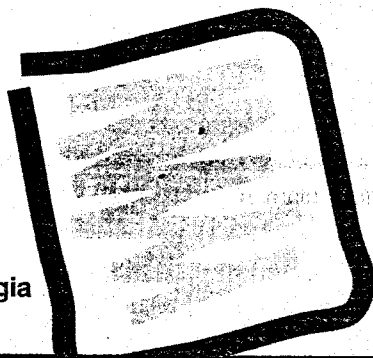


volume 16 número 2  
2003

# educação

---

revista portuguesa de



Instituto de Educação e Psicologia

Universidade do Minho

# **Interpretação gráfica do conceito de recta tangente a uma curva num ponto por professores estagiários**

**Floriano Viseu & Conceição Almeida**  
Universidade do Minho, Portugal

## **Resumo**

Neste artigo relata-se um estudo com 19 professores estagiários de Matemática, que teve como objectivo averiguar de que forma esses estagiários percepcionavam, numa perspectiva gráfica, o conceito de recta tangente a uma curva num ponto. Uma abordagem metodológica com características interpretativas permitiu verificar que nas concepções dos estagiários predomina uma perspectiva global do conceito, revelando forte influência do conceito de recta tangente a uma circunferência.

## **1. Introdução**

Alguns conceitos matemáticos são abordados, nos sucessivos anos da escolaridade, segundo níveis de complexidade que encontram paralelo na evolução que tiveram ao longo dos tempos. É o caso do conceito de recta tangente a uma curva num dado ponto, o qual começa por ser definido, nos programas escolares actuais, em estreita relação com uma circunferência, passando depois a relacionar-se com outro tipo de curvas, altura em que conhecimentos sobre derivadas são fundamentais.

Contudo, o conceito de tangente a uma circunferência tende a prevalecer quando o estudo da tangente é efectuado para outro tipo de curvas (Vinner, 1991). Em particular, tomam-se geradoras de conflito cognitivo as situações em que a recta tem vários pontos comuns com a curva, ou em que a recta "corta" a curva, o que nunca acontece com a circunferência. Tais

conflitos são atribuídos por Tall (1991) ao facto de as abordagens de ensino que enfatizam os processos formais não terem em conta as intuições dos alunos.

Partindo do pressuposto de que uma abordagem aos conceitos matemáticos através das suas diferentes representações, porventura utilizando recursos tecnológicos, promove uma aprendizagem significativa, interessa saber até que ponto os novos professores são, eles próprios, capazes de “representar os conceitos matemáticos e de relacionar entre si as diversas representações de um mesmo conceito” (Ponte *et al.*, 1998, p. 173). Tal facto ganha relevo quando, no âmbito da sua formação pedagógica, se procura que, nas suas estratégias de ensino, os novos professores de Matemática abordem, quanto possível, os conceitos matemáticos através das suas diferentes representações, e estabeleçam conexões entre os conceitos e os procedimentos matemáticos (NCTM, 1994). Neste sentido, para se implementar estratégias de formação onde tais aspectos sejam debatidos, procurou-se averiguar, através das questões que a seguir se colocam, como um grupo de professores estagiários de matemática ( $n=19$ ) percebem, numa perspectiva gráfica, o conceito de recta tangente a uma curva num ponto:

- que influência tem a definição de recta tangente a uma circunferência num dado ponto em professores estagiários, relativamente à noção de recta tangente a uma curva qualquer?
- será que os professores estagiários relacionarão o conceito de recta tangente a uma curva num ponto com a interpretação geométrica de derivada de uma função num ponto?

## 2. Enquadramento teórico

### 2.1 Alguns episódios sobre a evolução histórica do conceito de recta tangente a uma curva num ponto

O conceito de recta tangente a uma curva num ponto foi, ao longo dos tempos, objecto de estudo de muitos matemáticos, tais como Arquimedes, Apolónio, Descartes e Fermat.

Ao longo da sua evolução, o conceito começou por ser relacionado com a circunferência, passando mais tarde a ser relacionado com uma curva

qualquer. Segundo Boyer (1974), pensa-se que “foi na civilização grega que pela primeira vez foi achada a tangente a uma curva que não era a circunferência” (p. 94). Tal facto é comprovado em Apolónio, que se debruçou, não só sobre a determinação de tangentes a uma circunferência, no seu tratado sobre *Tangências*, na resolução do problema [que envolveu 10 casos]

“dadas três coisas, cada uma das quais pode ser um ponto, uma recta ou uma circunferência, traçar uma circunferência que é tangente a cada uma das três coisas (onde tangência a um ponto significa que a circunferência passa pelo ponto)” (Boyer, 1974, p. 105).

como também sobre a determinação de tangentes a uma hipérbole ou a uma elipse.

