# MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

## Integradora II

Elaborado por Paulo Flores - 2015

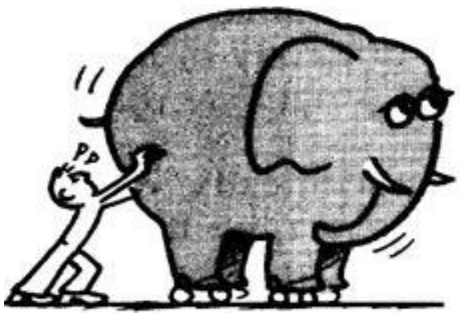
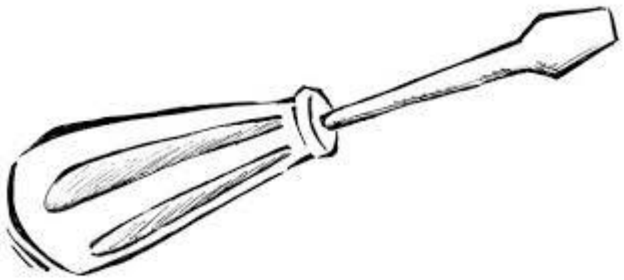
Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: pflores@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt

# T.01 – SOBRE A INÉRCIA

# 1. Introdução

De uma forma geral e, suficientemente, abrangente pode definir-se inércia como sendo a propriedade que os corpos materiais possuem e que se carateriza pelo facto de aqueles se oporem à variação do seu estado de repouso ou de movimento, quando sobre eles são aplicadas ações, isto é, forças e/ou momentos.

Exemplos de aplicação de força e de aplicação de momento.

No contexto da Ciência de Máquinas e Mecanismos, deve fazer-se a distinção entre inércia de translação e inércia de rotação.

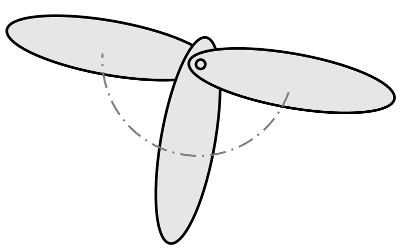
A inércia de translação associa-se à massa e a inércia de rotação associa-se ao momento mássico de inércia.

# 1. Introdução

Translação refere-se ao movimento durante o qual todo e qualquer segmento de reta, que une dois pontos de um corpo rígido, se mantém paralelo a si mesmo enquanto o movimento acontece.

Movimentos de translação curvilínea e de translação retilínea.

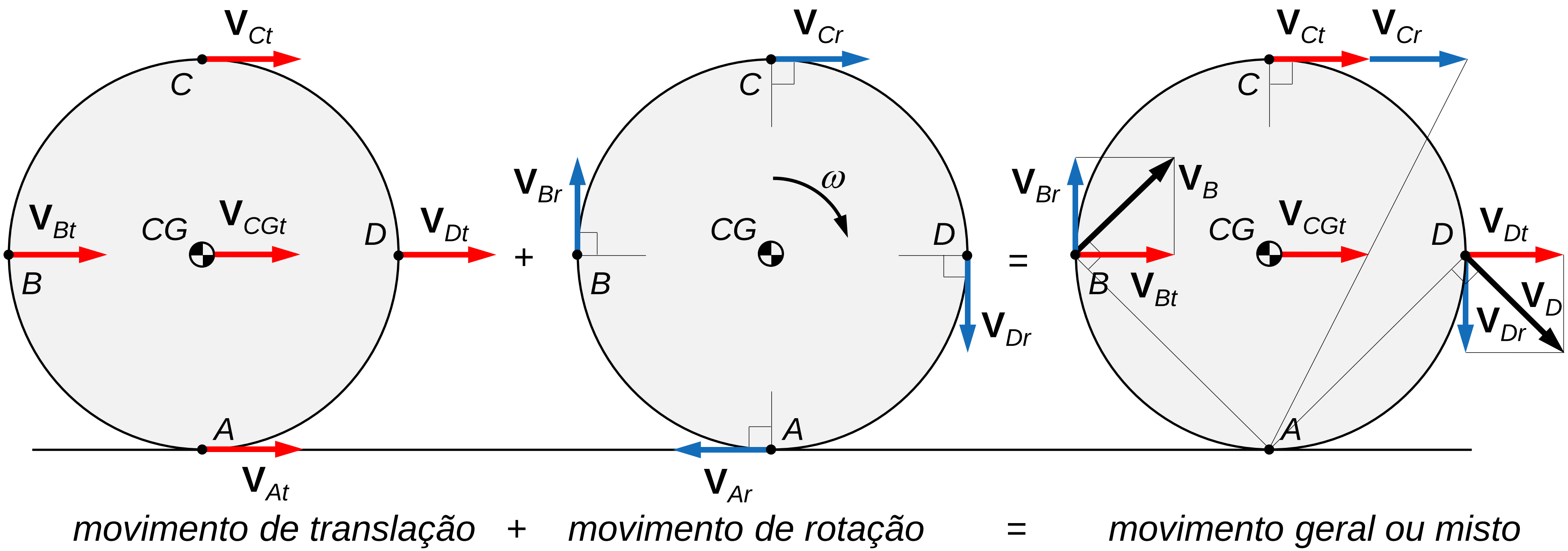
Rotação diz respeito ao movimento no qual cada ponto de um corpo rígido permanece a uma distância constante de um eixo perpendicular ao plano do movimento.



