Universidade do Minho
Instituto de Educação

Flávia Sandrina Barbosa Tavares

Desenvolvimento da fluência no cálculo mental através do uso de estratégias de cálculo: um estudo no 4.º e no 6.º ano de escolaridade

Janeiro de 2015

Desenvolvimento da fluência no cálculo mental através do uso de estratégias de cálculo: um estudo no 4.º e no 6.º ano de escolaridade

Flávia Sandrina Barbosa Tavares

Uminho | 2015

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Flávia Sandrina Barbosa Tavares

Desenvolvimento da fluência no cálculo mental através do uso de estratégias de cálculo: um estudo no 4.º e no 6.º ano de escolaridade

Relatório de estágio
Mestrado em Ensino do 1° e 2° Ciclo do Ensino Básico

Trabalho Efetuado sob a orientação do
Professora Doutora Alexandra Gomes

Janeiro de 2015

Declaração

Nome: Flávia Sandrina Barbosa Tavares

Endereço eletrónico: flaviasandrina@gmail.com

Número do Cartão de Cidadão: 13740999

Título do Relatório de Estágio: O uso das estratégias de cálculo mental no desenvolvimento da fluência do cálculo mental: um estudo com alunos do 4.º e do 6.º ano de escolaridade

Orientadora: Doutora Alexandra Gomes

Ano de conclusão: 2015

Designação do Mestrado: Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico

Universidade do Minho, __/ __/ _____ Assinatura:

____

Agradecimentos

Terminado este percurso tão importante na minha vida, não podia deixar de agradecer a todos os que nela se cruzaram, de uma forma ou de outra, estando presentes em todos os momentos e me ancoraram para eu chegar até aqui.

À minha orientadora, Professora Doutora Alexandra Gomes, pelo empenho, pela dedicação, pelo profissionalismo, pela disponibilidade, pela troca de saberes e de experiências que me proporcionou. Obrigada pelos incentivos, pelos conselhos e por sempre acreditar que este projeto seria possível.

Aos meus pais, que nunca desistiram do meu sonho, pelo amor incondicional encoberto pelo esforço e dedicação com que caminharam a meu lado. Obrigada por acreditarem em mim.

Aos meus irmãos, pelo carinho, pela força, pela motivação.

Às professoras cooperantes, pela forma como me receberam, pela colaboração, pelos conhecimentos partilhados, pelos conselhos e por terem contribuído para o meu desenvolvimento e crescimento pessoal e profissional.

Aos alunos com quem tive a oportunidade de desenvolver a minha prática pedagógica e o meu estudo, por todos os momentos que partilhamos, por todas as aprendizagens que me proporcionaram, pela entrega no meu projeto e, por todo o carinho que demonstraram.

À Gisela Nunes e ao Vítor Martins, pela troca de saberes, pela troca de experiências, pelo vosso carinho, por juntos formarmos uma equipa.

À minha amiga, e colega de estágio, Inês Costa, à Tatiana Mendes e ao Paulo Neves agradeço do fundo do coração. Obrigada por todos os momentos que partilhamos, pela vossa amizade, pelo vosso amor, pela pessoa que me tornaram, por caminharem sempre a meu lado, sem nunca desistirem de mim. Obrigada por me fazerem ver a vida como a vejo hoje. Sem vocês, certamente que não seria tão feliz.

A todos, muito obrigada!

Resumo

Este estudo tem como principal objetivo desenvolver nos alunos uma boa fluência no cálculo mental. Para tal, procuro dar resposta às questões: 1) Quais são a estratégias de cálculo mental para a multiplicação e a divisão utilizadas por alunos do 4.º ano e do 6.º ano de escolaridade?; 2) Que diferenças existem nas estratégias de cálculo da multiplicação e da divisão utilizadas pelos alunos do 4.º e do 6.º ano de escolaridade?; 3) Que tarefas se devem promover para desenvolver nos alunos o cálculo mental?; 4) Quais os contributos das estratégias de cálculo para o desenvolvimento do cálculo mental?; e 5) De que forma poderá o jogo do 24 ajudar na promoção do desenvolvimento da destreza no cálculo mental?

Tendo em conta a problemática do estudo, adotei uma metodologia de natureza qualitativa, baseada no modelo de investigação-ação.

Os alunos em estudo resolveram tarefas relacionadas com as estratégias de cálculo mental para a multiplicação e para a divisão com números naturais, no 1.º ciclo e com números naturais e números racionais não negativos, no 2.º ciclo. Os registos realizados pelos alunos aquando das tarefas dadas, juntamente com as gravações áudio, e as notas de campo, constituíram-se como as principais fontes de recolha de dados.

Os dados permitem afirmar que as estratégias de cálculo usadas pelos alunos do 4.º ano centram-se nas estratégias de decomposição, fatorização e, em muitos casos, no uso mental dos algoritmos usuais. Já o 2.º ciclo, aplica estratégias mais diversificadas, incluindo a compensação e a substituição. Os alunos do 1.º ciclo demonstraram grandes dificuldades na aplicação de estratégias de cálculo mental para a divisão e os alunos do 6.º ano dificuldades no recurso à operação inversa com números racionais não negativos.

Deste modo, é importante que o professor proporcione diferentes tarefas que promovam o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental e, acima de tudo, crie condições favoráveis ao debate e à discussão em grande grupo, onde os alunos possam demonstrar as suas estratégias, o seu raciocínio e confrontá-lo com os dos seus colegas.

Palavras-chave: sentido de número, cálculo mental, estratégias de cálculo mental.

Abstract

This study aims to develop in students a good fluency in mental calculation. To do this, I try to answer the questions: 1) What are the mental calculation strategies for multiplication and division used by students of the 4th grade and the 6th grade?; 2) What are the differences in the calculation strategies for multiplication and division used by 4th and 6th grade students?; 3) What tasks should be promoted to develop mental calculation in students?; 4) What are the contributions of calculation strategies for the development of mental calculation?; and 5) How can the "jogo do 24" help to promote development in mental calculation? Considering the problem of the study, I adopted a methodology of qualitative nature, based on the research-action model. Students solved tasks related to mental calculation strategies for multiplication and division with natural numbers in the 4th grade and non-negative rational numbers in the 6th grade. The records made by the students during tasks, along with audio recordings and field notes, constituted the main sources of data collection. Data allows to conclude that the calculation strategies used by students of the 4th grade concentrated on the decomposition strategies, factorization, and in many cases, the mental use of the usual algorithms. 6th graders apply more diversified strategies, including compensation and replacement. 4th grade' students demonstrated great difficulty in the application of mental calculation strategies for the division and 6th grade students had difficulties in the use of reverse operation with non-negative rational numbers. Thus, it is important that the teacher provides different tasks that promote the development of mental calculation strategies and, above all, creates favourable conditions for debate and discussion in large groups, where students can demonstrate their strategies, their reasoning and compare it with those of their colleagues.

Keywords: number sense, mental arithmetic, mental calculation strategies.

ÍNDICE

Índice de Tabelas

Índice de Figuras

Índice de Transcrições… xi

CAPÍTULO I- INTRODUÇÃO

O presente estudo insere-se no âmbito do estágio curricular decorrente da Unidade Curricular de Prática de Ensino Supervisionada, do 2.º ano, do Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico. Este estágio decorreu em contexto de 1.º e 2.º ciclo, no 4.º e 6.º ano de escolaridade, respetivamente, no ano letivo de 2013/2014, tendo como principal objetivo o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental (para a multiplicação e a divisão) para uma maior destreza com os números e desenvolvimento do cálculo mental.

1.1. Pertinência do estudo

Nos dias de hoje, vivemos na era da globalização, onde dependemos em muito, da tecnologia, sobretudo dos computadores e das calculadoras que facilmente se encontram à disposição de cada um. Neste sentido, temos assistido a uma crescente desvalorização de competências básicas de cálculo e de estratégias pessoais de cálculo em detrimento do uso das novas tecnologias, inclusive da calculadora (Carvalho, 2011).

Durante muito tempo, a escola debruçava-se sobretudo ao ensino dos algoritmos escritos, sendo este o único processo de cálculo, no que diz respeito à competência de cálculo dos alunos. No entanto a generalização do uso dos instrumentos tecnológicos obrigou a repensar-se o ensino da matemática, colocando-se a questão "Serão os algoritmos de papel e lápis os processos de cálculo mais eficazes e adequados para as situações com que os alunos se confrontam?" (Albergaria & Ponte, 2008). Decorrente deste avanço tecnológico, somos expostos diariamente a informações representadas de diferentes formas: quer em gráficos, tabelas, percentagens, frações, o que requer de nós, de forma geral, o desenvolvimento do sentido do número e de estratégias eficazes de cálculo mental que nos permita compreender, analisar e interpretar essas informações e tomar decisões de forma crítica e fundamentada (Albergaria & Ponte, 2008; Castro & Rodrigues, 2008; McIntosh, Reys & Reys, 1992; Morais, 2011).

Para isso, é importante que os alunos desenvolvam a capacidade de realizar cálculos exatos e aproximados, recorrendo aos algoritmos escritos, à calculadora e ao cálculo mental (Albergaria & Ponte, 2008) e pensar numa aritmética que alie em harmonia o cálculo mental e o uso da calculadora (Ralston, 1999 cit. por Morais, 2011).

O sentido de número, embora difícil de definir, aparece em destaque em vários documentos orientadores e em publicações de diversos autores, como por exemplo: Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), Currículo Nacional do Ensino Básico (2001), Programas de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007); A Matemática na Educação Básica (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999), Cebola (2002) entre muitos outros. Nos diversos documentos é reforçada a importância do desenvolvimento do sentido de número, aspecto essencial para o ensino dos números e do cálculo desde os primeiros anos de escolaridade.

O programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007) realça a importância do cálculo mental ao longo da escolaridade básica referindo que se deve "desenvolver nos alunos o sentido do número, a compreensão dos números e das operações, e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos (Carvalho & Ponte, 2012, p. 361).

O cálculo mental é evidenciado por vários autores como Sowder (1988, em Cebola, 2002) como sendo "uma capacidade necessária para a competência numérica e que inclui a capacidade de efetuar operações com números inteiros com dois ou três dígitos" (p. 232). Já para Buys (2008), o cálculo mental, é caracterizado como "movimento rápido e flexível no mundo dos números" e é fundamental para o desenvolvimento de um bom sentido de número (cit. por Morais, 2011).

Para além do ensino do cálculo mental também o ensino de estratégias de cálculo constitui um dos objetivos na aprendizagem da Matemática, no entanto, o Programa de Matemática não é muito claro quanto às estratégias a abordar referindo apenas que deverão ser ensinadas "diferentes estratégias de cálculo baseadas na composição e decomposição de números, nas propriedades das operações e nas relações entre números e entre as operações" (ME, 2007, p. 14).

O desenvolvimento de estratégias pessoais de cálculo mental, aumenta a flexibilidade e a rapidez no processo de escolha de estratégias eficazes. Estas escolhas podem ser feitas "na base da rapidez e da facilidade" tornando o cálculo mental extremamente "criativo e inventivo" (Cebola, 2002, p. 233) pois, uma vez que não há apenas uma resolução única, isto é, uma escolha única na forma dos números serem trabalhados, o cálculo mental é extremamente construtivo e imaginativo. Desta forma, ter facilidade com o cálculo mental é uma manifestação do sentido do número (Cebola, 2002).

1.2. Justificação do tema

Após o período de observação em contexto de 1.º ciclo, foi possível perceber a falta de destreza com o cálculo mental, em diversas situações, por diversos alunos. Várias vezes, foi-me possível observar situações que envolviam diretamente o uso do cálculo mental e que se tornavam momentos de dificuldade e de apreensão para alguns alunos. Já o uso de estratégias de cálculo tornou-se quase impercetível quando lhes era pedido que justificassem e argumentassem ao uso das mesmas em situações de cálculo mental.

Depois de uma conversa com a professora cooperante percebi que, decorrente do ano letivo anterior, estes alunos estariam muito "presos" e "agarrados" ao algoritmo formal, com o uso de papel e lápis, em detrimento do uso rotineiro do cálculo mental.

Considerando a conveniência de fomentar o trabalho com o cálculo mental e com as estratégias de cálculo nestes alunos e as referências enunciadas anteriormente percebe-se a extrema importância e pertinência de ser trabalhado este tema nas aulas de matemática.

O estímulo de situações que envolvem o cálculo mental e mais especificamente estratégias de cálculo para a multiplicação e para a divisão tornam-se fundamentais e imprescindíveis para o desenvolvimento de competências de cálculo e de sentido de número.

Outro aspeto que, considerei pertinente para este estudo foi a introdução do jogo do 24 como promotor do desenvolvimento do cálculo mental. Esta opção assumiu um caráter mais pessoal, pois durante o meu percurso escolar de ensino básico foi-me dada a oportunidade de jogar o jogo do 24 e, na altura, considerei o jogo extremamente útil e eficaz no desenvolvimento do cálculo mental. Assim, entendi que este jogo poderia também contribuir para uma melhoria na destreza com os números e com o cálculo mental destes alunos.

Outro fator a apontar, deve-se ao facto de existir ainda pouca exploração quanto às estratégias de cálculo mental para a multiplicação e para a divisão e, praticamente nenhum estudo a comprovar a eficácia ou não do jogo do 24 para o desenvolvimento do cálculo mental.

1.3. *Objetivos do estudo e questões de investigação*

O presente estudo pretende identificar e comparar as estratégias de cálculo mental utilizadas por alunos do 1.º e do 2.º ciclo do ensino básico, trabalhando com os alunos a aprendizagem de estratégias facilitadoras da destreza no cálculo mental, utilizando o jogo do 24 como promotor do desenvolvimento do cálculo mental e criando oportunidades de comunicação matemática para expressar as estratégias utilizadas e os respetivos raciocínios. Assim sendo, surgiu uma questão central "Como desenvolver nos alunos uma boa fluência no cálculo mental?" que deu origem a quatro subquestões que sustentam a investigação:

1) Quais são a estratégias de cálculo mental para a multiplicação e a divisão utilizadas por alunos do 4.º ano e do 6.º ano de escolaridade?

2) Que diferenças existem nas estratégias de cálculo mental para a multiplicação e para a divisão utilizadas por alunos do 4.º e do 6.º ano de escolaridade?

3) Que tarefas se devem promover para desenvolver nos alunos o cálculo mental?

4) Quais os contributos das estratégias de cálculo para o desenvolvimento do cálculo mental?

5) De que forma poderá o jogo do 24 ajudar na promoção do desenvolvimento da destreza no cálculo mental?

1.4. *Organização do Relatório*

O Capítulo I apresenta uma breve introdução ao tema e ao estudo em questão, patenteando a pertinência e a relevância deste tema e as questões de investigação que sustentam este estudo.

O capítulo II expõe uma síntese de vários contributos teóricos mais relevantes para este estudo, fazendo referência aos conceitos de sentido de número, cálculo mental, estratégias de cálculo, e ensino do cálculo mental, bem como uma sucinta análise das orientações curriculares referentes ao tema Números e Operações evidenciadas nos documentos normativos para o ensino básico.

O Capítulo III exibe a metodologia adotada neste estudo ajustada à intervenção pedagógica desenvolvida. Assim, é identificado e apresentado o procedimento metodológico, o plano geral de intervenção, nomeadamente, o contexto onde o estudo se desenvolveu e a operacionalização e os procedimentos adotados, e os instrumentos de recolha de dados.

O Capítulo IV descreve as atividades realizadas em ambos os contextos, a análise e a discussão dos resultados face aos dados recolhidos no 4.º e no 6.º ano de escolaridade.

Por fim, o Capítulo V, das considerações finais, inclui as principais conclusões do estudo, respondendo às questões de investigação levantadas inicialmente, apresenta uma pequena reflexão crítica inerente ao trabalho desenvolvido ao longo da Prática de Ensino Supervisionada, algumas limitações deste estudo, assim como, algumas recomendações para futuras investigações.

CAPÍTULO II- ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo, apresento alguns conceitos e algumas perspetivas relativas ao cálculo mental e ao sentido do número, reforçando a importância deste para um bom desenvolvimento da destreza com o cálculo mental. Para além disto, exponho uma abordagem e análise dos documentos normativos relativos à Matemática no 1.º e no 2.º ciclo. Apresento também, alguns aspetos subjacentes ao ambiente de aprendizagem e ao papel do professor enquanto mediador e responsável pela escolha e aplicação de atividades ligadas ao cálculo mental promovendo uma aprendizagem significativa.

Termino assim, com a súmula das estratégias de cálculo mental para a multiplicação e para a divisão e da apresentação do jogo do 24.

2.1. *Do Sentido do Número ao Cálculo Mental*

O número e o cálculo mental estão presentes no quotidiano da criança desde muito cedo. À medida que a criança vai crescendo e desenvolvendo a sua linguagem oral apercebe-se que o número e os cálculos numéricos surgem muito antes da entrada na escola formal. Nesta fase, as crianças ainda não recorrem ao cálculo escrito mas, sem se aperceberem já estão a desenvolver algumas noções de sentido de número e de estratégias de cálculo mental.

Muitos têm sido os autores que procuram definir sentido do número. Para Serrazina (2002) "ter sentido do número implica perceber as diferentes utilizações dos números: na contagem, na ordenação, na localização, na estimação numérica e de cálculos, mas também nas medidas e na estimação de medidas" (p. 58).

Segundo o National Council of Teachers of Mathematics (1989), sentido do número sugere uma intuição acerca dos números seguindo todos os significados que os números possam ter, sendo eles: o desenvolvimento dos conceitos elementares de número; a exploração das relações entre os números através de materiais manipuláveis; a compreensão do valor relativo dos números; o desenvolvimento da intuição do efeito relativo das operações nos números e o desenvolvimento de referenciais para medir objetos comuns e situações do mundo que nos rodeia.

No mesmo sentido, McIntosh et al. (1992) referem que:

> " number sense refers to a person´s general understanding of number and operations along with the ability and inclination to use this understanding in flexible ways to make mathematical judgements and to develop useful strategies for handling numbers and operations " (p. 3).

Cebola (2002) defende que o sentido do número é algo impreciso e pessoal e define-se como a compreensão que cada pessoa tem dos números e das operações. "Esta compreensão inclui não só a capacidade mas também a tendência que se possui para desenvolver estratégias úteis que envolvam números e operações como um meio de comunicação, processamento e interpretação de informação, na resolução de problemas" (Cebola, 200, p.226).

Como vários autores defendem, o sentido do número inicia-se antes da entrada na escola e desenvolve-se ao longo do percurso escolar e durante toda a vida, sendo por isso um processo gradual e evolutivo (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; McIntosh et al., 1992; Serrazina, 2002; Vieira & Cruz, 2007; Castro & Rodrigues, 2008). Assim, os números não devem ser trabalhados de forma isolada, mas nas situações presentes do dia-a-dia (Serrazina, 2002) e proporcionando aos alunos um contacto próximo com objetos manipuláveis de forma a construírem o seu próprio conhecimento, embora não nos possamos esquecer que, quando a criança entra na escola formal, já possui alguns conhecimentos intuitivos sobre os números e das relações numéricas. Assim, o professor deve estabelecer conexões entre os conhecimentos que já possuem com os novos a adquirir (Serrazina, 2002).

Em Portugal, o termo sentido de número há muito que foi introduzido no ensino e tem ganho cada vez mais relevo nos diferentes documentos orientadores para a educação básica, constituindo-se, assim, como um ponto-chave no tema Números e Operações. Segundo Abrantes, Serrazina & Oliveira (1999), este termo surge como "uma referência central do ensino dos números e do cálculo desde os primeiros anos" (p.46). No Currículo Nacional do Ensino Básico-Competências Essenciais (ME, 2001), apesar de não estar explicitamente exposta a noção de sentido de número, já era visível a ênfase e grande importância atribuída a este tema. No tema de Números e Cálculo é referido que os alunos devem desenvolver as seguintes competências: compreensão global dos números e operações de maneira flexível desenvolvendo estratégias úteis dos números e operações; reconhecer e utilizar as diferentes formas de representação dos números e das propriedades das operações; aptidão para efetuar cálculos mentalmente e decidir qual o método mais apropriado à situação; estimar valores aproximados de resultados de operações bem como a razoabilidade dos resultados obtidos; aptidão para dar sentido a problemas numéricos, reconhecer as operações necessárias e explicar os métodos e raciocínio envolvidos (ME, 2001).

Com o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), o sentido do número ganhou ainda maior relevo, constituindo-se um dos aspetos principais no ensino em Portugal. Neste Programa define-se sentido de número como:

> "a capacidade para decompor números, usar como referência números particulares, tais como 5,10,100 ou 1/2, usar relações entre operações aritméticas para resolver problemas, estimar, compreender que os números podem assumir vários significados (designação, quantidade, localização, ordenação e medida) e reconhecer a grandeza relativa e absoluta de números" (ME, 2007, P.13).

Percebe-se a clara preocupação em integrar de forma sustentada este tópico nos programas da educação básica, mostrando que este desenvolvimento deve iniciar-se no pré-escolar até ao 12º ano de escolaridade. O tema Números e Operações surge em todos os ciclos e o seu estudo tem por base três ideias fundamentais: "promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência no cálculo" (ME, 2007, p.7).

Este documento refere também a importância da articulação com o 2.º ciclo, pois neste ciclo, a aprendizagem aprofunda esta compreensão e esta destreza, e amplia-as aos números inteiros e racionais não negativos na forma de fração tendo sempre em vista o desenvolvimento do sentido de número (ME, 2007).

O sentido de número está intimamente relacionado com o sentido das operações. Segundo o NCTM (1989), o sentido das operações assenta em quatro componentes fundamentais: compreender a operação; ter conhecimento dos modelos e das propriedades de uma operação; identificar relações entre as operações e tomar consciência dos efeitos de uma operação num par de números.

Mas, para que o desenvolvimento dos conhecimentos inerentes ao sentido de operação seja eficiente é necessário proporcionar ao aluno um conjunto de problemas diversificados onde estes possam verificar que um problema pode ser resolvido recorrendo às várias operações, assim como uma operação pode estar associada a diferentes problemas.

Desta forma, podemos realçar que ambos os sentidos se relacionam e interagem e proporcionam uma base para o desenvolvimento para o cálculo mental e escrito.

2.2. Cálculo Mental

O cálculo mental revela-se de extrema importância na Matemática, assumindo-se como um meio para a promoção e desenvolvimento do sentido de número, uma vez que, assenta na procura efetiva de estratégias e de processos eficientes baseados nas propriedades dos números e operações. Neste sentido, o desenvolvimento de estratégias de cálculo favorece também o desenvolvimento do sentido de número.

Muitas vezes, vemos remeter o cálculo mental para simples "cálculos com a cabeça" ou "cálculos de cabeça" sem recurso a qualquer material de escrita ou ao uso da calculadora. Mas será o cálculo mental um cálculo efetuado meramente com a cabeça num processo exclusivamente mental ou poderá recorrer-se a cálculos escritos? Ao recorrer-se aos cálculos escritos não estará a ativar-se cálculos mentais?

Para tentar encontrar uma resposta válida para estas questões, torna-se necessário definir o que se entende por cálculo mental na comunidade científica.

O cálculo mental é um "tipo de cálculo que pretende desarrollar la agilidade mental e el cálculo rápido" mas em que é necessário deixar de se ensinar apenas com casos particulares e ensinar com casos globais (na generalidade) (Gómez, 2005, p. 23). Buys (2008) descreve o cálculo mental como "o cálculo hábil e flexível baseado nas relações numéricas conhecidas e nas características dos números" tratando-se de um "movimento rápido e flexível no mundo dos números" resultando do seu sentido de número (cit. por Morais, 2011, p. 12).

Para Buys (2008) o cálculo mental caracteriza-se como um cálculo: a) com números e não com dígitos, uma vez que os números são vistos como um todo, mantendo o seu valor; b) com utilização de propriedades de cálculo elementares e de relações numéricas; c) apoiado num bom conhecimento dos números e num profundo conhecimento de factos numéricos básicos com números até 20 e até 100; e d) com a utilização de notas intermédias, de acordo com a situação, mas principalmente, efetuado mentalmente (cit. por Morais, 2011, p.12).

Segundo Carvalho (2011) no cálculo com a cabeça "são mobilizadas estratégias que permitem rapidez e eficiência na resposta", podendo ser utilizados o lápis e o papel para efetuar cálculos intermédios (p. 2).

No entanto, nem todos os autores defendem a existência de registos intermédios. Outros defendem que o cálculo mental não se separa do cálculo escrito, como Gómez (2005) referindo que o cálculo mental é caracterizado pelo uso de métodos de cálculo alternativos que se baseiam nas propriedades dos números e das operações, derivados dos princípios de sistema de numeração de base dez. Mas, o mesmo acontece com os cálculos escritos pois, segundo este autor "no hay nada en estas propriedades y princípios que diga que unos son para hacer de cabeza y otros para hacer com lápis y papel" (p. 18), pois em todos os cálculos pode recorrer-se ao uso da mente.

Taton (1969) segue esta linha de pensamento afirmando que o cálculo mental e o cálculo escrito usam o mesmo encadeamento de operações mentais elementares pois, mesmo ao realizar cálculos escritos são sempre acionados mecanismos de cálculo mental.

Também Noteboom, Bokhove e Nelissen (2008 cit. por Morais, 2011) acrescentam que calcular mentalmente "não é o mesmo que fazer os cálculos na cabeça, mas sim com a cabeça e registar determinados passos, se necessário" (p.12) concordando com Buys (2008) que defende os registos intermédios.

No entanto nem toda a comunidade matemática entende o cálculo mental desta forma. Outros autores, defendem que o cálculo mental e o cálculo escrito em nada se sobrepõem, na medida em que, um não depende do outro. Segundo Ponte & Serrazina (2001) o cálculo mental difere dos restantes cálculos escritos e com recurso à calculadora porque é realizado apenas e, exclusivamente, na nossa cabeça (Ponte &

Serrazina, 2001; McIntosh, Reys & Reys, 2007), portanto não se apodera de utensílios como o papel, o lápis e/ou a calculadora.

Segundo Verschafel, Greer e De Corte (2007) "não é a presença ou ausência de papel e lápis, mas sim a natureza das entidades matemáticas e as ações que são cruciais na distinção entre cálculo mental e algoritmos escritos (cit. por Teixeira, 2014, p.26)

O autor Janeiro (2007) esclarece que o cálculo mental é o oposto do cálculo algorítmico escrito que é usado tradicionalmente nas escolas e é também flexível, pois permite que sejam utilizadas diferentes estratégias. Ao calcular de cabeça, em pensamento, imaginando a execução do algoritmo não no papel mas sim "no tecto", estamos a fazer um cálculo mentalmente sem que se trate verdadeiramente de cálculo mental (Janeiro, 2007).

Plunkett (1979 citado por Matos & Serrazina, 2000) comparou os métodos utilizados no algoritmo convencional e nos criados aquando da utilização do cálculo mental e conclui que:

> "Os algoritmos escritos são estandardizados, condensados (resumindo vários passos envolvendo a distributividade e a associatividade), eficientes, automáticos, simbólicos, gerais e analíticos (requerendo que os números sejam partidos e os seus dígitos considerados separadamente); não são facilmente interiorizados (porque não correspondem à forma como as pessoas normalmente pensam sobre os números) e encorajam a não necessidade de compreensão" (p. 259).

Ao calcularem mentalmente num formato horizontal, os alunos vêm os números como "números", e não os vêm apenas como dígitos sem relação entre eles como acontece muitas vezes nos algoritmos (McIntosh, Reys & Reys 1997; Serrazina & Oliveira, 2007 & Brocardo, 2011). Assim, o cálculo mental torna-se muito mais significativo estimulando não apenas a compreensão dos conceitos e o desenvolvimento da competência de cálculo, mas também o sentido dos números e a compreensão das suas relações (McIntosh, Reys & Reys, 1997) e, embora a maior parte dos cálculos seja feita de cabeça, considera-se a possibilidade de realizar registos intermédios" (Brocardo, 2011,p.3).

Também Sowder (em Cebola, 2002) e Matos & Serrazina (2000) referem que o cálculo mental eficiente utiliza algoritmos diferentes dos que são usados nos cálculos de papel e lápis. Segundo Abrantes et al. os algoritmos mentais são: a) variáveis, existindo uma diversidade de maneiras para realizar um mesmo cálculo; b) flexíveis e podem ser adaptados facilitando o cálculo; c) ativos, na medida em que permitem ao utilizador escolher um método; d) globais uma vez que os números são vistos como um todo e não apenas como dígitos; e) construtivos, pois na maioria das vezes começam com o primeiro dos números apresentados; f) requerentes de uma total compreensão que por sua vez será desenvolvida pelo seu uso; g) indicadores de uma aproximação da resposta, uma vez que o cálculo normalmente inicia-se pelo dígito da esquerda.

Neste sentido, o cálculo mental e o cálculo escrito complementam-se pois, o cálculo mental é pensado transportando as propriedades dos números, das operações e das relações estabelecidas entre ambos e não mecanizado, podendo no entanto, recorrer a alguns registos escritos.

A investigação diz-nos que deve começar-se por desenvolver o cálculo mental e as estratégias de cálculo ao invés de introduzir prematuramente os algoritmos formais. Esta introdução prematura dos algoritmos bloqueia o desenvolvimento de outras estratégias de cálculo (Serrazina, 2002).

"O cálculo mental exige que o utilizador procure um significado para o cálculo em causa, analisando o problema em busca de propriedades numéricas e relações importantes" (Gómez, 2007, p. 102), pois o seu objetivo é o de obter uma resposta exata do problema numérico a resolver (Cebola, 2002), sendo que existem inúmeras possibilidades de resoluções e de métodos existentes, onde o aluno escolhe a forma como vai trabalhar os números. Ou seja, estas escolhas podem ser feitas "na base da rapidez e da facilidade" tornando o cálculo mental extremamente "criativo e inventivo" e que, demonstrar ter facilidade com o cálculo mental "é uma manifestação do sentido do número" (Cebola, 2002, p. 233).

Como diversos autores afirmam, existem diversas estratégias de cálculo mental que devem ser desenvolvidas e exercitadas para criar nos seus utilizadores as ferramentas necessárias para uma utilização rápida e eficaz dos números desenvolvendo a sua destreza no cálculo mental. De acordo com o Programa de Matemática (ME, 2007), " quanto maior for o desenvolvimento das estratégias de cálculo mental mais à-vontade se sentirá o aluno no uso de estratégias de cálculo mais convencionais como os algoritmos das quatro operações" (p.10), pelo que as diferentes estratégias de cálculo mental devem ser trabalhadas nas aulas de matemática.

O cálculo mental deve ser desenvolvido desde a entrada no 1.º ciclo e está intimamente relacionado com o desenvolvimento do sentido de número. Deve ser trabalhado com recurso a situações do quotidiano e baseadas na composição e decomposição de números, nas propriedades das operações e nas relações entre números e entre as operações. Mais tarde, os alunos devem utilizar as estratégias de modo flexível e selecionar as que acham mais eficazes em determinada altura. Nesta altura, deve também trabalhar-se a estimação de resultados bem como a sua razoabilidade (ME, 2007).

O cálculo mental caracteriza-se por: (i) trabalhar com números e não com algarismos; (ii) usar as propriedades das operações e as relações entre números; (iii) implicar um bom desenvolvimento do sentido de número e um saudável conhecimento dos factos numéricos elementares; e (iv) permitir o uso de registos intermédios de acordo com a situação (ME, 2007, p.10).

Deste modo, o desenvolvimento do cálculo mental assume-se, assim, como um dos principais objetivos do tema Números e Operações do Programa de Matemática (2007) ao longo dos ciclos. Com efeito, não deve ser só no 1.º ciclo esta preocupação com a destreza no cálculo mas também, ser estendida ao 2.º ciclo e perspetivar para além dos números naturais, isto é, devem ser criadas condições para que também no 2.º ciclo, e com os números racionais não negativos, sejam desenvolvidas competências de cálculo mental, sendo que, no tema Números e Operações para o 2.º ciclo é indicado que "é importante recorrer a situações que suscitem a estimação do resultado das operações envolvidas antes da realização do cálculo, bem como considerar a utilização das propriedades das operações e utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para as quatro operações usando as suas propriedades (ME, 2007, p.33).

O Programa de Matemática (2007) é consistente quanto à competência de cálculo e à destreza com o cálculo mental sendo que, quanto mais desenvolvida estiver a capacidade de cálculo mental nos alunos mais à vontade os deixará para seguirem as suas abordagens, usarem as suas próprias referências numéricas e adotarem o seu próprio grau de simplificação de cálculos, permitindo-lhes também desenvolver a sua capacidade de estimação e usá-la na análise da razoabilidade dos resultados dos problemas que, por sua vez, aumenta a sua destreza com os números e operações e o nível de confiança para trabalhar os algoritmos convencionais.

Apesar disso, este programa (2007) ainda não é bem explícito quanto às estratégias a adoptar para o ensino do cálculo mental, uma vez que, não existe uma sequência definida para as estratégias de cálculo mental, apesar do documento realçar a importância de se trabalharem estratégias de cálculo "baseadas na composição e decomposição de números, nas propriedades das operações e nas relações entre números e entre operações" (ME, 2007, p. 14).

2.3. Ensino do Cálculo Mental

Vários são os autores que definem critérios e princípios para o ensino do cálculo mental. Taton, por exemplo, (1969) refere que a primeira abordagem ao cálculo mental deve partir de exercícios concretos e só depois com os números abstratos. Já Buys (1992) enumera três etapas básicas na aprendizagem do cálculo mental: etapa da partição onde os números são vistos como objetos sobre uma linha de contagem e as operações são realizadas ao longo dessa linha (quando, por exemplo, o aluno vê o primeiro número como um número por inteiro mas o segundo é visto por partes); etapa de decomposição, onde os números são vistos, primeiramente, como objetos com uma estrutura decimal e as operações são realizadas por decomposição de números baseados nessa estrutura; etapa da variação de estratégias- baseado em propriedades aritméticas nas quais os números são vistos como objetos que podem ser estruturados de várias maneiras e em que as operações são efetuadas com recurso às propriedades apropriadas.

Mas, para se conseguir desenvolver nos alunos competências de cálculo para alcançar uma boa fluência no cálculo mental não basta a intenção e a introdução desse tema nas aulas de matemática. É preciso método e rotina. E, vários autores defendem a regularidade de se trabalhar o cálculo mental na sala de aula (Bourdenet, 2007 cit. por Carvalho, 2011; Taton, 1969).

Desde o início da escolaridade, o professor deve criar rotinas de sala de aula onde se dê importância ao cálculo mental, bem como às estratégias de cálculo, prevalecendo sempre uma relação com os números e com as operações de modo a proporcionar um maior conforto com os números para que possam ser usados de forma flexível desenvolvendo a destreza no cálculo e, utilizando os registos escritos sempre que se achar necessário.

Brocardo (2011) defende que "no desenvolvimento do cálculo mental, é muito importante um trabalho sistemático baseado no conhecimento progressivo e na interiorização de procedimentos, propriedades e relações entre os números e as operações." (p.5).

Taton (1969) valoriza a aprendizagem regular e metódica do cálculo mental com vista à melhoria do trabalho com as quatro operações e Bourdenet (em Carvalho, 2011) realça o desenvolvimento de capacidades transversais como a comunicação, o refletir, o conjeturar, o analisar e o ser crítico.

Também no programa de matemática (ME, 2007) se refere que "a discussão na turma dos vários tipos de estratégias desenvolvidas pelos alunos ajuda-os a construir um reportório de estratégias com os seus próprios limites e flexibilidade e ensina-os, também, a decidir quais são os seus registos mais apropriados e proveitosos" (P.10)

Brocardo (2011) tenta definir uma linha de desenvolvimento de cálculo mental baseado em três categorias, apesar desta ainda ser uma proposta não testada e validada. Na primeira categoria surgem cálculos que devem ser imediatos como 10 x 42 ou 87 x 100 ou 700 x 6. Nestes casos, como se pode verificar, todas as propostas têm como base números múltiplos de 10 que facilmente são identificados nos cálculos e, considera-se que a resposta deve ser quase imediata "uma vez que decorre da aplicação de factos memorizados ou de um insight nas regras e propriedades das operações" (Brocardo, 2011, p.10).

Na segunda categoria definida por esta autora, vêm outros exemplos como 12 x 50 ou 4 x?=100.

Quanto à última categoria são expostas as relações que devem suportar o desenvolvimento do cálculo mental como se pode ver na figura seguinte (x)onde são integrados cálculos em que "pode ser necessário recorrer a registos intermédios" (Brocardo, 2011, p.11):

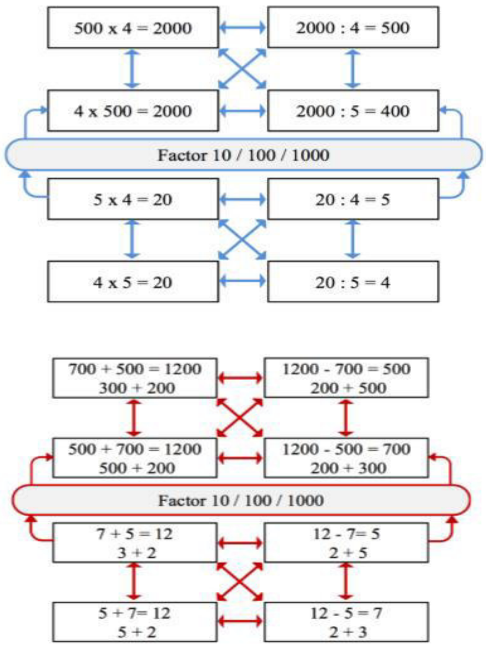


Figura 2.1- Esquema das relações que devem suportar o desenvolvimento do cálculo mental (Brocardo, 2011, p. 12)

Neste sentido, segundo Brocardo, o ensino do cálculo mental deve centrar-se numa progressão baseada nestas três categorias e deve ser fomentado desde muito cedo e de forma gradual. Deve existir uma continuidade entre anos e entre ciclos de forma a haver uma progressão no desenvolvimento do cálculo mental.

Como refere a mesma autora (Brocardo, 2011) "calcular mentalmente é trabalhar com os números e as relações. Desenvolver o cálculo mental é, ao fim ao cabo, desenvolver um sistema de relações e aprender a raciocinar nesse sistema (p. 5). Desta forma, antes de pedir para os alunos aplicarem cálculo mental com um tempo estipulado é necessário trabalhar os números, as operações, as relações entre os números, as relações entre as operações e as relações entre estas relações e as propriedades das operações.

Para ensinar as crianças a calcular mentalmente é preciso saber como o fazer (Brocardo & Serrazina, 2008) e requer "intenção, método e persistência" (Carvalho, 2011, p. 3).