A forma, essencialmente estática, como Apolónio se referia ao conceito, parece dever-se à natureza da matemática grega, com pouca consideração pela ideia de variabilidade. Nesta época não havia uma definição satisfatória de tangente a uma curva  $C$  num ponto  $A$ , pensando-se nela como uma recta  $r$  tal que nenhuma outra podia ser traçada por  $A$  entre  $C$  e  $r$ .

Contudo, Arquimedes, no seu estudo da espiral, parece ter achado a tangente a uma curva por considerações cinemáticas semelhantes às do Cálculo Diferencial. Pensando num ponto sobre a espiral  $r = a\theta$  como sendo sujeito a um duplo movimento (um movimento radial uniforme, afastando-se da origem das coordenadas e um movimento circular uniforme em torno da origem), ele parece ter achado (através do paralelogramo de velocidades) a direcção do movimento (logo da tangente à curva) observando a resultante dos dois movimentos.

Só no séc. XVII, com Descartes e Fermat, é que o conceito de recta tangente a uma curva num ponto se generalizou a qualquer curva.

Descartes, no seu estudo das curvas polinomiais, determinou, através de métodos analíticos, a recta normal num dado ponto da curva. Descartes sugeria que, para achar a normal (ou a tangente) a uma curva algébrica num ponto  $P$  fixado sobre a curva, deveria ser tomado um segundo ponto  $Q$  variável sobre a curva, depois de achar a equação do círculo com centro no eixo das abcissas (único eixo que considerava) e passando por  $P$  e  $Q$ . Igualando, de seguida, a zero o discriminante da equação que determina as intersecções do círculo com a curva, acha-se o centro do círculo para o qual

Q coincide com P. Conhecido esse centro, a tangente e a normal à curva em P são facilmente encontradas (Boyer, 1974).

Fermat, tendo descoberto um método para achar *máximos e mínimos* de curvas polinomiais, também “descobriu como aplicar seu processo de valores vizinhos para achar a tangente a uma curva algébrica da forma  $y = f(x)^n$  (Boyer, 1974, p. 255). Sendo P (a, b) o ponto de tangência à curva, um ponto vizinho da curva com coordenadas P' (a + E; f(a + E)) “estará tão perto da tangente que se pode pensar nele como estando aproximadamente também sobre a tangente” (Boyer, 1974, p. 255).

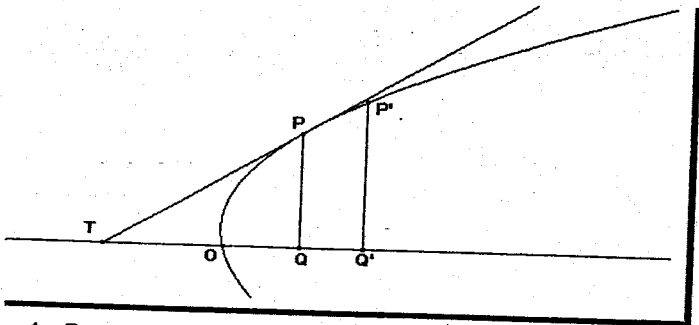


Figura 1 - Determinação da tangente a uma curva num dado ponto, segundo Fermat

Considerando a subtangente no ponto P como sendo  $TQ = C$  (Figura 1), os triângulos  $TPQ$  e  $TP'Q'$  podem ser considerados praticamente semelhantes, o que dá origem à proporção

$$\frac{b}{C} = \frac{f(a+E)}{C+E}$$

Considerando que  $b = f(a)$ , obtém-se que

$$C = \frac{f(a)}{\frac{f(a+E) - f(a)}{E}}$$

Atribuindo valores a  $E$ , próximos de zero, acha-se a subtangente

$$C = \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Segundo Boyer, “o processo de Fermat equivale a dizer que

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(a+E) - f(a)}{E}$$

é a inclinação da tangente em  $x = a$  (p. 256).

## 2.2. Ensino do conceito de recta tangente a uma curva

Ao nível da Matemática escolar, a sequência de ensino de recta tangente a uma curva assemelha-se, de algum modo, à sua evolução ao longo dos tempos. Analisando os programas actuais, verifica-se que o conceito surge explicitamente no 9º ano, na unidade *Circunferência e Polígonos: Rotações*, sendo recomendado que se faça “um estudo relacionado da circunferência e do círculo com o de outros elementos geométricos que lhes estão directamente ligados — (...) cordas, (...), tangentes, (...) — suas propriedades e relações” (DGBES, 1991, p. 57). Pretende-se que os alunos “reconheçam que a tangente é perpendicular ao raio, no ponto de tangência” (DGBES, 1991, p. 57). Esta noção prevalecerá, em termos programáticos, até à unidade do 11º ano, *Geometria no Plano e no Espaço II*, altura em que, no tema *Perpendicularidade de vectores e de rectas*, o conceito é de novo relacionado com a circunferência na definição de lugares geométricos a partir do produto escalar. Afirma-se então que “os conhecimentos adquiridos nesta unidade devem mostrar ao aluno como a linguagem das coordenadas e dos vectores lhe fornece novos utensílios para resolver problemas já abordados noutras perspectivas” (DES, 1997, p. 25).

