

DIFICULDADES DE ALUNOS DO 12º ANO NAS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL O Contributo dos Manuais Escolares

MARIA GRACELINA BOAVENTURA
gracelina@megamail.pt
Escola Secundária Alcaides de Faria

JOSÉ ANTÓNIO FERNANDES
jfernandes@iep.uminho.pt
Universidade do Minho

Resumo

O presente estudo centrou-se na identificação das dificuldades de alunos do 12º ano nos conceitos estatísticos de média, mediana e moda. Posteriormente, face às situações de dificuldade identificadas, estudou-se em que medida essas situações eram exploradas nos manuais escolares que os alunos tinham usado no 10º ano.

No estudo participaram 181 alunos do 12º ano de três escolas secundárias de uma cidade e, para além dos manuais escolares dos alunos, foi usado um questionário como instrumento de recolha de dados.

Em termos de resultados, verificaram-se dificuldades e erros dos alunos em várias situações onde os conceitos de média, mediana e moda estavam envolvidos. O conceito de mediana foi aquele que ofereceu mais dificuldades, seguindo-se a média e, finalmente, a moda.

Em relação aos manuais escolares, verificou-se que não eram tratadas ou eram exploradas apenas superficialmente as situações que envolviam o estabelecimento de uma série de dados a partir de estatísticas dadas, a impossibilidade de aplicar as estatísticas a certos atributos, as propriedades da média e da mediana, em conjuntos genéricos de dados, e o significado das estatísticas e a sua localização num gráfico.

Introdução

Nas sociedades actuais, a grande quantidade de informação com que lidamos e a necessidade do seu tratamento e análise para tomar decisões esclarecidas realça a importância que a Estatística vem tendo nos nossos dias.

Mais recentemente tem-se enfatizado o conceito de ‘literacia estatística’ para destacar competências necessárias ao exercício de uma cidadania esclarecida, participada e crítica. Branco e Martins (2002), citando Gal, referem quatro componentes importantes da literacia estatística: a) a necessidade de trabalhar com dados, salientando a sua origem e produção; b) a familiaridade com os termos e ideias básicas de Estatística Descritiva, permitindo controlar usos abusivos ou distorcidos da Estatística; c) a compreensão de noções básicas de probabilidade, permitindo avaliar julgamentos intuitivos envolvendo a incerteza; e d) o processo inferencial para a tomada de decisões estatísticas, destacando a aplicação das Probabilidades à Estatística.

Em geral, os programas escolares têm também sofrido alterações no sentido de responderem às novas exigências no domínio da Estatística. É assim que, em muitos países, este tema faz parte dos programas da disciplina de Matemática dos ensinos básico e secundário. No caso do nosso país, fazendo a leitura do programa de Matemática do 10º ano de escolaridade (Ministério da Educação, 1997), verificamos que as directrizes vão de encontro a uma proposta de ensino aprendizagem que contemple, de forma sistemática, o aprofundamento e prolongamento de conhecimentos e competências adquiridos ao longo da escolaridade básica. O estudo da estatística reveste-se de grande importância, pois pretende contribuir para melhorar a capacidade de intervenção dos alunos como cidadãos, dotando-os de ferramentas apropriadas para avaliar afirmações de carácter estatístico.

É reconhecido que o uso adequado da Estatística permite fazer a ponte entre o saber matemático adquirido na escola e a utilização da matemática no dia-a-dia. No entanto, “no que se refere à Estatística e às Probabilidades, e apesar de se tratar de uma área bastante importante, a identificação dos conhecimentos, capacidades, dificuldades e estratégias de raciocínio dos alunos está essencialmente por fazer” (Ponte, Matos & Abrantes, 1998, p.171).

Por outro lado, a não exigência de pré-requisitos importantes para a aprendizagem dos conceitos básicos de estatística implica que alguns professores vejam esta temática como não apresentando grandes dificuldades de aprendizagem aos alunos (Sousa, 2002). Contudo, vários estudos de investigação têm revelado várias dificuldades e erros dos alunos na aprendizagem da Estatística, especificamente no âmbito das medidas de tendência central.

Dificuldades de alunos do 12.º Ano nas medidas de tendência central

Pollatsek, Lima e Well (1981) observaram dificuldades de cálculo da média ponderada em alunos universitários. Embora estes alunos possuíssem as competências de cálculo necessárias, a maioria calculou a média aritmética das duas médias dadas, não considerando os pesos diferentes de cada uma. Em consequência, estes autores destacam a insuficiência da competência computacional e advogam a necessidade de lidar com este conceito a um nível conceptual. Dificuldades semelhantes foram observadas por Barros e Fernandes (2001) em cerca de 30% dos estudantes portugueses do ensino superior, candidatos a futuros professores de Matemática e Ciências do 2º ciclo do ensino básico, que participaram num estudo.

Também Mevarech (1983) observou esta e outras dificuldades relacionadas com o conceito de média, verificando que os estudantes universitários aplicaram propriedades da estrutura de grupo aditivo às várias médias envolvidas nos problemas, como se de quaisquer números reais se tratasse. Especificamente, aproximadamente 65% dos estudantes usaram a lei do fecho (propriedade estudada por Pollatsek *et al.*, 1981), cerca de 80% aplicaram a propriedade associativa no cálculo da média total de três grupos, 60% não compreenderam a não existência de elemento inverso no cálculo da média aritmética e aproximadamente 30% consideraram o 0 (zero) como elemento neutro, isto é, que o valor da média não se altera quando se acrescenta o valor zero ao conjunto de dados.

Embora a maioria dos alunos evidenciasse conhecer o algoritmo da média, apenas 50% dos alunos do 6º ano de escolaridade que participaram num estudo conduzido por Cai (1995) foram capazes de determinar um valor desconhecido num pequeno conjunto de dados, apresentado sob a forma de pictograma, para se obter um dado valor da média. Este resultado é ainda mais problemático se considerarmos que dos alunos que encontraram o valor desconhecido, apenas 59% o fez através da utilização compreensiva do algoritmo (multiplicar o valor da média pelo número total de dados e subtrair a soma dos valores dados), e, destes, ainda 35% recorreram a uma estratégia de tentativa e erro.

Relativamente aos conceitos de média, moda e mediana, Carvalho (1996) analisou as realizações de dois grupos de alunos do 7º ano, cada um numa tarefa distinta. Num dos grupos, os alunos deviam organizar os dados numa tabela de frequências e, no outro, os dados foram apresentados através de um gráfico. No caso da construção da tabela, os alunos não tiveram dificuldades em determinar as frequências absolutas, mas apenas 21% dos alunos calcularam correctamente as frequências relativas. Neste caso, os erros dos alunos

resultaram de considerar no denominador da fracção a frequência absoluta em vez do efectivo total de dados. Quanto às medidas de tendência central, no conjunto das duas tarefas, determinaram correctamente a moda 57% dos alunos, a média 20% dos alunos e a mediana 12% dos alunos. Das duas tarefas, foi na tarefa estabelecida através do gráfico que os alunos revelaram mais dificuldades e foi também nessa tarefa que mais alunos tentaram responder.

