiva, os mais fáceis de resolver foram os problemas de Composição de Duas Medidas, e os que suscitaram mais dificuldade às crianças, os problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas. Embora a percentagem média de sucesso dos problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas tenha sido superior após a intervenção, esta diferença não foi significativa, o que sugere que este tipo de problemas mantém a sua complexidade de resolução por crianças desta idade.

Parece, no entanto, poder adiantar-se que a reversibilidade de pensamento apontada por Piaget e Szeminska (1971) como sendo impossível antes dos 7-8 anos, não se mostra coincidente com os resultados desta investigação. Quer os problemas de Composição de Duas Medidas com a parte desconhecida, quer os problemas de Transformação Ligando Duas Medidas com o início e com o elemento de transformação desconhecidos foram resolvidos com relativa facilidade pelos participantes.

Nos problemas de estrutura multiplicativa os mais fáceis de resolver foram os problemas de Multiplicação, antes e depois da intervenção. O mesmo não se pode referir relativamente aos problemas de divisão. Enquanto que antes da intervenção as crianças tiveram mais dificuldade nos problemas de Divisão Partitiva, depois da intervenção, os problemas de Divisão por Quotas parece terem constituído mais dificuldade para as crianças. A Divisão Partitiva, considerada por alguns autores como o modelo prototípico da divisão, e por isso de mais fácil compreensão (ver Fischbein et al., 1985; Correa, 2004; Nunes et al., 2009), foi a que apresentou diferenças significativas antes e depois da intervenção, registando sucessos médios de 29% para 54%, respetivamente. Segundo Fischbein et al. (1985), Correa (2004) e Nunes et al. (2009), as estratégias utilizadas nos problemas de Divisão Partitiva são dominadas mais cedo do que as que são utilizadas para resolver os problemas de Divisão por Quotas. Ainda que se registem estudos que mostraram não haver diferenças significativas entre estes dois tipos de divisão (ver Burton, 1992; Selva, 1998), os resultados deste Estudo 2 apontam para uma melhoria significativa na resolução dos problemas de Divisão Partitiva, após uma intervenção. O mesmo se verifica nos problemas de Multiplicação, que registam notáveis melhorias após a intervenção.

No que respeita às estratégias de resolução, pode dizer-se que as estratégias adotadas pelas crianças mostraram-se adequadas ao tipo de problemas e estrutura de raciocínio. Elas interpretaram a situação descrita no problema e escolheram a estratégia que melhor as auxiliou na sua resolução, feita de acordo com o tipo de problema, com prevalência para estratégias de manipulação direta e estratégias com factos numéricos.

Parece que algumas estratégias estão mais intimamente ligadas a problemas de estrutura aditiva, como sendo estratégias de correspondência termo-a-termo, e outras usadas exclusivamente em problemas de estrutura multiplicativa, como as que envolvem agrupamentos e distribuição. O facto de alguns problemas de estrutura multiplicativa terem sido resolvidos com estratégias aditivas vem reforçar a opinião de Vergnaud (1983) e Nunes et al. (2009) acerca da ligação processual entre a adição e a multiplicação.

Relativamente aos argumentos apresentados pelas crianças em idade pré-escolar, Piaget (1967) defende que a característica principal do pensamento da criança até aos 11-12 anos é a sua incapacidade de uma consciência reflexiva, porque operando com a realidade, o seu pensamento está mais próximo da ação, e falta-lhe a necessidade de verificação, própria de uma consciência reflexiva. O que reflete a incapacidade das crianças, antes desta idade, não só de pensarem sobre a sua ação, mas também a incapacidade de compreenderem o pensamento verbal umas das outras. Contudo, a percentagem de argumentos "Válidos" obtidos na justificação das respostas corretas aponta noutro sentido. Não só os níveis de argumentos

"Válidos" foram superiores aos argumentos "Inválidos", o que sugere que as crianças refletem sobre o processo de resolução, como as percentagens superiores de argumentos "Válidos" registadas após a intervenção parecem indicar que as crianças atendem às justificações dos colegas e compreendem o seu pensamento verbal.

Fica claro o poder de argumentação de crianças tão novas quanto as que participaram nesta investigação. As crianças desta idade, de 5 e 6 anos, conseguem encontrar argumentos válidos para defender a sua opção na resolução correta dos problemas. Conseguem, ainda, explicar verbalmente aos seus pares como fizeram, os passos que deram, porque deram, e de que forma os colegas podem fazer para chegar à mesma solução. A resolução conjunta de problemas de estrutura aditiva e multiplicativa não constituiu fator de conflito, nem nos resultados, nem nas estratégias, nem tão pouco na argumentação que as crianças tiveram que apresentar.

1.4. Existirá transferência de conhecimento de uma estrutura de raciocínio para a outra?

De acordo com o que foi defendido por Piaget e Szeminska (1971) e por outros seus seguidores, o entendimento da multiplicação e divisão só é possível depois da compreensão da adição e subtração. Nesse sentido, seria de esperar, ou não, uma transferência de conhecimento quando apresentados problemas de estrutura aditiva e multiplicativa conjuntamente? Dominados os problemas de estrutura aditiva, seria possível, de acordo com os autores, o "salto" para a resolução de problemas mais complexos como os problemas de estrutura multiplicativa.

Independentemente do grupo de intervenção do qual fizeram parte, registaram-se diferenças significativas dos resultados antes e depois da intervenção, quer em problemas de estrutura aditiva, quer em problemas de estrutura multiplicativa. As crianças que participaram no grupo de intervenção que trabalhou apenas a resolução de problemas de estrutura aditiva apresentaram melhores resultados, depois da intervenção, na resolução de problemas desse tipo, e ainda na resolução de problemas de estrutura multiplicativa. As crianças que participaram no grupo de intervenção que resolveu problemas de estrutura multiplicativa melhoraram o seu desempenho na resolução de problemas deste tipo, mas também melhoraram o desempenho nos problemas de estrutura aditiva. No entanto, as crianças que participaram dos grupos de controlo melhoraram também os seus desempenhos depois da intervenção, em problemas de estruturas aditiva e multiplicativa, ainda que não tendo recebido qualquer intervenção sobre estes tipos de estrutura de problemas. De salientar que, os problemas de Relação Estática Ligando Duas Medidas não foram trabalhados nas sessões de intervenção, e, ainda assim, apesar de registarem uma menor percentagem média de sucesso depois da intervenção quando comparados com os problemas dos outros tipos, este tipo de problemas registou uma melhoria face aos resultados antes da intervenção, em todos os grupos de intervenção.

Os resultados desta investigação não identificaram claramente uma transferência de conhecimentos na resolução de problemas de estruturas de raciocínio diferentes. O que sugere que os problemas de multiplicação e divisão por um lado, e os problemas de adição e subtração por outro, implicam distintos esquemas de ação na sua compreensão e resolução, ainda que possa existir uma ligação processual entre a adição e multiplicação, e a subtração e divisão. Parece que as crianças evoluem porque foram impelidas a fazer, com a colaboração de alguém mais experiente (outra criança mais capaz ou pelo adulto), o que por si só não seriam capazes.

1.5. Quais os efeitos de uma intervenção centrada numa determinada estrutura de raciocínio?

O nível de sucesso superior nos resultados registados após a intervenção poderá sugerir que esta teve efeitos na capacidade de resolução dos problemas. Fruto das interações que se estabeleceram com outros mais experientes e mais capazes, as crianças foram impelidas a fazerem mais e resolverem tarefas mais difíceis do que aquilo que estaria ao seu alcance por si só. Poder-se-á considerar que, de uma maneira geral, os problemas apresentados às crianças de 5 e 6 anos integram a sua capacidade cognitiva, considerando a zona imediatamente próxima de desenvolvimento (Vygotsky, 1994). A colaboração que receberam na intervenção contribuiu para aumentar o seu desempenho nas tarefas apresentadas após a intervenção, em tudo idênticas às que haviam sido previamente apresentadas antes da intervenção.

A aprendizagem que ocorreu nas sessões de intervenção impulsionou e despertou uma série de funções que se encontravam num estado de maturação na zona imediatamente próxima do desenvolvimento destas crianças. Sendo a imitação a origem da influência da aprendizagem sobre o desenvolvimento, Vygotsky (2007) alerta que a criança só pode imitar o que se encontra na zona das suas próprias potencialidades cognitivas. Ela só imita se tiver a possibilidade de passar do que pode ao que não pode. Na análise levada a efeito às sessões de intervenção, com o intuito de compreender o raciocínio das crianças quando resolvem os problemas propostos, foi possível observar claramente o importante papel da imitação. O seu comportamento ao longo da intervenção foi mudando também em termos de linguagem e argumentação. O seu vocabulário passou a integrar expressões matemáticas até aí dominadas apenas por algumas, como "ao todo", "em cada", e o seu poder de argumentação para explicar o seu procedimento tornou-se mais claro e preciso.

A transição do que a criança consegue fazer por si só ao que pode fazer graças à colaboração que lhe seja prestada por alguém mais experiente é o indicador mais sensível da dinâmica do desenvolvimento e do sucesso que caracteriza a atividade cognitiva da criança. Graças a uma colaboração que lhe é prestada, a criança resolve problemas imediatamente próximos do seu nível de desenvolvimento com relativa facilidade. Através dessa colaboração, auxílio e ajuda de alguém mais experiente, a criança é sempre capaz de fazer mais e de resolver tarefas mais difíceis do que o que está ao seu alcance quando resolve por si só.

2. Implicações educacionais

Piaget marca indubitavelmente a forma como o raciocínio da criança começa a ser considerado. Mas se por um lado as suas teorias vão sendo refutadas e contrariadas por investigações recentes, por outro lado elas condicionam ainda hoje os temas matemáticos a serem tratados quer no Jardim de Infância, quer na escola do 1.º ciclo. A presente investigação abre caminhos, desde logo no Jardim de Infância, para a importância da resolução de problemas, não só de estrutura aditiva, mas também de estrutura multiplicativa, por crianças de 4, 5 e 6 anos. Os resultados dos estudos desenvolvidos nesta investigação sugerem uma reflexão sobre a altura em que são introduzidos temas e conteúdos matemáticos relacionados com a resolução de problemas de ambas as estruturas de raciocínio, no sistema educativo português.