Movimento de rotação.

# 1. Introdução

Um caso importante de movimento plano é o movimento de uma roda ou disco que rola sem escorregar sobre uma superfície plana, isto é, descreve um movimento de rolamento puro.




Decomposição do movimento geral de uma roda que descreve rolamento puro.

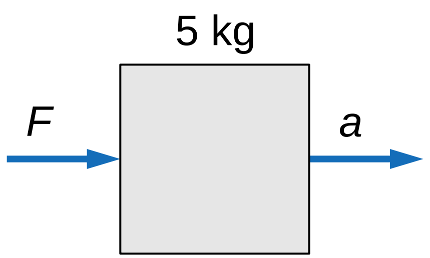
Neste caso, pode observar-se que coexistem as caraterísticas associadas ao movimento de translação e de rotação, tratando-se, portanto, de um movimento plano do tipo geral ou misto.

## 2. Massa

Em Dinâmica de Sistemas Mecânicos pode dizer-se que a massa de um corpo material mede a sua inércia ou resistência ao movimento de translação.

Por outras palavras, a massa diz respeito à maior ou menor resistência dos corpos à alteração da sua velocidade de translação quando sujeitos a forças exteriores aplicadas.

Com efeito, quanto maior for a massa de um corpo, mais difícil é alterar a sua velocidade ou retirá-lo de repouso e, por conseguinte, menor será a aceleração.





Um bloco com 5 kg de massa tem 5 vezes mais inércia do que um bloco de 1 kg.

Assim, aplicando a mesma força a ambos os blocos, verifica-se que a aceleração produzida pelo bloco de 1 kg é 5 vezes maior.

## 2. Massa

Observa-se, portanto, que aplicando uma determinada força a um dado objeto, a aceleração resultante é inversamente proporcional à massa de acordo com a segunda lei de Newton, ou seja

$$a = \frac{F}{m} \tag{1}$$

em que *F* representa a força aplicada ao objeto, que é expressa em newtons [N], *m* denota a massa, cuja unidade é o quilograma [kg], e *a* diz respeito à aceleração produzida, a qual é expressa em [m/s$^2$].

Relembre-se que na análise dimensional a unidade da força é

$$1\,\mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{2}$$

## 2. Massa

A massa, que representa a quantidade de matéria dos corpos, é frequentemente associada ao peso dos corpos.

O peso diz respeito à intensidade da força que um corpo, em repouso, situado num campo gravítico, exerce sobre o apoio que o impede de cair no sentido de atuação do campo gravítico.