Em relação às dificuldades dos alunos, Carvalho (1996) salienta que, na tarefa em que se partiu dos dados, eles não tiveram em conta a frequência absoluta de cada valor no cálculo da mediana, quando usaram a tabela construída antes, ou não ordenaram os dados antes da sua localização. Na tarefa em que se partiu do gráfico, os alunos não consideraram as frequências absolutas dos diferentes valores no cálculo da média e adicionaram as frequências absolutas e dividiram por 2 no cálculo da mediana. No caso da moda, em que se obteve o maior número de respostas correctas, a autora salienta a facilidade com que ela é visualizada no gráfico de barras, correspondendo ao valor da 'barra mais alta'.

Numa tarefa sobre as preferências de clube desportivo, cuja distribuição era apresentada sob a forma de gráfico circular, Barros e Fernandes (2001) verificaram que a maioria dos inquiridos identificou correctamente que a moda era o Porto e 22% dos alunos identificaram a moda com a frequência relativa. Já no que concerne ao cálculo da média, tratando-se de um atributo qualitativo, apenas 38% dos alunos responderam correctamente que não era possível calcular a média, tendo uma percentagem considerável (57%) calculado a média através do quociente entre a soma das frequências (relativas ou absolutas) e o número de valores que a variável tomava.

Strauss e Bichler (1988) conduziram uma investigação, com alunos dos 8 aos 14 anos, para estudarem as suas dificuldades na utilização das seguintes propriedades da média: a) a média situa-se entre os valores extremos da distribuição, b) a soma dos desvios dos dados em relação à média é zero, c) a média é influenciada pelo valor de cada um dos dados, d) a média não é necessariamente igual a um dos valores do conjunto dos dados, e) o valor da média pode não ser inteiro, f) os dados com valor nulo influenciam o valor da média e g) a média é um 'representante' do conjunto de dados a que diz respeito. Os autores observaram uma melhoria sistemática da compreensão com a idade, mas para uma mesma idade o grau de compreensão das propriedades foi variável, tendo as propriedades a), c) e d) oferecido menos dificuldades. Além disso, a análise dos raciocínios dos alunos mostrou que o diferente grau de complexidade das propriedades interferiu com as dificuldades dos alunos e a aplicação das propriedades a conjuntos de dados discretos ou contínuos esteve na origem de

dois níveis de complexidade distintos, tendo-se revelado mais difícil para os alunos os dados de tipo contínuo.

Eisenbach (citado em Batanero, 2000a) questionou estudantes universitários de um curso introdutório de estatística sobre o significado da afirmação ‘Que quer dizer o salário médio de um empregado é de 3600 dólares?’, tendo obtido respostas do tipo: ‘a maioria dos empregados ganha cerca de 3600 dólares’, ‘é o salário central’ e ‘os outros trabalhadores ganham mais ou menos 3600 dólares’. Estas respostas mostram a confusão terminológica entre as palavras ‘média’, ‘mediana’ e ‘moda’. Numa perspectiva semelhante, Dreyfus e Levy (1996), num estudo com alunos de 11 e 12 anos, identificaram algumas concepções erradas a respeito da média. Uma das concepções frequentes manifestou-se ao considerar a média como o valor central, denotando uma confusão da média com a mediana. Outra concepção, embora menos frequente, consistiu em determinar a média adicionando os valores da variável e dividindo por dois.

Considerando, por um lado, a importância desta temática e, por outro, as dificuldades e erros que os alunos cometem em conceitos elementares de estatística, investigaram-se neste estudo dificuldades e erros de alunos do ensino secundário, concretamente 12º ano, nas medidas de tendência central, até porque se trata de alunos de uma faixa etária menos estudada (Batanero, Godino, Vallencilos, Green & Holmes, 1994).

Influência dos manuais escolares no ensino

Os manuais escolares, “ao funcionarem como elemento estruturador dos conteúdos de determinada disciplina e dos processos da sua transmissão (...), são um importante instrumento de regulação da prática pedagógica” (Carvalho, 1999, p.179). Estes instrumentos de trabalho desempenham “uma função fortemente reguladora das práticas institucionais e sociais na sala de aula” (Vieira, Marques & Moreira, 1999, p.527).

O modo de organização e as propostas de trabalho oferecidas pelo manual podem ser mais ou menos valorizadas, mas acredita-se na necessidade e utilidade desse instrumento no trabalho de professores e alunos. Neste sentido, uma análise criteriosa permite “traçar planos de intervenção para além do manual, incluindo a seleção ou elaboração de outros materiais que expandem, complementam ou, se necessário, contrariam as orientações nele propostas” (Vieira, Marques & Moreira, p.539).

É convicção muito generalizada que o manual escolar tem uma importância considerável no trabalho do professor (incluindo o de Matemática) e

talvez, em alguns casos, se verifique uma excessiva dependência do manual. Esta ideia é também sustentada pelos resultados de uma estudo sobre a utilização do manual escolar pelo professor de Matemática, onde se concluiu que “este instrumento, tudo, indica, continua a ter um papel fundamental no processo de ensino/aprendizagem – não obstante prolifere cada vez mais a oferta de outras alternativas nos mais variados suportes” (Cabrita, 1999, p.160).

A diversidade de materiais é também preconizada por Brito (1999) e, no caso dos livros de texto, deve ser feita uma selecção cuidada (Ortiz, 2002), pois, no caso do Estatística, embora existam livros de texto excelentes, a investigação didáctica começa a revelar que alguns erros conceptuais e uma pedagogia inadequada acontecem com uma frequência maior do que seria desejável (Cobo & Ortiz, citados em Batanero, 2000b).

Portanto, partindo do pressuposto de que os manuais escolares condicionam fortemente o ensino dos professores, como é sugerido na literatura, e, conseqüentemente, a aprendizagem dos alunos, neste estudo procurou-se conhecer em que medida as situações estatísticas que apresentam dificuldades aos alunos são ou não tratadas nos manuais escolares que os alunos tinham usado no 10º ano de escolaridade.

Metodologia

Neste estudo estabeleceram-se duas questões de investigação: ‘Que tipo de erros cometem os alunos do ensino secundário em situações estatísticas, designadamente envolvendo as medidas de tendência central?’, estudando-se o tipo de resposta dada pelos alunos (correcta, errada e não resposta) e reflectindo-se sobre a origem e o porquê desses erros; e ‘As situações estatísticas estudadas são tratadas nos manuais escolares?’, na tentativa de encontrar uma possível explicação para os erros e dificuldades dos alunos nas suas respostas.

O estudo teve a participação de 181 alunos do 12º ano de escolaridade, com idades entre os 16 e os 23 anos (média de idades de 17.8 anos) e constituindo sete turmas pertencentes a três escolas secundárias.