É possível a resolução de problemas de estrutura multiplicativa por crianças do pré-escolar, mesmo alguns que envolvem o raciocínio proporcional. De igual forma é possível a resolução de problemas de estrutura aditiva em que as crianças têm que recorrer ao seu conhecimento da relação inversa das operações. Assim, porque não dar maior enfoque à capacidade de resolução de problemas nos documentos orientadores da gestão do currículo da educação pré-escolar?

Os resultados desta investigação, apesar de não poderem ser generalizados, sugerem a possibilidade de potenciar e estimular a capacidade de resolução de problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa antes das crianças entrarem na escolaridade básica formal. Há fortes indicadores de que as crianças em idade pré-escolar têm capacidade para resolver problemas que estão presentemente reservados apenas a alunos do 1.º ciclo, e sobretudo, a alunos do 2.º ano de escolaridade. Porque na Escola/Jardim de Infância, a criança aprende não o que pode fazer por si só, mas o que ainda não é capaz de fazer sozinha, e que conseguirá graças à colaboração e orientação do professor. O que a criança é capaz de fazer no presente com ajuda será capaz de fazer, no futuro, sozinha. Vygotsky (1977) defende que o desenvolvimento e a aprendizagem têm ritmos diferentes, e a aprendizagem só se torna útil quando se antecipa ao desenvolvimento; quando tal acontece, a aprendizagem impulsiona uma série de funções que se encontram num estágio de maturação na zona que Vygotsky define como zona imediatamente próxima de desenvolvimento. Como tal, o estado de desenvolvimento da criança não é definido apenas pelo que já amadureceu, mas também pelas funções que se encontram em processo de maturação (Vygotsky, 1994).

Ora, considerando que o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo dizem respeito a esquemas e relações mentais de tal forma distintos que são considerados campos conceptuais separados (Vergnaud, 1982, 1988, 1996; Nunes et al., 2009), parece não fazer sentido entender a existência de uma fase aditiva precedente de uma fase multiplicativa. No entanto, ainda se introduz no 1.º ciclo a multiplicação e a divisão no ano seguinte ao que são introduzidas a adição e a subtração. Não estarão a ser subaproveitadas as capacidades das crianças, ignorando o seu conhecimento implícito, e que lhes permite com clareza inventar estratégias de resolução baseadas nas ações e relações descritas nos problemas?

Seria pertinente refletir sobre a compreensão das crianças na resolução de problemas, sobre a possibilidade de estimular e potenciar essas capacidades, desde o pré-escolar. Seria de igual modo importante, através da formação inicial dos docentes do pré-escolar e educação básica, e da formação contínua de professores, promover o conhecimento sobre as capacidades das crianças na resolução de problemas, as estratégias informais que utilizam e o seu poder de argumentação, até aqui ignorado.

3. Limitações da investigação

Não tendo a veleidade de considerar este trabalho de investigação isento de fragilidades, reconhecem-se aqui algumas limitações circunstanciais. O facto da investigadora, sendo educadora de infância, estar em exercício de funções, acarretou alguns constrangimentos. Desde logo, os Jardins de Infância onde decorreu a investigação. O Estudo 1, realizado nos distritos de Viseu e Aveiro, poderia ter sido beneficiado se tivesse decorrido num terceiro distrito, envolvendo mais do que uma zona geográfica. Apesar da amostra ser significativa, 180 crianças, os resultados seriam ainda mais robustos se o número de participantes fosse duplicado. O Estudo 2, realizado intencionalmente com pequenos grupos, poderia ter saído mais valorizado se tivesse envolvido mais grupos, e tivesse sido realizado em mais do que um Jardim de Infância. Mais uma vez se aponta este constrangimento fruto da ausência de uma bolsa de investigação ou licença para a realização deste trabalho. Aliás, este último ponto condicionou a extensão da intervenção que, desejavelmente, sairia beneficiada se pudesse ter sido prolongada no tempo, envolvendo mais sessões de intervenção com os grupos de trabalho.

4. Sugestões para futuras investigações

Este trabalho de investigação não se encerra em si mesmo. Reconhece-se que muito ainda está por estudar no campo das estruturas aditivas e das estruturas multiplicativas tendo como sujeitos de pesquisa as crianças do pré-escolar. As questões que foram levantadas nos estudos realizados procuraram ser respondidas, no entanto, reconhece-se que estes aspetos poderiam ter sido estudados com mais profundidade, quer com outro tipo de tarefas, quer com outros tipos de problemas. No decorrer da investigação foram surgindo outras questões, que não se alvitraram neste trabalho por não ser o seu objetivo. Seria interessante analisar o erro das crianças aos problemas propostos. De que forma as crianças raciocinam quando dão uma resposta incorreta? Seria de igual forma pertinente desenvolver um estudo longitudinal com o objetivo de perceber se ocorrem alterações no raciocínio das crianças quando iniciam a instrução formal, quer a nível das estratégias, quer a nível dos argumentos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Albarelo, L., Digneffe, F., Hiernaux, J., Maroy, C., Ruquoy, D., & Saint-Georges, P. (2005). *Práticas e métodos de investigação em ciências sociais.* Lisboa: Gradiva.

Almeida, L., & Freire, T. (2003). *Metodologia de investigação em psicologia e educação.* Braga: Psiquilibrios.

Alsina, A., Aymerich, C., & Barba, C. (Marzo de 2008). Una visión actualizada de la didáctica de la matemática en educación infantil. *Matemáticas en Educación Infantil. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 47*, 10-19.

Baroody, A., & Ginsburg, H. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical performance in mathematics. In J. H. (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 75-112). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Barth, H., Baron, A., Spelke, E., & Carey, S. (2009). Children's multiplicative transformations of discrete and continuous quantities. *Journal of Experimental Child Psychology, 103 (4)*, 441-454.

Becker, J. (1989). Preschooler's use of number words to denote one-to-one correspondence. *Child development, 60*, 1147-1157.

Becker, J. (1993). Young children's numerical use of number words: Counting in many-to-one situations. *Developmental Psychology, 19*, 458-465.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1994). Units of quantity: A conceptual basis common to additive and multiplicative structures. In G. Harel, & J. Confrey, *The development of multiplication reasoning in the learning of mathematics* (pp. 121-176). Albany, N.Y.: State University of New York Press.

Bell, A., Fischbein, E., & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: the effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 129-147.

Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operations in verbal pproblems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 339-420.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto: Porto Editora.

Briars, D., & Larkin, J. (1984). An integrated model of skills in solving elementary arithmetic word problems. *Cognition and Instruction, 1*, 245-296.

Brown, M. (1981). Number operations. In K. (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11 - 16* (pp. 23-48). London: John Murray.

Bryant, P., Morgado, L., & Nunes, T. (1992, august). Children's understanding of multiplication. *Proceedings of the Annual Conference of the Psychology of Mathematics Education.* Tokyo, Japan.

Burton, G. (1992). Young children's choices of manipulatives and strategies for solving whole number division problems. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 14*, 2-57.

Carpenter, T., & Moser, J. (1982). The development of addition and subtraction problem solving. In T. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. (Eds), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 10-24). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Carpenter, T., & Moser, J. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15 (3)*, 179-202.

Carpenter, T., Ansell, E., Franke, M., Fennema, E., & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematical Education, 24*, 428-441.

Carpenter, T., Fennema, E., Franke, M., Levi, L., & Empson, S. (1999). *Children's mathematics: cognitively guided instruction.* USA: Leigh Peake.

Carpenter, T., Hiebert, J., & Moser, J. (1981). Problem structure and first grade children´s initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal of Research in Mathematical Education, 12*, 27-39.

Carpenter, T., Hiebert, J., & Moser, J. (February de 1983). The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics, 14 (1)*, 55-72.

Castro, J., & Rodrigues, M. (2008). *Sentido de número e organização de dados: Texto de apoio para educadores de infância.* Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Christensen, L., Johnson, R., & Turner, L. (2011). *Research methods, design, and analysis* (11.ª ed.). Boston, M A: Pearson.

Clements, D., & Sarama, J. (2007). Effects of a preschool mathematics curriculum: summative research on the Building Blocks project. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*, 136-163.

Cook, T. D., & Campbell, D. T. (1979). *Quasi-experimentation: Design and analysis issues for field settings.* Boston, MA: Houghton-Mifflin.

Correa, J. (2004). A resolução oral de tarefas de divisão por crianças. *Estudos de Psicologia, 9 (1)*, 145-155.

Correa, J., & Moura, M. L. (1997). A solução de problemas de adição e subtração por cálculo mental. *Psicologia: Reflexão e Crítica,10 (1)*.

Correa, J., Nunes, T., & Bryant, P. (1995). Young childrens use of sharing and their understanding of the relationship between division terms in a non-computational task. *Proceedings of the 19th PME.* Recife.

Correa, J., Nunes, T., & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology, 90*, 321-329.

Creswell, J. (2003). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (2.ª ed.). London: Sage Publications.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*, 363–381.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. In N. Denzin, & Y. Lincoln, *Handbook of qualitative research* (pp. 1-17). Thousand Oaks: Sage Publications.

DGE. (2015). *Matemática*. Obtido de Direção-Geral da Educação: http://www.dge.mec.pt/matematica

Finger, M., & Rand, K. L. (2003). Addressing validity concerns in clinical psychology research. In M. C. Roberts, & S. S. llardi, *Handbook of research methods in clinical psychology* (pp. 13- 30). Oxford: Blackwell Publishing .

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach.* Dordrecht: D. Reidel.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Merino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16 (1)*, 3-17.

Fortin, M. (2009). *Fundamentos e etapas do processo de investigação.* Loures: Lusodidacta.

Frydman, O., & Bryant, P. (1988). Sharing and the understanding of number equivalence by young children. *Cognitive Development, 3*, 323-339.