O ambiente sentido na sala de aula é assim essencial para promoção da aprendizagem dos alunos e para que esta seja, no verdadeiro sentido da palavra, significativa para os alunos. Não basta o professor pensar e objetivar o que quer ensinar e proporcionar tempo para o cálculo mental mas sim tornar o tempo de qualidade promovendo um desenvolvimento integral dos seus alunos.

O professor é, na opinião de Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) o principal elemento na criação do ambiente da sala de aula. Claro que o ambiente de sala de aula depende de outros fatores como a cultura da sala de aula, da comunicação, a forma de trabalhar dos alunos e as tarefas propostas (Ponte & Serrazina, 2000).

Mas é o professor que tem o papel de mediador e orientador do processo de ensino-aprendizagem na medida em que é ele quem organiza o processo educativo de acordo com os objetivos planeados e delineados para os seus alunos. Logo, detém o poder de poder de organizar e selecionar os conteúdos programáticos e a sua execução e os mecanismos e práticas de avaliação que são ferramentas essenciais para a reflexão e melhoria das suas próprias práticas educativas.

A forma de trabalho dos alunos é, também, um fator que influencia o ambiente de aprendizagem sendo que, diversos autores defendem várias formas de trabalho seja em grupo, a pares ou individualmente (Ponte & Serrazina, 2000; Matos & Serrazina, 2000; ME, 2007).

O trabalho de grupo poderá ser uma mais-valia na aprendizagem da matemática uma vez que, promove a reflexão, a discussão entre os alunos e a aprendizagem cooperativa (Matos & Serrazina, 2000). Para estes autores " ajudar os colegas pode ser útil aos melhores alunos, ao permitir-lhes observar processos conhecidos e refletir sobre eles a um nível superior. Para isso, é preciso que a ajuda não se limite a dar informações, mas envolva explicação" (p. 149). Mesmo no trabalho em grupo o professor tem um papel crucial e decisivo no desenvolvimento do trabalho, dando apoio aos grupos ajudando a ultrapassar as dificuldades que possam existir e, na mediação e condução da interação entre os grupos e a discussão com toda a turma.

> "Os professores devem, igualmente, criar oportunidades para os alunos partilharem as estratégias que desenvolveram promovendo a discussão em grande grupo. Assim, os alunos têm oportunidade de desenvolver e aperfeiçoar estratégias ao ouvirem as exposições dos raciocínios dos outros alunos" (NCTM, 2007).

Segundo o ME (2007) a negociação de significados é "uma interação entre dois ou mais intervenientes, com pontos de partida e interesses muitas vezes diferentes, que podem dar algo uns aos outros, beneficiando todos" (p.87-88), devendo, por isso, ser dado espaço aos alunos para construir os próprios significados e comunicar as suas ideias com os outros e com o professor.

Desta forma, a comunicação em matemática é fulcral no processo de aprendizagem dos alunos e, "a comunicação, enquanto partilha e debate de ideias, é essencial não só para exprimir e clarificar o próprio pensamento, mas também para a construção significativa de conhecimento" (Wood, Merkel & Uerkwitz, 1996 citado por Morais, 2011, p. 32). Também aqui, o papel do professor é importante já que, "o desenvolvimento da capacidade de comunicação dos alunos depende do professor proporcionar oportunidades adequadas aos seus alunos e também do feedback que lhes dá relativamente aos seus desempenhos" (Ponte & Sousa, 2010, p.33).

No programa de Matemática (ME, 2007), a comunicação é uma capacidade transversal que revela a capacidade dos alunos comunicarem as suas ideias matemáticas, seja oralmente, por escrito ou por outras formas, mas também, de compreenderem e exporem as ideias evidenciadas pelos outros.

Neste sentido, a comunicação deve também, assumir um papel evolutivo na medida em que, no início deve ser dado mais ênfase à comunicação oral mas, progressivamente valorizando também a comunicação escrita e a discussão na turma. No mesmo sentido, os alunos devem denotar uma evolução na forma de exprimir as suas ideias matemáticas e de as descrever, progredindo na tradução de relações da linguagem natural para a linguagem matemática e vice-versa, na variedade de formas de representação matemática que usam e no rigor com que o fazem (Ponte & Sousa, 2010).

Neste seguimento, o Programa de Matemática diz-nos que:

> "os alunos devem ser capazes de, oralmente e por escrito, descrever a sua compreensão matemática e os procedimentos matemáticos que utilizam. Devem, igualmente, explicar o seu raciocínio, bem como interpretar e analisar a informação que lhes é transmitida por diversos meios. Estas capacidades desenvolvem-se comunicando por uma variedade de formas e aperfeiçoando os seus processos de comunicação" (ME, 2007, p.5).

No ensino do cálculo mental, o professor deve encorajar os alunos a explorarem diferentes maneiras e estratégias de resolver o mesmo problema e as discussões efetuadas devem ser orientadas e guiadas pelo professor, de modo a permitir incluir as justificações de que uma determinada estratégia ou resolução é mais eficiente do que outra (Cebola, 2002).

O professor não deve nunca descorar das estratégias (in)corretas dos alunos pois, os alunos só se sentem motivados para experimentarem e discutirem novas ideias matemáticas se as suas respostas forem respeitadas por todos na sala de aula. Além disso, também, o erro pode servir como base para a descoberta das conceções matemáticas dos alunos (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Ponte & Serrazina, 2000).

2.4. Estratégias de cálculo

O ensino do cálculo mental deve ser estruturado e previsto de forma a obter os resultados desejados. Não serve fazer por fazer. Para tal, os professores devem sequenciar algum tipo de atividades e tarefas, bem como os objetivos pretendidos.

A escola, de maneira geral, ensina a calcular de uma determinada maneira mas, normalmente, não ensina como fazer para calcular da melhor maneira. E, quando os professores ensinam, muitas vezes não têm consciência dos processos que aplicam quando calculam mentalmente nem os organizam no papel para os poder ensinar aos seus alunos (Cadeia, 2008).

As estratégias de cálculo são uma boa ferramenta para desenvolver a destreza no cálculo mental. Apesar de se recorrer a cálculos escritos, as estratégias de cálculo mental quando conhecidas, compreendidas e aplicadas são uma mais-valia no uso rápido e eficaz de cálculo, sendo que permitem o uso de estratégias pessoais de cálculo (Ribeiro et al, 2009). Por isso, as crianças devem aprender uma variedade de estratégias e métodos que torne o seu uso mais eficaz, principalmente quando falamos nas estratégias de cálculo para a multiplicação que "é o cálculo mental por excelência" (Cadeia, 2008, p. 95).

De seguida, apresentam-se algumas estratégias que podem servir de suporte ao desenvolvimento de processos de cálculo mental. Atendendo a que o presente estudo se foca no desenvolvimento de estratégias da multiplicação e da divisão, apenas serão mencionadas as relativas a estas duas operações.

2.4.1. Números Naturais

2.4.1.1. Multiplicação

Heirdsfield, Cooper, Mulligan & Irons (1999) realizaram com 95 crianças do 4.º ano até ao final do 6.º ano demonstrando as estratégias de cálculo mental utilizadas para a multiplicação. Perante esse estudo as crianças mostraram que para a contagem simples, usaram fatos conhecidos ou derivados para combinações de pequenos números e estratégias mais diversificadas para as grandes combinações de números.

De seguida, podem ver-se as estratégias surgidas neste estudo, categorizadas na tabela seguinte.

1) Counting (co) Qualquer forma de estratégia de contagem, contagem da frente para trás, repetição da adição e subtração, utilização de dobros e metades. 5 x 8 5, 10, 15 …
2) Basic Fact (BF) Usam factos derivados ou conhecidos da multiplicação e da divisão 5 x 8 Se 10 x 8 = 80 então 5 x 8 = 40
3) RL separated Os números são separados pelos seus valores de posição e opera-se da direita para a esquerda 5 x 19 = 5 x 9 = (40+5) 5 x 10 = 50 50 40 + 5 = 90 + 5 = 95
4) LR separated Os números são separados pelos seus valores de posição e opera-se da esquerda para a direita 5 x 19 = 5 x 10 = 50 5 x 9 = 45 50 45 = 95
5) Wholistic (wh) Os números são tratados como um todo 5 x 19 = 5 x 20 – 5 = 100 – 5 = 95

Tabela 2.1.- Estratégias de multiplicação adaptadas de Heirdsfield et al., 1999

Para alcançar o desenvolvimento do sentido de número e não apenas um conjunto de habilidades, afigura-se necessário desenvolver a proficiência de cálculo mental através da aquisição de estratégias de autodesenvolvimento ou espontâneas, em vez de memorização de procedimentos. Algumas destas estratégias têm sido utilizadas (por exemplo, a adição repetida, a decomposição e a compensação para a multiplicação, o uso da multiplicação e divisão para a divisão) (Kamii, Lewis, & Livingston, 1993; Reys & Barger, 1994 citado por Heirdsfield et al., 1999).

Neste sentido, vários autores (Cadeia, Oliveira & Sousa, 2006; Ribeiro et al., 2009; Vale & Pimentel, 2006 em Cadeia, 2008) definiram e categorizaram diferentes estratégias de cálculo sendo que algumas se sobrepõem. Desta forma, apresento de seguida, algumas das estratégias compiladas e agrupadas numa tabela.

Estratégias de contagem	Adições sucessivas	48 x 8 = 48 + 48 + 48 + 48 + 48 + 48 + 48 + 48 = 384
	Uso de dobros e metades	4 x 15 = 2 x 2 x 15 = 2 x 30
Decomposição	Decompor um dos fatores	36 x 23 = 36 x (20+3) = 36 x 20 + 36 x 3 = 720 + 108
	Decompor um dos fatores em produtos de múltiplos de 10	20 x 13 = 2 x 10 x 13
Fatorização	Fatorizar um dos fatores	12 x 4 = 2 x 6 x 4
Compensação	Procurar o múltiplo de 10 mais próximo e contar para trás	8 x 99 = 8 x 100 – 8 x 1 = 800 – 8 = 792 48 x 25 = 50 x 25 – 2 x 25 = 1250 – 50 = 1200
Decomposição + Compensação	Decompor um dos fatores e compensar para obter a dezena, centena, …	15 x 48 = (10 + 5) x 48 = 10 x 48 + 5 x 48 = 480 + (10 x 48) : 2 = 480 + 480 : 2 = 480 + 240 = 720
Produto de Múltiplos de 10	Acrescentar um zero à direita	60 x 7 = 6 x 7 = 42 0
	Produtos de Múltiplos de 10 para Obter potências de 10	60 x 70 = (6 x 7) x (10 x 10)= 42 x 100 = 4200
Substituição	Substituir uma multiplicação por uma multiplicação e uma divisão	48 x 25 = 48 x 100 : 4 = 4800 : 4 = 1200
Uso das propriedades das operações	Recorre à operação inversa	6 x ? = 24 e 24 : 6 = 4
	Uso da propriedade comutativa	5 x 14 x 2 = 5 x 2 x 14
	Uso da propriedade associativa	18 x 5 x 2 = 18 x (5 x 2) = 18 x 10

Tabela 2.2. - Estratégias de multiplicação

2.4.1.2. DIVISÃO

1) Counting (co)

Qualquer forma de estratégia de contagem, contagem da frente para trás, repetição da adição e subtração, utilização de dobros e metades.

24 : 4   4, 8, 12 … até chegar a 24

2) Basic Fact (BF)

Usam factos derivados ou conhecidos da multiplicação e da divisão

24 : 4 =
4 x ? = 24 logo 24 : 4 = 6

24 : 4 =
5 x 4 = 20
6 x 4 = 24

3) RL separated

Os números são separados pelos seus valores de posição e opera-se da direita para a esquerda

100 : 5   10 : 5 = 2   = 20
0 : 5 = 0

4) LR separated

Os números são separados pelos seus valores de posição e opera-se da esquerda para a direita

100 : 5   0 : 5 = 0   = 20
10 : 5 = 2

5) Wholistic (wh)

Os números são tratados como um todo

100 : 5 =
100: 10 = 10 e 10 x 2 = 20

Tabela 2.3. Estratégias da divisão adaptadas de Heirdsfield et al., 1999

Da mesma forma que compilei algumas estratégias de cálculo para a multiplicação, também selecionei as estratégias relativas à divisão numa única tabela:

Contagem	Subtrações Sucessivas	24 : 4 = 24 – 4 … 4 – 4 = 0
	Adições sucessivas	24 : 4 = 4, 8, 12, 16, 20, 24 → 6
Factorização	Factorizar o divisor procurando o múltiplo de 10 mais próximo	160 : 20 = 160 : 10 x 2 = 80 : 10 = 8
	Factorizar o divisor em fatores iguais (potências de 2)	160 : 4 = 160 : 2 : 2 = 80 : 2 = 40
	Fatorizar o dividendo	180 : 2 = (10x8) : 2 =
Decomposição	Decompor o dividendo	129 : 3 = (120 + 9) : 3 = 120 : 3 + 9 : 3 = 40 + 3 = 43
Compensação	Procurar o múltiplo de 10 mais próximo	96 : 2 = (100 – 4) : 2 = 100 : 2 – 4 : 2 = 48

Substituição	Substituir a divisão por uma divisão e uma multiplicação	140 : 5 = 140 : 10 x 2 = 14 x 2 = 28
Quociente de múltiplos de 10	Retira os zeros	$12\cancel{0} : 1\cancel{0} = 12$
Uso das propriedades das operações	Recorrer à operação inversa	6 x 4 = 24 então 24 : 4 = 6
. **Uso mental do algoritmo**	O algoritmo é visualizado mentalmente como de fosse utilizado papel e lápis	
Multiplicar por 11 um número de dois algarismos	- Se a soma dos dois algarismos é igual ou inferior a 9 o produto terá como algarismo das centenas o algarismo das dezenas do número a multiplicar por 11 e como algarismo das unidades o das unidades desse mesmo número. O algarismo das dezenas do produto será a soma desses dois algarismos. - Se a soma dos dois algarismos é superior a 9 o produto terá como algarismo das centenas o algarismo das dezenas do número a multiplicar por 11 adicionado de uma unidade e os restantes obtêm-se da mesma forma que no caso anterior. 25 x 11= 2 ___ 5 = 275 48 x 11 = 4 ___ 8 =528 2 + 5 ~~4~~ + 8 5	

Tabela 2.4. Estratégias da divisão

2.4.2. NÚMEROS RACIONAIS NÃO NEGATIVOS

Caney e Watson (2003) realçaram a importância de perceber a relação entre diferentes representações de um número racional para que se consiga desenvolver o cálculo mental com números racionais. Estas autoras referem onze estratégias usadas pelos alunos do seu estudo:

1) **Mudança de operação** Uso das operações inversas. Multiplicação / Divisão Adição/ Subtração 3 : 0,5 mudança da divisão para a multiplicação

Tabela 2.5. Estratégias de cálculo para os números racionais não negativos, adaptado de Caney & Watson, 2003.

Tabela 2.5. Estratégias de cálculo para os números racionais não negativos, adaptado de Caney & Watson, 2003 (continuação)

2) Mudança de representação

Utilização das diferentes representações de um número racional (fração, decimal, percentagem) ou de números inteiros referentes a 10/100

Frações para Decimais e Decimais para Frações

Percentagem para Frações

Números referentes a 10/100

¾ - ½ = transforma-se as frações em decimais 0,75 – 0, 25

0,5 + 0,75 transforma-se os decimais em frações ½ + ¾

25 % de 80 transforma-se para fração 25 % de ¼

0,19 + 0,1 representa-se o 0,19 em 19 e o 0,1 em 10

3) Utilização de equivalências

Utilização de representações equivalentes.

Na operação ¾ - ½ a fração é reconhecida como 2/4.

4) Utilização de fatos conhecidos

Os alunos fazem algumas correspondências com o que já sabem.

No cálculo de 10% de 45, usam o conhecimento que têm sobre 10% para retirar primeiro 10% de 40 e depois de 10% de 50.

5) Repetição de operações

Os alunos efetuam adições/multiplicações sucessivas ou utilizam dobros e metades.

Para calcular 4x(3/4) multiplicam a fração duas vezes e no cálculo de 25% de 80, calcula a metade de 80 e depois novamente a metade da metade anterior.

6) Estabelecer ligações

Os alunos estabelecem ligações entre números.

6,2 + 1,9 consideram 1,9 como 2.

7) Trabalha com partes de um segundo número

Para calcularem 10 % de 45 dividem 40 por 10 e de seguida 5 por 10

Ou dividem por partes quando 0,5 + 0,75 transformam o 0,75 em 0,5 + 0,25

8) Trabalha com os números da esquerda para a direita

Primeiro operam com a parte inteira só depois com a parte decimal ou dividem o número por valor posicional apenas após a vírgula, trabalhando primeiro com as décimas e depois com as centésimas.

4,5 – 3,3 primeiro calculam 4-3= 1 e depois 0,5 – 0,3 = 0,2

Tabela 2.5. Estratégias de cálculo para os números racionais não negativos, adaptado de Caney & Watson, 2003 (continuação)

9) Utilização de imagens mentais Constroem mentalmente representações pictóricas e operam adicionando ou subtraindo partes
10) Utilização de imagens mentais Constroem mentalmente representações pictóricas e operam adicionando ou subtraindo partes ¾ - ½ dividem uma imagem, imaginando um retângulo com 4 partes
11) Uso da forma mental para escrever algoritmos Usam formas mentais de algoritmos em que operam visualizando mentalmente o algoritmo
12) Uso de regras memorizadas Utilizam regras de cálculo memorizadas anteriormente e aplicam rapidamente um processo de cálculo. 1,2 x 10 deslocando a vírgula uma casa para a direita.

2.5. Jogo do 24

Muitos são os autores que defendem a inclusão do jogo nas aulas de matemática.

De acordo com Nogueira (2013), o jogo pode promover o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, a autonomia, a reflexão, a superação de dificuldades, a compreensão de novos conceitos, a avaliação e o desenvolvimento da socialização.

O Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2007) refere que devem ser exploradas experiências matemáticas diversificadas, nomeadamente, o jogo, a par de atividades de investigação, da resolução de problemas e do envolvimento em diferentes projetos.

Já o Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais (ME, 2001) realçava a importância de proporcionar aos alunos diferentes tipos de experiências de aprendizagem, considerando os seus aspetos transversais, bem como a utilização de recursos adequados, ao longo de toda a educação básica, nomeadamente a utilização de jogos. De acordo com este documento:

> "o jogo é um tipo de atividade que alia raciocínio, estratégia, reflexão com desafio e competição de uma forma lúdica muito rica. Os jogos de equipa podem ainda favorecer o trabalho cooperativo. A prática de jogos, em particular dos jogos de estratégia, de observação e de memorização, contribui de uma forma articulada para o desenvolvimento de capacidades matemática para o desenvolvimento pessoal e social" (p.18).

O jogo pode, assim, contribuir para o desenvolvimento de capacidades nos alunos e aumentar a confiança destes face à disciplina.

Hoje em dia, é demonstrada alguma preocupação por parte dos professores em incluir o jogo no processo de ensino aprendizagem da matemática, tirando partido das potencialidades pedagógicas que o jogo tem, não só a nível de aquisição de competências e de conhecimentos como também a um nível social e afetivo permitindo desenvolver aspetos como a cooperação, e a interajuda. Esta atitude em muito se deve, à preocupação dos professores em melhorarem as aprendizagens dos alunos em relação à matemática e na diminuição do insucesso escolar face a esta disciplina.

Colocando-nos do outro lado, dos alunos, percebemos facilmente que, também estes gozam e tiram partido da inclusão do jogo, quando se envolvem na atividade e constroem os seus conhecimentos de forma significativa, quebrando a rotina e a monotonia das aulas de matemática que, muitas vezes, são consideradas desinteressantes.

Se o jogo desperta o interesse e a motivação dos alunos perante a disciplina, devemos então tirar o máximo partido dele, nomeadamente no desenvolvimento do cálculo mental. No entanto, e como em todos os tópicos da matemática, também a inclusão do jogo no processo de ensino aprendizagem deve reger-se por objetivos concretos. "Ao optar por trabalhar a Matemática por meio de jogos, o professor deve ter em conta a importância da definição de conteúdos e de habilidades presentes e o planeamento da sua acção com o objectivo de o jogo não se tornar mero lazer" (Ribeiro, Valério & Gomes, 2009, p.23).

Existe uma variedade de jogos que têm o objetivo de desenvolver e facilitar a destreza com o cálculo mental, principalmente nos processos de contagem, de memorização de factos conhecidos, memorização de tabuadas, entre outros.

Destacam-se alguns jogos presentes na brochura “Cálculo Mental” (Ribeiro, Valério & Gomes, 2009) como: “jogo do 4 em linha”; “jogo do tiro ao alvo”; “jogo do 100 ou acerta 100”; “jogo do STOP”; “bingo da multiplicação”; “jogo das frações”; “jogo do 24”, entre outros sendo que, têm como principais preocupações a aquisição de fatos numéricos, a prática das tabuadas, memorização das mesmas e dos factos da multiplicação, a comparação de frações, cálculo de metades, entre outros.

Neste estudo, apenas se usou o jogo do 24 que é um jogo de cartas, que pode e deve ser implementado nas aulas de matemática e foi introduzido com o intuito de desenvolver o cálculo mental de uma forma lúdica.

Cada carta é composta por 4 números, sendo que, existem três níveis de dificuldade. Assim, cada carta vale 1, 2 ou 3 pontos, conforme o indicado em cada uma e que corresponde ao grau de dificuldade. As cartas para “iniciantes” contêm apenas 4 números de 1 a 9. Mais tarde, quando as crianças já têm alguma facilidade na manipulação do jogo podem ser introduzidos números com dois algarismos, frações, raízes, entre outros.

Neste sentido, o objetivo do jogo é utilizar os quatro números de cada carta, uma e só uma única vez, obtendo 24, sendo que para isso, poderão recorrer a uma ou várias operações (x, :, -, +).

Este jogo, pode facilmente ser adaptado e assumir outras variantes, quer na solução (em vez de 24 substituir por 6 ou 12 ou 18…), quer na essência do jogo, isto é, variar o número de jogadores, variar nos números dados aumentando a complexidade do jogo.

O jogo do 24 é uma ferramenta útil para trabalhar e desenvolver a destreza com os números, uma vez que permite, adquirir e memorizar factos numéricos, adquirir e memorizar tabuadas, trabalhar com as quatro operações, permite o uso flexível de estratégias pessoais de cálculo quando na maioria das vezes, a mesma carta apresenta mais do que uma solução possível.

Apesar da importância da inclusão deste jogo nas aulas de matemática e, mais especificamente, no desenvolvimento do cálculo mental, não encontrei até então, um estudo que comprovasse a relevância deste jogo no desenvolvimento da destreza com os números e do cálculo mental, de que forma a rotina deste jogo nas aulas de matemática influenciará ou não esta mesma destreza com os números, se a inclusão do jogo provocará ou não a evolução do uso de estratégias de cálculo mental, entre outras questões pertinentes perante as vantagens do uso do jogo do 24 nas aulas de matemática.

CAPÍTULO III- METODOLOGIA

Este capítulo, refere-se às opções metodológicas adotadas na implementação do projeto, em dois ciclos, no 4.º ano de escolaridade e no 6.º ano de escolaridade. Apresentarei a metodologia adotada, explicitando algumas características da investigação-ação.

Para cada ciclo apresentarei o contexto escolar onde implementei o estudo, a previsão e contextualização das tarefas planeadas, a operacionalização das estratégias pedagógicas e de investigação e os instrumentos da recolha dos dados.

3.1. Opções Metodológicas

De forma a colocar em prática os objetivos desta investigação e a dar resposta às questões de investigação levantadas inicialmente, recorri a uma investigação de natureza qualitativa, já que esta é a que se adequa mais ao estudo e ao contexto em questão.

Bogdan e Biklen (2006) referem que a investigação qualitativa apresenta cinco características específicas: i) “Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal” (p.47) ii) “A investigação qualitativa é descritiva” (p.48) e iii) “Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva” (p.50); iv) “Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos”(p.49); v) “O significado é de importância vital na abordagem qualitativa” (p.50).

Desta forma, os dados recolhidos debruçam-se sobre situações, acontecimentos, sujeitos, interações, atitudes, pensamentos e registos observáveis no contexto, incluindo transcrições de entrevistas, notas de campo, documentos pessoais, entre outros, onde o investigador deve ser isento e imparcial, independentemente de já conhecer o contexto e os sujeitos do estudo pois, como defende Vieira (2004): “a objetividade no estudo de fenómenos, a ausência de juízos de valor e o distanciamento do investigador da realidade que constitui o seu objeto de análise são algumas das caraterísticas habitualmente esperadas dos métodos tradicionais de investigação" (p.61).

Pérez Serrano (1994) define a investigação qualitativa como um processo ativo e rigoroso, na qual se tomam decisões sobre o que é investigado, onde "el foco de atención de los investigadores está en descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos que son observables incorporando la voz de los participantes, sus experiencias, actitude, creencias y reflexiones tal como son esperadas por ellos mismos" (cit. por Gómez, 2007, p. 146).

Este estudo, de carater qualitativo, suporta também, algumas características do modelo de investigação-ação

3.2. Abordagem de investigação-ação: o professor enquanto investigador

A investigação-ação é um processo complexo (Afonso, 2005) que requer do professor uma dupla função. Ora faz dos professores atores no decorrer do processo de ensino-aprendizagem ora investigadores das suas próprias práticas.

Esta abordagem que é muito frequente entre os alunos-professores, é certamente, a mais apropriada para a melhoria das práticas de ensino bem como para o desenvolvimento profissional e pessoal, na medida em que, nos permite rever e reestruturar as nossas práticas pedagógicas e educativas como também nos permite criar ferramentas científicas para melhorarmos a nossa formação.

"A investigação-ação não é um método nem uma técnica. Consiste numa abordagem" (Bell, 2002, p. 22). Através desta abordagem o professor prevê, põe em prática, questiona, reflete, avalia e propõe mudanças, pois assume tanto a função de sujeito da sua própria investigação como de ator de operacionalização, indagação e reflexão da sua ação.

Para Bogdan e Biklen (2006), "a investigação-ação consiste na recolha de informações sistemáticas com o objetivo de promover mudanças sociais" (p. 292) "no sentido de melhorar a qualidade da ação que nela decorre" (Elliott, 1991, citado por Máximo-Esteves, 2008, p.18).

Ebbutt (1983) considera que "la investigación acción es un estúdio sistemático orientado a mejorar la práctica educativa por grupos de sujetos implicados através de sus propias acciones prácticas, y de reflexión sobre los efectos de tales accioones (cit. por Goméz, 2007, p. 222). Para além de melhorar e compreender as práticas sociais ou educativas, a investigação-ação surge normalmente pelas preocupações partilhadas por um grupo (Kemmis & McTaggart, 1992).

Segundo Máximo-Esteves (2008), a investigação-ação é um conceito, teórico e instrumental onde podem ser articulados estes dois elementos sempre com o objetivo de melhorar o seu desempenho e a sua ação, sendo que prevalece a necessidade de conhecer assuntos concretos e resolver problemas reais. Para Kemmis e McTaggart (1992) investigação-ação significa planificar, atuar, observar e refletir mais cuidadosamente, mais sistematicamente e mais rigorosamente do que aquilo que fazemos todos os dias.

"A investigação-ação implica perseverança num espaço contínuo para ligar, relacionar e confrontar ação e reflexão. A reflexão abre novas opções para a ação, e a ação permite reexaminar a reflexão que a orientou" (Afonso, 2005, p.75).

É fundamental que, os professores de hoje, (re)definam as suas práticas de ensino e tendam sempre em melhorá-las, assumindo-se como críticos, reflexivos e autónomos. Assim, esta abordagem abre caminhos para nos tornar em professores capazes de encontrar soluções para os problemas que aparecem no percurso de ensino aprendizagem, como também para abarcar as alterações necessárias dessa e nessa prática. Portanto, "a investigação-ação destina-se a ajudar professores e grupos de professores a enfrentarem os desafios e problemas das suas práticas, e a concretizarem inovações de uma forma reflexiva" (Altrichter et al, 1993, cit. por Afonso, 2005, p. 74).

Durante o processo de implementação do projeto, colocado em prática em ambos os ciclos, tive a dupla função: de professora e investigadora. E, para isso, socorri-me das etapas do percurso a percorrer: a observação, a planificação, a ação, a reflexão. Ora esta reflexão definiu a abertura para um novo percurso a ser reestruturado e desenhado de acordo com os resultados obtidos na ação, que por sua vez, resultará em novas experiências sistemáticas de ação reflexiva, tendo em vista a mudança e a renovação das práticas educativas.

Deste modo, este ciclo não se fecha nele próprio mas, antes, abre novos caminhos para novos planeamentos e operacionalizações da ação. Isto é, depois de intervir é hora de avaliar os resultados e refletir. Esta reflexão crítica a par dos resultados obtidos da ação, resultará em dois caminhos possíveis: ou a continuação do trabalho já planificado, colocando em prática o que foi desenhado e definido anteriormente, se os resultados obtidos vão de encontro com o que é esperado ou, por outro lado, se estes resultados não se enquadram com o que foi planificado e com o que foi previsto, é hora de tomar decisões, alterar o percurso e voltar a planificar e a colocar em prática novas estratégias de ação, recomeçando um novo ciclo.

Neste processo, o professor não pode esquecer nunca o papel dos alunos e a sua preocupação em melhorar a qualidade do ensino. Os alunos são agentes ativos neste processo e, como tal, devem ser a prioridade educativa dos professores na medida em que, devem ser criadas as estratégias e as metodologias de acordo com as necessidades do contexto. Deve proporcionar-se aos alunos o contato com diversas formas de trabalhar, sendo individualmente, em pares, em grupos e proporcionar tarefas com objetivos claros do desenvolvimento de competências nos alunos.

3.3. Estudo no 1.º Ciclo e no 2.º Ciclo

3.3.1. Contexto 1.º Ciclo

A prática de ensino supervisionado no 1.º ciclo concretizou-se numa escola no centro da cidade de Braga, pertencente ao agrupamento de escolas André Soares.

A turma onde fui inserida na prática de ensino supervisionada pertence ao 4.º ano de escolaridade e é constituída por 26 alunos, sendo que um foi transferido a meio do ano letivo resultando assim numa turma de 25 alunos. Destes alunos treze são do sexo feminino e 12 do sexo masculino.

As suas idades variam entre os 9/10 anos.

A turma não tem nenhum aluno com necessidades educativas especiais (NEE) a usufruir de algum tipo de medidas educativas ao abrigo do dec. Lei n.º 3/2008 de ensino especializado.

Em geral, a turma é participativa e com alunos muito curiosos, críticos, reflexivos, perspicazes, motivados e interessados em aprender sempre mais, interagindo sempre nas aulas e nas tarefas propostas mas, por vezes, é bastante conversadora onde alguns alunos estão constantemente distraídos mesmo sem perturbar os outros colegas. É necessário chamar atenção várias vezes para cativar a atenção.

Relativamente ao aproveitamento escolar, esta é uma turma muito heterogénea, na medida em que os ritmos de aprendizagem são muito diversificados assim como os níveis de sucesso/insucesso escolar.

3.3.2. Contexto 2.º Ciclo

A prática de ensino supervisionado no 2.º ciclo concretizou-se numa escola no centro da cidade de Braga, pertencente ao agrupamento de escolas André Soares.

A turma onde apliquei o estudo no 2.º ciclo pertence ao 6.º ano de escolaridade e é constituída por 26 alunos. A média das idades é de 12/13 anos. A turma é composta por 19 alunos do sexo feminino e 7 do sexo masculino, sendo que uma aluna foi transferida e inserida nesta turma mais tardiamente que os restantes colegas, estando bem integrada.

Três alunos têm um Plano de Acompanhamento Pedagógico Individual (PAPI) por demonstrarem dificuldades ao nível da Educação Visual, Matemática, Classe de Conjunto, Formação Musical e Instrumento.

É uma turma que, de forma geral, é muito empenhada, motivada e participativa mas em que, por vezes, se torna difícil gerir os elevados níveis de competitividade da turma.

3.3.3. Planeamento do Estudo

Inicialmente, comecei a intervenção com a realização de uma ficha de diagnóstico, com tarefas de cálculo mental para a multiplicação e para a divisão em ambos os ciclos, (sendo que, no 2.º ciclo foram introduzidos os números racionais não negativos) que serviram não só para identificar as estratégias utilizadas pelos alunos, como também, os tipos de erros que surgiam com maior frequência. Através da análise desta ficha, pude desenhar e projetar as intervenções seguintes, de acordo com os resultados que os alunos me demonstraram.

As intervenções do 1.º ciclo, foram realizadas ao longo de 7 sessões, iniciando com a exploração das estratégias da multiplicação, depois a abordagem às estratégias no uso de dobros e de metades, operações inversas, produtos por múltiplos de 10 e, também o jogo do 24. Já no 2.º ciclo, realizaram-se 6 sessões, começando também pela exploração das estratégias de cálculo para a multiplicação mas, posteriormente, foi introduzida a exploração dos números racionais não negativos através das propriedades das operações. Em ambos os ciclos, foram dedicados alguns minutos das duas últimas sessões para práticas de cálculo mental temporizado.

No final das intervenções, foi aplicada uma ficha final, nos dois ciclos, a fim de poder verificar a evolução das estratégias e das aprendizagens efetuadas pelos alunos e, de servir como consolidação das aprendizagens efetuadas, nomeadamente, na aplicação das estratégias de cálculo para a multiplicação e para a divisão.

Figura 3.1. -Sequência do trajeto de aprendizagem do 1.º ciclo e do 2.º ciclo.

3.3.4. Operacionalização

Iniciei a prática de ensino supervisionada com a observação, tendo começado a compreender as dinâmicas da turma, da sala, a gestão do tempo, das tarefas, entre outras. Na segunda semana, já iniciei o auxílio à professora cooperante nas atividades e circulava pela turma com o intuito de poder esclarecer algumas dúvidas e começar a compreender as dificuldades de cada aluno. Na semana seguinte comecei a intervir na área da matemática, ainda que não diretamente na área do meu projeto. Foi durante estas primeiras semanas de prática que decidi, com base nas observações e nas conversas com os alunos e com a professora cooperante, o tema central do meu projeto de investigação.

Definido o tema, achei bastante pertinente construir uma sequência de atividades que fossem de encontro dos objetivos que tinha previsto na construção deste projeto de investigação. Desta forma, este planeamento das tarefas e atividades propostas foram suportados por uma pesquisa bibliográfica sobre o tema e pela observação direta das dificuldades de algumas crianças.

Contudo, estabeleci que apesar de planear uma determinada tarefa ou atividade para uma sessão, poderia a qualquer momento ter que voltar a redefinir a sequência de atividades caso se justificasse para as sessões seguintes, como aliás, aconteceu. Desta forma, desenhei e planifiquei exaustivamente o que pretendia explorar com os alunos, mas ia (re)construindo as sessões e as tarefas de acordo com o desenvolvimento de cada aula/sessão.

Posto isto, agendei e organizei um conjunto de sete sessões para o 1.º ciclo e de seis sessões no 2.º ciclo. O tempo destinado a cada sessão no 1.º ciclo não era rígido, na medida em que, sempre que sentia necessidade de prolongar um pouco a sessão quando ainda surgiam dúvidas, era me dada essa possibilidade. Já no 2.º ciclo, não pude ter essa flexibilidade uma vez que, as aulas têm um tempo limitado e foi estipulado com a professora cooperante o tempo que teria para as sessões.

No 1.º ciclo, em cada sessão foi explorada uma situação diferente de cálculo mental, começando pela multiplicação, depois a exploração de estratégias de dobros e metades, estratégias relacionadas com as operações inversas, do produto e quociente de números por 10, 100 e 1000 e por fim, as estratégias da divisão.

No 2.º ciclo, cada sessão teve a duração de 45 minutos, pois, apesar das aulas estarem distribuídas por blocos de 90 minutos, optamos por dividir os blocos em dois de 45 minutos sendo um deles destinado à professora titular e o outro para a minha intervenção.

Neste contexto, dei continuidade ao trabalho iniciado no 1.º ciclo, começando por explorar as estratégias de cálculo mental na multiplicação, mas ao invés de dar seguimento à abordagem dos dobros e metades optei por não o fazer, uma vez que não seria muito significante trabalhar este conteúdo que já estava bem desenvolvido. Outro aspeto relevante, é que, não teria tempo suficiente para aplicar a mesma sequência de tarefas aplicada no 1.º ciclo, pois o tempo era muito mais reduzido. Avancei então para as operações inversas introduzindo aqui, os números racionais não negativos. Por fim, dediquei duas sessões para o cálculo mental temporizado tal como aconteceu no 1.º ciclo. Paralelamente a estes objetivos, foi introduzido nas sessões o jogo do 24.

As duas últimas sessões foram destinadas ao cálculo mental temporizado em ambos os ciclos, em que no final da sessão dar-se-ia lugar para a discussão de diferentes estratégias utilizadas em grande grupo.

Ao longo destas sessões foi dada primazia e relevância à comunicação matemática e, em especial, à comunicação oral através da realização de discussões da turma sobre as estratégias utilizadas pelos alunos.

No final de cada sessão sentia necessidade de refletir acerca das tarefas propostas, da forma como foram conduzidas, das dificuldades sentidas pelos alunos, da dinâmica do grupo, da condução da discussão oral e se teria de redefinir as atividades seguintes.

Importa referir que foram elaboradas tabelas com previsões para cada sessão e paracada tarefa. Por exemplo, para o produto 5 x 16 elaborei uma tabela com as possíveis estratégias a utilizar pelos alunos, e também dos erros mais prováveis em cada um destes cálculos (ver anexo III). Estas previsões serviam não só como suporte à condução da sequência de tarefas a acontecer, como também aos possíveis imprevistos que poderiam ocorrer em contexto de aula.

As tabelas seguintes demonstram a sequência de tarefas implementadas no 1.ºciclo e no 2.º ciclo, respetivamente.