A recolha de dados foi feita em aulas do horário escolar dos alunos através de um questionário constituído por 9 questões estabelecidas por referência a textos de vários autores, referidos anteriormente. Os questionários foram administrados em cada uma das turmas e os alunos dispuseram de um tempo máximo de 50 minutos para responderem, o que se revelou um tempo suficiente.

As nove questões incluídas no questionário envolviam os seguintes conteúdos e contextos: 1) determinar a média, mediana e moda das notas obtidas

por um aluno do 11º ano em diferentes disciplinas; 2) calcular a média ponderada de duas médias dadas – as médias das alturas dos rapazes e das raparigas que viajavam num autocarro; 3) determinar as idades de quatro estudantes a partir do conhecimento da média, mediana e moda; 4) determinar, se possível, a média, mediana e moda das bebidas preferidas pelos alunos de uma turma do 12º ano, usando um gráfico de barras para representar os dados; 5) uma vez dados a média e os aumentos dos vencimentos dos trabalhadores de uma empresa (de um valor constante e de uma percentagem), calcular os novos valores da média; 6) estudar a variação da mediana (diminui, aumenta ou mantém-se) com a introdução de um novo dado num contexto genérico; 7) verificar a veracidade ou falsidade de propriedades da média num contexto genérico; 8) localizar a média, mediana e moda em três histogramas (um assimétrico à direita, outro assimétrico à esquerda e o terceiro simétrico) representativos das alturas de 50 alunos de uma turma; 9) descrever o significado da média, mediana e moda no contexto dos salários de uma empresa.

Finalmente, procedeu-se à análise dos dados, codificando as respostas em correctas e erradas e categorizando os raciocínios subjacentes a essas respostas.

Em relação aos manuais escolares, recorde-se que os alunos tinham estudado os conteúdos incluídos na investigação, essencialmente, no 10º ano. Assim, procedeu-se a uma análise descritiva dos manuais escolares, usados pelos alunos nesse ano de escolaridade, centrada nas situações estatísticas em que eles tinham revelado maiores dificuldades.

Erros e dificuldades dos alunos nas medidas de tendência central

Aqui apresentam-se as dificuldades e erros dos alunos de 12º ano nas nove questões que lhes foram apresentadas, todas elas envolvendo medidas de tendência central.

Questão 1

As notas obtidas pelo Carlos nas diferentes disciplinas, no 11º ano de escolaridade, foram as seguintes: 16, 12, 11, 16, 16, 12, 15.

Determine os valores da a) média, b) mediana e c) moda das notas do Carlos.

Nesta tarefa, envolvendo dados simples, obtiveram-se percentagens de respostas correctas de 97.8% para a média, 51.9% para a mediana e 87.3%

para a moda. Assim, comparativamente com os conceitos de média e de moda, as dificuldades dos alunos foram muito mais pronunciadas no conceito de mediana. Neste caso, 28.2% dos alunos apresentaram respostas erradas e 19.9% não responderam. De entre os erros dos alunos, destaca-se a mediana como valor central da sucessão de dados não ordenada (valor 16), a semi-soma de dois valores do conjunto de dados (e.g., $(11 + 16)/2 = 13.5$; $(12 + 15)/2 = 13.5$, tomar a média ou a moda pela mediana e o valor central de uma amostra ordenada e alterada relativamente àquela que foi dada (e.g. 11, 12, 15, 16, 16, 16 tem mediana 15.5; 11, 12, 13, 14, 15, 16 tem por mediana o valor central entre 13 e 14).

Questão 2

Num autocarro viajam 25 jovens, sendo 10 rapazes e 15 raparigas. Das suas alturas, em centímetros, sabe-se que a média das alturas dos rapazes é 170 centímetros e a média das alturas das raparigas é 160 centímetros.

Qual é a média das alturas dos 25 jovens que viajam no autocarro?

Nesta questão, o sucesso dos alunos diminuiu drasticamente para 44.2%, tendo 51.9% respondido erradamente e 3.9% não responderam. Agora, para além de outros erros pouco frequentes, quase todas as respostas erradas resultaram do cálculo da média simples das duas médias dadas, isto é: $média = (170 + 160) / 2 = 165$. É exactamente este erro que é conhecido na literatura pela ‘lei do fecho’.

Questão 3

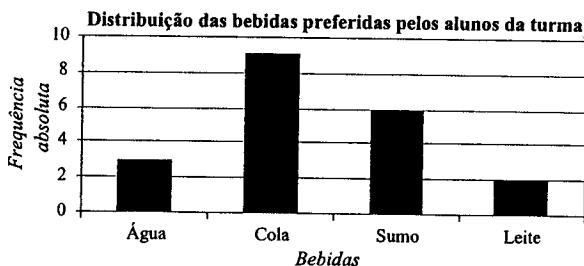
Acerca das idades, em anos, de quatro estudantes sabe-se que a média é 17 anos, a mediana é 16 anos e a moda é 15 anos.

Quais são as idades dos quatro estudantes?

Os alunos sentiram muitas dificuldades em definir um conjunto de dados que tivesse por média, mediana e moda certos valores dados. Destes, apenas 18.2% apresentaram a resposta correcta, 57.5% apresentaram uma resposta errada e 24.3% não responderam. Em termos de dificuldades, a grande maioria dos alunos tiveram apenas em conta a média e a moda, ignorando a mediana (e.g., 15, 15, 16, 22; 15, 15, 18, 20; 15, 15, 19, 19), ou tentaram estabelecer seqüências de dados tendo em consideração algumas das estatísticas dadas (e.g., 16, 16, 18, 18 verifica apenas a média; 15, 15, 17, 19 verifica a mediana e a moda).

Questão 4

A distribuição das bebidas preferidas pelos alunos de uma turma do 12º ano, de uma escola secundária, é definida pelo gráfico seguinte:



Determine, se for possível, os valores da média, mediana e moda das bebidas preferidas pelos alunos da turma.

Nesta questão, os alunos revelaram muitas dificuldades acerca da possibilidade ou impossibilidade de cálculo da média, da mediana e da moda num atributo qualitativo. Nesta situação, apenas 11.0% e 12.7% afirmaram correctamente não ser possível determinar valores para a média e para a mediana, respectivamente, e apenas 48.1% identificaram correctamente o valor da moda. Em termos da média, 63.0% responderam erradamente e 26.0% não responderam. Em relação às respostas erradas, a grande maioria determinou um valor numérico para a média a partir das frequências (e.g. $Média = 0.15 + 0.45 + 0.3 + 0.1$; $Média = 3 + 9 + 6 + 2$; $X = 9/4 = 2.25$). Alguns alunos indicaram valores numéricos para a média não acompanhados de qualquer justificação, outros indicaram uma bebida para média (e.g. *Cola*, *Leite* e *Sumo*) ou apresentaram uma justificação não adequada para a impossibilidade de determinação da média (*Não é possível porque não temos o número de alunos*; *Os dados fornecidos não são suficientes para determinar a média*).

