Universidade do Minho
Instituto de Educação

João Januário Tomáz Domingues Veloso de Barros

As representações no ensino e na aprendizagem da derivada de uma função: um estudo com alunos do 11.º ano de escolaridade

outubro de 2014

As representações no ensino e na aprendizagem da derivada de uma função: um estudo com alunos do 11.º ano de escolaridade
João Januário Tomáz Domingues Veloso de Barros
UMinho | 2014

Universidade do Minho
Instituto de Educação

João Januário Tomáz Domingues Veloso de Barros

As representações no ensino e na aprendizagem da derivada de uma função: um estudo com alunos do 11.º ano de escolaridade

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho realizado sob a orientação do
Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

outubro de 2014

Nome: João Januário Tomáz Domingues Veloso de Barros

Endereço Eletrónico: joao.januario@iol.pt

Telemóvel: 962454742

Número do Bilhete de Identidade: 10393975

Título do Relatório:

As representações no ensino e na aprendizagem da derivada de uma função: um estudo com alunos do 11.º ano de escolaridade

Supervisor:

Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

Ano de conclusão: 2014

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Universidade do Minho ____/____/____

Assinatura: ____

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, ao Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu, supervisor deste estágio, pela sua orientação e disponibilidade em todos os momentos de desenvolvimento deste projeto, pelas críticas pertinentes e estímulos que sempre me ajudaram a ir mais longe no meu trabalho.

Agradeço ao Dr. Carlos Marco Pereira, orientador do estágio, pelos seus conselhos, coordenação e orientação crítica na intervenção pedagógica e pelo seu papel essencial nos momentos mais difíceis com o seu encorajamento e apoio.

Agradeço à direção da Escola por permitir a elaboração e concretização deste projeto bem como a todos os discentes e docentes que comigo aceitaram colaborar ao longo de um ano. Lamento não poder nomear alguns, por força das regras estabelecidas.

Uma nota de apreço aos familiares, amigos e colegas que sempre me impulsionaram para a finalização deste relatório; aos meus Pais pela sua motivação e apoio; às mulheres da minha vida, Glória, Carolina e Leonor por tantas e tão significativas razões que não saberia expressar que foram essenciais para ter conseguido realizar este objetivo.

Todos contribuíram significativamente para este trabalho e merecem o meu reconhecimento por alguns elementos meritórios que este relatório possa conter.

AS REPRESENTAÇÕES NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DA DERIVADA DE UMA FUNÇÃO: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 11.º ANO DE ESCOLARIDADE

João Januário Tomáz Domingues Veloso de Barros
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário
Universidade do Minho, 2014

RESUMO

Este estudo tem como objetivo analisar o contributo das múltiplas representações matemáticas no ensino e na aprendizagem da derivada de uma função numa turma do 11.º ano de escolaridade. Trata-se de uma investigação de natureza qualitativa e interpretativa que tem como objetivo responder às seguintes questões: (1) Como utilizam os alunos as diferentes representações na aprendizagem da derivada de uma função? (2) Quais são as vantagens e as desvantagens das diferentes representações na aprendizagem da derivada de uma função? (3) Que perceções têm os alunos sobre a utilização das diferentes representações na sua aprendizagem da derivada de uma função? Para responder a estas questões recorreu-se a diferentes métodos de recolha de dados: teste diagnóstico, produções realizadas pelos alunos; questionário; questões colocadas no final de algumas aulas; e gravação áudio das aulas.

As conclusões deste estudo apontam para o uso das diversas formas de representação por parte dos alunos. Apesar de se registar uma tendência para a representação algébrica, as representações numérica, tabular e gráfica também foram recorrentes e eficazmente usadas pela maioria dos alunos. Alguns deles estabeleceram relações entre diferentes tipos de representações que possibilitou a compreensão do tema derivada de uma função, possibilitando aumentar a convergência do conceito definição ao conceito imagem dos conceitos abordados. O estudo permitiu identificar situações em que os alunos recorrem tipicamente a uma dada representação. A representação numérica e a algébrica foram usadas essencialmente para determinar a imagem dado o objeto, em particular no tópico extremos relativos. A representação gráfica foi utilizada no estudo comparativo da função com a sua função derivada ou, de modo mais geral, sempre que os alunos pretendiam uma imagem global sobre o comportamento da função. Os alunos recorreram à representação tabular essencialmente para estudar o sinal, a monotonia e os extremos relativos de uma função, e, em alguns casos, na conversão entre a representação algébrica e gráfica. Os alunos percecionam as representações de forma isolada e aprendem os procedimentos a um nível puramente algorítmico não conseguindo dissociar o objeto matemático da sua representação.

THE REPRESENTATIONS IN THE TEACHING AND LEARNING OF THE DERIVATIVE OF A FUNCTION: A STUDY WITH STUDENTS FROM THE 11TH GRADE CLASS

João Januário Tomáz Domingues Veloso de Barros

Master's in Mathematics teaching in the third cycle of Basic Education and on the Secondary Education

Minho University, 2014

ABSTRACT

This study aims to analyze the contribution of multiple mathematical representations in the teaching and learning process of the derivative of a function on an 11th grade class. This is a qualitative and interpretative research whose goal is to answer the following questions: (1) How students use different representations in learning the derivative of a function (2) What are the advantages and disadvantages of different representations in learning the derivative of a function (3) What are students perceptions on the use of different representations in their learning of the derivative of a function To answer these questions we have examined different methods on data collection: diagnostic test, productions performed by students; questionnaires; questions at the end of some classes; and audio recording of lectures. The conclusion of this study points to the use of different forms of representation by the students. Despite a tendency to the algebraic representation, most students also used effectively the numerical representations, graphical and tabular. Some of them established relationships between different types of representations which enabled the understanding of the derivative of a function theme, allowing you to increase the convergence of the concept definition to the concept image of the concepts covered. The study made it possible to identify situations in which students typically rely on a given representation. The numerical and algebraic representations were used primarily to determine the image as the object, in particular for topical relative extremes. The graphical representation was used in the comparative study of the function with its derivative or, generally, whenever the students wanted an overall picture about the behavior of the function. Students resorted mostly to tabular representation to study the signal, the monotony and relative extreme of a function, and in some cases, the conversion between the algebraic and graphical representation. Students deal with the representations and learn the procedures to a purely algorithmic level failing to dissociate the mathematical object from its representation.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Este capítulo, dividido em três secções, apresenta o tema, o objetivo e as questões de investigação que orientaram a concretização deste trabalho; faz referência à pertinência do estudo e descreve sucintamente a estrutura do relatório.

1.1. Tema, objetivo e questões do estudo

O presente trabalho incide sobre o ensino e a aprendizagem do tema derivada de uma função numa turma de Matemática A do 11.º ano de escolaridade do curso de Ciências e Tecnologias, com recurso à conexão entre as diferentes representações de conceitos deste tema, a materiais tecnológicos e a estratégias de ensino que apelaram à intuição e à observação gráfica. Como defendem Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes e Nápoles (1998), "o estudo das funções — Introdução ao Cálculo Diferencial I — deve ser feito colocando em primeiro plano abordagens gráficas e intuitivas e relacionando de forma sistemática abordagens gráficas e analíticas" (p. 8). Trata-se de um tema que é contemplado pelas sucessivas reformas curriculares de Matemática no ensino secundário e cujas orientações metodológicas têm vindo a valorizar um ensino que explore materiais tecnológicos que promovam e possibilitem a utilização das várias representações de um mesmo conceito, em detrimento de um ensino predominantemente analítico. Diversos autores advogam a importância do recurso às várias representações no estudo de conceitos de derivada de uma função para a sua compreensão, tais como Arcavi (2003), Azcárate, Casadevall, Casellas e Bosch (1996), Dreyfus (2002), Duval (2012), Ferri-Mundy e Graham (1993), Ferri-Mundy e Lauten (1994), Ponte e Canavarro (1997), Ruthven (1993) e Tall (1994). Como se trata de um tema que é iniciado no 11.º ano de escolaridade, ganha relevância que a introdução e a sistematização dos seus conceitos atendam à conexão entre as diferentes representações.

As razões que me levaram a escolher as representações no ensino e na aprendizagem de tópicos de derivada de uma função deveram-se, por um lado, à prevalência da representação analítica no estudo deste tema durante o meu percurso como aluno, o que me levou a memorizar factos e procedimentos sem lhes dar o devido significado. Por outro lado, tais razões deveram-se à observação, no contexto de sala de aula, da propensão de os alunos recorrerem muito pouco às várias representações de conceitos matemáticos. Nessa observação, verifiquei que os alunos, de uma maneira geral, revelavam capacidades processuais para resolver operações algébricas com alguma complexidade, mas nem sempre manifestavam a compreensão dos conceitos envolvidos. Durante o período de observação de contextos, que antecedeu a minha prática pedagógica, verifiquei que, por diversas vezes, quando os alunos faziam o estudo de funções, com base em mais do que uma representação, obtinham diferentes resultados e não conseguiam compreender a razão disso acontecer. Esta situação ocorreu, por exemplo, quando cometiam erros na manipulação algébrica que contradiziam as suas expectativas na análise visual. Perante a divergência de resultados, os alunos tendiam a aceitar como válidos os resultados encontrados algebricamente por entenderem que utilizaram uma abordagem matematicamente correta, devido à crença de que a 'prova' algébrica é mais matemática e mais geral (Vinner, 1989). Em resultado disso, os alunos apresentavam dificuldades em trabalhar com determinados conceitos funcionais (Dreyfus, 2002; Vinner, 1989). Estes conceitos, ao serem abordados de uma forma estrutural (uma dada noção é concebida com base na referência a um objeto, ao contrário da conceção operacional em que uma dada noção é concebida com base num processo) criam algumas imagens mentais que não são, muitas vezes, compatíveis com os aspetos operacionais que o conceito apresenta (Azcárate et al., 1996; Dreyfus, 2002; Ferrini-Mundy & Graham, 1993; NCTM, 2008; Ponte & Canavarro, 1997; Ruthven, 1993; Tall, 1994, 2002). A visualização da representação gráfica potencia a compreensão de conceitos matemáticos (Azcárate et al.,1996; Dreyfus, 2002; Tall, 2002; Vinner, 1989). Por exemplo, no ensino do conceito de derivada, se os alunos tiverem a oportunidade de explorar e sintetizar as relações que existem entre a informação analítica e gráfica desenvolvem uma compreensão mais rica do conceito do que se trabalharem somente com processos analíticos (Dreyfus, 2002). As recomendações do NCTM (2008) são no sentido de privilegiar os aspetos intuitivos e relacionais a partir da representação gráfica, em que a intuição, segundo Tall (2002), é vista como "o produto das imagens mentais do indivíduo" (p. 14).

Com os recursos tecnológicos que estão à disposição dos alunos e do professor, a exploração das diversas representações de um conceito matemático torna-se mais acessível (Dick, 1996). Entre os recursos tecnológicos a utilizar no estudo de derivada de uma função destaca-se a calculadora gráfica por possuir as desejadas capacidades computacionais e porque, atualmente, a maior parte dos alunos do ensino secundário possuem uma (Ruthven, 1993), o que lhes permite resolver individualmente as tarefas propostas e "construírem um conhecimento mais rico do conceito de derivada com recurso às conexões entre as três representações [algébrica, gráfica e numérica] " (Dick, 1996, p. 45). Para além da calculadora gráfica, os alunos e o professor também podem utilizar o GeoGebra através da exploração de construções dinâmicas sobre tópicos do tema.

No programa de Matemática para o Ensino Secundário é feita referência à necessidade de na "abordagem das funções reais considerar sempre estudos dos diferentes pontos de vista - gráfico, numérico e algébrico" (Ministério de Educação, 2001, p.2). Como defende o NCTM (2008),

> as representações deverão ser tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos, para si mesmos e para os outros, na identificação de conexões entre conceitos matemáticos interrelacionados, e na aplicação da matemática a problemas realistas, através da modelação. (p. 75)

A valorização que as recomendações atuais dos programas do ensino secundário dão à utilização das diferentes representações para o ensino de conceitos matemáticos, levou-me a averiguar o seu contributo na aprendizagem de tópicos de derivada de uma função. Para responder a este objetivo, formulei as seguintes questões de investigação:

- De que forma utilizam os alunos as diferentes representações na aprendizagem da derivada de uma função?
- Quais são as vantagens e as desvantagens das diferentes representações na aprendizagem da derivada de uma função?
- Que perceções têm os alunos sobre a utilização das diferentes representações na sua aprendizagem da derivada de uma função?

A referência às diferentes representações engloba a algébrica, a gráfica, a tabular e a numérica, que estiveram presentes nas minhas estratégias de ensino de tópicos de derivada de uma função. Com a realização deste estudo procuro contribuir para o meu crescimento pessoal e profissional através do aprofundamento do meu conhecimento didático, visando o enriquecimento das aprendizagens dos alunos.

1.2. Pertinência do estudo

O tema derivada de uma função, para além de constituir a base do Cálculo Diferencial e Integral, desempenha um importante papel em diversos campos do conhecimento, na resolução de problemas e na modelação de situações reais. Como por exemplo, na Física, o conceito de derivada é utilizado para definir velocidade e aceleração de uma partícula que se move ao longo de uma curva; na Química, em estudos cinéticos de reações, para maximizar a produção de um determinado composto num curto espaço de tempo; na Economia, para se determinar o custo e os lucros marginais; e na Biologia, para determinar a taxa de crescimento de uma dada cultura de bactérias, entre outras aplicações. O tema também é importante para a formação do aluno, principalmente para aqueles que prosseguem os seus estudos universitários em cursos com disciplinas de Matemática.

No processo de ensino e aprendizagem de Matemática, dependendo da tarefa ou do conceito em estudo, são utilizadas as representações algébricas, numéricas, tabulares e gráficas das funções. Para cada uma dessas representações existem diferentes vantagens em termos de compreensão e aplicação dos conceitos (Friedlander & Tabach, 2001; Tall, 2002). Dreyfus (2002) considera que o sucesso na disciplina de Matemática depende da riqueza das representações mentais dos conceitos matemáticos, ao defender que "uma representação é rica se contém o maior número de conexões das propriedades do conceito. Uma representação é pobre se tiver poucos elementos que permitam a flexibilização na resolução de problemas" (p. 32). A aquisição de flexibilidade no tratamento das diferentes representações dos conceitos do cálculo diferencial é um passo necessário para a introdução posterior do cálculo formal, assegurando uma sólida base para compreender os conceitos e métodos cada vez mais abstratos, que se constroem a partir do 11.º ano de escolaridade. Embora seja importante a aquisição das várias representações de um conceito, Dreyfus (2002) considera que "a sua existência, por si só não é suficiente para permitir o uso flexível do conceito na resolução de problemas (...) a menos que as várias representações estejam corretamente e fortemente ligadas" (p. 32).

Apesar das representações terem um papel importante na Matemática, os alunos tendem a confiar mais na manipulação de expressões analíticas do que na utilização da visualização, restringindo, por vezes, o seu pensamento apenas a uma representação sem um significado efetivo (Dreyfus, 2002). Como refere Vinner (1989), os alunos tendem a evitar a argumentação visual. Como a representação visual torna a compreensão dos conceitos da função derivada mais profunda e permite perceber a relação entre esses conceitos (Dreyfus, 2002), o NCTM (2008) recomenda a conexão entre as várias representações nas atividades de ensino e de aprendizagem por promoverem o raciocínio, a comunicação matemática e suportarem “o desenvolvimento dos conhecimentos” (p. 422). O poder gráfico dos recursos tecnológicos “possibilita o acesso a modelos visuais que são poderosos, mas que muitos alunos são incapazes ou não estão dispostos a realizar de modo independente” (NCTM, 2008, p. 27). Com tais recursos, Dick (1996) defende que o ensino de tópicos de derivada deve envolver representações numéricas, gráficas e simbólicas:

> As capacidades numéricas e gráficas associadas às novas tecnologias trazem novas ferramentas no ensino do cálculo nas salas de aula. Em concreto, neste momento possuímos as ferramentas que nos proporcionam várias representações do conceito de derivada: numericamente usando calculadora para obter uma aproximação do quociente de forma fácil e rápida; graficamente para se explorar localmente a linearidade da diferenciação através de uma representação dinâmica; e simbolicamente recorrendo à forma tradicional do papel e lápis e, também, às capacidades algébricas que se encontram disponíveis nas calculadoras. (pp. 44-45)

Dado que a prática pedagógica pode influenciar a forma como os alunos encaram a disciplina de Matemática, considerei pertinente que as minhas estratégias de ensino do tema derivada de uma função promovessem a adoção, por parte do aluno, do significado desse tema, em detrimento de estratégias mecanicistas, que tendem a valorizar técnicas de cálculo na aplicação de regras de derivação. Do que resulta de tais estratégias, importa analisar os processos desenvolvidos pelos alunos na aprendizagem do tema derivada de uma função e das suas aplicações e identificar situações relevantes, que ocorrem nas aulas sobre esse tema, que ajudem a organizar as atividades de ensino e aprendizagem.

1.3. Estrutura do relatório

Este relatório está organizado em quatro capítulos. O primeiro capítulo – Introdução – explicita o tema, o objetivo e as questões de investigação, a pertinência deste estudo e, por fim, a estrutura do relatório.

O segundo capítulo – Enquadramento Contextual e Teórico – debruça-se sobre a caracterização dos contextos em que se inseriu a prática pedagógica: a escola e a turma; a fundamentação teórica, que sustenta a temática deste projeto; as metodologias de ensino e aprendizagem, que orientaram a intervenção de ensino e as estratégias de avaliação dessa intervenção.

O terceiro capítulo – Intervenção Pedagógica – descreve e analisa a informação recolhida antes, durante e após a intervenção pedagógica. Antes da intervenção, apresenta a análise dos conhecimentos prévios dos alunos nos tópicos já apreendidos relacionados com o tema derivada de uma função. Durante a intervenção, ilustra momentos do ensino e da aprendizagem de conceitos de derivada de uma função através de múltiplas representações desses conceitos. Depois da intervenção pedagógica, apresenta as perceções dos alunos sobre a utilização das diferentes representações na sua aprendizagem da derivada de uma função recolhidas através de um questionário e questões que coloquei no final das aulas.

O quarto capítulo – Conclusões, Limitações e Recomendações – sintetiza e problematiza os resultados obtidos na procura de responder às questões de investigação delineadas à luz do quadro teórico que sustenta o relatório. Por fim, identifica as principais limitações deste estudo e apresenta algumas considerações didáticas e propostas para futuros estudos.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO

Neste capítulo, que está dividido em três secções, descreve-se o contexto de intervenção, a escola e a turma, o enquadramento teórico e as estratégias de intervenção, mais concretamente as que dizem respeito à metodologia de ensino e de aprendizagem e à avaliação da intervenção, justificando-se as opções tomadas à luz do contexto e da literatura.

2.1. Enquadramento contextual

Este subcapítulo diz respeito à caracterização da escola e da turma onde desenvolvi a minha intervenção pedagógica.

2.1.1. Caracterização da Escola

Este estudo desenvolveu-se numa escola secundária, englobada num agrupamento de escolas localizadas no distrito de Braga. A escola tem como oferta educativa os Cursos Profissionais de Técnico de Turismo e de Técnico de Gestão de Equipamentos Informáticos, os Curso Científicos-Humanísticos Ciências e Tecnologias, Línguas e Humanidades, Ciências Socioeconómicas e Artes Visuais. Na última avaliação externa, a escola obteve Bom em todos os domínios (resultados, prestação do serviço educativo, organização e gestão escolar, liderança, capacidade de autorregulação e melhoria da escola). O corpo docente é constituído por 116 professores – pertencendo 58% ao Quadro de Escola, 8% ao Quadro de Zona Pedagógica e 34% são contratados –, 90% dos quais têm idade inferior a 50 anos e 58% têm 10 ou mais anos de serviço. Quanto ao pessoal não docente, a escola tem ao seu serviço 36 funcionários, 8 de carreira de assistente técnico e 28 de assistente operacional e 1 colaborador do Programa Ocupacional do Centro de Emprego.

A concretização de atividades e projetos da escola é apoiada e mobilizada pela direção da escola e estão bem presentes no quotidiano educativo. Desses projetos destacam-se os seguintes: Robótica, tendo sido duas vezes consecutivas campeã mundial em dança robótica; Gripe-net, tendo conquistado o segundo lugar a nível nacional; Escola Eletrão; Festival de Curtas-metragens; prestação de serviços gratuitos de manutenção e reparação de equipamentos informáticos à escola e à comunidade educativa; *E-Twinning Problem-solving strategies in two hight school classes in* Portugal and Áustria; e *Masters Class* em Física das Partículas. A escola promove vários seminários e palestras, como, por exemplo, as que têm o envolvimento da biblioteca da escola: O cérebro em mudança na era da informação; *Redes Sociais: podemos ou não confiar?*; Dia da internet mais segura 2013; *Bibliotecas do futuro (e do presente)*. Durante o atual ano letivo decorrem, no âmbito do projeto "Um toque no futuro", apoiado pela Fundação Calouste Gulbenkian, algumas experiências de utilização destes dispositivos em contexto de sala de aula – *iPads* na sala de aula. De uma forma geral, esta escola revela-se bastante acolhedora, promove muitas atividades tanto no campo lúdico, como no campo formativo, e caracteriza-se como aberta à inovação e à integração de novos projetos. Em termos formativos para os seus alunos, na escola funcionam vários clubes que proporcionam experiências de aprendizagem diversificadas, tais como Atelier de Artes, Astronomia, Europeu, Xadrez, Solidariedade e Proteção Civil.

A escola está bem equipada ao nível de computadores, quadros interativos e vídeos projetores. Cada sala tem, pelo menos, um computador e vídeo projetor. No total tem 9 salas de informática, 7 quadros interativos e 156 computadores. A comunidade educativa utiliza a plataforma *Moodle*, o correio eletrónico institucional na divulgação de informações e partilha de materiais pedagógicos. A página Web da escola e o jornal *O toque on-line* são periodicamente atualizados.

Com base nos dados fornecidos pelo último relatório da avaliação externa da Escola, de 2009, verifica-se que o contexto socioeconómico dos alunos é baixo, apresentando um elevado número de educandos com apoio sócio educativo, como consequência de serem oriundos de famílias com níveis reduzidos de formação escolar e, por conseguinte, de empregos de sectores com remunerações reduzidas. Os dados existentes relativamente aos pais e encarregados de educação dos alunos apontam para 37% com o 1.º Ciclo, 32,3% com o 2.º Ciclo, 18,4 % com o 3.º Ciclo, 9,3% com o Ensino Secundário e 2,9 % com o Ensino Superior. Naturalmente, estes dados indiciam dificuldades, por parte dos pais, no acompanhamento dos seus educandos no que à escola diz respeito. Além disso, apresentam índices altos ao nível da ação social escolar, escalão A e B, apontando para 65% no 3.º Ciclo, 71% nos Cursos de Educação e Formação, 53% no Ensino Secundário e 64% no Ensino Profissional. Ao nível do acesso às tecnologias informáticas, 80% dos alunos têm computador em casa, dos quais 48% têm ligação à Internet.

No mesmo relatório é referida a discrepância significativa entre as classificações internas e as avaliações externas dos alunos. No que diz respeito aos exames nacionais do 9.º ano de escolaridade, em 2008, as médias dos resultados obtidos nas duas provas foram inferiores, em 0,3, às nacionais. Nos exames nacionais de 12.º ano, nas disciplinas de Língua Portuguesa e

Matemática, nos últimos três anos, foi sempre inferior à média nacional. Os alunos da escola apresentam dificuldades em conceitos matemáticos lecionados, na resolução de problemas e na interpretação de enunciados. Com estes indicadores, entendi ser importante dar enfoque aos diagnósticos prévios no estudo de novos conceitos.

2.1.2. Caracterização da Turma

A intervenção pedagógica foi implementada numa turma do 11.º ano do Curso de Ciências e Tecnologia, constituída por 21 alunos, dos quais 9 são rapazes e 12 raparigas, com idades de 16 e 17 anos (Tabela 1).

Tabela 1. Distribuição da turma por género e média de idades.

	Frequência	Média das idades
Raparigas	12	16
Rapazes	9	16

A turma não tem alunos com retenções no 11.º ano e a média das classificações finais de Matemática no 10.º ano de escolaridade foi de 11,8 valores, em que a nota mais alta foi de 17 valores e a mais baixa de 8 valores. Quatro alunos da turma repetiram o 10.º ano e três desses alunos tiveram negativa no 1.º e 2.º período do corrente ano letivo. As médias dos alunos nos 1.º, 2.º e 3.º períodos foram 11,2; 11,4 e 12,7 valores, respetivamente. A média no terceiro período subiu sensivelmente devido à desistência de um aluno que nos 1.º e 2.º períodos teve 7 valores. As notas mais altas foram 16, 15 e 17 valores e a mais baixa 7 valores nos três períodos, respetivamente. Todos os alunos da turma possuem calculadora gráfica, mas revelaram dificuldades na sua utilização quando, por exemplo, tentavam desenhar o gráfico de uma função e da sua derivada e no cálculo da derivada num valor do domínio da função. De um modo geral, os alunos utilizavam a calculadora apenas como um auxiliar nas operações aritméticas simples e não revelavam a capacidade de iniciativa para a exploração das diversas potencialidades oferecidas pela calculadora quando confrontados com novas situações e novos conceitos. Por diversas vezes, tive que criar momentos na aula para ensinar aos alunos a estabelecer as ligações entre as funcionalidades permitidas pela calculadora gráfica e os conceitos abordados. Por exemplo, desenhar o gráfico da função e da sua derivada na mesma janela de forma a confrontar a informação dos dois gráficos e como poderiam obter o valor da derivada de um valor do domínio da função.

Da análise das respostas dadas ao teste de avaliação diagnóstica, realizado no início da intervenção pedagógica, identifiquei muitas dificuldades sobre os conceitos de tangente e de variação, assim como uma fraca capacidade de análise e interpretação de gráficos que relacionam espaço-tempo. A análise detalhada desses resultados é feita na secção 3.1 (Conhecimentos prévios dos alunos sobre tópicos relacionados com o conceito de derivada de uma função).

2.2. Enquadramento Teórico

Este subcapítulo destina-se à fundamentação teórica do projeto desenvolvida à luz da literatura e à descrição das metodologias e das estratégias de avaliação da ação desenvolvidas.

2.2.1. O ensino das derivadas no ensino secundário

A introdução das derivadas, no programa do Ensino Secundário, ocorreu em 1905, pela 'mão' do Ministro e Secretário de Estado dos Negócios do Reino Eduardo José Coelho, na 7.ª classe do curso complementar de Ciências no capítulo destinado à Álgebra. Desde a sua introdução "no plano de estudo do ensino liceal, no ano de 1905 até ao final do século XX, com exceção da reforma de Carneiro Pacheco, em 1936, em que aquela foi suprimida, assistimos a uma afirmação e aumento do espaço dedicado" (Aires & Vazquez, 2004, p. 120). As aplicações das derivadas apenas começaram a fazer parte do currículo escolar a partir da reforma de 1954 mantendo-se até aos dias de hoje.

Atualmente, o tema derivada de uma função faz parte dos programas dos 11.º e 12.º anos de escolaridade. No que diz respeito ao 11.º ano, o tema das funções ocupa sensivelmente metade do ano escolar e tem como um dos objetivos introduzir o cálculo diferencial. Esta introdução inicia-se, analiticamente, com a definição da noção de derivada de uma função de um dado valor do seu domínio – como sendo o limite da razão incremental na vizinhança desse valor –, o que geometricamente é associado ao declive da reta tangente ao gráfico da função num ponto que tem de abcissa tal valor.

Em termos curriculares, no Programa de Matemática A do 11.º ano de escolaridade, homologado em 2002 e atualmente em vigor, a unidade didática Taxa de Variação e Derivada encontra-se subordinada ao tema *Introdução ao Cálculo Diferencial I. Funções racionais e com radicais. Taxa de Variação e Derivada* (Ministério da Educação, 2002). Para o estudo da taxa de variação, o programa sugere que se inicie com a noção de taxa média de variação e a sua interpretação geométrica num intervalo do domínio da função em estudo, passando seguidamente para o ensino da taxa de variação instantânea. Na fase seguinte, o programa aponta que se lecione a função derivada e as regras de derivação de algumas funções simples. Para finalizar o tópico, o programa sugere a ligação do estudo do sinal da função derivada com o sentido de variação da função correspondente e com os seus possíveis extremos relativos, o que prepara os alunos para a resolução de problemas de otimização.

