Universidade do Minho
Escola de Ciências

Paula Maria Viamonte da Silveira Pereira dos Santos

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADES: 7º/9º Ano Matemática e 10º/12º Ano Matemática A

outubro de 2014

Paula Maria Viamonte da Silveira Pereira dos Santos ESTATÍSTICA E PROBABILIDADES: 7º/9º Ano Matemática e 10º/12º Ano Matemática A
UMinho | 2014

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Paula Maria Viamonte da Silveira Pereira dos Santos

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADES: 7º/9º Ano Matemática e 10º/12º Ano Matemática A

Dissertação de Mestrado
Mestrado em Ciências – Formação Contínua de Professores
Área de Especialização em Matemática

Trabalho realizado sob a orientação da
Professora Doutora Cecília Castro de Azevedo
e da
Professora Doutora Maria Paula Mendes Martins

outubro de 2014

DECLARAÇÃO

Nome Paula Maria Viamonte da Silveira Pereira dos Santos

Endereço electrónico: paumigdig@gmail.com

Número do Bilhete de Identidade: 6991176

Título dissertação
ESTATÍSTICA E PROBABILIDADES: 7º/ 9º Ano Matemática e 10º/ 12º Ano Matemática A

Orientadoras:
Professora Doutora Cecília Castro de Azevedo
e da Professora Doutora Maria Paula Mendes Martins

Ano de conclusão: 2014
Designação do Mestrado:
Mestrado em Ciências – Formação Contínua de Professores.
Área de Especialização em Matemática

Universidade do Minho, 31/ 10/ 2014

Assinatura: ____

AGRADECIMENTOS

A dissertação de Mestrado é um processo ao qual obriga o investigador a todo um trabalho solitário, confinando-o a um tempo de isolamento, auferindo, no entanto, do contributo de várias pessoas, direta ou indiretamente. Assim sendo, agradeço a todos os que me ajudaram a concretizá-lo, de uma maneira ou de outra, mas sempre de uma forma positiva.

Desde logo, quero agradecer à Professora Doutora Cecília Azevedo, coorientadora da dissertação, toda a sua disponibilidade desde o primeiro momento, bem como à Professora Doutora Paula Mendes, que a meio do percurso, aceitou prontamente a coorientação, contribuído ambas, com todo o seu saber, a sua ajuda, os seus conselhos e o modo como me apoiaram e incentivaram, bem como, pela forma interessada e disponível com que acompanharam o desenvolvimento de todo o trabalho.

Agradeço, aos meus colegas de Escola, mas sobretudo aos meus colegas, professores de Matemática e aos meus alunos, todo o entusiasmo e motivação proporcionados.

Agradeço ainda, às minhas amigas, Carminda, Fátima, Isabel e Paula, que com o seu exemplo, me levaram a enveredar por este trabalho.

E por último, mas não, de ordem de importância, à minha família, que tantas vezes abdicaram da minha presença, mas que aceitaram e compreenderam tal facto e que sempre me apoiaram ao longo de todo o percurso da elaboração da dissertação e, naturalmente é a eles que a dedico.

RESUMO

Este trabalho de investigação centra-se fundamentalmente no objetivo de analisar e comparar os novos Programas e Metas Curriculares de Matemática e de Matemática A, com os anteriores Programas, no Ensino Básico, do sétimo ao nono ano de escolaridade, e no Ensino Secundário, do décimo ao décimo segundo ano de escolaridade, no âmbito dos conteúdos curriculares de Estatística e de Probabilidades.

Para o desenvolvimento deste trabalho foram utilizados diversos documentos:

No que diz respeito ao Ensino Básico, destaca-se o documento da Reorganização Curricular do Ensino Básico, que culminou com a publicação do Decreto - Lei nº 6/2001. Neste ano foi publicado o Currículo Nacional do Ensino Básico (CNEB), um documento oficial, que passou a coexistir com o programa da disciplina, o qual permaneceu em vigor, na sua generalidade, tal como fora escrito em 1991, tendo-se procedido a um ajustamento, com versão homologada a 28 de dezembro de 2007, na brochura de apoio do tema da Organização e Tratamento de Dados nos cadernos de apoio do 1.º, 2.º e 3.º Ciclos e nas Metas Curriculares de Matemática, tendo o Programa de Matemática do Ensino Básico sido homologado a 17 de junho de 2013.

Relativamente ao Ensino Secundário a análise é feita com base no Programa inicial de Matemática A do Ensino Secundário, de 1996, que foi reajustado em 2001, dirigido aos alunos dos Cursos Científico Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas; brochuras de apoio da componente de Estatística do programa do 10.º ano, e da componente de Probabilidades e Combinatória do Programa do 12.º ano; nos cadernos de apoio para o 10.º, 11.º e 12.º ano de escolaridade; e no documento das Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário, tendo o Programa da disciplina de Matemática A, sido homologado a 20 de janeiro de 2014.

Palavras-chave: Estatística; Probabilidades; Ensino Básico; Ensino Secundário.

ABTRACT

This research is made, basically, to analyze and compare the new Mathematics and Mathematics A programs and curricular goals with the previous ones, respectively, in Basic Education, from the seventh to the ninth grades and Secondary School, from the tenth to the twelfth grades, considering in particular the curricular content of Statistics and Probabilities.

Several documents were used in the development of this thesis.

As far as the Basic Education is concerned I highlight the Basic Education Curricular Reorganization document that culminated with publication of the Decree-Law number 6/2001. In 2001, the Basic Education National Curriculum (CNEB), an official document, was published and now it coexists with the subjects programs, which remain in force basically as they were written in 1991, later, it was adjusted and that version was approved on 28 December 2007; in the brochure that supports the theme of Organization and Data Treatment; on the support notebooks of the the first, second and third cycles; and on the Mathematics Curricular Goals, considering that the Basic Education Mathematics Program was approved on 17 June 2013.

When it comes to Secondary Education, this analysis is based on the Mathematics A initial program for the Secondary Education of 1996, which was readjusted in 2001, addressed to the students of Scientific Humanistic, the Sciences and Technology and Social Economic Science courses; the brochures of support of the tenth grade program statistics component, the twelfth grade program probability and combinatory component; on the support brochures for the tenth, eleventh and twelfth grades; and on the document of the Secondary School Mathematics A Curricular Goals, considering that the Mathematics A Program was approved on 20 January 2014.

Keywords: Statistics; Probabilities; Basic Education; Secondary Education.

ÍNDICE

CAPÍTULO III — A PROBABILIDADE NO ENSINO OBRIGATÓRIO EM PORTUGAL

INDÍCE DE GRÁFICOS

INDÍCE DE TABELAS

INDÍCE DE FIGURAS

CAPITULO I – INTRODUÇÃO

1.1. Probabilidades e Estatística no Ensino

Uma das finalidades da Escola é preparar os jovens para a inserção no mundo real, tendo em vista a sua melhor adaptação à realidade da sociedade onde cada individuo se inclui, possibilitando-o na aquisição de capacidades e competências que lhes permitam responder a necessidades e problemas gerais do quotidiano. Dentro destas competências e a sua adequação a problemas e desafios do quotidiano encontram-se aquelas ligadas à informação estatística sobre áreas tão diversas como a Economia, o Desporto, a Medicina, a Política, a Geografia, a Psicologia e muitas outras que todos os dias aparecem na comunicação social, televisão, rádio e jornais, falamos de Literacia Estatística.

O dia-a-dia é em larga medida governada por dados que, conscientemente ou não são utilizados na tomada de decisões. Sendo a Estatística a ciência que trata e analisa dados, possibilita uma melhor interpretação do mundo real e uma tomada de decisão mais consciente.

Os temas da Estatística e Probabilidades foram incluídos há cerca de quatro décadas nos currículos de Matemática do Ensino Básico e Secundário, não lhes tendo sido dada infelizmente, a importância devida, desde logo acompanhada de uma preparação cuidada dos professores que, infelizmente, não ocorreu.

O novo programa do Ensino Básico, inclui nos três ciclos que o compõe, o domínio de conteúdos "Organização e Tratamento de Dados" (OTD), e no Ensino Secundário, no décimo ano e no décimo primeiro ano, o domínio de conteúdos "Estatística" (EST), contribuindo para uma formação matemática capaz de descrever, analisar, interpretar e tirar conclusões de situações reais. Reconhecendo o papel do tema no desenvolvimento social e pessoal do aluno, o programa atual refere que este deve adquirir, ao longo da escolaridade obrigatória de doze anos, conhecimento de conceitos e representações de modo a compreender e ser capaz de produzir informação estatística e de a utilizar para resolver problemas e tomar decisões baseadas em informações verdadeiras, possibilitando o aluno na literacia estatística. Note-se que, para além dos objetivos gerais da aprendizagem da Organização e Tratamento de Dados (OTD), e da Estatística, (EST) o trabalho nestes domínios e conteúdos visa igualmente as finalidades e os objetivos gerais de aprendizagem da disciplina de Matemática no seu todo, articulando-se com os outros domínios de conteúdos do Programa e das Metas Curriculares e com o Programa de outras disciplinas.

A nível de contributo na linguagem, encontra-se nos novos Programas do Ensino Secundário, no décimo ano de escolaridade, o domínio da Lógica e Teoria de Conjuntos (LTC). Este domínio surge autonomamente dos restantes, ao contrário do que acontecia no anterior Programa, em que parte dos conteúdos introduzidos agora já eram lecionados, mas de um modo esporádico, sempre que o professor achasse pertinente como pré–requisito para a compreensão dos conteúdos a adquirir, não estando contemplado em nenhum ano de escolaridade.

Estreitamente relacionada com a Estatística está a Teoria da Probabilidade, teoria que serve de base à quantificação da incerteza – uma caraterística sempre presente na vida de todos os dias, de não ser possível prever com exatidão e de antemão, qual o resultado da situação de incerteza, perante as várias possibilidades que se apresentam, não saber qual a que se vai verificar, que assenta na descrição Matemática da noção intuitiva do acaso.

O Programa e as Metas Curriculares apontam, para o desenvolvimento da compreensão da noção de Probabilidade, tanto no seu aspeto teórico, como experimental, no terceiro ciclo do Ensino Básico, mais concretamente no nono ano de escolaridade, no domínio de conteúdos da Organização e Tratamento de Dados (OTd) e no Ensino Secundário, no décimo segundo ano, no domínio de conteúdos, Probabilidade (PRB). O domínio de conteúdos Cálculo Combinatório (CC) surge também como suporte à Probabilidade. Tudo isto se insere no contributo para o cumprimento das finalidades do ensino obrigatório da disciplina de Matemática, a saber, estruturação e desenvolvimento do raciocínio, análise e modelação do mundo real e interpretação da sociedade. Sabendo que os temas da Estatística e da Probabilidade são de importância crescente na vida dos cidadãos conscientes e intervenientes nas sociedades do século XXI e de um modo geral motivadores, contribuindo assim para o sucesso na Matemática e do progresso das sociedades em que se inserem, em geral.

Dinis Pestana, investigador do Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa, afirma que a Probabilidade e a Estatística "são as ciências que nos ensinam a disciplinar a incerteza" em, [32], pese embora muitas vezes se deturpe a linguagem da Estatística, apesar de baseada em factos e trabalho científico, é muitas vezes usada para causar sensacionalismo, para deturpar e confundir tendo um grande impacto na formação da opinião pública das sociedades em geral.

1.2. Estado da Arte

As diretrizes para avaliação e ensino em Estatística foram elaborados e desenvolvidas em 2005 pela "Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education" (GAISE) e publicadas pela "American Statistical Association". Estes Princípios e Normas regem-se pelo "National Council of Teachers of Mathematics" (NCTM), uma organização profissional internacional empenhada na excelência do ensino e da aprendizagem da Matemática para todos os alunos. Essas diretrizes fornecem um quadro para a Educação Estatística a fim de habilitar os alunos dos vários níveis de ensino a alcançar a alfabetização estatística, tanto para sua vida pessoal como profissional. O GAISE concebe a Literacia Estatística como o objetivo principal da Educação Estatística, devendo capacitar os alunos para formular questões que possam ser investigadas com a recolha, organização e apresentação de dados; selecionar e utilizar métodos estatísticos adequados para analisar os dados; desenvolver e avaliar inferências e previsões baseadas em dados; e compreender e aplicar conceitos básicos de Probabilidade. A fim de promover a Literacia Estatística na idade adulta, a Estatística deve fazer parte dos currículos desde os primeiros anos escolares. O lema "statistical literacy for all" tem tido impacto apenas recentemente. Dinis Pestana, em [32] destaca a importância da capacidade de "ler números", sob a forma tabular ou qualquer outra codificação, no sentido de extrair deles a informação que eles contêm. Segundo Garfield e Ahlgren, em [18] deve-se iniciar a aprendizagem da Estatística facilitando a linguagem e enfatizando a visualização gráfica para que o aluno possa comparar a sua intuição, a sua habilidade visual e o conceito estatístico, indo ao encontro dos seus interesses e motivações. Fernandes, em [14] analisou o desenvolvimento e a introdução das Probabilidades e Estatística no ensino aprendizagem em vários países estrangeiros e em Portugal, afirmando o autor que com a introdução da chamada "Matemática Moderna" a partir de meados da década de sessenta no ensino liceal, sob a orientação de Sebastião e Silva, a Estatística e a Probabilidade começaram a fazer parte integrante dos currículos de Matemática em muitos países europeus e em particular em Portugal, tem seguido aproximadamente a tradição europeia, com algum atraso em relação a outros países.