Como consequência da definição de recta tangente a uma circunferência num dado ponto, dada até ao Cálculo Vectorial do 11º ano, por um lado, a recta tangente e a circunferência têm em comum um único ponto, e, por outro lado, a circunferência está toda contida no mesmo semi-plano relativamente à recta tangente. Contudo, uma recta pode ser tangente a uma curva num dado ponto sem que tal se verifique, como ilustram os exemplos da Figura 2:

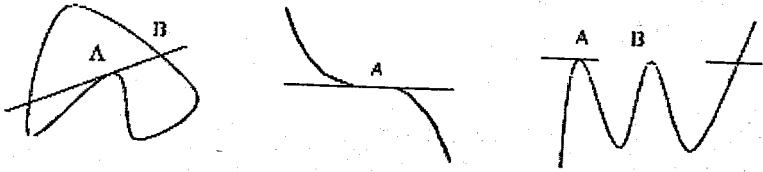


Figura 2 - Exemplos de recta tangente a uma curva num dado ponto (A)

Surge assim, ao abordar outros tipos de curvas, a necessidade de ampliar a definição do conceito de recta tangente a uma curva num dado ponto. Embora nos programas dos 11<sup>o</sup> e 12<sup>o</sup> anos não se observe uma definição formal do conceito, nas unidades de *Introdução ao Cálculo Diferencial I e II*, faz-se-lhe uma referência através da interpretação geométrica da derivada de uma função num dado ponto do seu domínio. Pretende-se, com esta interpretação, relacionar a derivada de uma função num dado ponto com o declive da recta tangente ao gráfico da função nesse ponto. Tal declive é determinado pela posição limite das sucessivas secantes à curva que passam pelo ponto em estudo.

Assim, se a função  $f$  é diferenciável num ponto de abcissa  $x_0$ , a recta tangente ao gráfico de  $f$  em  $(x_0, f(x_0))$  tem por declive  $f'(x_0)$  e a sua equação é definida por  $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ . Considerando para cada  $x \in I$ ,  $r(x) = f(x) - t(x)$ , tem-se que

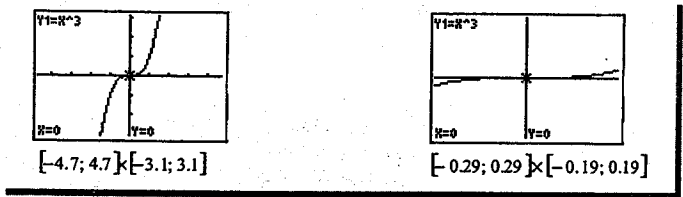
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \frac{r(x)}{x - x_0}$$

Desta equação pode-se obter que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0$$

o que significa que  $r$  é desprezível quando comparado com  $x - x_0$ . Isto significa que “à medida que  $x$  se aproxima de  $x_0$ , a função é cada vez melhor aproximada pela função afim  $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ” (Teixeira *et al.*, 1998, p. 31).

Graficamente, tal critério de aproximação pode ser ilustrado com o recurso a uma calculadora gráfica. Como exemplo, se se observar, através de ZOOM-IN de uma calculadora gráfica, as sucessivas ampliações do gráfico da função definida por  $y = x^3$  no ponto de abcissa  $x = 0$  (Figura 3),



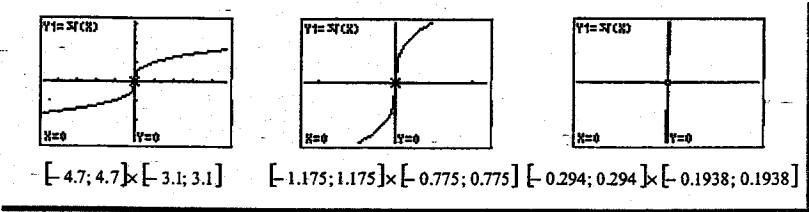
**Figura 3 - Ampliação do gráfico da função definida por  $y = x^3$  na vizinhança do ponto  $x = 0$**

verifica-se que a recta de equação  $y = 0$  é tangente ao gráfico da função nesse ponto.

A existência de derivada de uma função num dado ponto do seu domínio leva-nos a uma nova definição de recta tangente (não vertical) a uma curva nesse ponto. Contudo, quando a derivada de uma função num dado ponto do seu domínio ( $x = a$ ) é  $f'(a) = +\infty$  ou  $f'(a) = -\infty$  "chama-se *tangente ao gráfico de  $f$  à recta vertical de equação  $x = a$* " (Ferreira, 1990, p. 352). Por exemplo, para a função definida por

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, f'(0) = +\infty$$

e da observação das sucessivas ampliações em torno do ponto de abcissa  $x = 0$  (Figura 4),



**Figura 4 - Ampliação do gráfico da função definida por  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  na vizinhança do ponto  $x = 0$**



verifica-se que, à medida que nos aproximamos da origem do referencial, o gráfico da função aproxima-se cada vez mais do eixo das ordenadas, admitindo assim uma recta tangente vertical  $x = 0$ .