Fases	Questões	Tarefas	Marcos de aprendizagem
Fase I- Ficha Inicial Diagnóstico	"Quais as estratégias mais utilizadas pelos alunos no cálculo mental?" " Quais os principais erros evidenciados no uso de estratégias de cálculo?"	- Ficha de diagnóstico.	- Relembrar o uso de estratégias de cálculo da divisão e da multiplicação.
Fase II- Intervenção	"Que estratégias de cálculo mental são utilizadas pelos alunos do 4.º e do 6.º ano de escolaridade na multiplicação e na divisão? "Que tarefas/ atividades se devem promover para desenvolver nos alunos o cálculo mental?"; " Quais os contributos das estratégias de cálculo para o desenvolvimento do cálculo mental?" "De que forma poderá o jogo do 24 ajudar na promoção do desenvolvimento da destreza no cálculo mental?"	- Sessão 1: Estratégias da multiplicação - Sessão 2: Aplicar todas as estratégias de cálculo que conseguirem para a multiplicação Jogo do 24 - Sessão 3: Dobros e Metades - Sessão 4: Operações inversas (Relação da multiplicação com a divisão) Jogo do 24 - Sessão 5: Compreender o produto e o quociente de números por 10, 100, e 1000 Jogo do 24 - Sessão 6: Cálculo mental temporizado Jogo do 24 - Sessão 7: Cálculo mental temporizado	- Conhecimento de diferentes estratégias de cálculo para a multiplicação e para a divisão. - Propriedades da multiplicação: distributiva, associativa, comutativa. - Usar produtos conhecidos como referência. - Decomposição de fatores. - Relações de dobro, metade, inverso. - Aplicação de regras da multiplicação e da divisão por múltiplos de 10 - Maior fluência no cálculo. - Desenvolvimento da comunicação matemática.
Fase III- Ficha Final Consolidação de aprendizagens	" Quais os contributos das sessões para o desenvolvimento do cálculo mental?"	- Ficha final/pós-teste	- Consolidação das aprendizagens efetuadas.

Tabela 3.1. Plano Geral da Intervenção do 1.º Ciclo

Fases	Questões	Tarefas	Marcos de aprendizagem
Fase I- Ficha Inicial Diagnóstico	"Quais as estratégias mais utilizadas pelos alunos no cálculo mental?" " Quais os principais erros evidenciados no uso de estratégias de cálculo?"	- Ficha de diagnóstico.	- Relembrar o uso de estratégias de cálculo da divisão e da multiplicação.
Fase II- Intervenção	"Que estratégias de cálculo mental são utilizadas pelos alunos do 4.º e do 6.º ano de escolaridade na multiplicação e na divisão? "Que tarefas/ atividades se devem promover para desenvolver nos alunos o cálculo mental?"; " Quais os contributos das estratégias de cálculo para o desenvolvimento do cálculo mental?" "De que forma poderá o jogo do 24 ajudar na promoção do desenvolvimento da destreza no cálculo mental?"	- Sessão 1: Estratégias da multiplicação - Sessão 2: Aplicar todas as estratégias de cálculo que conseguirem para a multiplicação Jogo do 24 - Sessão 3: Operações inversas (Relação da multiplicação com a divisão) Jogo do 24 - Sessão 4: Continuação. Operações inversas em números racionais não negativos. - Sessão 5: Cálculo mental temporizado Jogo do 24 - Sessão 6: Cálculo mental temporizado	- Conhecimento de diferentes estratégias de cálculo para a multiplicação e para a divisão. - Propriedades da multiplicação: distributiva, associativa, comutativa. - Usar produtos conhecidos como referência. - Decomposição de fatores. - Relações de dobro, metade, inverso. - Aplicação de regras da multiplicação e da divisão por múltiplos de 10 - Maior fluência no cálculo. - Desenvolvimento da comunicação matemática.
Fase III- Ficha Final Consolidação de aprendizagens	" Quais os contributos das sessões para o desenvolvimento do cálculo mental?"	- Ficha final/pós-teste	- Consolidação das aprendizagens efetuadas.

Tabela 3.2. Plano Geral da Intervenção do 2.º Ciclo

3.4. Recolha de dados

A recolha de dados foi baseada nas produções escritas dos alunos, isto é, nas fichas de trabalho que iam sendo feitas nas aulas, inclusive a ficha de diagnóstico e a ficha final. Foram também utilizadas as produções escritas no jogo do 24 como registo escrito sobre as estratégias utilizadas neste jogo. Também se usaram as gravações áudio das discussões em grande grupo e o registo de algumas notas de campo que fui realizando ao longo do projeto. Ainda para proceder à recolha dos dados da investigação, recorri à observação direta, na medida em que, e segundo Máximo-Esteves "permite o conhecimento direto dos fenómenos tal como eles acontecem num determinado contexto" (Máximo-Esteves, 2008, p.87).

Quanto à gestão desta recolha, contei com a ajuda da minha colega de estágio e de sala sempre que sentia essa necessidade.

Já a análise e o tratamento dos dados recolhidos foi feita através de análise de conteúdo, na medida em que foi organizado em categorias sendo que este trabalho de análise foi feito ao longo da investigação.

A categorização define-se por "uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o género, com os critérios previamente definidos. As categorias são rubricas ou classes, que reúnem um grupo de elementos (unidades de registo, no caso da análise de conteúdo) sob um título genérico, agrupamento esse efetuado em razão dos carateres comuns desses elementos" (Bardin, 2004, p.111) sendo que o que permite o agrupamento é a informação comum existente entre eles.

Desta forma, foi construída uma primeira representação de categorias durante as intervenções, tendo por base a revisão de literatura, que serviu como suporte não só para as previsões como para a reflexão que ia fazendo. Os dados recolhidos durante a intervenção, passaram posteriormente por um processo de análise, de interpretação e de categorização, baseados nestas mesmas categorias definidas anteriormente.

CAPÍTULO IV-
DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo são apresentadas as descrições de cada sessão e a análise dos dados recolhidos durante a intervenção para o projeto em ambos os ciclos. Começo com a descrição e análise da ficha de diagnóstico, de seguida a descrição das tarefas em cada sessão e os seus objetivos, é feita depois uma análise e apreciação global da turma em todas as sessões, uma síntese no final de cada sessão com os aspetos mais significativos em cada sessão e, por fim, a análise da ficha final.

4.1. 1.º Ciclo

4.1.1. Ficha de diagnóstico

A ficha de diagnóstico era composta por nove questões, todos relacionados com o cálculo mental e suas estratégias. Ainda que todas as resoluções de todas as tarefas tenham sido analisadas, no que se segue apenas irei apresentar os dados relativos às questões 3, 4, 6 e 9 pois são os relevantes para este estudo. Para cada uma, apresentarei as resoluções dos alunos estudo de caso e também uma síntese global com os resultados de toda a turma.

Tarefa 3

Nesta tarefa era pedido que descobrissem qual o valor em falta aplicando as estratégias de multiplicação e de divisão com múltiplos de 10.

3. Preenche os espaços em branco de forma a obter afirmações corretas.

45 x ______ = 4500 ______ : 10 = 1300 200 : 40 = ______

______ x 50 = 4000 200 x 700 = ______ 4000: ______ = 20

APRECIAÇÃO GLOBAL

A turma foi bastante heterogénea quanto ao número de respostas corretas como pode ver-se na tabela seguinte:

Respondeu acertadamente a todas	2
Respondeu acertadamente a cinco	3
Respondeu acertadamente a quatro	5
Respondeu aceradamente a três	3
Respondeeu acertadamente a duas	5
Respondeeu acertadamente a uma	5
Não respondeu acertadamente a nehuma	2

Tabela 4.1. Número de estratégias evidenciadas na tarefa 3 da ficha de diagnóstico.

Podemos ver, na tabela seguinte, a distribuição das respostas corretas/incorretas por alíneas:

Alíneas	Responderam Corretamente	Responderam Incorretamente	Não Responderam
a) 45 x ___ = 4500	23	2	0
b) ___ : 10 = 1300	15	7	3
c) 200 : 40 = ___	7	13	5
d) ___ x 50 = 4000	8	14	3
e) 200 x 700 = ___	5	20	0
f) 4000 : ___ = 20	9	9	7

Tabela 4.2. Respostas corretas/ incorretas dos alunos à tarefa 3 da ficha de diagnóstico.

Pelo que podemos observar, a primeira alínea foi a que obteve melhores classificações pelo que a sua maioria acertou na resposta, já a que obteve piores resultados foi a penúltima (200x700) onde apenas 5 alunos acertaram na sua resposta e se evidenciaram maiores erros. Muitos alunos indicaram 1400 como solução. Isto é, calcularam corretamente 2x7 mas não contabilizaram a totalidade dos zeros. Talvez por ainda não terem bem adquiridas as regras de multiplicação por 10, 100 e 1000.

Tarefa 4

Na tarefa 4, eram apresentadas duas situações de cálculo, uma de multiplicação e uma de divisão, onde pretendia que os alunos determinassem todas as estratégias de cálculo que conseguissem, alcançando um número elevado de diversidade de estratégias, para perceber quais as mais utilizadas por eles, bem como possíveis erros na sua utilização.

4. Determina mentalmente o resultado das seguintes operações, utilizando todas as ESTRATÉGIAS DE CÁLCULO diferentes que conseguires.

48 x 8 =

24 : 12 =

Figura 4.1. Tarefa 4 da ficha de diagnóstico

APRECIAÇÃO GLOBAL

Na 1ª situação, a grande maioria (21 alunos) indicou apenas uma estratégia de cálculo e quatro alunos encontraram duas estratégias.

Na tabela seguinte, podem ver-se as estratégias mais frequentes:

<table>
<tr><th colspan="2">Estratégias utilizadas</th><th colspan="2">Frequência</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Decomposição</td><td>Decomposição do fator 48 em 40+8 e 24+24 + Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição</td><td>10</td><td rowspan="2">15</td></tr>
<tr><td>Decomposição com erro de cálculo</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Fatorização</td><td>Fatorização do 8 em 2x4</td><td>4</td><td rowspan="2">5</td></tr>
<tr><td>Fatrização com erro de cálculo</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">“Teia”</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Adições sucessivas</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Não Responde ou Erros Evidenciados</td><td colspan="2">8</td></tr>
</table>

Tabela 4.3. Estratégias evidenciadas na alínea a) da tarefa 4 da ficha de diagnóstico

As estratégias utilizadas incidiram maioritariamente sobre a decomposição do fator 48 seguido da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Apesar disso, alguns alunos também recorreram à fatorização.

Dos alunos que aplicaram uma das estratégias acima referenciadas, pode dizer-se que, alguns deles aplicaram a estratégia com erro de cálculo, principalmente no que diz respeito às tabuadas.

Considerando as estratégias aplicadas de forma errada, podem ver-se de seguida alguns exemplos:

Exemplo 1: (40+8) x (8x8) = 320 x 64 = 20480. Este aluno utiliza a decomposição remetendo depois, para a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. No entanto, depois em vez de adicionar acaba por multiplicar as parcelas.

Exemplo 2: (48-8) x 8; 40 x 8= 320; 320 + 2= 322.

Exemplo 3- Uma das alunas optou por tentar "decompor" o 8 em duas vezes quatro (isto é, em 4+4) mas evidenciou um erro na estratégia ao fatorizar o 8 em quatro vezes quatro indicando 48x 4x4.

Relativamente à 2ª situação, de divisão, podemos ver na tabela seguinte as estratégias utilizadas e a sua frequência.

Estratégias utilizadas		**Frequência**
Decomposição		3
Fatorização do 12		1
Uso fatos conhecidos		2
Uso das propriedades das operações - Propriedade inversa		4
Outras	Algoritmo	2
	Representação pictórica	1
Não Responde ou Evidencia Erros		15

Tabela 4.4. Estratégias evidenciadas na alínea b) da tarefa 4 da ficha de diagnóstico

Como podemos verificar neste exercício os alunos recorreram com maior frequência à operação inversa para provar que 24:12=2 e à decomposição do dividendo. No entanto, importa ressalvar que, surgiram muitos erros e muitas dificuldades nesta questão, isto porque, alguns alunos decompuseram o dividendo em números que não são divisíveis por 12. Mostro assim, alguns exemplos:

Exemplos 1: 24:10:2 = 2,4:2=1,2.
Exemplo 2: (20:10) + (4:2) = 2+2 = 4.
Exemplo 3: (20+4) :1= 20:1+4:1 = 24; (20+4) :2= 20:2 + 4:2 = 10 + 2=12.
Exemplo 4: 24:6:6 = 6:6 =1.
Exemplo 5: 20:12=1; 4:12 = 48; 1+48 = 49.

<u>Tarefa 6</u>

Esta tarefa partia de um problema com diferentes resoluções e os alunos teriam de explicar os raciocínios e as estratégias envolvidas. Ora, existiam três estratégias diferentes, sendo que duas estratégias estariam certas e uma errada. Mas, as duas estratégias que estavam corretas apresentavam o resultado da operação errado. Ou seja, os alunos deveriam indicar que a estratégia estaria correta mas que a solução seria 324. Refira-se que o resultado incorreto resultou de um lapso meu mas que, após detetado, foi intencionalmente deixado para ver se os alunos confirmavam os seus resultados. Este exercício, serviria para entender se os alunos conseguiam identificar e perceber as estratégias envolvidas.

6. A turma do Hélio foi a uma visita de estudo ao teatro. Quando terminaram de assistir a uma peça, o Hélio reparou que haviam 9 filas de 36 lugares cada uma. Na escola, discutiram o problema, para saber quantos lugares tinha o teatro. Observa as estratégias utilizadas por alguns alunos e indica qual (ou quais) pensas estar(em) corretas e explica porquê.

Maria: 9 x 36 = 9 x (30 + 6) = 270 + 54 = 342

Pedro: 9 x 36 = 9 x (30 x 6) = 9 x 180 = 1620

Tiago: 9 x 36= 36 + 36 + 36 + 36 + 36 + 36 + 36 + 36 + 36 = 342

Figura 4.2. Tarefa 6 da ficha de diagnóstico

APRECIAÇÃO GLOBAL

Nesta tarefa a maioria dos alunos refere que a estratégia da Maria e do Tiago encontram-se corretas, dando como resultado a solução apresentada, que estava errada, 342. Para tal, usam a decomposição e a propriedade distributiva (repetindo o que está evidenciado no enunciado) para afirmar que a Maria e o Tiago têm ambos razão (no entanto afirmam também que o resultado está correto). Já 5 alunos, mencionaram que nenhum dos resultados se encontram corretos apesar da estratégia do Tiago e da Maria estarem corretas.

<u>Tarefa 9</u>

Por fim, na última tarefa era mostrado um cartão do jogo do 24, de nível de dificuldade 1, para entender quantos e quais os alunos que conheciam o jogo e conseguiam resolvê-lo e solucioná-lo indicando estratégias para tal.

9. Utilizando os quatro algarismos da imagem e apenas uma só vez cada um, tenta chegar a 24, recorrendo a todas as operações que precisares. Apresenta aqui todos os cálculos.

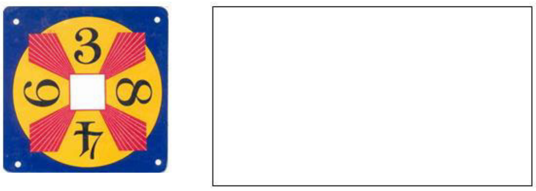


Figura 4.3. Tarefa 9 da ficha de diagnóstico

APRECIAÇÃO GLOBAL

Na turma, apenas um aluno consegui encontrar uma solução para a carta, sendo esta:

(4 x 3 - 8) x 6, ou seja, 4x3=12; 12-8=4; 4x6=24.

SÍNTESE

Através da ficha de diagnóstico, parecem-me existir ainda grandes lacunas ao nível da utilização das estratégias de cálculo mental tanto na multiplicação, como e principalmente, na divisão.

São poucas as estratégias ou a diversidade de estratégias identificadas pelos alunos e estas apresentam-se ainda com erros e confusões na sua aplicação.

Quer isto dizer, que há um grande caminho a percorrer para aumentar a eficiência nas estratégias de cálculo mental destes alunos bem como no envolvimento com o jogo do 24 que, na sua maioria, desconhecem.

4.1.2. 1.ª Sessão

Na primeira intervenção do projeto optei por começar um diálogo com as crianças acerca do cálculo mental e da sua utilidade: perguntei-lhes o que era o cálculo mental e qual a sua utilidade no dia-a-dia. Disseram que cálculo mental significa "fazer contas de cabeça" e que o usavam frequentemente quando iam ao supermercado, por exemplo, para fazer estimativas do dinheiro que vão precisar ou gastar.

Num segundo momento, entreguei a primeira tarefa com as seguintes situações:

12 x 10 =

14 x 4 =

5 x 16 =

Figura 4.4. Tarefas da 1ª sessão

A partir de 12 x 10 os alunos podem facilmente recorrer ao uso da multiplicação com recurso a um múltiplo de 10. No segundo cálculo: 14 x 4 escolhi colocar um número com dois algarismos para multiplicar por um número de um algarismo de forma a facilitar os cálculos. Como é uma primeira sessão, devo começar por números e cálculos mais simples de forma a trabalhar as estratégias utilizadas e depois de consolidadas avançar e complexificar os cálculos.

Ora, escolhi, propositadamente dois números pares (14 e 4) pois, assim, os alunos poderão facilmente decompor ambos os fatores em números mais simples e que consigam aplicar as estratégias pessoais de cálculo.

O terceiro cálculo, 5 x 16 é um pouco mais complexo, uma vez que decidi colocar um fator ímpar para que os alunos tentem utilizar estratégias diferentes das usadas no produto anterior.

Num terceiro momento foi-lhes pedido que trocassem com os colegas do lado as estratégias que utilizaram. Este momento serve para que os alunos possam identificar e conhecer novas estratégias (caso se verifique) e, também, para observarem eventuais erros que possam ter cometido. Ao terem que explicar ao colega do lado as estratégias que utilizaram, promove a comunicação matemática e o uso da linguagem matemática.

O quarto momento foi dedicado à discussão em grande grupo de algumas estratégias utilizadas.

4.1.2.1. Apreciação Global

De forma geral, esta tarefa desenvolveu-se de forma eficaz, sendo que, grande maioria conseguiu realizar os cálculos sem grandes dificuldades talvez por terem tido oportunidade de rever a aplicação de algumas estratégias aquando da realização da ficha de diagnóstico.

Quanto à aplicação das estratégias, a mais frequente na turma foi a decomposição de um fator seguida da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Aqui, a grande maioria conseguiu aplicar corretamente esta estratégia. Nos alunos que tiveram dificuldades, o erro surgiu ao nível da escrita matemática. Também, a grande maioria, utilizou a mesma estratégia nos três produtos.

Das estratégias previstas para o cálculo do primeiro produto, apenas as adições sucessivas não foram utilizadas. Na tabela seguinte podemos ver as estratégias a que os alunos recorreram mais frequentemente:

	Frequência (N=23)		
Estratégias	**Alíneas**		
	12x10	14x4	5x16
Decomposição + Propriedade Distributiva da Multiplicação em relação à adição	13		14
Fatorização	4	9	3
"Teia"	1	2	1
Produto de Múltiplos de 10- retira o zero e acrescenta-o no final da resolução	2	0	0
Adições sucessivas	1	2	2
Erros surgidos	2	3	3

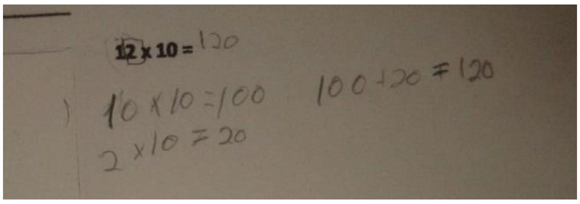
Tabela 4.5. Estratégias evidenciadas na 1ª sessão

As estratégias utilizadas seguem as previstas e planeadas na planificação das tarefas excepto a fatorização, que no produto de 12x10 não foi previsto. Também, em 5x16 foi prevista a substituição, com a utilização do dobro de 5, e a divisão no final por dois (isto é [(10x16) :2] que aliás, não foi utilizado por nenhum aluno.

Posso destacar que, muitos alunos, apesar de escolherem a estratégia adequada aos exercícios em questão, tiveram muitas dificuldades quanto à escrita matemática, principalmente na colocação de parêntesis.
De seguida, mostro alguns exemplos não só de algumas estratégias mencionadas como também, alguns erros evidenciados.

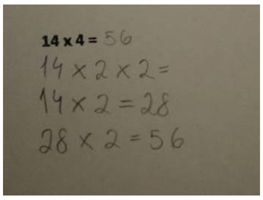
Algumas estratégias:

Exemplo 1- O aluno utilizou uma estratégia prevista: a decomposição do 12 em 10+2 aplicando depois a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (figura 4.5.)



(figura 4.5. Resolução do Miguel da alínea a) da primeira sessão)

Exemplo 2- Na segunda alínea, uma aluna utilizou a factorização do 4 em 2x2. Desta forma, multiplicou o primeiro fator por 2 e, ao resultado obtido multiplicou novamente por dois. Esta estratégia foi prevista e aplicada sem dificuldades.



(Figura 4.6.- Resolução da Ana da alínea b) da primeira sessão)

Exemplo 3- Estratégia da "teia".

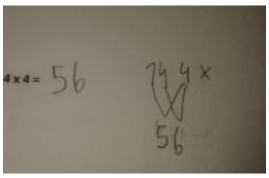


Figura 4.7. Resolução de um aluno da alínea b) da 1ª sessão

Erros evidenciados:

Exemplo 1: Na primeira alínea (12x10) a aluna colocou 12 x 5 x 5. No entanto, multiplicou 12 por 5 e de seguida adicionou o outro 5.

A transcrição 4.1. reflete o pensamento desta aluna quando questionada acerca da estratégia utilizada.

Anita: "eu fiz 12 e 5x5 que é metade de 10."
Professora: "Quanto é a metade de 10?"
Anita: "É 5."
Professora: " E quanto é 5x5?"
Anita: " É 10…. 35… não, é 25."
Professora: " Então se colocaste 10 x 5 x 5 , o 5x5 representa quanto?"
Anita: "25."
Professora: "Então não é a metade de 10".
Anita: "Eu parti o 10 em 5x5."
André: "Pois mas 5x5 não é a mesma coisa que 5+5."
Professora: "Então o que precisávamos de mudar?"
Anita: " Tenho que pôr aqui um mais" (apontando para o sinal de multiplicar)
(…)

Transcrição 4.1. Explicação da Anita e debate com a turma

A aluna fez confusão na aplicação da estratégia pois, pretendia decompor o 10 em 5+5, sendo que à primeira vista não conseguiu entender que 5+5 não teria o mesmo significado que 5x5. Mesmo depois de identificar o erro na sua estratégia a aluna continuou a evidenciar dificuldades em perceber a aplicação desta estratégia, como podemos comprovar na transcrição 4.2.

Anita: "Fica 12 x 5 que é 60, mais 5 que é 65".
Professora: "Então multiplicamos o 12 por um dos 5, e não multiplicamos pelo outro."
Anita: "Não tenho que multiplicar o 12 pelo 5 que é 60 e depois tenho de juntar mais 60"

Transcrição 4.2. Diálogo com a Anita

Ou seja, a aluna ao alterar o sinal da multiplicação pelo de adição, não identificou a necessidade do uso dos parêntesis.

Quando percebeu o que teria de alterar conseguiu facilmente equiparar as situações de 12 x (5+5) com 12x5 x2.

Exemplo 2: " 10x10= 100x2= 200". Neste caso há erro na aplicação da estratégia para calcular 12x10, bem como, na escrita formal.

4.1.2.2. Síntese

De uma forma geral, penso que a aula foi bastante produtiva e significativa para os alunos, tendo as tarefas sido cumpridas de acordo com o que foi planeado.

A maior parte dos alunos conseguiu resolver sem grandes dificuldades as tarefas propostas, ao contrário do que eu esperava, e a grande maioria das estratégias utilizadas foram ao encontro do que tinha previsto aquando das planificações. Relativamente aos erros de cálculo, não se evidenciam muitos erros, à exceção de um ou outro aluno, principalmente, na utilização da estratégia denominada de "teia", que, e como vimos anteriormente, sentiram dificuldades quando se trata do transporte de unidades.

4.1.3. 2ª Sessão

A segunda intervenção decorreu no dia 15 de janeiro e foi destinada à continuação do trabalho das estratégias de cálculo para a multiplicação. Uma vez que, na sessão anterior, as estratégias ocorridas foram essencialmente focadas na decomposição de um dos fatores e na fatorização, pareceu-me ser pertinente dar continuidade ao desenvolvimento das estratégias de cálculo mental para a multiplicação.

Assim, depois de um pequeno diálogo com as crianças acerca do que tínhamos trabalhado no dia anterior realçando que poderiam existir diversas maneiras de resolver a mesma situação, foi-lhes entregue a folha de registo seguinte (figura 4.8.):

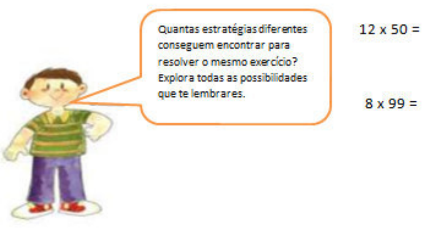


Figura 4.8. Tarefas 2ª sessão

Optei por propor que esta atividade fosse realizada em pares, de modo a que os alunos pudessem sentir maior motivação para encontrar todas as estratégias possíveis e também, porque o trabalho em pares promove uma maior capacidade de comunicação e de cooperação entre eles, essencial para uma boa dinâmica de sala de aula, principalmente sendo muitos destes alunos bastante individualistas e competitivos.

Nesta sessão decidi colocar o 12 x 50 (dois números com dois algarismos) para aumentar o grau de complexidade dos cálculos e para usar estratégias diferentes das utilizadas anteriormente. Optei por colocar um número par (12) e um outro número múltiplo de 10 (50), uma vez que assim poderiam usar estratégias já trabalhadas na aula anterior.

Selecionei o 8 x 99, porque pretendia desenvolver com eles estratégias diferentes das trabalhadas anteriormente (de decomposição), uma vez que, com estes números, previa que utilizassem estratégias de compensar para obter a centena, sendo que o 99 estava muito próximo do 100. Assim, tentei promover estratégias que ainda não tinham sido trabalhadas e que, talvez, fossem mais úteis naquela situação. Ou seja, pretendia não só que os alunos desenvolvessem competências no uso de estratégias eficazes de cálculo, mas que, ao mesmo tempo, percebessem que umas estratégias poderão ser mais úteis e mais eficazes num determinado momento, ao invés de outras.

4.1.3.1. Apreciação Global

É de salientar que as estratégias que estão erradas ou que não evidenciam os procedimentos para chegar à solução final não são contabilizadas como estratégias, uma vez que se apresentam de forma errada, exceto as estratégias que são bem explícitas e apenas contêm erros de cálculo.

Número de estratégias	**Frequência -1.º exercício-12x50**	**Frequência -2.º exercício-8x99**
0	1	1
1	1	2
2	1	5
3	4	3
4	3	0
5	2	1

Tabela 4.6. Número de estratégias evidenciadas nas alíneas a) e b) da 2ª sessão

Desta forma, pode ver-se que, na primeira alínea existiram dois pares de alunos que conseguiram alcançar cinco estratégias diferentes e três pares que conseguiram quatro estratégias, enquanto na segunda alínea nenhum par encontrou quatro estratégias e apenas um par de alunos chegou a cinco estratégias. Já a aplicação de duas estratégias surgiu mais no segundo exercício. Quanto aos restantes número de estratégias aproximaram-se muito em ambos os exercícios.

Relativamente às estratégias evidenciadas na primeira alínea (12x50), podem ver-se na tabela 4.7. :

Estratégias		**Frequência**	
Estratégias de contagem	Adições sucessivas	1	1
Decomposição (com aplicação da propriedade distributiva)	Decompor um dos fatores (12)	11	17
	Decompor um dos fatores (50)	3	
	Decompor ambos os fatores	3	
Fatorização	Factorizar um dos fatores (12)	2	9
	Factorizar um dos fatores (50)	7	
Produto de Múltiplos de 10	Multiplica o 12 por 5 e acrescenta um zero ao resultado	6	6
Teia		2	2
Outras		5	5
Evidencia Erros na estratégia		2	2

Tabela 4.7. Estratégias evidenciadas na alínea a) da 2ª sessão

Pode ver-se na tabela acima que, a estratégia mais utilizada foi a decomposição e logo de seguida a fatorização.

Na decomposição, a decomposição do fator 12 é a estratégia que mais se evidencia, isto talvez porque, 50 é múltiplo de 10 aproximando-se mais das estratégias de fatorização e de produtos de múltiplos de 10 do que da decomposição deste número.

Ainda assim, surgiram algumas estratégias que não previ e outras que foram aplicadas com alguns erros. De seguida apresento alguns exemplos.

Estratégias:

Exemplo 1-

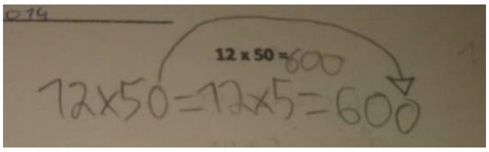


Figura 4.9. Estratégia de um aluno na alínea a) da 2ª sessão

Estratégias não previstas:

Exemplo 1- Esta estratégia apesar de decompor ambos os fatores recorre a uma estratégia diferente das anteriores, uma vez que, ao decompor cada um dos fatores em números iguais, torna-se desnecessário proceder a todos os cálculos de distributividade, isto é, o par de alunos recorre ao dobro do resultado encontrado, traduzindo-se na expressão [(6x25) + (6x25)] x 2.

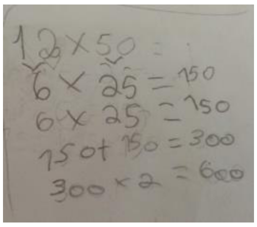


Figura 4.10. Estratégia da Sara na alínea a) da 2ª sessão

Exemplo 2- Este par começou por dividir o 50 por 5. Assim, resultou o produto de 12 por 10.Como inicialmente dividiram por 5, teriam que multiplicar agora por 5, resultando na expressão (12 x 10 x 5). No entanto, este par optou por recorrer à adição sucessiva do 120.

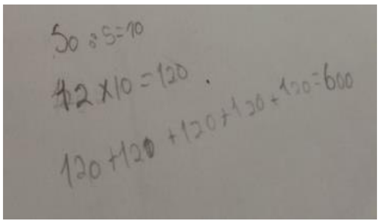


Figura 4.11. Exemplo 2-Estratégia da Rute na alínea a) da 2ª sessão

Exemplo 3: Resolução de um par de alunos: “12x50= 60 x 10=600”

Erros Evidenciados:

Vejamos alguns exemplos de resoluções de alguns pares de alunos que melhoraram com ajuda de outros colegas:

Professora: "O que falhou aqui?" (na seguinte estratégia utilizada por um par de alunos: (10+2) x 50 = 500 x 2)

Rui: " Até aquela parte está bem (apontando para o 10 x 50). Depois não podia fazer 500 x 2, tinha que fazer 50 x 2 + 500."

Depois de o aluno explicar que ao decompor o 12 em 10 +2 teria de multiplicar o 50 pelo 10 e pelo 2.

Professora: "Consegues ver agora o que está errado? Então vem fazer novamente."

Rui: "10 x 50 = 500
2 x 50 = 100
500 + 100 = 600"

Transcrição 4.3. Diálogo com o Rui

Ora com ajuda de outros colegas, que foram explicando o que estaria errado e o que tinha de fazer para que a estratégia ficasse certa, este aluno, conseguiu identificar o erro e corrigi-la.

A tabela seguinte mostra-nos os resultados para a alínea b):

<table>
<tr><th colspan="2">Estratégias</th><th colspan="2">Frequência absoluta</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Estratégias de contagem</td><td>Adições sucessivas</td><td>2</td><td rowspan="2">3</td></tr>
<tr><td>Uso de dobros e metades</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Decomposição (com aplicação da propriedade distributiva)</td><td>Decompor um dos fatores (99)</td><td>10</td><td rowspan="2">11</td></tr>
<tr><td>Decompor um dos fatores (8)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Compensação</td><td>Procurar o múltiplo de 10 mais próximo e contar para trás</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Outras</td><td>Teia</td><td colspan="2">6</td></tr>
<tr><td>Multiplicar um número de um algarismo por 99
8 x 99 = 7 __ 2
Os extremos advém do resultado de 8x9=72
O algarismo das dezenas será "o outro" 9.</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>[8 x (99:3)] x3</td><td colspan="2">3</td></tr>
</table>

Não Responde ou Evidencia Erros na estratégia	2

Tabela 4.8. Estratégias evidenciadas na alínea b) da 2ª sessão

Pode observar-se que, nesta alínea, novamente a estratégia mais utilizada foi a decomposição de um dos fatores, que neste caso, foi o fator 99. A estratégia prevista de compensação, apenas foi utilizada por 2 pares de alunos, talvez porque, não é uma estratégia que utilizem diariamente e que não se sentem tanto à vontade para a utilizar. Por outro lado, três pares de alunos recorreram à substituição do 99 por 33 e multiplicaram por três no final.

Estratégias:

Exemplo 1- Estratégia de decomposição mas que não é apresentada com uma expressão numérica.

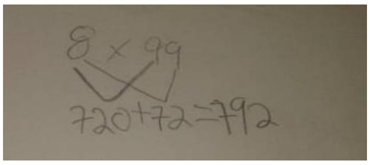


Figura 4.12. Estratégia da Rita na alínea b) da 2ª sessão

Exemplo 2- A figura mostra-nos uma estratégia prevista que consiste em recorrer à Compensação- Procurar o múltiplo de 10 mais próximo e contar para trás (aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração).

No entanto, é preciso referir a forma como é apresentada a estratégia pois, 8x100 (=800) não é o mesmo que 800-8 (=792).

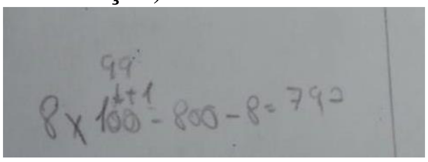


Figura 4.13. Estratégia do Martim na alínea b) da 2ª sessão

Estratégias não previstas:

Exemplo 1- Como podemos verificar, este par calcula a operação 8x9= 72 colocando os algarismos da solução nos extremos. No meio destes dois algarismos é colocado o outro 9 que faltaria. Esta estratégia poderá equiparar-se ao cálculo de um número n por 11, sendo aplicada a mesma estratégia.

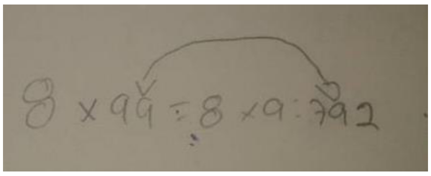


Figura 4.14. Estratégia da Anita na alínea b) da 2ª sessão

Erros evidenciados:

Exemplo 1- Um par de alunos decompôs o 99 em 9+9 acabando por, ao fazer a soma de 72+72, acrescentar o algarismo 9 no meio do resultado para chegar à solução pretendida.

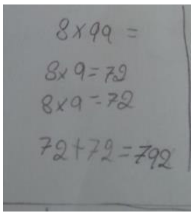


Figura 4.15. Estratégia da Maria na alínea b) da 2ª sessão

4.1.3.2. Síntese

Em relação às tarefas/atividades planeadas e desenvolvidas na aula, penso que foram bastante úteis para o desenvolvimento de estratégias de cálculo dos alunos para a multiplicação, isto porque, conseguiram ver diversas estratégias para a mesma tarefa, com resoluções diferentes das suas, mas também de forma correta.

Talvez, em alguns casos, esperava que demonstrassem um maior número de estratégias nas duas alíneas, mas por outro lado, surgiram também estratégias que não previ e que não esperava que utilizassem. E, isto torna-se extremamente desafiante para mim, não só enquanto professora mas também enquanto investigadora.

Em jeito de conclusão, penso que estas duas sessões foram bastante produtivas, na medida em que, os alunos puderam contactar com uma diversidade de estratégias de cálculo mental para a multiplicação e com possíveis resoluções. Mesmo para mim, foram bastante motivadoras e rendosas pelo facto de terem surgido estratégias e resoluções que não previa, logo assumi o risco de essas estratégias não terem sido pensadas e planeadas.

4.1.4. 3.ª Sessão

A sessão do dia 21 de Janeiro subdividia-se em 4 tarefas e trabalhava as estratégias de cálculo mental através do uso de dobros e metades.

Como já tínhamos trabalhado com as estratégias de multiplicação, optei por iniciar então o trabalho com o dobro e só depois introduzi a metade e as estratégias de divisão.

Inicialmente foi entregue uma folha com estratégias utilizadas por alguns meninos onde são explorados a relação do dobro e da metade entre as tabuadas do 4 e do 8. Pedi que, primeiro lessem o enunciado em voz alta e, depois em pares, descrevessem e explicassem as estratégias utilizadas, como podemos ver na figura:

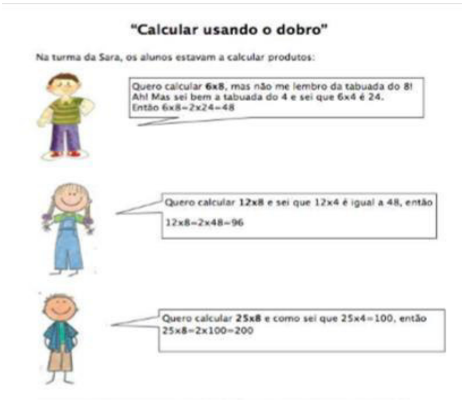


Figura 4.16. Tarefa 1 da 3ª sessão

Na tarefa "Calcular usando o dobro" são apresentadas as expressões: 6 x 8 = 2 x 24 = 48, 12 x 8 = 2 x 48 = 96 e 25 x 8 = 2 x 100 = 200 explorando as noções de dobro e metade.

Depois de terminar esta tarefa, entreguei a segunda tarefa:

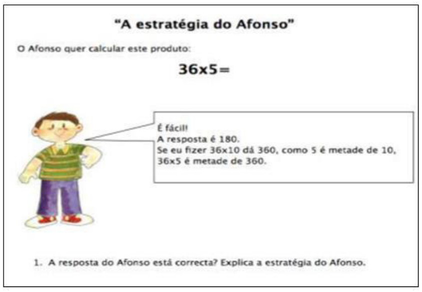


Figura 4.17. Tarefa 2 da 3ª sessão

Novamente, pedi que um aluno lesse em voz alta, o enunciado desta tarefa e que, em pares, a resolvessem.

Na tarefa " A estratégia do Afonso" é novamente trabalhada a noção de dobro e metade mas entre as tabuadas do 5 e do 10. Para tal, começa-se pela exploração de 36 x 5.

Com estas tarefas poderá trabalhar-se também, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Depois, foram entregues uma folha com uma tarefa, com 4 alíneas (como podemos ver na figura 4.18.) e uma outra folha com tarefas de divisão, com 3 alíneas (ver figura 4.19.)