Com efeito, no caso da superfície terrestre, a força gravítica exercida pela Terra é dada por

$$F_g = mg \tag{3}$$

em que $g$ representa a aceleração gravítica. O valor padrão da aceleração gravítica é igual a 9,80665 m/s$^2$, ou de modo mais simples $g$=9,81 m/s$^2$.

O valor de 9,81 “m/s/s” significa que um dado corpo largado com uma velocidade nula atinge a velocidade de 9,81 m/s ao fim de um segundo, e 19,62 m/s ao fim de dois segundos, e assim sucessivamente até o corpo atingir a velocidade máxima de queda.

## 2. Massa

Voltando ao estudo do conceito de massa, considerando de novo a segunda lei de Newton, equação (1), a massa pode ser definida como o quociente entre a força aplicada a um determinado corpo material e a aceleração que essa força produz.

A massa de um corpo pode ser determinada experimentalmente utilizando, para o efeito, balanças, ou numericamente/computacionalmente recorrendo, por exemplo, aos sistemas CAD (acrónimo de *Computer Aided Drawing*).

Alternativamente, a massa pode ser calculada analiticamente fazendo a integração sobre todo o volume do corpo em questão, isto é

$$m = \iiint_V \rho \, \mathrm{d}V \tag{4}$$

em que $\rho$ representa a massa específica ou densidade do corpo, a qual é expressa em [kg/m$^3$]. Para corpos homogéneos e isotrópicos a massa específica é igual em todos os seus pontos, donde resulta que

$$m = \rho V \tag{5}$$

onde $V$ denota o volume do corpo expresso em [m$^3$].

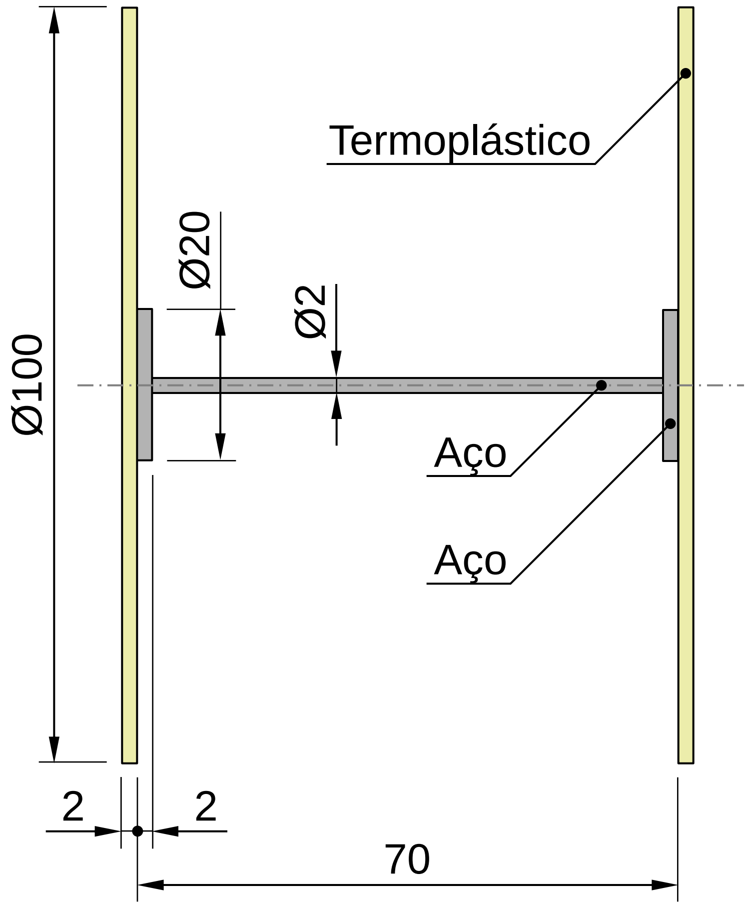
## 2. Massa

A título de exemplo apresentam-se na tabela de baixo valores relativos à massa específica de alguns materiais de uso corrente.

| Material | Massa específica [$kg/m^3$] | Massa específica [$g/cm^3$] |
|---|---|---|
| Aço | 7800 | 7,8 |
| Água | 1000 | 1 |
| Alumínio | 2700 | 2,7 |
| Chumbo | 11300 | 11,3 |
| Madeira de pinho | 400 | 0,4 |
| Termoplástico | 930 | 0,93 |
| Tungsténio | 19300 | 19,3 |

## 2. Massa

Considere um conjunto eixo-rodas de um carro, tal como o que se representa no esquema de baixo, e em relação ao qual se pretende determinar a massa total. Todos os corpos são considerados maciços e homogéneos.