Para uma função com derivadas laterais diferentes, num dado ponto do seu domínio, tal critério de aproximação já não se verifica, o que significa que o seu gráfico não tem tangente nesse ponto.

Com o tema das derivadas do 11<sup>o</sup> ano, alarga-se, em termos analíticos, a definição de recta tangente a qualquer curva num dado ponto, e, em termos gráficos, procura-se desenvolver a capacidade de visualização do que se passa numa vizinhança do ponto, para o que podem contribuir as potencialidades da calculadora gráfica.

### 2.3. Concepções sobre a noção de recta tangente a uma curva num ponto

Em termos gráficos, a conceptualização da noção de recta tangente a uma curva é fortemente desenvolvida em relação à circunferência, donde a sua influência na generalização do conceito (Vinner, 1991). É uma noção muito simples, quer conceptual quer visualmente, mas poderá causar conflitos cognitivos quando são considerados casos como o da tangente num ponto de inflexão que “atravessa” a curva, ou como o da tangente num extremo. Num estudo conduzido por Vinner (1991) com 278 alunos de Análise do primeiro ano da Universidade, este aspecto foi bem posto em evidência. Os alunos foram confrontados com gráficos do tipo dos da Figura 5 e foi-lhes pedido que traçassem, caso existisse, a recta tangente a cada uma das curvas no ponto P.

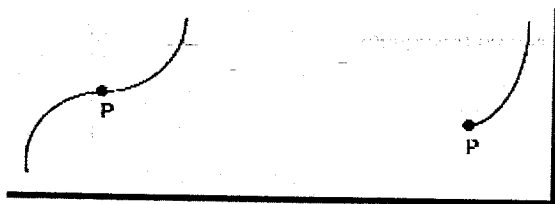
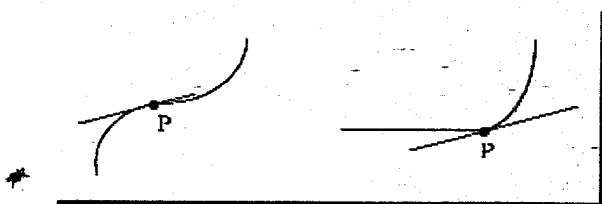


Figura 5 - Alguns dos gráficos do estudo de Vinner (1991, p. 76)

A análise dos resultados mostra que cerca de 15% dos alunos traçou correctamente a recta tangente, sendo particularmente curioso observar que, em cerca de 35% das respostas erradas, se identifica a forte influência do conceito de tangente à circunferência. Na verdade, para que a recta não “cortasse” a curva apareceram desenhos como os da Figura 6.



**Figura 6 - Alguns dos gráficos apresentados pelos alunos do estudo de Vinner (1991, p. 77)**

Nem sempre se torna fácil aos alunos a determinação geométrica da recta tangente a uma curva num ponto  $P$ . Esta dificuldade deve-se ao facto de os alunos não relacionarem a recta tangente a uma curva num ponto  $P$  com a posição limite das rectas secantes que passam por  $P$  e por um ponto  $Q_n$  da curva que se aproxima do ponto  $P$  (Orton, 1983).

Por considerar esta compreensão importante para a compreensão da tangente como um limite, Orton (1983) entrevistou 110 alunos (entre os 16 e os 22 anos) com o intuito de investigar se eles relacionavam as sucessivas secantes  $PQ_n$ , traçadas ao longo da curva aproximando-se de  $P$ , com o conceito de derivada. Interrogados sobre o que acontecia com as rectas  $PQ_n$  quando o ponto  $Q_n$  se aproximava de  $P$  (Figura 7), 43 dos entrevistados, apesar de encorajados através de questionamentos suplementares, foram incapazes de dizer que a secante se tornava uma tangente.

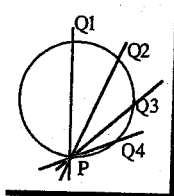


Figura 7 - Figura do estudo de Orton (1983, p. 245)

A noção de secante parecia ser ignorada por muitos alunos, que focaram a sua atenção na corda  $PQ_1$ , ainda que as explicações e a figura tentassem garantir que isso não iria acontecer. Outros autores (Sierpínska, 1985; Tall, 1991; Ferrini-Mundy & Lauten, 1994; Riddle, 1994) defendem que a noção geométrica da secante aproximando-se da tangente não é cognitivamente intuitiva para os alunos, no sentido de que não ocorre espontaneamente.

Pretende-se que, numa abordagem de ensino deste conceito, não só se enfatizem os processos formais, como também se apele à intuição. Contudo, não poderá assumir-se que aquilo que é intuitivo para os professores também o seja para os alunos, sendo, pois, necessário desenvolver estratégias que vão ao encontro das intuições dos alunos (Tall, 1991).