À semelhança de outros países europeus, existe em Portugal atualmente um movimento crescente no sentido de enfatizar a Estatística e a Probabilidade no currículo do Ensino Secundário e no currículo do Ensino Básico, como parte da literacia básica em Matemática.

1.3. Breve Nota Histórica

A palavra Estatística parece ter ocorrido pela primeira vez no século XVIII. Alguns autores, atribuem esta designação ao alemão Gottfried Achemmel (1719-1772), que teria utilizado pela primeira vez o termo *statistik*, do grego *statizein*. Pode ainda ter a sua origem na palavra estado, do latim *status*, pelo aproveitamento que dela tiravam os políticos e o Estado. Nesta linha há ainda autores que referem que a palavra Estatística surge da expressão em Latim *statisticum collegium*, palestra sobre os assuntos do Estado, tendo dado origem à palavra em língua italiana "statista", que significa "homem de estado".

É certo que a Estatística esteve sempre ligada ao Estado. Os Estados e a Sociedade em geral dependem cada vez mais dela. Em todos os Estados existe uma instituição pública cuja missão é produzir e divulgar informação estatística oficial de qualidade.

Até ao início do século XVII, a Estatística limitava-se ao estudo dos assuntos de Estado e era utilizada pelas autoridades políticas na inventariação ou arrolamento dos recursos disponíveis.

A Estatística não passava de uma técnica de contagem, traduzindo numericamente factos ou fenómenos observados – Estatística Descritiva.

Na organização das sociedades sugiram necessidades que exigiam o conhecimento numérico dos recursos disponíveis. Era indispensável aos Estados o conhecimento de determinadas características da população que podiam incluir o seu número e composição assim como os seus rendimentos para se conhecerem, por exemplo, a quantidade de homens disponíveis para combater ou para se decidirem leis sobre impostos.

São várias as referências na História da Humanidade relativas a estudos estatísticos deste tipo. Passamos a referir as mais citadas e consensuais.

Heródoto, geógrafo e historiador grego, nascido no século V a. C., refere um estudo efetuado das riquezas da população do Egito em 3050 a. C. com o fim de averiguar os recursos humanos e económicos disponíveis para a construção das pirâmides.

Também existe referência a que no ano 2238 a. C. se terá realizado um levantamento estatístico com finalidades industriais e comerciais ordenado pelo imperador chinês Yao.

Na Bíblia referem-se recenseamentos efetuados por Moisés (1490 a.C.).

No ano 1400 a. C., Ramsés II mandou realizar um levantamento das terras do Egito, o recenseamento de toda a comunidade de Israel.

Uma das convenções da História é ligar a datação (a.C. ou d.C.) ao recenseamento populacional ordenado pelo imperador César Augusto, Imperador romano (63 a.C.-14 d.C.). Os romanos faziam o recenseamento dos cidadãos e dos bens. Eram os censores, magistrados romanos, que asseguravam o censo dos cidadãos.

As estatísticas realizadas por Pipino, em 758, e por Carlos Magno, em 762, sobre as terras que eram propriedade da Igreja, são algumas das estatísticas importantes de que há referência desde a queda do império romano.

Guilherme, "O Conquistador", que reinou entre 1066 e 1087, ordenou que se fizesse um levantamento estatístico da Inglaterra. Este levantamento pretendia ser exaustivo e incluía informações sobre terras, proprietários, uso da terra, animais e deveria servir de base para o cálculo de impostos.

Em Portugal existem registos de diversas estatísticas, "recenseamentos", com fins sobretudo de ordem militar que, por não serem exaustivos e/ou não se apoiarem em princípios estatísticos científicos credíveis, não podem ser considerados equivalentes à série de recenseamentos iniciada em 1864.

De facto foi em 1864 que se realizou o I Recenseamento Geral da população portuguesa, o primeiro a reger-se pelas orientações internacionais do Congresso Internacional de Estatística de Bruxelas de 1853, que marca o início dos recenseamentos da época moderna.

Os seguintes foram realizados em 1878, 1890, 1900, 1911, 1920, 1925, 1930 passando a ser realizados de 10 em 10 anos até 1970. Após este ano a sua realização é efetuada em anos terminados em 1: 1981, 1991 e 2001. O último data de 2011.

Em 1935 fundou-se o Instituto Nacional de Estatística (INE) que centraliza, até à atualidade, toda a atividade estatística oficial.

Atualmente a Estatística já não se limita apenas ao estudo da Demografia e da Economia. O seu campo de aplicação estendeu-se às mais diversas áreas do saber tais como Biologia, Medicina, Física, Psicologia, Indústria, Meteorologia, Educação, entre muitas outras.

A partir do século XVIII são vários os nomes que se destacaram na história da evolução da estatística, tais como Quételet (1796-1874), Galton (1822-1911), Karl Pearson (1857-1936), Weldon (1860-1906), Ronald Fisher (1890-1962).

A palavra probabilidade deriva do Latim *probare* (provar ou testar).

A Probabilidade teve início como ciência empírica, associada ao estudo dos jogos de azar.

Hoje, a Teoria das Probabilidades procura encontrar modelos matemáticos que descrevam certos fenómenos naturais em que se supõe intervir o acaso no sentido em que não é possível, a partir do passado, prever deterministicamente o futuro. São os fenómenos aleatórios.

Faz parte da natureza humana indagar acerca da possibilidade das mais diversas ocorrências do dia-a-dia. De facto, textos muito antigos referem a avaliação da Probabilidade na condução da vida como tendo sido estudada pelos Matemáticos chineses do século I. Além disso o Homem sempre se interessou por jogos de azar, tais como aqueles que envolvem dados e cartas. Os jogos de dados, na forma como hoje os conhecemos, realizam-se desde o Império Romano.

Os jogos de cartas foram introduzidos na Europa pelos chineses, indianos e egípcios, tornando-se bastante populares nos finais do séc. XIII.

Problemas envolvendo finanças, seguros e mortalidade surgiram também bem cedo na civilização ocidental.

Gerolamo Cardano (1501-1576) foi um dos primeiros cientistas a estudar problemas envolvendo Probabilidade. Cardano era Físico, Astrólogo e Matemático, tendo sido reitor da Universidade de Padova. Era também um exímio jogador de jogos de azar e escreveu uma obra tratando essencialmente desde tipo de jogos, denominada *Liber de Ludo*, onde introduziu, entre outras, a ideia de caracterizar a Probabilidade de um acontecimento como um número entre 0 e 1, mostrando compreender, no contexto de jogos de dados, o conceito de equiprobabilidade de acontecimentos, antecipando resultados importantes sobre limites de probabilidades e sobre a distribuição binomial. A sua obra foi publicada a título póstumo em 1633. Foi nesta altura que se considera que o cálculo de probabilidades, como ramo da Matemática, foi iniciado. Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre De Fermat (1601-1665) iniciaram, em 1654, troca de correspondência sobre Probabilidades e frequências de resultados em jogos de azar. Em 1657, Huygens (1629-1695), escreveu o primeiro Tratado Formal de Probabilidade baseado nas correspondências de Fermat e Pascal.

Bernouilli (1654-1705) inicia a interpretação Frequencista de Probabilidade, na sua obra póstuma *Ars Conjectandi* (1713).

Com Moivre (1667-1754) foram numerosos os avanços fundamentais no tratamento clássico do Cálculo de Probabilidades, que se mantiveram por quase um século. Leonhard Euler (1707-1783), sistematizou e organizou muitos problemas probabilísticos, Lagrange (1736-1813) também permitiu avanços na Teoria das Probabilidades. Laplace (1749-1827) foi o autor da primeira definição de Probabilidade (definição clássica de Probabilidade), publicada num tratado, em 1812, *Théorie Analytique des Probabilités* que unificou os seus trabalhos de probabilidades.

A transição para o sec. XIX foi marcada pelo *Théorie Analytique des Probabilités*, de Pierre-Simon, Marquis de Laplace (1749-1827), publicado em 1812.

No século XX as Probabilidades encontravam-se num estado de grande desenvolvimento em teoria e aplicações. De facto, conceitos essenciais à formulação do cálculo de probabilidades só muito recentemente foram enunciados como, por exemplo, o conceito de espaço amostra, de Von-Mises (1883-1953), no primeiro quartel do século XX, e o conceito de sigma-álgebra, introduzido por Emile Borel (1871-1956) que foi tão fundamental para a criação do integral de Lebesgue quanto para o desenvolvimento Axiomático da Probabilidade de Kolmogorov.

O problema da Axiomatização da Probabilidade foi um dos enumerados por Hilbert, em 1900, no Congresso Internacional de Matemática, e muitos tais como Diogo Pacheco de Amorim, Bernstein e Von-Mises, tentaram resolvê-lo mas sem o mesmo êxito que Kolmogorov. Esta axiomática, perspetivada por Kolmogorov e publicada em 1933 com título original, *Grundegebrieffe des*

Wahrscheinlichkeistheorie (Foundations of the theory of Probability) é a base da Teoria Moderna das Probabilidades. Esta axiomática tem como base três conceitos fundamentais: experiência aleatória, sigma-álgebra dos acontecimentos e medida de probabilidade.

A partir do século XIX a Estatística teve o seu grande desenvolvimento graças às contribuições da Probabilidade. A Estatística Inferencial depende da Probabilidade. Mas essa harmonia e simbiose entre as duas áreas não significa que ambas são idênticas. A Probabilidade continua a existir e a desenvolver-se independentemente das suas aplicações à Estatística.

1.4. Organização da tese

A tese está estruturada em seis capítulos.

Neste primeiro capítulo – *Introdução* – que termina com a organização geral da tese, realizou-se um enquadramento do estudo, fez-se uma introdução do problema com a justificação da sua importância e uma breve nota histórica.

No segundo capítulo – *A Estatística no Ensino obrigatório* – é efetuada uma análise do domínio de conteúdos de Organização e Tratamento de Dados (OTD) e no domínio de conteúdos de Estatística (EST).

No terceiro capítulo – *A Probabilidade no Ensino obrigatório* – é efetuada uma análise do domínio de conteúdos de Organização e Tratamento de Dados (OTD), no domínio de conteúdos de Cálculo Combinatório (CC) e no domínio de conteúdos de Probabilidade (PRB).

No quarto capítulo – *Análise comparativa do tema da Organização e Tratamento de Dados do Ensino Básico, referentes ao Programa anterior e ao novo Programa e Metas Curriculares da disciplina de Matemática* – é realizado uma comparação temática dos dois Programas em Estatística e Probabilidades.

O quinto capítulo – *Análise comparativa dos Temas da Estatística e Probabilidades do Ensino Secundário, referentes ao Programa anterior e ao novo Programa e Metas Curriculares da disciplina de Matemática A* – é realizado uma comparação temática dos dois Programas em Estatística, Combinatória e Probabilidades.

Finalmente, no sexto capítulo – *Conclusão* – são apresentadas as principais conclusões do estudo e são feitas algumas recomendações para futuros estudos, tendo em vista contribuir para melhorar e/ou aprofundar o estudo da problemática em causa.

Principais objetivos do trabalho e organização da tese:

Com o trabalho desenvolvido pretendemos compreender a filosofia patente nos novos Programas de Matemática, verificar objetivamente as diferenças entre os Programas (ainda em vigor para o Ensino Secundário) em termos de conteúdos e de exigência e explorar, do ponto de vista da fundamentação teórica, os conteúdos a lecionar nos domínios de Organização e Tratamento de Dados, Estatística e Probabilidades.

A pertinência deste estudo prende-se com a necessidade sentida pela generalidade dos professores de Matemática na clarificação de conteúdos, quer na vertente puramente teórica, como também na articulação e encadeamento das matérias no que diz respeito à Estatística e Probabilidades.