Frydman, O., & Bryant, P. (1994). Children's understanding of multiplicative relationships in the construction of quantitative equivalence. *Journal of Experimental Child Psychology, 58*, 489-50.

Fuson, K. (1986). Teaching children to subtract by counting up . *Journal For Research In Mathematics Education 17, (3)* , 172-189.

Fuson, K. (1992a). Research on whole number addition and subtraction. In D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). New York: Macmilla Publishing Company.

Fuson, K. (1992b). Relationships between counting and cardinality from age 2 to age 8. In B. Jacqueline, C. Meljac, & J.-P. Fischer, *Pathways to number: Children's developing numerical abilities* (pp. 127-149). Hillsdale, NJ, England: Lawrence Erlbaum Associates.

Fuson, K. (2004). Pre-K to grade 2 goals and standards: achieving 21st century mastery for all. In D. Clements, J. Sarama, & A. Dibiase, *Engaging young children in mathematics: standards for early childhood mathematics education* (pp. 105-148). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Fuson, K., Pergament, C., Lyons, B., & Hall, J. (1985). Children's conformity to the cardinality rule as a function of set size and counting accuracy. *Child Development, 56*, 1429-1436.

Gardner, H. (1991). *The unschooled mind: How children think and how schools should teach.* New York: Basic Books Inc.

Gelman, R., & Gallistel, C. (1978). *The child’s understanding of number.* Cambridge, M.A: Harvard University Press.

George, D., & Mallery, P. (2003). *SPSS for Windows step by step: A simple guide and reference. 11.0 update* (4.ª ed.). Boston: Allyn & Bacon.

Ginsburg, H., & Seo, K. H. (1999). Mathematics in children's thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 1(2)*, pp. 113-129.

Greenhoot, A. (2003). Design and analysis of experimental and quasi-experimental investigations. In M. Roberts, & S. Ilardi, *Handbook of research methods in clinical psychology* (pp. 92-114). Oxford: Blackwell Publishing.

Greeno, H. (1978). Understanding and procedural knowledge in mathematics education. *Educational Psychologist, 12(3)*, 262-283.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. (Org.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: MacMillan.

Groen, G., & Resnick, L. (1977). Can preschool children invent addition algorithms? *Journal of Educational Psychology, 69 (6)*, 645-652.

Groen, J., & Parkman, J. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychology Review, 79 (4)*, 329-343.

Halmenschlager, V. L. (2001). *Etnomatemática: Uma experiência educacional.* São Paulo: Edições Selo Negro.

Hart, K. (1980). Secondary school-children's understanding of ratio and proportion (report of the concepts in secondary mathematics and science programme). *Doctoral Thesis*. (C. f. University of London, Ed.) London.

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16.* London: John Murray.

Hart, K. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors.* Windsor, England: NFER Nelson.

Howe, K. (1988). Against the quantitativequalitative incompatibility thesis or dogmas die hard. *Educational Researcher, 17(8)*, 10-16.

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between sets. *Child Development, 54*, 84-90.

Hughes, M. (1981). Can preschool children add and subtract? . *Educational Psychology,1 (3)*, 207-219.

Hughes, M. (1986). *Children and number: Difficulties in learning mathematics.* Oxford: Blackwell.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence.* New York: Basic Books.

Jonassen, D., & Grabowski, B. (1993). *Handbook of individual differences, learning, and instruction.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kamii, C., & Dominick, A. (1997). To teach or not to teach algorithms. *Journal Of Mathematical Behavior, 16 (1)*, 51-61.

Kamii, C., & Joseph, L. (2005). *Crianças pequenas continuam reinventando a aritmética (séries iniciais): Implicações da teoria de Piaget* (2.ª ed.). Porto Alegre: Artmed.

Kamii, C., Lewis, B., & Kirkland, L. (2001). Fluency in subtraction compared with addition. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 33-42.

Kamii, C., Lewis, B., & Livingston, S. (1993). Primary arithmetic: Children inventing their own procedures. *Arithmetic Teacher, 41(4)*, 200-203.

Kaput, J., & West, M. (1994). Missing value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. In J. Confrey, & G. H. (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 235- 287). Albany, NY: State University of New York Press.

Karplus, R., & Peterson, R. (1970). Intellectual development beyond elementary school II: Ratio, a survey. *School-Science and Education, 70(9)*, 813-820.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh, & M. L. (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). New York: Academic Press.

Kelley, J., & Richert, D. (1970). *Elementary mathematics for teachers.* San Francisco: Holden-Day.

Kornilaki, E., & Nunes, T. (2005). Generalizing principles in spite of procedural differences: Children's understanding of division. *Cognitive Development, 20*, 388-406.

Kouba, V. (1989). Children's solution strategies for equivalents set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematical Education, 20*, 147-158.

Kouba, V., & Franklin, K. (1993). Multiplication and division: Sense making and meaning. In R. J. (Ed.), *Research ideas for the classroom – early childhood mathematics* (pp. 103-126). Hillsdale, N. J.: MacMillan.

Lemaire, P., & Siegler, R. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology, 124 (1)*, 83-97.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert, & M. B. (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum; National Council of Teachers of Mathematics.

Lewis, A., & Mayer, R. (1981). Students' miscomprehension of relational statement in arithmetic problems. *Journal of Educational Psychology, 79*, 363-371.

Lima, M. (1982). Iniciação ao conceito de fração e o desenvolvimento de conservação de quantidades. In T. C. (ed.), *Aprender pensando* (pp. 81-127). Petrópolis, Brasil: Editora Vozes.

Magina, S., & Campos, T. (2004). As estratégias dos alunos na resolução de problemas aditivos: um estudo diagnóstico. *Educação Matemática Pesquisa, 6(1)*, 53-71.

Magina, S., Campos, T., Nunes, T., & Gitirana, V. (2001). *Repensando adição e subtração.* São Paulo: Ed. PROEM.

Marôco, J. (2010). *Análise estatística com o PASW Statistics.* Pêro Pinheiro: Report Number.

Meira, L. (1994). Análise microgenética e videografia: Ferramentas de pesquisa em psicologia cognitiva. *Temas em Psicologia,2 (3)*, 59-72.

Mendes, M. F., & Delgado, C. (2008). *Geometria: Textos de apoio para educadores de infância.* Lisboa: Ministério da Educação- DGIDC.

Minayo, M., & Sanches, O. (1993). Quantitativo-qualitativo: oposição ou complementaridade? *Caderno de Saúde Pública, 9 (3)*, 239-262.

Moreira, J. (2006). Investigação quantitativa: Fundamentos e práticas. In J. A. Lima, & J. A. (Eds.), *Fazer investigação: Contributos para a elaboração de dissertações e teses* (pp. 41-84). Porto: Porto Editora.

Morgado, L. (1993). *O Ensino da aritmética: Perspectiva construtivista.* Coimbra: Livraria Almedina.

Mulligan, J. (1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: a longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal, 4 (1)*, 24-41.

NCTM. (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar* (2.ª ed.). Lisboa: APM.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. In J. Hiebert, & M. Behr, *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 19-41). NJ: Lawrence Erlbaum Association.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I– Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II– Problem-structure at successive stages: Problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 331-363.

Norwood, S. (2000). *Research strategies for advanced practice nurses.* Upper Saddle River, N.J.: Prentice-Hall Health.

Nunes, T., & Bryant, P. (1991). Correspondência: Um esquema quantitativo básico. *Psicologia: Teoria e Pesquisa, 7 (3)*, 273-284.

Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Crianças fazendo matemática.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Nunes, T., Bryant, P., & Watson, A. (2009). *Key understandings in mathematics learning.* Nuffield Foundation.

Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., Bell, D., Gardner, S., Gaardner, A., & Carraher, J. (2007). The contribution of logical reasoning to the learning of mathematics in primary school. *British Journal of Developmental Psychology, 25*, 147-166.

Nunes, T., Campos, T., Magina, S., & Bryant, P. (2005). *Educação matemática – Números e operações numéricas.* São Paulo: Cortez Editora.

Oliveira, J. (1994). *Psicologia da educação familiar.* Coimbra: Almedina.

Packer, M., & Mergendoller, J. (1989). The development of practical social understanding in elementary school-age children. In L. W. (Ed.), *Social interaction and the development of children's understanding* (pp. 67-94). Norwood: Ablex.

Park, J., & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development, 16*, 1-11.

Perret-Clermont, A. (1978). *A construção da inteligência pela interacção social.* Lisboa: Socicultor.

Pestana, M. H., & Gageiro, J. (2000). *Análise dos dados para ciências sociais: A complementaridade do SPSS.* Lisboa: Edições Silabo.

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2012). Children's use of subtraction by addition on large single-digit subtractions. *Educational Studies in Mathematics, 79*, 335-349.

Piaget, J. (1924). *Judgment and reasoning in the child.* London: Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J. (1967). *O raciocínio na criança.* Rio de Janeiro: Record.

Piaget, J. (1973). *Estudos sociológicos.* Rio de janeiro: Forense.

Piaget, J. (1977). *O desenvolvimento do pensamento: Equilibração das estruturas cognitivas.* Lisboa: D. Quixote.

Piaget, J. (1980). *Experiments in contradiction.* Chicago: University of Chicago Press.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *Gênese das estruturas lógicas elementares* (2.ª ed.). Rio de Janeiro: Zahar Editores.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1995). *A psicologia da criança* (2.ª ed.). Porto: Edições ASA.

Piaget, J., & Szeminska, A. (1971). *A gênese do número na criança.* Rio de Janeiro: Zahar Editores.

Pires, I. (1994). O estudo das operações binárias com números inteiros no ensino primário. In M. L. (Ed.), *Eu e os outros: Um itinerário pedagógico (Vol. 2)* (pp. 423-432). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Pitts, S., Prost, J., & Winters, J. (2005). Quasi-experimental designs in developmental research: design and analysis considerations. In D. M. Teti, *Handbook of research methods in developmental science* (pp. 81-100). Oxford: Blackwell Publishing.