No sentido de averiguar como o conceito de tangente evoluiu em alunos franceses ao longo dos três anos terminais do liceu, Castela (1995) elaborou um questionário sobre tal conceito num contexto gráfico. O questionário era constituído por oito questões (ver Questionário em Anexo), para cada uma das quais os alunos deviam dizer, justificando, se a recta  $r$  era ou não tangente à curva  $C$  no ponto  $A$ .

A autora verificou que, dos alunos (144) que ainda não tinham tido um ensino de derivadas, a maioria apresentou dificuldades na questão 1 pelo facto de a "recta  $r$  cortar a curva", na questão 2 por  $A$  ser um "ponto anguloso", na questão 4 por a "curva se confundir localmente com a sua tangente", e na questão 6 por  $A$  ser um "ponto de inflexão". Em cada uma destas situações, a percentagem de respostas correctas foi inferior a 50%. A autora concluiu que estes resultados parecem provar que a definição de

tangente em Análise não pode ser compreendida pelos alunos a partir da simples generalização das suas concepções prévias.

Relativamente aos alunos (228) que já tinham tido um ensino sobre derivadas, a autora observou que aproximadamente 75% dos alunos não manifestaram erros nas questões 1, 2, 6, tendo-se registado um índice de respostas correctas comparáveis às questões 3, 5, 7, 8. Relativamente à questão 4, onde a "curva se confunde localmente com a sua tangente", grande número de alunos consideraram que a recta não era tangente à curva.

A análise dos estudos dos autores referidos sugere que o conceito de recta tangente a uma curva num ponto é geradora de conflitos cognitivos, devido à forte influência do conceito de recta tangente a uma circunferência, o que faz com que os alunos não analisem o conceito como uma aproximação local.

### 3. Metodologia do estudo

Porque se pretendia identificar e compreender as concepções dos estagiários e o que poderia estar por detrás das suas convicções, adoptou-se uma abordagem de natureza interpretativa, por esta se adequar à procura dos significados que os fenómenos assumem para as pessoas implicadas (Gall *et al.*, 1996).

O estudo envolveu 19 professores estagiários de Matemática, de uma licenciatura de modelo integrado de que fazem parte cadeiras de Análise Infinitesimal e uma cadeira de Didáctica da Matemática. O trabalho realizado nesta última incluiu algum trabalho com calculadoras gráficas em que foram salientados aspectos gráficos de funções. No ano lectivo de 1997/98, a par das actividades lectivas da prática pedagógica, estes estagiários frequentaram, com regularidade, seminários orientados por um dos investigadores. No âmbito da prática pedagógica, leccionavam em turmas próprias do 7º ano e do 8º ano de escolaridade e em turmas de regência da responsabilidade do orientador da escola (do 9º ano, caso das EB2,3 e do 10º ou 11º anos, no caso das Secundárias).

Numa reunião informal com os professores estagiários, no final do primeiro período, foram-lhes apresentadas as linhas gerais de um estudo a realizar no âmbito dos trabalhos da dissertação de mestrado de um dos

investigadores. No início do 2º período, foi-lhes solicitado que preenchessem um questionário sobre os conceitos de derivada e de recta tangente, numa perspectiva gráfica, a uma curva num ponto. A informação obtida seria posteriormente usada para definir estratégias de formação. Foram ainda dadas garantias de confidencialidade dos dados relativos às suas respostas ao questionário que seria utilizado. Do questionário (ver Questionário em Anexo) faziam parte as oito questões aqui analisadas e que antes haviam sido usadas no estudo de Castela (1995). Procurou-se com elas averiguar, por um lado, a influência, nos estagiários, do conceito de recta tangente a uma circunferência e, por outro lado, a influência dos seus conhecimentos de Cálculo Diferencial, nas suas concepções de recta tangente a uma curva num ponto. Neste sentido, as respostas dos estagiários e respectivas justificações foram analisadas segundo os seguintes aspectos, e seguindo o procedimento indicado por Castela (1995):

	Número das questões							
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
a curva e a recta têm um só ponto em comum? existe uma vizinhança de A na qual a curva e	não	sim	sim	não	não	sim	não	sim
a recta têm um só ponto em comum? existe uma vizinhança de A na qual a recta não	sim	sim	sim	não	sim	sim	sim	sim
"corta" a curva?	sim	sim	não	sim	sim	não	sim	sim
a curva situa-se toda no mesmo semi-plano?	não	sim	não	sim	sim	não	sim	sim
a recta é tangente à curva no ponto A?	sim	não	não	sim	não	sim	sim	sim

#### 4. Análise dos dados

As respostas dos estagiários, em cada uma das questões apresentadas, só se consideraram correctas quando as suas respostas apresentaram uma justificação adequada. Nos casos em que consideraram correctamente que a recta  $r$  era (ou não) tangente à curva  $C$  no ponto  $A$ , mas sem justificação ou com justificação incorrecta ou insuficiente, considerou-se a resposta como parcialmente correcta.