No caso da mediana, a resposta errada foi observada com uma percentagem de 39.8% e não responderam 47.5% dos alunos. Em termos de erros, os alunos apresentaram um valor numérico recorrendo, de algum modo, às frequências (e.g., $(6 + 3) / 2 = 4.5$. R. *A mediana é 5 alunos*; $(9 + 6) / 2 = 7.5$; 5, 6, 7, 8, 9 a mediana é 7). Foram também apresentadas para mediana uma ou duas bebidas (e.g., *Sumo*, *Água* e *Água e Sumo*), foram efectuados cálculos com valores em que não se percebe a sua relação com os dados (e.g., $(22.5 + 15 + 7.5 + 5) / 4 = 12.5$ e foram apresentadas justificações não adequadas para a não existência de mediana (e.g., *Não é possível calcular porque os valores não são exactos e estão em frequência absoluta*; *Não é possível pois não é uma distribuição normal*).

Relativamente à moda, 24.3% dos alunos responderam erradamente e 27.6% não responderam. Em termos de erros, mais frequentemente os alunos indicaram o valor 9 para a moda, o qual é a frequência absoluta da bebida preferida por mais alunos, indicaram também para moda um valor numérico que não tem relação com a bebida mais preferida (e.g., *A moda é 1 e 2; A moda é 90%*) e foi justificada a não existência de moda de forma não adequada (e.g., *Não podemos responder pois a frequência absoluta de cada bebida é diferente; Não é possível pois não é uma distribuição normal*).

Questão 5

A média dos vencimentos dos 20 trabalhadores de uma empresa é de 750 euros.

- Sabendo que o vencimento de cada um dos trabalhadores foi aumentado em 25 euros, qual é a média dos novos vencimentos dos 20 trabalhadores?
- Sabendo que o vencimento de cada um dos trabalhadores foi aumentado em 5%, qual é a média dos novos vencimentos dos 20 trabalhadores?

Nesta questão pretendeu-se avaliar alterações da média a partir de alterações dos dados. Na alínea a) adicionou-se um valor constante a cada um dos dados, tendo 59.7% dos alunos dado a resposta correcta, 27.1% responderam erradamente e 13.2% não responderam. Em termos de erros, a maioria dos alunos, através de cálculos, chegou ao valor 1250 euros (e.g. $750 + 25 \times 20 = 1250$; $750/20 + 25 = 62.5$ e $62.5 \times 20 = 1250$ *média dos novos vencimentos*) e foram utilizadas outras fórmulas para o cálculo da nova média, obtendo-se um valor superior (e.g., $(750 \times 2 + 25 \times 20) / 2 = 1000$; $(750 \times 25 + 25 \times 20) / 20 = 962.5$; $(750 \times 25) / 20 = 937.5$) ou inferior à média dos vencimentos sem aumento (e.g., $(750 + 25) / 20 = 38.75$; $(20 \times 25) / 750 = 0.67$).

Na alínea b), cada dado foi aumentado em 5%, tendo 58.0% dos alunos respondido correctamente, 19.3% responderam erradamente e 22.7% não responderam. Em termos de erros, observou-se uma grande dispersão de respostas, englobando erros de cálculo e/ou de leitura de dados do enunciado, desconhecimento de um processo adequado, dificuldades em trabalhar com percentagens, ausência de sentido crítico face ao resultado encontrado e a crença de que a média se mantém quando os vencimentos são aumentados (e.g., $750 + 5 = 780$ euros; $(750 \times 5) / 10 = 35.50$; $750 \times 5\% = 750.05$ euros; *A média mantém-se*).

Em ambas as alíneas salienta-se a ausência de sentido crítico por parte dos alunos que aceitaram como resposta um valor para a média inferior ao valor da média dada.

Questão 6

Considere a mediana de um conjunto de 20 dados, todos diferentes. O valor da mediana diminui, aumenta ou mantém-se quando:

- a) Se acrescenta um dado inferior a todos os outros?
 Diminuiu Aumenta Mantém-se
- b) Se acrescenta um dado com o valor da mediana?
 Diminuiu Aumenta Mantém-se
- c) Se acrescenta um dado com valor superior ao da mediana?
 Diminuiu Aumenta Mantém-se
- d) Se acrescentam dois dados, um dado inferior a todos os outros e outro superior a todos os outros?
 Diminuiu Aumenta Mantém-se

Em relação às várias propriedades da mediana consideradas, observaram-se as seguintes percentagens de sucesso: 65.7% na alínea a), 72.9% na alínea b), 70.7% na alínea c) e 82.3% na alínea d). Verifica-se, assim, que as dificuldades dos alunos foram um pouco superiores no caso de se acrescentar um valor inferior a todos os outros, um dado igual à mediana ou um valor superior à mediana.

Questão 7

Relativamente a cada uma das afirmações, envolvendo o conceito de média, diga se é verdadeira ou falsa.

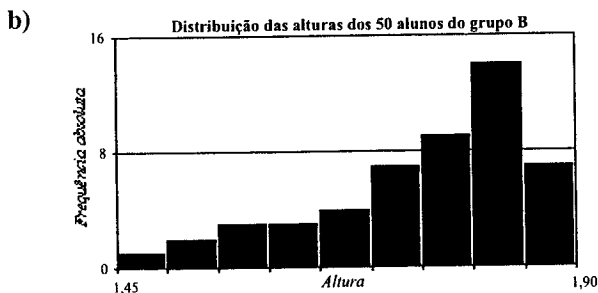
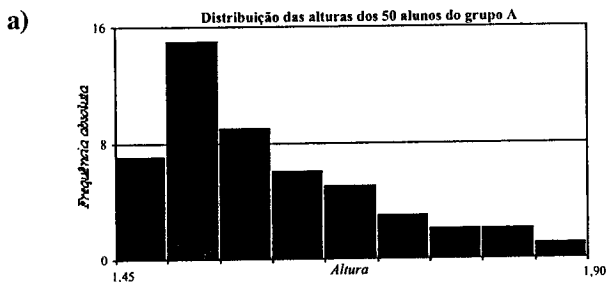
- a) A média de um conjunto de dados nunca é igual a um dos dados.
 Verdadeiro Falso
- b) A média de um conjunto de dados é sempre um valor compreendido entre o menor e o maior dos dados.
 Verdadeiro Falso
- c) Se acrescentarmos o valor 0 (zero) ao conjunto de dados, o valor da média não se altera.
 Verdadeiro Falso
- d) Se acrescentarmos o valor da média ao conjunto de dados, o valor da média não se altera.
 Verdadeiro Falso
- e) Dois conjuntos de dados diferentes podem ter a mesma média.
 Verdadeiro Falso