Assim, no capítulo II desta tese, é feita uma revisão e exploração teórica dos conceitos relacionados com a Estatística desde o 1º ciclo mas com mais incidência no 3º ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário. É usada a linguagem (alguma nova) que os Programas impõem, assim como notação. É dada especial atenção a tudo o que pode gerar dúvidas ou confusão. Nessa medida temos especial cuidado com algumas definições, tais como, variável estatística, amostra de uma variável estatística, graus de liberdade, desvios, variância, quartis e percentis, reta dos mínimos quadrados, variável explicativa e de resposta. A propósito dos quartis e percentis apresentamos resoluções de atividades propostas nas metas com o objetivo de esclarecer conceitos e que, eventualmente poderiam gerar dúvidas. Apresentamos ainda resoluções relativas a comportamentos da média de uma amostra relacionados não só com a dimensão da amostra mas também com a variância da amostra.

Relativamente a Probabilidades, a que se dedica o capítulo III, temos especial cuidado com a sua formalização teórica. Apresentamos a regra de Laplace e suas limitações. Os conceitos de independência de acontecimentos e de probabilidade condicionada são apresentados em consonância com o que é exigido no novo Programa. É dada ainda especial atenção ao Teorema da Probabilidade Total.

Existe a ideia generalizada que tudo muda com os novos Programas. Temos como objetivo a verificação de tal ideia.

Fizemos um estudo detalhado dos Programas no que diz respeito aos três temas ou domínios da Matemática, Organização e Tratamento de Dados, Estatística e Probabilidades assim como Teoria de Conjuntos e Combinatória. Apresentamos no capítulo IV um resumo de tal estudo desde o 1° ano do Ensino Básico até ao 12° ano do Ensino Secundário, com mais incidência e detalhe neste nível de ensino, assim como no 3° ciclo.

CAPÍTULO II – A ESTATÍSTICA NO ENSINO OBRIGATÓRIO

2.1. Introdução

Muito se tem falado e escrito sobre Literacia Estatística que se pode definir como a capacidade para compreender e avaliar de forma critica os resultados estatísticos que nos aparecem no dia-a-dia. Os Programas de Matemática no Ensino obrigatório em Portugal têm vindo desde há cerca de 40 anos a contemplar o estudo da Estatística.

Os Programas e Metas Curriculares de Matemática já em vigor, do 1.º ao 8.º ano de escolaridade incluem a Estatística desde o primeiro ano do Ensino Básico, com uma preocupação acrescida de rigor nas definições apresentadas e nos métodos considerados na mesma linha que os restantes conteúdos programáticos.

Como é por demais sabido, os dados são a matéria-prima da Estatística e as análises estatísticas compreendem a três etapas:

2.2. Amostragem, recolha de Dados.

Esta é uma etapa essencial uma vez que se pretende que o conjunto de dados a considerar seja representativo da população de onde foram recolhidos. Idealmente, o subconjunto da população (amostra) deve ser fiel à realidade da população. Uma amostra mal recolhida, viciada, enviesada, tendenciosa, de nada serve. Pode levar a conclusões e previsões erradas e distorcidas muito longe da realidade da população.
Uma das formas de garantir a representatividade de uma amostra é fazer a recolha ao acaso, de modo que qualquer elemento da população tenha a mesma probabilidade de ser escolhido que qualquer outro.

Este método pode ser de difícil execução em populações de dimensão muito elevada, mas pode sempre recorrer-se a outros métodos que simulam essa aleatoriedade como, por exemplo, a amostragem estratificada ou a amostragem por grupos.

2.2.1. Estatística Descritiva e análise exploratória de dados que visa o tratamento inicial dos dados. Esta fase inclui resumir, apresentar e explorar os dados.

2.2.2. Estatística Inferencial relativa à análise e interpretação dos dados, com vista a fazer induções sobre a População

No ensino obrigatório da disciplina de Matemática e de Matemática A, a preocupação é a análise exploratória de dados. A análise prévia dos dados, se devidamente efetuada confere um conhecimento alargado dos mesmos, permitindo, assim, e caso estes sejam uma boa representação da população, um processo inferencial fidedigno. Além disso as técnicas de organização e resumo de dados conferem aos estudantes competências muito importantes de estruturação do raciocínio, análise critica, leitura e interpretação de resultados numéricos ou gráficos tendo em conta a realidade dos problemas, além do domínio da linguagem estatística cada vez mais utilizada no dia-a-dia.

2.3. Estrutura dos Programas

No Programa e Metas Curriculares de Matemática os conteúdos programáticos encontram-se organizados, em cada ciclo, por domínios.

Nesta secção, percorremos o Programa no que diz respeito à Estatística, tentamos encadear, clarificar e exemplificar os conteúdos, em particular aqueles que são introduzidos pela primeira vez ou de uma forma diferente da constante nos anteriores Programas.

A Estatística é introduzida paulatinamente iniciando-se no domínio Organização e Tratamento de Dados (OTD), onde se introduzem os primeiros conceitos da Teoria de Conjuntos, usando linguagem apropriada e rigorosa. O encadeamento dos conteúdos permite que o aluno comece, desde muito cedo, a adquirir competência no resumo e organização de conjuntos de dados (organização em tabelas, representação gráfica e cálculo de medidas de localização central), ainda que não constituam amostras.

As definições fundamentais de população, unidade estatística, variável estatística e amostra são introduzidas no 6.° ano de escolaridade. Especial atenção deve ser dada à definição de variável estatística, como uma característica X que é medida nas diferentes unidades estatísticas podendo tomar, assim, diferentes valores (estes valores podem ser números ou modalidades). Desta forma cabem nesta definição, de forma natural, as variáveis do tipo quantitativo ou qualitativo.

Definição: Dada uma característica X da população (comum a todos os elementos da população), a medição desta característica nas diversas, digamos n, unidades estatísticas (ou indivíduos) a que temos acesso dá origem a um conjunto de dados $x_i, i = 1, \dots, n$ que constituem a «amostra» de dimensão n, $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. A característica X é denominada «variável estatística».

Convém referir que no Programa e Metas Curriculares não é introduzida a definição de variável aleatória que, sendo também uma função, necessita da definição de espaço amostral (domínio da variável aleatória) e este, por sua vez, da definição de experiência aleatória (conceitos introduzidos no 9.º ano).

No 6.º ano de escolaridade é ainda introduzido o conceito de variável estatística quantitativa ou numérica.

A introdução de estatísticas (funções dos dados) ordinais surge no 7.º ano de escolaridade com a designação de sequência ordenada dos dados abrindo espaço para a definição de mediana e, mais tarde, para a definição de quartis, no 8.º ano de escolaridade.

No 9.º ano de escolaridade os alunos já sabem classificar as variáveis estatísticas como qualitativas ou quantitativas. Neste ano curricular introduz-se o histograma como a representação adequada de dados quantitativos contínuos. No 10.º ano o histograma é utilizado no cálculo de percentis.

Uma vez que as estatísticas resumo basilares para a Estatística Inferencial são a média, variância e quantis, o novo programa incide nestas questões com uma abordagem que se pretende o mais elucidativa e rigorosa possível ao nível do 10.º ano.

Neste sentido, o conceito de «amostra da variável estatística x» é retomado como um conjunto de valores da característica x observados num subconjunto da população. Se a amostra tem dimensão n (se o conjunto tem n elementos) a observação da característica de interesse x é efetuada em n unidades estatísticas que podem ser numeradas de 1 a n. Tem-se, então, que x_i representa o valor da característica x no indivíduo i e x pode ser vista como uma função de domínio $\{1,2, \dots, n\}$ que a cada i faz corresponder x_i. $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é a notação utilizada para representar a amostra. Há ainda lugar à definição do conjunto de valores que $\underset{\sim}{x}$ toma, $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_m$ que não coincide naturalmente com a amostra.

Por exemplo, a amostra ordenada $\underset{\sim}{x} = (0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2)$ toma apenas 3 valores, a saber $\tilde{x}_1 = 0,\ \tilde{x}_2 = 1$ e $\tilde{x}_3 = 2$, com frequências $n_1 = 8, n_2 = 6$ e $n_3 = 7$.

Nota: Convém aqui fazer um parêntesis, pois a notação para a mediana de uma amostra $\tilde{x}$, e para os elementos que constituem o conjunto dos valores da amostra, $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$, onde n é o número total de valores da amostra é muito semelhante

2.4. Introdução do conceito de Mediana

As medidas de tendência central moda e média são introduzidas no 1.° e 2.° ciclo. A moda é introduzida no 3.° ano do 1.° ciclo e a média aritmética no 5.° ano do 2.° ciclo, no domínio de conteúdos OTD. O conceito de mediana é um conceito simples e intuitivo, que não oferece nenhum problema na sua interpretação e entendimento por parte do aluno, podendo ser introduzido com exemplos de modo a ilustrar o conceito e o aluno o adquirir com rigor e clareza. O seu bom entendimento será uma mais-valia, para a posterior compreensão do conceito de quartil. Para tal, a introdução inicial de uma sequência ordenada é fundamental e está bem explicita nos novos Programas e Metas Curriculares já implementados para o 7.° ano, no ano letivo 2013/2014.

A mediana ($\tilde{x}$ ou Me) de uma amostra de dimensão n é definida como

- o valor central da amostra ou conjunto de dados, se n é ímpar
- a média aritmética dos dois valores centrais da amostra ou conjunto de dados, se n é par

levando à interpretação que pelo menos metade dos dados têm valores não superiores à mediana (pelo menos 50% das observações são inferiores ou iguais à mediana e no máximo 50% das observações são superiores à mediana).

É necessário ter em atenção que quando a distribuição é simétrica, a média, a moda e a mediana coincidem. O mesmo não se passa quando a distribuição dos dados é assimétrica. Como medida de localização, a mediana é mais resistente do que a média, pois não é tão sensível aos dados, ao contrário da média que é muito influenciada pelos valores da variável muito grandes ou muito pequenos comparativamente com os restantes.

Exemplos retirados do Caderno de Apoio de Metas Curriculares do Ensino Básico, no 7.º Ano de Escolaridade, para o cálculo das medidas de localização central, o exemplo da pág. 45 é assinalado com ** o que corresponde a um nível de desempenho mais avançado e pág. 46 OTD7, em [7].

Exemplo 1: Na turma da Marta fizeram um estudo acerca do número de idas ao cinema dos alunos durante o primeiro período e concluíram que a mediana era 4. Sabe-se que a turma tem 27 alunos, que a Marta foi ao cinema só uma vez e a colega Ana foi 8 vezes.

1.1.Qual o número mínimo e máximo de alunos que foi ao cinema:

1.1.1. Mais do que 4 vezes?

1.1.2. Menos do que 4 vezes?

1.2. Sabendo que a média do conjunto de dados é 3, e a moda é 4, apresenta, justificando um possível conjunto de dados correspondente a este estudo.

Resolução:

1.1. Como, a mediana é o valor central, que divide ao meio uma sucessão ordenada, então, no máximo metade das observações têm valor superior à mediana e pelo menos metade têm valores inferiores ou iguais à mediana. A amostra ordenada é constituída por 13 valores abaixo ou iguais a 4 e 13 valores acima ou iguais a 4.

$$x_{(1)}\ x_{(2)}\ \dots\ x_{(13)}\ \tilde{x}\ x_{(14)}\ x_{(15)}\ \dots\ x_{(27)}$$

1.1.1. pelo menos metade dos alunos (13, no máximo) foi ao cinema mais que 4 vezes. O número máximo de alunos que foi ao cinema mais do que 4 vezes é 13 e o mínimo é 1 (porque a Ana foi 8 vezes).

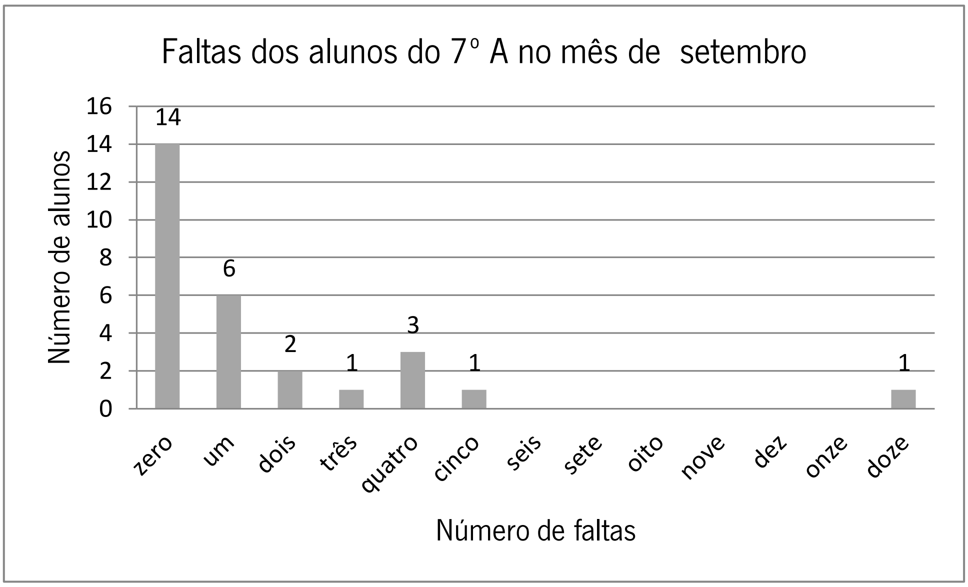
1.1.2. no mínimo 1 (a Marta foi ao cinema só uma vez) e, no máximo 13 (temos 13 valores menores ou iguais a 4 idas ao cinema).