Nas orientações metodológicas sugeridas para o ensino de derivada de uma função, o programa de Matemática A do 11.º ano de escolaridade (Ministério da Educação, 2002) refere que é vantajoso a exploração deste tópico em coordenação com as disciplinas de Física, Química, Economia, recorrendo, para o efeito, a exemplos concretos; à realização de atividades em comum, caso seja possível, ou à lecionação de algum aspeto dessas disciplinas que privilegie, desta forma, a utilização e exploração de exemplos ou algo que seja relevante dessas áreas visando matematicamente o seu aprofundamento. Tais orientações salientam também que a aprendizagem do conceito de derivada passa pela interpretação geométrica da taxa de variação onde intuitivamente se trabalha "recorrendo ao uso informal da noção de limite" (Ministério da Educação, 2002, p. 5). Segundo Cornu (2002), esta orientação já era defendida desde a primeira metade do século XX: "os textos franceses de matemática usavam a noção de limite de forma intuitiva sem uma definição formal para introduzir a definição de derivada" (p. 153).

De uma forma geral, a formalização dos conceitos associados à derivada de uma função num valor do seu domínio e à função derivada é realizada com base em argumentos geométricos, assim como no estudo do sentido de variação e extremos de uma função. Nesta unidade didática também se prevê que os alunos deduzam a expressão da derivada de uma função afim, polinomial do 2.º e do 3.º grau e da função racional do tipo $y = \frac{a}{x}$; $y = \frac{a}{x-b}$ e $y = c + \frac{a}{x-b}$ com $a \neq 0$.

2.2.2. As representações no ensino de funções

O pensamento matemático envolve diferentes processos, com destaque para a visualização por se tratar de "um processo através do qual as representações mentais ganham sentido" (Dreyfus, 2002, p. 31), pois "o pensamento é feito de imagens" (Damásio, 2011, p. 149). Para Duval (2012), compreender um conceito matemático implica sermos capazes de diferenciar o objeto matemático da representação que o torna acessível: "os objetos matemáticos, começando pelos números, não são objetos diretamente percetíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos" (p. 106). A única forma de lhes ter acesso e lidar com eles é a utilização de símbolos e representações.

O termo representação significa, segundo Janvier (1987), "uma combinação de algo escrito num papel, alguma coisa que existe sob a forma de um objeto físico e uma cuidada construção de arranjos cognitivos na nossa mente" (p. 68). Uma perspetiva similar é apresentada por Goldin (2002), para quem uma representação "é uma configuração que pode representar qualquer coisa de determinada maneira" (p. 208), como por exemplo na forma de imagens e de objetos concretos (Gagatsis & Elia, 2004).

Vários autores diferenciam as representações entre as externas e as internas (por exemplo, Dreyfus, 2002; Goldin & Kaput, 1996; Janvier, Girardon & Morand, 1993). As representações externas são personalizações de ideias ou conceitos – como são exemplo os mapas, as tabelas, os gráficos, os diagramas, os modelos e sistemas de símbolos formais –, através da "escrita ou da oralidade, geralmente com o objetivo de tornar a comunicação sobre o conceito mais fácil" (Dreyfus, 2002, p. 31). Segundo Janvier, Girardon e Morand (1993), as representações externas atuam como estímulos dos sentidos e são, muitas vezes, vistas como aglomerados de ideias ou de conceitos. Friedlander e Tabach (2001) distinguem quatro modos diferentes de representação externa, que consideram serem essenciais no ensino da Matemática e mais especificamente no ensino de tópicos algébricos: (i) a representação verbal; (ii) a representação numérica; (iii) a representação gráfica; e (iv) a representação algébrica.

As representações internas são as construções cognitivas que se formam na mente de um individuo (Goldin & Kaput, 1996), designadas comummente por imagens mentais, que correspondem a "esquemas internos ou quadros de referência que uma pessoa usa para interagir com o mundo exterior. É o que ocorre na mente quando se pensa numa determinada parte do mundo externo e pode variar de pessoa para pessoa" (Dreyfus, 2002, p. 31). Para Almeida e Viseu (2002), este tipo de representações não são diretamente observadas e, por vezes, são encaradas como modelos mentais ou cognitivos referindo-se a esquemas, conceitos, conceções ou objetos mentais. A presença destas representações na mente só podem "ser inferidas através da ação e das palavras dos indivíduos" (Almeida & Viseu, 2002, p. 195).

Para Duval (2003), as representações podem ser mentais, internas ou computacionais e semióticas. Para este autor, as representações mentais consistem num conjunto de imagens e conceções que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação ou sobre aquilo que está associado ao objeto ou à situação. Tais representações estão associadas à interiorização das representações externas. As representações internas ou computacionais são aquelas que privilegiam o tratamento de uma informação, que por sua vez se caracteriza pela execução automática de uma determinada tarefa, a fim de produzir uma resposta adaptada à situação. Estas representações tratam, assim, da codificação de uma informação. O algoritmo da adição é um exemplo deste tipo de representação. Estas representações não são conscientes do sujeito. Trata-se de um registo mecânico que o sujeito executa sem pensar em todos os passos necessários para a sua resolução. As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de símbolos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. Tais representações são externas e conscientes ao indivíduo e realizam a função de tratamento de forma intencional. O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas, que são externas e conscientes ao indivíduo.

O termo *Registo de Representação Semiótica* é usado por Duval (2003) para indicar diferentes tipos de representação como, por exemplo, a escrita em língua natural, a escrita algébrica, as tabelas, os gráficos cartesianos e as figuras. Segundo Duval (2003), os registos de representação semiótica são caracterizados por três atividades cognitivas: a primeira é a formação de uma representação identificável; a segunda é o tratamento, que é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registo, como são, por exemplo, as regras de derivação; a terceira é a conversão, que é a transformação da representação de um objeto matemático em outra representação desse mesmo objeto. Duval (2012) frisa que “a conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento” (p. 272). Este autor considera que é necessário distinguir o caso em que se transforma uma representação numa outra pertencente ao mesmo registo (tratamento) e o caso em que se transforma uma representação dada num registo numa representação noutro registo (conversão).

Para além dessas atividades cognitivas, Duval (2012) distingue duas outras atividades distintas, a codificação e a interpretação, que não devem ser confundidas com a conversão. A interpretação “requer uma mudança de quadro teórico ou uma mudança de contexto. Esta mudança não implica mudança de registo” (Duval, 2012, p. 273). Por exemplo, a expressão algébrica $y = ax^2 + bx + c$ pode significar para o aluno uma expressão que representa a distância percorrida de uma bola no decorrer do tempo, quando esta é lançada para cima e volta ao ponto de partida. A codificação “é a ‘transcrição’ de uma representação em outro sistema semiótico diferente daquele em que é dado inicialmente" (Duval, 2012, p. 273). Esta transcrição, ao contrário da conversão, é efetuada aplicando regras de correspondência ou utilizando listas de substituições inicialmente estabelecidas que "são efetuadas diretamente sobre os significantes que compõem a representação, sem considerar a organização da representação, nem o que ela representa" (Duval, 2012, p. 273). Muitas vezes a atividade cognitiva de conversão de uma representação pode parecer ser estreitamente ligada a uma interpretação ou a um código, mas não é bem assim, porque, "por um lado, ela não se funde sobre alguma analogia, como no caso da interpretação e, por outro lado, a conversão não pode ser obtida pela aplicação de regras de codificação" (Duval, 2012, p. 273). Para este autor, "não existe e não pode existir regras de conversão como existe regras de conformidade e regras de tratamento" (Duval, 2012, p. 273), como é exemplo a leitura de um par de números sobre o gráfico, a partir de um ponto designado, ou a designação de um ponto, a partir de um par de números.

A conversão não é um processo puramente conceptual, envolve o fenómeno de congruência ou não congruência. É considerado um fenómeno de congruência quando a passagem de um registo para outro ocorre de forma natural, isto é, a representação do registo de saída é transparente à representação no registo de chegada. Quando o registo de saída impõe maior dificuldade para pensar ou visualizar a representação do registo de chegada, diz-se, então, que na conversão ocorreu uma não-congruência.

Segundo Duval (2012), na sua hipótese fundamental sobre a aprendizagem, para aprender, um indivíduo precisa de transitar entre vários registos de representação dos objetos e coordená-los, sendo que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio de registos de representação, pois esses objetos não são percetíveis fisicamente (Figura 1).

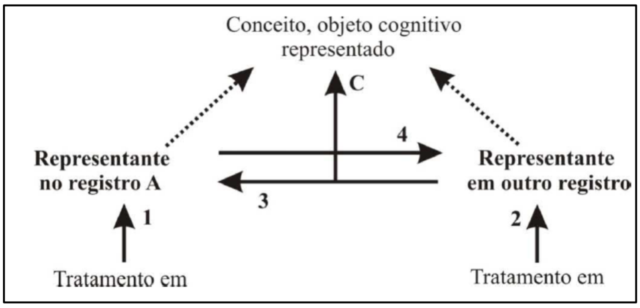


Figura 1. Hipótese fundamental da aprendizagem (Duval, 2012).

Duval (2012) refere que a dificuldade dos alunos reside na passagem de uma representação para outra. Enquanto as transformações dentro do mesmo sistema não trazem dificuldades, as transformações entre sistemas de representação têm associadas muitas dificuldades, pois requerem que se distinga o conteúdo da representação e o objeto representado. Nesse sentido, Duval (2003) apresenta o que ele denomina de paradoxo cognitivo: "Como podemos não confundir um objeto e a sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio da sua representação?" (p. 21). A reposta a esta pergunta, segundo o próprio autor, é que a compreensão em Matemática está ligada ao facto de se utilizar pelo menos dois registos de representação diferentes para um mesmo objeto, pois essa seria a única maneira de não confundir um objeto com a sua respetiva representação semiótica. Como consequência da confusão entre representação e objeto representado, os alunos tendem a considerar duas representações do mesmo objeto como sendo dois objetos matemáticos distintos. Para minimizar esta confusão, Duval (2003) propõe a utilização de vários registos de representação do mesmo objeto.

As múltiplas representações poderão ajudar na compreensão dos conceitos, porque as "conexões entre as múltiplas representações aumentam a redundância e podem, assim, reduzir as ambiguidades que podem aparecer numa representação particular" (Goldenberg, 1988, p. 7). Friedlander e Tabach (2001) acreditam que o trabalho com várias representações permite eliminar as limitações de cada uma delas, tornando "o processo de aprendizagem da Álgebra mais significativo e efetivo" (p. 173). Para podermos manipular com sucesso a informação que dispomos para a resolução de uma dada situação matemática, como por exemplo um problema, torna-se necessário que as várias representações estejam corretas e fortemente ligadas. Precisamos de ligar uma representação a outra, enquanto a outra for a mais eficiente para o próximo passo que queremos dar. Para Dreyfus (2002), o processo de ligar representações está intimamente associado com o processo de as representar.

> Quando construímos um gráfico de uma função, nós executamos um processo matemático, seguindo certas regras, que podem ser postas em linguagem matemática. Ao mesmo tempo estamos provavelmente a gerar uma imagem mental visual desse gráfico, isto é, nós estamos a visualizar a função duma forma que mais tarde nos ajudará a raciocinar sobre a função. As imagens mentais e as imagens matemáticas estão intimamente ligadas. (p. 26)

As funções são um exemplo disso mesmo, por se tratar de um conceito abstrato com que usualmente são trabalhadas numa ou em várias representações, sendo frequentemente utilizadas a representação algébrica e gráfica. O ensino e a aprendizagem deste processo de conexão são difíceis porque a estrutura é muito complexa, sendo necessário lidar com uma grande quantidade de informação. Os alunos, geralmente, revelam alguma falta de experiência e acabam por utilizar apenas uma das representações, o que pode dever-se a um ensino que valorize somente a representação simbólica. Ruthven (1993) tem reservas sobre "o tipo de ensino que se baseia fortemente na representação simbólica, porque essa abordagem tende a separar o argumento matemático do seu contexto original (...) e o enfoque passa a ser o símbolo como objeto em si mesmo" (p. 98). O uso de várias representações ajuda os alunos a fazer a transição de uma compreensão concreta e limitada de um tópico para outra mais abstrata e flexível (Dreyfus, 2002). Lesh, Post e Behr (1987) consideram que parte da compreensão de uma ideia matemática é: "(1) a capacidade para a reconhecer absorvida numa variedade de diferentes sistemas representacionais; (2) a capacidade de manipular de forma flexível a ideia através de sistemas representacionais; e (3) a tradução dessa ideia de um sistema para outro" (p. 36).

Como forma de tirar partido das diferentes representações, Dreyfus (2002) defende que a complementaridade dos processos de abstração e de representação se pode desenvolver através de quatro fases: (i) utilizar uma só representação; (ii) utilizar mais que uma representação; (iii) estabelecer conexões entre representações; e (iv) integrar representações e ligações flexíveis entre elas. Esta forma de conceber a aprendizagem a partir das múltiplas representações tem em vista estabelecer uma conceção cada vez mais abstrata dos conceitos. O processo que está intimamente relacionado com a ligação das representações é a tradução, podendo esta significar a passagem da formulação de uma relação matemática para uma outra relação (Dreyfus, 2002). A tradução para Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) envolve três processos principais: (i) reconhecer a mesma função nas diferentes formas da sua representação; (ii) identificar para uma transformação específica de uma função numa representação a sua transformação correspondente noutra representação; e (iii) construir uma representação de uma função dada uma outra.

A utilização de determinado tipo de representação depende da natureza da tarefa, da preferência pessoal, do estilo de pensamento do indivíduo que resolve o problema e das dificuldades que sente em determinados tipos de representação (Kaput, 1992). Uma forma de promover a utilização pelos alunos das várias representações é a natureza das tarefas, que, segundo Friedlander e Tabach (2001), devem possuir algumas características, tais como: (i) flexibilidade na escolha da representação; (ii) reflexividade, no sentido de os alunos se distanciarem do trabalho efetuado e avaliarem as escolhas efetuadas; e (iii) natureza investigativa, que ajuda os alunos a familiarizarem-se com uma determinada representação inicial, a estabelecer relações entre representações e a selecionar uma representação final e definitiva.

As tarefas que envolvem tradução, segundo Vinner (1989), são fundamentais para a formalização do conceito de função. O NCTM (2008) enfatiza a importância em ajudar os alunos a estabelecerem conexões entre representações e refere que as conexões mais relevantes são entre a representação gráfica e a algébrica de uma função. Leinhardt et al. (1990) indicam que os estudos que incluem tarefas de tradução incidem sobretudo nas conexões entre as representações gráfica e algébrica das funções que levam em parte à utilização de tecnologias gráficas. A tradução através das múltiplas representações pode ajudar, na ótica de Goldenberg (1988), a reduzir o isolamento de cada conteúdo matemático e ajudar a encontrar uma visão mais coerente e unificada do método matemático e do conteúdo. Ferrini-Mundy e Lauten (1994) referem que os alunos tendem a tratar as representações gráficas e algébricas de uma função de forma separada e sugerem que os "professores promovam o pensamento visual nos seus alunos encorajando-os para pensarem primeiro de forma visual e depois analítica" (p. 118).

Por vezes, os alunos manifestam conceções erróneas quando fazem traduções entre as diferentes representações de funções, principalmente na tradução analítica de uma função representada graficamente. Janvier (1987) chamou a atenção para os processos psicológicos envolvidos na mudança de representações. As traduções têm uma direção. Por exemplo, a tradução de uma função da representação analítica para a representação gráfica envolve processos psicológicos diferentes da tradução inversa. O movimento do gráfico para a equação que lhe corresponde pode ser uma tarefa mais difícil porque envolve a procura de modelos, enquanto traçar o gráfico a partir de uma equação envolve uma série de passos relativamente fáceis, que são gerar pares ordenados, marcá-los num referencial e ligá-los por uma linha. Ferrini-Mundy e Graham (1993), numa síntese que fazem sobre algumas investigações relacionadas com a aprendizagem das funções, referem que os alunos muitas vezes se sentem confortáveis com diferentes resultados em diferentes representações e nem sempre se dão conta que esses resultados são inconsistentes. Se isso acontece então "o desafio de os ajudar a conectar essas representações é muito complexo. Uma clara variável adicional é que em parte isso seja desempenhado pela tecnologia" (p. 44). A construção de significados por parte do aluno, objetivo principal no ensino de Matemática, torna-se fundamental. Nesse sentido existem diferentes abordagens de ensino dos conceitos matemáticos.

Na abordagem desenvolvida por Tall e Vinner, a compreensão dos conceitos matemáticos ocorre com base nas noções de conceito imagem e conceito definição (Tall, 1989, 2002; Tall & Vinner, 1981; Vinner, 2002). O conceito imagem é definido por Tall e Vinner (1981) como a "estrutura cognitiva associada a um certo conceito matemático na mente de um indivíduo, onde se incluem todas as imagens mentais, propriedades, processos e representações mentais relacionados com o conceito" (p. 152). Por outras palavras, pode-se dizer que corresponde a algo não-verbal que na nossa mente é associado ou que nos remete para quando se evoca um determinado conceito. A multiplicidade de experiências experimentadas pelo indivíduo faz com que o conceito imagem relativo a um determinado conceito vá sendo progressivamente construído e alterado sempre que este se depara com novos estímulos (Tall & Vinner, 1981).

Tall e Vinner (1981) entendem o conceito definição, como a "forma verbal a que um indivíduo recorre para explicar um dado conceito" (p. 152). Mas, para Vinner (2002), "o conhecimento da definição não nos garante a compreensão do conceito (...) mas sim, que se precisa de criar um conceito imagem" (p. 69). Contudo, existem conceitos que podem ser introduzidos através da definição uma vez que se acredita que estes possam facilitar a formação do conceito imagem no indivíduo. Vinner (2002) considera que a importância do conceito definição serve como "suporte à construção do conceito imagem (...) mas a partir do momento em que o conceito imagem é formado o conceito definição torna-se prescindível (...) podendo permanecer inativo ou mesmo até ser esquecido" (p. 69).

Contudo, Koirala (1997) salienta que o "conceito imagem pode ser muito diferente do conceito definição formal" (p. 53), uma vez que diferentes estímulos podem ativar diferentes partes do conceito imagem no cérebro do indivíduo. Tall e Vinner (1981) já tinham prevenido que a "porção do conceito imagem que é ativada num determinado momento se designa por conceito imagem evocada" (p. 152), o que indicia que, para estes autores, o conceito imagem pode ser ou não proveniente de definições matemáticas formais. Como forma de clarificar esta discussão, Tall e Barnard (1997) introduziram o termo *unidades cognitivas*, que são "uma parte da estrutura cognitiva que permite manter o foco de atenção de uma só vez" (p. 1). As unidades cognitivas podem então ser símbolos, teoremas, representações, propriedades ou qualquer outro aspeto relacionado com o conceito. Estes autores defendem que é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio matemático a capacidade de construir múltiplas e flexíveis relações entre as unidades cognitivas, permitindo desta forma aceder a informações relevantes sempre que necessário. Assim sendo, um conceito imagem deve incluir não apenas a definição formal de um determinado conceito, mas também estabelecer conexões com e entre as unidades cognitivas promovendo desta forma o seu enriquecimento.

Embora concordem sobre o que concebem como conceito imagem e conceito definição, Tall e Vinner (1981) entendem essas noções de forma diferente. Vinner (2002), quando se refere a conceito imagem e conceito definição, alude a duas células distintas na estrutura cognitiva, que constituem a base do seu modelo de formação de conceitos, a que chamou de “contextos técnicos” (p. 69). Tall (1981) considera que a mente consiste na forma como o cérebro funciona pelo que é indivisível deste. Assim, ao invés da separação entre conceito imagem e conceito definição sugerido por Vinner, Tall considera que o conceito definição é a forma como as palavras podem ser escritas ou faladas, sendo por isso uma parte ou parcela do conceito imagem formado na mente do indivíduo. Para Tall, o conceito imagem descreve a estrutura cognitiva que é associada ao conceito e o conceito definição não se restringe apenas à definição formal conhecida pela comunidade matemática, como também pode estar relacionado com uma construção pessoal concebida pelo aluno onde esta pode variar ao longo do tempo.

Estes autores advogam um aspeto importante sobre os conflitos entre o conceito imagem e o conceito definição que ajudam a entender algumas das dificuldades dos alunos na compreensão de alguns conceitos matemáticos. Tall (1989) enquadra tais conflitos argumentando que:

> As forças culturais operadas são essencialmente o produto global das interações entre os indivíduos e da maneira como veem o mundo. Em qualquer estágio nós só podemos dar significado às nossas observações usando a estrutura cognitiva que dispomos. Fisicamente isso é produzido através de conexões formadas no nosso cérebro devido a impulsos externos e processamento interno; damos sentido a novas informações fazendo novas conexões e reorganizar nossa estrutura cognitiva. Não é descabido, portanto, que esta estrutura possa não ser totalmente coerente. (p. 3)

Tall e Vinner (1981) defendem que é possível encontrar “partes do conceito imagem ou conceito definição que entram em conflito com outras partes do próprio conceito imagem ou conceito definição” (p. 3), o que denominam como “fator de conflito potencial". Para os autores, “um fator de conflito potencial mais sério é aquele em que o conceito imagem está em desacordo não com a outra parte do conceito imagem, mas com a própria definição formal do conceito” (p. 4). Quando isso acontece, tais fatores “impedem seriamente a aprendizagem de uma teoria formal, pois eles não se podem tornar fatores de conflito cognitivos reais a não ser que a definição formal do conceito desenvolva um conceito imagem que poderá então produzir um conflito cognitivo" (p. 4). O papel do professor é importante na orientação no processo de ensino e aprendizagem das definições dos conceitos já que os alunos que possuem o 'fator de conflito potencial' nos seus conceitos imagens "podem estar seguros nas suas próprias interpretações das noções em questão e simplesmente considerar a teoria formal como inoperante e inútil" (p. 4). Tall e Vinner (1981) deixam-nos uma pista importante que apela ao papel orientador do professor na desconstrução dos conflitos ao afirmarem que "só quando os aspetos conflituantes forem invocados simultaneamente é que a sensação de conflito e confusão aparecem" (p. 2).

2.2.3. As representações no ensino da derivada de uma função

No âmbito da educação matemática existem vários estudos sobre as dificuldades sentidas pelos alunos na aprendizagem de conceitos relacionados com o Cálculo Diferencial e Integral (Azcárate et al., 1996; Dick, 1996; Ferrini-Mundy & Graham, 1993; Ferrini-Mundy & Lauren, 1994; Giraldo, Carvalho & Tall, 2002; Tall & Vinner, 1981). Conceitos como limite, continuidade, derivada e integral são alguns exemplos, que revelam maior complexidade na sua aprendizagem, não só devido à abstração inerente aos próprios conceitos, como também relativamente aos processos de representação envolvidos e que dificultam a sua compreensão por parte dos alunos.

O conceito de derivada pode ser definido de várias maneiras que devem ser compreendidas pelo aluno:

> a. gráfica, como o declive de uma reta tangente sobre uma curva num ponto ou
> o declive da reta que parece aparecer com a aproximação;
> b. verbal, como taxa de varação instantânea;
> c. física, como a velocidade;
> d. simbólica, como o limite da diferença do quociente. (Zandieh, 2000, p. 4)

Tais representações fazem com que a compreensão da derivada de uma função dependa da forma como os alunos dominam os conceitos que lhes estão implícitos. Essa interdependência torna a compreensão da derivada mais complexa (Azcárate et al., 1996). Torna-se assim necessário o recurso a múltiplas representações para a promoção da compreensão do conceito de derivada de uma função pelo aluno, tendo sempre em consideração os conceitos que lhe estão subjacentes.

> 1. As técnicas de cálculo de derivadas (regras de derivação) são estruturadas pelos alunos como procedimentos desligados do significado de variação instantânea;
> 2. As técnicas de estudo de uma função através da derivada ajudam a uma visão global, mas não contribuem para uma melhor compreensão do significado local da derivada;
> 3. O conceito de derivada assimilado através de um conjunto de procedimentos de manipulação analítica pode ser um obstáculo para a compreensão do conceito. (Azcárate et al., 1996, p. 26)

Aliada à complexidade destes conceitos e a uma prática pedagógica essencialmente focada em procedimentos tende a explicar as dificuldades que muitos alunos revelam no ensino superior na compreensão das ideias fundamentais associadas a este conceito, como, por vezes, acontece em relação ao conceito de derivada quando se dá um maior destaque à exploração das regras de derivação. O que resulta, muitas das vezes, no fim da aprendizagem de tópicos de derivada de uma função, é um conhecimento superficial assente na manipulação algébrica sem o conhecimento significativo dos conceitos envolvidos. Sobre isso, Dick (1996) diz-se "não surpreendido que, para muitos [alunos], as memórias duradouras das derivadas são as regras, fórmulas e receitas algorítmicas" (p. 35).

O estudo de Almeida e Viseu (2002), onde participaram 19 professores estagiários de Matemática que responderam a 10 questões relacionadas com a interpretação gráfica da derivada de uma função, mostra que a abordagem prioritariamente algébrica ocasiona uma compreensão superficial de tópicos de derivada de uma função, uma vez que há uma considerável diferença entre a maneira pela qual os alunos descrevem o conceito de derivada e como o aplicam. Os autores verificaram que "a maioria dos estagiários não interpretou nem relacionou convenientemente, numa perspetiva gráfica, os vários aspetos inerentes ao estudo da derivada de uma função" (p. 203). Os estagiários revelaram "uma capacidade visual demasiado pobre, a qual dificulta a identificação do tipo de uma função dado o seu gráfico; a incapacidade de interligar múltiplas condições numa mesma questão; a falta de capacidade de ligar a informação gráfica aos conhecimentos analíticos" (pp. 216-217). Como forma de ultrapassar algumas destas dificuldades, os autores destacam a "importância de práticas de ensino/aprendizagem de conceitos de Cálculo que integrem simultaneamente abordagens gráficas e analíticas de forma a evidenciar significados e relações" (idem, p. 217).

Estudos realizados por Vinner (1983) e Tall (1989) revelaram que o conceito imagem que os alunos do primeiro ano da universidade possuíam relativamente à noção de tangente se encontrava essencialmente associado a problemas de Geometria, considerando assim que a reta tangente a uma curva apenas a 'toca' num único ponto em oposição à ideia de reta secante que a 'corta' em dois pontos. Esta ideia, profundamente ligada ao número de pontos de interseção, que os alunos trazem da Geometria, "conduz a uma simplificação do conceito imagem de tangente que não é consistente com a noção de tangência do Cálculo Infinitesimal" (Giraldo et al., 2003, p. 2).

Num estudo efetuado com uma aluna universitária americana a quem foi pedido um possível esboço gráfico da primeira derivada de várias funções apresentadas graficamente, Ferrini-Mundy e Lauten (1994) identificam dificuldades em relacionar os gráficos das funções com os das suas derivadas. No estudo verificou-se a preferência da aluna pela utilização da representação algébrica em detrimento da gráfica. A aluna, para desenhar o gráfico da função derivada com base no gráfico da função, primeiro realizava a conversão algébrica da informação do gráfico para, de seguida, encontrar, através das regras de derivação, a função derivada e depois desenhar o gráfico pretendido.

Os resultados dos estudos analisados reforçam uma mudança de paradigma no ensino e aprendizagem da derivada de uma função, enfatizando a ideia de que a utilização de múltiplas representações de um conceito matemático ajuda a sua compreensão (Azcárate et al., 1996; Dick, 1996; Ponte & Canavarro, 1997; Ruthven, 1993; Tall, 1994). A visualização gráfica dos aspetos relacionados com o conceito de derivada pode contribuir para a sua assimilação com significado. Porém, Tall (1994) considera que, em geral, os alunos não fazem a ligação do pensamento visual com o pensamento analítico o que, de alguma forma, pode ser um reflexo do tipo de ensino a que são submetidos e em que há alguma desvalorização do raciocínio que faz uso da informação visual. Para este autor, a visualização com suporte a representações gráficas permite "aos alunos tomar uma atitude ativa na construção do seu próprio conhecimento" (p. 193). A visualização é vista como um complemento ao processo analítico.

A importância das múltiplas representações dos conceitos matemáticos despertou o interesse de Cardoso (1995) em realizar um estudo sobre a aprendizagem da derivada de uma função com alunos do 11.º ano. Neste estudo, emerge o contributo proporcionado pela representação gráfica na compreensão visual mais forte e produtiva relativamente à compreensão algébrica, permitindo uma maior confiança na confirmação de resultados pelos alunos. A autora salienta que a componente visual proporciona "um desenvolvimento do espírito crítico em relação aos resultados, pois os alunos começaram a habituar-se a raciocinar em termos simultaneamente algébricos e gráficos – e por vezes também numéricos – e a utilizar uns para controlar e avaliar os outros" (p. 170). A obtenção destes resultados muito se deveu à utilização da calculadora gráfica.