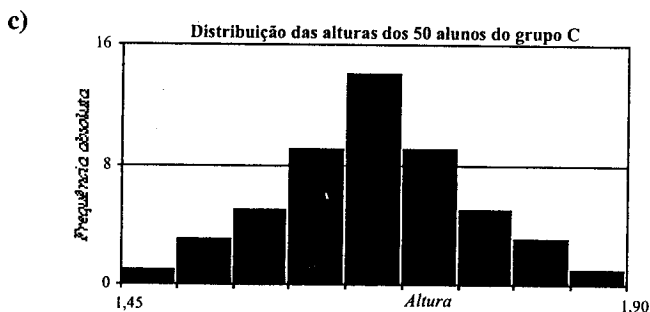
No caso das várias propriedades consideradas para a média, obtiveram-se as seguintes percentagens de respostas correctas: 87.3% na alínea a), 85.1% na alínea b), 62.4% na alínea c), 47.5% na alínea d) e 93.9% na alínea e). Destacam-se, assim, as maiores dificuldades dos alunos nas alíneas c) e d), em que se acrescentava o valor 0 (zero) e o valor da média, respectivamente, ao conjunto de dados. No caso de se acrescentar o valor 0 (zero), muitos alunos acreditam que o valor da média não se altera porque ele é visto como elemento neutro; no caso de se acrescentar o valor da média, ainda mais alunos tiveram dificuldade em concluir que a média não se altera.

Globalmente, as propriedades da mediana e da média, consideradas nas questões 6 e 7, revelaram um grau de dificuldade semelhante.

Questão 8

Os gráficos seguintes representam as distribuições das alturas (em metros) de três grupos de 50 alunos, o grupo A, o grupo B e o grupo C. Assinale no eixo adequado de cada gráfico, através de uma seta, a localização da média, da mediana e da moda.





A localização da média, mediana e moda em distribuições assimétricas e simétricas constituiu uma dificuldade definitiva para os alunos, tendo-se obtido percentagens de respostas correctas de 0.6%, nas alíneas a) e b) e 11.1% na alínea c). Foram evidentes dois tipos de dificuldades dos alunos: a localização das medidas foi tentada na base superior dos rectângulos associados às classes ou, então, no eixo vertical, parecendo estar subjacente nos raciocínios dos alunos a ideia de utilização de frequências; e a localização das medidas foi tentada no eixo correcto mas sem as localizarem adequadamente. De entre as diferentes medidas, a classe modal foi a mais facilmente identificada. Quanto à mediana, pareceu estar subentendida a ideia de que se situa no meio. Finalmente, relativamente à média, foi evidente a dificuldade em utilizar os valores fornecidos pela leitura do gráfico para efectuar os cálculos que os alunos julgaram necessários.

A ideia de ‘centro de massa’, tão útil para posicionar a média em relação à mediana numa distribuição dada, não foi utilizada por qualquer dos alunos. No entanto, seguindo esta estratégia, seria fácil de ordenar a posição das medidas de tendência central.

Questão 9

Relativamente aos salários dos empregados de uma empresa, o que significa cada uma das seguintes afirmações:

- A média dos salários dos empregados é 700 euros?
- A mediana dos salários dos empregados é 550 euros?
- A moda dos salários dos empregados é 450 euros?

Nesta questão pretendeu-se que os alunos atribuissem significado a cada uma das medidas de tendência central no contexto considerado. Em termos de

percentagem de sucesso, obteve-se 58.0% para a média, 22.6% para a mediana e 81.2% para a moda. No caso da média, a resposta errada foi observada em 37% dos casos e 5.0% não responderam. Em termos de dificuldades, as respostas dos alunos apoiaram-se numa explicação do algoritmo da média, concluindo que a maioria dos empregados ganhava um valor próximo dos 700 euros:

No conjunto de todos os empregados, somando os seus salários e dividindo o total de parcelas pelo número de empregados conclui-se que a maior parte dos empregados ganha um valor próximo de 700 euros.

Foi dada uma explicação em torno da ideia de que 700 euros é um valor compreendido entre o menor e o maior dos salários (e.g., *700 euros é o valor entre o menor e o maior dos salários dos empregados*) ou repetindo aproximadamente a afirmação feita (e.g., *O vencimento total dos empregados vai dar uma média de 700 euros*).

No caso da mediana, 40.9% dos alunos apresentaram uma resposta errada e 36.5% não responderam. De entre os erros dos alunos, mais frequentes nesta estatística, destaca-se aquele em que não se distingue claramente a mediana das outras medidas (e.g., *o valor médio dos ordenados dos empregados é de 550 euros*).

Finalmente, no caso da moda, que se revelou ser a estatística que ofereceu menos dificuldades, 3.3% responderam erradamente e 15.5% não responderam. No caso das respostas erradas, os alunos atribuíram à moda significados diversos (e.g., *O valor do salário mais baixo; Alguns dos empregados ganham 450 euros; O valor mais alto de todos os salários a dividir pelos empregados é 450 euros*), eventualmente ligados a outras estatísticas.

As situações estatísticas mais problemáticas

Observando a tabela 1, podemos verificar a percentagem de insucesso nas várias questões estudadas, que corresponde à percentagem de respostas erradas e não respostas, e ao conteúdo envolvido.

Fazendo uma leitura da tabela 1, constatamos quais as situações estatísticas que se revelaram mais problemáticas para os alunos, considerando as questões que tratavam cada uma das medidas isoladamente e também aquelas onde a resposta exigia uma relação das três estatísticas.

Tabela 1. Estatística, questão, insucesso e conteúdo nas várias questões estudadas.

Estatística	Questão	Insucesso	Conteúdo
<i>Média</i>	1a)	2.2%	Cálculo da média simples
	2	55.8%	Cálculo da média ponderada
	4	89.0%	Leitura de gráfico e aplicabilidade da média
	5a)	40.3%	Cálculo e propriedades da média
	5b)	42.0%	“ “ “ “ “
	7a)	12.7%	Propriedades da média
	7b)	14.9%	“ “ “
	7c)	37.6%	“ “ “
	7d)	52.5%	“ “ “
	7e)	6.1%	“ “ “
9a)	42.0%	Significado da média	
<i>Mediana</i>	1b)	48.1%	Cálculo da mediana Compreensão conceptual. Significado da mediana.
	4	87.3%	Leitura de gráfico e aplicabilidade da mediana
	6a)	34.3%	Propriedades da mediana
	6b)	27.1%	“ “ “
	6c)	29.3%	“ “ “
	6d)	17.7%	“ “ “
	9b)	77.4%	Significado da mediana
	<i>Moda</i>	1c)	12.7%
4		51.9%	Moda em caracteres qualitativos
9c)		18.8%	Significado da moda
<i>Média, Mediana e Moda</i>	3	81.8%	Aplicação das estatísticas
	8a)	99.4%	Localização das estatísticas em gráficos
	8b)	99.4%	“ “ “ “ “
	8c)	89.0%	“ “ “ “ “

A situação estatística abordada na questão 4, em que se pedia para determinar, caso fosse possível, o valor de cada uma das medidas, em dados apresentados através de um gráfico e relativos a um atributo qualitativo (bebidas preferidas pelos alunos de uma turma do 12º ano), ofereceu grandes dificuldades para uma grande percentagem de alunos, observando-se uma percentagem de insucesso de 89.0% para a média, 87.3% para a mediana e 51.9% para a moda.