Sabendo que **4 x 7 = 28**, calcula:

- 8x7=
- 2x7=
- 6x7=
- 9x7=

Figura 4.18. Tarefa 3 da 3ª sessão

Sabendo que **24 : 4 = 6**, calcula:

- 24:6=
- 24:2=
- 24:8=

Figura 4.19. Tarefa 4 da 3ª sessão

Esta segunda parte da sessão, dedicada à terceira e quarta tarefa, foi pensada para colocar em prática as estratégias abordadas anteriormente. Como tal, optei por escolher a tabuada do 4 por facilmente se abordarem dobros e metades.

4.1.4.1. Apreciação Global

Na maioria, os alunos demonstraram grandes dificuldades em perceber o que era pedido e na descrição da estratégia. Para além disso, muitos foram os alunos que, se limitaram a reescrever o que estava descrito no enunciado sem revelar nenhum dado novo.

Na primeira tarefa, alguns alunos identificaram a estratégia como sendo o uso do "dobro" explicando por escrito esta relação.

Exemplo 1- Um par de alunos exemplificou a relação do dobro/metade dando alguns exemplos: "12x4=12x2x2=24x2=48; 10 x 8 =10x4x2=40x2=80" exemplificando assim, que poderá achar-se primeiro a metade, e por fim, o dobro dando o resultado pretendido.

Exemplo 2- Outro par de alunos refere que "acharam a metade do multiplicador e multiplicaram os resultados por dois".

Exemplo 3- Outros alunos (pares) exemplificaram através de expressões, como por exemplo, 25 x (8:2) = 25 x 4= 100 x 2. Como podemos verificar, a estratégia é correta mas verifica-se um erro quando colocam a igualdade 25x4 = 100 x 2 pois, não são a mesma coisa.

Exemplo 4- Um par identifica a metade de 8 (=4) e explica a estratégia através da factorização do 8 em 2x4 (metade) identificando 6x8= 6x2x4 ; 6x2=12 ; 12x4=48.

Já para a segunda tarefa, os grupos foram mais homogéneos nas suas respostas, sendo que a grande maioria justificou a estratégia utilizada com a seguinte expressão:

36x5x2, não identificando que teriam que, posteriormente dividir por dois (recorrendo à metade de 10). Mas, mais uma vez, evidenciaram grande confusão a nível de apresentação das expressões, sendo que, vários pares de alunos escreveram da seguinte forma: 36x5x2= 36x10= 360:2= 180. Isto é, a demonstração que fazem não está de acordo com a expressão inicial que apresentam, quando poderiam ter apresentado 36x5= 36x 10:2. A ideia seria de recorrerem à tabuada do 10, facilitando os cálculos e posteriormente achar a sua metade (chegando ao número dado inicialmente do multiplicador que era o 5).

De seguida, apresento um diálogo surgido durante a explicação de uma das estratégias:

É evidenciada a relação de dobro e de metade mas, ao invés de demonstrar esta relação da metade do 10, este par acaba por utilizar a metade de 36, utilizando a expressão: 36x5= 18x5x2 = 90x2 = 180. Quando o questionei acerca da estratégia percebi que este par ainda tinha algumas dúvidas sobre a estratégia enunciada mas acabou por perceber a estratégia utilizada pelo "Afonso", como podemos ver na transcrição a seguir:

Anita: "Fizemos metade de 36x5 e metade de 36 é 18"

Professora: " E como sabem que 18x5 é 90?"

Anita: " Nós fizemos 5x8 que é 40 e depois vai 1. Depois 5x1 é 5 e 5+4= 9 e deu 90. Depois fizemos 2 que é o dobro"

Transcrição 4.4. Explicação da Anita

Ora, para calcular 18x5 esta aluna recorre a formas mentais do algoritmo escrito.

Professora: "Mas como explicariam a estratégia do Afonso? Ele para calcular 36x5 foi multiplicar por 10. Porquê o 10?"

Anita: " Porque 10 é o dobro de 5 (…)"

Depois de a aluna responder que 10 é o dobro de 5 voltei a ler-lhe o enunciado e a explicar o que era dito: que para calcular 36x5 o Afonso foi calcular 36x10 (…) e perguntei então o que tem o Afonso que fazer?

Anita: " Achar a metade. Ele foi buscar a tabuada do 10 que deu 360. Depois como 5 é metade de 10, 36 x 5 é metade de 360 que é 180".

Transcrição 4.5. Diálogo com a Anita

Através deste pequeno diálogo e de questionar a aluna acerca daquela estratégia, a aluna percebeu que se centrava basicamente na relação do dobro e da metade sendo 5 a metade de 10 portanto o resultado seria metade de 360.

De maneira geral, nestas duas tarefas senti que os alunos tiveram bastantes dificuldades em explicar o seu raciocínio e evidenciar a justificação da estratégia utilizada em ambos os enunciados. Apesar de identificarem perentoriamente o uso do dobro e da metade e de conseguirem realçar a sua relação, demonstram grandes dificuldades em transpor para o papel as suas ideias, principalmente, passar para a linguagem matemática, demonstrando vários erros.

Na tarefa 3, previa que os alunos utilizassem com maior frequência a relação do dobro e da metade, explorada na tarefa anterior mas, em algumas alíneas, a maioria recorreu a estratégias abordadas nas aulas anteriores e que, talvez, se sentem mais à vontade para as aplicar. Podemos ver na tabela seguinte as estratégias mais aplicadas:

	Frequência Absoluta (N=12)			
Estratégias	Alínea a) 8x7	Alínea b) 2x7	Alínea c) 6x7	Alínea d) 9x7
Recorre ao dobro	4	0	0	0
Recorre à metade	0	2	0	0
Decomposição	5	7	7	7
Fatorização	2	0	3	2
Associa os fatores conhecidos anteriormente	0	0	1	1
Compensação (Procurar o múltiplo de 10 mais próximo e contar para trás)	0	0	0	1
Não responde adequadamente ou erro na aplicação da estratégia	1	3	1	1

Tabela 4.9. Estratégias evidenciadas na tarefa 3 da 3.ª sessão

Do que pode verificar-se, os alunos recorreram com maior frequência à decomposição de um dos fatores, com exceção da alínea a) que se aproximou bastante do uso do dobro. Talvez por se abordar a tabuada do 8, que se relaciona facilmente com o uso do dobro em relação à tabuada do 4. Ora nesta tarefa, previa que, mais pares de alunos recorressem ao uso de fatores conhecidos, isto é, uma vez que, na primeira alínea facilmente aplicavam a estratégia do uso do dobro e na alínea b) o uso da metade, sendo o resultado metade do valor dado no enunciado, esperava que nas alíneas c) e d) utilizassem estes valores /resultados obtidos para encontrar as soluções de 6x7 e de 9x6. Facilmente, saberiam que 6x7 poderia ser decomposto em 2x7 e 4x7, resultados estes, obtidos nas alíneas anteriores. O que se verificou foi que, grande parte, decompôs o 6 em 3+3 e o 9 em 3+3+3 ou 5+4.

Por fim, na última tarefa, existiram diversos erros na aplicação de uma estratégia, principalmente, na decomposição do divisor. Poderemos visualizar na tabela seguinte a frequência e as estratégias que surgiram na tabela:

	Frequência Absoluta (N=12)		
Estratégias	Alínea a) 24:6=	Alínea b) 24:2=	Alínea c) 24:8=
Decomposição	4	6	0
Fatorização	3	0	6
Uso das propriedades das operações (propriedade inversa)	0	1	0
Teia	0	1	0
Não responde adequadamente ou erro na aplicação da estratégia	5	4	6

Tabela 4.10. Estratégias evidenciadas na tarefa 4 da 3ª sessão

Como podemos verificar, as estratégias distribuem-se, essencialmente, pela decomposição, a fatorização e os erros na aplicação das estratégias. Na alínea a), os erros surgiram, sobretudo devido à decomposição do divisor em 3+3.

A transcrição que podemos ver a seguir, exemplifica alguma da confusão na aplicação desta estratégia:

Professora: " Quem explica esta estratégia?" (que estava escrita no quadro por uma aluna: 24:6= 24: 3+3; 8+8=16;)

Pedro: "Ele decompôs o 6 em 3+3 e depois dividiu 24 por 3 e voltou a dividir 24 por 3, mas a estratégia está correta mas não sei o que falhou (…)"

Transcrição 4.6. Explicação do Pedro

O aluno evidencia alguma confusão, porque entende que algo falhou mas ao mesmo tempo parece-lhe que está correta.

Professora: "A estratégia está correta?"

Alunos: "Não".

Professora: "Porquê?"

Pedro: Porque ela não podia fazer assim, porque ela tinha que fazer 3+3. Não, não", apercebendo-se imediatamente que não estava correto, " tinha que fazer 3x2. Temos que dividir por 2".

Transcrição 4.7. Debate com a turma

O aluno apesar de perceber que não estava correta a estratégia, ainda demonstra alguma confusão.

Tiago: "Não". Colocamos 8:2 porque ali devia ser 2" (apontando para o quadro).
Professora: "Então a Ana fez 24:3 + 24:3 será o mesmo que o que o Pedro sugeriu?"; "O que tínhamos visto sobre esta estratégia?"
Maria: " Quando decompúnhamos o divisor tinha que nos dar uma multiplicação".

Transcrição 4.8. Debate com a turma

Através da discussão em grande grupo, os alunos aperceberam-se dos erros cometidos na aplicação da estratégia e o que deveria ter sido feito de forma diferente.

Na alínea b) as decomposições efetuadas debruçaram-se mais sobre o dividendo, decompondo-o em 12+12, mesmo assim, ainda surgiram alguns pares de alunos que decompuseram o divisor (2) em 1+1. Outros recorreram às propriedades das operações:

Exemplo 1 (alínea b)- Um par recorreu ao uso das propriedades das operações, indicando a operação inversa, isto é, era pedido a resolução de 24:2 e os alunos escreveram 12x2=24

Já na alínea c), não se verificou nenhuma situação de decomposição, mas metade utilizou a fatorização do divisor e outra metade a decomposição deste em 4+4.

4.1.4.2. Síntese

Esta sessão, incidia sobretudo, no uso da comunicação matemática (de forma oral e escrita) sendo que, notei grandes dificuldades a este nível. Mesmo eu, enquanto professora, senti algumas dificuldades em fazer entender o que era pedido e que pretendia que explicassem a estratégia do enunciado.

Nesta tarefa, previa que, os alunos recorressem com maior frequência ao uso de dobros e metades, bem como à relação com os fatos conhecidos (nas alíneas anteriores) o que não se verificou. Talvez, pela falta de à vontade com estas estratégias ou porque, realmente, utilizam muitas mais vezes a decomposição, por exemplo. O que se verificou, foi que, com a utilização da decomposição, surgiram muitos mais erros, que puderam ser explorados e discutidos em grande grupo.

4.1.5. 4.ª Sessão

Esta sessão decorreu no dia 23 de Janeiro e dividiu-se em duas partes, ambas focadas no uso das propriedades da multiplicação e da divisão- as operações inversas.

Inicialmente comecei por discutir em grande grupo, a expressão: 2 x ___ = 12, levando os alunos a perceberem que podem aplicar a operação inversa para descobrir o valor em falta, neste caso, a operação inversa da multiplicação é a divisão. O mesmo acontece quando trocamos a ordem dos fatores associando também, as propriedades da multiplicação – comutativa. Posto isto, entreguei a ficha que é composta por 5 alíneas.

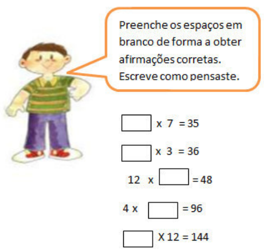


Figura 4.20. Tarefa 1 da 4ª sessão

Depois dos alunos resolverem de forma individual a ficha, procedemos à correção e discussão em grande grupo das estratégias utilizadas. Posteriormente, discutimos em grande grupo a questão: como podemos descobrir o valor que falta nesta expressão: ____: 6 = 2?, levando os alunos a aplicarem a operação inversa, neste caso, a operação inversa da divisão que é a multiplicação.

Foi então entregue a segunda ficha de trabalho, para resolverem individualmente e discutirmos em grande grupo que é composta por 4 alíneas.

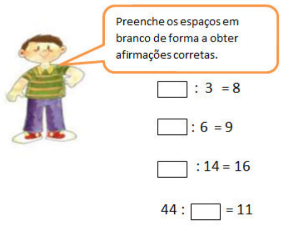


Figura 4.21. Tarefa 2 da 4ª sessão

Com esta exploração, pretendia sobretudo, que os alunos percebessem que a divisão não goza de todas as propriedades da multiplicação, uma vez que, se trocarmos a ordem dos fatores não se obtém o mesmo resultado, ou seja, não goza da propriedade comutativa.

4.1.5.1. Apreciação Global

Nesta tarefa, a maior parte da turma conseguiu resolver a ficha sem grandes dificuldades apesar, de alguns alunos apenas indicarem a operação e o resultado sem indicar qual ou quais as estratégias que usaram para chegar à solução. Assim, considerei duas situações: uma considerando o uso da estratégia de "operação inversa" quando colocavam a expressão, a mudança de sinal e o resultado obtido e outra considerando não respondeu ou resposta inadequada quando colocam o resultado apenas.

Outra situação que importa referir, é que em algumas situações, considerei a estratégia "outras" pelo fato de, não seguirem uma estratégia que se encaixe nas anteriores.

Na discussão em grande grupo, verifiquei que, muitos alunos recorreram a múltiplos, a valores de referência e "às tabuadas" para descobrir as soluções pretendidas.

A tabela seguinte espelha as estratégias de ambas as tarefas:

	Frequência Absoluta (N=25)				
Estratégias	Alínea a) _? x 7=35	Alínea b) _? x3=36	Alínea c) 12 x_?=48	Alínea d) 4 x_?=96	Alínea e) _? x12=144
Uso das propriedades das operações: Operação inversa	12	12	10	10	9
Estratégias de contagem: Adições sucessivas através de fatos conhecidos	8	9	9	10	9
Outras	2	2	1	1	0
Não responde ou evidencia erros na aplicação	3	2	5	4	7

Tabela 4.11. Estratégias evidenciadas na tarefa 1 da 4ª sessão

Como podemos verificar, nas duas primeiras alíneas, os alunos recorreram com maior frequência ao uso das operações inversas (sendo que dois destes alunos recorreram posteriormente a estratégia de contagem), apesar de não se verificar uma grande discrepância em relação ao uso das estratégias de contagem por adições sucessivas através do uso de fatos conhecidos, ou seja, utilizam os valores conhecidos das tabuadas e depois adicionam até encontrarem o valor pretendido. Durante a correção em grande grupo, fui questionando alguns alunos acerca das estratégias, por exemplo:

Exemplo 1- " eu troquei a ordem do sinal de multiplicar para o de dividir" e percebi que, apesar de indicar apenas esta troca sabia como proceder.

Exemplo 2 (alínea a))- Estratégia de contagem - 5x5=25; 5x6=30; 5x7=35

Outro aluno, aplicou corretamente a estratégia mas resultou numa solução errada, apercebendo-se que não estaria bem. (transcrição 4.9.)

Eduardo: " Eu sei que o 3 a dividir por ... (pausa) não… 36 a dividir por 3 … (hesitação) eu fui por tentativas, fui ver se aos números vezes 3 dava 36".

Professora: "E deu 9. Então 9 x 3 é igual a 36?"

Eduardo: " (…)

Professora: "10x3 quanto é?"

Eduardo: "30"

Professora: "e 9x3?"

Eduardo: " 27".

Transcrição 4.9. Diálogo com o Eduardo

Através desta pequena transcrição podemos ver não só a dificuldade deste aluno em verbalizar e explicar o seu raciocínio como, as dificuldades na solução imediata das tabuadas, aliás, como acontece muito frequentemente. Muitas vezes, as dificuldades de alguns alunos, centram-se em saber as tabuadas, essencial à sua relação com o cálculo mental.

Já nas alíneas c) e d) apesar de, novamente, não se verificam diferenças notórias quanto à aplicação de uma ou de outra estratégia, alguns dos alunos que recorreram à operação inversa justificaram depois a sua escolha com a decomposição, a factorização e as adições.

Na alínea d) através da explicação de uma das alunas, criei uma situação de debate para demonstrar o erro frequentemente utilizado por alguns alunos (transcrição 410.)

Carla: "Eu fiz 96:2:2 porque 2x2 é igual a 4"

Professora: " O que é que a "Carla" fez? O que decompôs?"

António: "O 4."

Professora: "E o 4 o que é?"

António: "É o … (pausa). É o fator."

Bernardo : "É o divisor."

Professora: "E ela decompôs o 4 em quanto?"

António: "Em 4+4."

Bernardo: "Ela dividiu o 4."

Professora: "Em quê?"

André: " Na metade".

Professora: "Então e se em vez do 4 fosse 6 como ficava?"

André: "3+3"

Maria: “A dividir por 3 a dividir por 3 (:3:3)”
Renata: “Era 3x2”

Transcrição 4.10. Debate com a turma

Exemplo 4 - (alínea d)- A aluna recorreu à operação inversa e apropriando-se da fatorização do divisor em 2x2 que, nesta situação, resulta em encontrar a metade.

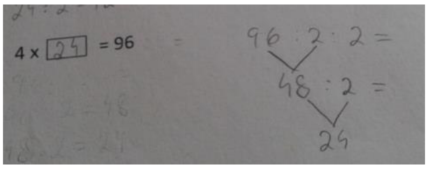


Figura 4.22. Estratégia da Anita na alínea d) da tarefa 1 da 4ª sessão

Ainda no mesmo exercício, previ a utilização de uma estratégia a que, por sinal, ninguém recorreu- Compensação- encontrar a centena mais próxima. Como tal, decidi explorá-la em grande grupo. Quando comecei por dizer que poderiam ter pensado no número 100, por ser muito próximo de 96 e um número fácil de trabalhar, a um dos alunos ocorreu uma outra estratégia que foi então discutida oralmente (transcrição 4.11.)

Martim: “ Se fosse arredondar ao 100 ia acrescentar mais quatro. Mas, se pensarmos em vezes 10, 4 vezes 10 é 40, 4 vezes 20 é 80 e 4 vezes 30 é 120. Então se fosse aqui 120. Eu punha mais o 120.”

Transcrição 4.11. Explicação do Martim

O aluno tenta explicar porque utilizaria o 120 e não o 100 como inicialmente ia explicar.

Professora: “ Utilizavas o 120. Então explica lá como fazias com o 120?”
Martim: “Depois ia ao 120 e dividia por 4 e dava 30. Mas nós acrescentamos demais.”
Professora: “Quanto é que acrescentamos a mais?”
Martim: “ Acrescentamos 24 e na tabuada do 4, o número que dá 24 é vezes 6. Então, aos 30 temos que tirar 6.”

Transcrição 4.12.Diálogo com o Martim

Esta foi a explicação do Martim perante a distributividade da divisão em relação à subtração.

Por fim, na alínea e) verificou-se o mesmo número de alunos a aplicarem quer as adições sucessivas quer o uso da operação inversa. O que esperava é que, esta última estratégia, obtivesse uma maior ocorrência uma vez que tinha sido trabalhada. Os alunos recorreram muitas vezes ao uso de adições sucessivas, principalmente, através de tentativas, por exemplo:

Exemplo 5- (alínea e))- Este aluno foi calculando por partes. Ou seja, calculou 12+12+12+12 = 48 e repetiu esta sequência três vezes. No final fez 48+48+48= 144 e adicionou o número de vezes que contou o 12 para chegar ao 48 (e ao 144) e indicou 4+4+4=12.

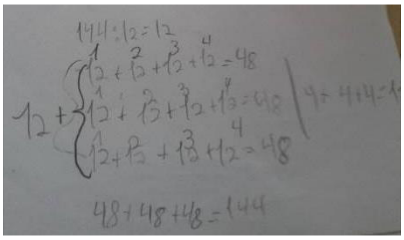


Figura 4.23. Estratégia do Pedro na alínea e) da tarefa 1da 4ª sessão

Nas estratégias que agrupei em "outras" surgiram estratégia que não seguiam uma sequência, como por exemplo:

Exemplo 1- alínea a)- "7x6=42; 42-7=35".

Exemplo 2-alínea b)- "3x10= 30+6=36=12x3=36"

.

Já na tarefa seguinte, apenas estiveram presentes 24 alunos, sendo a frequência absoluta n=24.

É necessário refletir um pouco acerca do agrupamento de estratégias nesta tarefa, isto porque, apesar de a tabela seguinte referir as mesmas estratégias do que a tabela anterior, nesta tarefa tratava-se da divisão logo, apesar de alguns alunos recorrerem ao processo de contagem por adições sucessivas em alguns cálculos, utilizam-nas como cálculos auxiliares à operação inversa, agrupando assim as estratégias como "operação inversa", como veremos a seguir.

	Frequência Absoluta N= 24			
Estratégias	Alínea a) _? :3=8	Alínea b) ?:6=9	Alínea c) _?:14=16	Alínea d) 44:_?=11
Uso das propriedades das operações: Operação inversa	20	18	17	4
Estratégias de contagem: Adições sucessivas	4	3	0	12
Não responde ou evidencia erros na aplicação da estratégia	0	3	7	8

Tabela 4.12. Estratégias evidenciadas na tarefa 2 da 4.ª sessão

Como podemos ver, nesta tarefa a grande maioria dos alunos recorreu diretamente ao uso das operações inversas, talvez porque, como se tratavam de divisões, ao recorrerem a operação inversa invertem para a multiplicação, operação esta que se torna mais simples de calcular. No entanto, como referi anteriormente, alguns alunos apesar de terem exposto a operação inversa recorreram sobretudo às adições sucessivas e à decomposição mas, entendi esta estratégia como cálculos auxiliares. Por exemplo:

Exemplo 1 -(alínea a)- alguns alunos escreveram 3x8 e, de seguida aplicaram as adições sucessivas como 8+8+8. Ora como primeiro indicaram a expressão 3x8, considerei a estratégia como "operação inversa".

Na alínea c) foram muitos os alunos que recorreram à operação inversa ficando com o produto de 14 por 16. Posteriormente, recorreram à decomposição seguida da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação para efetuar o cálculo.

Pode destacar-se, a alínea d) onde se verificou uma maior frequência de estratégias de contagem do que a aplicação da operação inversa, isto porque, como era pretendido que se descobrisse o valor do divisor, não poderia ser aplicada diretamente a operação inversa da divisão que, neste caso, ficaria 11x44 o que induzia em erro. Como tal, 12 alunos valeram-se das adições sucessivas, por exemplo:

Exemplo 2- 11+11+11+11= 44 ou seja, adicionaram 4 vezes o número 11.

4.1.5.2. ***Síntese***

Nesta sessão surgiram algumas dúvidas para interpretar a identidade D= dxq+r (sendo que, em todas as situações apresentadas o resto é zero, ou seja, tratou-se de divisões exatas).

Nesta tarefa e na discussão em grande grupo, poderia ter realçado mais estratégias utilizadas pelos alunos e até mesmo, deixar que fossem eles a tirar as conclusões dos casos da divisão. Talvez se não tivesse explicado que na divisão não podemos sempre recorrer à operação inversa os alunos poderiam ter, por eles mesmos, chegado a essas conclusões. No entanto, poderia correr o risco de se estabelecer confusão em alguns alunos e as estratégias aplicadas não serem as mais eficazes.

Apesar de me ter sido dado bastante tempo para a realização das minhas intervenções para o projeto e de ter liberdade de conseguir conciliar este tempo com o da professora titular sentia que precisava sempre de mais tempo para a exploração em grande grupo das tarefas. Isto porque, apesar de tentar diversificar os alunos e as estratégias envolvidas, faltava-me dar-lhes mais tempo e mais espaço para dialogarem e discutirem ideias e estratégias porque, eram realmente muitas as formas com que cada aluno abordava a estratégia. Todos os alunos queriam mostrar as suas estratégias e ir ao quadro e, por vezes, ficava com a sensação que dava pouco tempo aos alunos para que explorassem as estratégias dos seus colegas.

4.1.6. 5.ª Sessão

A quinta sessão iniciou-se da parte da tarde do dia 30 de Janeiro e, como através da ficha de diagnóstico pude constatar que ainda existiam algumas lacunas com os cálculos envolvendo múltiplos de 10, nesta sessão era previsto que os alunos conseguissem adquirir as regras que lhes permitam calcular qualquer múltiplo de 10 estabelecendo relações desta mesma regra quando usada em multiplicações ou divisões. Assim, pretendia que conseguissem estabelecer comparações com a aula anterior envolvendo as relações inversas.

Comecei por questioná-los acerca das regras da multiplicação e divisão por 10, 100 e 1000 e fazê-los relembrar algumas estratégias que já tínhamos abordado. Depois coloquei no quadro o seguinte exemplo, 8000:2000 e fizemos uma pequena discussão em grupo para encontrar o quociente.

De seguida, entreguei a ficha (figura 4.24.) e deixei que eles a resolvessem.

Esta tarefa está dividida por 6 alíneas e foi feita de forma individual. Assim que todos terminaram procedemos à discussão em grande grupo.

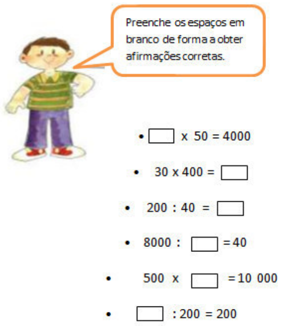


Figura 4.24. Tarefas da 5ª sessão

4.1.6.1. *APRECIAÇÃO GLOBAL*

Nesta atividade, organizei as respostas nas categorias de: Operação inversa - quando os alunos recorrem diretamente ao uso das propriedades das operações; Uso de produto de Múltiplos de 10- retira o zero e acrescenta-o no final da resolução, quando os alunos aplicam a estratégia a partir dos zeros, ou seja, por exemplo, para calcular 30x40 os alunos indicam 3x4 e colocam 2 zeros de seguida; Operação inversa + Produto de Múltiplos de 10 - quando os alunos aplicam as duas estratégias anteriores em simultâneo; Outras - quando, os alunos escrevem diretamente o valor em falta (considerando o uso mental) e a solução se encontra correta, ou outras estratégias que não recorrerem às estratégias previstas; Não responde ou evidencia erros na aplicação da estratégia - quando os alunos aplicam de forma errada uma estratégia ou quando não há qualquer explicação para a “estratégia” evidenciada.

Na tabela seguinte podemos visualizar a frequência absoluta das estratégias usadas para esta tarefa:

	Frequência Absoluta (N=25)					
	Alíneas					
Estratégias	**a) ?x50 = 4000**	**b) 30 x 400 =**	**c) 200:40 =**	**d) 8000: 40 =**	**e) 500x? = 10000**	**f) ? : 200 = 200**
Operação Inversa	1	0	4	2	4	9
Produto de Múltiplos de 10- retira o zero e acrescenta-o no final da resolução	5	11	7	3	5	0
Operação Inversa + Referência ao Número de Zeros	1	0	1	2	2	5
Outras	0	5	3	7	2	0
Não Responde ou evidencia erros na aplicação da estratégia	18	9	10	11	12	11

Tabela 4.13. Estratégias evidenciadas na tarefa 1 da 5ª sessão

Nesta sessão, verificaram-se muitas dificuldades e erros na aplicação de estratégias de cálculo mental, sendo que, em todas as alíneas, se verificou uma grande frequência no número de respostas erradas ou de alunos que não responderam.

Na alínea a), um grande número de alunos respondeu de forma inadequada. Apenas 7 alunos recorreram às três primeiras estratégias previstas de forma correta. A maioria dos alunos que se enquadram na categoria de resposta “Não respondeu ou evidencia erros na aplicação da estratégia” não deu qualquer resposta nesta alínea ou apresentou a solução de 800.

Na alínea b) e c) grande parte dos alunos recorreu à contagem do número de zeros para encontrar uma solução, sendo que, principalmente na alínea c) ainda se verificou uma grande frequência do número de respostas erradas ou desadequadas, apresentando uma solução de 50 quando deveria ser 5, ou de 800/8000, uma vez que, era pretendido que calculassem o valor da divisão de 200 por 40 e, como, 2x4=8 em vez de dividirem, multiplicaram.

<u>Estratégias:</u>

Exemplo 1- alínea c)- O aluno encontra primeiro a solução da divisão 200:40 e depois, justifica o valor encontrado.

Figura 4.25. Resolução da Rafaela na alínea c) da 5ª sessão

<u>Erros Evidenciados:</u>

Exemplo 1-alínea b)- Nesta alínea a aluna demonstra que 2:4 são 8, sendo que a operação presente é uma divisão e não uma multiplicação e, transporta os dois zeros presentes no número 200.

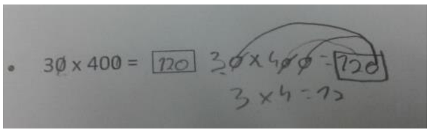


Figura 2.26. Resolução da Maria na alínea b) da 5ª sessão

Exemplo 2- alínea c)- A aluna começa por aplicar corretamente a estratégia mas erra na aplicação da contagem do número de zeros, ou seja, calcula corretamente o valor de 3x4, indicando 12 mas depois, em vez de contar o número de zeros presentes em ambas as parcelas, a aluna elimina em cada uma destas um zero, como aliás deveria fazer na divisão, resultando apenas um.

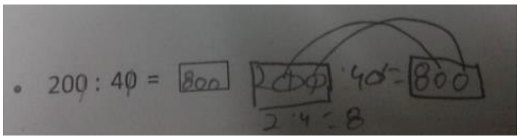


Figura 4.27. Resolução do Ricardo na alínea

Já na alínea d) sobressaem as categorias de resposta “Outras” e “não responde ou evidencia erros na aplicação da estratégia”, pois, nesta alínea era pretendido que calculassem o valor do divisor e, alguns alunos recorreram à operação inversa de forma errada. Outros alunos apresentaram de forma direta o resultado sem aplicar nenhuma estratégia.

Estratégias Evidenciadas:

Exemplo 1- A aluna recorre à operação inversa mas, mais uma vez, em vez de aplicar diretamente o uso da operação inversa, através da expressão D=dxq, sendo que d= D:q (ficando assim, 8000:40), recorre ao uso mental para descobrir o valor do divisor e depois justifica este valor com a expressão 40 x 200= 8000 com indicação da contagem do número de zeros

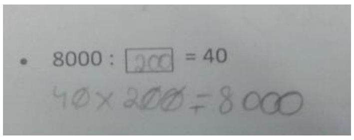


Figura 4.28. Resolução da Rita na alínea d) da 5ª sessão

Exemplo 2- Uma aluna começou por tentativas, primeiro exemplificando que 4x2=8 (porque o valor do dividendo é iniciado pelo algarismo 8), depois foi aumentando o número de zeros até encontrar a solução pretendida, por exemplo, "40x20=800, 400x200= 80 000" (o que quer dizer que já ultrapassava o valor pretendido) e por fim, "40x200=8000".

Na alínea e) as duas primeiras categorias de resposta estão equilibradas quanto à frequência do número de alunos que as aplicou, no entanto, as três primeiras estratégias juntas perfazem o número total de alunos que não respondeu ou evidenciou erros na aplicação da estratégia. Dos alunos que se enquadram nesta categoria, 4 não responderam, e os outros apresentaram respostas como: 500, 200, 100, 2000, 10 e 21.

A última alínea, foi a que mais alunos recorreram ao uso das propriedades das operações, nomeadamente, à operação inversa. Já no uso de produtos de múltiplos de 10, nenhum aluno entendeu que seria uma estratégia mais fácil der aplicar. Outros 5 alunos aplicaram as duas estratégias em simultâneo, isto porque, como era pretendido que descobrissem o valor do dividendo, o mais "fácil" seria aplicar a operação inversa, transformando a divisão numa multiplicação. Ainda assim, 11 alunos não responderam ou responderam de forma inadequada visto que, as suas respostas foram: 4000, 400, 0 e 1.

Estratégias:

Exemplo 1- alínea f)- Na última alínea (figura 4.29.), este aluno recorre à operação inversa, exemplificando que 2x2=4 e, depois, indica os zeros resultantes do divisor e do quociente.

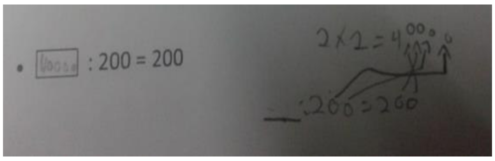


Figura 4.29. Estratégia do Pedro na alínea f) da 5ª sessão

Erros evidenciados:

Exemplo 1-alínea f)- a solução apresentada pela aluna não faz qualquer sentido (ver figura 4.30.), sendo que a aluna indica que 0:200=200.

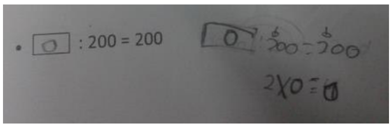


Figura 4.30. Estratégia do Pedro na alínea f) da 5ª sessão

Verifica-se assim, grandes dificuldades da aluna não só com aplicação das estratégias mas e, principalmente, com os números e operações de forma geral, quer na relação das tabuadas, quer na relação dos dobros e das metades.

4.1.6.2. Síntese

Nesta sessão, senti realmente, falta de empenho e de motivação dos alunos perante as tarefas propostas. Talvez, por isso, os resultados também não tenham sido os esperados. De facto, estes alunos já tinham trabalhado com o algoritmo da divisão, não só no dia anterior como também, durante toda a manhã do dia da minha intervenção. A meu ver, isto torna-se uma desvantagem pela diminuição do poder de concentração e de motivação dos alunos.

Decidi então, terminar com esta tarefa neste dia, e dar seguimento à discussão em grande grupo na aula seguinte. Assim, apesar das produções escritas conterem inúmeras falhas, certamente que esta discussão oral, faria muito mais sentido para explorar essas mesmas falhas e encontrarmos estratégias eficazes.

Quanto às estratégias utilizadas e aos erros observados parece-me que, se deveram em grande parte, a esta falta de motivação, isto porque, já tínhamos trabalhado algumas destas estratégias anteriormente, principalmente, no produto de múltiplos de 10.

4.1.7. 6.ª e 7ª ***Sessões***

A 6ª sessão decorreu no dia 6 de Fevereiro logo no começo da aula, assim como a 7ª sessão do dia seguinte- 7 de Fevereiro. Agrupei estas duas sessões, uma vez que, ambas tinham o mesmo objetivo e a mesma organização.

Comecei por mostrar um PowerPoint (ver figuras 4.31. e 4.32.) com oito alíneas, para os alunos fazerem mentalmente e atribui 20 segundos para cada um dos slides, alternando sempre um slide de um cálculo com um slide em branco para que os alunos pudessem registar o resultado e preparar-se para calcular o resultado seguinte.

Estes exercícios eram compostos por diferentes graus de dificuldade, e com diferentes estratégias de cálculo que podiam ser aplicadas em cada exercício de acordo com as estratégias trabalhadas nas aulas anteriores. Os exercícios eram constituídos tanto por multiplicações como por divisões e foram feitos de forma individual, para que pudessem ser aplicadas estratégias pessoais.

No final de ambas as sessões foi feita uma pequena discussão em grupo das estratégias utilizadas, com duração de cerca de 15/20 minutos cada.

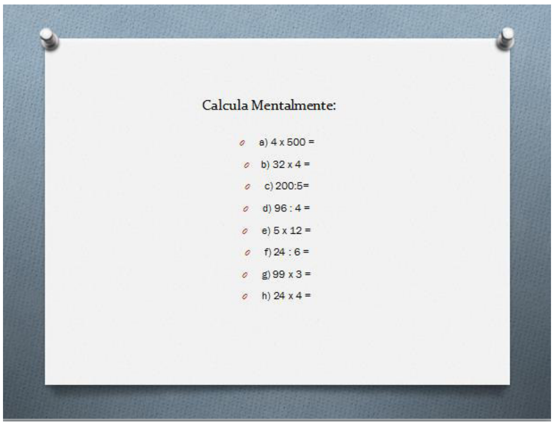


Figura 4.31. Tarefas 6.ª sessão

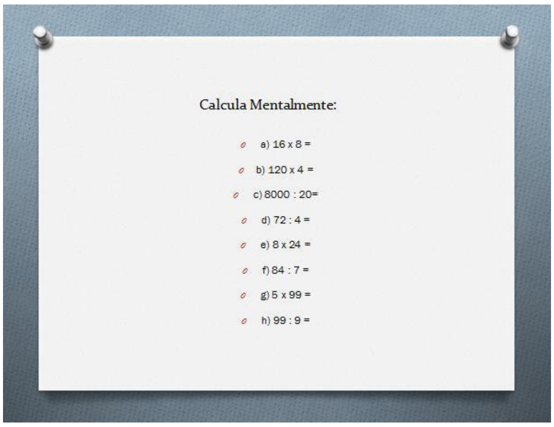


Figura 4.32. Tarefas 7.ª sessão

4.1.7.1. Apreciação Global

Atendendo a que, não poderia ouvir cada um dos alunos em cada uma das alíneas a expor os seus raciocínios, torna-se um pouco mais difícil tirar conclusões sobre as estratégias aplicadas nestas duas sessões. Desta forma, poderei apresentar a frequência de respostas certas, erradas e as que não obtiveram resposta e uma breve amostra de algumas estratégias utilizadas pela turma recolhidas durante as discussões em grande grupo.

De seguida apresento a tabela com a frequência absoluta das respostas dos alunos nas duas sessões:

	6ª sessão (N=25)			**7ªsessão (N=24)**			
Alíneas	Certa	Errada	Não Responde	**Alíneas**	Certa	Errada	Não Responde
a) 4x500	21	3	1	**a) 16x8**	12	7	5
b) 32x4	19	2	4	**b) 120x4**	22	2	0
c) 200:5	4	12	9	**c) 8000:20**	15	6	3
d) 96:4	4	6	15	**d) 72:4**	5	6	13
e) 5x12	20	2	3	**e) 8x24**	7	10	7
f) 24:6	19	2	4	**f) 84:7**	12	5	7
g) 99x3	7	9	9	**g) 5x99**	16	5	3
h) 24x4	10	8	7	**h) 99:9**	20	2	2

Tabela 4.14. Respostas corretas/incorretas às tarefas da 6.ª e 7.ª sessões

Do que se pode observar as alíneas a), b), e) e f) foram as que obtiveram mais respostas corretas. Na alínea a) apenas 4 alunos não encontraram a resposta correta. Na alínea e) existiram 5 alunos que não responderam corretamente e, nas alíneas b) e f) foram 6 os alunos que não chegaram à solução pretendida.

Quanto às restantes alíneas, que suscitaram maiores dificuldades, o número total de alunos a encontrar a solução correta foi inferior ao número de alunos que não responderam ou que responderam de forma incorreta. Assim, foram 21 alunos que não conseguiram aplicar uma estratégia eficaz de cálculo mental para as alíneas c) e d). Já nas alíneas g) e h) apesar do número de respostas corretas ser um pouco superior, ainda assim não chega sequer à metade do número de alunos da turma.