Poeschl, G. (2006). *Análise de dados na investigação em psicologia: Teoria e prática.* Coimbra: Almedina.

Pólya, P. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton: Princeton University Press.

Ponte, J., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática do 1.º Ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Resnick, L. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist, 44 (2)*, 162-169.

Riley, M., & Greeno, G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction, 5 (1)*, 49-101.

Riley, M., Greeno, J., & Heller, J. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic . In H. G. (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking.* (pp. 153-196). New York: Academic Press .

Roschelle, R., Jordan, G., Greeno, J., Katzenberg, B., & Del Carlo, C. (1991). *Preliminary report on classroom observations for the national board for teacher certification.* Palo Alto, CA: Institute for Research on Learning.

Sarama, J., & Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research:Learning trajectories for young children.* New York: Routledge.

Savoie-Zajc, L. (2003). L'entrevue semi-dirigée. In B. Gauthier, *Recherche sociale: De la problématique à la collecte des données* (pp. 293-316). Québec: Presses de l' université du Québec.

Secada, G., Fuson, C., & Hall, J. (1983). The transition from counting-all to counting-on in addition. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*, 47-57.

Selva, A. (1998). Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. In A. Schliemann, & D. Carraher, *A compreensão de conceitos aritméticos: Ensino e pesquisa* (pp. 95-119). São Paulo: Papirus.

Serapioni, M. (2000). Métodos qualitativos e quantitativos na pesquisa social em saúde: algumas estratégias para a integração. *Ciências da Saúde Colectiva, 5(1)*, 187-192.

Siegler, R. (1987). Strategy choice in subtraction. In J. Sloboda, & D. R. (eds.), *Cognitive processes in mathematics* (pp. 81-106). New York: Oxford University Press.

Silva, M. I., & NEPE. (1997). *Orientações curriculares para a educação pré-escolar.* Lisboa: Ministério da Educação: DEB.

Sophian, C. (1988). Early developments in children's understanding of number: Inferences about numerosity and one-to- one correspondence. *Child Development, 59*, 1397-1414.

Starkey, P., Spelke, E., & Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition, 36*, pp. 97-128.

Steffe, L. (1988). Children's construction of number sequences and multiplying schemes. In J. Heibert, & M.Behr, *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 119-140). Reston, VA: The National Council of Teacher's of Mathematics.

Steffe, L. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel, & J. C. (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 3-40). Albany: State University of New York Press.

Sternberg, R. (1977). *Intelligence, information processing,and analogical reasoning: The componential analysis of human abilities.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Sternberg, R. (1990). *Metaphors of mind: Conceptions of the nature of intelligence.* New York: Cambridge University Press.

Tashakkori, A., & Teddlie, C. (1998). *Mixed methodology: Combining qualitative and quantitative approaches.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Thompson, P. (1993). Quantitative reasoning complexity and additive structures. *Educational Studies in Mathematics (25)*, 165-208.

Thompson, P. (1994). The development of the concept of speed and its relationships to concepts of rate. In G. Harel, & J. C. (Eds.), *The development of multiplication reasoning in the learning of mathematics* (pp. 181-236). Albany, N.Y: State University of New York Press.

Treffers, A. (1987). Integrated column arithmetic according to progressive schematisation. *Educational Studies in Mathematics (18)*, 125-145.

Tuckman, B. (2000). *Manual de Investigação em Educação.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Vergnaud, G. (1977). The nature of mathematical concept. In T. Nunes, & P. B. (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 1-28). Hove (UK): Psychology Press.

Vergnaud, G. (1978). The acquisition of arithmetical concepts. *Proceedings of the 2nd PME Conference (vol.1)*, (pp. 344-355).

Vergnaud, G. (1979). The acquisition of arithmetical concepts. *Educational Studies in Mathematics (10)*, 263-274.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Berne: Peter Lang.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 60-67). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Ass.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Resh, & M. L. (Orgs.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1986). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: As estruturas aditivas. *Análise Psicológica, 1 (V)*, 75-90.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert, & M. B. (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1996). A teoria dos campos conceituais. In J. B. (org), *Didáctica das matemáticas* (pp. 155-91). Lisboa: Instituto Piaget.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes, & P. Bryant, *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 5-28). Hove, UK : Psychology Press.

Vergnaud, G. (2011). O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. *Educar em Revista*, 15-27.

Vergnaud, G. (2012). Commentary 1. *Educational Studies in Mathematics, 79(3)*, 439-445.

Vergnaud, G., & Durand, C. (1976). Structures additifs et complexité psychogénetique. *Revue Française de Pédagogie, 36*, 28-43.

Vergnaud, G., Rouchier, A., Marthe, P., & Metregiste, R. (1978). Quelles connaissances les enfants de sixième ont-ils des structures multiplicatives élémentaires ? *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques, 313*, 331-357.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school? . In T. Nunes, & P. Bryant, *Learning and teaching mathematics: An international perspective.* (pp. 69-97). Hove, England: Psychology Press.

Verschaffel, L., Bryant, P., & Torbeyns, J. (2012). *Educational Studies in Mathematics. 79 (3)*, 335-349.

Vygotsky, L. (1977). Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar. In L. S. Vygotsky, A. R. Luria, & A. N. (Orgs.), *Psicologia e pedagogia I: bases psicológicas da aprendizagem e do desenvolvimento* (pp. 31-50). Lisboa : Estampa.

Vygotsky, L. (1994). *A formação social da mente.* São Paulo: Martins Fontes.

Vygotsky, L. (2007). *Pensamento e linguagem.* Lisboa: Relógio D´Água.

Willis, G., & Fuson, K. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology, 80 (2)*, 192-201.

Wittrock, M. C. (1992). Empowering Conception of educational psychology. *Educational Psychologist, 27(2)*, 129-141.

Wood, D. (2001). *How children think and learn.* Oxford: Blackwell.

Woolfolk, A. E. (1995). *Educational psychology (6th ed.) .* Boston: Allyn & Bacon.

Zymney, G. (1961). *Methods in experimental psychology.* New York: Ronald Press.

ANEXOS

ANEXO 1 – PROBLEMAS APRESENTADOS NO ESTUDO 1

ANEXO 1A – PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA E MATERIAIS DISPONIBILIZADOS

1. Numa árvore estavam macaquinhos, 3 em pé e 4 de cabeça para baixo. Quantos macaquinhos estão, ao todo, na árvore?

2. A Rosa tem 8 morangos colocados em 2 taças. Uma taça tem 5 morangos, quantos morangos tem a outra taça?

3. A cadelinha da Inês teve cachorrinhos. Teve 5 brancos e 3 castanhos. Quantos cachorrinhos teve, ao todo, a cadelinha da Inês?

4. A mãe da Francisca deu-lhe 4 coelhinhos de chocolate. Mais tarde deu-lhe mais 3. Quantos coelhinhos tem agora a Francisca?

5. A Susana tinha alguns brincos. Na escola deram-lhe mais 2 e agora ela tem 8. Quantos brincos ela tinha no início?

6. A Ana tinha alguns rebuçados. Deu 3 à sua mãe e ficou com 2. Quantos rebuçados tinha a Ana no início?

7. A mãe tinha alguns queijos na despensa. Foram lá ratitos e comeram 4. Deixaram lá ficar 5. Quantos queijos estavam no início, antes de lá irem os ratitos?

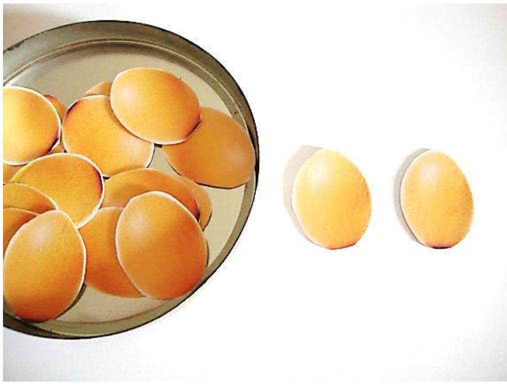
8. O Rui tinha 7 rebuçados, deu 5 à sua irmã. Quantos rebuçados tem agora?

9. O Pedro apanhou 3 gafanhotos na relva e mais alguns na areia. Agora ele tem 5 gafanhotos. Quantos gafanhotos apanhou na areia?

10. A Maria tinha 6 flores, deu 2 à sua mãe. Quantas flores ela tem agora?

11. Quando a Maria chegou a casa, o seu bibe só tinha 4 botões. A mãe coseu mais alguns e agora o bibe tem 6 botões. Quantos botões coseu a mãe?

12. A galinha Pintadinha pôs 5 ovos num dia. No dia seguinte pôs mais 2. Quantos ovos pôs ao todo?



13. O Paulo tem 7 brinquedos. Cinco estão desarrumados, fora da caixa. Quantos estão dentro da caixa?

14. A Joana tinha algumas bonecas, a tia deu-lhe mais 3 e agora ela tem 8. Quantas bonecas tinha a Joana no início.

15. O Paulo tinha 5 rebuçados, comeu alguns e ficou com 3. Quantos rebuçados comeu?

16. A mãe do Pedro fez 7 bolos para a festa. O Pedro comeu alguns em segredo e agora a mãe só tem 4 bolos para pôr na mesa. Quantos bolos comeu o Pedro?