## 2. Massa

Comece-se por calcular a massa de cada um dos elementos do conjunto, ou seja,

$$m_{\text{eixo}} = \rho_{\text{aço}} V = 7800 \times \pi \times \left( \frac{2 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 \times (70-4) \times 10^{-3} = 0{,}0016\,\text{kg}$$

$$m_{\text{anéis}} = 2\rho_{\text{aço}} V = 2 \times 7800 \times \pi \times \left( \frac{20 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 \times 2 \times 10^{-3} = 0{,}0098\,\text{kg}$$

$$m_{\text{rodas}} = 2\rho_{\text{termoplástico}} V = 2 \times 930 \times \pi \times \left( \frac{100 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 \times 2 \times 10^{-3} = 0{,}0292\,\text{kg}$$

A massa total do conjunto eixo-rodas é igual a

$$m_{\text{total}} = \underset{(4\%)}{0{,}0016} + \underset{(24\%)}{0{,}0098} + \underset{(72\%)}{0{,}0292} = 0{,}0406\,\text{kg}$$

Deve referir-se novamente que a massa é uma medida da inércia ou resistência que um dado corpo apresenta em resposta a forças sobre ele aplicadas para alterar o seu estado de movimento ou de repouso.

## 3. Momento Mássico de Inércia

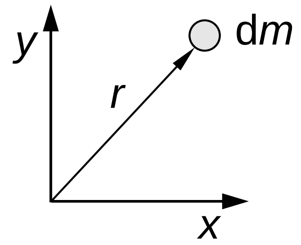
O momento mássico de inércia de um corpo mede a sua inércia ou resistência ao movimento de rotação.

Por outras palavras, o momento mássico de inércia diz respeito à maior ou menor resistência dos corpos à alteração da sua velocidade de rotação quando sujeito a ações exteriores aplicadas.

O momento mássico de inércia é, por definição, uma medida da distribuição da massa de um corpo em relação a um dado eixo, e depende da distância da massa ao eixo de rotação.