O número de respostas de cada tipo, dadas pelos 19 professores estagiários, a cada uma das questões, encontra-se registado na Tabela 1.

**Tabela 1 - Distribuição das respostas, às questões sobre o conceito de recta tangente a uma curva num ponto (n=19)**

Tipo de resposta	Número das questões							
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
Correcta	2	2	0	2	1	1	2	0
Parcialmente correcta	8	1	15	15	3	3	10	12
Incorrecta	8	14	3	1	10	13	4	3
Não responde	1	2	1	1	5	2	3	4

Por observação da Tabela 1, verifica-se que a frequência das respostas dos estagiários incide mais nas do tipo parcialmente correcta, devido ao tipo de justificações apresentadas pela maioria dos estagiários, e do tipo incorrecta, por terem analisado o conceito numa perspectiva global, atendendo mais ao número de pontos comuns à curva e à recta do que ao que se passa na vizinhança do ponto em questão.

Para uma melhor compreensão do conteúdo das suas respostas, a sua análise é efectuada mediante dois processos: pela mera consideração da recta  $r$  ser ou não tangente à curva  $C$  no ponto  $A$  (Tabela 2), e pelas respectivas justificações (Tabela 3).

**Tabela 2 - Distribuição das respostas somente quanto à indicação da recta  $r$  ser ou não tangente à curva  $C$  no ponto  $A$  (n = 19)**

Tipo de resposta	Número das questões							
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
a recta $r$ é tangente à curva $C$ no ponto $A$	10	14	3	17	10	4	12	12
a recta $r$ não é tangente à curva $C$ no ponto $A$	8	3	15	1	4	13	4	3
não responde	1	2	1	1	5	2	3	4

Comparando os resultados registados na Tabela 2 com os da Tabela 1, observa-se que nas situações apresentadas nas questões Q1, Q3, Q4, Q7 e Q8, o elevado número de respostas parcialmente correctas se deve a justificações consideradas inadequadas ou insuficientes. Tal facto parece

dever-se à análise indiscriminada do conceito em estudo, por parte dos estagiários, mediante o número de pontos comuns à recta e à curva ou ao facto de a recta poder ou não "cortar" a curva, como se pode observar na Tabela 3.

**Tabela 3 - Distribuição das justificações dos estagiários sobre o conceito de recta tangente a uma curva num ponto**

Tipo de Justificações	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
"a recta é tangente à curva $C$ no ponto $A$ , pois na $V_{\delta}(A)$ com $\delta$ tão pequeno quanto se queira a recta $r$ intersecta a curva num único ponto $A$ "	1	-	-	-	-	-	-	-
"é, pois dado $x \in V_{\delta}(A) \setminus \{A\}$ , $\delta$ tão pequeno quanto se queira pode-se definir uma recta com os pontos $A$ e $(x, f(x))$ fazendo $x$ tender para $A$ a recta irá tender para $r$ "	-	-	-	1	-	-	-	-
"sim, porque nesse ponto existe derivada que é nula"	1	-	-	1	-	1	2	-
"não é, pois as derivadas laterais em $A$ não são iguais"	-	2	-	-	1	-	-	-
"a recta não é tangente à curva $C$ no ponto $A$ , uma vez que intersecta a curva $C$ em mais pontos para além do ponto $A$ "	6	-	-	-	2	3	3	2
"sim, porque a recta $r$ intersecta a curva $C$ no ponto $A$ , mas não "corta" a curva"	2	2	-	3	2	-	2	2
"a recta $r$ não é tangente à curva $C$ no ponto $A$ , porque a recta contém pontos dos dois semi-planos"	1	-	1	-	-	1	-	-
"a recta $r$ é tangente à curva $C$ no ponto $A$ , pois só contém pontos de um dos semi-planos"	-	1	-	1	1	-	1	1
"a recta $r$ é tangente à curva $C$ no ponto $A$ porque a recta intersecta a curva apenas num ponto, o ponto $A$ "	2	6	2	7	1	1	1	5
"não é tangente pois $r$ "corta" a curva no ponto $A$ "	-	-	5	-	-	4	-	-
Não justificadas	3	6	6	5	7	5	5	5
Justificações inadequadas	2	-	4	-	-	2	2	-

Por detrás do tipo de justificações apresentadas pelos estagiários na maior parte das questões (Tabela 3), parece estar a prevalência do conceito de recta tangente a uma circunferência.