De um modo geral, as noções de conceito imagem e conceito definição de Tall e Vinner (1981) tornam-se assim importantes ferramentas neste estudo, uma vez que permitem analisar como é que o conceito de derivada de uma função se forma na mente do aluno e que dificuldades podem surgir na sua construção e formalização. Em termos pedagógicos, Tall e Vinner (1981) acreditam que a formação da imagem conceptual pode resultar do tipo de ensino realizado. No caso da aprendizagem do conceito de derivada de uma função, estes autores alertam que "desde cedo, as fórmulas usuais para a derivada são deduzidas e a notação geral de limite se reduz ao pano de fundo" (p. 5). Quando essa notação é discutida, muitas vezes os alunos formam uma imagem conceptual restrita, considerando apenas o aspeto dinâmico "quando $f(x)$ se aproximar de c quando x se aproxima de a" (p. 10). Este tipo de raciocínio pode levar os alunos a considerar que $f(x) \neq c$ como parte da sua imagem conceptual, o que faz com que o conceito de limite de uma função seja um "fator de conflito potencial" (Tall & Vinner, 1981, p. 3).

O papel da representação gráfica e da visualização é imprescindível numa experiência de ensino com ênfase numa abordagem gráfica para a compreensão dos conceitos de declive de uma reta, taxa de variação, limite, secantes, tangentes e derivada.

2.3. Estratégias de intervenção

Esta secção tem como finalidade descrever o ambiente de aprendizagem, gerado em contexto de sala de aula, de tópicos de derivada de uma função, tendo em consideração o objetivo e as questões de investigação delineadas.

2.3.1. Metodologia de ensino e de aprendizagem

A aprendizagem com compreensão torna-se mais profícua do que a obtida por processos de memorização, porque "os alunos que memorizam factos ou procedimentos sem os compreenderem têm, muitas vezes, dúvidas sobre quando e como usar aquilo que aprenderam" (NCTM, 2008, p. 21)

Quando falamos de aprendizagem, em contexto de sala de aula, parte-se do princípio que se estabelece uma interação entre os envolvidos no processo, e pressupõe-se que os professores "devem saber e compreender profundamente a matemática que ensinam e serem capazes de utilizar os seus conhecimentos de forma flexível" (NCTM, 2008, p. 18). Para além do domínio dos conteúdos que ensinam, compete ao professor motivar os alunos a serem parte integrante do processo e não simples 'espetadores'. Segundo as considerações do NCTM (2008), "os alunos terão mais sucesso com um programa de matemática escolar que incentive o seu desejo natural de compreender aquilo que lhes é pedido para aprender" (p. 22). Importa assim que as estratégias de ensino atendam ao que "o aluno vê, ouve e compreende [devendo o professor ajudá-lo] a associar as suas imagens pessoais a representações mais convencionais" (NCTM, 2008, p. 425). Na concretização destes pressupostos na minha prática pedagógica, procurei atender às seguintes sugestões metodológicas do programa de Matemática do 11.º ano (Ministério da Educação, 2001, p. 10):

- Os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas;
- Os conceitos são abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização;
- Ligação da Matemática com a vida real, com a tecnologia e com questões abordadas noutras disciplinas, ajudando a enquadrar o conhecimento numa perspetiva histórico-cultural.

A capacidade para aprender Matemática adquire-se fomentando a compreensão dos problemas e não através da aplicação de fórmulas, muitas das vezes sem entender o que se está a fazer. Mais do que aprender uma série de regras, processos e algoritmos, procurei que os alunos entendessem a importância dos conceitos que aprenderam como um meio, uma ferramenta, para compreender e resolver situações problemáticas da realidade. Na resolução das tarefas que propus aos alunos, tive em consideração de que essa resolução não só constitui "um objetivo de aprendizagem matemática, como é também um importante meio pela qual os alunos aprendem matemática" (NCTM, 2008, p. 57). Entre a diversidade de tarefas – exercícios, problemas, investigação, exploração (Ponte, 2005) –, dei especial atenção aos problemas no desenvolvimento dos tópicos e devido à aplicabilidade que o tema das derivadas tem na resolução de problemas do quotidiano, e às tarefas de exploração na introdução dos tópicos. A ênfase que esta atividade teve nas minhas estratégias de ensino terá contribuído para o desenvolvimento da capacidade dos alunos de raciocinar matematicamente e de usar a Matemática em situações diversas (Ministério da Educação, 2001).

Discutir o processo de aprendizagem implica conhecer como os alunos com diferentes características constroem o conhecimento matemático. Partindo deste pressuposto, tive em consideração de que a visão que os alunos construíram da Matemática condiciona as representações que são capazes de conceber e é o reflexo de como estruturam o conhecimento matemático. Mais precisamente, de que maneira o contributo das diversas representações influencia a aprendizagem e de que modo as conexões entre elas é influenciado pelos seus conhecimentos matemáticos.

A utilização das novas tecnologias (calculadora gráfica e computador) é recomendada pelos programas de matemática em vigor como forma de diversificar as representações dos conceitos matemáticos (Ministério da Educação, 2002). No que diz respeito ao cálculo infinitesimal, o NCTM (2008) recomenda um ensino "exploratório e baseado em experiências numéricas e geométricas que capitalizem o uso da calculadora e do computador. As atividades devem ter em vista fornecer aos alunos bases conceptuais firmes para o cálculo infinitesimal, em vez do desenvolvimento de técnicas manipulativas" (p. 215). Ruthven (1993) é apologista de que "o poder da calculadora gráfica reside na sua capacidade de facilitar a abordagem na sala de aula onde inicialmente as relações matemáticas são exploradas através da sua representação numérica ou gráfica de casos particulares" (p. 98). Para Dreyfus (2002), os ambientes computacionais de aprendizagem fazem com que as relações implícitas entre diferentes representações para o mesmo conceito se tornem explícitas. Essa explicitação contribui, segundo este autor, para que os alunos reconheçam tais "relações e para o surgimento de ideias relacionadas, encurtando a sua aprendizagem dos conceitos" (p. 31). Para Cardoso (1995), a utilização da calculadora gráfica promove "um maior envolvimento [dos alunos] no trabalho" (p. 165) alterando o papel dos mesmos na aula "tornando-se mais ativos" (p. 166). Além disso, a calculadora gráfica ao atribuir um significado geométrico e dinâmico a "conceitos complexos como o de derivada e os conceitos que lhes são associados de variação (...) puderam ser mais facilmente apreendidos" (p. 171).

A possibilidade de uma calculadora gráfica ajudar o cálculo intuitivo de limites permite verificar as conjeturas de aproximação gráfica e numérica dos conceitos de variação. Trata-se de algo relevante, na medida em que pode induzir o aluno na verificação de conjeturas e 'ver' a necessidade do cálculo do limite no conceito de derivada (García, 2000). Para este autor, a possibilidade do aluno poder calcular derivadas através da calculadora gráfica pode ser visto como algo negativo no sentido de desvalorizar a aprendizagem das regras de derivação. Todavia, como indica García (2000), existem vários estudos que mostram que os estudantes trabalham melhor quando conhecem o que a calculadora gráfica está a fazer, quando este não é um 'chapéu mágico', mas sim uma ferramenta potente para fazer, de maneira rápida e segura, as tarefas que eles sabem realizar por si mesmos. Tall (2002) refere que um método que "provou ser bem-sucedido envolve uma abordagem mais flexível que complementa as abordagens numérica e algébrica da derivada com uma apreciação global, visual do gradiente de um gráfico gerado" (p. 18).

Apesar de existirem estudos em que "a utilização de calculadoras e computadores em abordagens ativas e exploratórias da Matemática incentivam a curiosidade, o aumento de confiança e o gosto dos alunos por esta disciplina" (Ponte & Canavarro, 1997, p. 121), existem outros estudos que identificam casos em que os "alunos não encaram favoravelmente a utilização da calculadora" (idem). Interessa notar que "as atitudes que os alunos desenvolvem relativamente à utilização da tecnologia do ensino está fortemente relacionada com o tipo de atividades que realizam" (Ponte & Canavarro, 1997, p. 122) e, por isso, dever-se-á recorrer a tarefas de natureza aberta com análise crítica dos resultados.

O uso da tecnologia além de ser uma ferramenta é, também, fonte de atividade, de investigação e de aprendizagem (Ministério de Educação, 2001). No caso concreto desta intervenção pedagógica foi utilizado o computador e a calculadora gráfica com o vídeo projetor para promover aulas mais dinâmicas e motivadoras e como 'veículos' para criar diferentes representações dos conceitos. A aprendizagem de derivadas foi efetuada preferencialmente através de tarefas exploratórias e de problemas para que o aluno se envolvesse na construção do seu conhecimento na senda do que Teixeira et al. (1998) apontam: "a utilização da tecnologia e as aplicações da Matemática a par de uma visão do aluno que pensa, experimenta e investiga em vez de ser um 'recetor' devem continuar a ser uma preocupação central no processo de ensino" (p. 8).

Sendo assim, para que os alunos consigam ter sucesso em Matemática é preciso que os mesmos consigam dominar várias representações associadas a um conceito (Dreyfus, 2002). Em particular, as dificuldades subjacentes ao tema da derivada de uma função estão relacionadas com a compreensão do conceito de derivada associada à sua interpretação geométrica, que ao longo do processo de ensino-aprendizagem se perde em detrimento de uma manipulação analítica e numérica. Azcárate et al. (1996), debruçando-se sobre o estudo de Orton, referem que os alunos têm dificuldade em utilizar apropriadamente as representações gráficas, apesar de serem "capazes de calcular corretamente a derivada de uma função polinomial e encontrar o declive da tangente num ponto dado da mesma, se mostram incapazes de avaliar as mesmas taxas de variação a partir de gráficos de complexidade semelhante" (p. 14). Interessa definir possíveis estratégias para colmatar essa dificuldade, tendo em consideração as recomendações do programa do Ministério da Educação (2002), que reforça a necessidade de abordar os conceitos matemáticos através das suas diferentes representações. Como sugere o NCTM (2008), importa realçar "procedimentos, nos quais diferentes representações dos mesmos objetos podem transmitir informações distintas, e que evidenciam a importância da seleção de representações adequadas às especificidades das tarefas matemáticas" (p. 425), onde o recurso às tecnologias desempenham um papel importante ao permitir obter as diferentes representações na sala de aula.

A minha intervenção pedagógica teve como intuito potenciar as aprendizagens dos alunos no estudo da derivada numa função, através de uma metodologia de ensino e aprendizagem sustentada na valorização da atividade do aluno, na utilização das diferentes representações dos conceitos em estudo e no uso de recursos tecnológicos. Os conceitos inerentes ao estudo da derivada de uma função foram tratados, sempre que possível, com recurso a diferentes representações de acordo com as fases propostas por Dreyfus (2002). O estudo das derivadas foi abordado "a partir da noção de taxa de variação (velocidade instantânea) privilegiando abordagens gráficas e a utilização da função derivada existente nas calculadoras" (Teixeira et al., 1998, p. 8). A utilização deste recurso na aprendizagem de derivadas seguiu as indicações de Azcárate et al. (1996): (i) Partir dos conceitos prévios que os alunos têm de velocidade; (ii) Utilizar as representações gráficas das funções para visualizar as ideias, em especial a taxa média de variação e a tangente de uma reta num dado ponto; (iii) Ter presente as dificuldades cognitivas no trabalho com o conceito de limite.

Ao longo deste estudo são referidos os dois tipos de representações: externas e internas. As representações externas são referidas quando se indicam as diferentes representações de função: algébrica, gráfica, numérica (tabular). As representações internas são evidenciadas quando se pretende referir os gráficos que os alunos invocam através da sua representação mental. Neste caso, optou-se pela utilização do termo representação visual.

2.3.2. Estratégias de avaliação

Na avaliação da minha intervenção pedagógica recorri a diferentes instrumentos de recolha de dados, tais como: teste diagnóstico sobre tópicos relacionados com o conceito de derivada de uma função; produções dos alunos (resolução das tarefas propostas); questionário (que os alunos responderam após a minha intervenção pedagógica); questões colocadas no final de aulas que lecionei no âmbito do meu projeto; e gravações áudio de todas essas aulas.

Teste diagnóstico. A avaliação diagnóstica, segundo a alínea 2 do artigo 13.° do Decreto-lei n°6/2001 de 18 de Janeiro, deve-se articular "com estratégias de diferenciação pedagógica, de superação de eventuais dificuldades dos alunos, de facilitação da sua integração escolar e de apoio à orientação escolar e vocacional". Este tipo de avaliação, embora possa ser realizada ao longo do ano escolar – como, por exemplo, no início do ano letivo ou de uma unidade temática – permitiu-me identificar o nível de conhecimentos dos alunos sobre tópicos estudados nos anos escolares anteriores e que se ligam ao tema de derivada de uma função (Anexo 2). Na sua construção atendi às considerações descritas por vários autores – como, por exemplo, Almeida e Viseu (2002), Azcárate et al. (1996), Ferrini-Mundy e Graham (1993) – sobre a complexidade que adquire a aprendizagem de tópicos de derivadas e a utilização das suas múltiplas representações. Dessa forma, as questões do teste diagnóstico abordam o conceito de tangente num ponto, a variação de uma função, a velocidade média e a análise de gráficos de tempo e espaço.

Produções dos alunos. Para o desenvolvimento deste estudo analisei as produções dos alunos, que traduzem a resolução das tarefas que lhes propus nas aulas que lecionei, nomeadamente a forma como eles utilizam as diferentes representações na aprendizagem da derivada de uma função. Em cada aula recolhi as resoluções dos alunos que foram objeto de análise. Essa recolha processou-se através de folhas duplicadas que funcionaram como papel químico. Esta forma de recolha permitiu aos alunos ficarem com o registo das resoluções no seu caderno da disciplina sem criar qualquer tipo de 'entropia' nas suas atividades de aprendizagem.

Questionário (Q). Neste estudo foi utilizado um questionário (Anexo 3), de administração direta (Quivy & Campenhoudt, 2008), como instrumento de recolha de informação após a minha intervenção pedagógica. Este método de recolha de dados torna-se adequado quando se pretende formular as mesmas questões a um número elevado de pessoas e recolher as suas respostas, de forma anónima, com a maior brevidade possível (Quivy & Campenhoudt, 2008). Além destas vantagens, o questionário tem como desvantagem não se poder perceber a forma como cada respondente apresenta as suas opiniões, nem como pensa sobre as afirmações que lhe são colocadas.

O questionário apresenta questões de resposta aberta e fechada, sendo a maioria delas abertas para que os alunos pudessem expressar a sua opinião, sem que a mesma fosse condicionada por um conjunto de opções. O questionário é estruturado em dois grupos: o primeiro grupo apresenta questões de resposta fechada, enquanto o segundo é composto por nove questões de resposta aberta. Em cada questão do primeiro grupo, os alunos teriam de escolher cinco opções de acordo com uma escala tipo Likert: DT – Discordo totalmente, D – Discordo, C – Concordo e CT – Concordo Totalmente. Nas questões do segundo grupo, pedia aos alunos que justificassem as suas ideias, que comentassem e se posicionassem face a uma dada afirmação. Em algumas questões sugeri-lhes a utilização de representações alternativas à apresentada, para poder compreender como mobilizavam as diferentes representações face a um determinado assunto. Algumas dessas questões foram adaptadas da plataforma de Zandieh (2000), que foi desenvolvida para descrever as imagens conceptuais de derivada de uma função, e do estudo de Botshiwe e Christiansen (2008), que é uma extensão da plataforma de Zandieh (2000) centrado na pesquisa do desenvolvimento das imagens conceptuais do conceito de derivada em cinco alunos inscritos no programa *Advanced Certificate in Education* (ACE) na Universidade de KwaZulu-Natal. Na análise das repostas a este questionário para referenciar as suas questões usarei a nomenclatura Q seguida do número da questão.

Questões colocadas no final de aulas que lecionei (QA). No fim de três aulas onde os conceitos centrais da investigação foram introduzidos procurei recolher as perceções dos alunos sobre o contributo das representações utilizadas na aula na sua aprendizagem dos tópicos estudados. As razões para a utilização deste tipo de instrumento de recolha de dados foram as mesmas do questionário. Com as questões formuladas pretendi uma recolha da informação mais incisiva e contextualizada que fosse vivenciada pelos alunos já que foram aplicadas logo após o fim de cada aula. Na análise das repostas a estas questões usarei a nomenclatura QA seguida do número da questão. As questões foram aplicadas nas seguintes aulas:

- 2.ª aula (Anexo 4), com o objetivo de averiguar as perceções dos alunos sobre as suas representações e conexões entre os conceitos de velocidade média e taxa média de variação;
- 3.ª aula (Anexo 5), com o objetivo de indagar as perceções dos alunos sobre as suas representações do conceito de taxa de variação;
- 8.ª aula (Anexo 6), com o objetivo de inquirir as perceções dos alunos sobre as múltiplas representações na sua aprendizagem e quais as utilizadas, após o estudo do sinal da função derivada, do sentido de variação e da possível existência de extremos relativos de uma função.

Gravação áudio das aulas (Anexo 11). As aulas da minha intervenção pedagógica que incidiram sobre a concretização do objetivo e das questões deste trabalho foram áudio gravadas.

Dessas aulas, procurei gravar os momentos de discussão das atividades dos alunos após a resolução das tarefas que lhes propus. Neste processo de gravação tive algumas dificuldades devido à qualidade de captação do gravador das intervenções de alguns alunos. Mesmo assim, depois de ouvir essas gravações, considero que obtive um registo que reflete a dinâmica que se desenvolveu nessa discussão. Este método de recolha de dados permitiu-me transcrever os diálogos mais relevantes das aulas que apresento para ilustrar momentos da minha prática pedagógica.

CAPÍTULO 3

INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Este capítulo está dividido em três secções. A primeira trata da análise dos conhecimentos prévios dos alunos sobre conceitos inerentes ao tema derivada de uma função. Na segunda secção descreve-se a intervenção pedagógica e analisa-se de que forma os alunos utilizam as diferentes representações na aprendizagem da derivada de uma função e quais as suas vantagens e desvantagens. A secção final corresponde à análise das perceções dos alunos sobre a utilização das diferentes representações na sua aprendizagem da derivada de uma função através das suas respostas ao questionário e a questões colocadas no final de algumas aulas lecionadas.

3.1. Conhecimentos prévios dos alunos sobre tópicos relacionados com o conceito de derivada de uma função

As respostas que os alunos (n=19) deram ao teste diagnóstico permitiram aferir os seus conhecimentos, antes da intervenção, sobre os conceitos de declive, variação, tangente e sobre as suas capacidades de interpretação e leitura de gráficos espaço-tempo. Na tabela seguinte apresenta-se o número de questões que estruturam o teste diagnóstico e os seus objetivos. A questão 3, como pede para traçar a reta tangente e o sinal do declive, foi dividida em reta (R3) e sinal (S3) para permitir uma análise mais detalhada.

Tabela 2. Objetivos das questões do teste diagnóstico.

Questões	**Objetivos**
1	Relacionar o declive de uma reta com a taxa de variação de uma função num dado instante. Interpretar informação do gráfico.
2	Identificar reta tangente a uma circunferência.
R3	Verificar a existência de uma reta tangente num ponto. Desenhar a reta tangente num ponto, caso exista.
S3	Identificar o sinal do valor do declive da reta tangente.
4;5	Desenhar e interpretar um gráfico espaço-tempo com base em conexões entre o conceito de velocidade e declive.
6	Relacionar o gráfico de uma função com o gráfico da sua função derivada.
7	Identificar uma reta tangente a uma curva que toca em dois pontos dessa curva.

Como se pode identificar da análise dos objetivos delineados, as questões do teste diagnóstico tratam dos seguintes tópicos: declive, tangente, gráfico espaço-tempo e função derivada (Tabela 3):

Tabela 3. Tópicos do teste diagnóstico e respetivas questões.

Tópicos	Questões
Declive	1;S3
Tangente	2; R3; 7
Gráfico espaço-tempo	4; 5
Função derivada	6

Da análise das respostas dos alunos segundo os tópicos considerados constata-se que a maioria revela dificuldades com as noções de declive, tangente e função derivada, o que já não acontece com em relação ao gráfico espaço-tempo.

Tabela 4. Distribuição das respostas dos alunos no teste diagnóstico por tópicos.

Tópicos	C	PC	I	NR	n*
Declive	43%	3%	45%	9%	171
Tangente	42%	0%	48%	10%	209
Gráfico espaço-tempo	77%	0%	23%	0%	57
Função derivada	0%	0%	63%	37%	38

C:Correta; PC: Parcialmente correta; I: Incorreta; NR: Não reponde.

* A coluna n corresponde ao número de questões relacionadas com o tópico e é apresentada porque para cada tópico existe um diferente número de questões. Por exemplo, no tópico declive temos 9 questões respondidas por 19 alunos.

Uma análise mais detalhada a cada uma das questões do teste diagnóstico ajuda a perceber melhor como os alunos expressaram as suas respostas a cada um desses tópicos (Tabela 5). Como a questão 3 possui 8 alíneas, apresenta-se a média das suas alíneas arredonda às unidades e não se considera o tipo de resposta Parcialmente Correta. As distribuições das respostas dos alunos às alíneas da questão 3 serão apresentadas com maior detalhe na Tabela 6 e Tabela 7, respetivamente.

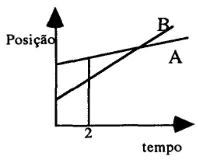
Tabela 5. Distribuição das respostas dos alunos no teste diagnóstico 3 (n=19).

Questões	1	2		3	4	5		6		7
Tipo de resposta	1	2.1	2.2	$\bar{X}$	4	5.1	5.2	6.1	6.2	7
Correta	9	5	3	10	13	7	5	0	0	3
Parcialmente correta	5	0	0	—	0	0	0	0	0	0
Incorreta	5	14	16	7	6	12	14	12	12	15
Não responde	0	0	0	2	0	0	0	7	7	1

Constata-se que, exceto nas questões 3 e 4, a maioria dos alunos não apresentou uma resposta correta às questões colocadas.

Para averiguar se os alunos não faziam confusão entre o declive e a altura recorri à seguinte questão adaptada de Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990).

Questão 1. Indique, justificando, qual dos objetos A ou B se desloca com maior velocidade no instante $t = 2s$?



Aproximadamente metade dos alunos não faz confusão entre o declive e a altura (Q1). Nas justificações dadas, os alunos relacionam o conceito de declive e de velocidade. As cinco respostas parcialmente corretas devem-se à ausência de justificação, enquanto as restantes cinco respostas incorretas indicam que é o objeto A que se desloca com uma velocidade maior do que o outro objeto no instante considerado. Este tipo de resposta supõe que os alunos se referem à posição de A relativamente à de B, não tendo em atenção que o declive da reta que representa o deslocamento de A é menor do que o declive da reta que representa o deslocamento de B, como ilustram as seguintes respostas:

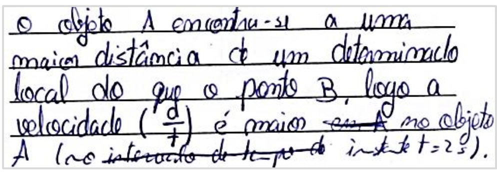

o objeto A encontra-se a uma maior distância de um determinado local do que o ponto B, logo a velocidade ($\frac{d}{t}$) é maior ~~em A~~ no objeto A (no ~~intervalo de tempo~~ de instante t=2s).

Figura 2. Resposta à questão 1 do aluno A7.

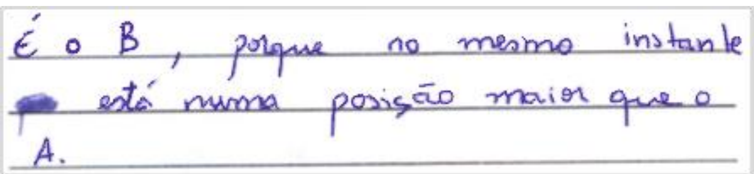
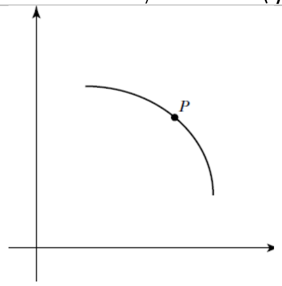
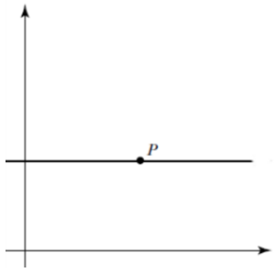
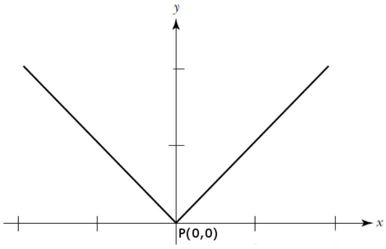
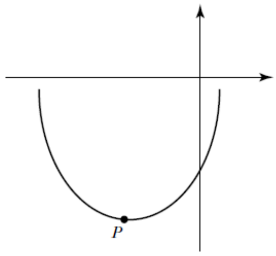
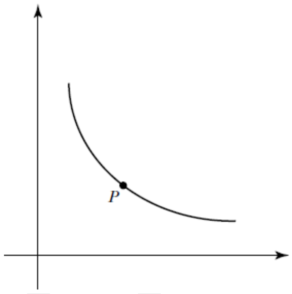
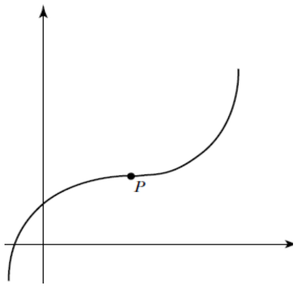
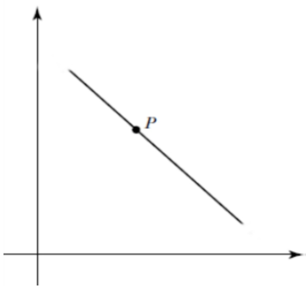
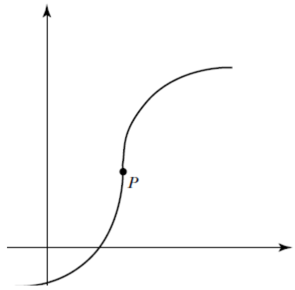

É o B, porque no mesmo instante está numa posição maior que o A.

Figura 3. Resposta à questão 1 do aluno A21.

Os alunos manifestaram melhor desempenho quando lhes foi solicitado o sinal do declive da reta tangente na questão 3. Esta questão solicitava também a reta tangente, cujas respostas serão consideradas quando for analisado o tópico tangente.

Questão 3. Desenhe, se possível, a reta tangente a cada uma das seguintes curvas no ponto P e em cada caso indique se o declive da reta tangente é um número positivo (**+**), um número negativo (**—**), zero (**0**), ou é indeterminado/não existe (**I/NE**).

(1)  ☐ (+) ☐ (**—**) ☐ zero ☐ I/NE	**(5)**  ☐ (+) ☐ (**—**) ☐ zero ☐ I/NE
(2)  ☐ (+) ☐ (**—**) ☐ zero ☐ I/NE	**(6)**  ☐ (+) ☐ (**—**) ☐ zero ☐ I/NE
(3)  ☐ (+) ☐ (**—**) ☐ zero ☐ I/NE	**(7)**  ☐ (+) ☐ (**—**) ☐ zero ☐ I/NE
(4)  ☐ (+) ☐ (**—**) ☐ zero ☐ I/NE	**(8)**  ☐ (+) ☐ (**—**) ☐ zero ☐ I/NE

Quando é solicitado aos alunos que indiquem se o declive da reta tangente é um número positivo, negativo, zero ou indeterminado/não existe, as respostas incorretas a essa questão coincidem com as respostas incorretas quando lhes é pedido para traçar a reta tangente. Os alunos que traçam a reta tangente corretamente não revelam dificuldades em indicar o sinal do valor do seu declive.

Tabela 6. Distribuição das respostas dos alunos no teste diagnóstico na questão 3 sobre o sinal do valor do declive (n=19).

Questões	3								Total	%
Tipo de resposta	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8		
Correta	15	4	14	4	6	12	5	5	65	43%
Incorreta	4	14	4	12	12	6	10	10	72	47%
Não responde	0	1	1	3	1	1	4	4	15	10%

Quando é pedido aos alunos para traçarem a reta tangente na questão 3, o desempenho decresce ligeiramente. Nas tabelas seguintes são apresentados os resultados das respostas dos alunos à questão 3 sobre o ato de traçar a reta tangente. Os alunos nesta questão lidaram com o conflito entre as suas conceções e as conceções formais (Vinner, 2002).

Tabela 7. Distribuição das respostas dos alunos no teste diagnóstico na questão 3 relativamente ao traçar a reta tangente (n=19).