O momento mássico de inércia para corpos contínuos de partículas é dado por

$$I_z = \iiint_V r^2 \mathrm{d}m = \iiint_V r^2 \rho \, \mathrm{d}V \qquad (6)$$

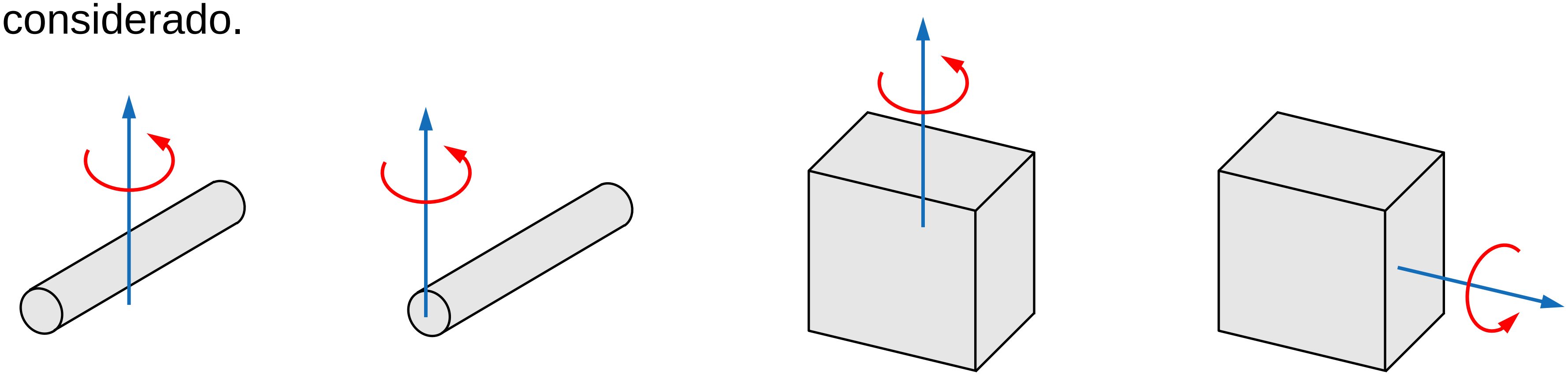



em que *r* é a distância da massa elementar ao eixo de rotação em questão.

O momento mássico de inércia é expresso em [kg·m$^2$].

## 3. Momento Mássico de Inércia

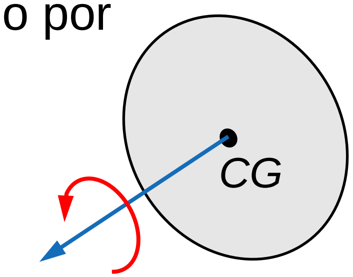
O momento mássico de inércia de um corpo depende do eixo de rotação considerado.



À semelhança da massa, o momento mássico de inércia pode ser determinado experimentalmente, recorrendo a ferramentas computacionais ou utilizando as abordagens analíticas.

Assim, por exemplo, o momento mássico de inércia de um disco de raio *R* em relação ao eixo axial que passa no centro de gravidade é dado por

$$I_{CG} = \tfrac{1}{2} m R^2 \qquad (7)$$

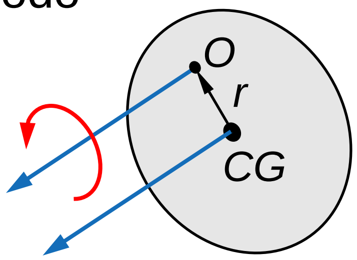



onde *m* denota a massa do disco e *R* representa o raio.

## 3. Momento Mássico de Inércia

O momento mássico de inércia de um disco em relação a um qualquer eixo paralelo ao eixo axial pode ser determinado do seguinte modo

$$I_O = I_{CG} + mr^2 \qquad (8)$$




em que $I_{CG}$ é o momento mássico de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de gravidade, *m* é a massa do disco e *r* representa a distância do centro de gravidade até ao ponto dado.

A equação (8) pode ser utilizada para determinar o momento mássico de inércia de eixos paralelos de qualquer objeto e, por isso, aquela equação traduz o teorema dos eixos paralelos ou teorema de Steiner.

É frequente definir raio de giração de um corpo como sendo

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \qquad (9)$$

em que *k* representa a distância ao eixo de referência considerado e em que toda a massa poderia estar concentrada de tal modo que o seu momento mássico de inércia se mantém constante em relação ao eixo de referência.

## 3. Momento Mássico de Inércia

O momento mássico de inércia de objetos compostos pode ser determinado a partir do cálculo dos momentos mássicos de inércia de cada um dos seus elementos básicos (discos, cilindros, etc.) em relação ao eixo pretendido e depois somam-se os valores obtidos para resultar o momento mássico de inércia total.

Considere-se novamente o conjunto eixo-rodas apresentado anteriormente e em relação ao qual de pretende determinar o momento mássico de inércia total em relação a um eixo situado na periferia das rodas.