Ora nesta sessão, parece-me que, as estratégias com que os alunos se sentiram mais à vontade para aplicar poderão surgir de produtos múltiplos de 10, isto é, em 4x500 e 120x4 onde, facilmente, poderão recorrer à contagem do número de zeros para simplificar os fatores e/ou o resultado. No entanto, nas divisões isto ainda não se verifica porque, ainda subsistem grandes dificuldades em simplificar o dividendo ou o divisor com a referência ao número de zeros ou em estabelecer uma relação como por exemplo, em 200:5.

<u>Estratégias evidenciadas:</u>

Exemplo 1- alínea a)- "4x5= 20 e acrescento os dois zeros que restam".

Exemplo 2- alínea b)- "4x2= 8 e 4x3=12 logo como 3 representam 3 dezenas, 120+8=128.

Exemplo3- alínea d)-. "Como 4x4= 16 e 4x20=80 (porque 4x2=8) então, 80+16=96 logo 20+4=24". Esta aluna recorreu à tabuada do 4 para chegar a 94. Desta forma, estabeleceu relações entre as tabuadas, entre as regras da multiplicação por múltiplos de 10 e de decomposição para chegar à solução.

Exemplo 4- alínea e)- "primeiro calculei 5x2 que é igual a 10 e meti lá o zero. Depois fiz 5x1 que é 5 e como tinha um e trás ficou 6, logo dá 60".

Exemplo 5- alínea f)- " sabia que 6x4 é igual a 24, logo 24:6 é 4".

Exemplo 6- alínea g)- este aluno referiu na apresentação oral que para chegar à solução multiplicou 3x9 que é 27 "depois fiquei como 7 e deixei o 2. Fiz outra vez 3x9=27 e 27+2= 29 logo fica 297".

Já na sétima sessão, o número de alíneas que obteve uma frequência de respostas corretas superior a metade foi igual à da sessão anterior: quatro. As alíneas b), c), g) e h) obtiveram um número de respostas corretas superiores a 12, já as alíneas a) e f) obtiveram o mesmo número de respostas certas como de erradas em conjunto com o número de alunos que não respondeu.

Mas, mesmo assim, destacam-se as alíneas b) e h) com 22 e 20 alunos a acertarem na solução, respetivamente, enquanto nas outras duas alíneas (c) e g)) este número foi inferior- 15 e 16 (respetivamente).

Na alínea d) apenas 5 alunos responderam de forma correta e na alínea e) sete.

Relativamente aos números escolhidos, os alunos tanto tiveram dificuldade no cálculo de produtos como de quocientes, embora, os resultados mais fracos em ambas as sessões recaiam sobre três divisões (alínea c) e d) na sexta sessão e alínea d) na sétima sessão).

Outro aspeto que esta tabela me permite observar é o facto de, na sessão 7 a alínea g) (5x99) obter melhores resultados do que a alínea g) (99x3) da sexta sessão. Talvez, se deva ao facto de, se ter discutido as possíveis estratégias a aplicar, em grande grupo. Não sei se, no primeiro impacto, poderá ter influência os alunos visualizarem 99x3 e 5x99. Se estes começarem a calcular pelo primeiro número que lhes surge poderá assim influenciar no uso e aplicação de uma estratégia de cálculo.

Como me apercebi que os alunos usavam frequentemente o forma mental do algoritmo usual coloquei de forma propositada a alínea f) da sétima sessão com 84:7. Estes algarismos serviam para ver que tipos de estratégias aplicariam os alunos pois, não seria de forma direta a sua divisão, uma vez que, 4 não é divisível por 7. Então, a estratégia que costumam aplicar de dividir as dezenas e as unidades pelo divisor não resultaria. Assim, os alunos encontraram obstáculos quanto à utilização de uma estratégia eficaz em pouco tempo de resolução. Uma das estratégias que poderiam ter optado era de dividir 80 por 4 que daria 20 e depois aplicar a propriedade distributiva calculando 8:4= 2, uma vez que 8 teria sido o que tinham acrescentado anteriormente. Também, poderiam ter pensado que se 4x10 é 40 então 4x15 são 40+20=60. Logo só faltariam 12 para chegar a 72 e como 4x3= 12 , teriam de somar 3 ao 15 e daria 18.

<u>Estratégias evidenciadas:</u>

Exemplo 1- alínea a)- “6x8=48 e deixou o ficar o 8”, depois 8x1= 8 “com mais quatro de trás = 12”,logo ficou 128.

Exemplo 2- alínea a)- “6x8 e depois 8x10= 80, assim, 80 + 48= 128”

Exemplo 3- alínea b) - “4x0=0, 4x2=8, 4x1= 4, ficando 480”.

Exemplo 4- alínea e)- "4x8 deu 32 e deixei o 32 de lado. Depois fiz 8x20 que deu 160 e juntei 160 com 32 que deu 193".

Exemplo 5- alínea f)- "fiz 7x10 que é 70 e faltava pouco para chegar a 84, depois fiz 7x11 que deu 77, logo 7x12 = 82 porque juntei mais 7".

Exemplo 6- alínea g)- "9x5 são 45 e deixamos o 45 de lado. Depois 90x5 é o mesmo que 9x5 mas acrescentamos o zero, logo são 450. Depois é só somar 450+45 são 495".

Erros evidenciados

Exemplo 1- alínea c)- a aluna respondeu 4000 e explicou que "fui à tabuada do 2 buscar o 8 e era 4. Depois juntei os zeros".

Quanto às estratégias de cálculo mental propriamente ditas parece-me que, grande maioria, continua a utilizar a forma mental do algoritmo usual. Olham para o número, algarismo a algarismo e não como um número num todo. Talvez, para uns seja mais fácil e eficaz o uso desta estratégia, enquanto que, para outros possa tornar-se um aspeto negativo porque têm dificuldades no uso das tabuadas, bem como nas propriedades da numeração decimal.

*4.1.7.2. **Síntese***

Na minha opinião, estas duas sessões foram bastante importantes, na medida em que, foram estabelecidos tempos para a concretização da atividade e, porque, é fundamental no desenvolvimento da destreza do cálculo mental, tarefas temporizadas, de forma rotineira, onde os alunos possam aplicar estratégias pessoais de cálculo.

Mais uma vez, os alunos utilizaram a estratégia da "teia". Posso dizer que esta é uma estratégia que recorre, ainda que mentalmente, ao algoritmo da multiplicação pois, eles calculam dígito a dígito. Apesar de envolver o cálculo mental, esta estratégia por vezes, pode tornar-se bastante complexa para alguns alunos. Podem esquecer-se do que "vem de trás" (transporte) e podem enganar-se ao calcular as ordens respetivas. Claro que no cálculo mental, devem utilizar-se estratégias pessoais mas, esperava que estes alunos avançassem um pouco mais neste nível e utilizassem estratégias mais diversificadas.

Pensei que, aqui, utilizassem mais a decomposição do 12 em 10+2 uma vez que eram números simples para operar.

Também, tenho que ter em conta o factor tempo, que pode fazer com que utilizem apenas as estratégias com que se sentem mais à vontade e que já recorrem há mais tempo.

Pude ainda observar que no cálculo de divisões é onde surgem sempre maiores dificuldades.

4.1.8. JOGO DO 24

O jogo do 24 foi introduzido neste ciclo começando por explicar-lhes o seu objetivo e as regras fundamentais.

Comecei por introduzir cartas com níveis de dificuldade 1, visto que o jogo ainda era bastante desconhecido e senti bastantes dificuldades na adaptação ao mesmo. Entreguei também dois cartões com nível de dificuldade 2, para que, se alguns dos alunos começassem a interiorizar bem as regras e conseguissem facilmente encontrar possíveis soluções, pudessem passar para o patamar seguinte. De seguida mostro alguns exemplos de cartões entregues:

Figura 4.33. Cartas do jogo do 24

Inicialmente optei por fazer grupos, de acordo com os lugares que estavam sentados, para iniciarem o jogo do 24, isto porque, achei que em grupo e na discussão com os colegas, os alunos começariam a perceber melhor o funcionamento do jogo e a ganhar motivação para encontrar soluções. Caso contrário, se o jogo se jogasse de forma individual, poderiam acabar por desinteressar-se ao não encontrar soluções e tornar-se-ia uma tarefa demasiado monótona e cansativa.

Numa sessão posterior, entreguei algumas cartas do jogo do 24 com níveis de dificuldade 1 e 2, sendo que, estas cartas eram diferentes em cada grupo. Assim que, os grupos iam conseguindo alcançar as soluções para as cartas dadas iam trocando com as cartas dos grupos do lado. Ou seja, cada grupo assim que recebia as suas cartas registava a carta (os algarismos) na sua folha de registo e resolviam o jogo. Quando solucionassem as cartas entregues, eu tinha mais cartas que lhes entregava ou trocava com as cartas do grupo que também já tivesse solucionado as suas cartas.

No dia 29 de Janeiro entreguei algumas cartas aos grupos pela ordem com que estavam sentados, e deveriam registar as cartas e as respetivas soluções. Assim, que terminassem este registo atribuía-lhes mais cartas aumentando o nível de dificuldade. Assim, quando os alunos se sentissem à vontade com as cartas de nível 1 e 2 introduzia as cartas de nível 3. Optei por não entregar logo todas as cartas a cada grupo para que estes não andassem sempre a saltar de carta em carta enquanto não encontravam a solução para as que já lhes tinham sido entregues.

Sempre que necessário, circulava pelos lugares e dava algumas “dicas” e truques para incentivar alguns dos alunos. Desta forma, tentava não quebrar a motivação e o desafio do jogo, na medida, em que apenas lhes dava algumas pistas e não a solução da carta.

Sem dúvida que os alunos demonstravam grande entusiasmo durante o jogo e sempre que lhes era dado tempo para tal.

4.1.8.1. APRECIAÇÃO GLOBAL

De maneira geral, os resultados melhoraram em cada sessão. Na primeira sessão, perante as quatro cartas apresentadas anteriormente, três grupos apenas solucionaram uma das cartas, outros três encontraram soluções para duas das cartas e apenas um grupo solucionou as quatro cartas. No entanto, em algumas das cartas, estes grupos apresentaram mais do que uma solução para a mesma carta. A última carta com os números: 5,4,4,2 foi a que teve mais soluções. Podemos ver alguns destes exemplos:

<u>Carta 1</u>

Exemplos 1- 7-5=2; 2+1=3;3x8=24.

<u>Carta 2</u>

Exemplo 1- 3x4=12; 8-6=2; 12x2=24.

Carta 3

Exemplo 1- 6x8=48; 48:2=24; 24x1=24.

Carta 4

Exemplo 1- 4x4=20; 2x2=4; 20+4=24.

No entanto, e apesar de alguns alunos chegarem a uma solução correta, não a expressam da melhor forma, ou seja, por exemplo, na carta 1, alguns alunos mostram a seguinte expressão: 7-5=2+1=3x8=24, o que denota grande falta de rigor na escrita matemática.

Na sessão seguinte, dois grupos resolveram 6 cartas, de níveis 1, 2 e 3, um grupo resolveu 5 cartas, outros dois grupos 4 cartas, e um grupo resolveu 3 cartas e outro grupo 2 cartas. Assim, enquanto alguns grupos ainda resolviam cartas de nível 1 e 2 de dificuldade, outros já solucionavam as cartas de nível 3 de dificuldade. O mesmo se passou nas restantes sessões.

Desta forma, resolvi dinamizar o jogo desta forma para dar oportunidade de alguns alunos evoluírem o máximo possível. Mesmo assim, nem todos os alunos conseguiram resolver, de forma eficaz, as cartas de nível 3.

No entanto todos conseguiram adaptar-se ao jogo e desenvolver estratégias para solucionar as cartas.

4.1.9. Ficha Final

A ficha final é composta por quatro tarefas sendo que, apenas incidiu sobre os pontos analisados na ficha de diagnóstico.

Todas as tarefas foram pensadas de forma a representarem, de maneira geral, as tarefas apresentadas na ficha de diagnóstico, alterando apenas os números mas mantendo a estrutura, o nível de complexidade/dificuldade de forma a poder comparar os resultados das duas fichas e analisar para verificar uma possível evolução das aprendizagens e das estratégias utilizadas.

A primeira tarefa visa sobretudo perceber e avaliar a evolução das estratégias que envolvem a operação inversa, os múltiplos de 10 e a referência ao número de zeros, preenchendo as lacunas

De seguida apresento uma síntese global dos resultados da turma.

<u>Tarefa 1:</u>

1. Preenche os espaços em branco de forma a obter afirmações corretas.

a) 25 x ______ = 2500 b)______ : 10 = 1400 c) 200 : 20 = ______

d) ______ x 50 = 2000 e) 300 x 200 = ______ f) 400: ______ = 20

Figura 4.34. Tarefa 1 da ficha final

APRECIAÇÃO GLOBAL

De maneira geral, a turma teve algum progresso ao nível das afirmações corretas relativamente à ficha de diagnóstico. No entanto, sobressai uma alínea onde os erros se destacam.

De seguida apresento as tabelas que poderei comparar com as iniciais:

Respostas Corretas	**Frequência Absoluta (N=24)**
Respondeu acertadamente a todas (6)	3
Respondeu acertadamente a cinco (5)	3
Respondeu acertadamente a quatro (4)	6
Respondeu aceradamente a três (3)	6
Respondeeu acertadamente a duas (2)	6
Respondeeu acertadamente a uma (1)	2
Não respondeu acertadamente a nehuma (0)	0

Tabela 4.15. Número de respostas corretas na tarefa 1 da ficha final

Quanto às respostas corretas/incorretas das alíneas podemos verificar na tabela seguinte:

Alíneas	**Frequência Absoluta (N=24)**		
	Responderam Corretamente	Responderam Incorretamente	Não Responderam
a) 25x100=	24	0	0
b) ? :10 = 1400	15	9	0
c) 200:20=	18	6	0
d) ? x 50=2000	9	13	2
e) 300x200=	4	19	1
f) 400:? = 20	14	9	1

4.16. Respostas corretas/incorretas na tarefa 1 da ficha final

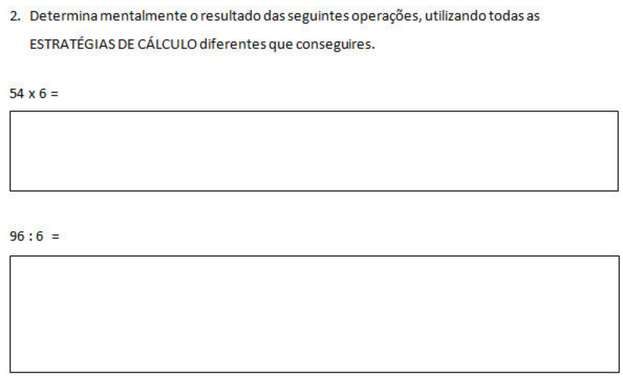
Pelo que posso verificar a alínea a) foi a que obteve melhores resultados com 100% dos alunos a responderem de forma correta. Também, as alíneas b), c) e f) obtiveram uma frequência absoluta de respostas corretas superior a metade dos alunos (>12). No entanto, as alíneas d) e e) foram as que apresentaram maiores dificuldades pra os alunos sendo que, o número de respostas certas foi inferior a metade dos alunos, especialmente a alínea e).

Parece-me, mesmo assim, e apesar de na ficha de diagnóstico o número total de alunos ser de 25, existir uma pequena evolução no número de respostas corretas. Na ficha de diagnóstico existiam 4 alíneas com um número de repostas incorretas superiores a metade dos alunos.

Outro aspeto que me parece ser importante ressalvar deve-se ao facto de, o número de alíneas sem qualquer resposta ter diminuído, ou seja, a frequência de alunos que não apresentou qualquer resposta diminuiu face à ficha de diagnóstico. Como podemos ver, as três primeiras alíneas, não obteve nenhum aluno que não apresentasse uma resposta (seja ela correta ou incorreta). E, as restantes três apresentam uma frequência de 2 ou 1 aluno.

<u>Tarefa 2</u>

A tarefa seguinte, apresenta duas alíneas: uma relativa à multiplicação e outra relativa à divisão. Tal como aconteceu na ficha inicial, pretendia que os alunos dispusessem das aprendizagens efetuadas ao longo das sessões de intervenção para o projeto e evidenciassem essas mesmas aprendizagens através de diferentes estratégias de cálculo.


2. Determina mentalmente o resultado das seguintes operações, utilizando todas as ESTRATÉGIAS DE CÁLCULO diferentes que conseguires.

54 x 6 =

96 : 6 =

Figura 4.35. Tarefa 2 da ficha final

APRECIAÇÃO GLOBAL

Relativamente à primeira alínea, grande parte dos alunos só apresentou uma estratégia ou duas, exceto uma aluna que apresentou três. Já para a segunda alínea a maioria aplicou uma estratégia, exceto um aluno que aplicou duas.

Quanto às estratégias utilizadas incidiram maioritariamente sobre a decomposição na primeira alínea e às estratégias de contagem na segunda.
As tabelas seguintes mostram as estratégias referidas em ambas as alíneas.

Estratégias utilizadas		**Frequência**
Decomposição	Decomposição do fator 54	15
	Decomposição do fator 6	1
	Decomposição de ambos os fatores (com erro de cálculo)	1
Fatorização	Fatorização do 54	1
	Fatorização do 6 (com erro de cálculo)	1
“Teia”		4
Adições sucessivas		1
Operação Inversa		1

Outras	0
Não Responde ou evidencia erros na aplicação da estratégia	5

4.17. Estratégias evidenciadas na alínea a) da tarefa 2 da ficha final

Como podemos ver, a estratégia mais utilizada foi a decomposição. Nesta tarefa previa que evidenciassem muito mais estratégias e com maior frequência. Também, e ao contrário do que esperava, previa que já não surgissem estratégias incorreras. Sendo número pequenos, simples e, até, pares, previa que a utilização de estratégias fosse muito mais eficaz tendo em conta todas as sessões trabalhadas anteriormente. De seguida, podem ver-se algumas estratégias mencionadas nesta alínea, bem como alguns erros surgidos.

Estratégias:

Exemplo 1- "54x2x3; 54x2=108; 54x3=162; 108+162=270".

Erros evidenciados:

Exemplo 1- Na primeira, uma aluna optou por decompor o 54 mas, em vez disso, decompõe em 4+5, isto porque, faz: 4x6=24 e 5x6= 30, acabando por somar estes dois produtos.

A tabela seguinte indica-nos as estratégias utilizadas no exercício seguinte relativamente às estratégias de cálculo encontradas para 96:6 e a sua frequência.

Estratégias utilizadas	**Frequência**
Decomposição (96)	2
Fatorização (6)	1
Estratégia de Contagem	4
Adições sucessivas	1
Outras	2
Não Responde ou Responde de forma incorreta	13

Tabela 4.18. Estratégias evidenciadas na alínea b) da tarefa 2 da ficha final

Do que posso observar, muitos foram os alunos que não responderam ou que apresentaram erros na aplicação de uma estratégia de cálculo. Mais uma vez, optei por colocar números estratégicos, para possibilitar a utilização de estratégias trabalhadas nas aulas anteriores.

Ora sendo 96 um número próximo de 100 e o 6 um número par facilmente fatorizado, previa que as estratégias utilizadas fossem mais diversificadas e eficientes. Pelo contrário, grande parte dos erros na estratégia deveu-se, ao facto de, decomporem o divisor em parcelas e não em fatores. Como podemos verificar, apenas um aluno aplicou de forma correta a factorização do divisor-6. De seguida, apresento alguns exemplos:

Estratégias:

Exemplo 1- um aluno primeiro refere que 96:2=48 e, posteriormente, vai adicionando 16 até chegar ao resultado pretendido que, neste caso, é o 96, ficando assim: 16+16+16=48; 48+16+16+16=96.

Erros evidenciados:

Exemplo 1- uma aluna divide 6:6 e seguidamente 6:9 resultando-lhe 31.

Tarefa 3

A terceira tarefa contém um enunciado com a descrição de diferentes estratégias, onde os alunos devem escolher e demonstrar qual dessa(s) estratégia(s) está correta e o porquê.

3. A mãe do António comprou-lhe quatro caixas iguais para ele arrumar 164 carrinhos. Para calcular quantos carrinhos devia colocar em cada caixa, o António, o seu irmão e o seu primo utilizaram estratégias diferentes. Observa-as e indica qual (ou quais) pensas estar(em) corretas e explica porquê.

António: 164 : 4= (100 + 60 + 4) : 4 = (100:4) + (60:4) + (4:4) = 25 + 15 + 4 = 44

Irmão: 164 : 4= 164 : 2 : 2 = 82 : 2 = 41

Primo: 164 : 4 = 164 : 2 + 2= 82 + 2 = 84

Figura 3.36. Tarefa 3 da ficha final

APRECIAÇÃO GLOBAL

De maneira geral, este exercício comparativamente com o exercício 6 da ficha de diagnóstico obteve melhores resultados, isto porque, os alunos tentaram justificar as suas opções (ainda que, por vezes, com a estratégia já descrita no enunciado) e de forma correta.

Três alunos não deram qualquer resposta para o exercício e seis alunos referem a estratégia correta (Irmão) mas apenas descrevem as estratégias referidas no enunciado sem acrescentar algo mais à justificação.

Já dois alunos responderam que a estratégia correta seria a do António sem conseguir verificar o erro existente na estratégia e um aluno refere que a estratégia correta é a do primo porque se deve decompor o 4 em 2+2.

Também, três alunos respondem corretamente mas a justificação não se encontra correta.

Quanto às justificações, dos restantes alunos que justificaram a opção do irmão referem essencialmente que:

Exemplo 1- "4:4 não é 4 mas sim 1 (8 alunos)";
Exemplo 2- "41x4=164" recorrendo à operação inversa (dois alunos);
Exemplo 3- "não pode ser 2+2 mas sim :2:2 porque 2x2=4" (7 alunos) referindo-se à estratégia de fatorização do divisor.
Exemplo 4- "4:4 é 1 e não 4. 100:4=25; 60:4=15 e 4:4=1, logo, 25+15+1=41".
Exemplo 5- as outras duas [António] [Primo] estão erradas porque o António "não devia por ali o 4 mas o 1 e o Primo também está mal porque este sinal (apontando para o sinal +) devia ser o sinal de : ";

<u>Tarefa 4</u>

Por fim, o exercício 4 foca-se no jogo do 24 onde é apresentada uma carta, de nível de dificuldade 1, como aconteceu na ficha inicial.

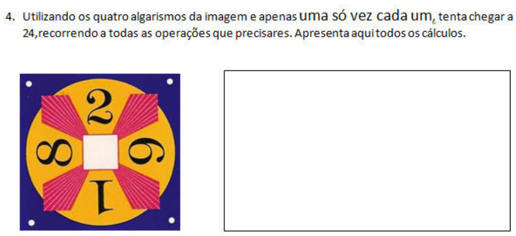


Figura 4.37. Tarefa 4 da ficha final

APRECIAÇÃO GLOBAL

Quanto ao número de soluções apresentadas pelos alunos (sendo que as soluções estão efetivamente corretas) revela-se uma grande evolução:

Número estratégias	Frequência Absoluta (N=24)
0	3
1	11
2	8
3	1
4	1

Tabela 4.19. Número de estratégias da tarefa 4 da ficha final

Como podemos observar apenas 3 alunos não conseguiram encontrar nenhuma solução ao contrário do que aconteceu na ficha de diagnóstico em que, toda a turma com a exceção de um aluno não conseguiu encontrar nenhuma solução. Por outro lado, 8 encontraram duas soluções e dois alunos encontraram três e quatro soluções. Vejamos alguns exemplos dessas soluções:

Exemplo 1- 8:2=4; 4x6=24;24:1=24

Exemplo 2- 8x6=48; 48:2=24; 24:1=24

Exemplo 3- 6:2=3; 3x8=24; 24x1=24

Exemplo 4- 8:2=4; 6x4=24; 24x1=24

4.2. 2ª Ciclo

4.2.1. Ficha de diagnóstico

A ficha de diagnóstico do 2.º ciclo é composta por 5 tarefas e, de acordo com os objetivos propostos para este estudo, cada uma das tarefas vai de encontro às tarefas propostas na ficha de diagnóstico. Assim sendo, algumas destas poderão repetir-se e em todas foi mantida a mesma estrutura.

Tarefa 1

Esta tarefa consiste num problema, onde é pretendido que os alunos identifiquem e justifiquem a ou as estratégias que consideram corretas. Esta tarefa é similar à tarefa 6 da ficha de diagnóstico do 1.º ciclo e pretendia através dela explorar a linguagem matemática das crianças ao mesmo tempo que analiso e verifico as estratégias utilizadas pelos alunos deste ano.

1. A turma do Hélio foi a uma visita de estudo ao teatro. Quando terminaram de assistir a uma peça, o Hélio reparou que haviam 9 filas de 36 lugares cada uma. Na escola, discutiram o problema, para saber quantos lugares tinha o teatro. Observa as estratégias utilizadas por alguns alunos e indica qual (ou quais) pensas estar (em) corretas e explica porquê.

Maria: 9 x 36 = 9 x (30 + 6) = 270 + 54 = 324

Pedro: 9 x 36 = 9 x (30 x 6) = 9 x 180 = 1620

Tiago: 9 x 36= 36 + 36 + 36 + 36 + 36 + 36 + 36 + 36 + 36 = 324

Figura 4.38. Tarefa 1 da ficha de diagnóstico

De seguida podemos ver uma síntese global dos resultados da turma.

APRECIAÇÃO GLOBAL

A maioria da turma, indicou que as estratégias do "Tiago" e da "Maria" estariam ambas corretas, no entanto, quatro alunos indicaram que apenas a do "Tiago" estaria correta. Dois indicaram que a estratégia do "Pedro" é que seria a estratégia correta e um aluno refere que apenas a da "Maria" seria a resposta correta. Nas suas justificações, repete-se muito o que é dito no enunciado ou apenas se indicam as estratégias consideradas corretas. Mostram-se a seguir algumas justificações dadas pelos alunos:

"existiam 9 filas e 36 lugares e para sabermos quantos lugares tinha o teatro no total é preciso multiplicar as 9 filas pelos 36 lugares de cada fila"

"a estratégia [do Tiago] consiste em somar os lugares de todas as filas"

No entanto, alguns alunos referem que a Maria utilizou as propriedades da multiplicação e a decomposição:

"na estratégia da Maria o 36 foi decomposto para tornar o cálculo mais fácil"

Tarefa 2

A segunda tarefa, tal como no 1.º ciclo, apresenta algumas alíneas com lacunas para preencher, devendo, para tal, os alunos aplicar estratégias de cálculo de multiplicação e de divisão.

2. Preenche os espaços em branco de forma a obter afirmações corretas.

a) _____ : 1/4 = 36 b) _____: 10 = 1300 c) 12 : _____ = 24

d) _____ x 50 = 4000 e) 200 x 700 = _____ f) 4000 : _____ = 20

Figura 4.39. Tarefa 2 da ficha de diagnóstico

APRECIAÇÃO GLOBAL

De forma geral, a turma foi homogénea quanto ao número de questões corretas como se pode ver na tabela seguinte:

Respondeu acertadamente a todas as alíneas	0
Respondeu acertadamente a cinco alíneas	2
Respondeu acertadamente a quatro alíneas	13
Respondeu acertadamente a três alíneas	6
Respondeu acertadamente a duas alíneas	3
Respondeu acertadamente a uma alínea	2
Não respondeu acertadamente a nenhuma alínea	0

Tabela 4.20. Número de respostas corretas na tarefa 2 da ficha de diagnóstico

Quanto às respostas corretas/incorretas das alíneas podemos verificar na tabela seguinte:

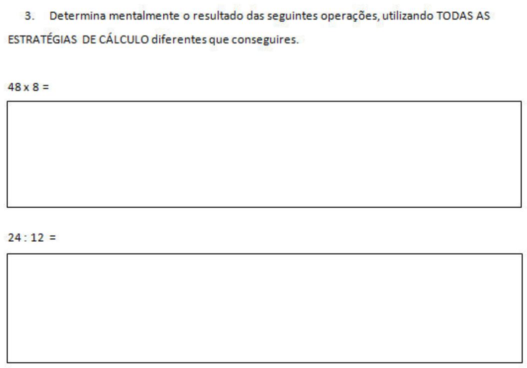
Alínea	Responderam Corretamente	Responderam Incorretamente	Não Responderam
a) __ : ¼ = 36	8	9	9
b) ___ : 10 = 1300	23	1	2
c)12 : ___ = 24	10	7	9
d) ___ x 50 = 4000	17	8	1
e) 200 x 700 = ___	13	12	1
f) 4000 : ___ = 20	18	4	4

Tabela 4.21. Número de respostas corretas/ incorretas na tarefa 2 da ficha de diagnóstico

Da tabela anterior, podemos verificar que a alínea que obteve maior sucesso foi a alínea b) em que a maioria dos alunos respondeu corretamente, seguindo-se as alíneas f) e d). Pelo contrário, as alíneas a) e c) foram as que obtiveram menos respostas corretas.

Tarefa 3

Na terceira tarefa, pretende-se explorar as estratégias de cálculo da multiplicação, através de 48x8, e da divisão com 24:12.Os números usados são os mesmos dos da ficha de diagnóstico do 1.º ciclo, para se conseguir comparar as estratégias aplicadas em ambos os ciclos.



3. Determina mentalmente o resultado das seguintes operações, utilizando TODAS AS ESTRATÉGIAS DE CÁLCULO diferentes que conseguires.

48 x 8 =

24 : 12 =

Figura 4.40. Tarefa 3 da ficha de diagnóstico

APRECIAÇÃO GLOBAL

Quanto ao número de estratégias utilizadas quer num quer noutro exercício, pode dizer-se que na multiplicação apenas dois alunos indicaram duas estratégias, sendo que os restantes indicaram apenas uma (mas evidenciando, por vezes, algumas estratégias erradas que não contabilizarei como estratégia). Já na divisão dois alunos evidenciaram duas estratégias, doze apenas uma e os restantes doze não responderam.

Relativamente às estratégias utilizadas, podemos ver na tabela seguinte as mais frequentes:

Estratégias utilizadas	**Frequência**
Decomposição do fator 48 em 40+8 e Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição	10
Compensação (recorre à dezena mais próxima)	1

Estratégias de contagem (uso de dobros)	3
Adições sucessivas	7
Outras	2

Tabela 4.22. Estratégias evidenciadas na alínea a) na tarefa 3 da ficha de diagnóstico

A maior parte dos alunos recorreu à decomposição seguindo-se depois, a aplicação de adições sucessivas. Notei, porém, muitos erros na aplicação de estratégias, ou aplicação de estratégia que não contabilizo como estratégia, uma vez que volta ao valor inicial como, por exemplo, 48x8= 40+8 = 48x8=384.

A tabela seguinte indica-nos as estratégias utilizadas no exercício seguinte relativamente às estratégias de cálculo encontradas para 24:12 e a sua frequência.

Estratégias utilizadas	**Frequência**
Recorre à operação inversa	10
Uso de estratégias de contagem-tabuada	6
Coloca em forma de fração e simplifica até à fração irredutível	1
Não Responde ou Evidencia erros na aplicação da estratégia	12

Tabela 4.23. Estratégias evidenciadas na alínea b) na tarefa 3 da ficha de diagnóstico

Como podemos verificar, neste exercício os alunos recorreram com maior frequência à operação inversa. No entanto, a maioria dos alunos não aplicou nenhuma estratégia (eficaz) nesta alínea.

Tarefa 4

A tarefa 4 foi apresentada para a introdução das estratégias de cálculo com números racionais não negativos e é constituída por 8 alíneas. As duas primeiras iniciam com a aplicação de estratégias de multiplicação e de divisão com números inteiros com dois ou mais algarismos. As restantes alíneas recorrem ao uso de números decimais e fracionários. Enquanto na tarefa anterior, pretendia que explorassem todas as estratégias que conseguissem neste, apenas pedi uma estratégia.

4. Determina o resultado das seguintes operações, utilizando UMA ESTRATÉGIA DE CÁLCULO.

a) 16 x 25 =

b) 4800: 25 =

c) 68 x 0,5 =

d) 1/4 x 76=

e) 38 : 1/2 =

f) 4/8 x 8/16 =

g) 96 : ¼ =

h) 1/5 x 70 =

Figura 4.41. Tarefa 4 da ficha de diagnóstico

APRECIAÇÃO GLOBAL

Na alínea a) oito alunos utilizaram a decomposição do 25 em 20 +5 e cinco adições sucessivas. Também dois alunos utilizaram a decomposição do 16. É importante referir que, como no exercício anterior, muitos alunos fazem a decomposição de um número mas não resolvem a expressão colocando na forma inicial.

Na alínea b) 14 alunos não evidenciaram nenhuma estratégia. Outros, transformam a expressão em forma de fração mas depois não a resolvem.

Nas restantes alíneas, pode dizer-se que os alunos recorrem, na maior parte das vezes à mudança de representação (no caso da alínea a) e na alínea d)) e à mudança de operação, quando é dada uma divisão, transformando-a numa multiplicação.

Muitos dos alunos, resolvem a expressão colocando sob forma de fração mas, muitas das vezes, não resolvem para encontrar a fração irredutível.

Exemplo 1- alínea f)- 4/8 x 8/16= 32/136

Tarefa 5

Por fim, na tarefa 5, foi mostrado um cartão do jogo do 24, de nível de dificuldade 1, igual ao da ficha de diagnóstico do 1.º ciclo, para perceber quais os alunos que já conhecem o jogo e as estratégias aplicadas por eles.

5. Utilizando os quatro algarismos da imagem e apenas uma só vez cada um, tenta chegar a 24, recorrendo a todas as operações que precisares. Apresenta aqui todos os cálculos.

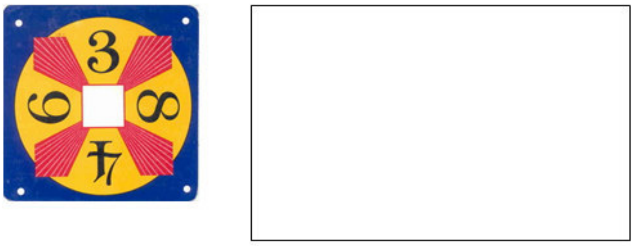


Figura 4.42. Tarefa 5 da ficha de diagnóstico

APRECIAÇÃO GLOBAL

Apenas quatro alunos conseguiram encontrar a solução para a carta apresentada. Um exemplo dessas soluções é: 24: 8-6=4; 4x3=12; 12x2=24.

No entanto, outros alunos, demonstraram algumas tentativas (ainda que não acertadas) muito próximas de possíveis soluções.

SÍNTESE

Da ficha de diagnóstico apresentada, pode dizer-se que, estes alunos parecem conhecer e ter desenvolvidas poucas estratégias de cálculo relativas à multiplicação e à divisão. No entanto, sentem-se mais à vontade com a resolução de frações do que com os números inteiros, talvez, porque este seja um tema que estava bastante presente no momento da intervenção. Também, são alguns os alunos que já conhecem e se "relacionam" com o jogo do 24.

4.2.2. 1.ª Sessão

Na primeira intervenção do projeto no 2.º ciclo, que ocorreu no dia 29 de Abril de 2014, foi entregue uma ficha com uma tarefa composta por três alíneas.

Era esperado que os alunos procurassem estratégias para a multiplicação para resolverem as três situações de cálculo apresentadas. Como se pode verificar decidi manter uma das situações de cálculo efetuadas no 1.º ciclo para uma comparação de resultados. Quanto às outras duas situações optei por usar fatores com dois e/ou três algarismos, aumentando a complexidade do exercício, porque se trata de uma turma de6.º ano de escolaridade que já tem desenvolvidas competências de cálculo que o 4.º ano não teria. Usei, também, a mesma estratégia do 1.º ciclo, ou seja, os alunos após resolverem a tarefa, trocaram as suas fichas com as do colega do lado e, no final, fez-se uma discussão em grande grupo.

Figura 4.43. Tarefa 1 da 1.ª sessão

De forma geral, esta tarefa desenvolveu-se com sucesso. Ao contrário do que tinha acontecido na ficha de diagnóstico, nesta sessão os alunos utilizaram com muito mais frequência a estratégia da decomposição. Talvez porque, ao entregar a ficha de diagnóstico, puderam rever a aplicação de algumas estratégias.

4.2.2.1. APRECIAÇÃO GLOBAL

		Frequência Absoluta (N=26)		
Estratégias		5 x 16	12 x 14	20 x 142
Decomposição	Decomposição + Propriedade Distributiva da Multiplicação em relação à adição	18	15	15
	Decomposição de ambos os fatores	0	1	0
Adições sucessivas		3	3	1
Recorre a estratégia de contagem-tabuada		2	1	1
Produto de Múltiplos de 10- retira o zero e acrescenta-o no final da resolução		0	0	2

Fatorização	0	0	2
Outras	2	5	2
Não responde ou evidencia erros na aplicação da estratégia	1	1	3

Tabela 4.24. Estratégias evidenciadas na alínea a) da 1.ª sessão

Quanto à aplicação das estratégias, a mais frequente na turma foi a decomposição de um fator seguido da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Aqui, a grande maioria conseguiu aplicar corretamente esta estratégia.

Na primeira alínea, a maioria recorreu à decomposição de um dos fatores. No entanto, não surgiram outras estratégias que previ, como recorrer à dezena mais próxima ou substituir a multiplicação por uma composição de uma multiplicação seguida de uma divisão.

Na segunda alínea, 15 alunos utilizaram a decomposição, três alunos as adições sucessivas, um aluno recorreu ao uso de fatos conhecidos da tabuada, outro aluno decompôs ambos os fatores, sendo que continha um erro de cálculo, e cinco alunos utilizaram estratégias diferentes e não previstas. Dois destes cinco alunos utilizaram o algoritmo de cabeça, aplicando a estratégia similar à "teia" que os alunos do 1.º ciclo recorriam diversas vezes, onde fazem o produto de cada algarismo de cada fator.

De seguida podemos ver um exemplo de uma estratégia com erro na sua aplicação:

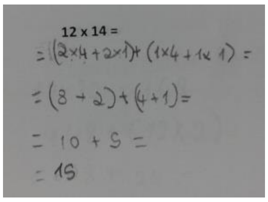


Figura 4.44. Estratégia do Mário na alínea b) da 1.ª sessão

Por fim, na terceira alínea, 15 alunos empregaram a decomposição, um aluno as adições sucessivas não demonstrando o resultado/solução, outro aluno recorre ao uso da tabuada, dois alunos fatorizam o 20 em 2x10 e outros dois retiram o algarismo das unidades no primeiro fator (20) e acrescentam-no ao resultado do dobro de 142- Produto de Múltiplos de 10.