1.2. Como a turma tem 27 alunos, a mediana é igual ao termo de ordem $\frac{27+1}{2}$, isto é o 14º termo, que é 4. Como há uma aluna, que foi 1 vez ao cinema e uma outra, que foi 8 vezes, a média dos dados é 3 e a moda é 4, então um possível conjunto de dados ordenados será:

0 0 0 0 0 0 0 1 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 8

ou, outro conjunto qualquer, desde que a soma dos 24 dados desconhecidos seja 68 e o valor com maior frequência absoluta seja o 4.

Exemplo 2: Observa atentamente o gráfico de barras relativo às faltas dos alunos do 7.° ano, da turma A, durante o mês de setembro. Determina a moda, a mediana do conjunto de dados e o número médio de faltas.



Resolução: $(n = 28)$

Ordenação dos dados: 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 2 2 3 4 4 4 5 12

Determinação da mediana: como n *é par* $(n = 28)$, *a mediana é a média aritmética da soma do termo de ordem* $\frac{28}{2}$ *e* $\frac{28}{2} + 1$, *isto é dos termos de ordem 14 e 15,*

logo $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

Determinação da moda: 0 (o valor com maior frequência)

Determinação da média: $\frac{0\times 14+1\times 6+2\times 2+3+4\times 3+5+12}{28} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

2.5. Reflexão sobre conceito, cálculo e interpretação de Quartis e Percentis

As definições de quartis e percentis necessitam de alguma reflexão até porque não são únicas e se encontram, no novo programa e metas curriculares, definidas de forma diferente das apresentadas no programa até agora em vigor (que usava definições diferentes no Ensino Básico e no Ensino

Secundário). O conceito de quartil surge pela primeira vez, como já foi referido, no 8.º ano de escolaridade, no domínio de conteúdos OTD8, no estudo de variáveis estatísticas quantitativas discretas, voltando ao seu estudo para variáveis quantitativas contínuas, no 10.º ano, no domínio de conteúdos da Estatística, EST10.

Os três quartis, Q_1, Q_2 e Q_3, de uma amostra de dimensão n são tais que:

- o segundo quartil, Q_2 coincide com a mediana dos dados;
- o primeiro quartil, Q_1

    — é a mediana do conjunto de dados de ordem inferior a $\frac{n+1}{2}$, se n é ímpar,

    — é a mediana do conjunto de dados de ordem inferior ou igual a $\frac{n}{2}$, se n é par.

A percentagem de dados não inferiores (superiores ou iguais) ao primeiro quartil é, pelo menos, 75% e a percentagem de dados inferiores ou iguais ao primeiro quartil é, pelo menos, 25%.

- o terceiro quartil, Q_3

    — é a mediana do conjunto de dados de ordem superior a $\frac{n+1}{2}$, se n é ímpar,

    — é a mediana do conjunto de dados de ordem superior ou igual a $\frac{n}{2}$, se n é par.

A percentagem de dados não superiores (inferiores ou iguais) ao terceiro quartil é, pelo menos, 75% e a percentagem de dados superiores ou iguais ao primeiro quartil é, pelo menos, 25%.

A respeito da definição de quartis apresentada no caderno de apoio do 3.º ciclo pode ler-se “não existe uma definição simples nem para o primeiro nem para o terceiro quartil, que, independentemente do número de dados em análise, implique a veracidade desta propriedade, mesmo na versão mais simples acima referida" onde a “versão mais simples" consiste em considerar apenas a primeira parte das definições apresentadas acima para Q_1 e Q_3.

A opção por esta definição é justificada por ser o método “mais amplamente utilizado, sendo em particular o que está programado na grande maioria das calculadoras" (cf. caderno de apoio do 3.º ciclo, [7]).

De assinalar que a definição de percentil apresentada no 10.° ano de escolaridade, no domínio de conteúdos EST10, onde o Percentil de Ordem k, $P_k,\ k \in]0{,}100]$, é igual à média dos elementos de ordem $\frac{kn}{100}$ e $\frac{kn}{100}+1$ na amostra ordenada se $k \neq 100$ e $\frac{kn}{100}$ for inteiro, e nos restantes casos, o elemento de ordem $\left[\frac{kn}{100}\right]+1$ na amostra ordenada, é coerente com esta na medida em que o percentil 25, P_{25}, é igual ao primeiro quartil, Q_1, o percentil 50, P_{50}, é igual á mediana, $\tilde{x}$ e o percentil 75, P_{75}, é igual ao terceiro quartil, Q_3, tendo, evidentemente, as mesmas fragilidades.

Exemplo 1: Considere-se a sequência ordenada de 9 dados:

1 1 2 2 5 6 7 7 8

A mediana dos dados é 5.

O primeiro quartil é a mediana dos 4 dados: $1\ 1\ 2\ 2$, isto é, $1{,}5$.

Ocorre que, apenas $(^2/_9) \times 100\% (\sim 22\%)$ dos dados são inferiores ou iguais a $1{,}5$ não satisfazendo a condição de pelo menos 25% dos dados serem inferiores ou iguais ao primeiro quartil (satisfazendo, no entanto, a condição de pelo menos 75% dos dados serem superiores ou iguais ao primeiro quartil).

Exemplo 2: Considere-se agora a seguinte sequência ordenada de 7 dados:

1 1 2 2 5 6 7

A mediana dos dados é 2.

O primeiro quartil é a mediana de $1\ 1\ 2$, isto é, 1.

Neste caso temos $(^2/_7) \times 100\% (\sim 29\%)$ dos dados inferiores ou iguais a 1 satisfazendo a condição de pelo menos 25% dos dados serem inferiores ou iguais ao primeiro quartil (não satisfazendo, no entanto, a condição de pelo menos 75% dos dados serem superiores ou iguais ao primeiro quartil - de facto só cerca de 55% dos dados se encontram nessa situação).

Esta situação é devidamente abordada (embora sem exemplos) no caderno de apoio (OTD8), onde se pode ler na pág. 87, em [7]: "Pode no entanto garantir-se que, nessas situações, as percentagens mínimas dos dados em questão se aproximam dos limiares considerados (respetivamente 25% e 75%) tanto quanto o desejarmos, desde que se considerem amostras com dimensões suficientemente elevadas."

Um outro problema, este relativo à interpretação, ocorre quando as amostras têm muitos valores repetidos (o que pode ocorrer quando se estuda variáveis quantitativas discretas). Esta situação encontra-se bastante bem explicada no exemplo do caderno de apoio do 10.º ano (EST10) pág. 56, em [8], mas apresentamos um outro exemplo com uma amostra de dimensão elevada.

Exemplo: De uma determinada população humana foi retirada uma amostra de 50 indivíduos que foram avaliados relativamente ao número de irmãos. Os indivíduos são as unidades estatísticas e a variável em estudo é o número de irmãos de cada indivíduo. Os resultados obtidos encontram-se na tabela seguinte:

N.º de irmãos	0	1	2	3	4
Frequência absoluta (n_i)	24	18	5	2	1

Qual a mediana dos dados? E qual o valor do percentil 10 da distribuição dos dados? Qual o valor para o primeiro quartil? Um indivíduo com 1 irmão a que percentil pertence?

Em relação à mediana, uma vez que a dimensão da amostra é par, esta é a média da observação 25 com a observação 26: $\frac{x_{(25)}+x_{(26)}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$, ou seja, 50% dos inquiridos da amostra ordenada tem, no máximo, 1 irmão. Se calcularmos P_1 obtemos 0. Então, pelo menos 10% dos inquiridos não tem irmãos e, no máximo, 90% dos inquiridos tem um número de irmãos superior a 0 (tem algum irmão).

O primeiro quartil continua a ser 0 (nenhum irmão, isto é, pelo menos 25% dos inquiridos não tem irmãos e, no máximo, 75% dos inquiridos tem um número de irmãos superior a 0). Podemos parar por aqui para constatar que a percentagem do número de indivíduos sem qualquer irmão é bastante superior a 10% ou mesmo a 25%. Esta percentagem é de quase 50%!!!

Quando procuramos saber a que percentil pertence um indivíduo com 1 irmão verificamos que este pertence ao percentil 84. Mas a mediana é 1, pelo que também pertence ao percentil 50. Podemos dizer que no máximo 50% dos indivíduos tem mais do que um irmão (sem estarmos a errar no que quer que seja) mas é certo que neste conjunto de dados apenas 16% dos indivíduos tem mais do que 1 irmão.

Uma vez mais se conclui que estes indicadores podem não fornecer limiares precisos e o exemplo anterior ilustra que este problema não é resolvido tomando apenas amostras de dimensão elevada.

Estas questões podem ser ultrapassadas quando se consideram variáveis quantitativas contínuas dado que não se esperam muitas repetições de dados neste tipo de variáveis (teoricamente os dados não se repetem mas, na prática, devido à discretizacão das suas unidades de medida, acabam por se repetir).

Vejamos, a este respeito, a atividade 1. da página 59 do caderno de apoio EST10, em [8].

Os seguintes dados referem-se à duração, em minutos, do percurso casa-escola realizado num dado dia por uma amostra aleatória de 32 alunos de uma escola secundária.

12	*7*	*44*	*16*	*22*	*12*	*11*	*5*
9	*32*	*20*	*62*	*18*	*29*	*35*	*13*
23	*21*	*8*	*41*	*36*	*15*	*49*	*17*
45	*7*	*19*	*37*	*65*	*6*	*18*	*44*

1.1. Ordene os dados da amostra e determine os percentis 50, 25 e 75.

1.2. Determine, dos 30% percursos com maior duração, aquele que tem menor duração.

1.3. A que percentil pertence o percurso com 36 minutos?

Resolução.

1.1. Sequência ordenada dos dados:

5	*6*	*7*	*7*	*8*	*9*	*11*	*12*
12	*13*	*15*	*16*	*17*	*18*	*18*	*19*
20	*21*	*22*	*23*	*29*	*32*	*35*	*36*
37	*41*	*44*	*44*	*45*	*49*	*62*	*65*

P_{50}, P_{25} *e* P_{75} *são, respetivamente, a mediana,* Q_1 *e* Q_3.

Assim, podemos usar o procedimento já estudado no 8.° ano para o cálculo destas medidas.

Mediana: média aritmética das observações dos números 16 e 17, $(n = 32)$

$\frac{x_{(16)}+x_{(17)}}{2} = \frac{19+20}{2} = 19{,}5$ *isto é, pelo menos metade dos alunos demora, no máximo,* $19{,}5$ *minutos no percurso.*

Q_1*: Mediana de 5 6 7 7 8 9 11 12 12 13 15 16 17 18 18 19* $(n_1 = 16)$

ou seja, $\frac{x_{(8)}+x_{(9)}}{2} = \frac{12+12}{2} = 12$*, pelo que no máximo* 75% *dos alunos demora mais de 12 minutos no percurso.*

Q_3*: Mediana de 20 21 22 23 29 32 35 36 37 41 44 44 45 49 62 65* $(n_2 = 16)$

ou seja, $\frac{x_{(24)}+x_{(25)}}{2} = \frac{36+37}{2} = 36{,}5$*, significando que pelo menos* 75% *dos alunos demora* $36{,}5$ *minutos ou menos no percurso e no máximo* 25% *dos alunos demora mais que* $36{,}5$ *minutos no percurso.*

Evidentemente que este procedimento leva exatamente aos mesmos resultados da utilização da fórmula para o cálculo dos percentis.

1.2. É pedido agora o percurso com menor duração dos 30% *dos percursos com maior duração (cauda direita da amostra ordenada). Por outras palavras pretende-se o valor para a frente do qual se encontram* 30% *das observações e para trás do qual (inclusivé) se encontram (pelo menos)* 70% *das observações: o percentil 70.*
Ora $0{,}7 \times 32 = 22{,}4 \notin \mathbb{N}$*, pelo que* $P_{70} = x_{([22{,}4]+1)} = x_{(23)} = 35$ *pelo que* 30% *dos percursos demoram mais que 35 minutos.*
1.3. Por último pede-se o percentil a que pertence o percurso com 36 minutos. Esta é a observação número 24, $x_{(24)}$*. Para trás desta observação (inclusivé) estão exatamente* 75% *das observações e para a frente (exclusive) exatamente* 25% *das mesmas. Logo o percurso com 36 minutos pertence ao percentil 75.*

Em rigor todos os percursos com duração no intervalo $[36{,}37[$ *minutos pertencem ao percentil 75.*

2.6. Cálculo de Percentis a partir do Histograma

A representação de dados através do histograma é introduzida no 9.° ano de escolaridade.