Tal facto é constatado, por exemplo, nas situações apresentadas em Q1 (Figura 8) e em Q7 (Figura 9), com aparência semelhante,

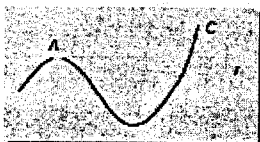


Figura 8 - Gráfico Q1

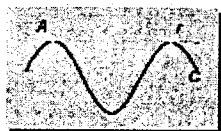


Figura 9 - Gráfico Q7

quando afirmam que:

- “a recta  $r$  é tangente à curva  $C$  no ponto  $A$ , porque a recta intersecta a curva nesse ponto, mas não “corta” a curva”,
- “a recta  $r$  é tangente à curva  $C$  no ponto  $A$  porque a recta intersecta a curva apenas num ponto, o ponto  $A$ ”.

Esta justificação foi considerada insuficiente, por não explicitar um critério de observação do conceito numa vizinhança do ponto  $A$ .

Dentro das respostas incorrectas, quer em Q1 quer em Q7, vários estagiários não se limitam a analisar uma vizinhança suficientemente próxima do ponto  $A$  e afirmam que “a recta não é tangente à curva  $C$  no ponto  $A$ , uma vez que intersecta a curva  $C$  em mais pontos para além do ponto  $A$ ”. Há quem distinga as duas situações ao referir que em Q1 “a recta  $r$  não é tangente à curva  $C$  no ponto  $A$ , porque a recta contém pontos dos dois semi-planos”, o que não acontece em Q7.

Quanto às justificações consideradas inadequadas, há quem afirme que:

- em Q1, “a recta  $r$  é tangente à curva  $C$  no ponto  $A$  pois existem dois pontos da curva que pertence a  $r$ ,  $A$  e outro — por a curva ter a formação indicada”,



- em Q1 e em Q7, “a recta  $r$  é tangente à curva  $C$  no ponto  $A$  pois não intersecta a curva nesse ponto”,
- em Q7, “a recta é tangente à curva em dois pontos, particularmente no ponto  $A$ . A curva  $C$  encontra-se toda abaixo do traçado da recta”.

Tal como em Q1 e em Q7, também em Q4 (Figura 10) e em Q8 (Figura 11), predomina largamente o número de estagiários que identificam o ponto  $A$  como sendo ponto de tangência entre a recta  $r$  e a curva  $C$ .

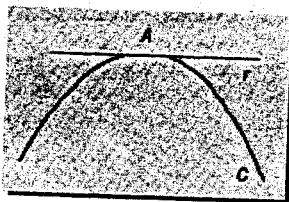


Figura 10 - Gráfico Q4

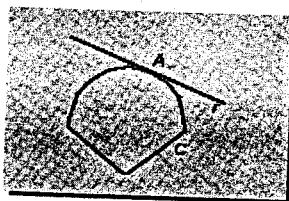


Figura 11 - Gráfico Q8

O elevado número de respostas parcialmente correctas a estas duas situações deveu-se à apresentação de justificações consideradas insuficientes e do mesmo tipo das apresentadas em Q1 e Q7.

Na situação apresentada em Q3 (Figura 12), também predominou o número de respostas parcialmente correctas.

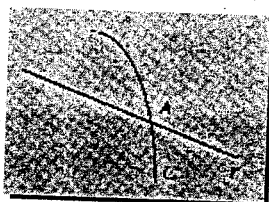


Figura 12 - Gráfico Q3

Isto deveu-se, por um lado, à ausência de qualquer justificação nas respostas de alguns estagiários e à existência de justificações consideradas insuficientes (como as do tipo “a recta  $r$  não é tangente à curva  $C$  no ponto  $A$  pois  $r$  “corta” a curva no ponto  $A$ ”). O número de respostas incorrectas nesta alínea deveu-se a respostas do tipo “a recta é tangente à curva  $C$  no ponto  $A$  visto ser este o único ponto que a recta  $r$  intersecta  $C$ ”, e ainda a respostas do tipo “não é tangente, porque se prolongarmos a recta  $r$  e a curva  $C$ , vamos encontrar um outro ponto de intersecção”. Como justificações inadequadas, há quem considere que “a recta não é tangente, porque a recta  $r$  intersecta a curva  $C$  em  $A$ ; a recta tangente a uma curva num ponto não a intersecta”.

A influência do conceito de tangente a uma circunferência, persiste mesmo em situações que apenas podem ser explicadas através de conhecimentos de derivadas. São disso exemplo, as situações apresentadas em Q2 (Figura 13) e Q5 (Figura 14),

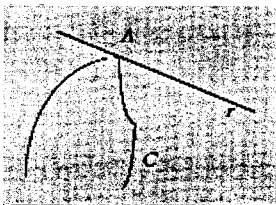


Figura 13 - Gráfico Q2

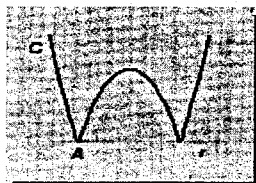


Figura 14 - Gráfico Q5

onde os estagiários poderiam pensar que o ponto  $A$  é um ponto anguloso e daí relacionar o conceito em estudo nesta questão com a existência ou não de derivada nesse ponto.