Nesta tarefa esperava que mais alunos recorressem ao Produto por Múltiplos de 10 e à factorização do 20 em 2x10 o que não aconteceu.

4.2.2.2. SÍNTESE

De forma geral, não esperava que os alunos recorressem com tanta frequência à decomposição, uma vez que, na ficha de diagnóstico não tinha surgido tantas vezes. Destaca-se o facto de estes alunos saberem aplicar regras formais das expressões numéricas, nomeadamente, o uso dos parêntesis. Se no 1.º ciclo, em muitos casos, não eram utilizados os parêntesis nas expressões, colocavam os sinais de igual mesmo quando as expressões não eram equivalentes, pelo contrário, nesta turma, esse aspeto parece estar bem mais desenvolvido e apreendido.

4.2.3. 2ª Sessão

A segunda sessão foi realizada no dia 6 de Maio de 2014 e pretendia dar continuidade ao assunto trabalhado na aula anterior- estratégias de cálculo para a multiplicação. Os exercícios são iguais aos da segunda sessão do 1.º ciclo, pretendendo explorando a diversidade de estratégias e, ao mesmo tempo, recolher dados para comparar as estratégias evidenciadas nos dois ciclos.

A figura seguinte, exemplifica a atividade realizada nesta sessão:

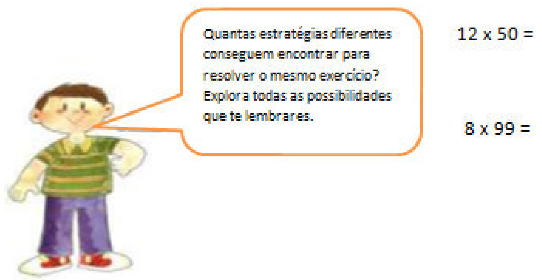


Figura 4.45. Tarefas da 2.ª sessão

Nesta atividade, decidi realizar a atividade em pares, tal como tinha feito no 1.º ciclo e pelos mesmos motivos: não só pelo fator motivação, mas também para que os alunos indicassem o maior número de estratégias possíveis. Assim, através do diálogo e da troca de ideias entre cada par, previa que surgissem mais estratégias e, ao mesmo tempo, fossem combatendo algumas dificuldades na aplicação das estratégias que fossem surgindo.

4.2.3.1. APRECIAÇÃO GLOBAL

Importa referir, que tal como no 1.º ciclo, as estratégias que estão erradas ou que não evidenciam os procedimentos para chegar à solução final não são contabilizadas como estratégias, considerando apenas as que, eventualmente, possam ter um erro de cálculo sem colocar em causa a viabilidade da estratégia.

	Frequência Absoluta (N= 13)	
Número de estratégias	**1.º Alínea- 12x50**	**2.º Alínea- 8x99**
0	0	0
1	1	2
2	2	3
3	2	4
4	4	4
5	3	0
6	1	0

Tabela 4.25. Número de estratégias evidenciadas nas alíneas a) e b) da 2.ª sessão

Assim, pode ver-se que, a primeira alínea obteve melhores resultados relativamente à segunda (da divisão) pois, um par conseguiu alcançar seis estratégias e três pares de alunos cinco. Já só com uma estratégia aplicada, a primeira alínea teve apenas um par de alunos e a segunda dois pares.

Relativamente às estratégias evidenciadas na primeira alínea (12x50), podem ver-se na tabela x :

Estratégias		**Frequência absoluta (N=13)**	
Estratégias de contagem	Adições sucessivas	6	6
Decomposição (com aplicação da propriedade distributiva)	Decompor um dos fatores (12)	14	21
	Decompor um dos fatores (50)	7	
Fatorização	Factorizar um dos fatores (12)	4	9

	Factorizar um dos fatores (50)	5	
Produto de Múltiplos de 10	Multiplica o 12 por 5 e acrescenta um zero ao resultado	3	3
Substituição	Substituir a multiplicação por uma divisão e uma multiplicação	4	4
Compensação	Procurar o múltiplo de 10 mais próximo e contar para trás	1	1
Outras	[(6x20) + (6x5)] x4= (120+130) x 4= 150x4 = 600	3	3

Tabela 4.26. Estratégias evidenciadas na alínea a) da 2.ª sessão

Pode dizer-se que, para esta alínea, a estratégia que mais foi utilizada foi a decomposição do fator 12 e do fator 50, seguindo-se as adições sucessivas, a fatorização do 50 e do 12 e, a substituição.

Nas figuras seguintes podem ver-se três estratégias evidenciadas por dois pares de alunos: duas relativa à substituição (figura 4.44. e figura 4.45.) e outra relativa ao uso de produto de múltiplos de 10 (figura 4.46)

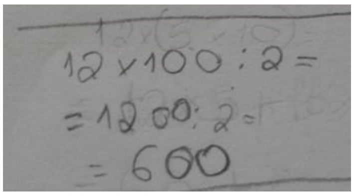


Figura 4.46. Estratégia do Henrique na alínea a) da 2.ª sessão

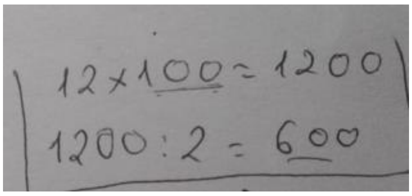


Figura 4.47. Estratégia da Joana na alínea a) da 2.ª sessão

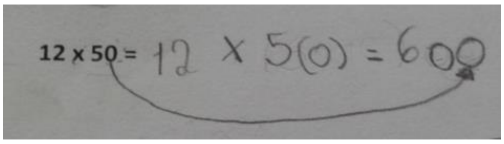


Figura 4.48. Estratégia do Afonso na alínea a) da 2.ª sessão

Apesar de a decomposição ter sido bastante frequente, os alunos evidenciaram outras estratégias para além da decomposição, como a substituição. Além disso, não previ que estes alunos utilizassem esta estratégia nesta alínea.

Quanto à alínea b) a tabela seguinte mostra-nos os resultados evidenciados:

Estratégias		**Frequência absoluta**	
Estratégias de contagem	Adições sucessivas	7	
	Uso de dobros	1	
Decomposição (com aplicação da propriedade distributiva)	Decompor um dos fatores (99)	11	
	Decompor um dos fatores (8)	2	
Compensação	Procurar o múltiplo de 10 mais próximo e contar para trás- compensa o 99 para 100	8	11
	Procurar o múltiplo de 10 mais próximo e contar para trás- compensa o 8 para 10	2	
	Procurar o múltiplo de 10 mais próximo e contar para trás- compensa em ambos os fatores	1	
Outras		1	

Tabela 4.27. Estratégias evidenciadas na alínea b) da 2.ª sessão

Pode ver-se que, nesta alínea, os alunos recorrem com bastante frequência à compensação para além da decomposição do 99. É de referir, que, surgiram poucos erros de cálculo e na aplicação das estratégias comparativamente com as que surgiram no 1.º ciclo.

Neste sentido, exemplifico com as imagens seguintes algumas estratégias evidenciadas:

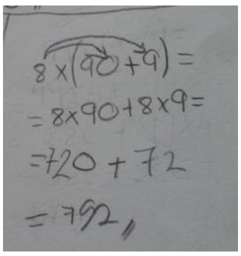


Figura 4.49. Estratégia do João na alínea b) da 2ª sessão

Assim, podemos ver na primeira imagem um exemplo da decomposição do 99 em 90+9 seguido da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

A segunda imagem é referente à decomposição do 99 em 90+9, no entanto, o par de alunos fatoriza o 90 em 9x10.

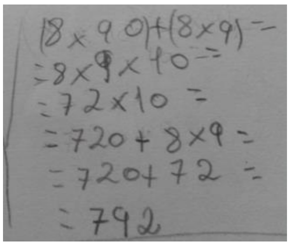


Figura 4.50. Estratégia da Joana na alínea b) da 2.ª sessão

A estratégia consiste na procura do múltiplo de 10 mais próximo e contar para trás, ou seja, o 8 transforma-se em 10 e são subtraídas depois duas vezes o 99, isto é, 198 unidades.

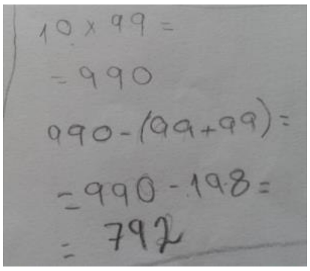


Figura 4.51. Estratégia do Tomás na alínea b) da 2.ª sessão

4.2.3.2. SÍNTESE

De maneira geral, estes alunos utilizam estratégias eficazes de cálculo, quer numa quer noutra alínea. Destacam-se aqui, a substituição e a compensação que, não surgiram com tanta frequência no 1.º ciclo.

Estes alunos, destacam-se mais uma vez, pela escrita matemática correta que utilizam, principalmente, na utilização de parêntesis.

4.2.4. 3.ª e 4ª Sessões

A terceira intervenção, decorreu no dia 7 de Maio e pretendia explorar as situações de cálculo com operações inversas envolvendo números naturais e números racionais não negativos (na multiplicação e na divisão) e tinha planeado três tarefas. Na primeira tarefa, optei por aplicar um jogo relacionado com o bingo ou o lotto. Entreguei alguns cartões contendo os números que seriam as soluções/resultados de algumas expressões numéricas. Existiam algumas tiras, com expressões numéricas contendo lacunas que seriam extraídas, de forma aleatória, e onde os alunos devem tentar resolvê-la o mais rápido possível e colocar uma cruz se esse valor se inserir nos seus cartões. As figuras seguintes ilustram um exemplo deste jogo:

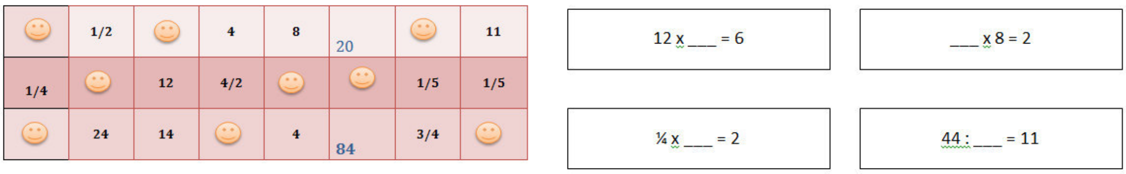


Figura 4.52. Tarefa 1 da 3.ª e 4.ª sessão

A segunda tarefa consistia no registo da resolução de três das expressões saídas durante o jogo e a terceira tarefa na exploração e discussão em grande grupo. Como as tarefas não decorreram como tinha previsto e planeado decidi alterar esta sequência interrompendo o jogo quando entendi que não estaria a ser produtivo, porque os alunos não estariam a entender o objetivo do jogo nem estavam a conseguir chegar às soluções pretendidas.

Optei, então por fazer uma breve exploração em grande grupo da expressão D=dxq e que d=D:q . Assim, que fizemos esta exploração os alunos começaram a entender melhor como poderíamos descobrir quer o dividendo quer o divisor e aplicaram então de forma individual o registo escrito das estratégias de algumas expressões saídas durante o jogo.

A quarta intervenção foi necessária à continuidade da sessão anterior, uma vez que, senti a necessidade de continuar a explorar esta situação das propriedades das operações inversas com os números racionais não negativos porque ainda não tinha sido bem assimilada pelos alunos.

Neste seguimento, os alunos registaram sete alíneas das expressões saídas no lotto (figura 4.53.) e registaram as suas resoluções.

12 x ___ = 48	25 x ___ = 5
___ : 14 = 16	12 : ___ = 16
44 : ___ = 11	½ x ___ = 12
___ : ¾ = 16	

Figura 4.53. Tarefa 2 da 3.ª e 4.ª sessão

4.2.4.1. APRECIAÇÃO GLOBAL

De maneira geral os alunos demonstraram algumas dificuldades, principalmente, em algumas alíneas e recorreram maioritariamente, à operação inversa.

A tabela seguinte mostra as respostas certas, erradas e sem reposta das sete alíneas.

	Frequência Absoluta (N=26)		
Alínea	Correta	Errada	Não Responde
a) 12 x _ = 48	25	1	0
b) _ : 14 = 16	13	6	7
c) 44 : _ = 11	21	3	2
d) ½ x _ = 12	17	4	5
e) 25 x _ = 5	15	6	5
f) 12 : _ = 16	5	7	14
g) _ : ¾ = 16	13	3	10

Tabela 4.28. Número de respostas corretas/incorretas na tarefa 2 da 3.ª e 4.ª sessão

Como podemos ver, as alíneas a) e c) foram as que obtiveram maior número de respostas corretas, talvez por se tratar de números inteiros. No entanto, a alínea b) também apresenta apenas números inteiros e apresentou dificuldades para metade dos alunos. Poderá ser, pelo facto de se tratar de descobrir o valor do divisor, pelo que é necessário recorrer à expressão d= D:q, expressão esta, que evidenciou bastantes erros dos alunos.

As imagens seguintes, refletem alguns dos erros surgidos em algumas destas alíneas:

Na alínea b) esta aluna utiliza a operação inversa para descobrir o valor do dividendo, no entanto, para encontrar este valor aplica a decomposição de ambos os fatores com erro na aplicação, como podemos ver na figura 4.54.

Figura 4.54. Estratégia do Tomás na alínea b) na tarefa 2 da 3.ª e 4.ª sessão

Muitos são os alunos que sentiram dificuldades na aplicação da operação inversa. Na alínea c) uma aluna foi ao quadro registar a sua estratégia e referiu que:

Maria: " Eu multipliquei o quociente pelo dividendo para dar o divisor"
Professora: " Como fazemos quando queremos descobrir o valor do divisor?"
Alunos: "É o dividendo a dividir pelo quociente."
Professora: "E é o mesmo que o quociente a multiplicar pelo dividendo?"
Alunos: "Não".
Professora: "Então como poderíamos fazer?"
Maria: "44 a dividir por 11".

Transcrição 4.13. Debate com a turma

Através deste pequeno diálogo, pode entender-se a confusão de alguns alunos relativa a esta questão, nomeadamente, quando pretendemos descobrir o valor em falta do divisor.

Na alínea d) o aluno errou na aplicação da operação inversa quando expressou ½ x 12 quando deveria ser 12 : ½

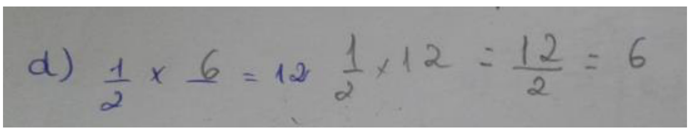


Figura 4.55. Estratégia da Maria na alínea d) da tarefa 2 da 3.ª e 4.ª sessão

Outras vezes, alguns alunos não aplicam diretamente nenhuma estratégia, ou seja, encontram o valor em falta e demonstram que será esse o resultado. Exemplo disso, é a imagem seguinte:

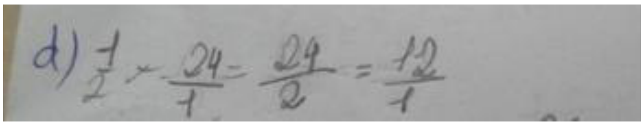


Figura 4.56. Estratégia da Lara na alínea d) na tarefa 2 da 3.ª e 4.ª sessão

Na alínea d) a aluna não aplica nenhuma estratégia para encontrar o resultado do divisor mas, demonstra saber esse valor que lhe confere o resultado do quociente, ou seja, como podemos ver na imagem a aluna calcula ½ x 24 e chega ao valor do quociente, que é 12.

Na alínea e) tratando-se de uma multiplicação, a aluna recorre à operação inversa-divisão, no entanto, aplica-a de forma errada.

Figura 4.57. Estratégia da Joana na alínea e) na tarefa 2 da 3.ª e 4.ª sessão

Nesta alínea muitos alunos responderam 5. Quando uma das alunas foi explicar a sua estratégia no quadro à turma, referiu que a solução seria 5 porque 5x5 dava 25 e 25 a dividir por 5 dava 5. Então, nesse momento questionei os alunos:

Professora: " Como é que 25 vezes o 5 pode dar 5?"

Transcrição 4.29. Questão da professora/investigadora

Aqui, os alunos perceberam que o produto de 5 por 25 não poderia ser 5 e através do debate chegaram à conclusão que se trataria de uma fração.

Já a alínea f) foi a que teve maior insucesso dos alunos. Mais uma vez, trata-se de encontrar o valor do divisor que, neste caso, se traduziria na expressão 12:16. Ora alguns alunos, olharam para uma expressão deste tipo e evidenciaram que não daria para resolver.

Na alínea g), como podemos ver na figura abaixo, a aluna indica o valor do dividendo-12- e aplica a regra memorizada na divisão de frações, invertendo a divisão para a multiplicação e, consequentemente o inverso de ¾ que são 4/3. Depois, como o resultado 48/3 apresenta-se diferente do que está na expressão, a aluna refere que 16/1 = 48/3.

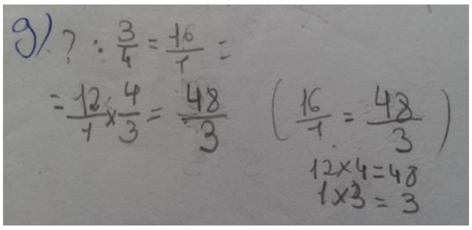


Figura 4.58. Estratégia da Maria na alínea g) da tarefa 2 da 3.ª e 4.ª sessão

Muitos alunos não conseguiram resolver os últimos dois exercícios, apesar de ter dado bastante tempo (muito mais do que o previsto e planeado), não porque não tivessem tempo para o fazer mas, porque, demoraram muito nos primeiros exercícios e a descobrir a forma de resolver alguns dos exercícios.

De maneira geral, as estratégias recaem sobre a operação inversa recorrendo depois, a estratégias de contagem como as adições sucessivas e o recurso à tabuada (nas alíneas a) e c)), à mudança de operação, à decomposição (especialmente em a) e c)) e a regras formais da multiplicação e da divisão de frações.

4.2.4.2. SÍNTESE

Nestas duas sessões, senti bastantes dificuldades dos alunos na aplicação da operação inversa quer da multiplicação, quer da divisão. De maneira geral, os alunos aplicam facilmente as regras memorizadas da adição, subtração, multiplicação e divisão dos números fracionários, no entanto, demonstram vários obstáculos quando não lhes é dada diretamente a expressão a calcular.

Também, foi necessário trabalhar com eles exemplos práticos para a multiplicação e divisão de frações, sendo que, por exemplo, em 8:24, os alunos não recorriam à escrita formal em forma de fração 8/24. Inicialmente, refletiam que não poderia ser calculado dessa forma.

Ora, nesta intervenção previ que os alunos já estivessem habituados a trabalhar com as operações inversas e que, rapidamente se apoderassem dessas mesmas regras no uso de frações mas, pelo contrário, estes alunos tiveram imensas dificuldades em resolver as expressões. Para além disso, tiveram que recorrer a cálculos escritos para suportar o raciocínio das expressões.

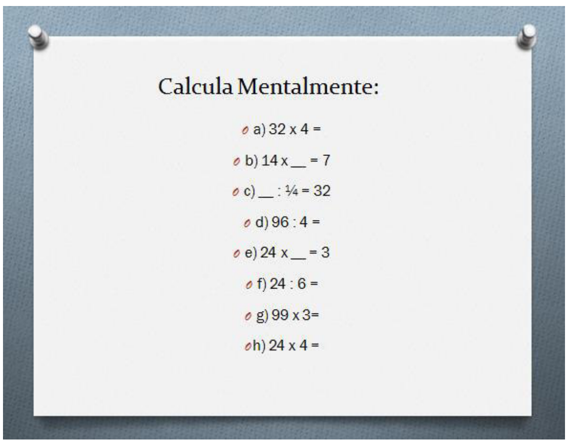
Talvez, devesse primeiro ter dado uma breve explicação e exploração das operações inversas e só depois aplicar o jogo. Assim, os alunos entenderiam o funcionamento e as regras para descobrir o valor em falta e o jogo tornava-se mais útil.

4.2.5. 5.ª e 6ª Sessões

A 5ª sessão decorreu no dia 14 de Maio e a 6ª sessão no dia seguinte. Tal como no 1.º ciclo, criei dois PowerPoint, o primeiro com 8 alíneas e o segundo com 9 alíneas. Tal como no 1.º ciclo, coloquei um slide em branco entre cada uma das alíneas, de modo a dar um pouco de tempo para os alunos terminarem o raciocínio relativo à alínea que viram e prepararem-se para a seguinte. Cada slide demorava 20 segundos a passar.

Os exercícios, em ambas as sessões, sustentaram-se no tipo de cálculos e de estratégias trabalhadas nas aulas. Para além de multiplicações e de divisões para efetuar mentalmente, acrescentei também, expressões com lacunas, tal como tínhamos trabalhado na sessão anterior. Algumas das alíneas, coincidem com as do 1.º ciclo, para serem alvo de comparação.

Estas sessões foram de trabalho individual, onde cada aluno mobilizava estratégias pessoais de cálculo e, foi feita uma discussão em grande grupo, onde podiam ser evidenciadas e exploradas as diferentes estratégias utilizadas por cada um.



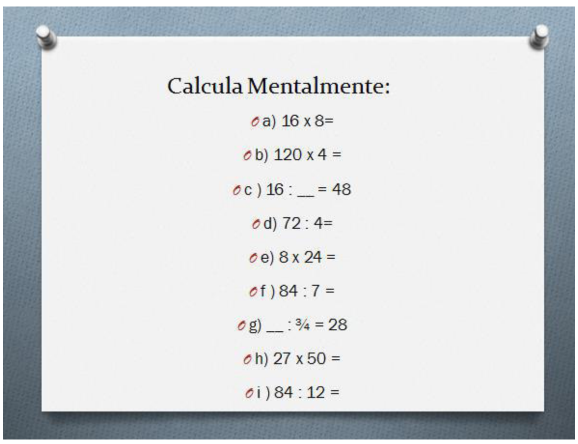


Figura 4.59. Tarefas 1 e 2 da 5.ª e 6.ª sessão

4.2.5.1. APRECIAÇÃO GLOBAL

De forma geral, podemos refletir os resultados da primeira tarefa (5ªsessão) na seguinte tabela:

Alíneas	Frequência Absoluta (N=26)		
	Certo	Errado	Não Responde
a) 32 x 4=	21	5	0
b) 14 x _ = 7	21	1	4
c) _ : ¼ = 32	6	15	5
d) 96 : 4 =	15	5	6
e) 24 x _ = 3	10	12	4
f) 24 : 6 =	20	2	4
g) 99 x 3 =	17	5	4
h) 24 x 4=	20	6	0

Tabela 4.29. Número de alíneas corretas/incorretas na tarefa 1 da 5.ª e 6.ª sessão

Como podemos verificar apenas em duas alíneas c) e e) é que as respostas erradas foram superiores às respostas corretas. Ora ambas as alíneas referem-se a expressões que contêm frações. Desta forma, os alunos ainda apresentam algumas dificuldades para descobrir o valor em falta numa expressão.

Já na 6ª sessão, podemos ver na tabela seguinte os resultados demonstrados:

Alíneas	Frequência Absoluta (N= 26)		
	Certo	Errado	Não Responde
a) 16 x 6 =	22	2	2
b) 120 x 4 =	24	2	0
c) 16 : _ = 48	10	6	10
d) 72 : 4 =	15	5	6
e) 8 x 24 =	12	7	7
f) 84 : 7 =	15	3	8
g) _ : ¾ = 28	0	5	21
h) 27 x 50 =	11	4	11
i) 84 : 12 =	9	4	13

Tabela 4.30. Número de alíneas corretas/incorretas na tarefa 2 da 5.ª e 6.ª sessão

Como podemos ver, algumas alíneas suscitaram maiores dificuldades do que outras.

As alíneas a) e b), por exemplo, foram duas das alíneas que suscitaram menores dificuldades. Duas das estratégias mencionadas na alínea b) por dois alunos foram:

Exemplo 1: "120 vezes 2 que dá 240 e 240 mais 240 dá 480". Desta forma, este aluno recorreu ao uso de dobros.

Exemplo 2: "12x4 que é 48 e acrescentei um zero", aplicando uma estratégia rápida e eficaz.

Na alínea c) (16: ___ =48) existiram o mesmo número de respostas certas e de alunos que não responderam.

Na alínea d) alguns alunos referiram que recorreram à metade da metade para encontrar a solução, ou ao uso das tabuadas. No entanto, outros aplicam outras estratégias de forma errada:

Exemplo 1: "Fui ver quantas vezes o quatro cabe no 7 e cabe uma. E, sete menos quatro dá 3. Depois, baixamos o 2 e fica 32. Logo são 8".

A aluna reproduz a resposta 14 quando deveria ter alcançado o resultado 18 para a divisão de 72:4. Isto porque, quando confrontada com a estratégia utilizada, a aluna refere que recorreu a estratégias mentais do algoritmo mental para encontrar o resultado mas, visto que dessa forma trabalha com algarismo a algarismo e, não sendo o 7 múltiplo de 4, encontrou dificuldades em o realizar.

Desta forma, e a explicar de forma mais reflexiva a aluna consegue alcançar o resultado eficazmente porém, como teve 20 segundos para colocar esta estratégia em prática acabou por a aplicar com erros.

Na alínea f) podem ver-se alguns exemplos das estratégias evidenciadas:

Exemplo 1: "7x11 é 77 e 7x12 é 84".

Exemplo 2: "84 menos 70 é 14 (84- (7x10)) e depois, fui ver quantas vezes precisava do sete para chegar a 14 e é 2. Logo 10+2 é 12".

No entanto, ainda assim, alguns alunos mencionaram estratégias erradas, como podemos comprovar no exemplo seguinte:

Exemplo 1: “Fui ver quantas vezes o quatro cabe no 7 e cabe uma. E, sete menos quatro dá 3. Depois, baixamos o 2 e fica 32. Logo são 8”.

Também na alínea e) alguns alunos referiram que recorreram à compensação procurando a dezenas mais próxima e contando para trás, visto que tinham 8x24 compensaram até ao 10 e retiraram as 48 unidades (2 x 24). Outros, compensaram o 24 até 25 retirando depois as 8 unidades que somaram.

A alínea g) corresponde a uma expressão que envolve o uso de frações nenhum aluno conseguiu responder corretamente pois, envolvia o uso da multiplicação e da divisão em simultâneo. A expressão era a seguinte: ___: ¾= 28. Era esperado que, para descobrir o valor do dividendo, os alunos recorressem à fórmula D= dxq. Assim, teriam de calcular mentalmente 28 x 3 e ao resultado dividir por 4. Esta era a alínea com maior grau de dificuldade onde era pretendido verificar se algum aluno conseguiria atingir a solução no tempo previsto.

Já a alínea i) 84:12 os alunos tiveram também muitas dificuldades em arranjar estratégias para resolver esta expressão. Também, porque foi a última e alguns dos alunos estavam a pensar na alínea anterior e acabaram por não ter tempo para terminar a alínea i) mas, ainda assim, muitos alunos tiveram dificuldades em pensar no 84 como múltiplo de 12 em vez de tentarem resolver 84:12 algarismo a algarismo.

Durante o tempo dado para cada alínea, verifiquei que, alguns alunos, acabavam por se apoiar em cálculos escritos. Para alguns alunos foi difícil este exercício de pensar mentalmente sem recurso a estratégias escritas.

4.2.5.2. SÍNTESE

De forma geral, os resultados foram um pouco melhores na 5ª sessão do que na 6ª, com as maiores lacunas nas alíneas c) e e) na 5ª sessão, e nas alíneas c), e), g), h) e i) na 6ª sessão. Continuam, assim, algumas dificuldades nas expressões em que se pretende que explorem a operação inversa e nas divisões

4.2.6. JOGO DO 24

Durante várias sessões foi dado algum tempo para o jogo do 24, nomeadamente, na 1ª, 3ª e 5ª sessão. Na primeira sessão dedicada a este jogo, a organização do jogo foi feita em pares para que, como alguns dos alunos ainda não conheciam bem o jogo pudessem sentir-se apoiados e mais motivados.

Durante o tempo dado a este jogo, senti que os alunos estavam muito motivados e empenhados na resolução do jogo. Como na primeira vez que jogaram muitos dos pares de alunos tinham conseguido resolver as cartas de nível 1 e de nível 2 resolvi levar cartas de nível 3 para aumentar a sua complexidade e, mais uma vez, apesar de alguns dos alunos sentirem dificuldades e não encontrarem soluções imediatas, pelo contrário, outros alunos conseguiram chegar a soluções para todas as cartas e até encontrar mais do que uma solução para a mesma carta.

Por fim, iniciei o jogo do 24 com frações, com alguns dos alunos, pois, deixei-os optar se queriam iniciar o jogo com frações ou permanecer no jogo com nível de dificuldade II e III uma vez que alguns alunos ainda apresentam algumas dificuldades nestes níveis. Assim, quem quis iniciou o jogo com frações. Como o tempo foi escasso, deixei os alunos levarem as folhas de registo para casa para tentarem praticar o jogo mas, nem todos os alunos disponibilizaram tempo para o jogo.

De seguida, mostro as folhas de registo de várias cartas do jogo. Para além destas três folhas de registo, numa das sessões, visto que alguns alunos conseguiram facilmente encontrar soluções para todas as cartas, alguns alunos registaram mais 5 cartas numa das folhas de registo, com níveis de dificuldade 2 e 3.

Assim, posso dizer, que para o jogo do 24, as sessões foram bastante flexíveis na medida em que, enquanto alguns alunos continuavam com as mesmas cartas e níveis de dificuldade, outros iam avançando e aumentando o grau de dificuldade das cartas. Assim, enquanto uns podem ter solucionado 20 cartas, outros só 8, por exemplo.

Sempre que sentia necessidade, ia dando algumas pistas a alguns alunos para tentar que não bloqueassem em alguma carta.

Também, por vezes, deixava que alguns alunos discutissem, entre eles, algumas soluções.

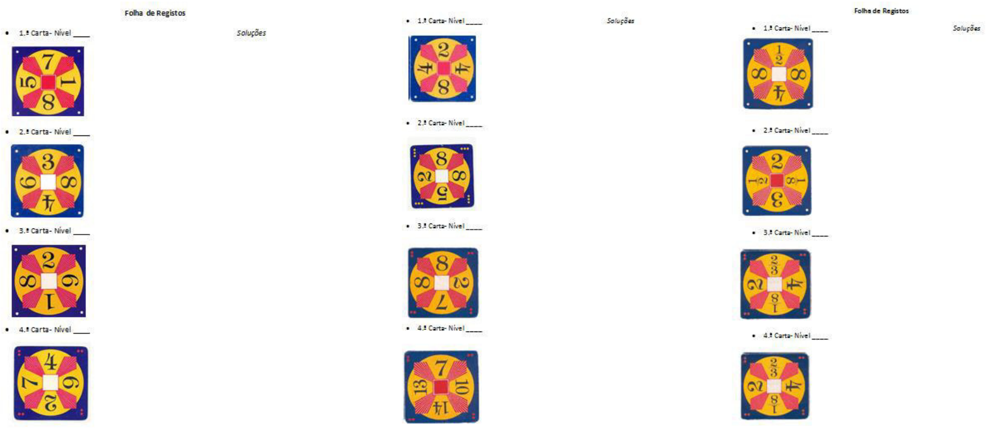


Figura 4.60. Cartas do jogo do 24

4.2.6.1. APRECIAÇÃO GLOBAL

De maneira geral, todos os alunos indicaram uma solução para a 1ª folha de registo. Quanto às cartas registadas com nível de dificuldade 2 e 3, a maioria encontrou também uma solução para quase todas as cartas. Apenas alguns alunos não conseguiram resolver as cartas com nível de dificuldade 3. De seguida, podem ver-se alguns exemplos das soluções encontradas por alguns alunos:

<u>Carta 1 (1ªfolha de registo)</u>

Exemplo 1- 7-5=2; 2+1=3; 8x3=24.

<u>Carta 3 (1ªfolha de registo)</u>

Exemplo 1- 6x8=48; 48: (2x1)=24.

Exemplo 2- 8:2=4; 4:1=4; 6x4=24.

<u>Carta 4 (1ªfolha de registo)</u>

Exemplo 1- 4+6=10; 7x2=14; 10+14=24.

Exemplo 2- 7x4=28; 28-6=22; 22+2=24.

Na 2ª folha de registo 9 alunos chegaram a uma solução para as quatro cartas e 6 alunos não encontraram nenhuma solução para nenhuma carta. Assim, 11 alunos encontraram uma, duas e três soluções para as quatro cartas.

Exemplos:

2ª carta (2ªfolha de registo)

Exemplo 1- 8x2=16; 8x5=40; 40-16=24.

3ª carta (2ªfolha de registo)

Exemplo 1- 8-7=1; 2+1=3; 3x8=24;

Na última folha de registo, com frações, 5 alunos encontraram soluções para as quatro cartas e 3 alunos não alcançaram solução para nenhuma carta. 6 alunos chegaram a soluções para duas cartas e 1 aluno para três cartas. Desta forma, os restantes alunos só encontraram a solução para uma carta. Apresento de seguida algumas das soluções das cartas:

Carta 2 (3ª folha de registo)

Exemplo 1- ½ : 1/8 = ½ x8 = 8/2 = 4; 4x3=12; 12x2= 24.

Exemplo 2- ½ x 2= 1; 1: 1/8= 8; 8x3=24.

Carta 3 (3ª folha de registo)

Exemplo 1- 4:2=2; 2:2/3= 2x3/2= 6/2; 3: 1/8= 3x8/1= 24/1 = 24.

O jogo do 24 é para estes alunos um fator de motivação que apesar de ser lúdico, é também pedagógico e desenvolve neles estratégias de cálculo mental. Para estes alunos, tem-se tornado uma boa ferramenta aliada às tarefas que têm sido trabalhadas na sala de aula.

Continuo a sublinhar que o jogo do 24, foi muito motivante e desafiante para estes alunos. Têm demonstrado grande entusiasmo quando chegava a hora de praticar o jogo e de arranjar novas estratégias. Verifico também que, as estratégias utilizadas são muito diversificadas. Para mim, enquanto professora e investigadora é uma mais-valia sentir esta entrega por parte dos alunos na atividade.

4.2.7. Ficha Final

A ficha final é composta por quatro tarefas, que se baseiam nas aplicadas na ficha de diagnóstico.

Assim, para além de verificar a evolução das aprendizagens e da aplicação de estratégias de cálculo pelo 2.º ciclo, poderei também comparar com os dados relativos ao 1.ºciclo.

<u>Tarefa 1:</u>

1. Preenche os espaços em branco de forma a obter afirmações corretas.

a) 25 x ______ = 2500 b)______ : 10 = 1400 c) 200 : 20 = ______

d) ______ x 50 = 2000 e) 300 x 200 = ______ f) 400: ______ = 20

Figura 4.61. Tarefa 1 da ficha final

APRECIAÇÃO GLOBAL

Respostas Corretas	**Frequência Absoluta (N=26)**
Respondeu acertadamente a todas as alíneas	9
Respondeu acertadamente a cinco alíneas	11
Respondeu acertadamente a quatro alíneas	3
Respondeu acertadamente a três alíneas	0
Respondeu acertadamente a duas alíneas	2
Respondeu acertadamente a uma alínea	1
Não respondeu acertadamente a nenhuma alínea	0

Tabela 4.31. Número de respostas corretas na tarefa 1 da ficha final

De maneira geral, a turma teve um progresso ao nível das afirmações corretas relativamente à ficha de diagnóstico.

Como podemos ver, o número de alunos que respondeu de forma correta em todas as alíneas subiu. Na ficha de diagnóstico nenhum aluno o tinha feito e agora temos 9 alunos que o fizeram. O mesmo acontece com 5 alíneas corretas onde na ficha de diagnóstico apenas dois alunos o tinham feito e agora 11 alunos que apenas erraram em uma alínea.

Quanto às respostas corretas/incorretas das alíneas podemos verificar na tabela seguinte:

Alíneas	Responderam Corretamente	Responderam Incorretamente	Não Responderam
a) 25x100=	26	0	0
b) ? :10 = 1400	20	3	3
c) 200:20=	21	4	1
d) ? x 50=2000	19	5	2
e) 300x200=	17	9	0
f) 400:? = 20	21	3	2

Tabela 4.32. Respostas corretas/incorretas na tarefa 1 da ficha final

Pelo que é possível observar, a alínea a) foi a que obteve melhores resultados, mostrando que 100 % dos alunos (26 alunos) responderam corretamente a esta alínea. No entanto, é possível afirmar-se que os resultados neste exercício foram bastante positivos, na medida em que, grande maioria respondeu corretamente às várias alíneas.

Pode apenas destacar-se a alínea e) que teve resultados inferiores, ainda que, mais de metade da turma tenha chegado à solução correta.

Comparativamente com a ficha de diagnóstico, quatro das seis alíneas mantiveram-se, alterando apenas os algarismos, sendo elas as alíneas b), d), e) e f). Sobrepondo os resultados em ambos os testes apenas a alínea b) regrediu em termos de respostas corretas, uma vez que, na ficha de diagnóstico 23 alunos tinham alcançado a resposta correta. No entanto, nas outras três alíneas, verifica-se uma ligeira melhoria.

<u>Tarefa 2:</u>

Na tarefa 2, continuei a aplicar uma alínea referente à multiplicação e outra referente à divisão. Da mesma forma que, na multiplicação, um dos fatores é constituído por apenas um algarismo.

2. Determina mentalmente o resultado das seguintes operações, utilizando todas as ESTRATÉGIAS DE CÁLCULO diferentes que conseguires.

54 x 6 =

96 : 6 =

Figura 4.62. Tarefa 2 da ficha final

APRECIAÇÃO GLOBAL

Relativamente à primeira alínea, 14 alunos aplicaram uma estratégia, sete alunos duas, quatro alunos três estratégias e apenas um aluno quatro estratégias. Quanto à segunda alínea, 12 alunos mencionaram uma estratégia, quatro alunos duas e apenas um aluno quatro estratégias. Os restantes alunos ou não mencionaram nenhuma ou evidenciam algum erro na sua aplicação.

Quanto às estratégias podemos ver nas tabelas seguintes as que surgiram com mais frequência, considerando “Outras” quando são aplicadas estratégias diferentes das categorizadas e que não são previstas mas que se encontram corretas; “Estratégia com erro de cálculo” quando a estratégia estaria correta (como a decomposição, por exemplo) mas que demonstra um erro de cálculo levando a um resultado diferente da solução; “Não Responde ou Responde de forma incorreta” quando os alunos não evidenciam nenhuma estratégia ou as que evidenciam não fazem sentido e estão aplicadas de forma errada.