A situação estatística abordada na questão 9, envolvendo o significado da média, da mediana e da moda no contexto dos salários dos empregados de uma empresa, foi igualmente problemática no que respeita à mediana, com uma percentagem de insucesso de 77.4%, e para o significado da média ainda houve 42.0% de alunos mal sucedidos na resposta.

A situação estatística apresentada na questão 2, tratando do cálculo da média das alturas de 25 jovens que viajavam num autocarro, conhecidas as médias das alturas de um grupo de 10 rapazes e de um grupo de 15 raparigas, revelou-se igualmente problemática, verificando-se que mais de metade dos alunos, 55.8%, foram mal sucedidos na apresentação da resposta correcta.

A situação estatística apresentada na questão 3, em que se pediam as idades de quatro estudantes, conhecidas a média, a mediana e a moda do conjunto dessas idades, ofereceu um grau de dificuldade elevado. Neste caso, 81.8% dos alunos revelaram insucesso na aplicação e relação das três medidas estatísticas.

A situação estatística apresentada na questão 5, em que sabendo-se a média dos vencimentos dos 20 trabalhadores de uma empresa era pedido aos alunos para calcularem a média dos vencimentos, depois de os mesmos terem sofrido um determinado aumento, revelou-se problemática. Atendendo ao contexto da situação, parece que as percentagens de insucesso de 40.3% e 42.0%, respectivamente, são significativas.

A situação estatística apresentada na questão 8, em que se questionavam os alunos sobre a localização da média, mediana e moda numa distribuição representada através de um histograma, revelou-se a mais complicada. A percentagem de alunos com insucesso nas alíneas 8.a) e 8.b), que tratavam de distribuições assimétricas, foi de 99.4%, o que representa um valor muito elevado. A distribuição simétrica apresentada em 8.c) também se revelou problemática, verificando-se que 89.0% dos alunos não responderam correctamente.

Tendo em atenção cada uma das estatísticas isoladamente, verifica-se que, globalmente, as situações estatísticas que envolveram o conceito de mediana ofereceram muitas dificuldades, especialmente quando foi pedido para apresentarem cálculos e/ou justificações. A interpretação do significado da mediana levou os alunos a fazerem confusões com a média.

Para a média, apesar de se tratar de um conceito mais familiar para os alunos, verificou-se a existência de dificuldades sempre que a situação exigia um trabalho para além do cálculo de uma média simples, ou quando a informação foi apresentada sob a forma de um gráfico. A moda foi o conceito onde se registou menos dificuldades, embora seja de realçar que ofereceu dificuldades quando a variável envolvida era de tipo qualitativo, como aconteceu na questão 4, onde 51.9% parece uma percentagem significativa de insucesso. Também nas situações onde era necessário trabalhar a moda relacionando-a com a média e a mediana, ela tornou-se num conceito que ofereceu maiores dificuldades. Isto verificou-se nas questões 3 e 8.

Em resumo, as situações onde se verificaram maiores dificuldades foram: cálculo de médias ponderadas (questão 2), determinação de um conjunto

de dados de que se conhece a média, a mediana e a moda (questão 3), decidir da possibilidade de utilizar as medidas de tendência central e extrair de gráficos a informação necessária à sua determinação (questão 4), compreensão de algumas propriedades da média e da mediana (questões 6 e 7), localizar as medidas de tendência central numa distribuição (questão 8) e atribuir significados às medidas de tendência central (questão 9).

O contributo dos manuais escolares

Considerando que o manual escolar constitui um recurso didáctico com grande influência nas práticas de ensino, analisou-se o conteúdo relativo à Estatística nos manuais escolares que os alunos tinham usado durante o 10º ano, na tentativa de procurar esclarecer possíveis origens das dificuldades demonstradas.

Considerando os três manuais observados, parece que qualquer um deles contempla as mesmas informações, dando mais realce a um ou outro aspecto, e indo de encontro aos objectivos educacionais oficialmente estabelecidos.

Parece que o uso do manual será insuficiente para abranger as situações contempladas nas questões 6 e 7 do questionário, dado não se observarem propostas de trabalho direccionadas para o tipo de questões que apelam à compreensão de propriedades da média e da mediana em conjuntos genéricos de dados. Relativamente à situação estatística abordada na questão 8, apenas foi observada de forma mais evidente num dos manuais a informação que essa questão contempla.

Seguidamente, vamos considerar as questões cujo insucesso foi considerado relevante, isto é, onde se verificou uma percentagem de insucesso superior a 50% (ver tabela 1). Concretamente, trata-se da questão 2 – cálculo da média ponderada; questão 3 – determinação de uma série de dados a partir do conhecimento dos valores da média, mediana e moda; questão 4 – leitura de um gráfico e âmbito de aplicabilidade das medidas de tendência central; questão 7d) – decidir sobre a alteração ou não do valor da média, quando se acrescenta o seu valor ao conjunto dos dados; questão 8 – localização das estatísticas em gráficos; e questão 9 – significado da mediana num dado contexto. Para estas questões vamos descrever mais detalhadamente a informação dos manuais escolares usados pelos alunos.

No caso da média ponderada (questão 2), verificou-se um maior destaque em propostas de trabalho que envolvem a média simples e a aplicação de fórmulas, o que poderá explicar a tendência dos alunos para o uso de uma fórmula que lhes pareça traduzir uma média aritmética de ‘qualquer coisa’.

A situação relacionada com a leitura de gráficos e âmbito de aplicabilidade da média, mediana e moda (questão 4), apesar de ser tratada nos diferentes manuais, parece desvalorizada pelo facto de sobressaírem as situações que envolvem variáveis do tipo quantitativo. Isto pode levar o aluno a desenvolver uma tendência para efectuar cálculos em qualquer circunstância, incluindo os casos em que estão envolvidas a média e a mediana.

A situação relacionada com a aplicação e relacionamento da média, mediana e moda (questão 3), aparece trabalhada mais no sentido de partir dos dados para as estatísticas e não o contrário, ou seja, obter os dados a partir das estatísticas. A prevalência excessiva deste tipo de tarefas, em detrimento de outras, poderá dificultar no aluno o desenvolvimento de um raciocínio mais profundo e mais flexível.

A situação relacionada com o significado das medidas de tendência central (questão 9) parece sobressair nos diferentes manuais de forma pouco sistemática, o que poderá contribuir para que o aluno, em alguma medida, desvalorize o desenvolvimento desse e de outros significados.