Questões	3								Total	%
Tipo de resposta	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8		
Correta	18	2	18	6	8	13	7	6	78	51%
Incorreta	1	14	1	10	11	4	6	8	55	36%
Não responde	0	0	0	3	0	2	6	5	19	13%

Os alunos apresentam dificuldades em identificar a não existência da reta tangente no ponto anguloso do gráfico da função módulo de x (Q3.2) e em traçar a reta tangente num ponto pertencente a uma reta linearmente decrescente (Q3.4) ou constante (Q3.5) e quando o ponto é de inflexão do sentido de concavidade da curva (Q3.7 e Q3.8). Exemplos dessas dificuldades são ilustrados nas seguintes respostas:

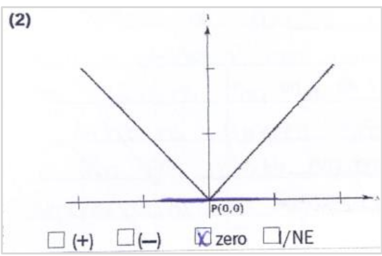


Figura 4. Resposta à questão 3.2 do aluno A6.

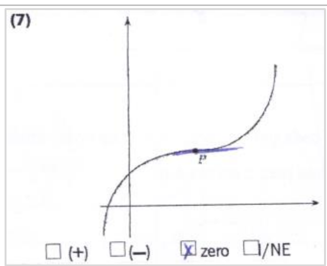


Figura 5. Resposta à questão 3.7 do aluno A6.

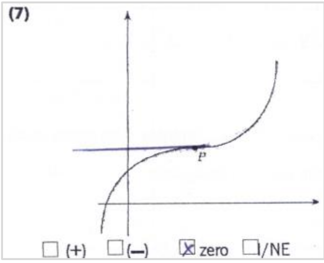


Figura 6. Resposta à questão 3.7 do aluno A15.

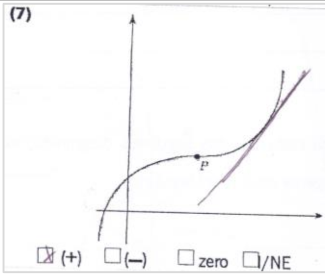


Figura 7. Resposta à questão 3.7 do aluno A13.

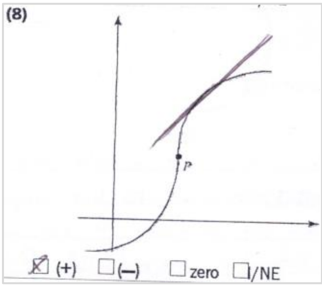


Figura 8. Resposta à questão 3.8 do aluno A13.

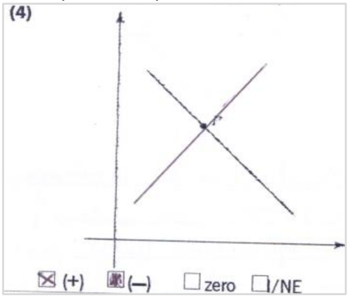


Figura 9. Resposta à questão 3.4 do aluno A13.

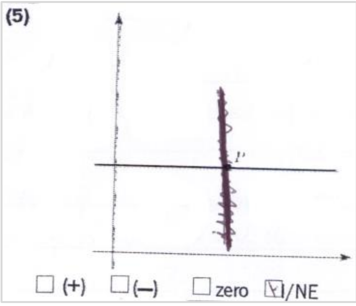


Figura 10. Resposta à questão 3.5 do aluno A11

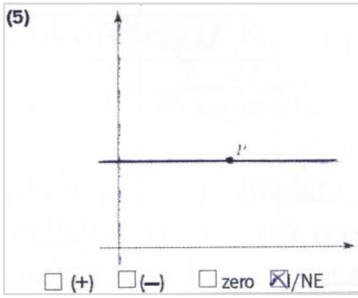
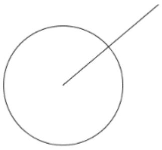
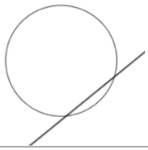


Figura 11. Resposta à questão 3.5 do aluno A9.

Nas figuras 5 e 6, os alunos apresentam uma semirreta para não cortar o gráfico da respetiva função à semelhança do verificado por Vinner (2002). Na Q3.5 os alunos que não responderam corretamente consideram que a reta tangente não existe, o aluno A11 apresenta erradamente uma reta tangente que foi riscada, tendo o aluno considerado que a reta tangente não existe. Nas figuras 7 e 8, o aluno A13 traça a reta tangente noutro ponto da curva ignorando o ponto P, o que indicia que considera que uma reta tangente a uma curva faz com que a curva se situe só num dos semiplanos. Na Figura 4 o aluno revela dificuldades em constatar que não existe reta tangente no ponto anguloso, visto que ainda não considera a variação das semi-tangentes ao gráfico na vizinhança do ponto anguloso. Estas respostas revelam a forte influência do conceito de tangente a uma circunferência (Almeida & Viseu, 2002). Por um lado, faz emergir a existência de um único ponto de interseção entre a curva e a reta tangente, o que por si só não é suficiente para que a reta seja tangente à curva nesse ponto. Por outro lado, ganha força a ideia de que a curva ao se situar num dos semiplanos formado pela reta tangente não é 'cortada' pela reta tangente. Estes conflitos ajudam a perceber a dificuldade que a maioria dos alunos revelou em justificar o porquê de uma reta que corta uma circunferência num ponto (Q2.1) (73,7%) ou em dois pontos (Q2.2) (84,2%) não pode ser uma reta tangente (Q2):

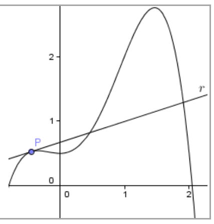
Questão 2. Para cada um dos seguintes diagramas, explique porque é que a linha L não é uma reta tangente para a circunferência dada.

(1) 

(2) 

Os alunos expressam, novamente, conceções erróneas sobre o conceito imagem da noção de reta tangente, influenciados pelo conceito de tangente à circunferência, a uma curva num dado ponto (Questão 7).

Questão 7. Diga, justificando, se a reta *r* é tangente ao gráfico da função f no ponto P.



A maioria dos alunos (79,9%) apresenta uma resposta incorreta devido à existência de mais pontos de interseção entre a reta e o gráfico de uma função (Almeida & Viseu, 2002; Giraldo et al., 2013; Tall, 1989; Vinner, 1983), como ilustra a seguinte resposta:

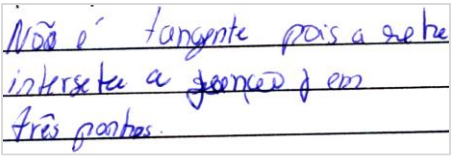

Não é tangente pois a reta intersecta a função f em três pontos.

Figura 12. Resposta à questão 7 do aluno A14.

Tendo em consideração os resultados relativos ao tópico de reta tangente a uma curva num dado ponto, os alunos revelam ter dificuldades em identificar e traçar a reta tangente nos casos que não se enquadram na noção adquirida com o estudo da circunferência (Almeida & Viseu, 2002; Giraldo et. al., 2003; Tall, 1989; Vinner, 1983, 2002).

Já no que diz respeito à interpretação e ao esboço de gráficos espaço-tempo, com base em conexões entre o conceito de velocidade e de declive, a maioria dos alunos não revela dificuldades (68,4%) (Q4).

Questão 4. Para o seguinte cenário, desenhe um gráfico distância/tempo que representa a situação. Marque o tempo dos eventos, como por exemplo "comecei a andar", "comecei a correr", "correr de volta", no eixo horizontal. Marque as localizações, como "deixei o dormitório", "cheguei à aula", no eixo vertical.
Situação: Um aluno deixou o dormitório e começou a andar devagar para a aula quando deu conta que se tinha esquecido dos livros. Então começou a correr de volta para o dormitório, pegou nos livros e correu novamente para a aula.

As seis respostas incorretas devem-se à escolha do declive para o evento correr e andar. Os alunos que erraram esta questão colocaram o valor absoluto do declive do evento 'andar' superior ao do 'correr', como ilustra a Figura 13. Um outro erro cometido pelos alunos é na coerência entre os declives no evento 'correr', como mostra a Figura 14, em que nos momentos em que 'corre' o declive desses eventos é muito diferente. Na resposta do aluno A5 o declive do evento correr de volta é quase igual ao evento 'andar'.

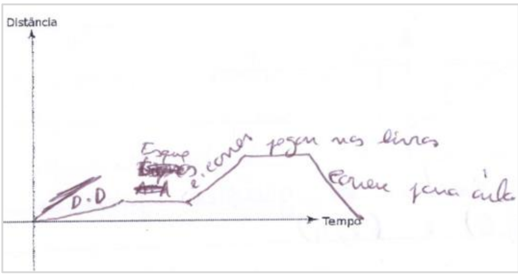


Figura 13. Resposta à questão 4 do aluno A2.

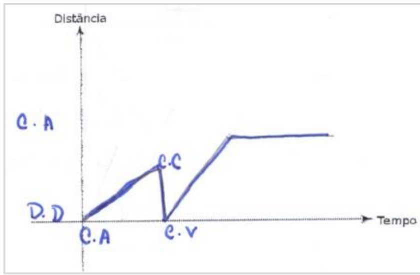


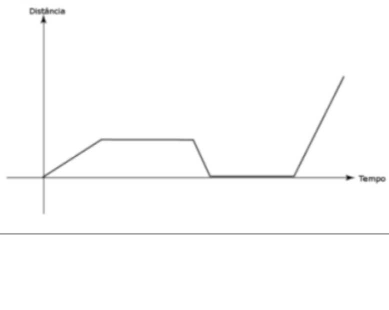
Figura 14. Resposta à questão 4 do aluno A5

Tais resultados mostram a existência de uma discrepância entre a definição matemática de declive, o conceito que os alunos apreenderam, e o conceito imagem que estes aplicam em situações concretas (Vinner, 2002).

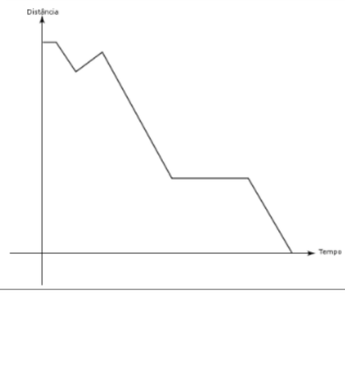
Pretendia-se, também, averiguar se os alunos conseguiam apresentar um contexto válido que traduzisse a informação de um gráfico tempo-espaço dado (Q5):

Questão 5. Para cada um dos seguintes gráficos descreve uma situação que o gráfico pode representar.

(1)



(2)



A maioria dos alunos apresenta dificuldades em desenhar o gráfico com base numa situação. Na questão Q5.2, os alunos interpretaram um gráfico de uma situação como traduzindo o desenho dessa situação. A aparência visual do gráfico afastou os alunos da natureza da informação que o gráfico contém, confundindo o gráfico com a trajetória do caminho. Estas conclusões são partilhadas por Leinhardt, Zalavsky e Stein (1990), que utilizam o termo interpretação icónica para identificar este tipo de interpretações. A figura seguinte ilustra uma resposta desse tipo dada pelo aluno A12, que apesar de se considerar correta, o aluno associa o gráfico a uma montanha.

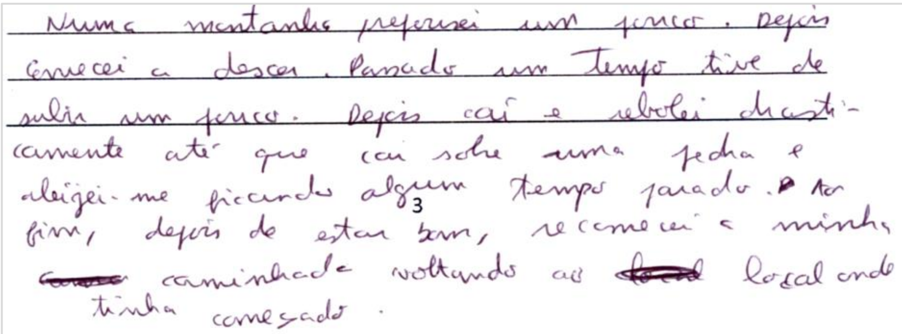

Numa montanha percorri um pouco. Depois comecei a descer. Passado um tempo tive de subir um pouco. Depois caí e rebolei drasticamente até que caí sobre uma pedra e aleijei-me ficando algum tempo parado. Ao fim, depois de estar bem, recomecei a minha caminhada voltando ao local onde tinha começado.

Figura 15. Resposta à questão 5.2 do aluno A12.

Os alunos também associaram erradamente o evento 'andar' com um valor superior do declive da parte da reta que traduz a atividade de 'correr', como ilustra a resposta apresentada pelo aluno A11:

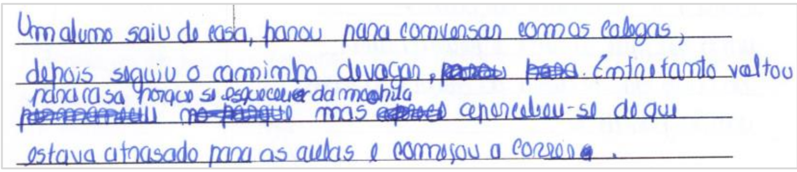

Um aluno saiu de casa, parou para conversar com os colegas, depois seguiu o caminho devagar, ~~parou~~ ~~para~~. Entretanto voltou para casa porque se esqueceu da mochila mas apercebeu-se de que estava atrasado para as aulas e começou a correr.

Figura 16. Resposta à questão 5.1 do aluno A11.

Em muitas respostas, os alunos não foram rigorosos na distinção dos diferentes declives, como ilustra a resposta do aluno A2:

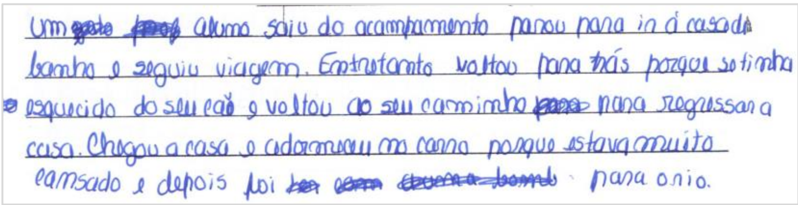

Um ~~gato~~ aluno saiu do acampamento parou para ir à casa de banho e seguiu viagem. Entretanto voltou para trás porque se tinha esquecido do seu cão e voltou ao seu caminho para regressar a casa. Chegou a casa e adormeceu no carro porque estava muito cansado e depois foi para o rio.

Figura 17. Resposta à questão 5.2 do aluno A2.

A questão 6, a que nenhum aluno apresentou uma resposta correta nas duas alíneas, também foi proposta aos alunos para a resolverem após a intervenção pedagógica, para poder averiguar se relacionam o gráfico de uma função com o gráfico da sua função derivada. Assim, nesta intervenção, tendo em conta os resultados do teste diagnóstico, propus tarefas que reforçassem o conceito de reta tangente e sempre que o conceito estivesse envolvido na introdução de um novo conceito fiz sempre um enquadramento da noção de reta tangente.

3.2. As representações no ensino e na aprendizagem da derivada de uma função

Nesta secção é feita uma análise da minha intervenção pedagógica, sintetizada na Tabela 8, que compreende dois momentos diferenciados: durante e depois dessa intervenção. De seguida apresento o que resultou das atividades desenvolvidas em cada um desses momentos.

Tabela 8. Síntese da intervenção pedagógica.

Aulas	Conteúdos
1	Noção de variação de uma função num dado intervalo Cálculo da variação de uma função num dado intervalo.
2	Noção de taxa média de variação. Cálculo e interpretação geométrica de taxa média de variação de uma função f no intervalo [a, b].
3	Noção de taxa de variação. Cálculo e interpretação geométrica de taxa de variação de uma função f no intervalo [a, b].
4	Função derivada.
5	Derivada de uma função afim, quadrática e cúbica
6	Taxa de variação e função derivada
7	Derivada de funções racionais do tipo $y = \frac{a}{x}; y = \frac{a}{x-b}\ e\ y = c + \frac{a}{x-b}, com\ a \neq 0$.
8	Sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos de uma função.

Nas aulas lecionadas, para cada novo conteúdo, apliquei uma tarefa motivacional de natureza exploratória com recurso às representações gráfica, algébrica, numérica e tabular, na senda de Dreyfus (2002), em que os conceitos são apresentados inicialmente através de uma representação e depois, em paralelo, com outras representações, para, por fim, estabelecer relações entre elas.

As tarefas eram distribuídas no início de cada aula e dava algum tempo aos alunos para a sua resolução. Simultaneamente percorria a sala de aula apoiando individualmente cada aluno, reforçando os bons alunos e ajudando os que manifestavam dificuldades. Na resolução dessas tarefas os alunos partilhavam e discutiam as suas ideias com o colega de carteira. Após a resolução da tarefa um aluno explicitava a sua resolução perante a turma no quadro.

No decorrer da minha intervenção pedagógica optei por uma abordagem que acentuasse os aspetos gráficos, já que tendo todas as salas um vídeo projetor podiam ser usadas visualizações gráficas através de programas dedicados como o *Geogebra* ou as calculadoras gráficas, privilegiando as conexões entre as representações. Os exemplos apresentados com o auxílio da calculadora gráfica tiveram em consideração as calculadoras que os alunos possuíam (Anexo 1). Houve momentos de aula que foram dedicadas à calculadora gráfica, em particular no cálculo da derivada num valor do domínio da função e à representação gráfica da derivada de uma função, já que os alunos apresentavam dificuldades na utilização dessas funcionalidades.

Na análise das produções dos alunos, que resultam da resolução das tarefas que lhes foram propostas, apresento a análise relativamente ao modo como os alunos utilizam as representações matemáticas nos tópicos da derivada de uma função e os resultados relativos às representações predominantes em cada uma das questões que estruturam as tarefas aplicadas nas aulas lecionadas 2, 3 e 8, o que ilustra os momentos mais significativos da minha intervenção pedagógica.

Como existem aulas em que foram propostas mais do que uma tarefa e para ser possível a sua referenciação optei por numerá-las com o número da aula, um ponto, e em seguida, o número da tarefa. Assim, a título de exemplo, a tarefa 2.1 será a tarefa um da aula dois. O mesmo foi feito para as questões, que na sua referenciação a notação é idêntica à das tarefas só que o último algarismo, depois de um ponto, será o número da questão. Por exemplo, a questão 2.1.3 será a questão três da tarefa um da aula dois. Na tabela seguinte apresento a relação das aulas com as tarefas analisadas.

Tabela 9. Relação das aulas com as tarefas analisadas.

Aulas	Tarefas	
2	Tarefa 2.1 Tarefa 2.2	(Anexo 7) (Anexo 8)
3	Tarefa 3.1	(Anexo 9)
8	Tarefa 8.1	(Anexo 10)

As tarefas tinham questões que induziam diferentes tipos de representações (numérica, algébrica, gráfica e tabular) e outras, de investigação\exploração das funções em estudo, permitiam que os alunos utilizassem as representações que considerassem mais adequadas para produzir as respetivas respostas.

De uma forma global, os alunos aderiram à realização destas tarefas, não só ao nível do empenho e responsabilidade mas também da qualidade das respostas matemáticas que produziram. Apresento em seguida excertos das produções dos alunos destacando o modo como utilizaram as representações matemáticas nas atividades de aprendizagem de tópicos de derivada de uma função. A análise da informação proveniente dessas produções foi orientada segundo os tópicos 'Variação e taxa média de variação de uma função num intervalo de $\mathbb{R}$', 'taxa de variação' e 'sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos de uma função'. Dentro de cada tópico adoto os modos de representação enunciados por Friedlander e Tabach (2001), à exceção da representação verbal, e ainda a representação tabular (Brown & Mehilos, 2010). O termo tradução utilizado por outros autores referenciados neste documento (Janvier, 1987; Vinner, 1989) será englobado no termo conversão definido em Duval (2012) para a análise dos dados. Além desse termo, usarei os termos codificação, interpretação e tratamento segundo o referencial teórico de Duval.

Variação e taxa média de variação de uma função num intervalo de $\mathbb{R}$

A estratégia definida para a introdução do conceito de taxa média de variação foi feita a partir do conceito de velocidade, por ser um conceito conhecido dos alunos e estar relacionado com um fenómeno real, como é sugerido pelo programa de matemática do ensino secundário (Ministério da Educação, 2001). No desenvolvimento da aula foram realizadas tarefas pelos alunos e promovidas discussões orientadas com base nos conhecimentos prévios que os alunos têm sobre velocidade, em particular, velocidade média. Foram utilizadas representações gráficas de funções para a visualização dos conceitos geométricos, em particular o da taxa média de variação, como declive da reta num dado intervalo, tendo presente as dificuldades cognitivas conhecidas na aprendizagem dos conceitos abordados pelos alunos neste nível de ensino. Como referem (Azcárate et al., 1996), não é eficaz iniciar a aprendizagem do conceito de derivada através do conceito de limite sem primeiro consolidar os conhecimentos ao nível dos conceitos e do cálculo dos requisitos prévios para o entendimento significativo do conceito de derivada. Em Azcárate et al. (1996) são referidos vários estudos que apontam para a importância do ensino da derivada através do estudo prévio dos conceitos de limite, taxa média de variação e velocidade.

No desenvolvimento desta aula propus duas tarefas exploratórias introdutórias destes temas, com um grau de dificuldade reduzida.

Tarefa 2.1. Com esta tarefa (Anexo 7) pretendia que os alunos trabalhassem conceitos básicos de Cinemática, em particular o conceito de velocidade média, e chegassem ao conceito de taxa média de variação. A tarefa apresentava uma tabela de dados com os tempos e as distâncias percorridas por uma pessoa e questionava os alunos sobre o significado de velocidade média de forma a induzir a formalização do conceito de taxa média de variação de uma função num dado intervalo. A tarefa era propícia para trabalhar com as várias representações, porque o êxito da Matemática depende da riqueza das representações mentais dos conceitos matemáticos. Como defendem Azcárate et al. (1996), uma representação mental é rica se refletir muitos aspetos relacionados com o conceito e permite passar a outro com facilidade. Sendo assim, a fonte de dados fornecida foi a representação tabular e nas questões foram pedidos cálculos de valores, o esboço do gráfico dos dados fornecidos e a sua relação.

Numa corrida bicicleta organizada na escola o Pedro fez os tempos indicados na tabela:

t(s)	0	8,5	17,5	27,5	39,5	53
d(m)	0	200	400	600	800	1000

1. Qual é o total de metros da corrida?
2. Qual é a distância percorrida quando $t = 8{,}5s$?
3. Em que instante a distância assume maior valor

Figura 18. Questões da 1 à 3 da tarefa 2.1.

Na resolução da tarefa 2.1, os alunos revelaram que codificaram corretamente os dados fornecidos pela representação tabular. Reponderam às questões 2.1.1, 2.1.2 e 2.1.3 diretamente dos dados da tabela usando a representação numérica, uma opção previsível já que as questões pediam valores numéricos da tabela. A resolução seguinte é um exemplo do tipo de respostas que foram dadas pelos alunos.

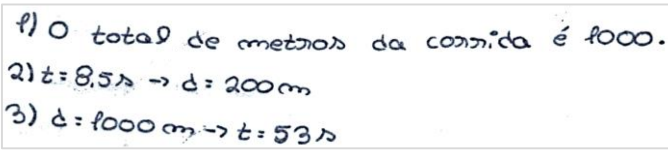

1) O total de metros da corrida é 1000.
2) t = 8,5s → d = 200m
3) d = 1000 m → t = 53s

Figura 19. Resposta às questões 2.1.1 à 2.1.3 do aluno A16.

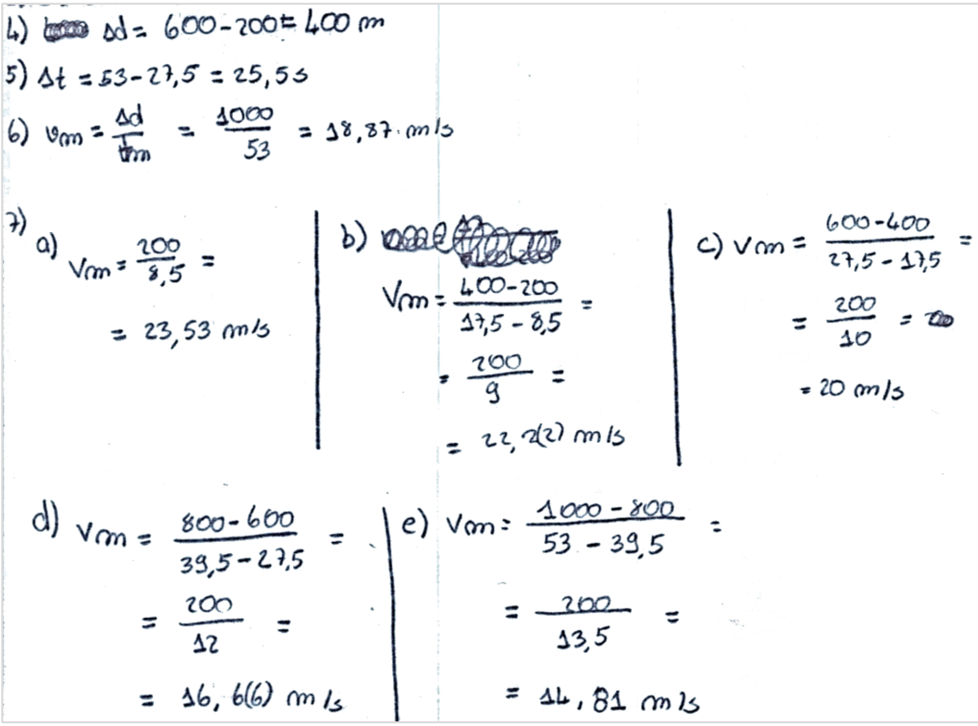
Em seguida foi solicitado aos alunos que respondessem a algumas questões com base na representação tabelar fornecida.

4. Qual é a variação da distância quando o tempo varia de 8,5 a 27,5s?
5. Qual é a variação do tempo quando a distância varia entre 600 e 1000?
6. Qual foi a velocidade média do Pedro no total do percurso?
7. Qual é a velocidade média em cada um dos intervalos considerados?

Figura 20. Questões da 4 à 7 da tarefa 2.1.

Nestas questões (2.1.4, 2.1.5, 2.1.6 e 2.1.7), os alunos codificaram os dados da representação tabular e utilizaram, corretamente, a representação numérica para obter a variação da distância e do tempo e da velocidade média, como revela a resolução do aluno A10.

Novamente as questões influenciaram a representação utilizada (Friedlander & Tabach, 2001; Kaput, 1992).


4) $\Delta d = 600 - 200 = 400\ m$

5) $\Delta t = 53 - 27,5 = 25,5\ s$

6) $v_m = \frac{\Delta d}{\Delta t_m} = \frac{1000}{53} = 18,87\ m/s$

7) a) $V_m = \frac{200}{8,5} = 23,53\ m/s$

b) $V_m = \frac{400-200}{17,5-8,5} = \frac{200}{9} = 22,2(2)\ m/s$

c) $V_m = \frac{600-400}{27,5-17,5} = \frac{200}{10} = 20\ m/s$

d) $V_m = \frac{800-600}{39,5-27,5} = \frac{200}{12} = 16,6(6)\ m/s$

e) $V_m = \frac{1000-800}{53-39,5} = \frac{200}{13,5} = 14,81\ m/s$

Figura 21. Resposta às questões 2.1.4 à 2.1.7 usando a representação numérica do aluno A10.

Na questão 2.1.8, para justificarem em que momento o Pedro apresenta cansaço, os alunos usaram a representação numérica.

8. Quando revelou o Pedro sinais de "cansaço"? Justifique a sua resposta.

Figura 22. Questão 8 da tarefa 2.1.

O objetivo da questão foi confrontar os alunos com uma situação em que tinham de entender o significado dos dados que até aquele momento possuíam ou que tinham de obter. Os alunos não apresentaram dificuldades em identificar o intervalo onde o Pedro começa a revelar cansaço. Da análise das respostas dadas, novamente se verifica o recurso à representação numérica como base de explicitação do seu raciocínio. Nesta questão, em particular, os alunos foram influenciados pelos resultados já obtidos nas questões anteriores já que a questão não influencia a representação a utilizar. Se a questão 2.1.9, que pede a representação gráfica da tabela, aparecesse antes da questão 2.1.8 os alunos teriam usado a representação gráfica para argumentar a sua resposta?