A construção de histogramas faz-se para representar distribuições relativas a variáveis quantitativas contínuas, permitindo também a representação de distribuições empíricas de variáveis quantitativas discretas que tomam um número elevado de diferentes valores.

A metodologia a seguir na construção de um histograma é a seguinte:

1. dividir as observações em classes justapostas de igual amplitude e calcular a frequência de cada classe;

2. marcar as classes no eixo dos xx de um sistema de eixos coordenados;

3. por cima de cada classe colocar uma barra que cubra toda a classe e cuja altura é igual ou proporcional à frequência absoluta da classe.

Apesar das classes poderem ter amplitudes diferentes, a regra consiste em considerar classes com a mesma amplitude exceto nos casos em que esta metodologia obscurece, dificulta ou altera a distribuição dos dados.

A escolha das classes é muito importante, pois o objetivo é obter um gráfico que realce a essência da população. Por vezes, uma alteração relativamente pequena na escolha das classes pode alterar substancialmente o histograma. Esta influência é maior quando o número de observações é pequeno. Note-se que um número demasiado elevado de classes produz um histograma muito irregular, com poucas observações em cada classe, enquanto que um número demasiado pequeno produz um histograma demasiado suave com muitas observações em cada classe.

Não existe uma regra universalmente aceite sobre o número de classes que devemos considerar. A título meramente indicativo, pode ser usada a regra de Sturges que determina o número de classes a utilizar, k, de acordo com a $2^{k-1} \cong n$, onde n é a dimensão da amostra.

Calcular características amostrais a partir do histograma (ou, de forma equivalente, a partir da tabela de frequências) produz valores aproximados para essas características uma vez que se perde informação. De qualquer maneira, o novo Programa inclui o cálculo de valores aproximados para os percentis com o intuito de se estabelecer um paralelismo entre percentagem ou proporção da área do histograma para trás de uma observação e a própria definição de percentil.

O exemplo foi retirado e/ou adaptado do caderno de apoio de Metas Curriculares do Ensino Básico, no 9.º ano de escolaridade, na resolução de problemas envolvendo a representação de dados em tabelas de frequência, diagramas de caule e folhas e histogramas, da pág. 134 do OTD9, em [7].

3. Representa num diagrama de caule e folhas e num histograma o conjunto de dados relativos às alturas dos alunos de duas turmas, registados nas seguintes tabelas:

Turma A

176	153	162	175	157	161	170	182	155	167	168	173	165
174	163	159	165	177	171	164	159	164	181	170	165	180

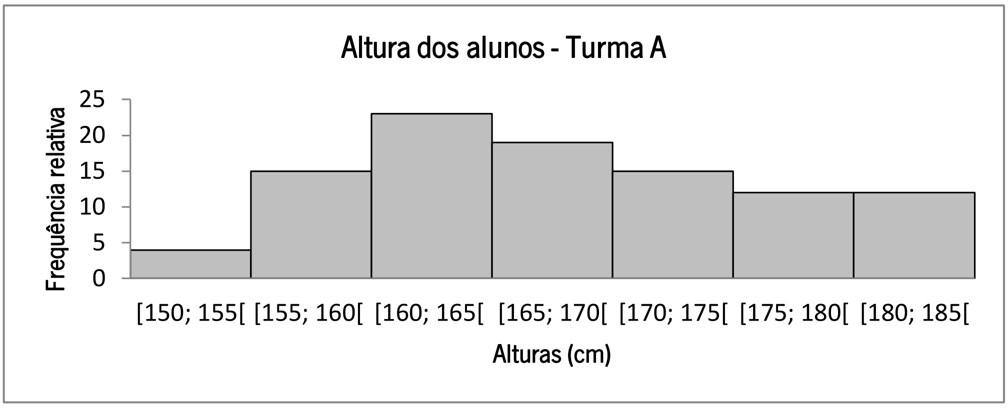
Turma B

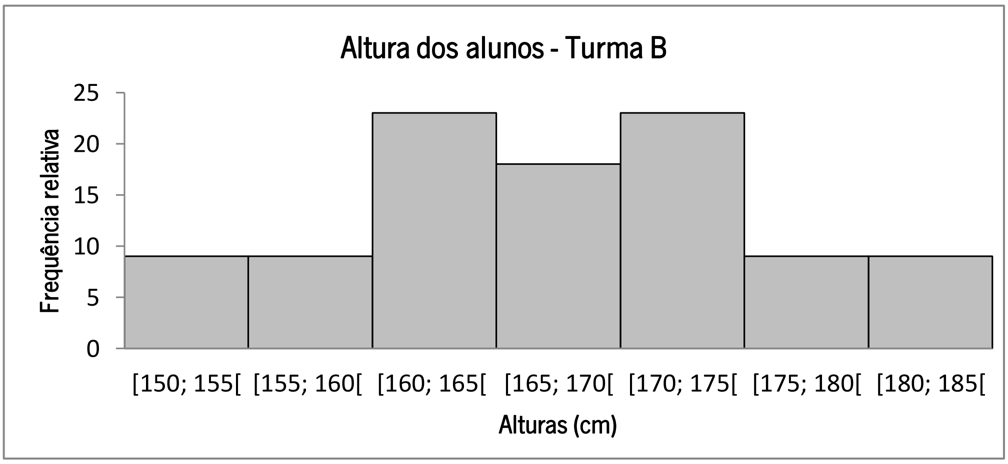
173	165	162	180	157	151	161	172	155	177	178
171	163	159	165	167	181	164	162	174	165	176

Alturas em cm – Turma A	Frequência Absoluta (f_i)	Frequência Relativa (fr_i)
[150; 155[	1	4%
[155; 160[	4	15%
[160; 165[	6	23%
[165; 170[	5	19%
[170; 175[	4	15%
[175; 180[	3	12%
[180; 185[	3	12%

Alturas em cm – Turma B	Frequência Absoluta (f_i)	Frequência Relativa (fr_i)
[150; 155[	2	9%
[155; 160[	2	9%
[160; 165[	5	23%
[165; 170[	4	18%
[170; 175[	5	23%
[175; 180[	2	9%
[180; 185[	2	9%

Resolução:





Folha	Caule	Folha
9 9 7 5 3	15	1 4 7 9
8 7 5 5 5 4 4 4 3 2 1	16	1 2 2 3 4 5 5 5 7
7 6 5 4 3 1 0	17	1 2 3 4 6 7 8
2 1 0	18	0 1
Turma A		Turma B

Afim de se estudar os percentis em dados agrupados e de se compreender melhor o descritor 4 "*Definir e conhecer as propriedades do percentil de ordem* k", página 23 do programa, em [12], a seguir transcrito:

“Percentil de ordem em dados agrupados em classes. Dados números naturais n *dimensão da amostra e* k, $k \leq 100$, *uma sequência crescente de números reais* $(a_1, a_2, \dots, a_m)$, *com* a_1 *o extremo inferior da primeira classe e* a_m *o extremo superior da última classe de um conjunto de dados quantitativos organizados nos intervalos de classe* $[a_i, a_{i+1}[$, *que se supõem de igual amplitude* $h > 0$, *chama-se Percentil de ordem* k, *o número* x *tal que* $\sum_{i=1}^{L-1}(a_{i+1} - a_i)n_i + (x - a_L)n_L = \frac{k}{100}\sum_{i=1}^{m}(a_{i+1} - a_i)n_i$, *ou seja, tal que* $h\sum_{i=1}^{L-1} n_i + (x - a_L)n_L = \frac{khn}{100}$, *onde* n_i *é a frequência absoluta do intervalo de classe* $[a_i, a_{i+1}[$, *e* L *é o maior número natural tal que* $\sum_{i=1}^{L-1} n_i \leq \frac{kn}{100}$ *. “*

Vejamos um exemplo (atividade 2., pág. 60 caderno de apoio EST10), em [8]:

Na seguinte tabela estão representados dados relativos ao peso (kg) de 35 crianças do sexo masculino com 20 meses de idade e acompanhadas num determinado centro de saúde.

8,3	*15,7*	*15,1*	*8,9*	*14,4*
11,9	*13,0*	*11,4*	*9,1*	*15,7*
10,2	*12,6*	*10,1*	*12,9*	*15,3*
14,7	*9,5*	*11,6*	*12,1*	*9,6*
9,2	*9,9*	*14,5*	*10,3*	*12,7*
15,1	*10,4*	*16,2*	*11,6*	*8,1*
12,1	*10,9*	*14,8*	*9,9*	*15,0*

2.1. Agrupe os dados em classes de amplitude 2.

2.2. Construa o respetivo histograma.

2.3. Utilizando o histograma, determine os percentis de ordem 10, 15, 50, 75 e 85.

2.4. Identifique a que percentil pertence o dado 11,4.

2.5. Quantas crianças deste estudo têm peso inferior ao percentil 75?

2.6. Qual a criança com peso mais elevado do conjunto das que têm os pesos 20% mais baixos?

2.7. Compare os valores obtidos com os valores estabelecidos pela organização mundial de saúde em 2006 e indicados na tabela junta.

Percentil	0,1	3	5	10	15	5	85	97	99,9
Peso (kg)	8,0	9,2	9,4	9,8	10,1	11,3	12,7	14,0	16,0

Resolução:

2.1. Trata-se de uma amostra de dimensão 35 e não 60, como consta do enunciado. Organização dos dados em 5 classes (fechadas à esquerda e abertas à direita) de amplitude 2. $(n = 35)$

classes:	*[8, 10[*	*[10, 12[*	*[12, 14[*	*[14, 16[*	*[16, 18[*
frequência (n_i)*:*	*9*	*9*	*6*	*10*	*1*

2.2. Histograma com altura das barras igual à frequência absoluta de cada classe. A área total do histograma é $2 \times 35 = 70$.

2.3. A área correspondente ao P_{10} *é 7, pelo que este percentil pertence à classe* $[8,10[$*, na tabela abaixo está registado a área e a classe a que pertencem os percentis de ordem 15, 50, 75 e 85.*

Percentil	*Área*	*Classe*
P_{10}	*7*	$[8,10[$
P_{15}	*10,5*	$[8,10[$
P_{50}	*35*	$[10,12[$
P_{75}	*52,5*	$[14,16[$
P_{85}	*59,5*	$[14,16[$

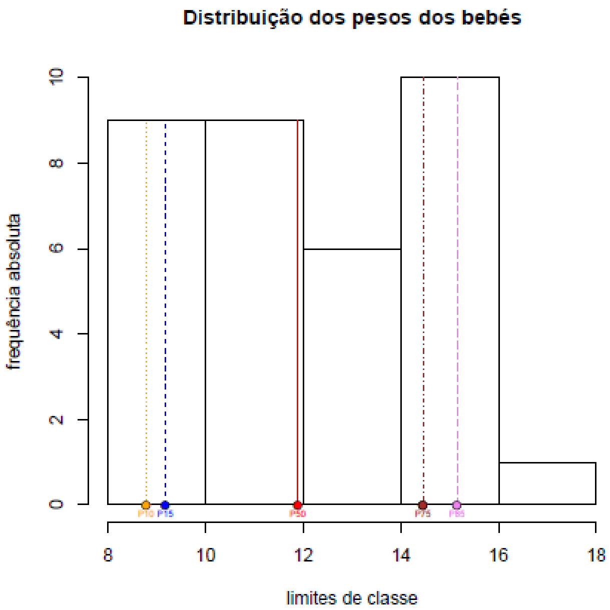
$$(P_{10} - 8) \times 9 = 7 \Leftrightarrow P_{10} = \frac{7 + 72}{9} = 8,(7)$$

$$(P_{15} - 8) \times 9 = 10{,}5 \Leftrightarrow P_{15} = \frac{10{,}5 + 72}{9} = 9{,}1(6)$$

$$(P_{50} - 10) \times 9 = 35 - 18 \Leftrightarrow P_{50} = \frac{17 + 90}{9} = 11,(8)$$

$$(P_{75} - 14) \times 10 = 52{,}5 - (12 + 18 + 18) \Leftrightarrow P_{75} = \frac{4{,}5+140}{10} = 14{,}45$$

$$(P_{85} - 14) \times 10 = 59{,}5 - (12 + 18 + 18) \Leftrightarrow P_{85} = \frac{11{,}5+140}{10} = 15{,}15$$



2.4. Pretende-se saber a que percentil pertence a observação 11,4, ou seja, se um bebé daquela idade pesa 11,4 kg em que percentil se encontra?