Sobre a ênfase dada às situações estatísticas de maior insucesso nos manuais escolares, parece importante valorizar o papel do professor no tratamento e gestão das situações apresentadas no manual. Essas situações podem ser, em muitos casos, boas pistas para explorar os conceitos em várias vertentes, indo sempre de encontro aos objectivos que promovem no aluno o desenvolvimento das capacidades requeridas. Parece, ainda, oportuno realçar o facto de, por vezes, a informação e as propostas de trabalho aparecerem em quantidade excessiva, podendo criar no aluno dificuldade para seleccionar aquilo que é relevante. Também neste aspecto, mais uma vez, é fundamental o papel do professor na gestão do manual.

Em resumo, e de um modo geral, a informação aparece associada a muito cálculo e fórmulas, podendo criar-se no aluno a ideia de que 'tudo se resolve com cálculos numéricos e aplicação de fórmulas' e, em consequência, diminuindo-se as possibilidades de apresentação de respostas através de palavras (caso do significado das estatísticas) e o reconhecimento da impossibilidade de aplicar certas estatísticas em algumas situações (caso da média e da mediana em atributos qualitativos).

Conclusão e algumas implicações

Os alunos revelaram dificuldades em lidar com a noção de média ponderada. À semelhança do que aconteceu nos estudos de Pollatsek et al. (1981) e de

Mevarech (1983), quase todas as respostas erradas resultaram do cálculo da média simples das duas médias dadas.

A determinação de um conjunto de dados, conhecidas a média, a mediana e a moda desse conjunto, revelou-se uma situação de grande dificuldade. Apesar de se tratar de alunos mais velhos, estes resultados são piores do que os obtidos por Cai (1995). Este facto pode dever-se a estarem envolvidas nesta situação as três medidas de tendência central e não apenas uma, como aconteceu no estudo de Cai.

Sobre o âmbito de aplicabilidade das medidas de tendência central e em comparação ao estudo de Barros e Fernandes (2001), os resultados agora obtidos confirmam as dificuldades dos alunos em delimitar o âmbito de aplicação da média e estendem essas dificuldades ao caso da mediana.

Na compreensão de propriedades da média e da mediana as dificuldades reveladas pelos alunos foram semelhantes. No caso das propriedades da média, as dificuldades aqui observadas confirmam os resultados do estudo de Strauss e Bichler (1988) e revelaram-se também dificuldades semelhantes no caso das propriedades da mediana.

Na atribuição de significado às medidas de tendência central, e por referência ao estudo de Eisenbach (citado em Batanero, 2000a), os resultados agora obtidos confirmam as dificuldades dos alunos na atribuição de significado à média e estendem essas dificuldades ao caso da mediana, acentuando-se mesmo em relação à média.

Na resolução das várias questões propostas foi patente a tendência dos alunos em manipular valores numéricos no sentido de obterem algum resultado também numérico, mesmo quando tal era totalmente desadequado. Uma situação bem ilustrativa deste facto verificou-se na questão 4, onde se questionavam os alunos sobre a possibilidade de determinar a média, a mediana e a moda num atributo qualitativo. No caso da média e da mediana, apesar de não existirem, muitos alunos operaram com as frequências para obterem valores para estas medidas. Assim, pode concluir-se que, para além do domínio computacional, os alunos deverão desenvolver uma compreensão conceptual dos conceitos estatísticos. Como afirmam Carvalho e César (2001, p.223), o aluno “necessita de ultrapassar o nível computacional e ser capaz de mobilizar conhecimentos para os utilizar na resolução de situações da vida real”.

Considerando as dificuldades dos alunos em cada uma das três medidas de tendência central, pode estabelecer-se a seguinte hierarquia: a mediana revelou-se a mais difícil de todas elas, seguindo-se a média e, finalmente, a moda mostrou-se a mais acessível. Para Carvalho e César (2000, p. 222), as maiores dificuldades observadas na mediana podem dever-se ao facto de se tratar de

“um conceito pouco utilizado pelos *média* e pelos alunos e professores na prática pedagógica quotidiana”. Comparativamente com a *média*, deve salientar-se que uma menor referência à mediana no estudo da Estatística também resulta do facto da *média* constituir uma estatística que intervém em outras estatísticas (a este nível de escolaridade intervém na variância e no desvio padrão). Relativamente à *média* e à mediana, as menores dificuldades na moda podem ser devidas a tratar-se de um conceito mais simples, pelo menos na forma como é tratado neste nível escolar.

A opção de verificar se as situações estatísticas estudadas são tratadas no manual escolar usado pelos alunos foi feita com base no pressuposto de que este recurso didáctico tem grande influência nas práticas de ensino. No entanto, a tentativa de procurar esclarecer, de algum modo, as origens das dificuldades dos alunos, com base no manual, teve um sucesso relativo na explicação das dificuldades globais identificadas.

Especialmente nas questões em que os alunos revelaram maiores dificuldades verificaram-se percentagens consideráveis de não respostas, o que pode indiciar um ensino superficial e orientado para a memorização de fórmulas. A este propósito, alguns alunos referiram que não se lembravam ou que nunca tinham ouvido falar nos conceitos envolvidos.

Em termos de ensino, especialmente no 10^o ano, muitas vezes o tema de Estatística não é simplesmente tratado nas aulas, pois trata-se do último tema do programa e muito frequentemente o tempo lectivo da disciplina de Matemática não é suficiente. Contudo, mesmo quando o tema é tratado nas aulas, se a aprendizagem se desenvolve através da realização de um trabalho individual ou em grupo, num período de tempo mais ou menos longo, é fundamental que o professor desenvolva estratégias de verificação dos conhecimentos que os alunos possuem e sobre aqueles que é suposto adquirirem no final da actividade.

No trabalho com os alunos é importante levá-los a explorarem as situações tendo em atenção diferentes pontos de vista, pois pensar-se que basta abordar um certo conceito num único contexto, deixando-se ao aluno a necessária transferência da aprendizagem para outros contextos, parece de todo insuficiente. O desenvolvimento de significados vários, dependentes de diferentes contextos, é uma necessidade para promover uma aprendizagem mais profunda dos alunos (Batanero, 2000a).

Por último, acredita-se que se, nós professores, nos propusermos estudar as dificuldades e os erros dos alunos estamos a desenvolver a nossa compreensão sobre os seus raciocínios, o que nos permite aperfeiçoar a nossa actuação profissional no sentido de os ajudarmos mais eficazmente a ultrapassarem as suas dificuldades e a melhorarem o seu desempenho.

Considerações didáticas

Os alunos que participaram no presente estudo eram jovens que se encontravam a frequentar o ano terminal do ciclo de estudos que constitui o ensino secundário, portanto, prestes a prosseguir estudos superiores ou a ingressar na vida activa. Os resultados observados levam-nos a acreditar que a formação recebida ao longo da sua escolaridade foi pouco consistente em termos de utilização de conceitos elementares de Estatística. No nosso país não se conhecem estudos que envolvam amostras com a dimensão aqui considerada e ao nível do 12º ano. Assim, os dados fornecidos por esta investigação podem constituir, de algum modo, um indicador para reflexão sobre dificuldades dos alunos no final do ensino secundário.