Estratégias utilizadas		**Frequência absoluta**	
Decomposição	Decomposição do fator 54	16	21
	Decomposição do fator 6	5	
	Decomposição de ambos os fatores	0	
Fatorização	Fatorização do 54 (1 com erro de cálculo)	5	5
	Fatorização do 6	0	

Substituição	6	6
Compensação (2 com erro de cálculo)	3	3
Adições sucessivas	7	7
Outras	0	0

Tabela 4.33. Estratégias evidenciadas na alínea a) na tarefa 1 da ficha final

A estratégia mais utilizada foi a decomposição do fator 54, no entanto, 9 alunos utilizaram a substituição e a compensação.

Comparando com a ficha de diagnóstico pode ver-se que, os alunos utilizaram com a mesma frequência as adições sucessivas, mas nota-se um aumento do número de estratégias.

Já na segunda alínea podem ver-se as seguintes estratégias:

Estratégias utilizadas		**Frequência absoluta**
Decomposição do dividendo		9
Fatorização do divisor		3
Estratégia de Contagem	Adições sucessivas	1
	Uso de dobros e metades	2
Uso de fatos derivados ou conhecidos da divisão		8
Outras		2
Não Responde ou Evidencia erros na aplicação da estratégia		4

Tabela 4.34. Estratégias evidenciadas na alínea b) na tarefa 2 da ficha final

Relativamente à ficha inicial, os alunos conseguiram aplicar mais estratégias, uma vez que quatro alunos mencionaram duas estratégias e um aluno, quatro. Também, diminuíram os alunos que não responderam ou aplicaram de forma incorreta a estratégia.

De maneira geral, os alunos recorreram com maior frequência à decomposição do dividendo e, a factos conhecidos na divisão, ou seja, à mobilização da tabuada. Por exemplo, vejamos as seguintes resolução:

Exemplo 1- “6x10=60 e 6x6=36”, pelo que, o produto será a soma de 10 e 6.

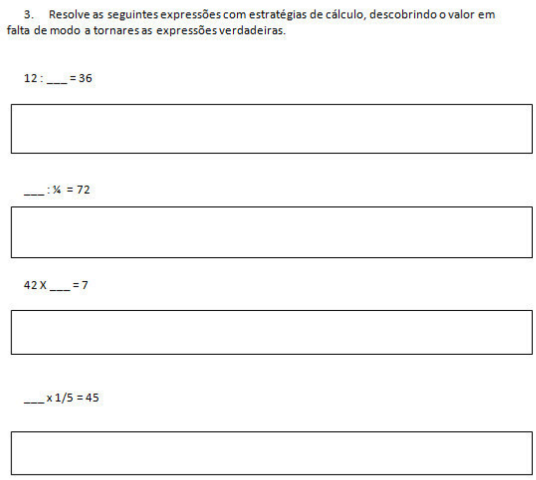
Exemplo 2- "6x2=12" e repete-o de forma a alcançar o 96. Depois, conta o número de vezes que adicionou o dois.

Exemplo 3- "96:12=8 e 8x2=16"

Exemplo 4- o aluno encontra o múltiplo de 6 a partir de um facto conhecido- 20x6=120. Como pretende calcular 96:6, o aluno retira 96 unidades a 120 unidades, ficando 120-96=24. Depois, divide o 24 por 6 e subtrai quatro unidades às vinte iniciais: "20x6=120; 120-96=24; 24:6=4; 20-4=16";

<u>Tarefa 3:</u>

A tarefa 3 evidencia expressões com lacunas, onde é desejado que os alunos apliquem as estratégias abordadas na sessão das operações inversas.


3. Resolve as seguintes expressões com estratégias de cálculo, descobrindo o valor em falta de modo a tornares as expressões verdadeiras.

12 : ___ = 36

___ : ¼ = 72

42 X ___ = 7

___ x 1/5 = 45

Figura 4.63.Tarefa 3 da ficha final

APRECIAÇÃO GLOBAL

De seguida, apresento uma síntese das respostas corretas nas quatro alíneas:

	Frequência Absoluta (N=26)		
Alíneas	Certa	Incorreta	Não Responde
a) 12 : _ = 56	16	8	2
b) _ : ¼ = 72	13	10	3
c) 42 x _ = 7	16	5	5
d) _ x 1/5 = 45	14	7	4

Tabela 4.35. Respostas corretas/incorretas na tarefa 3 da ficha final

De forma geral, os alunos ainda demonstraram algumas dificuldades nesta questão, apesar de, em nenhuma questão, as respostas incorretas serem superiores a metade da turma.

Quanto às estratégias utilizadas, de maneira geral, na alínea a) e c) a maior parte da turma recorreu ao uso das tabuadas para reconhecer que 12x3=36 e, posteriormente, colocar sob forma de fração- 1/3. Por exemplo:

Exemplo 1 -(alínea a)- A aluna calcula primeiro qual será o valor do divisor e só depois o coloca sob forma de fração, ou seja, por estratégias de contagem através do uso da tabuada, a aluna identifica que 12x1; 12x2=24 logo 12x3=36, sendo que, o 3 deve estar contemplado no valor do divisor. Depois, coloca o inverso de 3, representado como 1/3.

Exemplo 2- (alínea a)- O aluno primeiro calcula 36:12=3, e só depois transforma o 3 na sua inversa- 1/3. De seguida, confirma o resultado através da expressão: 12:1/3= 12x3/1= 36.

Exemplo 3- (alínea c)- A aluna aplica primeiro a estratégia de contagem para saber quantas vezes precisará dos sete para encontrar o valor 42, expressando 7x2=14 três vezes, porque 14+14+14=42. Assim, a aluna identifica o número 6 para o lugar do divisor que, transforma em 1/6.

Na b) e na d) os alunos aplicaram com maior frequência a operação inversa, uma vez que, tinham que descobrir o valor do dividendo, em b), e do multiplicando, em d).

Exemplo 4- (alínea b)- para a expressão _ : ¼ =72, o aluno reproduz _ x 4/1= 72; 72:4=18.

Exemplo 5- (alínea d)- O aluno aplica diretamente a operação inversa, ficando 45: 1/5, aplicando depois as regras formais da divisão de frações e recorrendo à decomposição para calcular 45x5.

<u>Erros evidenciados:</u>

Exemplo 1- alínea c)- um aluno recorre à divisão, como operação inversa da multiplicação, no entanto, utiliza-a de forma incorreta, uma vez que, era esperado que a aluna escrevesse 7:42 e não 42:7.

Exemplo 2- alínea d)- uma aluna recorre de forma incorreta à operação inversa, isto porque, deveria escrever 45: 1/5 quando o que mencionou foi 45:5, resultando assim numa solução errada.

<u>Tarefa 4:</u>

Por fim, a tarefa 4 foca-se no jogo do 24 onde apresento duas cartas do jogo do 24: ambas de níveis de dificuldade 1, mas uma só com números inteiros e outra com números fracionários.

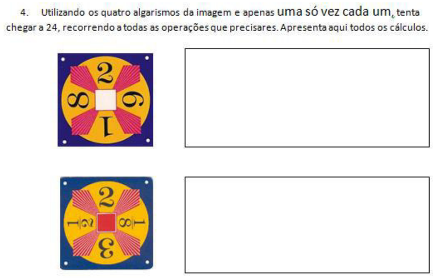


Figura 4.64. Tarefa 4 da ficha final

APRECIAÇÃO GLOBAL

Na primeira carta 22 alunos encontraram uma solução correta para a carta. Já na segunda carta, 19 alunos encontraram a solução. Desta forma, estes alunos adaptaram-se muito facilmente ao jogo, evoluindo para cartas de dificuldade avançadas e com a introdução de frações. Vejamos alguns exemplos de soluções dadas:

<u>1ª carta:</u>

Exemplo 1- 6:2=3; 8x3=24; 24x1=24.

Exemplo 2- 6:2=3; 3x1=3; 8x3=24.

<u>2ª carta:</u>

Exemplo 1- 1/2: 1/8x3x2=24

Exemplo 2- ½ x2= 1; 3: 1/8= 3x8=24; 24x1=24.

Como podemos ver, através destes exemplos, alguns alunos registam toda a sequência de cálculos expressada numa única expressão (exemplo 1 da 2ª carta) enquanto outros, recorrem a cálculos isolados até encontrar o valor 24 (exemplo 2, 2ª carta).

SÍNTESE FINAL

De forma sucinta, parece existir uma evolução na aprendizagem dos alunos quer ao nível do número de estratégias quer ao nível da sua complexidade. Comparativamente com as estratégias aplicadas na ficha de diagnóstico, evidenciam-se menos erros e estratégias mais complexas. Apesar de alguns alunos continuarem com estratégias como as adições sucessivas, por outro lado, outros utilizam mais estratégias como a substituição ou a compensação.

No que diz respeito aos números racionais não negativos, os alunos parecem estar muito "presos" ao algoritmo tradicional, às regras formalizadas e memorizadas sobre a adição, subtração, multiplicação e divisão de frações. Assim, necessitam de registos intermédios para conseguirem desenvolver o seu raciocínio.

Apesar de terem sido poucas as sessões de intervenção para o projeto e do desenvolvimento de estratégias para o cálculo mental, parece-me, a meu ver, que os alunos evoluíram ainda que não muito, na diversidade de estratégias e na sua "relação" com o cálculo mental que, estava um pouco esquecido.

Também, em relação ao jogo do 24 é notória a sua evolução. Poucos são os alunos que não evidenciam nenhuma solução nas cartas de nível de dificuldade 1 e 2. Quanto ao jogo do 24 com frações, bastantes alunos conseguiram alcançar algumas soluções e desenvolver a sua apetência para o jogo.

CAPÍTULO V- CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo procuro dar resposta ao problema levantando inicialmente "Como desenvolver nos alunos uma boa fluência no cálculo mental?", bem como às questões consequentes: 1) Quais são a estratégias de cálculo mental para a multiplicação e a divisão utilizadas por alunos do 4.º ano e do 6.º ano de escolaridade?; 2) Que diferenças existem nas estratégias de cálculo da multiplicação e da divisão utilizadas pelos alunos do 4.º e do 6.º ano de escolaridade?; 3) Que tarefas/atividades se devem promover para desenvolver nos alunos o cálculo mental?; 4) Quais os contributos das estratégias de cálculo para o desenvolvimento do cálculo mental?; e 5) De que forma poderá o jogo do 24 ajudar na promoção do desenvolvimento da destreza no cálculo mental?

Assim, apresento numa primeira linha a resposta a estas questões, seguindo-se uma pequena síntese sobre os contributos deste estudo para o meu crescimento profissional e pessoal, seguindo-se depois, algumas limitações do estudo e, por fim, algumas recomendações para futuras investigações.

5.1. Conclusões do estudo

5.1.1. Quais são a estratégias de cálculo mental para a multiplicação e a divisão utilizadas por alunos do 4.º ano e do 6.º ano de escolaridade?

Relativamente às estratégias utilizadas pelos alunos do 4.º ano, farei uma súmula das estratégias utilizadas nas duas primeiras sessões, que são relativas à multiplicação.

Sessões	**Estratégias**
1ª sessão	Decomposição Fatorização

2ª sessão	Fatorização Decomposição Produto de Múltiplos de 10 "Teia"

Tabela 4.36. Estratégias do 4.º ano de escolaridade

Nas duas primeiras sessões relativas à multiplicação, os alunos recorrem com maior frequência à decomposição, à factorização e à "teia" que não é mais do que a utilização do algoritmo disposto em formato horizontal. A utilização da decomposição como estratégia de cálculo mental para a multiplicação é defendida por diversos autores (Cadeia & Sousa, 2006; Cadeia, 2008; Loureiro, 2009; Ribeiro, Valério & Gomes, 2009).

Relativamente à estratégia da "teia" torna-se importante refletir se, deverá ser ou não, considerada uma estratégia de cálculo mental, uma vez que é visualizado algarismo a algarismo contrariando o que defendem Buys (2008) e Abrantes et al. (2007), ou seja, que o cálculo mental trabalha com números e não com dígitos, sendo o número é visto como um todo. No mesmo sentido, também Sowder (1992), e Matos e Serrazina (2000), valorizam que o cálculo mental utilize algoritmos diferentes dos que são usados os cálculos de papel e lápis.

Quanto às estratégias de divisão, foram trabalhadas através das relações de dobro e de metade, tendo sido propostas duas tarefas: "Estratégia do Afonso " e "Calcular usando o dobro".

Curiosamente, a maioria dos alunos recorreu à decomposição, ao invés do uso de dobros e metades como seria esperado.

Os resultados obtidos neste estudo parecem contrariar as conclusões do estudo efetuado por Mestre e Oliveira (2011) onde as mesmas duas tarefas foram aplicadas. Nesse estudo é referido que os alunos conseguiram reconhecer a estrutura subjacente às estratégias de cálculo de cada uma das tarefas, identificando as relações numéricas de dobro e de metade e usaram ainda essas relações e as propriedades das operações para justificar essas estratégias de cálculo representando-as de diferentes formas. No estudo que realizei, estes alunos usaram a decomposição sem estabelecer as relações de dobros e metades.

Refira-se que foi nas estratégias referentes à divisão onde se evidenciaram os maiores erros e as maiores dificuldades. Apesar de alguns alunos recorrerem à decomposição do dividendo, outros também tentaram de decompor o divisor. Pode dizer-se que, os alunos para a divisão recorreram também a estratégias de contagem, nomeadamente a adição sucessiva e à utilização de fatos conhecidos, especialmente ao uso de tabuadas.

Quanto às estratégias de cálculo mental utilizadas no cálculo mental temporizado, a turma, de maneira geral, recorre ao algoritmo usual feito de cabeça. Como refere Gómez (2005) o cálculo mental deve ser integrado com os algoritmos escritos, inclusive antes dos alunos os dominarem, para evitar efeitos negativos nos alunos, principalmente, aqueles que dominam com facilidade os cálculos escritos pois tendem a resolver os problemas de cálculo mental utilizando as técnicas do cálculo escrito. Esta posição contraria o que Grosso (2012) defende no título do seu artigo "Programa de Matemática do 1.º ciclo: Para começar, a estimativa não é boa", afirmando que o algoritmo deve ser introduzido na escolaridade básica mais precocemente, dizendo ser o meio mais eficaz para efetuar um cálculo com números inteiros ou decimais pois, na execução dos algoritmos está a treinar-se o cálculo mental. Ora, na minha opinião, não me parece ser extremamente útil a introdução precoce do algoritmo formal, especialmente da multiplicação e da divisão, isto porque, as crianças nos primeiros anos ainda não têm um domínio total da compreensão dos números e como eles se relacionam. Aliás, e como defendem vários autores (Loureiro, 1996) os algoritmos não são mais do que mecanizações de procedimentos que, facilmente são esquecidos e, que, pelo contrário a estimação e o cálculo mental podem ajudar na compreensão do algoritmo.

No 2.º ciclo, e mais especificamente no 6.º ano de escolaridade, as estratégias de multiplicação usadas nas duas primeiras sessões são variadas, desde a decomposição, a factorização, a compensação, a substituição, entre outras. Poderemos ver, de forma mais resumida, na tabela seguinte, as estratégias utilizadas para a multiplicação:

Sessões	Estratégias
1ª sessão	Decomposição
2ª sessão	Decomposição Compensação Factorização Produto de Múltiplos de 10 Substituição Adições sucessivas

Tabela 4.37. Estratégias 6.º ano de escolaridade

Os alunos do 6.º ano não se restringem ao uso de uma única estratégia. Mendes, Brocardo e Oliveira (2011a) referem que ao nível das ideias matemáticas sobre a multiplicação é esperado que os alunos abandonem progressivamente a ideia de adição sucessiva e evoluam para um raciocínio multiplicativo, no entanto, um ou outro aluno ainda recorre com frequência à adição sucessiva. Apesar disso, os outros alunos conseguem elaborar estratégias mais complexas e mais evoluídas. Por exemplo a compensação, estratégia evidenciada por diversos autores (Ribeiro et al, 2009; Cadeia & Sousa, 2006) e a substituição.

Quanto à introdução dos números racionais não negativos os alunos remetem frequentemente as suas estratégias para as regras memorizadas na multiplicação e divisão de frações, ao uso de fatos básicos memorizados e, à mudança de operação (Caney & Watson, 2003).

Quanto às estratégias de divisão, os alunos demonstraram grandes dificuldades em descobrir o valor do divisor. Quando tinham que aplicar estratégias, os alunos mencionaram sobretudo o uso das tabuadas, partindo de fatos básicos conhecidos, adições sucessivas e decomposição do dividendo.

Quanto às estratégias referidas na discussão em grande grupo dos alunos, percebe-se que, surgiram uma diversidade de estratégias pessoais, como a decomposição, o uso de fatos conhecidos da tabuada, a compensação, o uso de dobros e metades e a substituição.

5.1.2. Que diferenças existem nas estratégias de cálculo da multiplicação e da divisão utilizadas pelos alunos do 4.º e do 6.º ano de escolaridade?

Comparando os resultados evidenciados quer numa, quer noutra turma, pode dizer-se que se encontram algumas divergências no uso de estratégias de cálculo mental.

No 4.º ano os alunos recorrem com maior frequência à decomposição e à fatorização e, sobretudo, à "teia"- algoritmo- quer na multiplicação quer na divisão. Já os alunos do 6.º ano, recorrem a estratégias mais diversificadas como a compensação, a substituição, o uso de dobros e metades. Apesar de também utilizarem a decomposição, esta não surge com tanta frequência (com exceção da 1ª sessão). Nos exercícios que se repetem em ambos os ciclos, pode ver-se na tabela seguinte, a comparação das estratégias evidenciadas com maior frequência:

Exercício	**4.º ano**	**6.º ano**
	Estratégias	
5x16=	Decomposição Fatorização	Decomposição Adições sucessivas
12x50=	Fatorização Decomposição Produto de Múltiplos de 10	Decomposição Factorização Produto de Múltiplos de 10 Substituição Adições sucessivas
8x99=	Decomposição "Teia"	Decomposição Compensação Adições sucessivas

Tabela 4.38. Comparação das estratégias do 4.º e do 6.º ano

Em relação à divisão, os alunos do 4.º ano recorrem com maior frequência ao algoritmo feito de cabeça, à decomposição do dividendo e à factorização do divisor. Já os alunos do 6.º ano, apesar de mencionarem a decomposição do dividendo, recorrem a estratégias de compensação, do uso de dobros e metades e, sobretudo, a fatos básicos conhecidos da tabuada.

Para além da semelhança/diferença nas estratégias utilizadas pode dizer-se que, é evidente a diferença na comunicação matemática e na expressão da linguagem matemática entre ambas as turmas, isto porque, o 4.º ano demonstrava grandes dificuldades não só em expressar os seus raciocínios, como e, principalmente, em escrever os processos matemáticos. O Programa de Matemática (2007) refere que os alunos devem ser capazes de descrever a sua compreensão matemática e os procedimentos matemáticos, quer oralmente quer por escrito (…) aperfeiçoando os seus processos de comunicação.

Já no 2.º ciclo, os alunos devem denotar uma evolução na forma de exprimir as suas ideias matemáticas e de as descrever, progredindo na tradução de relações da linguagem natural para a linguagem matemática e vice-versa, na variedade de formas de representação matemática que usam e no rigor com que o fazem (Ponte & Sousa, 2010).

Quanto ao cálculo mental temporizado, as diferenças são bastantes, isto porque, o 4.º ano restringe-se às formas mentais do algoritmo escrito, sendo que estes alunos, deparados com situações de cálculo temporizado, optam por recorrer a estratégias pessoais com que se sentem mais à vontade com "na base na rapidez e na facilidade" (Cebola, 2002).

Já os alunos do 6.º ano, sentem mais confiança na utilização de dobros e metades, em fatos conhecidos das tabuadas, na compensação e na substituição, isto é, utilizam estratégias mais diversificadas e pessoais, enquanto, no 4.º ano, há mais homogeneidade nas estratégias evidenciadas.

5.1.3. Que tarefasse devem promover para desenvolver nos alunos o cálculo mental?

Através das intervenções e das tarefas que propus ao longo das sessões, posso dizer que devem ser promovidas atividades onde possam ser exploradas diferentes estratégias de cálculo, de forma a possibilitar que os alunos apliquem estratégias pessoais de cálculo e, sobretudo, proporcionar uma exploração oral onde é ressaltado o raciocínio e a comunicação de cada um.

Embora, não possa generalizar o meu estudo, parece-me que, devem ser promovidas algumas estratégias de cálculo no sentido de despertar os alunos para a eficácia de algumas estratégias em detrimento de outras em determinadas situações, e da aplicação de algumas estratégias de forma generalizada. Ou seja, devem ser exploradas diferentes situações, para que os alunos possam perceber que, umas funcionam muito bem em determinada situação, e outras noutras situações.

É necessário, que o professor demonstre cuidado e preocupação na escolha dos números dados para a aplicação de estratégias. Tal como referi na revisão da literatura, Buys (2001) definiu uma linha de desenvolvimento do cálculo mental reforçada por Brocardo (2011) onde é essencial, a escolha do contexto e dos números dados pois, uns podem, por exemplo, favorecer o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e, outros, o uso de produtos por múltiplos de 10. Neste sentido, as tarefas sugeridas aos alunos devem basear-se no uso estratégias que envolvam dobros e metades, a decomposição, as propriedades dos números e das operações (Brocardo,2011).

Tarefas como as da 2ª sessão, onde os alunos podem aplicar várias estratégias para o mesmo cálculo, ou as tarefas "Calcular usando dobros" e "A estratégia do Afonso" foram pensadas de forma sequencial para desenvolver estratégias concretas. Desta forma, as tarefas propostas devem relacionar-se entre si, favorecendo o uso de estratégias de cálculo, construindo um sistema de relações numéricas que estão intimamente ligadas aos cálculos realizados nas tarefas anteriores.

Assim, as tarefas das sessões 1 e 2 do 1.º e do 2.º ciclo, exploram diferentes possibilidades de estratégias de cálculo para a multiplicação, sendo que os números propostos foram escolhidos com o intuito de favorecer estratégias específicas, nomeadamente, o 5x16 ou o 8x99, permitem aos alunos desenvolver estratégias de compensação e de substituição, por exemplo.

Analisando as tarefas das sessões 3 e 4 do 1.º ciclo, podemos facilmente dizer que permitem aos alunos desenvolver noções e estratégias de dobros e metades, bem como das propriedades das operações, procurando diferentes caminhos de resolução, essenciais ao desenvolvimento do cálculo mental. Num estudo efetuado por Mendes, Brocardo & Oliveira (2011b) sobre os procedimentos usados pelos alunos do 1.º ciclo quando resolvem tarefas de multiplicação e a sua evolução, estes autores relatam que “os procedimentos de usar relações de dobro e de metade é um a que os alunos menos recorrem “ (p.15), assim, é essencial que se promovam tarefas que envolvam esta relação para promover estratégias eficazes de cálculo.

Para além da preocupação na escolha das tarefas, o professor deve prever as estratégias a usar pelos alunos, bem como eventuais erros que possam surgir, “garantindo o estabelecimento de pontes entre estratégias com diferentes graus de sofisticação. Deste modo, possibilita que alunos que usaram estratégias pouco potentes consigam compreender as resoluções mais eficazes de outros colegas e progridam em termos de nível de aprendizagem” (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011).

Da mesma forma, que deve ser privilegiado o cálculo mental (temporizado) de forma rotineira, criando condições para que os alunos apliquem as estratégias de cálculo desenvolvidas através de estratégias pessoais.

É essencial que o professor privilegie a oralidade (Loureiro, 1996; Serrazina, 2002; Brocardo, 2011) onde os alunos possam ser incentivados a desenvolver as suas próprias estratégias de cálculo e a partilhá-las e a discuti-las (Serrazina, 2002).

Da mesma forma, os jogos são também importantes e uma ferramenta que deve ser implementada e explorada nas aulas de matemática (ME, 2001, 2007). Se o professor incluir o jogo com tarefas delineadas e objetivos concretos, não apenas com o seu lado lúdico, este poderá ajudar no desenvolvimento de competências e capacidades matemáticas (ME, 2007; Ribeiro, Valério & Gomes, 2009).

5.1.4. Quais os contributos das estratégias de cálculo para o desenvolvimento do cálculo mental?

A ficha de diagnóstico e a ficha final poderão dar-me alguns indicadores sobre a eficácia das estratégias de cálculo no desenvolvimento do cálculo mental, isto porque, inicialmente, os alunos demonstraram algumas dessas estratégias na ficha de diagnóstico que foram, posteriormente trabalhadas na sala de aula. Neste sentido, na ficha final estes alunos já poderão evidenciar as aprendizagens efetuadas. No entanto, deve ter-se em atenção que se trata de uma ficha, onde são colocados à prova alguns conhecimentos e, que, eventualmente, poderão não refletir as verdadeiras aprendizagens de um aluno.

Quero eu dizer que, não poderei avaliar apenas o produto sem considerar todo o processo, isto é, não posso avaliar um aluno apenas pela ficha de diagnóstico em comparação com a ficha final pois, poderá não refletir toda a sua evolução, ou aprendizagem, porque o resultado da ficha final poderá ser influenciado por diversos fatores como o tempo dado, a disposição desse aluno nesse dia, de fatores motivacionais, fatores psicológicos, etc. Neste sentido todo o processo decorrido ao longo das intervenções é fulcral para retirar as considerações finais.

No que diz respeito ao 1.º ciclo, a evolução das suas aprendizagens não foi muito notória com a aplicação do pré-teste e do pós-teste. Apesar, de em alguns exercícios de verificar uma ligeira melhoria nos resultados, em outros, onde era pedido que descrevessem todas as estratégias de cálculo, os alunos do 4.º ano evidenciaram algumas dificuldades em fazê-lo, principalmente no que diz respeito à divisão.

No entanto, para alguns alunos, a estratégia de decomposição, por exemplo, com recurso à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, permitiu salientar a compreensão e utilização das propriedades das operações e o conhecimento do sistema de numeração posicional. Para além disso, ao discutirmos estas estratégias permitiram a aluno desenvolver o seu sentido crítico e a razoabilidade dos resultados, essenciais para um bom desenvolvimento do sentido de número.

Já no 2.º ciclo, a evolução foi um pouco mais nítida, principalmente, nas estratégias de cálculo relativas aos números inteiros. Se na ficha de diagnóstico muitos alunos evidenciaram dificuldades na aplicação de estratégias, na ficha final estas dificuldades não foram tão evidentes. Assim, as estratégias de cálculo mental desenvolvidas ao longo das sessões, parecem ter repercutido efeitos, na medida em que, estas se tornaram eficazes.

O uso de estratégias de cálculo permitem ao aluno desenvolver estratégias pessoais essenciais no desenvolvimento e na destreza do cálculo mental, isto porque, ao trabalhar diferentes estratégias de cálculo permite ao aluno compreender o sistema de numeração posicional, explorar as propriedades dos números e operações e, consequentemente desenvolver o cálculo mental pois, a utilização das propriedades das operações é fundamental para um bom cálculo mental (Taton, 1969 & Buys, 1992 em Carvalho, 2011).

Neste sentido, o meu estudo foi aplicado com base no conhecimento e no desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo, com tarefas e contextos numéricos bem definidos, de forma a dar a oportunidade de serem trabalhadas diferentes estratégias: quer na multiplicação, quer na divisão, para que, posteriormente, os alunos conseguissem aplicar esses conhecimentos de forma rápida e eficaz nas situações de cálculo mental temporizado.

Ribeiro, Valério & Gomes (2009) sublinham que as estratégias de cálculo mental quando conhecidas, compreendidas e aplicadas permitem a realização eficaz e rápida de cálculo. Embora o cálculo mental permita a utilização de estratégias pessoais existe um conjunto de estratégias que devem ser ensinadas, discutidas e treinadas com os alunos (Carvalho, 2011).

Desta forma, foram ensinadas e discutidas estratégias de decomposição, de factorização, da relação no uso de dobros e metades, de composição, de substituição que, posteriormente, foram aplicadas por alguns dos alunos nas situações de cálculo mental temporizado.

Sabe-se que, para calcular mentalmente, são ativados procedimentos pessoais em que cada estratégia é pensada e utilizada tendo em conta os números com que se está a trabalhar (Wolman, 2006 em Carvalho, 2011) e os conhecimentos que cada um possui. Assim, e seguindo esta lógica quanto mais estratégias diferentes de cálculo conhecerem e mais desenvolvidas estiverem maior será a eficácia e a rapidez no cálculo mental. No entanto e, apesar de todas as estratégias terem sido abordadas e exploradas em contexto de sala de aula, alguns alunos, utilizam procedimentos pessoais que não foram explorados, nomeadamente, aplicação mental do procedimento algorítmico, isto porque, esta “estratégia” poderá ter sido reforçada e aplicada de forma recorrente, tornando-se uma estratégia imediata para estes alunos. Desta forma, para estes alunos, não poderei afirmar que o conhecimento de novas estratégias de cálculo poderá contribuir para o desenvolvimento da competência de cálculo nestes alunos. Da mesma maneira que, por outro lado, se estas estratégias forem reforçadas e treinadas de forma sistemática e intencional poderão vir a ser aplicadas por estes alunos com maior frequência e de forma eficaz.

Ao trabalhar-se as estratégias de cálculo mental na sala de aula, dando ênfase à discussão e à comunicação de ideias e processos, permite ao aluno partilhar estratégias e refletir sobre os seus erros. Desta forma, o erro pode servir como base para a descoberta das conceções matemáticas dos alunos (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Ponte & Serrazina, 2000) e promover o desenvolvimento de estratégias mais eficientes de cálculo.

De maneira sucinta, o desenvolvimento de estratégias pessoais de cálculo mental permite a consolidação do sentido de número e a melhoria da capacidade crítica e de estimação do aluno (Carvalho, 2011), logo reflete-se no desenvolvimento da destreza no cálculo mental.

5.1.5. De que forma poderá o jogo do 24 ajudar na promoção do desenvolvimento da destreza no cálculo mental?

O jogo do 24 foi implementado nos dois ciclos, no entanto, houve muito mais evolução no 6.º ano do que no 4.º. Visto que, a sua implementação, foi de reduzida duração não poderei generalizar quanto ao contributo do jogo do 24 no desenvolvimento da destreza no cálculo mental.

Mas, este jogo permitiu aos alunos a memorização de fatos básicos conhecidos, nomeadamente nas tabuadas (e, principalmente, o de 8x3; 6x4; 12x2; 48:2;), no aumento da destreza da manipulação de números, permitindo-lhes atuar com as diferentes operações; relacionar os números entre si, pois, os alunos tinham que utilizar todos os algarismos uma só vez e trabalhar com eles de forma a obter 24.

Neste sentido, está presente na brochura "Cálculo Mental" de Ribeiro, Valério & Gomes (2009) este jogo (e outros) com os objetivos da aquisição de fatos numéricos (da multiplicação), a prática das tabuadas, memorização das mesmas e dos factos da multiplicação, a comparação de frações, cálculo de metades, entre outros.

Também, o programa de Matemática contempla o jogo do 24 como recurso e ferramenta no desenvolvimento do cálculo mental.

De facto, apesar do pouco tempo disponibilizado para o desenvolvimento deste jogo e, de alguns alunos terem manifestado a dificuldade deste jogo percebe-se que, da ficha inicial (de diagnóstico) para a ficha final, os alunos desenvolveram muito mais à vontade com este jogo, demonstrando até, várias soluções para a mesma carta e realizando cálculos com frações.

No final das intervenções, por vezes em contexto de aula era necessário recorrer à memorização das tabuadas e, o que aconteceu é que os factos de 8x3 e 6x4 estavam bem presentes manifestando que já estavam memorizados.

A aplicação sistemática deste jogo, permite ao aluno no começo descrever várias situações de tentativas de alcançar a solução que, progressivamente vão abdicando e calculando exclusivamente de forma mental, o que reflete que começam a demonstrar alguma destreza com os números e com as operações.

Como o jogo permite a utilização das quatro operações, os alunos começam a relacioná-las entre si e, como vimos anteriormente, a utilização das propriedades das operações é fundamental para um bom cálculo mental (Taton, 1969 & Buys, 1992 em Carvalho, 2011).

Posso concluir que, os alunos considerados mais competentes, com melhores resultados ao nível da matemática foram os que, apresentaram menores dificuldades na utilização deste jogo e, que, chegavam a soluções muito mais rápidas. No entanto, os alunos com maiores dificuldades e com um cálculo mental menos desenvolvido conseguiram também chegar às soluções das cartas, mas de níveis de menor dificuldade.

Apesar de este jogo ter um caráter competitivo, nomeadamente, em competições matemáticas realizadas em algumas escolas e distritais, eu optei por não dar tanta ênfase a este lado, isto porque, ganha quem consegue solucionar primeiro a carta e, o que poderia constatar é que, desta forma, os alunos com melhor destreza no cálculo chegariam mais rapidamente à solução, abafando por completo os alunos com maiores dificuldades, podendo ser este um fator de desmotivação.

Apesar disto, posso também referir que, alguns alunos utilizaram estratégias bastante complexas para as soluções de algumas cartas que, a meu ver, torna-se um ponto a favor deste jogo, nomeadamente, na aquisição de várias estratégias/soluções para a mesma carta, reforçando a ideia de que, existem várias estratégias para um mesmo cálculo e, que ambas estão corretas mas utilizadas de forma mais pessoal.

5.2. Contributos do estudo e da intervenção pedagógica para o desenvolvimento e crescimento pessoal e profissional

No decurso da prática de Ensino Supervisionada do Mestrado do Ensino do 1.º e do 2.º Ciclo do Ensino Básico, o presente estudo e a intervenção pedagógica decorrente do 4.º e do 6.º ano de escolaridade revelaram-se extremamente úteis e uma mais-valia para o meu percurso académico e profissional.

Através desta experiência, foi-me possível ver crescer e alargar os meus conhecimentos acerca do cálculo mental, das estratégias de cálculo mental e a forma de dinamizar este tema em contexto de sala de aula. As intervenções que realizei em ambos os ciclos, permitiram-me perceber a importância deste tema para o desenvolvimento do sentido do número e a sua relação com este, sendo que, sem a sua aquisição torna-se "quase impossível" aprender matemática e gostar da matemática.

Mas, para além de alargar o meu campo de conhecimento acerca do sentido do número e de cálculo mental, consegui também, entender muito mais acerca do processo de ensino-aprendizagem, nomeadamente, nas dinâmicas de grupo, na forma de conduzir as aulas, na gestão do tempo, entre outras. Ao dinamizar as aulas e ao "assumir" a turma como "minha" fez-me olhar e repensar muitos métodos que poderei vir a adoptar (e outros que certamente não quererei aplicar) e uma forma de estar muito mais segura, convicta, confiante em que, para além de dominar os conteúdos programáticos- para o qual estamos habilitados- pretendo enfatizar e promover uma aprendizagem ativa e significativa por parte dos alunos, não esquecendo nunca, de formar cidadãos conscientes, críticos, reflexivos e autónomos capazes de tomar decisões e de intervir numa sociedade que também lhes diz respeito.

Muito haveria a dizer sobre este tema mas, não fugindo muito às aprendizagens que reti ao longo destes anos de formação e, mais propriamente, neste ano onde pude exercer o meu estágio curricular, percebi também que é por eles (alunos) e para eles que ensinamos, portanto as nossas perspetivas, os nossos objetivos, as nossas ações têm que se centrar no que é realmente significativo para eles e daí, ser tão importante, prevermos, operacionalizarmos, refletirmos e avaliarmos a nossa pratica sem nunca dar como encerrado este ciclo.

Quanto à possibilidade que me foi dada de estagiar em ambos os ciclos, posso dizer que foi essencial e significante para mim na medida em que, nunca tinha tido contacto com o 6.º ano de escolaridade. Sem dúvida que, esta experiência permitiu-me ter a certeza que, de facto, me sinto muito bem quer no ensino do 1.º ciclo quer no 2.º ciclo. Se por um lado, no 1.º ciclo, é notória uma envolvência e uma aproximação muito grande com as crianças, de um ensino muito mais articulado e interdisciplinar temos, por outro lado, no 2.º ciclo, um ensino muito mais autónomo que se torna, principalmente em matemática, muito aliciante para mim.

Apesar de curtas, estas intervenções permitiram-me crescer a nível pessoal e profissional e, de certo modo, ajudar estas crianças a terem uma visão diferente de número, e da forma como os números se relacionam, permitindo-lhes serem mais autónomos no que diz respeito ao cálculo mental colocando em prática diversas estratégias de cálculo. Assim, este tema que se encontra intrinsecamente ligado ao sentido de número favoreceu o desenvolvimento e a destreza com os números e com o cálculo mental.

5.3. Limitações do estudo

Como em todos os projetos e estudos, este também revelou algumas limitações, nomeadamente, o fator tempo inerente ao número de sessões e aos exames finais de 6.º ano que, como é de esperar, requerem muito mais tempo de preparação por parte do professor titular, restando menos tempo para as intervenções para o projeto. A meu ver, e apesar de ter desenvolvido bastantes sessões, se tivesse mais tempo aumentava a possibilidade de exploração das estratégias de cálculo mental em ambos os ciclos.

Outro aspeto que se tornou uma limitação no meu estudo foi a extensa análise de dados que este estudo requer. Apesar de ter optado por um estudo de casos múltiplos, sento ainda assim, a necessidade de analisar (ainda que de forma mais superficial) a restante turma, de modo a poder obter conclusões mais válidas e mais generalistas. No entanto, devido à extensão de dados em cada um dos ciclos, tornou-se um trabalho complexo no cruzamento e comparação dos dados, bem como na limitação do número de páginas/ caracteres que nos são permitidos na concretização deste relatório de estágio.

Refiro-me agora à imprevisibilidade deste estudo e das sessões, uma vez que, ia (re)estruturando as minhas intervenções à medida em que ia aplicando as tarefas em cada sessão. Quando planeava uma determinada tarefa, não sabia à partida (e apesar de ter construído tabelas com as eventuais previsões e dificuldades/erros previstos) quais as estratégias que os alunos iriam usar, se surgiriam estratégias que não esperava- aliás como aconteceu mais do que uma vez- tornando-me muito mais vulnerável e ansiosa na condução e na dinamização das aulas.

Por fim, evidencio os poucos estudos (comparando com alguns temas da matemática onde são exploradas diversas vertentes) neste tema, considerando que ainda assim, existem muito mais estudos referentes ao ensino das estratégias de cálculo mental para a adição e para a subtração em detrimento da multiplicação e da divisão. Quanto ao jogo do 24, realço, de facto, o desconhecimento de estudos que sustentem a importância e a pertinência deste jogo no ensino do cálculo mental.