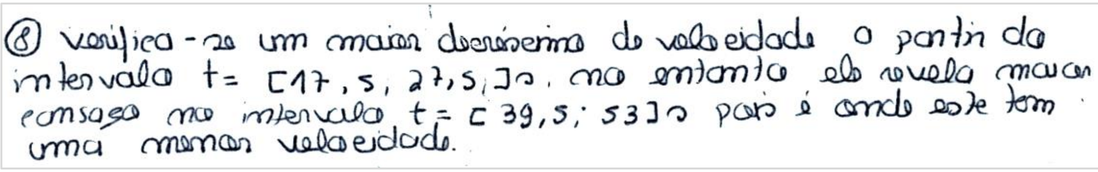


Figura 23. Resposta à questão 2.1.8 usando a representação numérica do aluno A17.

Nas respostas anteriores, da 2.1.1 à 2.1.8, os alunos, na sua maioria, não tiveram dificuldades devido, em parte, ao processo de tratamento de representações semióticas, que as tarefas implicavam, não ser de grande dificuldade. A maior parte dos alunos utilizou a representação numérica devido ao tipo de conhecimento matemático que as questões evocam.

Na questão 2.1.9 pretendia-se que os alunos representassem no plano cartesiano os pontos obtidos a partir da representação tabular.

9. Represente num plano cartesiano os pontos (t, d) obtidos da tabela.

Figura 24. Questão 9 da tarefa 2.1.

Seis alunos não responderam ou não conseguiram representar corretamente e uma grande parte evidenciou dificuldades no processo de conversão da representação tabular para a representação gráfica. O exemplo seguinte ilustra a dificuldade do aluno A18 em definir a escala do gráfico em função dos dados fornecidos pela representação tabular.

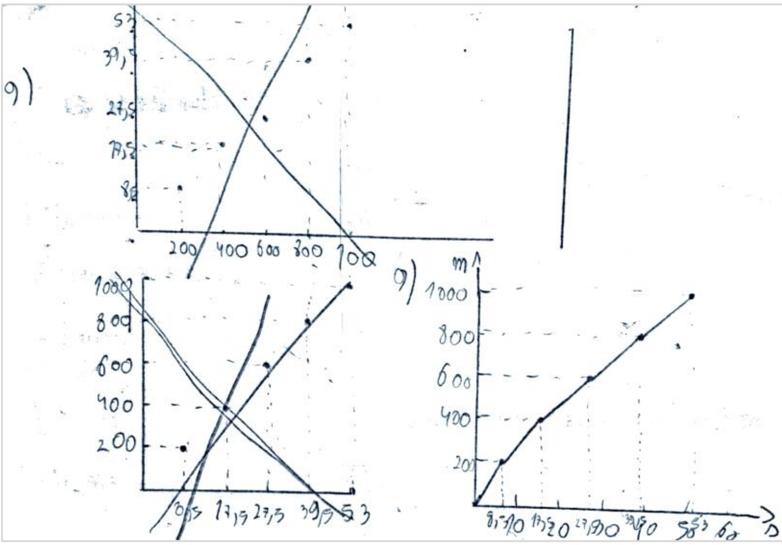


Figura 25. Resposta à questão 2.1.9 usando a representação gráfica do aluno A18.

Por fim, a questão 2.1.10 solicitava explicitamente aos alunos a análise das várias representações presentes na resolução da tarefa.

10. Da análise da velocidade média do Pedro nos intervalos de tempo considerados, registe a interpretação que retira da representação gráfica, numérica e da tabelar.

Figura 26. Questão 10 da tarefa 2.1.

Da análise das produções dos alunos verificou-se que dez alunos usaram a representação gráfica, como suporte para a sua argumentação, e nove não responderam. Uma parte dos alunos que não responderam a esta questão também não responderam ou erraram à questão 2.1.9. Estes alunos não conseguiram representar graficamente a informação fornecida pela representação tabular. Na Figura 27 temos um exemplo de uma resposta onde explicitamente o aluno refere a representação gráfica como fonte para a sua argumentação.

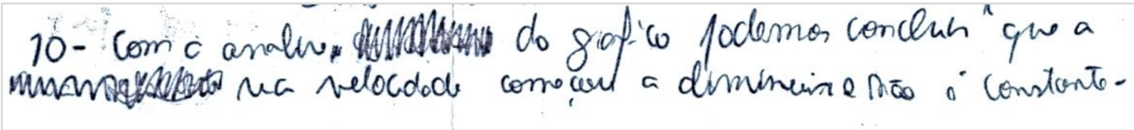
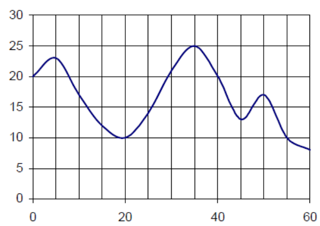

10- Com a analise ~~[illegible]~~ do gráfico podemos concluir que a ~~[illegible]~~ na velocidade começou a diminuir e não é constante-

Figura 27. Resposta à questão 2.1.10 usando a representação gráfica do aluno A22.

Após o término da tarefa 2.1 foi pedido aos alunos a resolução de outra tarefa, denominada de *tarefa 2.2.* (Anexo 8). Esta tarefa pretendia analisar a relação existente entre taxa média de variação e monotonia da função num dado intervalo do seu domínio e abordar a interpretação geométrica da taxa média de variação de uma função num dado intervalo do seu domínio. Pretendia-se salientar o facto de, por exemplo, uma taxa de variação negativa não significa que a função seja decrescente nesse intervalo, embora o contrário seja verdadeiro. Do mesmo modo, a uma taxa de variação média nula pode não corresponder um intervalo onde a função seja constante. E por fim, a partir da análise da variação da taxa média da função nos intervalos encontrados, pretendia-se que os alunos estabelecessem uma relação entre a monotonia de uma função num intervalo dado e o respetivo valor da taxa média de variação. Novamente, adotei uma abordagem na senda de Dreyfus (2002), mas começando intuitivamente pela representação gráfica até a uma formalização algébrica do conceito. Os dados foram fornecidos por uma representação gráfica e foi solicitado aos alunos, através de várias questões, que a interpretassem e codificassem.

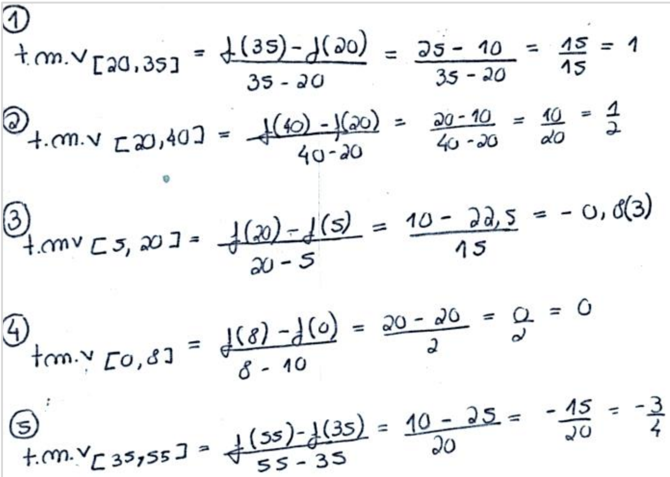
1. Um intervalo onde a taxa média de variação seja positiva e monótona crescente.
2. Um intervalo onde a taxa média de variação seja positiva e a função não seja monótona.
3. Um intervalo onde a taxa média de variação seja negativa.



4. Um intervalo onde a taxa média de variação seja nula
5. Um intervalo onde a taxa média de variação seja negativa e a função não seja monótona.

Figura 28. Questões da 1 à 5 da tarefa 2.2.

Nas questões da 2.2.1 à 2.2.5, os alunos poderiam ter respondido recorrendo exclusivamente aos dados fornecidos pelo gráfico, apresentando apenas o intervalo, ou os intervalos e calcular a sua taxa média de variação para justificar a resposta. A maioria dos alunos apresentou o intervalo e calculou a taxa média de variação (Figura 29). Apenas dois alunos apresentaram só os intervalos (Figura 30). Um desses alunos recorreu apenas à codificação da representação gráfica nas questões (2.2.1 e 2.2.2) e noutras à gráfica e numérica como se pode verificar na Figura 31.


1

$t.m.v_{[20,35]} = \frac{f(35)-f(20)}{35-20} = \frac{25-10}{35-20} = \frac{15}{15} = 1$

2

$t.m.v_{[20,40]} = \frac{f(40)-f(20)}{40-20} = \frac{20-10}{40-20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

3

$t.m.v_{[5,20]} = \frac{f(20)-f(5)}{20-5} = \frac{10-22,5}{15} = -0,8(3)$

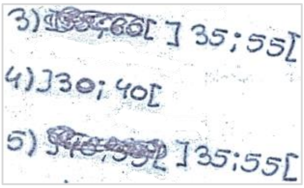
4

$t.m.v_{[0,8]} = \frac{f(8)-f(0)}{8-10} = \frac{20-20}{2} = \frac{0}{2} = 0$

5

$t.m.v_{[35,55]} = \frac{f(55)-f(35)}{55-35} = \frac{10-25}{20} = -\frac{15}{20} = -\frac{3}{4}$

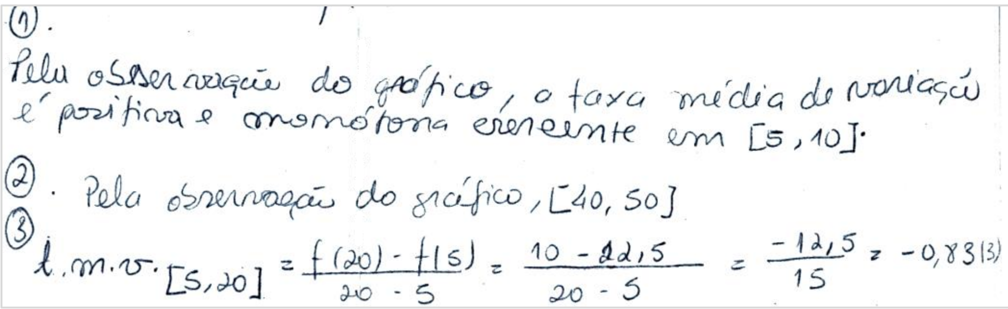
Figura 29. Resposta às questões 2.2.3 à 2.2.5 do aluno A17.


3)]35;55[

4)]30;40[

5)]35;55[

Figura 30. Resposta às questões 2.2.3 à 2.2.5 do aluno A16.


1.

Pela observação do gráfico, a taxa média de variação é positiva e monótona crescente em [5,10].

2. Pela observação do gráfico, [40, 50]

3

$t.m.v._{[5,20]} = \frac{f(20)-f(5)}{20-5} = \frac{10-22,5}{20-5} = \frac{-12,5}{15} = -0,83(3)$

Figura 31. Resposta à questão 2.2.1 à 2.2.3 do aluno A15.

Na resposta do aluno A15 é reveladora a adequação que fez entre as várias representações. Como na questão 2.2.1 e 2.2.2 a taxa média de variação não é suficiente para justificar a não monotonia do intervalo, o aluno responde apenas com o intervalo. Na questão 2.2.3 o aluno calcula a taxa média de variação.

A maioria dos alunos justificou o intervalo dado como resposta, mesmo não sendo pedido. Este comportamento pode estar relacionado com o valor que os alunos atribuem à interpretação exclusiva da representação gráfica.

Para além das formas de representação já referidas anteriormente, os alunos fizeram uso também da representação algébrica. Por exemplo, a utilização da representação algébrica na resolução da questão 2.2.6 revela que os alunos têm a capacidade de estabelecer relações entre os conceitos apreendidos.

6. A equação de reta definida pelos pontos de abcissa 20 e 40. Encontra alguma relação entre a taxa média de variação e o declive (m) da reta?

Figura 32. Questão 6 da tarefa 2.2.

Neste caso, a totalidade dos alunos (n=19) respondeu corretamente a essa questão utilizando a representação algébrica. A figura exemplifica uma resposta dada por um aluno:

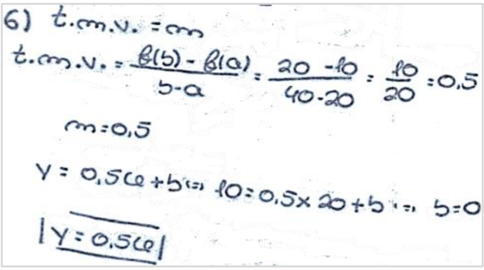


Figura 33. Resposta usando a representação algébrica do aluno A16.

Apenas um aluno utilizou corretamente a notação do cálculo da taxa média de variação. Como se pode verificar a resposta na Figura 33, o aluno não especificou o intervalo para o qual está a calcular a taxa média de variação. Esta falta de rigor poderá estar relacionada com a recente utilização do conceito ou com a relação que fez mentalmente com a forma que normalmente estão habituados para calcular o declive de uma reta.

Taxa de variação

A estratégia definida para a introdução do conceito de taxa de variação foi feita a partir do conceito de velocidade. A noção de taxa média de variação num intervalo serviu de requisito para a introdução da taxa de variação local de uma dada função.

A transição do conceito de taxa média de variação de uma função num dado intervalo do seu domínio para a noção de derivada num valor do domínio da função decorre numa fase em que o aluno ainda não tem bem presente a perceção dinâmica do comportamento de uma função na vizinhança de um dado valor no seu domínio.

Tarefa 3.1. Com esta tarefa exploratória (Anexo 9) pretendia que os alunos compreendessem que apenas a taxa média de variação não é suficiente para saber o comportamento de uma função num ponto e, assim, despertar neles a necessidade de um novo 'instrumento' matemático. A tarefa propunha uma série de questões que, de forma gradual, promoviam um raciocínio do particular para o geral, através do trabalho com várias representações dos conceitos, algébricas e gráficas, num processo de tradução/conversão entre representações (Dreyfus, 2002; Duval, 2012; Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990; Vinner, 1989).

Os conceitos foram apresentados inicialmente através da representação algébrica e depois foi introduzida a representação gráfica em paralelo, para, por fim, estabelecer relações entre elas (Dreyfus, 2002).

Esta tarefa foi resolvida em duas partes para permitir consolidar os conhecimentos envolvidos e assim permitir uma articulação correta com os conceitos posteriores. A resolução da tarefa foi dividida numa primeira parte da questão 1 à 4 e numa segunda parte da questão 5 à 8.

A questão 3.1.1 pedia aos alunos que representassem graficamente a função dada através de uma representação algébrica, na situação descrita.

Uma bola desce um plano inclinado e registou-se a distância percorrida pela bola no decorrer do tempo. A distância (*d*), em centímetros, percorrida pela bola em função do tempo (*t*), em segundos, é dada por

$$d(t) = 10t^2$$

1. Represente graficamente a função d na situação descrita.

Figura 34. Questão 1 da tarefa 3.1.

Dos dezanove alunos que responderam à tarefa, nove recorreram à representação tabular e à gráfica. A representação tabular/numérica foi utilizada para cálculos auxiliares de alguns pontos.

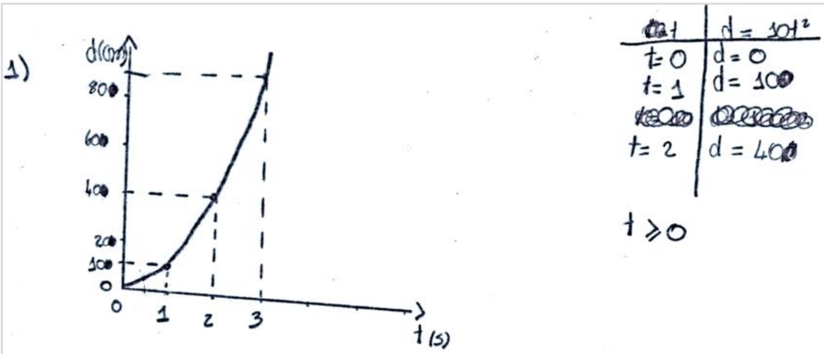


Figura 35. Resposta à questão 3.1.1 usando a representação tabular/numérica para obter a representação gráfica do aluno A10.

Os alunos não apresentaram dificuldades em esboçar o gráfico e tiveram em conta o contexto do problema. A realização sem dificuldades da conversão da representação algébrica para a representação gráfica traduz o fenómeno de congruência entre estas representações (Duval, 2012). As representações gráficas produzidas pelos restantes dez alunos, sem os respetivos cálculos auxiliares, resultaram da utilização da calculadora gráfica.

Na mudança da representação algébrica para a representação gráfica, o facto de os alunos utilizarem sobretudo processos numéricos para determinarem as coordenadas de pontos, mostra a importância destes processos na compreensão inicial de um problema tal como é defendido por Friedlander e Tabach (2001). Neste caso, os alunos começaram por atribuir valores a x na expressão algébrica, determinam os respetivos valores de y, obtiveram as coordenadas de pontos, e com base nesses pontos construíram o gráfico da função. Este conjunto de procedimentos vai ao encontro dos resultados observados por Leinhardt et al. (1990), que indicam que a construção do gráfico a partir da expressão algébrica resume-se a uma série de passos diretos, que normalmente passam por identificar pares ordenados, representá-los no referencial cartesiano e traçar uma linha que passe pelos pontos assinalados.

Na questão 3.1.3, a turma foi questionada sobre a estimativa do valor da $\mathrm{t.m.v.}$ se continuássemos a diminuir a amplitude do intervalo.

3. Preencha as seguintes tabelas:

Intervalo	t.m.v.
[1; 1,5]	
[1; 1,1]	
[1; 1,01]	
[1; 1,001]	

Tabela 1

Intervalo	t.m.v.
[0,5; 1]	
[0,9; 1]	
[0,99; 1]	
[0,999; 1]	

Tabela 2

Figura 36. Questão 3 da tarefa 3.1.

Na correção desta questão salientou-se o comportamento da $\mathrm{t.m.v.}$ quer à direita quer à esquerda da abcissa 1. Os alunos, na sua maioria, responderam corretamente a esta questão, utilizando exclusivamente a representação numérica. A maioria dos alunos não apresentou os cálculos da $\mathrm{t.m.v.}$ para cada um dos intervalos como ilustra a resposta do aluno A13. Os restantes apresentaram os cálculos como é exemplo a resposta do aluno A5, apesar da sua falta de rigor, em particular, nas casas decimais.

3.

Intervalo	t.m.v
[1;1,5]	25
[1;1,1]	21
[1;1,01]	20,1
[1;1,001]	20,01

Intervalo	t.m.v
[0,5;1]	15
[0,9;1]	19
[0,99;1]	19,9
[0,999;1]	19,99

Figura 37. Resposta usando a representação numérica do aluno A13.

3→

$$t.m.v._{[1;1,5]} = \frac{f(1,5)-f(1)}{1,5-1} = \frac{22,5-10}{0,5} = 25$$

$$t.m.v._{[1;1,1]} = \frac{f(1,1)-f(1)}{1,1-1} = \frac{12,1-10}{1,1-1} = 21$$

$$t.m.v._{[1;1,01]} = \frac{f(1,01)-f(1)}{1,01-1} = \frac{10,201-10}{0,01} = 20,1$$

$$t.m.v._{[1,0;1,001]} = \frac{f(1,001)-f(1)}{1,001-1} = \frac{10,020-10}{0,001} = 20$$

$$t.m.v._{[0,5,1]} = \frac{f(1)-f(0,5)}{1-0,5} = \frac{10-2,5}{1-0,5} = 15$$

$$t.m.v._{[0,9;1]} = \frac{f(1)-f(0,9)}{1-0,9} = \frac{10-8,1}{1-0,9} = 19$$

$$t.m.v._{[0,99;1]} = \frac{f(1)-f(0,99)}{1-0,99} = \frac{10-9,801}{1-0,99} = 19,9$$

$$t.m.v._{[0,999;1]} = \frac{f(1)-f(0,999)}{1-0,999} = \frac{10-9,9800}{1-0,999} = 20$$

Figura 38. Resposta usando a representação numérica do aluno A5.

Com base nos cálculos mostrados nas tabelas 1 e 2 e do diálogo com os alunos, eles concluíram que o valor se aproxima de 20, como ilustra o diálogo seguinte:

Professor: O que é verificaram quando calcularam a taxa média de variação da tabela 1?
Aluno: Que para valores cada vez mais pequenos a função tende para 20.
Professor: E porque é que está acontecer isso?
Aluno: Porque o valor se aproxima de um e assim a variação fica cada vez mais pequena.

A questão 3.1.4 serviu para estabelecer uma ligação com os valores obtidos na questão 3.1.3.

4. Seja h>0 um acréscimo no intervalo [1; 1 + h], à semelhança do efetuado na tabela 1, com h a tender para zero. Calcule a taxa média de variação do intervalo [1; 1 + h]. Conjeture para que valor tende a $t.m.v._{[1,1+h]}$ quando h tende para zero.

Figura 39. Questão 4 da tarefa 3.1

Nesta questão era pedido aos alunos que calculassem a taxa média de variação do intervalo [1; 1+h]. Os alunos utilizaram a representação algébrica apesar de evidenciarem ainda falta de rigor na manipulação algébrica. Alguns alunos não manifestaram dificuldades em responder à questão, como exemplifica a resposta do aluno A5 (Figura 40), embora não apresente em todas as expressões a referência ao limite:

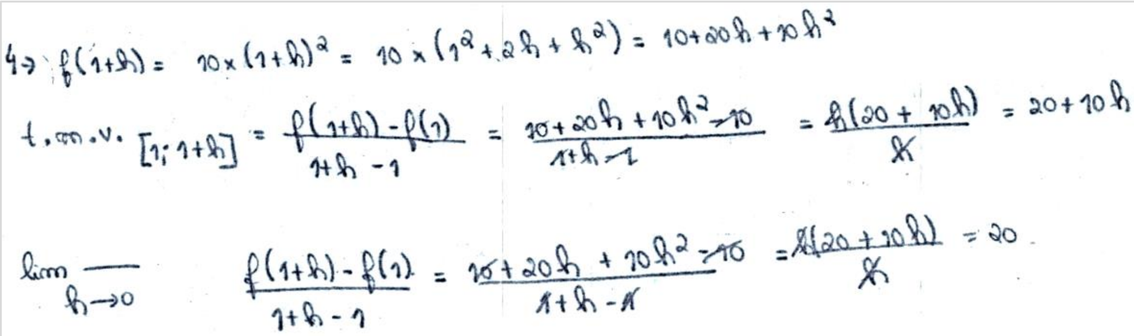


Figura 40. Resposta usando a representação algébrica do aluno A5.

Já outros alunos revelam falta de rigor e dificuldade na manipulação de expressões algébricas, como ilustra a resposta do aluno A12 (Figura 41):

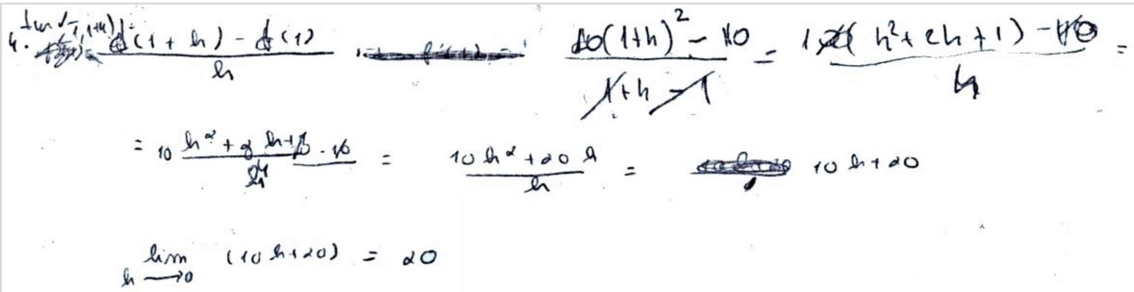


Figura 41. Resposta usando a representação algébrica do aluno A12.

Após a determinação no quadro da expressão algébrica da $\mathrm{t.m.v.}_{[1,1+\mathrm{h}]}$, os alunos foram questionados se existe e qual a relação entre valor 20, obtido na questão anterior, e o valor da $\mathrm{t.m.v.}_{[1,1+\mathrm{h}]}$. Com esta questão pretendia que os alunos estabelecessem a conexão entre a representação tabular e a representação algébrica. Nesta conexão, os alunos tiveram mais dificuldades, provavelmente influenciadas pelo nível de conhecimento dos alunos, como se pode verificar no seguinte diálogo.

Professor: Analisando a tabela 1 e 2 já concluíram que o valor da $\mathrm{t.m.v.}$ está a tender para...
Alunos 20
Professor: Depois calcularam a taxa média de variação para o intervalo [1;1+h]...
Alunos: $10h + 20$
Professor: Então digam-me o que é o h na tabela 1? *(não responderam)*
Professor: Existe alguma relação entre os valores desta tabela e a taxa média de variação do intervalo [1; 1 + h]? *(não responderam)*

Professor: Como posso escrever o intervalo [1; 1,1] da forma [1; 1 + h]?
A5: Fica [1;1+0,1]
Professor: Todos concordam?
Alunos: Sim.
Professor: Então o que é o 0,1?
Alunos: o h.
Professor: Então na tabela 1 estamos a fazer variar o h com que valores?
A7: 0,1; 0,01 e 0,001
Professor: Muito bem. Então, no vosso entender, o que é que acontece à $\mathrm{t.m.v.}$ se h tender para 0? (demoraram a responder)
Alunos Vai-se aproximar de 20.
Professor: Todos estão de acordo com esta conclusão?
Alunos: Sim
Professor: Então como podemos escrever o valor da taxa média de variação da tabela 1 usando o h?
A7: 20 + h
Professor: Então como podemos escrever a taxa média de variação da tabela 2 usando o h?
A7: 20 – h
Professor: Digam-me então como posso escrever o valor para que tende a $t.m.v._{[1,1+h]}$?
A7: É o limite do h a tender para 0.
Professor (Escreveu no quadro) $\lim_{h\to 0} t.m.v._{[1,1+h]} = \lim_{h\to 0}(10h+2) = 20.$

Como síntese deste diálogo, foi salientado que $\lim_{h\to 0} t.m.v._{[1,1+h]}$ se trata de uma aproximação de 1 por valores próximos da sua vizinhança e que, neste caso, a análise é feita localmente e não num intervalo.

$$t.m.v._{[1,1+h]} = \frac{d(1+h)-d(1)}{(1+h)-1} = \frac{10h^2+20h+10-10}{h} = \frac{10h^2+20h}{h} = \frac{h(10h+20)}{h}$$
$$= 10h + 20$$

A $t.m.v._{[1,1+h]}$ tende para 20 quando h tende para zero.

A questão 3.1.5 tinha como objetivo confrontar os alunos com os conhecimentos que possuíam em obter um valor para a velocidade no instante 1s, visto que lhes falta um dos extremos do intervalo para a determinação da taxa média de variação.

5. Faça uma estimativa da velocidade da bola no instante $1s$. Justifique.

Figura 42. Questão 5 da tarefa 3.1.

Pelas produções dos alunos verifica-se que não conseguiram chegar a nenhuma conclusão correta e que utilizaram apenas a representação algébrica. As respostas seguintes são idênticas às de todos os alunos, apesar de existirem algumas variantes como se pode verificar nas duas respostas seguintes.

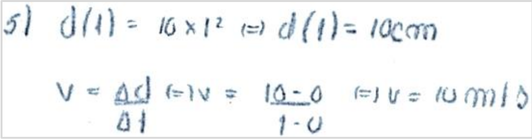


Figura 43. Resposta errada para a questão 3.1.5.

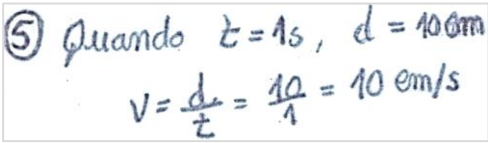


Figura 44. Resposta errada para a questão 3.1.5.

Para orientar os alunos na apreensão do novo conceito, questionei-os na resolução da questão no quadro. A discussão começou por estabelecer uma ligação com as questões anteriores e esperei que os alunos entendessem que a velocidade num determinado instante teria de ser calculada através de um conceito que advém da taxa média de variação. Nesse momento foi elaborada, com a participação dos alunos, a definição da taxa de variação:

Professor: Agora reparem. Na questão 5 diz assim: faça uma estimativa da velocidade da bola no instante $1s$. O que foi que responderam?

Aluno: 10 m/s

Aluno 10 cm/s

Professor: A distância é dada em que unidade de medida? Verifiquem o enunciado da tarefa.

Alunos: 10 cm/s

Professor: Foi 10 cm/s que responderam? Porque é que responderam 10 cm/s?

Aluno: Porque a distância para $1s$ é 10.

Professor: Não estão a responder à questão. Quando respondem 10 cm/s estão a dar a variação da distância percorrida. O que se pretende é a velocidade no instante $1s$. O que estou a pedir é a velocidade instantânea. Lembram-se da Física? (continuaram sem responder)

Professor: A vossa dificuldade, agora, é estarem a pensar no intervalo da taxa média de variação.