Vejamos quantos dados da amostra são inferiores ou iguais a 11,4.

Temos 15 observações menores ou iguais a 11,4 pelo que este dado pertence ao percentil 43 porque $(15/35) \times 100 \cong 43$

Olhando agora para o histograma $11{,}4 \in [10{,}12[$. *A área da barra de largura*

$(11{,}4 - 10)$ *e altura* 9 *é* $12{,}6$, *pelo que a área total para trás de* $11{,}4$ *é* $30{,}6$. *Ora* $30{,}6$ *é cerca de* 44% *(por defeito) da área total do histograma pelo que* $11{,}4$ *este dado pertence ao percentil* 43 *da distribuição dos dados.*

2.5. Vimos já que $P_{75} = 14{,}45$ *não é um valor observado. O número de crianças deste estudo com peso inferior (estritamente) a* P_{75} *é* 25 *(que corresponde a pouco mais do que* 71%*).*

Observação: os valores têm sido obtidos usando o histograma que, como sabemos, faz com que se perca informação sobre os dados. Temos valores aproximados para os indicadores. Apesar de não termos, como sabemos, um método único para o cálculo dos percentis, usando a sequência ordenada de dados os valores dos percentis são, apesar de tudo, mais exatos.

Sequência ordenada de dados:

8,1	8,3	8,9	P_{10}=9,1	9,2	P_{15}=9,5	9,6	9,9	9,9
10,1	10,2	10,3	10,4	10,9	11,4	11,6	11,6	Me=11,9
12,1	12,1	12,6	12,7	12,9	13,0	14,4	14,5	Q_3=14,7
14,8	15,0	15,1	P_{85}=15,1	15,3	15,7	15,7	16,2	

2.6. A criança com peso mais elevado que está abaixo do percentil do conjunto das que têm os pesos 20% mais baixos, será aquela que está imediatamente abaixo do P_{20}.

$P_{20} = ?$

$A_{\square} = \frac{20\times 70}{100} = 14$

$(P_{20} - 8) \times 9 = 14 \Leftrightarrow P_{20} = \frac{14+72}{9} = 9,(5)$

Pelo que a criança pesa 9,5 kg.

2.7. Para proceder à comparação é necessário calcular os percentis $P_{0,1}$, P_3, P_5, P_{97} *e* $P_{99,9}$.

$$A_{\square} = \frac{0{,}1 \times 70}{100} = 0{,}7$$

$(P_{0,1} - 8) \times 9 = 0{,}7 \Leftrightarrow P_{0,1} = \frac{0{,}7+72}{9} = 8{,}0(7)$

$A_{\square} = \frac{3\times 70}{100} = 2{,}1$

$(P_3 - 8) \times 9 = 2{,}1 \Leftrightarrow P_3 = \frac{2{,}1+72}{9} = 8{,}2(3)$

$A_{\square} = \frac{5\times 70}{100} = 3{,}5$

$(P_5 - 8) \times 9 = 3{,}5 \Leftrightarrow P_5 = \frac{3{,}5+72}{9} = 8{,}3(8)$

$A_{\square} = \frac{97 \times 70}{100} = 67{,}9$

$(P_{97} - 14) \times 10 = 67{,}9 - (12 + 18 + 18) \Leftrightarrow P_{97} = \frac{19{,}9+140}{10} = 15{,}99$

$A_{\square} = \frac{99{,}9 \times 70}{100} = 69.93$

$(P_{99,9} - 16) \times 1 = 69{,}93 - 68 \Leftrightarrow P_{99,9} = 17{,}93$

Na tabela abaixo está registada a comparação dos valores obtidos com os da pela organização mundial de saúde em 2006:

Percentil:	*0,1*	*3*	*5*	*10*	*15*	*50*	*85*	*97*	*99,9*
Peso (kg):	*8,0*	*9,2*	*9,4*	*9,8*	*10,1*	*11,3*	*12,7*	*14,0*	*16,0*
Peso (kg) amostra:	*8,1*	*8,2*	*8,4*	*8,8*	*9,2*	*11,9*	*15,2*	*16,0*	*17,9*

Os valores dos percentis mais pequenos são menores do que os valores da OMS e os valores dos percentis maiores, são maiores do que os valores da OMS de 2006.

2.7. Média, Variância e Desvio Padrão

Relativamente às estatísticas média, variância e desvio padrão, importa salientar as propriedades especiais destas medidas de resumo de dados, em particular a facilidade com que se demonstram e verificam as suas propriedades, em detrimento de outras (também de localização central e de dispersão) tais como a mediana e a amplitude inter-quartis. Estas propriedades são demonstradas recorrendo, a maior parte das vezes, a propriedades dos somatórios (subdomínio do 10.º ano).

Para chegar ao conceito de variância, inicia-se pela introdução da definição da média de uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, dado $n \in \mathbb{N}$, para dados simples $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, e para dados agrupados $\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \tilde{x}_j n_j}{n}$, sendo m o número de classes e n_j a frequência absoluta do valor $\tilde{x}_j$, com recurso do uso do símbolo de somatório, bem como algumas das suas propriedades que poderão ser dadas como exercício.

2.7.1. (Não) resistência da Média

A média da amostra é uma medida de localização pouco resistente a valores extremos (ao contrário da mediana). De facto, se pensarmos no significado físico da média como centro de gravidade de uma distribuição de dados em que os "pesos" dos dados são, não só o seu valor como também a frequência com que ocorrem, é fácil perceber que um dado "pesado" (com um valor absoluto muito maior que os restante ou com uma frequência muito mais elevada que os restantes) "arrasta" o centro de gravidade da distribuição (média) para junto de si.

Por exemplo, se a variável é uniformemente distribuída em, digamos, 11 valores, a média é o centro da distribuição dos dados. No entanto, se alterarmos uma das observações fazendo-a mais pesada (com uma maior frequência) ou se substituirmos uma por uma maior em valor absoluto, a média desloca-se no sentido dessa observação. Este caso encontra-se ilustrado na figura seguinte.

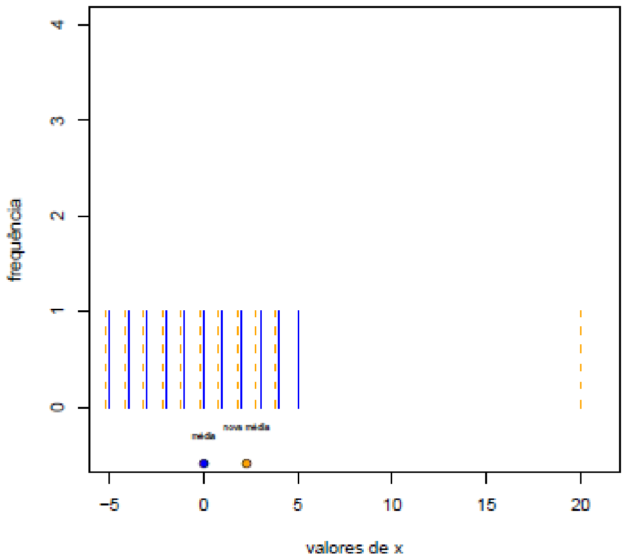


Gráfico 1. A não Resistência da Média

Pode ainda ler-se no caderno de apoio do 10.° ano, pág. 52, EST10, em [8]:

"a média situa-se sempre entre o máximo e o mínimo da amostra e não pode ser igual ao mínimo sem ser também igual ao máximo, o que acontece se e somente se a amostra for constante."

Estando proposta a seguinte atividade, transcrita na página a seguir:

1. * Considere a amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e seja $x_{(1)} = min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $x_{(n)} = max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

1.1. Justifique que $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_{(1)} = nx_{(1)}$ e que $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_{(n)} = nx_{(n)}$.

1.2. Conclua que se tem $x_{(1)} \leq \bar{x} \leq x_{(n)}$.

1.3. Mostre que se $\bar{x} = x_{(1)}$ ou $\bar{x} = x_{(n)}$ então a amostra é constante.

1.4. Conclua da alínea anterior que se algum valor da amostra for superior a $x_{(1)}$ então $\bar{x} > x_{(1)}$ pelo que só se tem $\bar{x} = x_{(1)}$ se a amostra for constante.

Apesar de estar marcada com * esta atividade é de simples resolução, obtendo-se os resultados por simples aplicações das definições de $\bar{x}$, $x_{(1)}$ e $x_{(n)}$. De qualquer maneira os resultados em si são suficientemente importantes para a atividade ser incluída.

2.7.2. Desvios em relação à Média

Esta é uma noção fundamental para a definição de variância (ou de desvio padrão).
Dada uma amostra de dimensão n, $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, com média $\bar{x}$, é possível definir n desvios (um para cada $i \in \{1,2, \dots, n\}$): $d_i = x_i - \bar{x}$. A soma destes n desvios é nula:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = n\bar{x} - n\bar{x} = 0.$$

2.7.3. Soma dos Quadrados dos Desvios; Graus de Liberdade

A soma dos quadrados dos desvios $SS_x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\bar{x}^2$ fica completamente determinada pela soma de apenas $n-1$ das suas parcelas, sabendo que é nula a soma dos desvios, por essa razão dizemos que "SS_x tem $n-1$ graus de liberdade", (conceito novo no programa e metas curriculares), isto é, somente $n-1$ das parcelas da soma dos quadrados dos desvios dos x_i em relação à média são independentes, pois a parcela restante fica determinada pelo facto de ser nula a soma dos desvios em relação à média, ou seja $\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$, com

$d_i = x_i - \bar{x}$, sendo possível calcular d_n em função de $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$, mas d_n só fica determinado se for conhecida a totalidade desses $n - 1$ desvios.

A este propósito, e como ilustração da propriedade atrás referida, é proposta a seguinte atividade na página 53 do caderno de apoio EST10, em [8]:

1. Para uma certa amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_6)$, conhecem-se os desvios $d_i = x_i - \bar{x}$ para $i = 1,2, \dots ,5$: $d_1 = 3, d_2 = -2, d_3 = 5, d_4 = -1, d_5 = 2$

1.1. Determine o valor de d_6.

Resolução: *Como* $\sum_{i=1}^{6} d_i = 0 \Leftrightarrow d_6 = -\sum_{i=1}^{5} d_i \Leftrightarrow d_6 = -7$

1.2. Calcule a soma dos quadrados dos desvios, SS_x.

Resolução: $SS_x = \sum_{i=1}^{6} (x_i - \bar{x})^2 =$

$= \sum_{i=1}^{6} {d_i}^2 = 3^2 + (-2)^2 + 5^2 + (-1)^2 + 2^2 + (-7)^2 = 92.$

1.3. Sabendo que $x_1 = 10$, identifique a amostra $\underset{\sim}{x}$ e calcule o valor da respetiva média.

Resolução:

$d_1 = x_1 - \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} = x_1 - d_1 \Leftrightarrow \bar{x} = 10 - 3 = 7$

$d_2 = x_2 - \bar{x} \Leftrightarrow x_2 = d_2 + \bar{x} \Leftrightarrow x_2 = -2 + 7 = 5$

$d_3 = x_3 - \bar{x} \Leftrightarrow x_3 = d_3 + \bar{x} \Leftrightarrow x_3 = 5 + 7 = 12$

$d_4 = x_4 - \bar{x} \Leftrightarrow x_4 = d_4 + \bar{x} \Leftrightarrow x_4 = -1 + 7 = 6$

$d_5 = x_5 - \bar{x} \Leftrightarrow x_5 = d_5 + \bar{x} \Leftrightarrow x_5 = 2 + 7 = 9$

$d_6 = x_6 - \bar{x} \Leftrightarrow x_6 = d_6 + \bar{x} \Leftrightarrow x_6 = -7 + 7 = 0$

Logo $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (10,5,12,6,9,0)$.

$\bar{x} = \frac{10+5+12+6+9+0}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{x} = 1,1(6)$

A resolução desta atividade, apesar de muito simples, é muito útil. Convém referir que o conhecimento de qualquer uma das observações da amostra é suficiente para o cálculo da média, desde que se conheça o desvio dessa observação em relação à média (questão 1.3.).

2.7.4. Variabilidade da amostra; Variância

A soma dos quadrados dos desvios em relação à média é tanto menor quanto mais próximos da média estiverem os valores da amostra.

A soma dos quadrados dos desvios em relação à média fornece, por essa razão, uma medida da dispersão ou variabilidade da amostra. No entanto, esta soma cresce demasiado à medida que se vão incluindo novos elementos não resultando, por isso, um bom indicador para a variabilidade.