Assim, calcule-se, em primeiro lugar, o valor do momento mássico de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro geométrico do sistema, ou seja,

$$I_{\text{eixo}} = \tfrac{1}{2} mR^2 = \tfrac{1}{2} \times 0{,}0016 \times \left( \frac{2 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 = 8{,}09 \times 10^{-10}\ \text{kgm}^2$$

$$I_{\text{anéis}} = \tfrac{1}{2} mR^2 = \tfrac{1}{2} \times 0{,}0098 \times \left( \frac{20 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 = 4{,}90 \times 10^{-7}\ \text{kgm}^2$$

$$I_{\text{rodas}} = \tfrac{1}{2} mR^2 = \tfrac{1}{2} \times 0{,}0292 \times \left( \frac{100 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 = 3{,}65 \times 10^{-5}\ \text{kgm}^2$$

## 3. Momento Mássico de Inércia

Assim, o momento mássico de inércia total do conjunto eixo-rodas em relação ao eixo que passa pelo centro de gravidade é igual a

$$\begin{aligned} I_{CG} &= I_{\text{eixo}} + I_{\text{anéis}} + I_{\text{rodas}} \\ &= 8{,}09\times10^{-10} + 4{,}90\times10^{-7} + 3{,}65\times10^{-5} \\ &= 3{,}70\times10^{-5}\ \text{kgm}^2 \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando o teorema de Steiner, o momento mássico de inércia total do conjunto eixo-rodas em relação a um eixo que passa pela periferia das rodas é dado por

$$\begin{aligned} I_O &= I_{CG} + m_{\text{total}} R^2 \\ &= 3{,}70\times10^{-5} + 0{,}0406\times\left(\frac{100\times10^{-3}}{2}\right)^2 \\ &= 1{,}39\times10^{-4}\ \text{kgm}^2 \end{aligned}$$

# 4. Demonstrações Experimentais

Considere dois blocos com massas distintas colocados sobre um plano inclinado, cujo ângulo de inclinação é ajustável. Admitindo que os blocos têm a mesma qualidade superficial, verifique é qual o ângulo para o qual os blocos começam a descer o plano. Inicie a experiência com o plano na posição horizontal.

Considere agora dois blocos com massas idênticas e de materiais diferentes. Repita o procedimento anteriormente descrito.

Considere um plano inclinado cujo ângulo de inclinação é constante. Considere ainda que diversos cilindros maciços constituídos por materiais homogéneos com diâmetros distintos, com comprimentos distintos e de materiais distintos. Colocando os cilindros, dois a dois, na mesma posição inicial sobre o plano inclinado, verifique qual dos cilindros atinge primeiramente a base, quando aqueles são libertados ao mesmo tempo.

Considere a mesma experiência que anteriormente, mas agora apenas com dois cilindros do mesmo material, com o mesmo diâmetro, com o mesmo comprimento, sendo um deles maciço e o outro oco. Partindo da mesma posição, verifique qual dos cilindros atinge em primeiro lugar a base.

## 5. Revisão de Conhecimentos

Defina inércia.

Distinga inércia de translação de inércia de rotação.

Faça a distinção entre inércia estática e inércia dinâmica.

Caraterize o movimento de rolamento puro de um disco ou roda.

Represente a trajetória de um ponto da periferia de um disco em rolamento puro.

Simule as experiências anteriores em programa computacional, *e.g. SimWise*.

Quais as implicações da inércia (translacional e rotacional) no projeto e no desempenho do carro?

Interessa ter maior ou menor inércia translacional? Em que fases do movimento?

Interessa ter maior ou menor inércia rotacional? Em que fases do movimento?

## 6. Consultas Recomendadas

Antunes, F. (2012) *Mecânica Aplicada - Uma abordagem prática*. Lidel.

Beer, F.P., Johnston, E.R. (1991) *Mecânica Vetorial para Engenheiros. Cinemática e Dinâmica*. 5ª Edição, McGraw-Hill, São Paulo.

Flores, P., Claro, J.C.P. (2007) *Cinemática de Mecanismos*. Edições Almedina, Coimbra.

https://pt.wikipedia.org/wiki/Inércia

https://pt.wikipedia.org/wiki/Massa

https://pt.wikipedia.org/wiki/Momento_de_inércia

https://www.youtube.com/watch?v=cB8GNQuyMPc

https://www.youtube.com/watch?v=CHQOctEvtTY

https://www.youtube.com/watch?v=9e9ysnJA9qA