Aluno: Sim. Mas se ele tinha percorrido 10 cm em $1s$ a velocidade é 10 cm/s!

Professor: Não. A velocidade é a variação da distância com o tempo.

Aluno: Mas então podemos obter a velocidade através da taxa média de variação.

Professor: Então calculem a velocidade no instante $1s$? Qual é o valor da taxa média de variação? Como calculo?

Aluno: $t.m.v._{[0,1]}$

Professor: Mas não quero a velocidade entre 0 e 1. Quero a velocidade no instante $1s$. Analisando a tabela 1 e 2 podemos usar a mesma estratégia e obter uma estimativa do valor da velocidade no instante $1s$?

Aluno: Sim.

Professor: E qual é essa estratégia? Eu parto de um acréscimo e vou-me aproximando do instante 1s e num valor cada vez mais pequeno eu vou ter uma estimativa do comportamento no instante $1s$. O que podemos então utilizar para obter esta estimativa?

Aluno: $\lim_{h \to 0} t.m.v._{[1,1+h]}$

Professor: E este resultado tem um nome?

Aluno: Derivada!

Professor: Certo. Mas também se pode chamar taxa de variação. Então como posso escrever este novo conceito? Ora ajudem-me

Na questão 3.1.6 pedia a equação de reta de dois pontos e a representação da reta em conjunto com a representação do gráfico da função d que será aproveitada para representar a a reta secante ao gráfico da função que serviria para realizar a questão seguinte (3.1.7).

6. Indique a equação de reta definida pelos pontos $(1, D(1))\ e\ (2, D(2))$ e represente a reta em conjunto com a representação do gráfico da função d.

Figura 45. Questão 6 da tarefa 3.1.

Na questão 3.1.6 os alunos conseguiram obter a equação da reta pedida utilizando os novos conhecimentos, neste caso particular a taxa média de variação, e relacioná-la com o declive, como mostra a seguinte resposta:

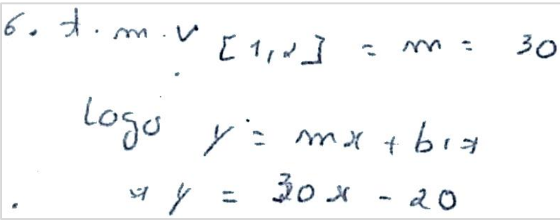


Figura 46. Resposta correta para a questão 3.1.6 do aluno A12.

Relativamente à segunda parte da questão 3.1.6 que pedia uma conversão da representação algébrica na gráfica, os alunos tiveram muitas dificuldades. Apenas dois alunos responderam à questão, mas de forma incompleta. Os alunos não desenharam o ponto de interseção (2, d(2)) entre a reta e o gráfico da função, como mostra a seguinte resposta de um desses alunos.

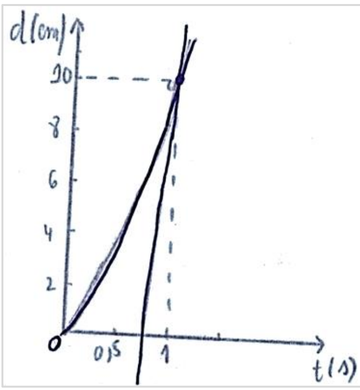


Figura 47. Resposta à questão 3.1.6 incompleta da representação gráfica do aluno A2.

Na resolução desta questão no quadro foi aproveitado para representar a reta secante na calculadora gráfica e projetá-la no quadro que serviria para realizar a questão seguinte.

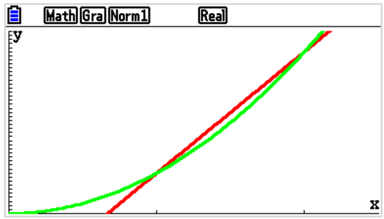


Figura 48. Representação gráfica da questão 3.1.6 ([0; 0.25] x [0; 45]).

Na questão 3.1.7 os alunos não tiveram dificuldade em obter as equações de reta dos intervalos considerados.

7. Preencha a seguinte tabela e represente as equações das retas que passam nos pontos que têm como abcissas os extremos dos intervalos da tabela 1.

Figura 49. Questão 7 da tarefa 3.1.

A turma foi questionada sobre a estimativa da equação de reta se diminuíssemos progressivamente a amplitude do intervalo. A turma foi questionada sobre a relação que pode existir entre a reta obtida e a derivada da função no ponto (1, d(1)). Por fim, foi perguntado à turma que reta traçamos no ponto (1, d(1)). Os alunos responderam reta tangente. Assim, em conjunto com os alunos, foi definido a interpretação geométrica da taxa de variação de uma função quando $x = x_0$.

Tendo em consideração os valores obtidos na tabela 1 apresentada na tarefa, foram determinadas as equações de retas nos pontos que têm como abcissas os extremos dos intervalos considerados:

Intervalo	Equação de reta
[1; 1,5]	$y = 25x - 15$
[1; 1,1]	$y = 21x - 11$
[1; 1,01]	$y = 20{,}1x - 10{,}1$
[1; 1,001]	$y = 20{,}01x - 10{,}01$
...	...
[1; 1+h]	$y = (10h + 20)x + (-10 - 10h)$

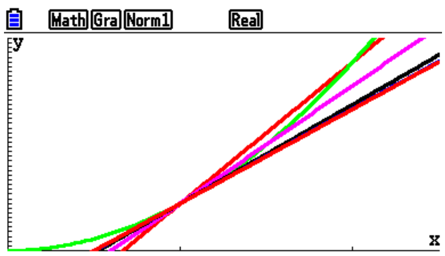


Figura 50. A reta obtida é a reta tangente no ponto de abcissa 1.

Sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos de uma função

A estratégia adotada para que os alunos relacionassem o sinal da função derivada com a monotonia da função e com a possível existência de extremos relativos teve como suporte a representação gráfica da função e da respetiva função derivada em simultâneo. No início da aula foi apresentado aos alunos uma animação feita em *Excel* que evidenciava a construção do gráfico da função derivada a partir do gráfico da função dada. Como se observa na Figura 51, os valores das sucessivas tangentes ao gráfico da função em todos os pontos do seu domínio em que é derivável traduzem o gráfico da correspondente função derivada.

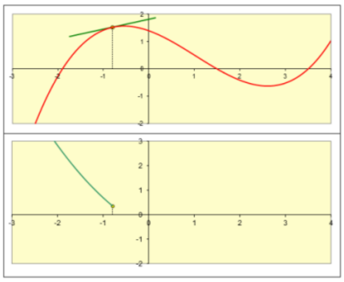


Figura 51. Animação em *Excel* da construção da função derivada da aula 8.

Após a exposição da animação em Excel os alunos resolveram a *Tarefa 8.1.* A tarefa (Anexo 10) propunha uma série de questões, de forma gradual, promovendo um raciocínio do particular para o geral, através das representações algébrica e gráfica. Os conceitos foram apresentados inicialmente através da representação gráfica e depois foi introduzida a representação algébrica em paralelo para estabelecer relações entre elas (Dreyfus, 2002).

Na questão 8.1.2.1 foi solicitado aos alunos a função derivada da função dada na tarefa.

2. Admita que a expressão que define a função representada graficamente é:

$$T(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 3; t \in \left[0, \frac{9}{2}\right]$$

2.1. Determine $T'(t)$.

Figura 52. Questão 2.1 da tarefa 8.1.

Dois alunos utilizaram a definição de derivada de uma função para obter a função derivada, os restantes alunos utilizaram as regras de derivação. Todos responderam através do tratamento algébrico.

A questão 8.1.2.2 pedia aos alunos o estudo do sinal da função derivada da função T.

2.2. Estude analiticamente o sinal da função $T'(t)$ e compare as respostas dadas em **1.**.

Figura 53. Questão 2.2 da tarefa 8.1.

Os alunos, na sua maioria, conseguiram fazer esse estudo e utilizaram mais do que uma representação, como ilustra a resposta do aluno A6:

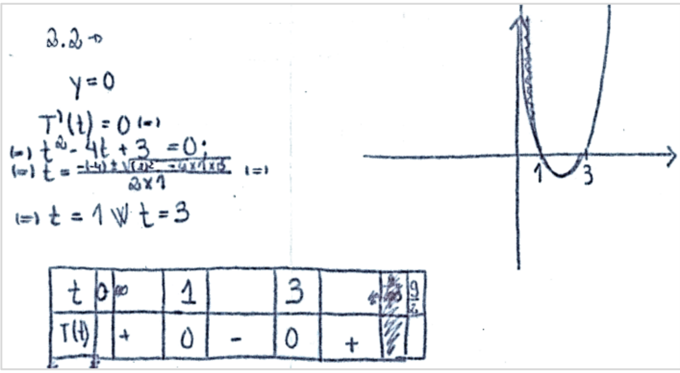


Figura 54. Resposta à questão 8.1.2.2 usando múltiplas representações do aluno A6.

O aluno recorre à representação gráfica como auxiliar para identificar os intervalos onde a função tem valores positivos e negativos. Utilizou a representação algébrica para derivar a função através das regras de derivação e para obter os zeros da função derivada. Por fim, construiu a tabela para o ajudar a relacionar os intervalos de monotonia e assim obter o máximo relativo e o mínimo relativo da função.

Na questão 8.1.4 pretendia-se que os alunos analisassem a que hora a temperatura foi máxima no intervalo sabendo que às 3 horas a temperatura atingiu um mínimo no intervalo.

4. Sabendo que às 3 horas a temperatura atingiu um mínimo no intervalo dado indique a que hora a temperatura foi máxima nesse intervalo? Justifique o seu raciocínio.

Figura 55. Questão 4 da tarefa 8.1.

No fim desta questão foi definido, em conjunto com os alunos, a relação existente entre a monotonia de uma função e o sinal da sua derivada e entre os extremos de uma função e os zeros da sua derivada. Poucos alunos responderam a esta questão e os que responderam e a justificaram utilizaram a representação gráfica ou numérica.

Tabela 10. Representações utilizadas a questão 8.1.4 (n=20).

Tipo de representação	Respostas
Gráfica	7
Numérica	2
Não responderam/justificaram	10

Como exemplo das respostas dos dois alunos que recorreram à representação numérica é a resposta dada pelo aluno A5, que indicia ter concluído que foi na primeira hora que a temperatura foi máxima através da interpretação do gráfico, sem recorrer à derivada da função.

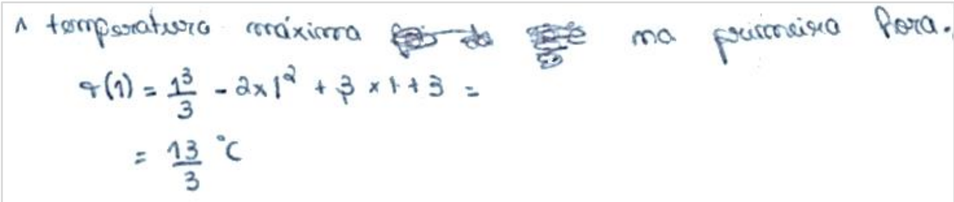


Figura 56. Resposta à questão 8.1.4 usando representação numérica do aluno A5.

Outros alunos, como são o caso dos alunos A8 e A7, recorreram à sobreposição do gráfico da função e da função derivada para assinalar o ponto onde a temperatura é máxima.

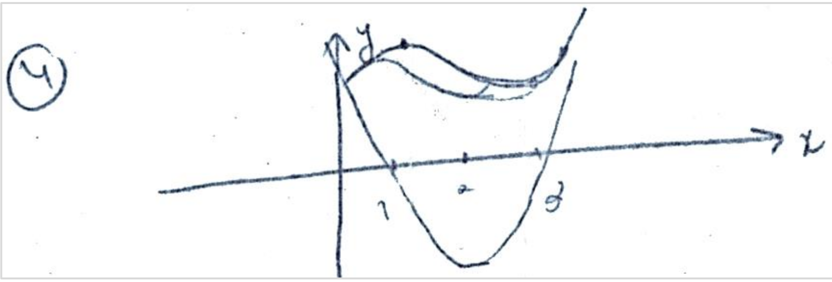


Figura 57. Resposta à questão 8.1.4 usando representação gráfica do aluno A8.

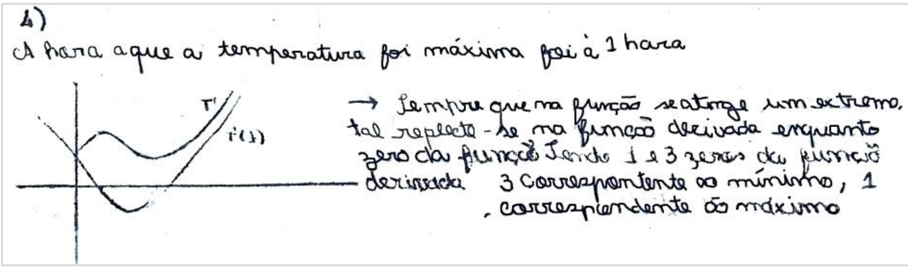


Figura 58. Resposta à questão 8.1.4 usando representação gráfica do aluno A7.

Este tipo de relações entre as representações gráficas de funções diferentes, relacionando as suas características, faz com que a visualização seja essencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico levando os alunos a aproximar o conceito imagem do seu conceito definição de função (Vinner, 1983).

Os dez alunos que não responderam/justificaram revelam que tiveram dificuldades em estabelecer conexões entre os conceitos através da representação gráfica, neste caso particular entre a função e a sua função derivada, como também foi observado por Ferrini-Mundy e Lauten (1994).

No fim da tarefa 8.1 foi proposto um conjunto de exercícios para permitir analisar com os alunos os casos relacionados com a existência de extremos de uma função e abordar, novamente, a noção de tangência. Pretendia que os alunos fossem confrontados com exemplos que ajudam a identificar a relação entre o sinal da derivada e a existência de extremos: Num máximo ou num mínimo de uma função será a derivada obrigatoriamente nula? Se uma função tem derivada nula num determinado ponto, isso quer dizer que tem um extremo nesse ponto? Estas questões não condicionam os alunos relativamente ao tipo de representações a usar. As respostas dos alunos revelaram o recurso a múltiplas representações e a processos de tratamento e conversão.

1. Estuda a existência de extremos da função f. Justifique. a) $f(x) = -x^3 + 12x + 5$

Figura 59. Questão a) do exercício 8.2.

Na questão 8.2.1.a os alunos utilizaram mais do que uma representação, como ilustra a resolução do aluno A8, com recurso à calculadora gráfica para obter as representações gráficas:

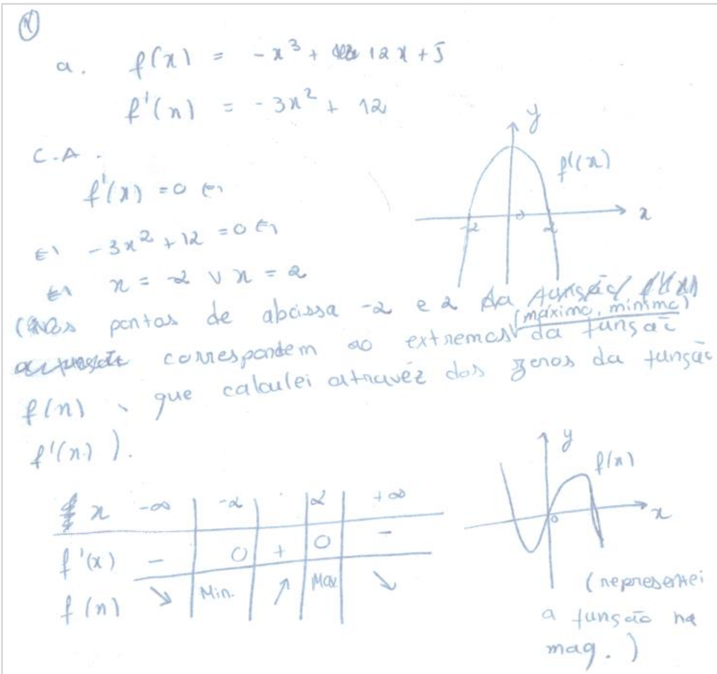


Figura 60. Resposta à questão 8.2.1.a usando múltiplas representações do aluno A8.

O aluno recorre à representação gráfica como auxiliar para identificar os intervalos onde a função tem valores positivos e negativos e para representar a função e a função derivada. Utilizou a representação algébrica para derivar a função através das regras de derivação e para obter os zeros da função derivada. Por fim, construiu a tabela para o ajudar a relacionar a função e função derivada e assim obter o máximo relativo e o mínimo relativo da função. O aluno utilizou a calculadora gráfica para obter a representação da função que pode ter sido utilizada para a confirmação dos extremos relativos obtidos através da representação tabelar. Na apresentação dos resultados o aluno não é rigoroso esquecendo-se de referir que são extremos relativos e não apenas extremos.

Outros alunos, como por exemplo o aluno A7, não recorreram à representação gráfica para os ajudar na construção da tabela.

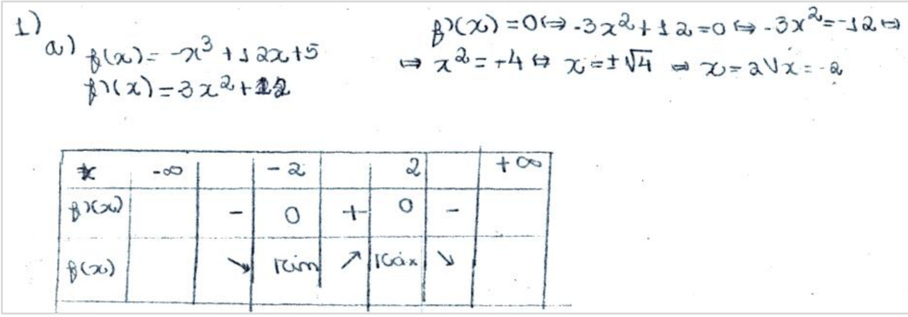


Figura 61. Resposta à questão 8.2.1.a usando múltiplas representações do aluno A7.

Os alunos identificaram o intervalo onde a função é decrescente e o intervalo onde a função é crescente.

Na questão 8.2.1.b foi solicitado aos alunos o estuda da existência de extremos da função $f(x) = |x + 1|$. Pretendia-se analisar que a existência de um máximo ou mínimo de uma função não implica que a derivada seja obrigatoriamente nula ou que exista.

1. Estuda a existência de extremos da função f. Justifique. b) $f(x) = |x + 1|$

Figura 62. Questão b) da exercício 8.2.

Nesta questão, nenhum aluno justificou a sua resposta sobre a existência de extremos da função, como se constata nas respostas dos alunos A2 e A6. O aluno A6 apresenta uma tentativa de resolução da questão através da representação algébrica.

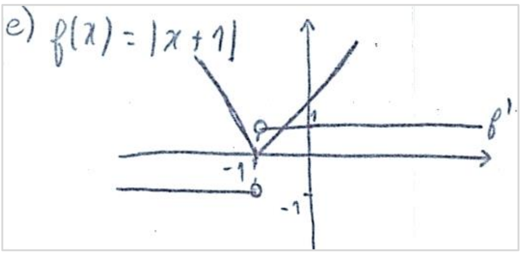


Figura 63. Resposta à questão 8.2.2 do aluno A2.

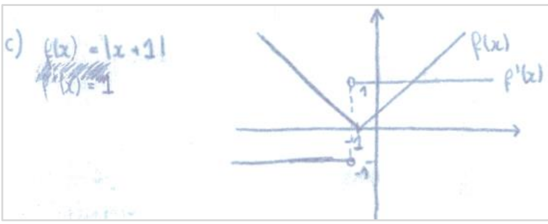


Figura 64. Resposta à questão 8.2.2 do aluno A6.

A maioria dos alunos tentou responder primeiro com a representação algébrica, mas como não conseguiram usaram a representação gráfica da função e da sua derivada com a ajuda da calculadora gráfica.

Síntese da utilização das representações

A tabela seguinte indica as representações predominantes que os alunos recorreram na resolução de cada uma das tarefas. A tabela classifica como questões investigativas as quais os alunos podiam escolher as representações para produzir a resposta sem que nada lhes fosse imposto, segundo Friedlander e Tabach (2001).

Tabela 11. Distribuição das representações utilizadas nas tarefas por questão.

Tarefas	Questões	Representação predominante	Questão investigativa
2.1	1	Numérica	Não
	2	Numérica	Não
	3	Numérica	Não
	4	Numérica	Não
	5	Numérica	Não
	6	Numérica	Não
	7	Numérica	Não
	8	Numérica	Sim
	9	Gráfica	Não
	10	Gráfica	Sim
2.2	1	Numérica	Não
	2	Numérica	Não
	3	Numérica	Não
	4	Numérica	Não
	5	Numérica	Não
	6	Algébrica	Sim
3.1	1	Gráfica	Não
	2	Numérica	Não
	3	Numérica	Não
	4	Algébrica	Sim
	5	Algébrica	Sim
	6	Algébrica e Gráfica	Não
	7	Algébrica e Gráfica	Não
8.1	1	Numérica	Não
	2.1	Algébrica	Não
	2.2	Tabular e Gráfica	Sim
	4	Gráfica	Sim
8.2	1.a	Tabular e Gráfica	Sim
	1.b	Gráfica	Sim

Para ser mais fácil a leitura da tabela anterior cruzei o tipo de representações com o tipo de questões obtendo a seguinte tabela.

Tabela 12. Resumo das representações utilizadas nas tarefas por tipo de questão.

Representações	**Questão Investigativa**		**Total**
Numérica	Sim	1	16
	Não	15	
Gráfica	Sim	3	5
	Não	2	
Algébrica	Sim	3	4
	Não	1	
Algébrica e Gráfica	Sim	0	2
	Não	2	
Tabular e Gráfica	Sim	2	2
	Não	0	

Os alunos utilizaram os diferentes modos de representação no conjunto das tarefas propostas. A representação gráfica e a algébrica foram as representações que mais recorreram por sua iniciativa, sendo a representação numérica a segunda mais utilizada e surgindo em último lugar a representação tabular. A utilização de mais do que uma representação, por iniciativa dos alunos, surge apenas nas questões de investigação (Friedlander & Tabach, 2001; Kaput, 1992).

3.2. Avaliação da estratégia delineada

No final de algumas aulas coloquei algumas questões aos alunos para aferir a sua perceção sobre a utilização das diferentes representações nas atividades de aprendizagem de tópicos de derivada de uma função. No fim da intervenção pedagógica apliquei um questionário para recolher informação sobre as estratégias implementadas.

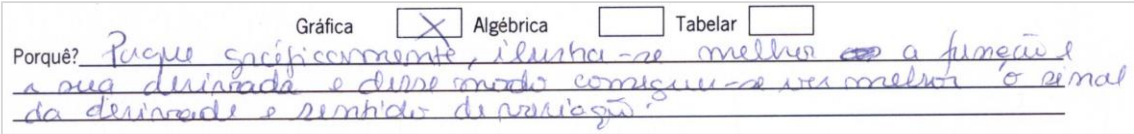
Questões de final de aula. Nas questões de aula pedi aos alunos (n=19) que assinalassem a representação que melhor ilustrava e que lhes permitiu compreender o conceito introduzido na aula respetiva (Tabela 13).

Tabela 13. Distribuição das respostas dos alunos aos questionários de aula sobre as representações usadas.

Tipo de representação	% de respostas
Gráfica	58%
Algébrica	24%
Tabular	18%

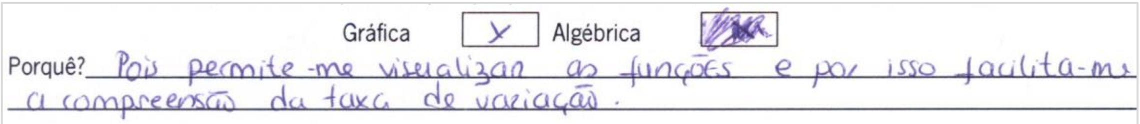
Para a maioria dos alunos, a representação gráfica (58%) é a que permite uma maior compreensão dos tópicos de derivada de uma função, seguida da representação algébrica (24%). Sobre a representação tabular, apenas 18% expressam nas suas respostas o que foi abordado nessas aulas, como, por exemplo, foi o caso do estudo do sinal da derivada e sentido de variação através dos dados provenientes de tabelas.

Os alunos que optaram pela representação gráfica justificaram, na sua maioria, com a possibilidade de "visualizarem os conceitos", como revelam as seguintes respostas.


Gráfica X Algébrica Tabelar

Porquê? Porque graficamente, ilustra-se melhor a função e a sua derivada e desse modo consegue-se ver melhor o sinal da derivada e sentido de variação.

Figura 65. Resposta à questão 1 do questionário de aula oito número 10.


Gráfica X Algébrica

Porquê? Pois permite-me visualizar as funções e por isso facilita-me a compreensão da taxa de variação.

Figura 66. Resposta à questão 1 do questionário de aula três número 2.

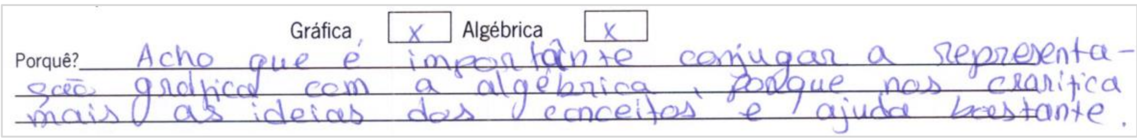
Um dos alunos justificou a sua opção argumentando que a natureza do conceito, neste caso particular a taxa de variação, é essencialmente gráfico:


Gráfica X Algébrica

Porquê? Porque acho que a taxa de variação é algo essencialmente gráfico.

Figura 67. Resposta à questão 1 do questionário de aula três número 1.

Sobre a representação algébrica, a maioria dos alunos referiu não gostar de utilizar a calculadora gráfica ou sentiu dificuldades na sua utilização. Nas respostas dadas, houve alguns alunos que optaram por selecionar as duas representações, gráfica e algébrica, apesar de terem de optar por uma das representações, como ilustra a resposta seguinte:


Gráfica X Algébrica X

Porquê? Acho que é importante conjugar a representação gráfica com a algébrica, porque nos clarifica mais as ideias dos conceitos e ajuda bastante.

Figura 68. Resposta à questão 2 do questionário de aula três número 1.

Relativamente ao contributo da conexão entre as duas representações, gráfica e algébrica, na aprendizagem do conceito de *taxa de variação de uma função num ponto*, a maioria dos alunos valoriza a utilização das duas representações na aprendizagem deste conceito. Apenas um aluno referiu que "não teve grande benefício, pois não utilizei a representação gráfica”. À mesma questão, um aluno refere que a representação gráfica permite “comparar e verificar os resultados algébricos”.

Sobre o benefício da conexão entre as duas representações, gráfica e algébrica na aprendizagem das *relações do sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos* de uma função, os alunos tendem a evidenciar, como exemplifica a seguinte resposta, a complementaridade entre as duas representações.

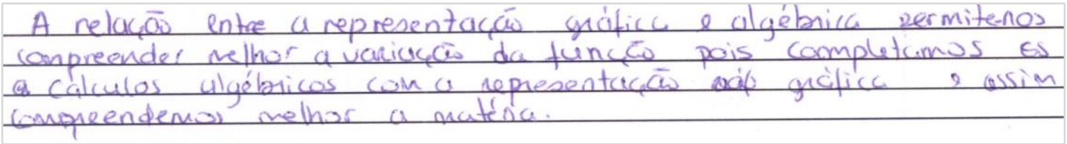

A relação entre a representação gráfica e algébrica permite-nos compreender melhor a variação da função pois completamos ~~os~~ ~~a~~ cálculos algébricos com a representação ~~ao~~ gráfica e assim compreendemos melhor a matéria.

Figura 69. Resposta à questão 3 do questionário de aula oito número 3.

Os alunos nas respostas dadas no final de algumas intervenções valorizam representação gráfica e a algébrica, havendo um dilema entre essas duas representações no que diz respeito ao seu valor enquanto método válido para apresentar os resultados.

Questionário. As respostas dadas pelos alunos no questionário sobre a interpretação simultânea da informação gráfica, algébrica e tabular de tópicos da derivada de uma função confirmam o que os alunos indiciam nas questões colocadas no final de algumas aulas, como mostra a tabela seguinte:

Tabela 14. Distribuição da importância das representações no estudo da derivada de uma função.