5.4. Recomendações para futuras investigações

As conclusões deste estudo permitem-me "abrir" caminhos para novos estudos no que concerne esta temática.

Atendendo ao curto espaço de tempo em que este projeto foi desenvolvido, seria pertinente desenvolver um estudo neste âmbito mas num espaço de tempo superior, permitindo ao investigador aprofundar aspetos relacionados com as estratégias de cálculo na multiplicação e na divisão, e até quem sabe, envolvendo a resolução de problemas.

Deixo também uma "porta aberta" ao estudo da implementação do jogo do 24 enquanto promotor do desenvolvimento do cálculo mental e das aprendizagens advindas dessa implementação. Quem sabe, não poderemos ter no jogo do 24 (iniciado desde o 1.º ano de escolaridade até ao final da educação básica) um forte aliado na promoção da destreza no cálculo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Afonso, N. (2005). *Investigação naturalista em educação: um guia prático e crítico*. 1ª Edição. Edições ASA.

Albergaria, I. S. & Ponte, J. P. (2008). Cálculo mental e calculadora. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Eds.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 98-109). Lisboa: SEM-SPCE.

Bardin, L. (2004). *Análise de Conteúdo*. 3ª Edição. Edições 70.

Bell, J. (2002). *Como realizar um projeto de investigação: um guia para a pesquisa em ciências sociais e da educação.* 2ª Edição. Edições Gradiva.

Boavida, A.,M.,R., Paiva, A.,L., Cebola, G., Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico – Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico.* Lisboa: Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular

Bogdan, R. & Biklen, S. (2006). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Brocardo, J. & Serrazina, L. (2008). O sentido do número no currículo de matemática. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds.), *O Sentido do Número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 97–115). Lisboa: Escolar Editora.

Brocardo, J. (2011). *Uma linha de desenvolvimento do cálculo mental: começando no 1.º ano e continuando até ao 12.º ano.* Actas da Conferência ProfMat2011, XXII SIEM. Lisboa: APM.

Cadeia, C. & Sousa, F. (2006). O Sentido das Operações. O cálculo mental. Os algoritmos. In Alexandra Gomes (Coord.), *MAT1C- Desafio à Matemática*, pp.101-114. Braga: Universidade do Minho- IE.

Cadeia (2008). O Cálculo Mental e a Estimação. In *A matemática ao encontro das práticas. 1.º ciclo.* Ema Mamede .Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Instituto de Estudos da Criança- Universidade do Minho. Pp. 93-114.

Caney, A., & Watson, J. M. (2003). *Mental computation for part-whole number operations*. Trabalho apresentado nas conferências conjuntas da Associação Australiana de Investigação em Educação e da Associação da Nova Zelândia de Investigação em Educação, Auckland. Retirado a 18 de Setembro de 2014 em: http://www.aare.edu.au/03pap/alpha.htm

Carvalho, R. (2011). *Calcular de cabeça ou com a cabeça?* Actas da Conferência ProfMat2011, XXII SIEM. Lisboa: APM.

Carvalho, R & Ponte, J. (2012). *Práticas de ensino com cálculo mental*. Sem publicadora definida.

Castro, J. P. & Rodrigues, M. (2008) O sentido de número no início da aprendizagem. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds.), *O Sentido do Número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 117-133). Lisboa: Escolar Editora.

Cebola, G. (2002). Do número ao sentido do número. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores* (pp.257-273). Lisboa: SEM-SPCE.

Gómez, B. (2005). *Le enseñanza del cálculo mental*. UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Dezembro de 2005. N.º 4. Pp. 17-29.

Gómez, M. (2007). *La investigación educativa: claves teóricas*. Madrid. Edições McGraw-Hill.

Grosso, C. (2012). *Programa de matemática do 1.º ciclo: Para começar, a estimativa não é boa.* Gazeta da Matemática, n.º 166, Sociedade Portuguesa da Matemática. pp. 54-57. Retirado a 18 de Janeiro de 2015 em http://www.gazeta.spm.pt

Heirdsfield, A.; Cooper, T.; Mulligan, J. & Irons, C. (1999). Children's mental multiplication and division strategies. In Zaslavsky, Orit, (Eds.) Proceedings of the 23rd Psychology of Mathematics Education Conference, pages 89-96, Haifa, Israel.

Janeiro, J. (2007). 13 ideias sobre cálculo mental In Revista *Educação Matemática*, número 93, Maio/Junho de 2007.

Kemmis, S. & McTaggart, R. (1992). *Como planificar la Investigación Acción*. Barcelona: Editorial Laertes.

Loureiro, C. (1996). Às voltas com a divisão de números inteiros. In *Revista Educação e Matemática.* número 40, 4.º trimestre. APM

Máximo-Esteves, L. (2008). *Visão Panorâmica da Investigação-Ação*. Porto: Porto editora.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). *A proposed framework for examining basic number sense.* For the Learning of Mathematics, 12(3), 2-8. British Columbia: Canada.

Mendes, F.; Brocardo, J. & Oliveira, H. (2011a). A multiplicação: Construir oportunidades para a sua aprendizagem. In M. Isoda & R. Olfos (Orgs.), *Enseñanza de la multiplicación: Desde el estudio de clases japonés a las propuestas iberoamericanas* (pp. 321-350). Valparaíso, Chile: Edíciones Universitarias de Valparaíso.

Mendes, F.; Brocardo, J. & Oliveira, H. (2011b). *Os procedimentos usados pelos alunos do 1.º ciclo quando resolvem tarefas de multiplicação e a sua evolução.* Desenvolvimento Curricular e Didática. CIDTFF- Indagatio Didactica, vol 3(1). Universidade de Aveiro.

Mestre, C. & Oliveira, H. (2011). *Generalizar estratégias de cálculo: um estudo sobre o pensamento relacional de alunos do 4.º ano de escolaridade*. XXII SIEM.

Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Ministério da Educação (2007). *Programa de matemática do ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2013). *Programa de matemática para o ensino básico-* Metas curriculares de matemática. Lisboa: Ministério da Educação.

Morais, C. (2011). *O Cálculo mental na resolução de problemas: um estudo no 1.º ano de escolaridade*. Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Instituto Politécnico de Lisboa: ESSE Lisboa.

National Council Teachers of Mathematics (1989). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

National Council Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática

Nogueira, R. (2013). *A jogar também de se aprende… o contributo do jogo no desenvolvimento de competências matemáticas na educação pré-escolar e no 1.º ciclo do ensino básico.* Relatório de estágio para obtenção do grau de mestre em Educação pré-escolar e 1.º ciclo do ensino básico à Universidade dos Açores.

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (2002). *Investigar a nossa própria prática.* Reflectir e investigar sobre a prática profissional (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (Org.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Ribeiro, D., Valério, N. & Gomes, J. T. (2009). *Cálculo Mental*. Brochura – Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos. Escola Superior de Educação de Lisboa.

Serrazina, L. (2002). Competência matemática e competências de cálculo no 1.º ciclo. In *Educação e Matemática*, número 69, pp. 57-60.

Serrazina, L. & Oliveira, I. (2002). *O professor como investigador: Leitura crítica de investigações em educação matemática.* Reflectir e investigar sobre a prática profissional (pp. 283-308). Lisboa: APM.

Serrazina, L., & Oliveira, I. (2010). Trajectória de aprendizagem e ensinar para a compreensão. In GTI (Org.), *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico* (pp. 43-59). Lisboa: APM.

Taton, R. (1969). *O cálculo mental.* Lisboa: Arcádia. Tradução de M. A. Videira.

Teixeira, R. (2014). *Cálculo mental: Um estudo sobre as estratégias utilizadas por alunos do 1.º e do 2.º ciclo do ensino básico*. Relatório de Estágio apresentado à Escola Superior de Educação de Lisboa para obtenção de grau de mestre em Ensino do 1.º e do 2.º Ciclo do Ensino Básico.

Vieira, L. & Cruz, O. (2006). Desenvolvimento do sentido do número In Alexandra Gomes (Coord.), *MAT1C- Desafio à Matemática*, pp.93-100. Braga: Universidade do Minho- IE.

Anexos

ANEXO I

1.º Ciclo

1.ª Sessão: Algumas formas de resolver os mesmos cálculos

Questões e subquestões:

"Que tarefas/ actividades se devem promover para desenvolver nos alunos o cálculo mental?"

" Quais as estratégias de cálculo que serão mais eficazes para desenvolverem o cálculo mental?"

" Quais os contributos das estratégias de cálculo para o desenvolvimento do cálculo mental"

Objetivos específicos:

- Usar produtos conhecidos como referência
- Utilizar a regra do produto de múltiplos de 10 (multiplicar e acrescentar um zero)
- Decomposição de um dos fatores
- Propriedades da multiplicação

1.ª sessão					
Atividades a desenvolver	**Intervenção da professora**	**Organização/ dinâmicas do grupo**	**Recursos**	**Tempo**	**Avaliação**
Depois de conversar um pouco com alunos acerca da ficha de diagnóstico que realizaram e das suas dificuldades relativas ao uso de estratégias de cálculo e da fluência no cálculo mental, é-lhes explicado que iremos trabalhar algumas sessões com o intuito de desenvolver o cálculo mental e o uso de estratégias de cálculo, bem como da sua importância no quotidiano.	A professora questiona: " Sabem o que é o cálculo mental?" " Como fazem para calcular de cabeça?" "Quando costumam fazer essas contas? Para quê?" "Acham que é útil calcular assim?"	- Individual	- 25 folhas com cálculos - lápis	15´	O quê? - os alunos são capazes de aplicar estratégias de cálculo - os alunos conseguem resolver os três cálculos - utilizam bem as estratégias de cálculo Como? - folha de registo dos cálculos - gravação áudio
Entrego umas "tiras de papel" com os seguintes cálculos: • 12 x 10 • 14 x 4 • 5 x 16 Ao entregar estes cálculos peço-lhes que os resolvam utilizando uma estratégia de cálculo. Assim que terminarem, devem trocar com o colega do lado e verificar as estratégias utilizadas por eles.	A professora andará pelos lugares a orientar o trabalho e a prestar ajuda assim que for necessário. Registo de algumas observações dos alunos A, B e C na explicação dada aos colegas.	- Individual - Pares - Grande Grupo	- quadro - giz - gravador	15´ 15´	

Quando tentarem perceber qual foi a estratégia utilizada podem pedir a explicação do colega que resolveu o cálculo para explicar o modo como procedeu para resolver a operação. Debater em grande grupo algumas estratégias utilizadas. A professora escolhe algumas (as que tenham sido mais utilizadas e as dos três alunos escolhidos para o estudo).	A professora questiona: “ Como é que fizeram para obter este resultado?” “Poderemos resolver sempre desta forma?” “Ajuda-nos a chegar ao resultado?” Através das previsões, ir questionando de acordo com as estratégias que utilizaram.			30´	- registo de notas

ANEXO II- Tabela 1- Estratégias e Dificuldades Previstas (sessão 1- calculo das tiras)

Estratégias Previstas	**Eventuais Erros/ Dificuldades**	**Raciocínios**
12 x 10 =		
12 x 10= 12x1= 12+0=120	Utilizar erradamente a forma de acrescentar o zero.	Acrescentar um zero quando se multiplica por 10.
12+12+12+12+12 +12+12+12+12+ 12=120	Realizar um número elevado de adições podendo esquecer-se de somar alguma parcela.	Adições sucessivas
(10+2)x10= 10x10 + 2x10= 100 + 20= 120	2x10=20 1x10=10 20+10=30 Aplicar de forma errada a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.	Decomposição - Propriedade distributiva
12 x 10= 100 20 100 + 20 = 120	Ao aplicar a "teia" há uma grande possibilidade de errarem no pensamento da multiplicação das unidades e das dezenas, como acontece no algoritmo.	"Teia"- multiplicar em forma de teia e somar os resultados (parecido com o algoritmo)
14 x 4=		
(10+4)x4= 10x4 + 4x4= 40 + 16 =56	Erro ao aplicar a propriedade distributiva 10+4x4= 10+16=26	Decomposição seguida da propriedade distributiva
14x2x2= 28x2= 56	Erro ao calcular o produto	Fatorização de um dos produtos
14x2x2= 28x2= (20+8) x2= 40+16= 56	Erro ao calcular o produto	Fatorização de um dos produtos seguido da decomposição de um dos fatores e aplicação da propriedade distributiva
14x4=	Erro no uso da propriedade	

(10+4) x 2 x 2= 10x2 + 10x2 + 4x2 + 4x2= 20+20+8+8=56	distributiva Erro no uso dos sinais 10+4 x 2 x 2= 10x2 + 4x2 = 20+8= 28	Decomposição e Fatorização
14+14+14+14= 56	Erro na soma das parcelas	Adições sucessivas
14 x 4= 40+16 = 56	Erro no posicionamento das parcelas 14x4= 16 4 20	" Teia"- multiplicar em forma de teia e somar os resultados (parecido com o algoritmo)
5 x 16=		
5 x (10+6)= 5 X 10 + 6 X 5 = 50 +30= 80	Erro no uso da propriedade distributiva 5x (10+6) = 50+6= 56	Decomposição seguida da propriedade distributiva
16x5= (10+6) x 5= 50 + 30 = 80	Erro no uso da propriedade distributiva (10+6) x 5= 10+30= 40	Aplicação da propriedade comutativa Decomposição seguida da propriedade distributiva
5 x (8+8)= 5x8 + 5x8 = 40+40= 80	Erro no uso da propriedade distributiva 5 x (8+8)= 40+8=48	Decomposição seguida da propriedade distributiva
5 x (8+8)= (5 x 8) x 2= 40 x 2= 80	Erro ao factorizar 16x5= 16x2x3= 32x3= 96 16x5= 16x2+3= 35 Erro ao aplicar a propriedade distributiva (5x8)x2= 10+16=26	Decomposição num produto de dobro em que um dos fatores é uma potência de 2 (dobrar depois de usar a decomposição)
10 x 16 : 2= 160 : 2= 80 10x 16: 2= 10x8= 80	5x16= X2 10x16= 160 160x2= 320	Achar a dezena mais próxima e dividir para compensar (substituir a multiplicação por uma composição de uma multiplicação seguida de uma divisão)

Tabela 2- Estratégias e Dificuldades Previstas (sessão 2- 12 x 50 e 8 x 99)

Estratégias Previstas	**Eventuais Erros/ Dificuldades**	**Raciocínios**
12 x 50 =		
12x50= 12x5= 60 60+0= 600	Erro no uso da regra	Acrescentar um zero quando se multiplica por 10.
(10+2)x50= 10x50 + 2x50= 500 + 100 = 600	Erro na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (10+2)x50= 500x2= 1000	Decomposição seguida da propriedade distributiva
(10+2) x (5x10)= 12x5x10= 12x10x5= 120x5= 100x5 + 20x5= 600	Erro na fatorização Erro na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (10+2)x5x10= 50+100+10+20= 180	Decomposição Fatorização Propriedade comutativa Propriedade distributiva
50+50+50…..	Erro na soma das parcelas Esquecer de adicionar alguma parcela	Adições sucessivas
12 x 50= 100 +50 600	Erro no posicionamento das parcelas	“Teia” (recurso ao algoritmo)
8 x 99 =		
2 x 2 x 2 x 99= 2 x 2 x 2 x (90+9)= 2 x 2 x 180+18= 2 x 360 + 36= 720 + 72 = 792	Erro na factorização com troca de operações:2+2+2 em vez de 2x2x2 Erro na aplicação da propriedade distributiva com troca de operações: (90x9) em vez de (90+9)	Fatorização de um dos produtos Decomposição Propriedade Distributiva
4 x 2 x 9= 4 x 2 x (90 + 9)= 4 x (180+18)= 720+72= 792	Erro na factorização Erro na aplicação da propriedade distributiva com troca de operações	Fatorização de um dos produtos Decomposição Propriedade Distributiva
8 x (90+9)= 720+72= 792	Erro na factorização Erro na aplicação da propriedade distributiva com troca de operações	Decomposição Propriedade Distributiva
8 x (100-1)= 800-8= 792	Erro na aplicação da propriedade distributiva	Obter a centena mais próxima Propriedade distributiva em relação à subtração

ANEXO III-

Tabela 3- Estratégias e Dificuldades Previstas (sessão 3)

Estratégias Previstas	Eventuais Erros/ Dificuldades	Raciocínios
"Calcular usando dobros"		
6x8= 2x(6x4)=48 12x8= 2x(12x4)=96 25x8= 2x(25x4)= 200	Erro na aplicação da propriedade associativa	Consegue estabelecer relações de dobro e metade entre as tabuadas do 4 e do 8 - produtos da tabuada do 8 como o dobro dos produtos da tabuada do 4 Propriedade associativa da multiplicação
6x8= 6x4+6x4= 24+6x4= 24+24=48 12x8= 12x4=48+12x4=48 48+48= 96 25x8= 25x(4+4)= 100+100=200	Erro na utilização da propriedade distributiva Erro no cálculo das expressões numéricas	Decomposição de um dos fatores Estabelece relações da utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição
6x8= 2x3x8= 2x24=48 12x8= 2x6x8= 2x48= 96 12x8= 3x4x8= 3x32=96 25x8= 25x2x2x2= 50x2x2=100x2=200 25x8= 25x2x4= 50x4=200	Erro ao fatorizar Erro no cálculo das expressões numéricas	Factorização
"A estratégia do Afonso" **36 x 5 =**		
(36 x 10) : 2= 360:2= 180		Compensar para obter a dezena- substituir a multiplicação por uma composição de uma multiplicação e uma divisão
(30+6) x 5= 30x5 + 6x5= 150+30=180	Erro na aplicação da propriedade distributiva	Decomposição Propriedade distributiva
36x10= 360 Como 10 é metade de 5 36x5 é metade de 360= 180	Dificuldade na explicação da relação do dobro e da metade (entre a tabuada do 10 e do 5)	Explicação da relação do dobro e da metade entre a tabuada do 5 e do 10 Produto da tabuada do 10 como o dobro do produto

		da tabuada do 5
Calcula sabendo que 4x7=28		
8x7		
28x2= (20+8)x2= 40+16= 56		Decomposição e propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição
2x28=56		Uso de dobros
2x4x7= 28x2=56		Fatorização
2x7		
28:2=14		Fatos conhecidos
4:2x7= 2x7=14		Recorre à metade
	Erro de cálculo	
6x7		
4x7 + 2x7 = 28+14=42		Decomposição
2x3x7= 2x21=42		Fatorização
8x7 – 2x7=56-14=42		Compensação
9x7		
3x3x7= 3x21= 63		Fatorização
3x7 + 6x7= 21+42= 63		Decomposição
8x7 + 1x7= 56+7= 63		Decomposição
2x4x7 + 1x7= 56+7=63		Decomposição
6x7 + 3x7= 42 + 21= 63		Decomposição
10x7 – 1x7= 70-7= 63		Compensação
Calcula sabendo que 24:4=6		
24:6		
24:2:3= 12:3=4		Fatorização
24:3:2=8:2=4		Fatorização
6x4= 24		Operação Inversa
12:6 + 12:6= 2+2= 4		Decompoisção
24:2		
2x12=24		Operação inversa
24:4 =6 :2 X2 24:2 =12		Uso de fatos conhecidos ; Uso de dobros e metades
24=12+12 12:2+12:2= 6+6=12	Erro de cálculo	Decomposição
20:2 + 4:2= 10+2=12		Decomposição
24:8		
24:8=3		Uso de fatos conhecidos
24:4:2= 6:2=3		Fatorização
24:2:4:= 12:4=3		Fatorização Recorre à metade
24:2:2:2= 12:2:2= 6:2=3		Recorre à metade

ANEXO IV-

Tabela 4- Estratégias e Dificuldades Previstas (sessão 4)

<table>
<tr><th>Estratégias Previstas</th><th>Eventuais Erros/ Dificuldades</th><th>Raciocínios</th></tr>
<tr><td colspan="3">$\square$ x 7 = 35</td></tr>
<tr><td>35:7= 5</td><td></td><td>Operação Inversa</td></tr>
<tr><td>(21+14):7= 3+2=5</td><td>35: (3+4)</td><td>Operação Inversa
Decomposição do dividendo</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\square$ x 3 = 36</td></tr>
<tr><td>36:3= 12</td><td rowspan="3">(30+6) : (2+1)
36 :(2+1)</td><td>Operação Inversa</td></tr>
<tr><td>12x3=3</td><td>Cálculo Mental- Recurso aos múltiplos de 3</td></tr>
<tr><td>(12+12+12):3= 4+4+4=12</td><td>Decomposição do dividendo</td></tr>
<tr><td colspan="3">12 x $\square$ = 48</td></tr>
<tr><td>48:12= 48:2:6=
24:6 = 4</td><td rowspan="3">(40+8):12=
40:12 + 8:12=

48: (10+2)=</td><td>Fatorização do divisor</td></tr>
<tr><td>48:6:2= 8:2=4</td><td>Fatorização do divisor</td></tr>
<tr><td>(24+24):12= 2+2=4</td><td>Decomposição do dividendo</td></tr>
<tr><td colspan="3">4 x $\square$ = 96</td></tr>
<tr><td>96:4= 96:2:2= 48:2=24</td><td rowspan="3">96: (2+2)

(90+6):4? 90:4 + 6:4 =

(100:4) -4 =</td><td>Fatorização do divisor</td></tr>
<tr><td>(80+16):4= (80:4)+ (16:4)=
20+4=24</td><td>Decomposição do dividendo</td></tr>
<tr><td>(100:4)-(4:4)= 25-1= 24</td><td>Recorrer à centena mais próxima seguido da aplicação da Propriedade Distributiva da divisão em relação à subtração</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\square$ X 12 = 144</td></tr>
<tr><td>144:12= 144:2:6=
72:6 = 12</td><td rowspan="2">(100+44) : 12=

144:6:6=</td><td>Fatorização do divisor</td></tr>
<tr><td>144:4:3= (100+44):4:3=
25+11:3= 36:3 = 12</td><td>Fatorização do divisor e Decomposição do dividendo com aplicação da Propriedade distributiva</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\square$: 3 = 8</td></tr>
<tr><td>8x3 = 24</td><td>Erro de cálculo</td><td>Aplicação direta da operação inversa</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\square$: 6 = 9</td></tr>
</table>

9x6 = 54	Erro de cáculo	Aplicação direta da operação inversa
$\boxed{}$: 14 = 16		
16x14= 16x (10+4)= 160 + 16x4 = 160 + 64 = 224	Erro na aplicação da propriedade distributiva	Decomposição Propriedade Distributiva
16x10= 160 16x11=176 16x12= … 16x13= … 16x14= 224	Erro de cálculo	Uso de fatos conhecidos- tabuadas
44 : $\boxed{}$ = 11		
44:11= 4	44: (10+1)	Aplicação das regras da divisão nas operações inversas- cálculo mental
4 x11= 44		Cálculo mental direto
4x10=40 4x11= 44		Recurso à dezena como valor conhecido (4x10) e procurar o múltiplo pretendido (44)

ANEXO V

Tabela 5- Estratégias e Dificuldades Previstas (sessão 5)

Estratégias Previstas	**Eventuais Erros/ Dificuldades**	**Raciocínios**
$\boxed{}$ x 50 = 4000		
4000:50= 400:5= 80	4000: 50= 400:5= 20 4000:50 = 200 80x50= 400; 800x50=40000 4x5=20 ; 4000x50= 200000	Operação inversa
4000:50= 400:5= (40:5) x 10 = 80		Referência ao número de zeros
8x5= 40 , 8x50= 400, 8x500= 4000		Uso de fatores conhecidos
30 x 400 = $\boxed{}$		
30x400= 3x4x (10x100)= 12x10x100= 120x100= 1200	3x4=12; 30x400=1200 30x400= 12+0=120	Produto por Múltiplos de 10- Referência ao número de zeros
(30x4) x 100= 120 x 100= 12000	30x4=120; 120x100= 1200	Produto por Múltiplos de 10- Referência ao número de zeros
200:40= $\boxed{}$		
(200:4):10= 50:10=5	200:4 + 200:10 = 50 + 20	Produto por Múltiplos de 10- Referência ao número de zeros
20:4= 5	200:40= 2	Produto por Múltiplos de 10-

	200:40= 20:4 + 00= 500	Referência ao número de zeros
8000: $\boxed{}$ = 40		
8000:40= 800:4= 200	8000x40 8000:40= 20000	Operação inversa
40x2= 80 40x20= 800 40x200= 8000	40x200= 80	Uso de fatos conhecidos
500 x $\boxed{}$ = 10 000		
100:5= 20		Operação Inversa
500x10=5000 500x20= 10 000	500x10=500	Uso de fatos conhecidos
(500x10)x 2= 10 000	500x10x2 = 5000+1000=6000	Uso de fatos conhecidos + Fatorização
5x2= 10 5x20= 100 500x20= 10 000	500x 200= 10000	Uso de fatos conhecidos
$\boxed{}$: 200 = 200		
200x200= 40 000	200x200= 400	Propriedade inversa
200 x (2x100)= 400 x 100= 40 000	200x2=4 + 00=400 200x2x10= 400+2000=2400	Produto de Múltiplos de 10 Propriedade inversa + fatorização
400:200= 2 4000:200= 20 40 000:200= 200	400:2= 20 400:200= 20000	Uso de fatos conhecidos

ANEXO VI

Nome: ____

Data:

Folha de Registos

- 1.ª Carta- Nível _____

- 2.ª Carta- Nível _____

- 3.ª Carta- Nível _____

- 4.ª Carta- Nível _____

- 5.ª Carta- Nível _____

ANEXO VII

3.ª Sessão e 4ª sessão : Operações Inversas

Questões e subquestões:

“Que tarefas/ atividades se devem promover para desenvolver nos alunos o cálculo mental?”

“ Quais as estratégias de cálculo que serão mais eficazes para desenvolverem o cálculo mental?”

“ Quais os contributos das estratégias de cálculo para o desenvolvimento do cálculo mental”

Objetivos específicos:

- Propriedades da multiplicação e da divisão
- Operações inversas em números naturais e racionais não negativos
- Estratégias da divisão
- Recorrer a estratégias pessoais de cálculo escolhidas

3.ª e 4.ª sessões					
Atividades a desenvolver	**Intervenção da professora**	**Organização/ dinâmicas do grupo**	**Recursos**	**Tempo**	**Avaliação**
Iniciar a aula com a explicação das regras do lotto (bingo) onde serão extraídas tiras com expressões contendo lacunas, de forma aleatória, e onde os alunos devem tentar resolvê-la o mais rápido possível e colocar uma cruz se esse valor se inserir nos seus cartões. Posteriormente e assim que algum aluno fizer bingo procedo à verificação da veracidade do jogo. Discutir em grande grupo como podemos descobrir o valor que falta nesta expressão: 2 x ___ = 12 levando os alunos a perceberem que aplicam a operação inversa, neste caso, a operação inversa da multiplicação que é a divisão. O mesmo acontece quando trocamos a ordem dos fatores associando também, as propriedades da multiplicação – comutativa. ____ x 2 = 12	Dar indicações acerca da regra do jogo Verificar as soluções encontradas Questionar acerca das operações inversas: “Como posso saber qual é o número que falta aqui?” “Qual é a operação que temos que recorrer?” “E aqui como podemos descobrir qual o fator que aqui falta?” “ Como o fazemos para descobrir?” “Porquê?”	- Grande Grupo	- 25 fichas de trabalho - lápis	3´ 10´ 2´	O quê? - os alunos conseguem estabelecer as relações entre as operações - os alunos aplicam a operação inversa na resolução de exercícios - os alunos aplicam estratégias de cálculo já conhecidas para resolver as tarefas Como? - folha de registo dos cálculos

Entrega das fichas de trabalho para resolver individualmente Discussão em Grande grupo das estratégias utilizadas Discutir em grande grupo como podemos descobrir o valor que falta nesta expressão: ___: 6 = 2 levando os alunos a perceberem que aplicam a operação inversa, neste caso, a operação inversa da divisão que é a multiplicação. Mas, a divisão não goza de todas as propriedades que a multiplicação goza, uma vez que, se trocarmos a ordem dos fatores não poderá aplicar-se a propriedade comutativa, logo, temos que resolver expressões do tipo 12 : ____ = 2 aplicando outra estratégia. D= d x q (+r). Logo pela expressão que já lhes é conhecida podemos perceber que se D= d x q então d= D: q. Desta forma, têm Que aplicar outra divisão.	- Ajuda nas dificuldades de alguns alunos. - Orientar as estratégias escolhidas - Favorecer a comunicação matemática na explicação das estratégias aos colegas. Questionar: "Como fizeste este cálculo?", "Como descobriste que era esta a solução?" " Como podemos descobrir qual o valor que falta?", "Podemos aplicar a mesma estratégia que aplicamos para a multiplicação? ," Que trocas temos que fazer?" , "Que operação pretendemos?" "E nesta expressão como podemos descobrir o valor que falta?", "Podemos aplicar a mesma estratégia?", "Porquê?", " Que propriedades não podemos aplicar na	-Individual - Grande grupo - Grande grupo	- quadro - giz - gravador - 25 fichas de trabalho	5´ 10´ 5´	- gravação áudio - registo de notas

Entrega das fichas de trabalho para resolver individualmente Discussão em Grande grupo das estratégias utilizadas Correção de algumas cartas do jogo do 24 resolvidas na aula anterior	divisão?", " Que expressão conhecem que podemos aplicar na divisão?". - Ajuda nas dificuldades de alguns alunos. - Orientar as estratégias escolhidas - Favorecer a comunicação matemática na explicação das estratégias aos colegas. Questionar: "Como fizeste este cálculo?", "Como descobriste que era esta a solução?"	- Individual - Grande Grupo		10´ 10 ´	

ANEXO VIII

Tabela 1- Estratégias e Dificuldades Previstas (sessão 1)

Estratégias Previstas	**Eventuais Erros/ Dificuldades**	**Raciocínios**
12 x 14=		
(10+2) x 14= 10x14 + 2 x 14= 140 + 28 = 168	Erro no uso da propriedade distributiva 14x (10+2) = 140+2=142 Decompõe o 12 em 1+2 1x14+2x14= 14+28= 44	Decomposição Propriedade Distributiva da Multiplicação em relação à adição
12 x (10+4)= 12x10 + 12x4= 120+48=168	Erro no uso da propriedade distributiva 12 x (10+2)= 120+2=122 Decompõe o 14 em 1+4 12x1 + 12x4 = 12+48=60	Decomposição Propriedade Distributiva da Multiplicação em relação à adição
3x4x14= 3x56= 3x (50+6)= 150+ 18= 168	Erro de cálculo Erro no uso da propriedade distributiva	Fatorização Decomposição Propriedade Distributiva da Multiplicação em relação à adição
4x3x14= 4x 42= 4x40+ 4x2= 160+8= 168	Erro de cálculo Erro no uso da propriedade distributiva	Fatorização Decomposição Propriedade Distributiva da Multiplicação em relação à adição
12+12=24, 24+24+24+24+24+24+24= 48+48+48+24= 96+72=168	Erro de cálculo	Agrupa e adiciona sucessivamente
20 x 142 =		
2x (10x142)= 2x1420= 2840	Erro de cálculo	Fatorização Propriedade Comutativa e Associativa
2x10x142= 2x1420= 2840	Erro de cálculo	Fatorização Propriedade Comutativa e Associativa
(10+10)x 142= 10x142 + 10x142= 1420+1420= 2840	Erro no uso da propriedade distributiva Decompõe o 10 em 1+0 1x142+ 0x142= 142	Decomposição Propriedade Distributiva da multiplicação em relação à adição
20 x (100+40+2)= 20x100 + 20x40 + 20x2= 2000+800+40= 2840	Erro no uso da propriedade distributiva Decompõe o 142 em 1+4+2 20x1+20x4+20x2=	Decomposição Propriedade Distributiva da multiplicação em relação à adição

	20+80+40= 160	
2x10x (100+40+2)= 2 x (1000+400+20)= 2000+800+40= 2840	Erro no uso da propriedade distributiva	Fatorização Decomposição + Propriedade Distributiva da multiplicação em relação à adição
2x10x (100+40+2)= 2x1000 + 2x400 + 2x20= 2840	Erro no uso da propriedade distributiva	Fatorização Decomposição + Propriedade Distributiva da multiplicação em relação à adição
	5 x 16=	
5 x (10+6)= 5 X 10 + 5 X 6 = 50 +30= 80	Erro no uso da propriedade distributiva 5x (10+6) = 50+6= 56	Decomposição seguida da propriedade distributiva
16x5= (10+6) x 5= 50 + 30 = 80	Erro no uso da propriedade distributiva (10+6) x 5= 10+30= 40	Aplicação da propriedade comutativa Decomposição seguida da propriedade distributiva
5 x (8+8)= 5x8 + 5x8 = 40+40= 80	Erro no uso da propriedade distributiva 5 x (8+8)= 40+8=48	Decomposição seguida da propriedade distributiva
5 x (8+8)= (5 x 8) x 2= 40 x 2= 80	Erro ao factorizar 16x5= 16x2x3= 32x3= 96 16x5= 16x2+3= 35 Erro ao aplicar a propriedade distributiva (5x8)x2= 10+16=26	Decomposição num produto de dobro em que um dos fatores é uma potência de 2 (dobrar depois de usar a decomposição)
10 x 16 : 2= 160 : 2= 80 10x 16: 2= 10x8= 80	5x16= X2 10x16= 160 160x2= 320	(substituir a multiplicação por uma composição de uma multiplicação seguida de uma divisão)
5x16= 16+16+16+16+16= 32+32+16= 64+16= 80	Erro de cálculo	Adições sucessivas
5x16= 10+10+10+10+10+6+6+6+6+6= 50+30= 80	Erro de cálculo	Decomposição e Adições sucessivas

Anexo IX

Tabela 2- Estratégias e Dificuldades Previstas (sessão 2- 12 x 50 e 8 x 99)

Estratégias Previstas	**Eventuais Erros/ Dificuldades**	**Raciocínios**
	12 x 50 =	
12x50= 12x5= 60 60+0= 600	Erro no uso da regra	Acrescentar um zero quando se multiplica por 10.
(10+2)x50= 10x50 + 2x50= 500 + 100 = 600	Erro na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (10+2)x50= 500x2= 1000	Decomposição seguida da propriedade distributiva
(10+2) x (5x10)= 12x5x10= 12x10x5= 120x5= 100x5 + 20x5= 600	Erro na fatorização Erro na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (10+2)x5x10= 50+100+10+20= 180	Decomposição Fatorização Propriedade comutativa Propriedade distributiva
50+50+50…..	Erro na soma das parcelas Esquecer de adicionar alguma parcela	Adições sucessivas
12 x 50= 100 +50 600	Erro no posicionamento das parcelas	"Teia" (recurso ao algoritmo)
	8 x 99 =	
2 x 2 x 2 x 99= 2 x 2 x 2 x (90+9)= 2 x 2 x 180+18= 2 x 360 + 36= 720 + 72 = 792	Erro na factorização com troca de operações:2+2+2 em vez de 2x2x2 Erro na aplicação da propriedade distributiva com troca de operações: (90x9) em vez de (90+9)	Fatorização de um dos produtos Decomposição Propriedade Distributiva
4 x 2 x 9= 4 x 2 x (90 + 9)= 4 x (180+18)= 720+72= 792	Erro na factorização Erro na aplicação da propriedade distributiva com troca de operações	Fatorização de um dos produtos Decomposição Propriedade Distributiva
8 x (90+9)= 720+72= 792	Erro na factorização Erro na aplicação da propriedade distributiva com troca de operações	Decomposição Propriedade Distributiva
8 x (100-1)= 800-8= 792	Erro na aplicação da propriedade distributiva	Obter a centena mais próxima Propriedade distributiva em relação à subtração

ANEXO X

JOGO DO LOTTO

	1/2		4	8	20		11
1/4		12	4/2			1/5	1/5
	24	14		4	84	3/4	

84			2/3	4/3	99	20	
	14	1/7		8		1/5	16
1/2		6	16		1/4		4

	14		3/4	84		3	1/5
1/7		7	8		18	6/5	
60	1/3	24		84	11		

16		4/3	4	18			1/2
1/2		3/4	99		8	12	

	6			14	4/2	1/5	11

3		7/3		1/7	16	12	
		6/5	4	84		224	60
11	14		1/5		1/4		1/4

	11	20		18		1/2	8
1/4		1/5	99		4		7/3
	4		224	1/5	1/7	4/3	

	16	7	8		12	20	
7/3		11		14		1/7	1/3
224			4	4/2	14		1/7

4	3		6/5	11			8
7/3		4		1/5	1/2	24	

☺	18	84	☺	☺	1/7	1/3	1/5

84	3	☺	1/4		☺	☺	14
11	☺	5	☺	4/3	1/2	99	☺
☺	36	224	☺	☺	4	8	20

☺	56	8	20	☺	7	1/2	☺
4	☺	84	☺	1/2	☺	18	24
1/7	☺	☺	4		48	☺	11

☺	1/7	11	☺	7/3	☺	6/5	36
1/5	☺	12	1/5	☺	12	☺	3
☺	1/2	☺	4	1/2	3/4	20	☺

1/4	☺	☺	1/3	4/2	1/7	84	☺

	20	224		14		1/2	3
7		60	1/5		99		7/3

	1/7		1/7	8	4/3		48
12		224	4			5	1/2
	11	1/5		16	24	4	

ANEXO XI

Tiras das Expressões Numéricas

12 x ___ = 6	___ x 8 = 2
¼ x ___ = 2	44 : ___ = 11
___ : ¾ =16	12 : ___ = 16
___ : 14 = 16	25 : ___ = 125
___ x 3 = 36	___ x 12 = 144
___ x 4/4 = 3	
½ x ___ =12	14 : ___ = 7
38 : ___ = 152	9 : ___ = 27
___ : 1/3 = 42	1/7 x ___ 49

3 x ___ = 3/7	10 : ___ = 70
56 : ___ = 7	56 : ___ = 14
14 x ___ = 56	__ x 24 = 480
480 : ___ = 20	___ : 7 = 12
0,25 x ___ = 4	16 : ___ = 32
14 x ___ = 252	8 x ___ = 792
25 x ___ = 5	0,25 x ___ = 2
___ x 99 = 594	0, 75 x ___ = 1
¾ x ___ = 1	2/3 : ___ = 6

____ x 6/10 = 2/5	¼ x ____ = 1/16
12: ____ = 4	11 x ____ = 121
3/5 x ____ = 3/25	____ : 2/5 = 3
____ x 7 = 35	12 x ____ = 36
____ : 3 = 12	96 : ____ = 2
____ : 6 = 9	