Em termos da disciplina de Matemática, é frequente ouvirmos falar da má preparação e da pouca motivação dos alunos. Por outro lado, a experiência parece mostrar que o conteúdo de Estatística é do agrado da grande maioria dos alunos quando lhes é falado neste assunto. Assim, parece haver necessidade de rever, cuidadosamente, quando, como e porquê ensinar/aprender Estatística.

Dado que a maioria das situações estatísticas apresentadas visava conteúdos do nível do 3º ciclo, devemos pensar porque falharam os alunos ou tiveram dificuldades em responder. Quanto àquelas situações que envolveram conteúdos ao nível do 10º ano, e onde os alunos falharam ou responderam pelo que lhes parecia ser, devemos pensar como tratamos ou porque não tratamos o conteúdo de Estatística no 10º ano.

Parece muito importante dar a devida importância à Estatística no respectivo ano de escolaridade. Trabalhar o assunto com os alunos e, acima de tudo, desenvolver mecanismos que permitam verificar se os conhecimentos e competências que pretendemos desenvolver são correctamente assimilados.

Para nós, professores, parece necessário rever algumas práticas profissionais, pois não basta pedir aos alunos um trabalho sobre este ou aquele assunto, é preciso verificar se os conceitos são utilizados com o devido rigor e criar oportunidades para testar e reajustar o conhecimento adquirido.

Relativamente ao ensino secundário, coloca-se a questão: – Por que figura como último o tema de Estatística no programa do 10º ano de escolaridade? Nestas circunstâncias, e por motivos vários, acredita-se que em muitos casos não seja efectivamente tratado, ficando o aluno sem o suporte necessário para, com segurança, utilizar adequadamente a Estatística. Como referem Ponte e Brocardo (2002, p.2), já “é tempo da Estatística deixar de ser um parente pobre e passar a ser reconhecida como uma área fundamental para a formação

geral do cidadão...”, se pretendemos formar cidadãos bem preparados para enfrentar os desafios que se lhes colocam.

Para tal, parece fundamental contribuímos para que sejam criadas melhores condições, materiais e humanas, de modo a permitir o estudo das dificuldades dos alunos e a forma de as superar. Como fazer isso? Certamente, identificando necessidades, reflectindo, fazendo propostas, experimentando-as e avaliando o seu impacto.

Referências

- Barros, P. M. & Fernandes, J. A. (2001). Dificuldades de alunos (futuros professores) em conceitos de estatística e probabilidades. In I. Lopes, J. Silva & P. Figueiredo (Orgs.), *Actas do ProfMat 2001* (pp. 197-201). Vila Real: Associação de Professores de Matemática.
- Batanero, C. (2000a). Dificultades de los estudiantes en los conceptos estadísticos elementares: el caso de las medidas de posición central. In C. Loureiro, O. Oliveira & L. Brunheira (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da estatística* (pp. 31-48). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática, Departamentos de Educação e de Estatística e Investigação operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Batanero, C. (2000b). Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, 15, 2-13. (<http://www.ugr.es/local/batanero>)
- Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R. & Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.
- Branco, J. & Martins, M. E. (2002). Literacia estatística. *Educação e Matemática*, N^o 69, 9-13.
- Brito, A. (1999). A problemática da adopção dos manuais escolares. Critérios e reflexões. In R. V. Castro, A. Rodrigues, J. L. Silva & M. L. Sousa (Orgs.), *Manuais escolares: estatuto, funções, história – Actas do I Encontro Internacional sobre Manuais Escolares* (pp. 139-148). Braga: Universidade do Minho.
- Cabrita, I. (1999). Utilização do manual escolar pelo professor de Matemática. In R. V. Castro, A. Rodrigues, J. L. Silva & M. L. Sousa (Orgs.), *Manuais escolares: estatuto, funções, história – Actas do I Encontro Internacional sobre Manuais Escolares* (pp. 149-160). Braga: Universidade do Minho, Instituto de Educação e Psicologia.

- Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm: student's understanding of the arithmetic average concept. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th PME Conference* (Vol. 3, pp. 144-151). Universidade Federal de Pernambuco.
- Carvalho, C. (1996). Algumas questões em torno de tarefas estatísticas com alunos do 7º ano. In A. Roque & M. J. Lagarto (Orgs.), *Actas do ProfMat 96* (pp. 165-171). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Carvalho, C. & César, M. (2000). As aparências iludem: Reflexões em torno do ensino da estatística no ensino básico. In C. Loureiro, O. Oliveira & L. Brunheira (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da estatística* (pp. 212-225). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática, Departamentos de Educação e de Estatística e Investigação operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Carvalho, C. & César, M. (2001). Interagir para aprender: Um caso de trabalho colaborativo em estatística. In B. Silva & L. Almeida (Orgs.), *Actas do VI Congresso Galaico-Português de Psicopedagogia* (Vol. 2, pp. 65-80). Braga: Centro de Estudos em Educação e Psicologia da Universidade do Minho.
- Carvalho, J. A. (1999). A escrita nos manuais escolares de Língua Portuguesa: Objecto de ensino/aprendizagem ou veículo de comunicação? In R. V. Castro, A. Rodrigues, J. L. Silva & M. L. Sousa (Orgs.), *Manuais escolares: estatuto, funções, história – Actas do I Encontro Internacional sobre Manuais Escolares* (pp. 179-187). Braga: Universidade do Minho, Instituto de Educação e Psicologia.
- Dreyfus, A. & Levy, O. (1996). Are the notion of mean and related concepts too difficult for 6th and 7th grade biology students? *European Journal of Teacher Education*, 19(2), 137-152.
- Mevarech, Z. R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 415-429.
- Ministério da Educação (1997). *Matemática – Programas 10º, 11º e 12º anos*. Lisboa: Autor.
- Ministério da Educação (1998). *Programa de Matemática do 3º ciclo do ensino básico* (4ª edição). Lisboa: Autor.
- Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Granada: Universidad de Granada.
- Pollatsek, A., Lima, S. & Well, A. D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204.

- Ponte, J. P., Matos, J. M. & Abrantes, P. (1998). *Investigação em Educação Matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: IIE.
- Ponte, J. P. & Brocardo, J. (2002). A estatística: De parente pobre a cidadão de pleno direito? *Quadrante*, 10(1), 1-2.
- Sousa, O. (2002). Investigações estatísticas no 6^a ano. In Grupo de Trabalho de Investigação (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 75-97). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Strauss, S. & Bichler, E. (1988). The development of children's concept of the arithmetical average. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 64-80.
- Vieira, F., Marques, I. & Moreira, M. A. (1999). Para o desenvolvimento da autonomia com o manual escolar. In R. V. Castro, A. Rodrigues, J. L. Silva & M. L. Sousa (Orgs.), *Manuais escolares: estatuto, funções, história – Actas do I Encontro Internacional sobre Manuais Escolares* (pp. 527-544). Braga: Universidade do Minho, Instituto de Educação e Psicologia.