Afirmação	DT/D	I	C/CT	$\bar{X}$
A representação gráfica ajudou-me a compreender as definições e as propriedades dos conceitos estudados no tema derivada de funções.	0%	11,8%	88,2%	4,2
A representação algébrica ajudou-me a estabelecer as definições e as propriedades dos conceitos estudados no tema derivada de funções	0%	11,8%	88,2%	4,0
A representação numérica ajudou-me a estabelecer as definições e as propriedades dos conceitos estudados no tema derivada de funções.	0%	11,8%	88,2%	3,9
A interpretação simultânea da informação gráfica, algébrica e numérica do conceito de derivada de uma função ajudou na sua compreensão.	0%	0%	100%	4,4

DT(1): Discordo Totalmente; D(2): Discordo; I(3): Indiferente; C(4): Concordo; CT(5): Concordo Totalmente

A maioria dos alunos (88,2%) salienta a importância das três representações para estabelecer as definições e as propriedades dos conceitos estudados. Todos eles entendem que a interpretação simultânea da informação gráfica, algébrica e numérica do conceito de derivada de uma função os ajudou na sua compreensão.

Sobre a utilização da representação gráfica nas tarefas relativas à derivada de uma função, na sua maioria (64,7%), os alunos tiveram a necessidade de representar graficamente a função e a sua derivada, o que pode evidenciar a importância que os alunos relevam na necessidade de representar graficamente a função e a sua derivada para a resolução das tarefas.

Tabela 15. Tipo de respostas dos alunos sobre a utilização da representação gráfica no estudo da derivada de uma função.

Afirmação	DT/D	I	C/CT	$\bar{X}$
Na resolução das tarefas sobre funções derivadas senti a necessidade de representar graficamente a função	17,6%	29,4%	53,0%	3,4
Na resolução das tarefas sobre funções derivadas senti a necessidade de representar graficamente a função derivada	17,6%	23,5%	58,9%	3,5
Na resolução das tarefas sobre funções derivadas senti a necessidade de representar graficamente a função e a sua derivada	5,9%	29,4%	64,7%	3,6

DT(1): Discordo Totalmente; D(2): Discordo; I(3): Indiferente; C(4): Concordo; CT(5): Concordo Totalmente

Sobre as vantagens e desvantagens da utilização das diferentes representações gráfica e algébrica, os alunos responderam a três questões abertas onde lhes foram pedidas as vantagens e desvantagens da representação gráfica e algébrica na aprendizagem do tema derivada de uma função.

Vantagens da utilização das diferentes representações. Relativamente às vantagens, um número considerável de alunos destaca a compreensão (40,9%) e a visualização (31,8%).

Tabela 16. Distribuição das respostas dos alunos sobre as vantagens da representação gráfica no estudo da derivada de uma função.

Categoria	% de respostas
Compreender	40,9
Visualizar	31,8
Comparar a função com a sua função derivada	9,1
Confirmar resultados	13,6
É mais rigoroso	4,6

Os alunos referem também que uma das vantagens é permitir a confirmação de resultados obtidos através de outras representações (13,6%). São poucos os alunos que referem como vantagem a comparação da função com a sua função derivada (9,1%).

Sobre as vantagens da representação algébrica no estudo da derivada de uma função, a maioria dos alunos (52,9%) coloca como vantagem da utilização da representação algébrica na compreensão dos conceitos e logo a seguir a mais eficaz no cálculo da derivada num valor do domínio da função (23,5%). Esta categoria deve estar relaciona com a utilização das regras de derivação como veremos quando analisarmos a respostas à questão 18.

Tabela 17. Distribuição das respostas dos alunos sobre as vantagens da representação algébrica no estudo da derivada de uma função.

Categoria	% de respostas
Compreender	52,9
Mais eficaz no cálculo da derivada num valor do domínio da função	23,5
Complementar a informação da representação gráfica	11,8
Exigir mais esforço que a representação gráfica	5,9
Permitir a conexão com a representação gráfica	5,9

Os alunos referem também que uma das vantagens é permitir complementar a informação da representação gráfica (11,8%). São poucos os alunos que referem como vantagem a conexão com a representação gráfica (5,9%).

Desvantagens da utilização das diferentes representações. Quanto às desvantagens da representação gráfica da derivada de uma função, a maior parte dos alunos destaca a ausência de compreensão dos conceitos (55,6%).

Tabela 18. Distribuição das respostas dos alunos sobre as desvantagens da representação gráfica no estudo da derivada de uma função.

Categoria	% de respostas
Implica saber utilizar a calculadora	16,6
Isolada não é suficiente para a aprendizagem	5,6
Permitir a resolução das tarefas sem compreender os conceitos e sem utilizar a representação algébrica	55,6
Interpretação pode estar errada	11,1
Não tem desvantagens	11,1

Os alunos parecem não dissociar a representação gráfica da utilização da calculadora gráfica. Por exemplo, um aluno considera que "a máquina dá-nos logo a resolução dos exercícios deste modo podemos resolver apenas com a máquina e esquecer a parte analítica".

Já outro aluno considera que com a calculadora gráfica "habituamo-nos a analisar graficamente e podemos não aprender os métodos analíticos que são igualmente importantes". Tais respostas revelam a desvalorização da representação gráfica na resolução das tarefas e a obtenção dos resultados através da calculadora (Dreyfus, 2002; Vinner, 1989).

Os alunos referem também que uma das desvantagens é ter que saber utilizar a calculadora (16,6%) e que têm dificuldades na sua utilização e em confirmar as interpretações feitas através da representação gráfica (11,1%).

Relativamente a desvantagens da representação algébrica no estudo da derivada de uma função, a maioria dos alunos (50,0%) invoca a complexidade em trabalhar com expressões algébricas, o que os leva a cometer erros.

Tabela 19. Distribuição das respostas dos alunos sobre as desvantagens da representação algébrica no estudo da derivada de uma função.

Categoria	% de respostas
Maior probabilidade de erro	50,0
Implica maior gasto de tempo na resolução	12,5
Mais difícil de compreender	18,8
Não permite entender o uso prático do tema	6,2
Revela menos informação	12,5

A seguinte desvantagem que apontam são as dificuldades que têm na compreensão dos conceitos (18,8%). Os alunos referem também que uma das desvantagens é revelar menos informação (12,5%) e implicar mais gasto de tempo na resolução (12,5%).

No questionário foi perguntado aos alunos se seria possível ensinar a derivada de uma função sem utilizar a representação gráfica. Para a maioria dos alunos, seria possível mas seria uma tarefa mais difícil de concretizar.

Tabela 20. Distribuição das respostas dos alunos sobre a representação gráfica e o processo de ensino e aprendizagem da derivada de uma função.

Categoria	% de respostas
Sim	29,4
Sim mas seria mais difícil	53,0
Não	17,6

Os alunos destacam que seria possível (53%), mas com a ressalva de que seria mais difícil, que seria possível (29,4%) e que não seria possível (17,6%). Os alunos que responderam “Sim”, consideram que: “antigamente as pessoas também aprendiam a derivada e não tinham nenhuma calculadora”; “porque antes não havia representação gráfica”; “mas seria complicado pois não teríamos uma imagem precisa e exata das coisas”. Alguns destes alunos não conseguem dissociar o objeto matemático da sua representação (Duval, 2012), a representação gráfica da utilização da calculadora gráfica, o que pode estar relacionado com o tipo de tarefas experimentadas (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990).

Apesar de afirmarem que seria possível, não deixam de destacar a importância da representação gráfica para a compreensão da noção de derivada de uma função, como exemplificam as seguintes respostas: “Seria possível mas a representação gráfica ajuda a compreender a função e os cálculos analíticos”; “Seria possível, mas no entanto, difícil, uma vez que a derivada envolve um carácter gráfico fundamental para o seu melhor entendimento”; “Sim, mas seria complicado pois não teríamos uma imagem precisa e exata das coisas”. Estas respostas revelam a confusão dos alunos entre o objeto matemático e a sua representação. Além disso, alguns alunos, não dissociam a calculadora gráfica da representação gráfica como exemplifica a seguinte resposta: “Sim, porque antigamente aprendia-se a derivada de uma função e não havia máquina”.

Os alunos foram solicitados a descrever os passos que efetuavam para o cálculo da derivada num valor do domínio de uma função. O objetivo desta questão consistiu em identificar as representações e procedimentos que os alunos utilizam no cálculo da derivada num valor do domínio da função.

Na distribuição das representações utilizadas no cálculo da derivada num valor do domínio da função, a totalidade dos alunos descreve o cálculo através das regras de derivação, para, por exemplo, “obter a função, em seguida calcular a derivada da função e, por fim, obter a imagem do ponto na função derivada”. Alguns alunos tendem a optar por processos mecânicos, como exemplifica a seguinte resposta:

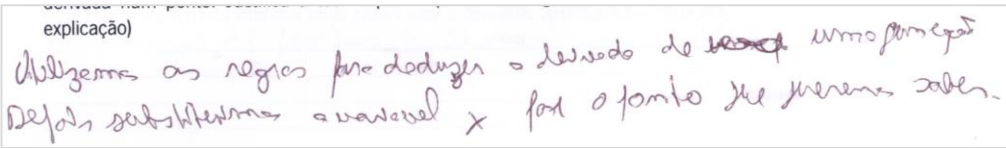

explicação)
Utilizamos as regras para deduzir a derivada de ~~[illegible]~~ uma função.
Depois substituímos a variável x pelo ponto que queremos saber.

Figura 70. Resposta à questão 18 do questionário final.

Foi pedido aos alunos que explicassem por escrito o que significa a derivada. Muitas das respostas foram incompletas:

Tabela 21. Distribuição das representações utilizadas na explicação do conceito da derivada de uma função pelos alunos.

Tipo de representação	% de respostas
Gráfica	63,6
Algébrica	18,2
Gráfica e Algébrica	18,2

A maioria dos alunos optou por argumentos gráficos (63,6%), algébricos (18,2%) e gráficos e algébricos (18,2%). Apenas 18,2% dos alunos utilizaram mais do que uma representação para definirem o conceito de derivada, contra 81,8% dos alunos que recorreram apenas a uma das representações, gráfica ou algébrica.

Sobre as estratégias implementadas e o tema estudado, os alunos concordam que gostaram de estudar o tema de derivada de uma função ($\bar{X} = 4{,}41$), as tarefas propostas sobre derivada de uma função lhes despertou o interesse pela matemática ($\bar{X} = 4$) e que o tema é importante para a resolução de problemas ($\bar{X} = 4{,}29$). Por sua vez, discordam de que o tema de derivada de uma função não é importante para a sua formação ($\bar{X} = 2$).

Tabela 22. Perceções dos alunos sobre as estratégias implementadas e tema estudado.

Afirmação	$\bar{X}$
A derivada de funções é um tema da matemática que gostei de estudar	4,41
As tarefas propostas sobre o tema derivada de uma função despertou o meu interesse pela matemática	4,00
O tema derivada de uma função não é importante para a minha formação	2,00
O tema derivada de uma função é importante para a resolução de problemas	4,29
No tema derivada de uma função tive menos dificuldades de aprendizagem do que noutros temas de matemática do 11.º ano	3,29
A utilização da calculadora gráfica favoreceu a minha compreensão sobre as relações entre uma função e a sua derivada	4,24

DT(1): Discordo Totalmente; D(2): Discordo; I(3): Indiferente; C(4): Concordo; CT(5): Concordo Totalmente

Relativamente a terem menos dificuldades noutros temas, os alunos referem ser indiferente o que indicia que as dificuldades persistem. Por fim, concordam que a utilização da calculadora gráfica favoreceu a compreensão da relação entre a função e a sua derivada ($\bar{X} = 4{,}24$).

Após a intervenção pedagógica, os alunos responderam a todas as questões do teste diagnóstico aplicado no início da intervenção para avaliar a evolução dos alunos sobre os tópicos relacionados com o estudo da derivada de uma função. A tabela seguinte apresenta o cruzamento dos dados da tabela de temas do teste diagnóstico aplicado no início da intervenção (TD1) com a sua aplicação no fim da intervenção (TD2).

Tabela 23. Respostas dos alunos nos dois momentos da aplicação do teste diagnóstico por tópicos.

Teste diagnóstico	TD1	TD2	TD1	TD2	TD1	TD2	TD1	TD2	n
Tópicos	%C		%PC		%I		%NR		
Declive	43	71	3	1	45	22	9	6	171
Tangente	43	71	0	25	48	1	9	3	209
Gráfico espaço-tempo	77	74	0	26	23	0	0	0	57
Função derivada	0	66	0	21	63	0	37	13	38

C: Correta; PC: Parcialmente correta; I: Incorreta; NR: Não responde

Comparando os dois momentos da aplicação do teste diagnóstico verifica-se que os alunos diminuíram as suas dificuldades sobre o conceito da reta tangente. Esta melhoria pode estar relacionada com o processo de aprendizagem do tema derivada de uma função que lhes permite compreender, de forma intuitiva, a tangente como um limite. Nos gráficos espaço-tempo, apesar de ter ocorrido uma variação negativa nas respostas corretas entre o primeiro e segundo momento da aplicação do teste diagnóstico, o número de respostas incorretas no segundo momento foi nulo. Relativamente à relação entre a representação gráfica de uma função e a representação gráfica da sua derivada, os alunos conseguiram reconhecer a relação entre uma representação e a outra.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo apresentam-se as principais conclusões deste estudo, tendo em conta as questões de investigação delineadas, o quadro teórico apresentado e as estratégias de ensino implementadas na intervenção pedagógica. De seguida, apresentam-se as limitações encontradas e as implicações deste estudo no ensino de derivadas com recurso a múltiplas representações e, por fim, algumas recomendações para trabalhos futuros.

4.1. Conclusões

Nesta secção apresentam-se e discutem-se os principais resultados obtidos com este estudo, segundo as três questões de investigação definidas, tendo em conta os dados que foram recolhidos e as referências teóricas consultadas.

4.1.1. De que forma utilizam os alunos as diferentes representações na aprendizagem da derivada de uma função?

A análise da intervenção pedagógica permitiu inferir a forma como os alunos desenvolveram a aprendizagem da derivada de uma função com recurso a múltiplas representações e compreender quais as representações utilizadas na resolução das tarefas propostas.

Nas produções dos alunos, resultantes das resoluções às tarefas propostas durante a intervenção, verificou-se que a maioria dos alunos consegue trabalhar com várias representações de um conceito. Os alunos, de um modo geral, revelaram capacidade para efetivar a conversão entre duas representações de um conceito mas sem a garantia de que mobilizam conjuntamente os significados do conceito em causa. Utilizaram, por vezes, as diferentes representações sem estabelecer relações entre elas, realizando apenas o seu tratamento. Mas fazem sem dificuldades a codificação da informação proveniente das diversas representações (Duval, 2012). Normalmente, utilizam apenas uma representação e são raros os momentos em que os alunos utilizam mais do que uma representação em simultâneo para resolver uma questão. Os alunos tendem a repetir modos de resolução sem grande reflexão 'evocando apenas o conceito imagem' colocando de parte o conceito definição o que condiciona a mobilização dos seus conhecimentos para novas situações (Vinner, 2002). Embora tenham revelado preferências por métodos visuais para a compreensão dos conceitos, não revelam preferência pela utilização da representação gráfica na resolução das tarefas. Parecem entender os conceitos de modo gráfico mas operacionalizá-los de modo algébrico.

A utilização de várias representações pelos alunos depende do tipo de questões que as tarefas contêm (Friedlander & Tabach, 2001; Kaput, 1992). O resultado que se destacou foi o predomínio das representações numéricas, que se ficou a dever a algumas questões incentivarem a utilização dessa representação. Os alunos tendem a considerar o incentivo dado pelo tipo de questões. O facto de estarem na fase inicial da aprendizagem do tema derivada de uma função pode justificar a preferência pela representação numérica.

Considerando apenas as questões de investigação (Friedlander & Tabach, 2001), as produções escritas, as observações de aula e as questões colocadas no final de algumas aulas apontam para o predomínio da representação gráfica, na análise e contextualização de questões de investigação, e da representação algébrica, na justificação e apresentação da resposta. A utilização de mais do que uma representação e as conexões entre representações ocorre com maior incidência, apesar de diminutas, nas questões de investigação.

As representações que os alunos mobilizam no tema derivada de uma função são diversas e dependem em parte do tópico abordado. O uso da representação numérica surge quando a questão é considerada pelos alunos como requerendo uma resposta isolada e não como uma questão do problema inicial (Friedlander & Tabach, 2001): quando é pedido o cálculo da taxa média de variação e a taxa de variação; quando é solicitado o preenchimento de tabelas; ou nas atividades de codificação que envolvam as representações tabular ou gráfica. A representação gráfica foi mais usada para dar resposta às questões que poderiam ser resolvidas através do estudo comparativo da função com a sua função derivada ou no estudo da monotonia da função e extremos relativos. A representação algébrica surgiu associada às questões que solicitavam a determinação da derivada de uma função num dado valor do seu domínio através da definição. A representação tabular foi utilizada pelos alunos no estudo da função em determinados valores do seu domínio, estando representados na tabela, e para estudar o sinal, a monotonia e os extremos relativos de uma função, e, em alguns casos, na conversão entre a representação algébrica e gráfica. Esta representação auxiliou na obtenção da expressão algébrica no estudo introdutório da taxa de variação, devido às relações entre as variáveis tabuladas (Brown & Mehilos, 2010).

Na sua maioria, os alunos utilizaram, relacionaram e tiraram conclusões sobre as tarefas propostas coordenando as diferentes representações, como foi o caso da representação algébrica com a gráfica e a tabular com a gráfica. A representação algébrica é coordenada com a gráfica quando os alunos não conseguem resolver a questão apenas através da representação algébrica. Os alunos tentam resolver algoritmicamente as questões e só quando não o conseguem é que optam por outras alternativas que passam pela mudança de representação. As conversões não são realizadas por uma questão de escolha, mas de necessidade, sejam elas conversões congruentes ou não congruentes. Na conversão da representação algébrica para a gráfica os alunos revelaram, por vezes, não ter em atenção o contexto do problema. A representação tabular é coordenada com a gráfica para detetar as variações na monotonia da função e identificar os extremos de uma função.

Mobilizar várias representações na mesma resolução indiciou ajudar os alunos a identificar conexões e a moverem-se de modo flexível entre diferentes representações. A capacidade de representar e identificar o mesmo conceito em diferentes representações e a estabelecer conexões permite aos alunos criar importantes analogias, desenvolver e compreender as relações/conexões entre representações. Mais importante do que utilizar várias representações é o estabelecimento de conexões entre elas (Dreyfus, 2002; Duval, 2012; Vinner, 2002). A passagem de uma representação para outra também é uma das dificuldades manifestada pelos alunos. Para Duval (2012), esta dificuldade é consequência das atividades de ensino e de aprendizagem que devem dar ênfase à exploração das conexões entre representações.

Apesar de algumas dificuldades, a maioria dos alunos conseguiu fazer a conversão das diferentes representações, o que é fundamental no processo de aquisição de conhecimento. Passar de um registo de representação para outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspetos diferentes de um mesmo objeto (Duval, 2012). Assim, quando os alunos realizam conversões e consequentemente, coordenações, é porque conhecem e compreendem diferentes aspetos e propriedades do objeto matemático.

4.1.2. Quais são as vantagens e as desvantagens das diferentes representações na aprendizagem da derivada de uma função?

A intervenção confirma os estudos de vários autores referenciados neste relatório de que o desenvolvimento da compreensão de um conceito matemático envolve trabalhar com as suas diferentes representações, realizando conexões entre elas e identificando e compreendendo a sua riqueza e as suas limitações, porque só assim será ultrapassado o 'paradoxo cognitivo do pensamento matemático' (Duval, 2012).

O trabalho com várias representações revelou-se fundamental para o bom desempenho e desenvolvimento das estratégias dos alunos na resolução das tarefas ao longo das aulas. A forma de utilizar e olhar a calculadora gráfica, em virtude do apelo à utilização da representação gráfica nos diversos momentos da intervenção pedagógica, ganhou uma nova dimensão no trabalho dos alunos. Além disso, proporcionou momentos importantes de interação e diálogo entre alunos/turma e professor que ajudaram a perspetivar de forma diferente os objetos matemáticos, realçando as conexões entre as representações envolvidas.

As várias representações apresentam vantagens e desvantagens mediante os conhecimentos matemáticos envolvidos (Friedlander & Tabach, 2001). As desvantagens de uma são colmatadas pela combinação com outras, sendo assim importante os alunos adquirirem a flexibilidade de trabalhar e selecionar as representações que melhor lhes permitirá obter e justificar os resultados pretendidos (Dreyfus, 2002; Tall, 1989, 2002; Vinner, 2002).

A representação numérica permitiu a introdução dos conceitos através de casos particulares e nos cálculos exemplificativos. No caso da taxa média de variação e da taxa de variação em que os resultados foram numéricos permitiu aos alunos interagir com esses conceitos e relacioná-los com propriedades do objeto matemático.

A representação gráfica permitiu uma imagem da função que a representação algébrica não proporciona de uma forma intuitiva e apelativa. Por exemplo, no estudo da monotonia e dos extremos de uma função, nas comparações entre a função e a sua derivada através do valor do declive da reta tangente num ponto do gráfico da função são exemplos da vantagem da representação gráfica no estudo da derivada de uma função. A representação gráfica foi também a forma de representação utilizada pela maioria dos alunos, com recurso à calculadora gráfica, quando lhes foi solicitado que traçassem as retas secantes e por fim a reta tangente, situação em que se procurava obter uma visualização global. A desvantagem da representação gráfica ficou patente na sua construção, em particular, nas escalas a selecionar e na adequação ao contexto do problema. Além disso, a sua utilidade como ferramenta matemática varia de acordo com a tarefa em causa.

A representação algébrica, neste nível de ensino, permitiu aos alunos realizarem transformações com facilidade apesar de esses resultados não significarem que uma compreensão significativa do conceito esteja presente. Causando, assim, dificuldades na interpretação de resultados, como, por exemplo, na aplicação das regras de derivação. A representação algébrica assume uma importância na definição dos conceitos devido a permitir a generalização de conceitos e nas justificações das questões.

A representação tabular permitiu estabelecer uma ligação entre a representação numérica e as representações algébrica e gráfica. Esta representação mostrou ser um suporte para usar enquanto os alunos procuram ficar confortáveis com as expressões algébricas, o que faz com que os alunos se sintam confiantes no trabalho algébrico e encoraja-os a persistir (Brown & Mehilos, 2010).

Em suma, o trabalho através das diferentes representações possibilitou a compreensão do tema derivada de uma função, permitindo aumentar a convergência do conceito definição ao conceito imagem dos conceitos abordados. Fica também evidenciada a importância da estrutura das tarefas que devem permitir uma utilização flexível e eficaz de representações múltiplas permitindo desenvolver no aluno a capacidade de adotar representações adequadas e de coordená-las de forma pertinente, tirando partido das vantagens de umas para suprir desvantagens de outras (Dreyfus, 2002; Friedlander & Tabach, 2001; Vinner, 2002).

4.1.3. Que perceções têm os alunos sobre a utilização das diferentes representações na sua aprendizagem da derivada de uma função?

Os alunos dão importância às múltiplas representações e às conexões que estabelecem entre elas. Alguns alunos evidenciam a *complementaridade* entre as representações algébrica e gráfica, o que revela a intuição que adquiriram sobre a forma de tirarem partido das representações na resolução das tarefas propostas.

Uma parte dos alunos não consegue dissociar o objeto matemático da sua representação (Duval, 2012), o que se verifica, por exemplo nas respostas dadas no questionário, na impossibilidade de aprenderem o conceito derivada de uma função sem utilizar a representação gráfica. Além disso, também não conseguem dissociar a representação gráfica da utilização da calculadora gráfica. Para esses alunos, a calculadora gráfica é a única forma de obter a representação gráfica e, por isso, se tiverem dificuldades no seu manuseamento não recorrem a esta representação.

Para a maioria dos alunos que responderam ao questionário, a representação gráfica é a que permite melhor compreender e representar os conceitos do tema derivada de uma função – afirmando que a natureza do conceito é essencialmente gráfico –, seguida da representação algébrica. Essa afirmação é reforçada quando lhes é solicitado que expliquem o conceito derivada a um colega e optam por apenas uma representação em que a gráfica é a mais utilizada. Esta perceção pode advir da estratégia predominantemente gráfica implementada na intervenção. Na justificação e apresentação das resoluções das questões de investigação predomina a representação algébrica, porque a valorizam em detrimento das outras representações como "verdadeiro" veículo para a justificação matemática (Dreyfus, 2002; Vinner, 2002, 1989). Isso é reforçado pela maioria dos alunos que entende como desvantagem da utilização da representação gráfica a possibilidade de poderem resolver as tarefas sem utilizar a representação algébrica. A representação gráfica surge mais como um auxiliar que lhes permite comparar e verificar os resultados algébricos.

A compreensão aparece como uma primeira vantagem da representação algébrica, mas a eficiência do cálculo da derivada de uma função num valor do seu domínio é a segunda vantagem que poderá estar relacionada com a utilização das regras de derivação. Quando lhes foi solicitada a forma como calculavam a derivada num valor do domínio de uma função, todos os alunos usaram a argumentação algébrica que envolvia derivar a função e por fim a obtenção da imagem do valor do domínio na função derivada. Foram poucos os alunos que apresentaram como vantagem das representações algébrica e gráfica a possibilidade de efetuar conexões entre elas. O que reforça a ideia de que os alunos percecionam as representações de forma isolada e que aprendem os procedimentos a um nível puramente algorítmico.

4.2. Implicações para o ensino e a aprendizagem

As investigações levadas a cabo por Tall (1989), Vinner (1989, 2002), Duval (2003, 2012), Dreyfus (2002) e outras referências não menos importantes presentes neste estudo, são um importante marco na forma como se deve privilegiar várias representações de um determinado conceito matemático para que o aluno enriqueça o conceito imagem do mesmo, e consiga assim chegar a uma abstração inerente à formalização desses conceitos.

Durante este estudo, a representação gráfica de funções desempenhou um papel importante na exploração e construção dos conceitos inerentes ao tema derivada de uma função e despertou o interesse dos alunos pela matemática. A utilização do *GeoGebra* e da calculadora gráfica na introdução dos conceitos no quadro possibilitou, de forma rápida e intuitiva, a coordenação entre representações. O recurso à calculadora facilita o trabalho autónomo dos alunos no uso das representações. Alguns dos conceitos estudados não eram completamente novos para os alunos, como são exemplo a reta tangente, declive e variação. Contudo, perante uma mesma estratégia de ensino baseada na representação gráfica de funções e de derivadas, os alunos privilegiaram estratégias diferentes, fruto, possivelmente, de aprendizagens anteriores ou de conceções diferentes em relação à disciplina de Matemática (Kaput, 1992). Uma turma é composta por alunos com tipos de pensamento diferentes e com conceções diferentes desta disciplina, o que deverá ser tido em conta nas planificações das intervenções pedagógicas, em particular na seleção das tarefas a propor. As tarefas devem ser construídas de forma a possibilitarem o recurso às conexões entre as diferentes representações de um conceito e terem uma orientação progressiva na sua introdução (Dreyfus, 2002; Friedlander & Tabach, 2001).

No estudo verificou-se que, como consequência de uma estratégia de ensino baseada na utilização de múltiplas representações, a maioria dos alunos tornou-se versátil na sua utilização e raciocinou entre essas representações. O ensino deve proporcionar essas múltiplas representações, em detrimento de meras apresentações de regras e procedimentos para calcular derivadas. Os alunos devem ter oportunidade de construir conexões fortes entre as representações gráficas e algébricas de funções (Dreyfus, 2002; Duval, 2012; Tall, 1989; Vinner, 1989, 2002).

Os tópicos devem ser apresentados graficamente, numericamente e algebricamente e, se possível, a partir de situações da vida real com recurso à calculadora gráfica numa abordagem que não só enfatize os processos formais, como também se apele à intuição, em consonância com as ideias dos autores referenciados neste estudo.

4.3. Limitações e Recomendações

A metodologia escolhida para este estudo, baseada numa análise descritiva e indutiva dos dados e que se interessa sobretudo pelo significado e pelos processos, em detrimento dos resultados ou produtos, acarreta algumas limitações. Com efeito, o facto de ter lecionado as aulas integrantes deste estudo dificultou o acompanhamento pormenorizado das dinâmicas de aprendizagem ocorridas na sala de aula. Por outro lado, também o facto de me encontrar num processo de formação profissional em relação ao qual possuía diversos deveres e responsabilidades resultou noutra limitação deste estudo. Em verdade, o dilema entre estes dois compromissos, o estágio e este estudo, acarretou algumas consequências para o estudo, porque pesou sempre o compromisso para com os alunos. Outra limitação inerente a este tipo de metodologia tem que ver com a generalização de resultados. Com efeito e dado o estudo incidir com maior detalhe sobre as aprendizagens de apenas uma turma e três intervenções pedagógicas não é possível fazer qualquer tipo de generalização.