17. Na sala da Bela há 5 meninos e 9 meninas. Quantas meninas há a mais?

18. Numa festa, o Tiago recebeu 5 carrinhos e o Rui recebeu 2 aviões. Quantos aviões há a menos do que carrinhos?

19. Ao jantar, o Diogo tinha no prato 7 morangos e a Joana tinha 4. Quantos morangos tinha a Joana a menos que o Diogo?

20. Numa casa há 7 portas e 3 chaves. Quantas portas há a mais do que chaves?

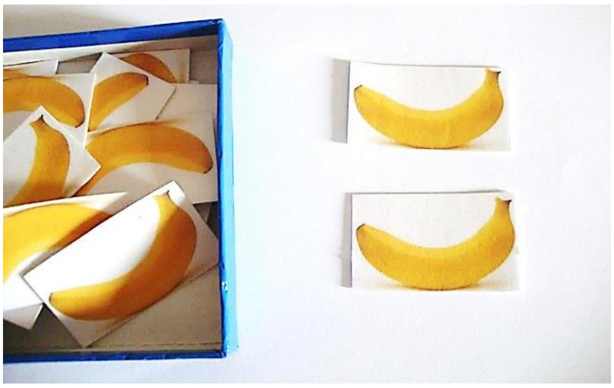
21. A mamã deu à Joana 4 bolos para o lanche e deu ao Diogo mais 2 do que à Joana. Quantos bolos deu ao Diogo?

22. A Laura tem 5 bonecas. A Rosa tem menos 2 do que a Laura. Quantas bonecas tem a Rosa?

23. A Maria tem 3 flores. A Rita tem mais 2 do que a Maria. Quantas flores tem a Rita?

24. O João tem menos 2 balões do que o Miguel. O Miguel tem 7 balões. Quantos balões tem o João?

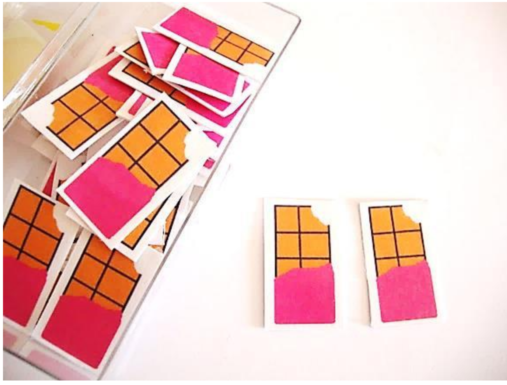
25. A Bruna tem na mochila 3 bananas a menos do que a Rosa, que tem 7. Quantas bananas tem a Bruna na mochila?



26. O Paulo tem mais 2 carros do que o Tiago. O Tiago tem 4. Quantos carros tem o Paulo?

27. O Ricardo tem 2 balões a mais do que o Tomás. O Tomás tem 4 balões. Quantos balões tem o Ricardo?

28. A Sofia recebeu 5 chocolates. O Pedro recebeu menos 2 do que a Sofia. Quantos chocolates recebeu o Pedro?

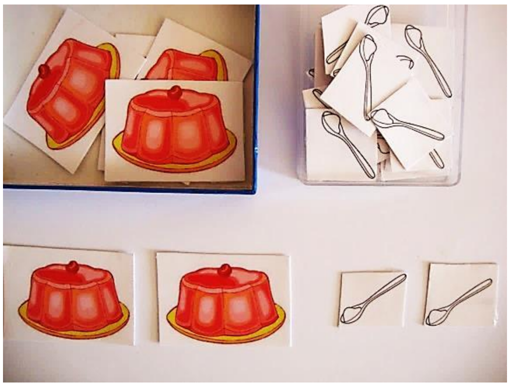


ANEXO 1B – PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA E MATERIAIS DISPONIBILIZADOS

1. A Mara apanhou 2 joaninhas. Cada joaninha tem 4 pintinhas. Quantas pintinhas têm, ao todo, as 2 joaninhas?

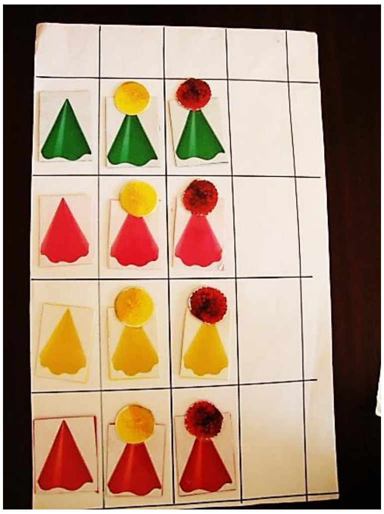
2. A Rita vai arrumar 15 livros em 3 prateleiras. Todas as prateleiras terão a mesma quantidade de livros. Quantos livros ficam em cada prateleira?

3. Para fazer 2 taças de pudim coloco 3 colheres de açúcar. Se eu quiser fazer 4 taças de pudim, quantas colheres de açúcar tenho que colocar?



4. O Pedro tem 15 balões para dar a alguns amigos. Cada amigo vai receber 3 balões. A quantos amigos ele vai dar balões?

5. O palhaço Malaquias consegue combinar 8 chapéus mudando os pompons e os cones. Ele tem 4 cones. De quantos pompons precisa?

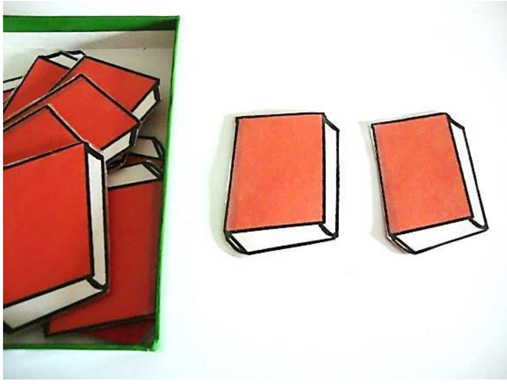


6. Numa rua há 3 casinhas. Em cada casinha moram 2 coelhinhos. Quantos coelhinhos moram, ao todo, nas 3 casinhas?

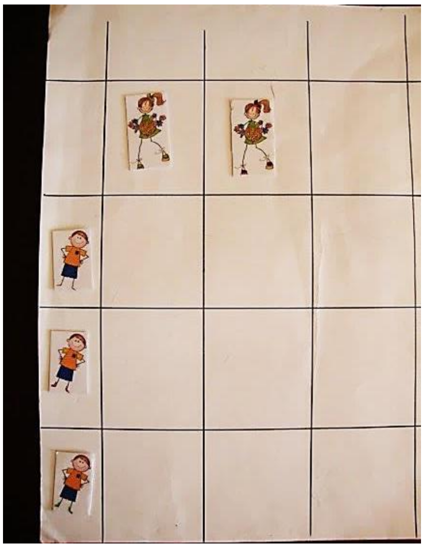
7. A Rosa consegue vestir 6 roupas diferentes com 3 saias e camisolas. De quantas camisolas precisa?

8. A Joana quer combinar os sapatos com as meias. Quantas combinações consegue fazer com 3 meias e 4 sapatos?

9. A Mara tem 12 livros num baú para emprestar às suas amigas. Cada amiga vai receber 4 livros. A quantas amigas a Mara vai emprestar livros?



10. Três meninos e 2 meninas estão num baile. Todos os meninos querem dançar com todas as meninas. Quantos pares se conseguem fazer?



11. Quando faço sopa para mim (1 pessoa) coloco 2 batatas. Se eu quiser fazer sopa para 3 pessoas, quantas batatas tenho que colocar?

12. Faz de conta que tens aqui 3 pintainhos e tens que lhes dar estes grãos de milho (12). Todos têm que comer a mesma quantidade. Quantos grãos de milho vai comer cada pintainho?

ANEXO 2 - PROBLEMAS APRESENTADOS NO ESTUDO 2

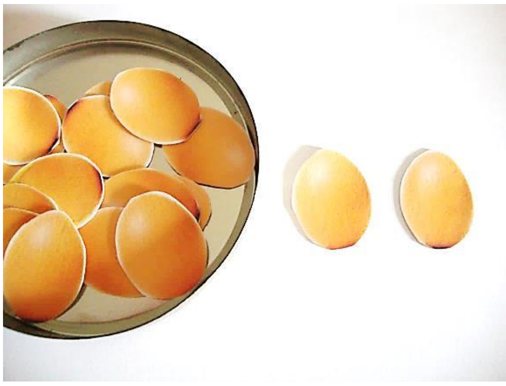
ANEXO 2A – PROBLEMAS APRESENTADOS NO PRÉ-TESTE E MATERIAIS DISPONIBILIZADOS

1. A professora tem estes rebuçados (15) para dar aos meninos. Cada menino vai receber 3 rebuçados. A quantos meninos a professora vai dar rebuçados?

2. Num lago estavam 5 rãs. Chegaram mais algumas e agora já lá estão 8. Quantas rãs se vieram juntar às que já lá estavam?

3. O Paulo tinha 5 balões, mas rebentaram alguns e agora ele só tem 3 balões. Quantos balões rebentaram?

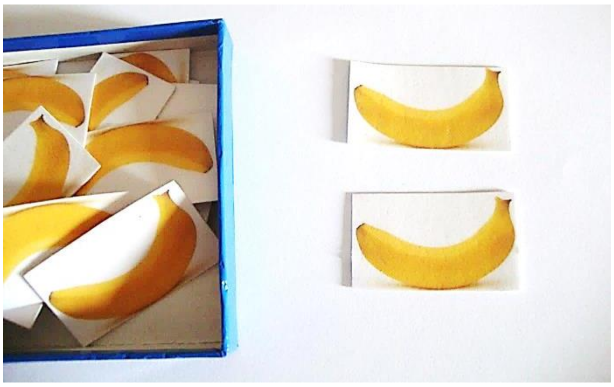
4. A Joana tem 3 galinhas. Cada galinha pôs 2 ovos. Quantos ovos puseram, a todo, as 3 galinhas?



5. A Maria tinha algumas saias no armário. A mãe lavou 6 e agora só lá tem 2. Quantas saias tinha a Maria no armário, antes da mãe pôr para lavar?

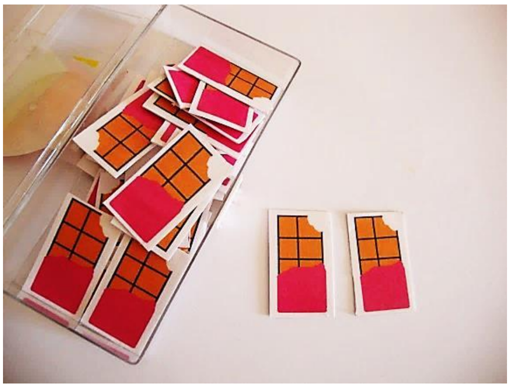
6. Quando o Pedro saiu da escola apanhou algumas flores para dar à mãe. Já perto de casa apanhou mais 3. Quando chegou ao pé da mãe deu-lhe 7 flores. Quantas flores apanhou quando saiu da escola?