Tendo como referência o número de pontos comuns à recta e à curva, vários estagiários afirmaram em Q2 que *“a recta é tangente à curva C no ponto A, porque têm em comum um único ponto”*. O mesmo aconteceu em Q5 ao considerarem que *“a recta não é tangente à curva C visto existir mais do que um ponto de intersecção de r com a curva C”*, ou que *“a recta r é tangente à curva C no ponto A, na medida em que r intersecta C no ponto A, mas não a corta”*.

Poderá ter sido esta noção da recta “cortar” ou não a curva, que fez com que, tanto em Q2 como em Q5, alguém afirmasse *“a recta r é tangente à curva C no ponto A, pois só contém pontos de um dos semi-planos”*.

Também em Q6 (Figura 15), são os conhecimentos de Análise que poderiam ser invocados, considerando-se que, numa vizinhança do ponto A, que é um ponto de inflexão, a curva “aproxima-se” da recta tangente.

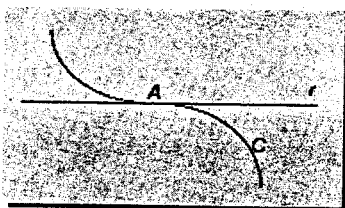


Figura 15 - Gráfico Q6

A maioria dos estagiários não identificou esta relação, apresentando respostas do tipo *“a recta r não é tangente à curva C no ponto A pois r “corta” a curva no ponto A”*. De entre os que apresentaram justificações inadequadas há quem considere que *“a curva C tem a tangente r no ponto A pois existem mais do que um ponto da curva C que pertence a r”*.

## 5. Conclusões

Da análise das respostas dos 19 estagiários às oito questões, verifica-se que a maioria deu mais atenção ao número de pontos de intersecção entre a recta e a curva do que à análise do seu comportamento no referido ponto.

matemáticos através das suas múltiplas representações, tirando partido das novas tecnologias, poderá ajudar a abrir perspectivas que combinem a intuição e o rigor matemático para uma melhor compreensão dos conceitos. Além disso, como Tall (1991), entendemos que é necessário tornar o seu estudo "cognitivamente apelativo" (p. 110) para os alunos dos cursos de formação de professores sem que, no entanto, os conceitos sejam restringidos a uma simplicidade redutora. A exposição a situações complexas pode e deve ser proporcionada aos futuros professores, durante a sua formação inicial, através, quer de uma calculadora gráfica, quer de *software* adequado, de modo que desenvolvam a sua intuição. Mas há que acautelar situações que possam conduzir a ideias erradas pois, como refere Tall (1991) a respeito da ampliação duma curva: "Tal como matemáticos do século dezanove estavam convencidos, pela sua experiência limitada, que a 'maior parte' dos gráficos eram diferenciáveis 'quase em todo o lado', experimentação limitada e sem orientação podem levar à crença de que todos os gráficos são localmente rectilíneos" (p. 111).

## Referências

- BOYER, C. (1974). *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher.
- CASTELA, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures — un exemple concret, celui da la tangente. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15 (1), pp. 7-47.
- DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO (1997). *Matemática — Programas 10<sup>o</sup>, 11<sup>o</sup> e 12<sup>o</sup> anos*. Lisboa: Ministério da Educação.
- DIRECÇÃO GERAL DOS ENSINOS BÁSICO E SECUNDÁRIO (1991). *Programa de Matemática — Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem (Vol. II) — Ensino Básico 3<sup>o</sup> ciclo*. Lisboa: Ministério de Educação.
- FERREIRA, J. (1990). *Introdução à Análise Matemática* (3<sup>a</sup> ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- FERRINI-MUNDI, J. & LAUTEN, D. (1994). Learning about calculus learning. *The Mathematics Teacher*, 87 (2), pp. 115-121.
- GALL, M. D., BORG, W. R. & GALL, J. P. (1996). *Educational research — an introduction* (6<sup>a</sup> ed.). Nova York: Longman.
- NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- ORTON, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, pp. 235-250.

- PONTE, J., MATOS, J. M. & ABRANTES, P. (1998). *Investigação em educação matemática: implicações curriculares*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- RIDDLE, L. (1994). Introducing the derivative through the iteration of linear functions. *The Mathematics Teacher*, 87 (5), pp. 377-381.
- SÁ, C. C. (2000). O aparecimento da Geometria Analítica e do Cálculo Infinitesimal. In M. F. Estrada, C. C. Sá, J. F. Queiró, M. C. Silva & M. J. Costa, *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, pp. 554-584.
- SIERPINSKA, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6 (1), pp. 5-67.
- TALL, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 3-21.
- TEIXEIRA, P., PINECADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. & NÁPOLES, S. M. (1998). *Matemática: funções — 11<sup>o</sup> ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
- VINNER, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics. In D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 65-81.