Esta questão pode ser contornada se se considerar a média dos quadrados dos desvios. Assim, um indicador da variabilidade de uma amostra de dimensão n mais adequado é $\frac{SS_x}{n}$. Ora, prova-se que, $\frac{SS_x}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$ não é um estimador centrado da variância populacional uma vez que o valor médio desta estatística não é igual a σ^2 (variância populacional). De facto, tem-se que $\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$ pelo que aquele estimador é apenas assintoticamente centrado.

Por esta razão, neste novo Programa, a variância da amostra é definida como ${s_x}^2 = \frac{SS_x}{n-1}$ e desvio padrão, como habitualmente, a raiz quadrada positiva da variância $s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}}$ (o desvio padrão tem a vantagem de estar na mesma unidade das observações, ta como a média).

A atividade que se apresenta a seguir no caderno de apoio EST10, pág. 58, em [8], tem como objetivo ilustrar o comportamento da média e das somas dos quadrados dos desvios de uma amostra conjunta em relação às médias e às somas dos quadrados dos desvios das amostras que a constituem (onde a intuição pode ser enganadora!). Esta atividade tem uma gralha na fórmula em 2.2. (que corrigimos).

> 2. Num estudo sobre a resistência individual ao esforço físico, submeteram-se dois grupos de indivíduos a dois aparelhos diferentes (bicicleta-ergómetro e passadeira rolante), medindo-se o tempo (em minutos) até ao consumo máximo de oxigénio. Os resultados foram os seguintes:
>
> Bicicleta: amostra $\underset{\sim}{x} = (7.5, 8.7, 9.2, 9.8, 10.9, 11.1, 11.2, 12.8, 13.5)$ $(n_x = 9)$
>
> Passadeira: amostra $\underset{\sim}{y} = (8.7, 13.2, 13.8, 14.7, 15.5, 16.2, 16.2, 17.8)$ $(n_y = 8)$

2.1 Calcule $\bar{x}$ e $\bar{y}$ e, com base nestes valores e na dimensão das duas amostras, calcule a média da amostra conjunta $\underset{\sim}{z}$.

2.2 Calcule SS_x, SS_y e SS_z, indique os respetivos graus de liberdade e verifique que $SS_z = SS_x + SS_y + n(\bar{x} - \bar{z})^2 + m(\bar{y} - \bar{z})^2$.

2.3 Para qual dos aparelhos foi observada uma maior variabilidade nos tempos até ao consumo máximo de oxigénio?

Resolução:

2.1. A média da amostra conjunta $\underset{\sim}{z} = (\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y})$ *não é igual à soma da média de* $\underset{\sim}{x}$ *com a média de* $\underset{\sim}{y}$. *A dimensão de* $\underset{\sim}{x}$ *é* $n = 9$, *a dimensão de* $\underset{\sim}{y}$ *é* $m = 8$ *e a dimensão de* $\underset{\sim}{z}$ *é* $n + m = 17$.

$$\bar{z} = \frac{1}{17}\sum_{i=1}^{17} z_i = \frac{1}{17}\left(\sum_{i=1}^{9} x_i + \frac{1}{17}\sum_{i=1}^{8} y_i\right) = \frac{1}{17} \times 9\bar{x} + \frac{1}{17} \times 8\bar{y} =$$

$$= \frac{9}{17} \times 10{,}52 + \frac{8}{17} \times 14{,}51 = 12{,}4$$

2.2. $SS_x = \sum {x_i}^2 - n\bar{x}^2 = 29{,}72$

$SS_y = \sum {y_i}^2 - m\bar{y}^2 = 53{,}53$

$SS_z = \sum {z_i}^2 - (n + m)\bar{z}^2 = 150{,}68$

A fórmula a verificar é $SS_z = SS_x + SS_y + n(\bar{x} - \bar{z})^2 + m(\bar{y} - \bar{z})^2$ *(verificação numérica simples).*

Quanto aos graus de liberdade: SS_x *tem* 8 *graus de liberdade,* SS_y *tem* 7 *graus de liberdade e* SS_z *tem* 16 *graus de liberdade.*

2.3. ${s_x}^2 = \frac{29{,}72}{8} = 3{,}71$

${s_y}^2 = \frac{58{,}58}{7} = 7{,}65$ *pelo que a amostra* $\underset{\sim}{x}$ *apresenta menor variabilidade.*

Em resposta ao exercício, dizemos que na passadeira os tempos até ao consumo máximo de oxigénio apresentam uma maior variabilidade em relação à sua média.

Tal como na média poderão ser dadas as propriedades da variância e do desvio padrão, como exercício a resolver pelo aluno, é o caso do exercício com * do Caderno de Apoio do 10.º ano das Metas Curriculares, EST10, pág. 53, em [8]:

3. Dado um número real a, considere as amostras $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\underset{\sim}{y} = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$. Utilizando a fórmula de cálculo de SS_y e propriedades dos somatórios, mostre que $SS_y = a^2 SS_x$.

Resolução: *Se* $\underset{\sim}{y} = a\ \underset{\sim}{x}$, *pela propriedade da média de uma amostra* $\bar{y} = a\bar{x}$.

$SS_y = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 - n\bar{y}^2 = \sum_{i=1}^{n}(ax_i)^2 - n(a\bar{x})^2 =$

$= \sum_{i=1}^{n} a^2 {x_i}^2 - na^2\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} a^2({x_i}^2 - n\bar{x}^2) =$

$= a^2 \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\bar{x}^2 = a^2 SS_x.$

2.8. A Média da amostra como estimativa do Valor Médio da População

No caderno de apoio do 10.º ano de escolaridade, página 59, em [8], estão propostas atividades com o objetivo de se mostrar empiricamente que:

1. a média amostral converge, em certo sentido, para a média populacional à medida que aumenta a dimensão da amostra;

2. a precisão conseguida quando se estima μ (média da população) através de $\bar{x}$ (média da amostra) depende da variabilidade da população σ^2.

Para 1., consideramos a experiência que consiste em lançar uma moeda 1000 vezes (equivalente a lançar 1000 moedas idênticas 1 vez). Os resultados destes 1000 lançamentos constituem a população finita de dimensão 1000. Consideramos uma variável estatística que pode tomar 2 valores (quer na população, quer na amostra): 0 ou 1 (0 se sai coroa, 1 se sai cara).

A média populacional é p: proporção de caras na população. Neste caso, $0{,}2$, pelo que a moeda é viciada.

Começamos por gerar 50 amostras de dimensão 10 e calculamos a média de cada uma destas 50 amostras.

No fim deste procedimento ficamos com 50 valores da média amostral de dimensão 10 e elaboramos um gráfico ilustrativo.

De seguida retiramos da população 50 amostras de dimensão 100 e calculamos as respetivas médias cujos valores são representados no mesmo gráfico. O resultado é o que se apresenta a seguir:

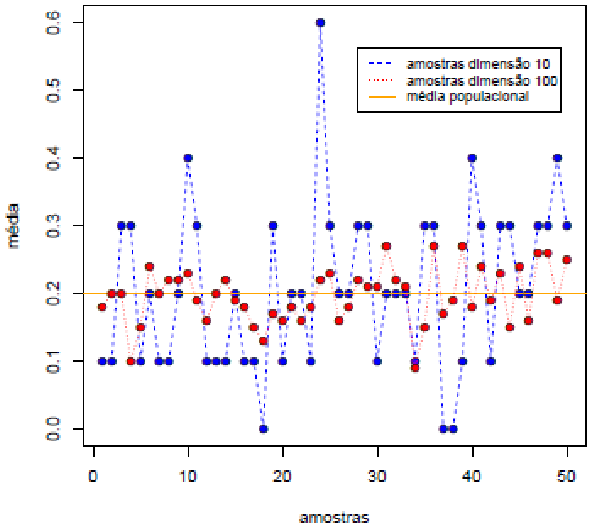


Gráfico 2. Médias de Amostras de dimensão variável

À medida que a dimensão da amostra aumenta, o valor da média amostral tende para o valor da média populacional.

Em relação a 2., usamos o seguinte procedimento:

1. consideramos duas populações com desvios-padrão suficientemente diferentes (podem ter a mesma média populacional);

2. de cada uma das populações selecionamos m amostras de dimensão n;

3. calculamos a média de cada uma das m amostras em cada população e representamos graficamente os pontos obtidos.

Consideramos populações fictícias. Partimos de:

• população 1: alturas de 1000 (dimensão da população) estudantes de 18 anos do género feminino numa região do interior Norte de Portugal;

• população 2: alturas de 5000 (dimensão da população) estudantes de 18 anos do género feminino do litoral Norte de Portugal

• a altura média da população 1 é igual à altura média da população 2 e igual a 165 cm

• o desvio padrão das alturas da população 1 é 6 cm, enquanto que o desvio padrão da população 2 é 15 cm.

Para os dados relativos às populações fictícias simulamos 1000 dados de uma N(165,6) para a população 1 e 5000 dados de uma N(165,15) para a população 2.
De seguida retiramos 20 amostras de dimensão 50 de cada uma das populações e calculamos as respetivas médias que representamos num diagrama.

O resultado é o seguinte:

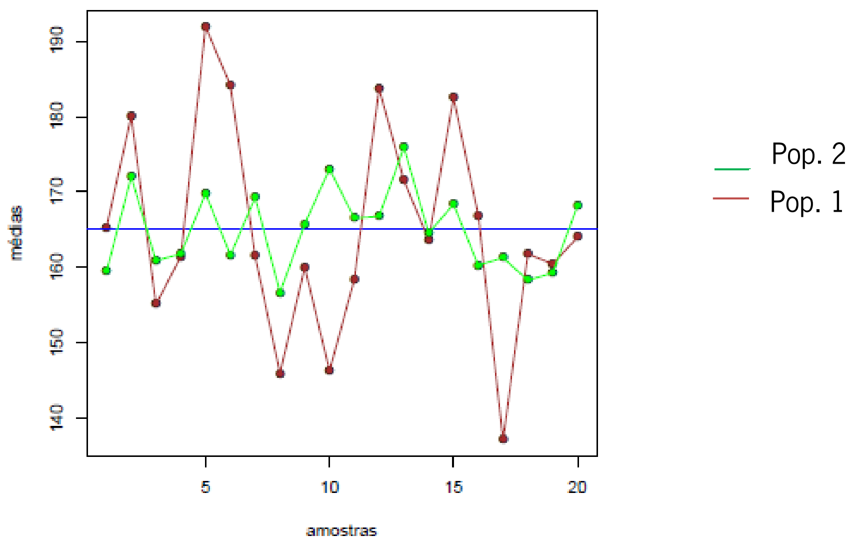


Gráfico 3. Média Amostral vs. Média Populacional

> Quanto maior a variabilidade da amostra, a média amostral tende para o valor médio populacional.

Neste novo Programa é ainda introduzida a conhecida desigualdade de Chebyshev no contexto de amostras de uma variável estatística.

O conhecimento do par $(\bar{x}, s_x)$ relativo a uma amostra $\underset{\sim}{x}$ de dimensão qualquer, com desvio padrão não nulo, fornece informação importante sobre o comportamento da distribuição dos dados.

De facto, dada uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, de desvio padrão s_x estritamente superior a zero, para qualquer k real positivo, a proporção de unidades estatísticas com valores fora do intervalo

$$]\bar{x} - ks_x, \bar{x} + ks_x[$$

é sempre menor ou igual a $\frac{1}{k^2}$.

De forma equivalente, a proporção de unidades estatísticas com valores no intervalo

$$[\bar{x} - ks_x, \bar{x} + ks_x]$$

é sempre superior a $1 - \frac{1}{k^2}$.

Assim, tem-se que:

- a proporção de unidades estatísticas que distam da média da amostra menos que duas vezes o desvio padrão da mesma, é sempre maior que 0,75; $(1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75)$

- a proporção de unidades estatísticas que distam da média da amostra menos que três vezes o desvio padrão da mesma, é sempre maior que 0,89. $(1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} = 0{,}89)$

Demonstração da propriedade:

Seja $\underset{\sim}{x}$ uma amostra de dimensão n (n qualquer). Suponhamos que r dos n elementos da amostra se encontram fora do intervalo $[\bar{x} - ks_x, \bar{x} + ks_x]$.

O objetivo é determinar um limite superior para r (em função de n e de k).

Sejam $x_1, x_2, \dots, x_r$ os r elementos da amostra que se encontram fora do intervalo acima.

Tem-se então que, para todo $i \in \{1,2,\dots,r\}, |x_i - \bar{x}| > ks$ com s desvio padrão da amostra $\underset{\sim}{x}$. Ora, tal implica que $(x_i - \bar{x})^2 > k^2s^2$, onde s^2 é a variância da amostra $\underset{\sim}{x}$.