7. O Tiago vai dar estas bananas (12) a 3 macacos. Todos vão comer a mesma quantidade. Quantas bananas vai comer cada macaco?

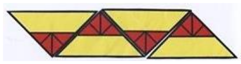


8. A mãe da Rita está a preparar um tabuleiro de bolos para meter no forno. Ela fez 7 bolos. Mas ainda não os pôs todos no tabuleiro. Quatro já estão no tabuleiro e os outros ainda estão na banca. Quantos estão na banca?

9. O Pedro tem 3 chocolates. A Inês tem mais 2 do que o Pedro. Quantos chocolates tem a Inês?

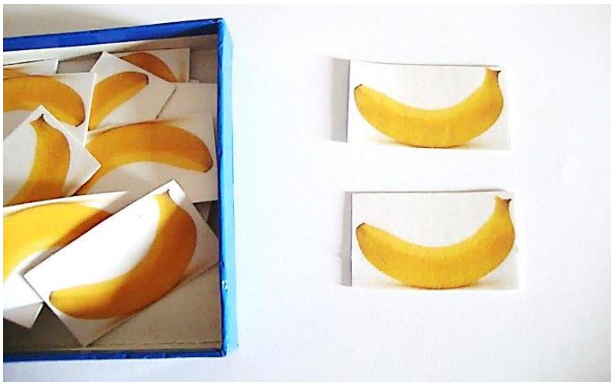


10. A Ana tem 5 flores. A Sofia tem menos 2 do que a Ana. Quantas flores tem a Sofia?

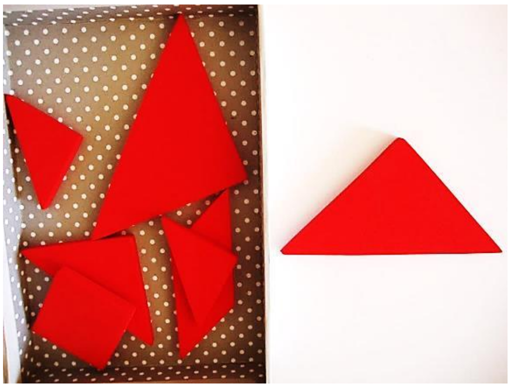
11. Continua o friso apresentado: 

12. Na sala da Bela há 7 meninos e 4 cadeiras. Quantos meninos há a mais do que cadeiras?

13. Na lancheira da Rita estão 5 bananas e 2 morangos. Quantos morangos estão a menos do que bananas?



14. Identifica no Tangram as figuras que têm 3 bicos.

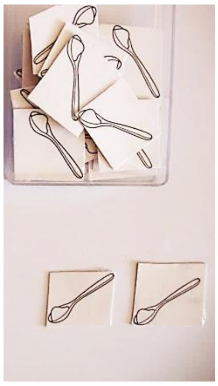


15. A mãe vai dar estes iogurtes (12) aos seus meninos. Cada menino vai receber 4 iogurtes. A quantos meninos a mãe vai dar iogurtes?

16. O João tinha 3 livros. Fez anos e os colegas deram-lhe mais alguns. Agora o João já tem 5 livros. Quantos livros lhe deram os colegas?

17. A joana tinha 7 rebuçados. Deu alguns ao irmão e agora só tem 4. Quantos rebuçados deu ao irmão?

18. A Maria tem 2 iogurtes. Em cada iogurte ela gosta de por 4 colheres de açúcar. Quantas colheres de açúcar ela põe ao todo nos 2 iogurtes?

19. Na relva estavam alguns caracóis. Começou a chover e 2 caracóis foram embora. Ficaram lá 4. Quantos caracóis estavam na relva, antes de começar a chover?

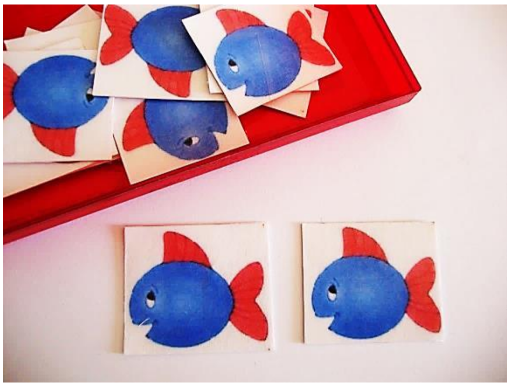
20. O Tiago tinha alguns morangos no prato. A mãe pôs-lhe mais 2 e ele ficou com 5. Quantos morangos tinha no início, antes da mãe lhe dar mais morangos?

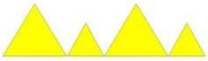
21. A Eva vai arrumar estas bonecas (15) em 3 caixas. Todas as caixas vão ficar com a mesma quantidade de bonecas. Quantas bonecas ficam em cada caixa?

22. A Maria tem 8 brincos, mas só 2 estão dentro da caixa dos brincos. Quantos brincos estão cá fora?

23. A Rita tem um casaco com 5 botões e o Pedro tem uma camisola com menos 3 botões do que o casaco da Rita. Quantos botões tem a camisola do Pedro?

24. O João tem 4 peixes no aquário. A Maria tem mais 2 do que tem o João. Quantos peixes tem a Maria?

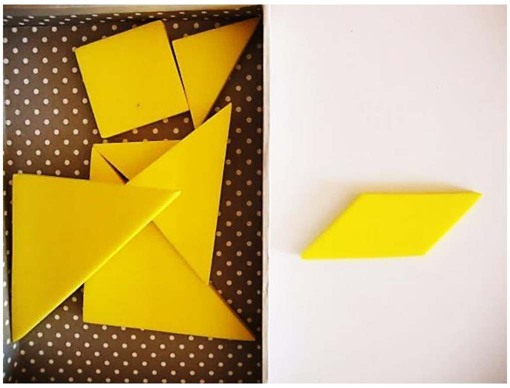


25. Completa a sequência atendendo ao tamanho 

26. No jardim estão 5 caracóis e 8 gafanhotos. Quantos gafanhotos há a mais do que caracóis?


27. O Rui tem 6 moedas. A Bela tem 2 moedas. Quantas moedas tem a Bela a menos do que o Rui?

28. Usando as peças do Tangram, faz um quadrado com 3 triângulos.

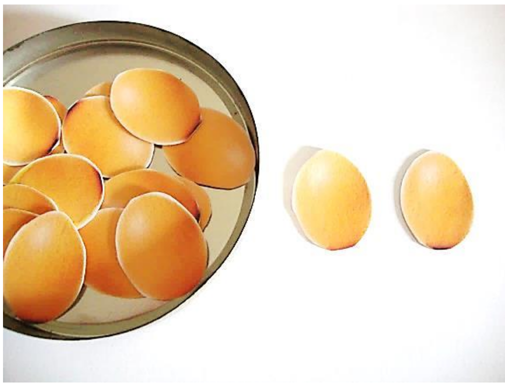


ANEXO 2B – PROBLEMAS APRESENTADOS NA INTERVENÇÃO E MATERIAIS DISPONIBILIZADOS

2B1 – PROBLEMAS APRESENTADOS NO GRUPO DE ESTRUTURAS ADITIVAS

1. A Joana tinha 4 bonecas, a mãe deu-lhe mais algumas e ela ficou com 6. Quantas bonecas lhe deu a mãe?

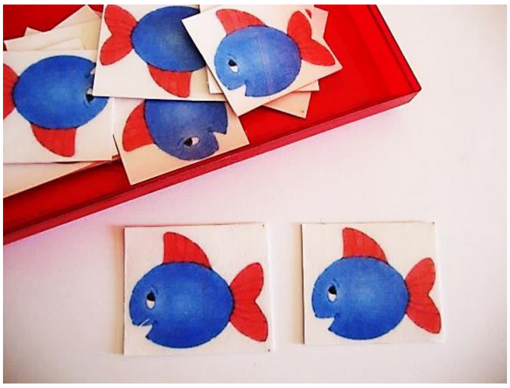
2. A Eva levava 9 ovos numa cesta, deixou cair a cesta e partiram-se alguns. Chegou a casa só com 3 ovos. Quantos ovos se partiram?



3. Na casinha das bonecas estavam algumas meninas a brincar e juntaram-se mais 3 meninas. Agora estão lá 5. Quantas meninas estavam a brincar na casinha das bonecas, no início?

4. A professora tinha alguns lápis, deu 6 aos meninos e ficou com 2. Quantos lápis tinha no início?

5. A Rita e o João foram à pesca e pescaram, ao todo, 7 peixes. A Rita pescou 4. Quantos peixes pescou o João?



6. Na oficina do senhor Manuel estão 8 rodas, 5 já estão arrumadas nas prateleiras. Quantas ainda estão por arrumar?

7. O Xico tinha 2 morangos num cesto, a avó deu-lhe mais alguns e ele ficou com 6. Quantos morangos lhe deu a avó?

8. Estavam 10 macacos numa árvore. Foram-se embora alguns e ficaram 3. Quantos macacos foram embora?

9. A Ana tinha alguns rebuçados no bolso. O Tiago deu-lhe mais 2 e ela ficou com 5. Quantos rebuçados tinha a Ana antes, no bolso?

10. A mãe tinha algumas meias no estendal a secar. Apanhou 2 que já estavam secas e deixou lá 5, que ainda estavam molhadas. Quantas meias havia no estendal, no início?