Como recomendações para estudos futuros no aprofundamento deste tema seria interessante analisar as respostas dos alunos perante tarefas com questões idênticas mas com uma sequência diferente das questões nas representações que invocam, de forma a percecionar de que forma a utilização das representações é influenciada pela ordem das questões. Além disso, seria proveitoso o estudo da utilização das representações pelos alunos no ensino e aprendizagem do tema derivada de uma função na resolução de problemas.

Bibliografia

Aires, A., & Vazquez, M. (2004). O conceito de derivada no ensino secundário ao longo do século XX. In *Atas do Encontro sobre o tema História do Ensino da Matemática em Portugal* (pp. 101-120)*. Lisboa:* Sociedade portuguesa de investigação em educação matemática.

Almeida, C., & Viseu, F. (2002). Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação, 15(1)*, 193-219.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215-241.

Azcárate, G., C., Casadevall, M., Casellas, E., & Bosch, D. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Madrid: Sintesis.

Botshiwe, L., & Christiansen, I. M. (2008). A case study of the development of in-service teachers' concept images of the derivative. *Pythagoras, 68, 22-31*. Acedido em 27 de abril, 2013, de http://www.pythagoras.org.za/index.php/pythagoras/ article/viewFile/64/69

Brown, S. A., & Mehilos, M. (2010). Using tables to Bridge Arithmetic and Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(9), 532-538.

Cardoso, M. T. (1995). *O papel da calculadora gráfica na aprendizagem de conceitos de análise matemática: estudo de uma turma do 11° ano com dificuldades*. (Tese de Mestrado, Universidade do Minho).

Cornu, B. (2002). In D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Damásio, A. (2011). *O erro de Descartes*. Lisboa: Círculo de leitores.

Dick, T. P. (1996). Much more than a toy. Graphing calculators in secondary school calculus. In P. Gomez & B. Waits (Eds.), *Roles of Calculators in the Classroom* (pp. 31-46). Acedido em 20 outubro, 2013, de http://ued.uniandes.edu.co/ued/servidor/ em/recinf/tg18/ Archivos PDF/Dick.pdf.

Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht. Kluwer Academic Publisher.

Duval, R. (2003). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In Sílvia Dias A. Machado (Coord.), *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica* (pp. 11-34). Campinas: Editora Papirus.

Duval, R. (2012). *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*. REVEMAT, 7(2), 266-297.

Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. G. (1993). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives and integrals. In J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning Analysis of Results* (pp.31-46). Mathematical Association of America Notes Volume 33. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Ferrini-Mundy, J., & Lauten, D. (1994). Learning about calculus learning. *The Mathematics Teacher*, 87 (2), 115-121.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. A. Cuoco, & F. R. Curcio (Eds), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston : VA: NCTM.

Gagatsis, A., & Elia, I. (2004). The effects of diferente modes of representation on mathematical problema solving. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 4447-454.

García, A. (2000). *Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Giraldo, V., Carvalho, L., & Tall, D. (2003). Descriptions and definitions in the teaching of elementary calculus. In N. A. Pateman, B.J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol.2, 445–452. Acedido em 10 de outubro, 2013, de http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003d-giraldo-carv-pme.pdf.

Giraldo, V., Carvalho, L., & Tall, D. (2002). Theoretical – computational conflicts and the concept image of derivative. In *Proceedings of the BSRLM Conference*. Nottingham, England, 22(3), 37–42. Acedido em 10 de outubro, 2013, de http://homepages.warwick.ac.uk /staff/David.Tall/pdfs/dot2002m-giraldo-carv.pdf.

Goldenberg, E. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: Mathematical, technical, and pedagogical challenges in the educational use of graphical representation of functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 135-173.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-278). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996) A Joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. P. Steffe, P. Nesher , P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp.397-429). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of function as an example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-72). Hillsdale, New Jersey. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Janvier, C., Girardon, C., & Morand, J. (1993). Mathematical symbols and representations. In P. Wilson (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics* (pp. 79-102). Reston, VA: NCTM.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Koirala, H. P. (1997). Teaching of calculus for students' conceptual understanding. *The Mathematics Educator, 2*(1), 52-62. Acedido em 29 de janeiro, 2014, de http://math.nie.edu. sg/ ame /matheduc /tme/tmeV2_1/Book%202n1%20pg5.pdf.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research*, 60 (1), 1-64.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in teaching and learning mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, New Jersey. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática A 10.º ano, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, Ministério da Educação.

Ministério de Educação (2002). *Programa de Matemática A 11.º ano, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas.* Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, Ministério da Educação.

NCTM (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J., & Canavarro, A. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. V. (2008). *Manual de Investigação em Ciências Sociais.* Lisboa: Gradiva

Ruthven, K. (1993). Personal Technology and Classroom Change: A British Perspective. In J. T. Fey (Ed.), *Calculators in mathematics education* (pp. 91-100). Reston: National Council of Teachers of Mathematics. (Yearbook 1992).

Tall, D. (1989). Concept images, generic organizers, computers and curriculum change. *For the Learning of Mathematics, 9 (3),* 37-42.

Tall, D. (1994). Computer environments for the learning of mathematics. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 189-199). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Tall, D. (2002). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht. Kluwer Academic Publisher.

Tall, D., & Barnard, T. (1997). Cognitive units, connections and mathematical proof. In *Proceedings of PME 21*, Finland, 2, (pp. 41– 48).

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151–169.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. M. (1998). *Matemática: funções - 11º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Vinner, S. (1983). Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent *Proceedings of the 6th PME Conference*, Antwerp. (pp. 24-28).

Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. In T. Eisenberg & T. Dreyfus (Eds.), *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(2), 149-156.

Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht. Kluwer Academic Publisher.

Zandieh, M. J. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. CBMS Issues in *Mathematics Education*, 8, (pp. 103-127). Acedido em 27 de abril, 2013, de http://books.google.pt/books?id=knYjqCFRhIkC&lpg=PA103&ots=SB1j47mtzh&dq=A%20theoretical%20framework%20for%20analyzing%20student%20understanding%20of%20the%20concept%20of%20derivative.&hl=pt-PT&pg=PA127#v=onepage&q=A%20theoretical%20framework%20for%20analyzing%20student%20understanding%20of%20the%20concept%20of%20derivative.&f=false

ANEXOS

ANEXO 1 – CALCULADORAS GRÁFICAS UTILIZADAS PELOS ALUNOS

Marca	Modelo	Quantidade
Casio	fx 9860gii sd	3
Texas	TI – 84 Plus	7
Casio	fx - 9750	1
Texas	TI-nspire	8
Casio	cfx-9850gb plus	1
Casio	fx cg20	1

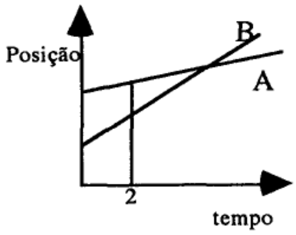
ANEXO 2 – TESTE DIAGNÓSTICO

Matemática A - 11º ano **Unidade: Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e derivada**

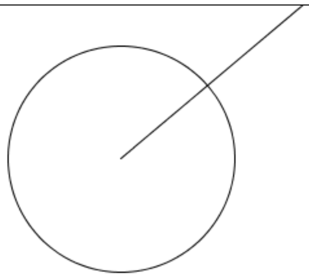
Teste diagnóstico **45'**

Nome: **N.º**

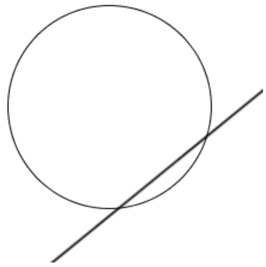
1. Indique, justificando, qual dos objetos A ou B se desloca com maior velocidade no instante $t = 2s$?



2. Para cada um dos seguintes diagramas, explique porque é que a linha L não é uma reta tangente para a circunferência dada.



(1)



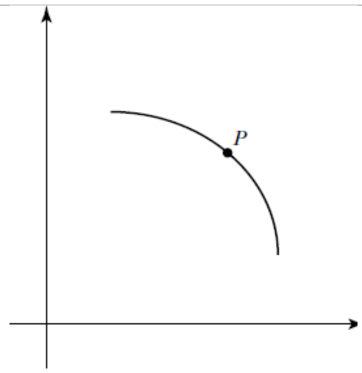
(2)

(1)

(2)

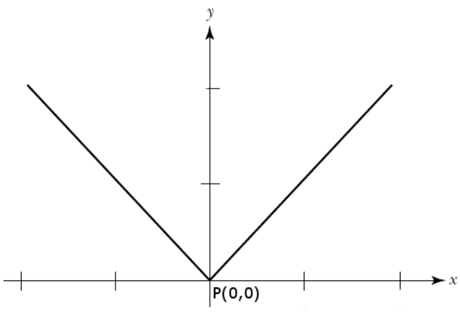
3. Desenhe, se possível, a reta tangente a cada uma das seguintes curvas no ponto P e em cada caso indique se o declive da reta tangente é um número positivo (**+**), um número negativo (**—**), zero (**0**), ou é indeterminado/não existe (**I/NE**).

(1)



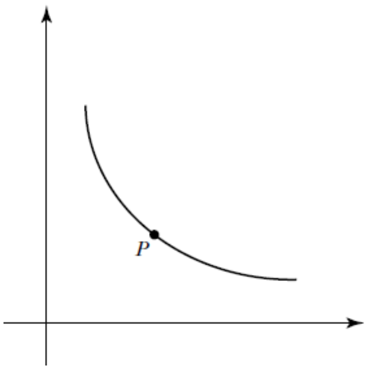
☐ (+) ☐ (-) ☐ zero ☐ I/NE

(2)



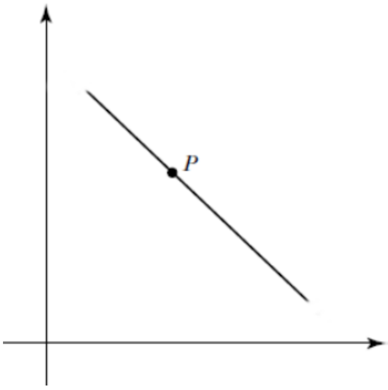
☐ (+) ☐ (-) ☐ zero ☐ I/NE

(3)



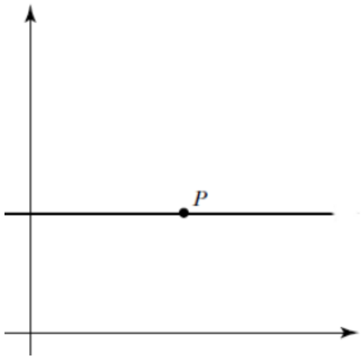
☐ (+) ☐ (-) ☐ zero ☐ I/NE

(4)



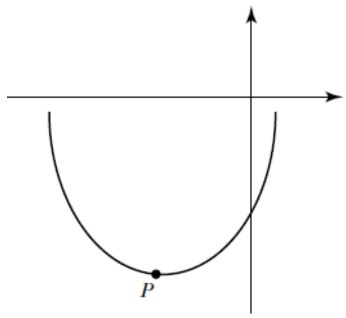
☐ (+) ☐ (-) ☐ zero ☐ I/NE

(5)



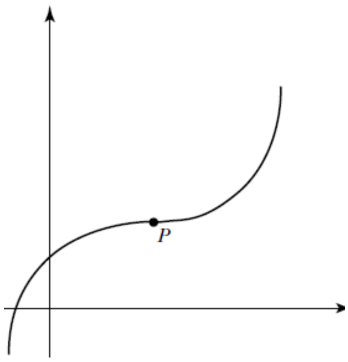
☐ (+) ☐ (-) ☐ zero ☐ I/NE

(6)



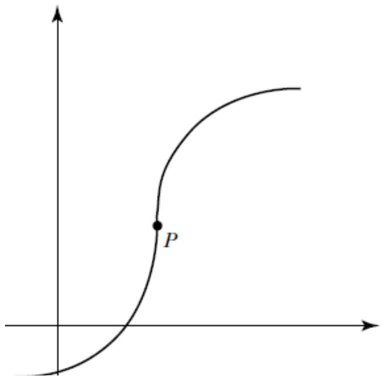
☐ (+) ☐ (-) ☐ zero ☐ I/NE

(7)



☐ (+) ☐ (-) ☐ zero ☐ I/NE

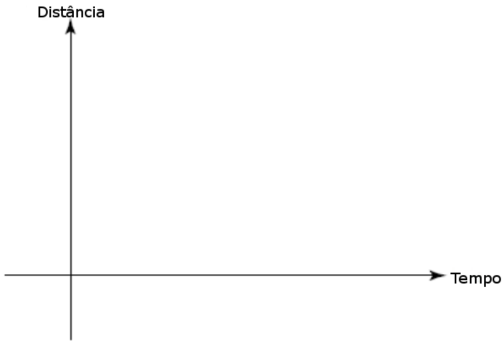
(8)



☐ (+) ☐ (-) ☐ zero ☐ I/NE

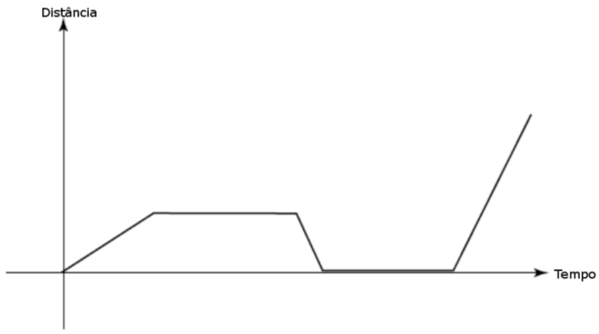
4. Para o seguinte cenário, desenhe um gráfico distância/tempo que representa a situação. Marque o tempo dos eventos, como por exemplo "comecei a andar", "comecei a correr", "correr de volta", no eixo horizontal. Marque as localizações, como "deixei o dormitório", "cheguei à aula", no eixo vertical.

   Situação: Um aluno deixou o dormitório e começou a andar devagar para a aula quando deu conta que se tinha esquecido dos livros. Então começou a correr de volta para o dormitório, pegou nos livros e correu novamente para a aula.

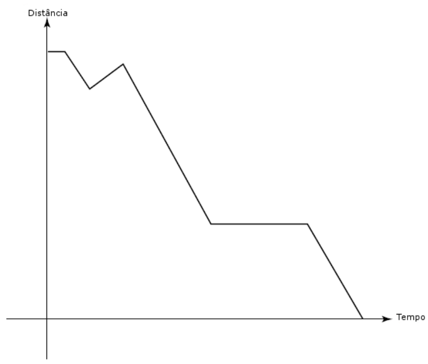


5. Para cada um dos seguintes gráficos descreve uma situação que o gráfico pode representar.

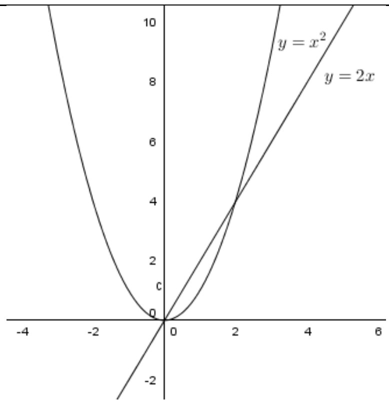
(a)



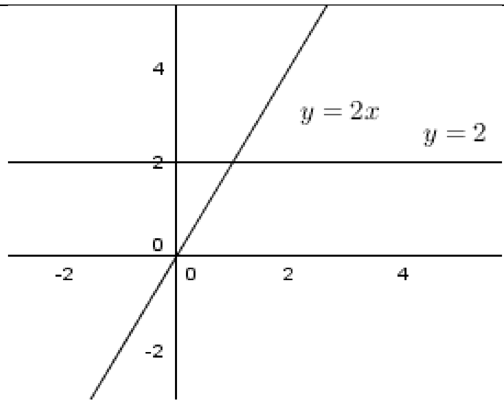
(b)



6. Em cada uma das seguintes figuras descreve as relações que existem entre os gráficos das duas funções representadas.



(1)



(2)

(1) ____

____

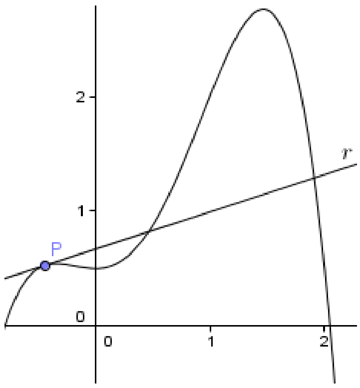
____

(2) ____

____

____

7. Diga, justificando, se a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto P.



____

____

____

____

____

Bom trabalho!

ANEXO 3 – QUESTIONÁRIO

Caro(a) aluno(a),

No âmbito da unidade curricular Estágio Profissional, do 2.º ano do Mestrado em Ensino da Matemática, pretendo averiguar, através deste questionário, as perceções que os alunos do 11.º ano de escolaridade têm sobre a utilização das diferentes representações na sua aprendizagem da derivada de uma função. A informação recolhida será usada somente para fins académicos, comprometendo-me a assegurar o anonimato da mesma.

I. Dados pessoais

1. Idade: ______
2. Sexo: ☐ Masculino ☐ Feminino
3. Número de retenções durante o teu percurso escolar: ________________________________
4. Que anos escolares repetiste? ____
5. Que classificação final obtiveste na disciplina de Matemática no 10.º ano? _________________
6. Que classificação final obtiveste na disciplina de Matemática no final do 1º e 2º período deste ano letivo? 1º período ________ 2º período _________

II. Perceções sobre a aprendizagem do tema derivada de uma função

Nas afirmações seguintes, assinala com uma cruz **(x)** o quadrado que mais se adequa ao teu grau de concordância tendo em consideração a seguinte escala:

DT: Discordo Totalmente; **D**: Discordo; **I**: Indiferente; **CT**: Concordo Totalmente.

Afirmações	**DT**	**D**	**I**	**C**	**CT**
1. A derivada de funções é um tema da matemática que gostei de estudar					
2. No tema derivada de funções tive menos dificuldades de aprendizagem do que noutros temas de matemática do 11.º ano					
3. As tarefas propostas sobre o tema derivada de funções despertou o meu interesse pela matemática					
4. O tema derivada de funções é importante para a resolução de problemas					
5. O tema derivada de funções não é importante para a minha formação					
6. A representação algébrica ajudou-me a estabelecer as definições e as propriedades dos conceitos estudados no tema derivada de funções					
7. A utilização da calculadora gráfica favoreceu a minha compreensão sobre as relações entre uma função e a sua derivada					
8. Na resolução das tarefas sobre funções derivadas senti a necessidade de representar graficamente a função					
9. Na resolução das tarefas sobre funções derivadas senti a necessidade de representar graficamente a função derivada					
10. Na resolução das tarefas sobre funções derivadas senti a necessidade de representar graficamente a função e a sua derivada					
11. A representação gráfica ajudou-me a compreender as definições e as propriedades dos conceitos estudados no tema derivada de funções.					
12. A representação numérica ajudou-me a estabelecer as definições e as propriedades dos conceitos estudados no tema derivada de funções.					
13. A interpretação simultânea da informação gráfica, algébrica e numérica do conceito de derivada de uma função ajudou na sua compreensão.					

14. Indique **3 vantagens** da representação gráfica na aprendizagem do tema derivada de uma função.

15. Indique **3 vantagens** da representação analítica na aprendizagem do tema derivada de uma função.

16. Indique **3 desvantagens** da representação gráfica na aprendizagem do tema derivada de uma função.

17. Indique **3 desvantagens** da representação analítica na aprendizagem do tema derivada de uma função.

18. Na resolução das tarefas sobre funções derivadas indica os passos que efetuavas para o cálculo da derivada num valor do domínio da função. Justifica a tua resposta. (Podes usar gráficos, símbolos ou palavras para a explicação)

19. Se tivesses que explicar o que significa a derivada de uma função a um teu colega que ainda não a tenha estudado, como o farias? (Podes usar gráficos, símbolos ou palavras para a explicação)

20. Se y é uma função em ordem a x, explica através de palavras o significado da equação $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 5$ quando $\mathrm{x} = 10$.

21. Achas que seria possível ensinar a derivada de uma função sem utilizar a representação gráfica? Justifica a tua resposta.

ANEXO 4 – QUESTIONÁRIO DA AULA N.º 2

Matemática A - 11º ano **Unidade: Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e derivada**	
QUESTIONÁRIO	N.º 01

1. O conceito de velocidade média, no seu entender, ajudou na compreensão do conceito de taxa média de variação:

   Sim ☐ Não ☐

2. Assinale com uma cruz na representação que melhor representa o conceito de taxa média de variação:

   Gráfica ☐ Numérica ☐ Tabelar ☐

3. Assinale com uma cruz na representação que, no seu entender, lhe permitiu compreender melhor o conceito de taxa média de variação:

   Gráfica ☐ Numérica ☐ Tabelar ☐

OBSERVAÇÕES:

ANEXO 5 – QUESTIONÁRIO DA AULA N.º 3

Matemática A - 11º ano **Unidade: Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e derivada**	
Questionário	N.º 02

1. Assinale com uma cruz na representação que para si melhor ilustra o conceito de taxa de variação:

   Gráfica ☐ Algébrica ☐

Porquê?____

____

____

Assinale com uma cruz na representação que, no seu entender, lhe permitiu compreender melhor o conceito de taxa de variação:

Gráfica ☐ Algébrica ☐

Porquê?____

____

____

2. Que benefício teve a relação entre a representação gráfica e algébrica na aprendizagem do conceito de taxa de variação (derivada) de uma função num ponto?

____

____

____

3. Que dificuldades sentiu nesta aula?

____

____

____

ANEXO 6 – QUESTIONÁRIO DA AULA N.º 8

Matemática A - 11º ano
Unidade: Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e derivada
Questionário N.º 03

1. Assinale com uma cruz na representação que para si melhor ilustra a relação entre o sinal da derivada e sentido de variação:

Gráfica ☐ Algébrica ☐ Tabelar ☐

Porquê?____

2. Assinale com uma cruz na representação que, no seu entender, lhe permitiu compreender melhor a relação do sinal da função derivada e extremos relativos de uma função:

Gráfica ☐ Algébrica ☐ Tabelar ☐

Porquê?____

3. Que benefício teve a relação entre a representação gráfica e algébrica na aprendizagem das relações do sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos de uma função?

4. Que dificuldades sentiu nesta aula?

ANEXO 7 – Tarefa 2.1

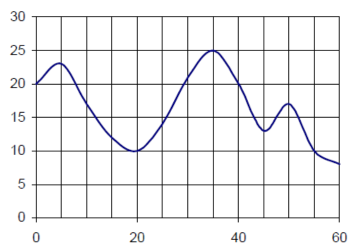
Numa corrida bicicleta organizada na escola o Pedro fez os tempos indicados na tabela:

t(s)	0	8,5	17,5	27,5	39,5	53
d(m)	0	200	400	600	800	1000

1. Qual é o total de metros da corrida?
2. Qual é a distância percorrida quando $t = 8{,}5s$?
3. Em que instante a distância assume maior valor?
4. Qual é a variação da distância quando o tempo varia de 8,5 a 27,5s?
5. Qual é a variação do tempo quando a distância varia entre 600 e 1000?
6. Qual foi a velocidade média do Pedro no total do percurso?
7. Qual é a velocidade média em cada um dos intervalos considerados?
8. Quando revelou o Pedro sinais de "cansaço"? Justifique a sua resposta.
9. Represente num plano cartesiano os pontos (t, d) obtidos da tabela.
10. Da análise da velocidade média do Pedro nos intervalos de tempo considerados, registe a interpretação que retira da representação gráfica, numérica e da tabelar.

ANEXO 8 – Tarefa 2.2

Observe o gráfico e indique:



1. Um intervalo onde a taxa média de variação seja positiva e monótona crescente.
2. Um intervalo onde a taxa média de variação seja positiva e a função não seja monótona.
3. Um intervalo onde a taxa média de variação seja negativa.
4. Um intervalo onde a taxa média de variação seja nula
5. Um intervalo onde a taxa média de variação seja negativa e a função não seja monótona.
6. A equação de reta definida pelos pontos de abcissa 20 e 40. Encontra alguma relação entre a taxa média de variação e o declive (m) da reta?

ANEXO 9 – Tarefa 3.1

Uma bola desce um plano inclinado e registou-se a distância percorrida pela bola no decorrer do tempo. A distância (*d*), em centímetros, percorrida pela bola em função do tempo (*t*), em segundos, é dada por

$$d(t) = 10t^2$$

1. Represente graficamente a função d na situação descrita.
2. Calcule a taxa média de variação no intervalo [1, 2].
3. Preencha as seguintes tabelas:

Intervalo	t.m.v.
[1; 1,5]	
[1; 1,1]	
[1; 1,01]	
[1; 1,001]	

Tabela 1

Intervalo	t.m.v.
[0,5; 1]	
[0,9; 1]	
[0,99; 1]	
[0,999; 1]	

Tabela 2

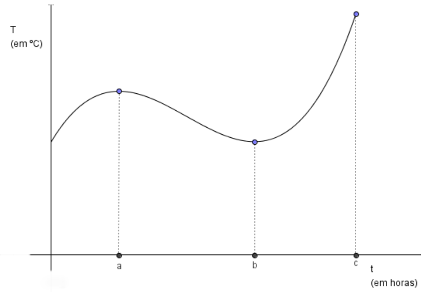
4. Seja h>0 um acréscimo no intervalo [1; 1 + h], à semelhança do efetuado na tabela 1, com h a tender para zero. Calcule a taxa média de variação do intervalo [1; 1 + h]. Conjeture para que valor tende a $t.m.v._{[1,1+h]}$ quando h tende para zero.
5. Faça uma estimativa da velocidade da bola no instante $1s$. Justifique.
6. Indique a equação de reta definida pelos pontos $(1, D(1))\ e\ (2, D(2))$ e represente a reta em conjunto com a representação do gráfico da função d.
7. Preencha a seguinte tabela e represente as equações das retas que passam nos pontos que têm como abcissas os extremos dos intervalos da tabela 1.

Intervalo	Equação de reta
[1; 1,5]	
[1; 1,1]	
[1; 1,01]	
[1; 1,001]	
...	...
[1; 1+h]	

8. Conjeture sobre a reta que se obtém quando a amplitude do intervalo tende para zero.

ANEXO 10 – Tarefa 8.1

No seguinte gráfico á apresentada a evolução da temperatura em graus Celsius, num dia de inverno e ao longo de um período de tempo, medido em horas.



1. A partir da observação da representação gráfica, termine de preencher a seguinte tabela.

Intervalo de tempo	Sinal do declive da reta tangente em pontos de abcissas pertencentes ao intervalo	Sinal da derivada	Sentido de variação da função (monotonia)
]0, a[	+	+	↗
]a, b[			
]b, c[			

2. Admita que a expressão que define a função representada graficamente é:

$$T(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 3; t \in \left[0, \frac{9}{2}\right]$$

2.1. Determine $\mathrm{T}'(\mathrm{t})$.

2.2. Estude analiticamente o sinal da função $\mathrm{T}'(\mathrm{t})$ e compare as respostas dadas em **1.**.

3. Com base no estudo feito, conjeture uma relação entre o sinal da função derivada num intervalo aberto e a variação da função nesse intervalo.

4. Sabendo que às 3 horas a temperatura atingiu um mínimo no intervalo dado indique a que hora a temperatura foi máxima nesse intervalo? Justifique o seu raciocínio.

ANEXO 11 – Pedido de autorização

Exmo. Sr.

Diretor do Agrupamento de escolas ...

João Januário Tomáz Domingues Veloso de Barros, aluno de Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade do Minho, encontra-se a realizar o seu estágio pedagógico no Agrupamento de Escolas ..... No âmbito das atividades de estágio faz parte o desenvolvimento de um Relatório sobre a prática pedagógica, com características investigativas. Para poder desenvolver o relatório preciso recolher dados recorrendo a diferentes métodos. Gostaria de recolher dados através de gravações áudio em algumas aulas, por serem métodos com grande eficácia de registo. Nesse sentido, pedia autorização da vossa V. Ex.ª para esta recolha, comprometendo-me a usar os dados só para fins académicos, assim como a não divulgar o nome da escola e dos alunos. Todos os dados serão confidenciais e só serão usados para evidenciar a experiência de ensino que pretendo realizar, assim como problematizar as estratégias de ensino que forem delineadas. Em causa está, sobretudo, a aprendizagem dos alunos e a minha formação a partir da própria prática.

Os Encarregados de Educação da turma em causa (11.º ...) já assinaram as autorizações para a recolha de registos audiovisuais durante as aulas, onde foram informados do objetivo do estudo e do compromisso em manter o anonimato dos alunos e da escola.

Agradeço a atenção dispensada.

Outubro de 2012,

Com os mais respeitosos cumprimentos.

(João Januário T. D. V. Barros)