11. A Rita tem 8 morangos. Cinco estão numa taça. Quantos morangos estão na outra taça?

12. A Teresa e o Rui ganharam 9 rebuçados. A Teresa ganhou 6 rebuçados. Quantos rebuçados ganhou o Rui?

2B2 – PROBLEMAS APRESENTADOS NO GRUPO DE ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

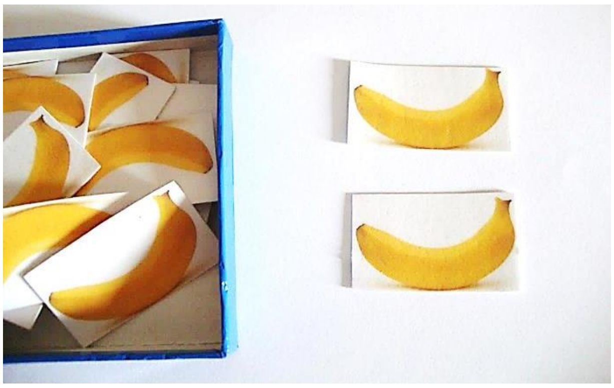
1. O João tem 8 bolachas para colocar em cestos. Cada cesto vai ter 2 bolachas. De quantos cestos precisa o João?

2. A professora tem 12 meninos na sua turma e ela quer sentar os meninos em grupos, nas mesas. Cada mesa vai ter 4 meninos. De quantas mesas precisa?

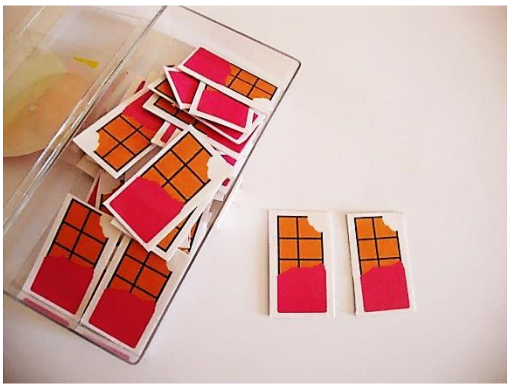
3. O Alexandre foi à garagem do tio e encontrou 3 bicicletas sem rodas. Cada bicicleta terá que ter 2 rodas. Quantas rodas são necessárias para compor as bicicletas todas?

4. A Joana viu que no lago estavam 2 rãs. Cada rã tem 4 patas. Quantas patas contou a Joana?

5. O macaco Xico escondeu 12 bananas nos 3 bolsos das suas calças. Um bolso não pode ter mais bananas que o outro. Quantas bananas escondeu em cada bolso?



6. A Sara tem 10 chocolates para dar a 5 meninos. Quantos chocolates vai receber cada menino, se todos receberem a mesma quantidade?



7. O Luís tem uma coleção de gafanhotos. Ele tem 12 gafanhotos colocados em caixas. Cada caixa tem 3 gafanhotos. Quantas caixas têm gafanhotos?

8. A professora levou 10 meninos para andar nos carrinhos da Feira. Em cada carrinho vão andar 2 meninos. Quantos carrinhos vão ter meninos?

9. A Rita quer comprar 3 bonecas. Cada boneca custa 2 moedas. Quantas moedas custam, ao todo, as 3 bonecas?

10. O Luís tem 3 caixas de lápis. Cada caixa tem 4 lápis. Quantos lápis tem ao todo o Luís?

11. O Tomás quer colocar 8 botões em 4 camisas. Uma camisa não pode ter mais botões que a outra. Quantos botões vai ter cada camisa?

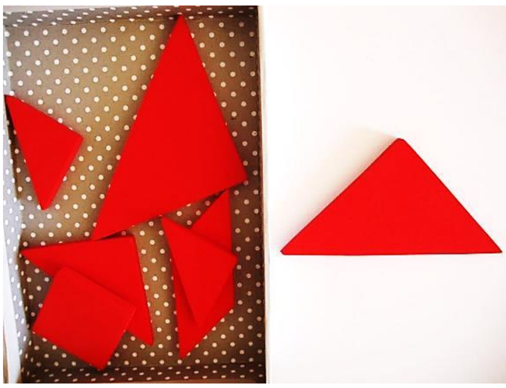
12. A Rita tem 6 morangos para colocar em 3 bolos. Um bolo não pode ter mais morangos que outro. Quantos morangos a Rita vai colocar em cada bolo?

2B3 – PROBLEMAS APRESENTADOS NO GRUPO DE CONTROLO

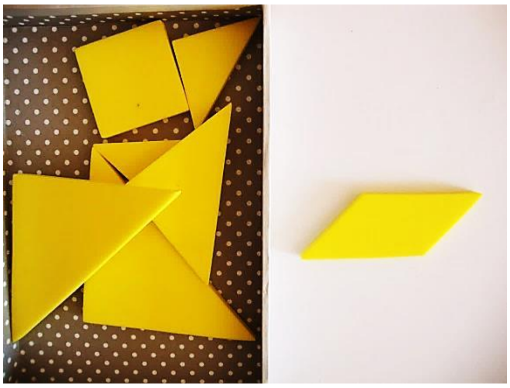
1. Continua o friso apresentado

2. Descobre o intruso

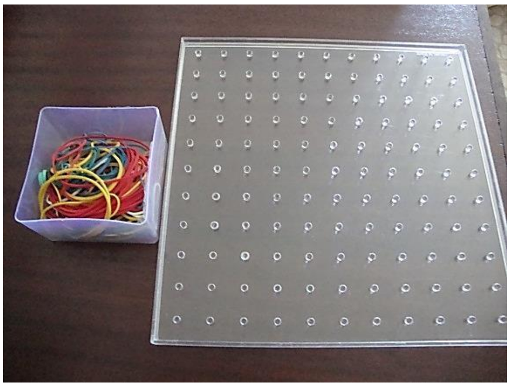
3. Descobre 3 peças do Tangram que cubram o triângulo grande



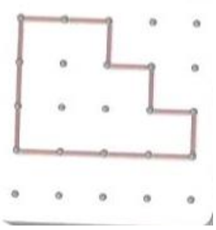
4. Cobre a casa com as peças do Tangram

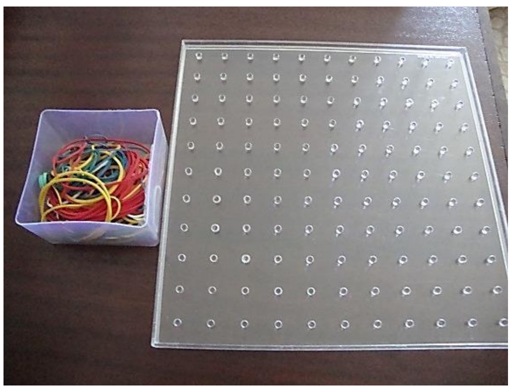


5. Constrói um quadrado com 0 pinos no interior

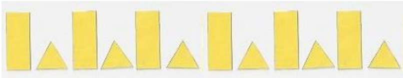


6. Constrói no Geoplano a figura que é apresentada no papel

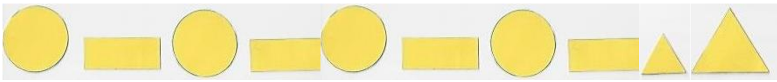




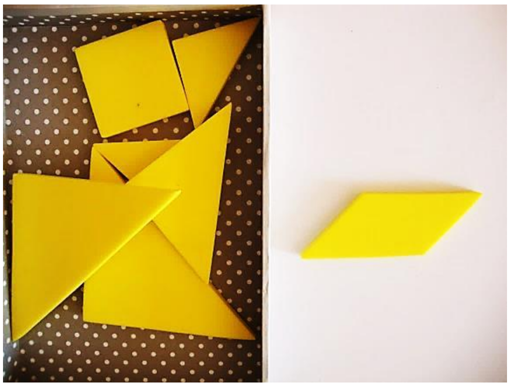
7. Com estas peças faz um padrão diferente do apresentado



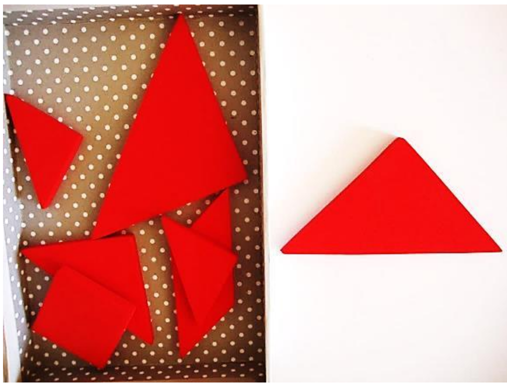
8. Descobre os dois intrusos



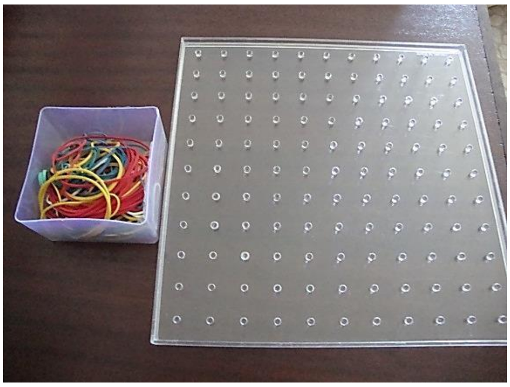
9. Com 2 triângulos cobre o paralelogramo



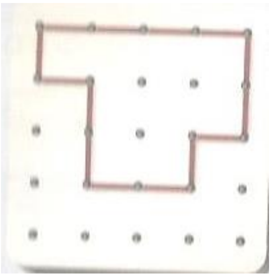
10. Com 3 triângulos e 1 quadrado, constrói um novo quadrado

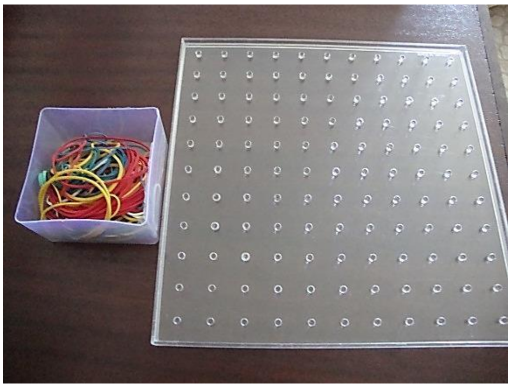


11. Constrói um quadrado com 4 pinos no meio



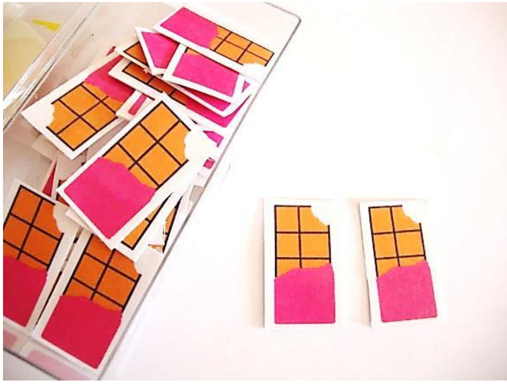
12. Constrói no Geoplano a figura apresentada no papel





ANEXO 2C – PROBLEMAS APRESENTADOS NO PÓS-TESTE E MATERIAIS DISPONIBILIZADOS

1. A avó tem estes chocolates (15) para dar aos netos. Cada neto vai receber 3 chocolates. A quantos netos a avó vai dar chocolates?



2. No jardim estavam 5 cães. Chegaram mais alguns e agora já lá estão 8. Quantos cães se vieram juntar aos que já la estavam?

3. O Paulo tinha 5 livros, mas rasgaram-se alguns e agora ele só tem 3 livros. Quantos livros se rasgaram?

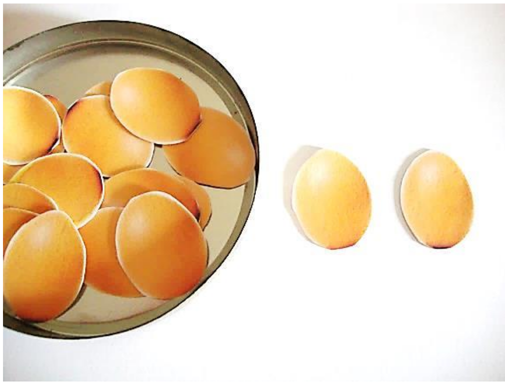
4. A Joana tem 3 coelhos. Cada coelho come 2 bolinhos de cenoura. Quantos bolinhos de cenoura comem, ao todo, os 3 coelhos?

5. A Maria tinha algumas meias na gaveta. A mãe tirou 6 que estavam rotas e agora só lá tem 2. Quantas meias tinha a Maria na gaveta, antes da mãe tirar?

6. O Pedro levava alguns morangos na cesta para dar à mãe. No jardim apanhou mais 3. Ele deu 7 morangos à mãe. Quantos morangos levava na cesta no início, antes de apanhar mais no jardim?

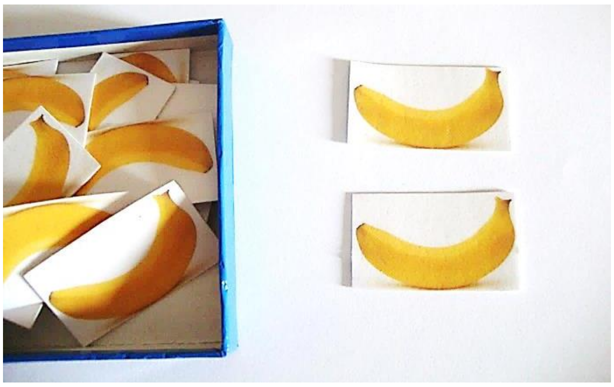
7. O Tiago vai dar estas moedas (12) a 3 meninos, um menino não vai receber mais do que os outros. Quantas moedas vai receber cada menino?

8. A galinha da Rita pôs 7 ovos. Quatro já estão no cesto e os outros ainda estão no ninho. Quantos ainda estão no ninho?



9. O Tiago tem 3 rebuçados. A Inês tem mais 2 do que o Tiago. Quantos rebuçados tem a Inês?

10. A Ana tem 5 bananas na cesta. A Sofia tem menos 2 do que a Ana. Quantas bananas tem a Sofia?

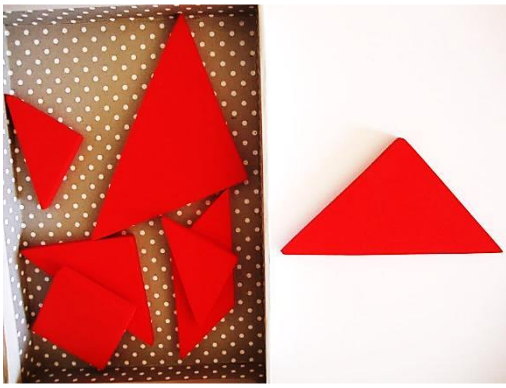


11. Continua o friso apresentado:

12. Na mesa estão 7 pratos e 4 colheres. Quantos pratos estão a mais do que colheres?

13. No jardim estão 5 caracóis e 2 coelhos. Quantos coelhos estão a menos do que caracóis?


14. Identifica no Tangram as figuras que têm 3 lados.



15. A mãe tem estas bolachas (12) para dar aos seus filhos. Cada filho vai receber 4 bolachas. A quantos filhos a mãe vai dar bolachas?

16. O João tinha 3 moedas. Fez anos e os primos deram-lhe mais algumas. Agora o João já tem 5 moedas. Quantas moedas lhe deram os primos?

17. A Mara tinha 7 bolachas. Deu algumas ao irmão e agora só tem 4. Quantas bolachas deu ao irmão?

18. A Maria tem 2 bolos. Em cada bolo ela pôs 4 morangos a enfeitar. Quantas morangos ela pôs ao todo nos 2 bolos?


19. No jardim estavam alguns coelhos. Começou a chover e 2 foram embora. Ficaram lá 4. Quantos coelhos estavam no jardim, antes de começar a chover?

20. O Tiago tinha alguns iogurtes na mochila. A mãe pôs-lhe mais 2 e ele ficou com 5. Quantos iogurtes tinha no início?

21. Na oficina, o Rui vai arrumar estas rodas (15) em 3 caixas. Uma caixa não pode ter mais rodas que as outras. Quantas rodas ficam em cada caixa?

22. A Maria tem 8 bonecas, mas só 2 estão arrumadas dentro da caixa. Quantas estão cá fora?

23. O João tem 4 cachorros. A Maria tem mais 2 do que tem o João. Quantos cachorros tem a Maria?

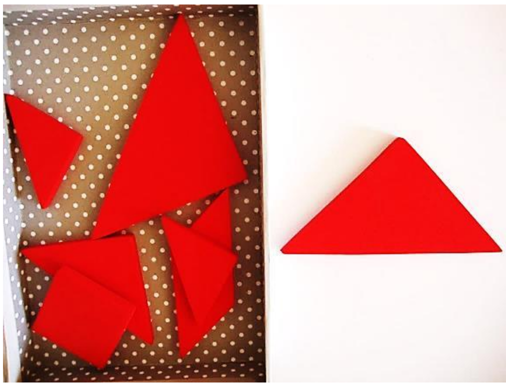
24. A Rita tem 5 bolos, o Pedro tem menos 3 bolos do que a Rita. Quantos bolos tem o Pedro?

25. Completa a sequência atendendo à forma:

26. A Ana tem 5 camisolas e 8 saias. Quantas saias estão a mais do que camisolas?

27. O Pedro tem 6 bolachas e a Bela tem 2 bolachas. Quantas bolachas tem a Bela a menos do que o Pedro?

28. Usando as peças do Tangram (2 triângulos pequenos e 1 médio), faz um novo triângulo.



ANEXO 3 – AUTORIZAÇÃO DE PARTICIPAÇÃO PELOS ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO

Universidade do Minho
Instituto de Educação
Departamento de Estudos Integrados de Literacia, Didáctica e Supervisão

DOUTORAMENTO EM CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO

“A compreensão de Estruturas Aditivas e Estruturas Multiplicativas de raciocínio por crianças em educação Pré-escolar”

Estudos realizados por vários investigadores estrangeiros com crianças de diferentes países apontam para a facilidade com que as crianças de 5 e 6 anos resolvem problemas simples que envolvem os raciocínios aditivos e multiplicativos. Em alguns casos esses estudos chegaram a ser realizados com crianças mais novas, de 4 anos, tendo sido obtido alguma taxa de sucesso. Em Portugal não se registam estudos realizados neste âmbito, pelo que se desconhece a realidade do desempenho de crianças portuguesas do pré-escolar.

Esta investigação realiza-se no âmbito do Doutoramento em Ciências da Educação, da Universidade do Minho, e centra-se na compreensão de estruturas aditivas e multiplicativas em crianças da educação pré-escolar de Portugal, com a orientação da Dr.ª Ema Mamede, do Instituto da Educação da Universidade do Minho.

O público-alvo são crianças dos 4 aos 6 anos a frequentar a educação pré-escolar da rede pública.

Metodologia: pretendemos apresentar às crianças tarefas que envolvem o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo.

A câmara de vídeo será o instrumento privilegiado na recolha de informação, sendo garantida a confidencialidade da identificação da criança, pelo que **apenas serão filmadas as mãos das crianças na resolução das tarefas.** A informação obtida será exclusivamente utilizada para fins de investigação científica, estando a confidencialidade dos dados garantida.

Solicita-se aos pais/encarregados de educação o preenchimento da ficha, autorizando a participação do seu educando neste estudo.

Gratas pela vossa colaboração.

Para qualquer esclarecimento adicional, por favor contacte: **Florbela Soutinho (936666264)**

✂ ....

AUTORIZAÇÃO

Eu, encarregado de educação de ____, do Jardim de Infância de ______________________, declaro que autorizo o meu educando a participar no estudo *“A compreensão de Estruturas Aditivas e Estruturas Multiplicativas de raciocínio por crianças em educação Pré-escolar”*, realizado no âmbito do Doutoramento em Ciências da Educação, da Universidade do Minho.

O encarregado de educação

____

_____________________, ________ de _________________ de _________