Então, $\sum_{i=1}^{r}(x_i - \bar{x})^2 > k^2s^2r$ que, por sua vez, implica que $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 > k^2s^2r$.

Mas esta expressão é equivalente a $(n-1)s^2 > k^2s^2r$ que leva a que

$ns^2 > k^2s^2r \Leftrightarrow m > k^2r$. Sai agora $r < \frac{n}{k^2}$. *C.q.m.*

2.9. Reta de Mínimos Quadrados

No novo Programa e Metas Curriculares do 11.º ano de escolaridade, em EST11, inicia-se pela primeira vez o estudo de retas de mínimos quadrados associada a uma sequência de pontos do plano, organiza os descritores relativos a "Reta de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficiente de correlação" introduzindo noções fundamentais no estudo de regressão de forma autónoma e independente da Estatística.

Assim, considerando um conjunto de pontos n pontos do plano $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$, e uma reta de equação $y = ax + b, \forall a, b \in \mathbb{R}$, é introduzido o conceito de «desvio vertical de um ponto em relação à reta»

$$e_i = y_i - (ax_i + b) \tag{1}$$

cuja representação gráfica (fundamental para a clarificação do conceito) se encontra no gráfico a seguir.

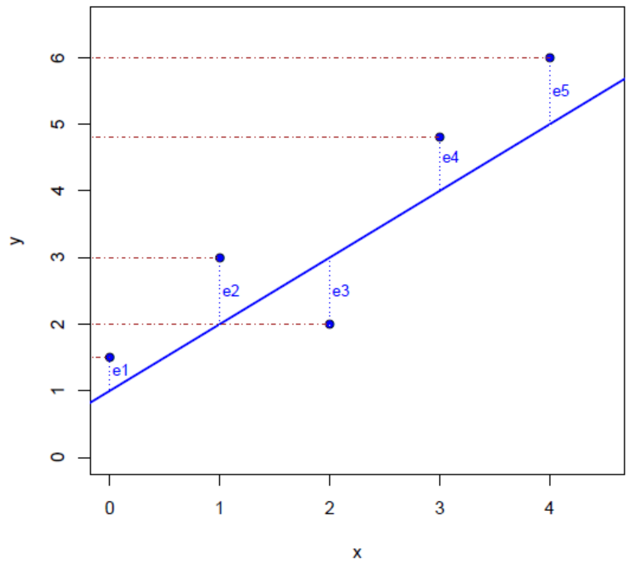


Gráfico 4. Desvio Vertical de um Ponto em relação a uma Reta

2.9.1. Parâmetros da Reta dos Mínimos Quadrados

O problema de determinar os parâmetros da reta, a e b, de forma a minimizar a soma dos quadrados dos desvios, envolve a minimização de uma função de duas variáveis, $\min de\, f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} {e_i}^2$. Mas se se $b = \bar{y} - a\bar{x}$, o problema é agora de fácil resolução.

Pretende-se determinar,

$$\text{Min}, \mathrm{a} \in \mathbb{R}\, de\, f(a) = \sum_{i=1}^{n} e_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - \bar{y} + a\bar{x})^2$$

Mas, $(y_i - ax_i - \bar{y} + a\bar{x})^2 = \left(y_i - \bar{y} + a(\bar{x} - x_i)\right)^2 =$

$$= (y_i - \bar{y})^2 + a^2(\bar{x} - x_i)^2 - 2a(y_i - \bar{y})(\bar{x} - x_i)$$

Pelo que,

$f(a) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n} a^2(\bar{x} - x_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} 2a(y_i - \bar{y})(\bar{x} - x_i)$

Donde, $f'(a) = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(\bar{x} - x_i) + 2a\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2$.

Resolvendo a equação $f'(a) = 0$ obtém-se

$$a = -\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(\bar{x} - x_i)}{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(\bar{x} - x_i)}{SS_x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{y} - y_i)(\bar{x} - x_i)}{SS_x} \tag{2}$$

O ponto $(a, f(a))$ é mínimo de f porque $f''(a) = 2 > 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

É obtida uma forma mais expedita para a manipulação algebrica $\sum_{i=1}^{n}(\bar{y} - y_i)(\bar{x} - x_i)$.

Tem-se que $\sum_{i=1}^{n}(\bar{y} - y_i)(\bar{x} - x_i) = \sum_{i=1}^{n}(\bar{y}\bar{x} - x_i\bar{y} - y_i\bar{x} + x_i y_i) =$

$= n\bar{y}\bar{x} - n\bar{y}\bar{x} - n\bar{y}\bar{x} + \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, pelo que

$$\boxed{a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{y}\bar{x}}{SS_x}} \tag{3}$$

Tudo o que foi dito até aqui, relativamente à obtenção dos parâmetros da reta dos mínimos quadrados e manipulação algébrica da fórmula de cálculo do parâmetro a de modo a obter a expressão em (3), é o exigido no descritor 1.3, página 43 EST11 do novo Programa, em [12]. Note-se, porém, que este descritor (quando se utilizam n pontos sem que este número de pontos, n, esteja concretizado) tem o sinal $+$ o que significa que só deve ser exigido sob determinadas circunstâncias (nomeadamente se o nível de conhecimentos dos alunos for elevado). Se o número de pontos n estiver fixado com n pequeno, conforme atividade 1, página 39 do caderno de apoio EST11, em [9], deve ser exigido aos alunos a obtenção dos resultados anteriores.

2.9.2. A Reta dos Mínimos Quadrados em Estatística

Se se considerar que os pontos $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ constituem uma amostra bivariada, de dimensão n, retirada de uma população (isto é, se avaliaram duas variáveis estatísticas, x e y, em cada um dos n indivíduos da amostra), então,

1. se uma das variáveis puder ser considerada independente (controlada), designada por «variável explicativa», e a outra dependente, designada por «variável resposta», faz sentido tentar perceber se a variável resposta se consegue escrever como uma função linear da variável explicativa.

2. podemos ainda estar interessados em perceber se existe alguma relação entre as duas variáveis estatísticas sem que uma delas seja controlada.

Tratamos, em primeiro lugar, o primeiro ponto.
Para tal devemos escolher qual das variáveis em causa pode ser a variável explicativa (aquela que controlamos).
A outra variável é, naturalmente, a variável resposta (cf. descritor 5, página 42, EST11, novo Programa, em [12]).

> "5. Determinar, em casos concretos de amostras de dados bivariados, qual das variáveis estatísticas deverá ser tomada como independente e qual deve ser tomada como dependente, utilizando argumentos que envolvam o conhecimento empírico das condicionantes físicas (ou outras) que poderão ter determinado a estrutura de relação entre as duas variáveis estatísticas."

Posto isto, deve ser representada a nuvem de pontos num referencial ortogonal (só se exige a ortogonalidade do referencial porque as variáveis não têm que estar, naturalmente, na mesma unidade de medida) de modo a, empiricamente, se decidir se faz sentido ajustar uma reta aos pontos. Se sim, a reta a ajustar é a dos mínimos quadrados.

Nesta fase faz sentido provar que:

- $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0 \Leftrightarrow b = \bar{y} - a\bar{x}$

- $(\bar{x}, \bar{y}) \in \{(x, y): y = ax + b\}$, isto é o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ pertence sempre à reta dos mínimos quadrados.

De facto: $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b) = 0$ (ver definição 1)

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} ax_i - \sum_{i=1}^{n} b = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} ax_i - nb = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} ax_i = nb \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - a\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

$\Leftrightarrow b = \overline{y} - a\overline{x}$

Os exercícios de aplicação são simples. Apresentamos, no entanto, a resolução da atividade 4 do caderno de apoio EST11, página 40, em [9], por pedir que se use folha de cálculo ou calculadora, aproximação às décimas dos parâmetros (o que não é adequado, como veremos) e ainda uma previsão.

4. O Sr. Silva aquece a sua casa com gás natural. A quantidade de gás utilizada depende da temperatura exterior e o Sr. Silva pretende fazer um estudo dos gastos durante os 9 meses em que se observam menores temperaturas, para poder estabelecer uma previsão para os gastos em função da temperatura exterior. Na tabela junta estão registadas as temperaturas médias observadas em cada um dos meses (em graus Celsius) e o respetivo volume de gás despendido pelo Sr. Silva (em metros cúbicos).

Mês	out	nov	dez	jan	fev	mar	abr	mai	jun
Temperatura	16,1	12,4	10,3	8,9	10,1	12,8	13,2	15,9	16,4
Volume de gás	0,01	0,10	0,24	0,26	0,19	0,09	0,05	0,03	0,01

4.1. Qual deve ser a variável explicativa e a variável resposta?

4.2. Utilize uma calculadora gráfica ou uma folha de cálculo para resolver as seguintes questões:

4.2.1.Represente os dados num referencial ortogonal e diga se é razoável a existência de uma relação linear entre estas duas variáveis.

4.2.2. Determine a média dos valores de cada uma das amostras representadas. Apresente os resultados com arredondamento às décimas.

4.2.3. Determine o declive da reta dos mínimos quadrados que se ajusta a esta nuvem de pontos. Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

4.2.4. Determine a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados.

4.2.5. Utilizando a equação obtida em 3.2.4. determine qual o consumo esperado para um mês em que a temperatura média seja de 7°C.

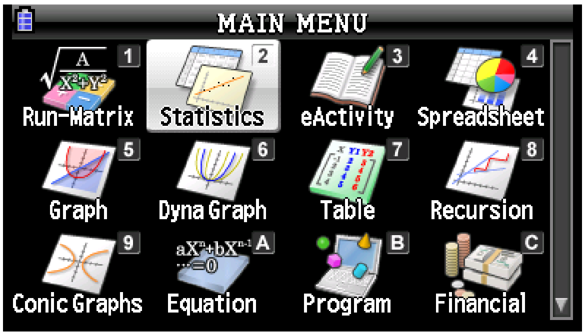
Resolução:

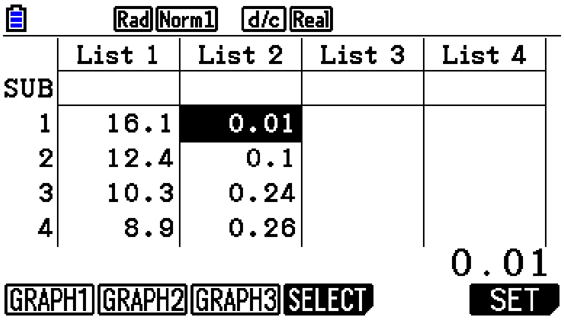
4.1. Relativamente à primeira questão, convém notar que no enunciado é dito que "A quantidade de gás utilizada depende da temperatura exterior", pelo que a variável explicativa, x, diz respeito à temperatura exterior e a variável resposta, y, é a quantidade de gás utilizada. Em cada mês é observada a temperatura exterior e o volume de gás despendido (temos a avaliação das variáveis nas unidades estatísticas que aqui são os meses) que dá origem à amostra de dimensão 9,

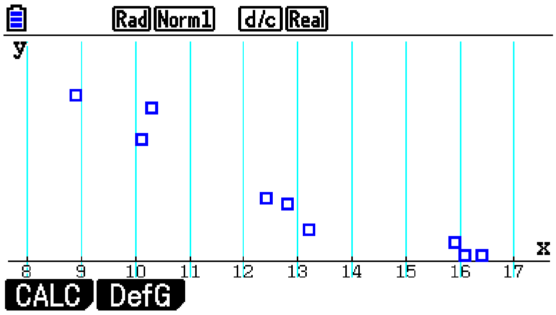
$\underset{\sim}{(x,y)} = ((16{,}1; 0{,}01), (12{,}4; 0{,}10), (10{,}3; 0{,}24), (8{,}9; 0{,}26)(10{,}1; 0{,}19),$

$(12{,}8; 0{,}09), (13{,}2; 0{,}05), (15{,}9; 0{,}03), (16{,}4; 0{,}01))$.

4.2.1. Apresentamos a resolução do exercício com a calculadora gráfica Casio fx-CG20. (No anexo VI, apresentamos a resolução com recurso do Microsoft Office Excel 2007), Apresentamos imagens com os vários passos para representar a nuvem de pontos.

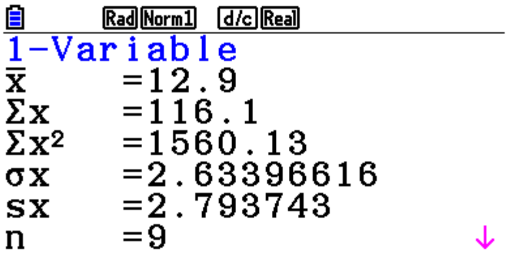




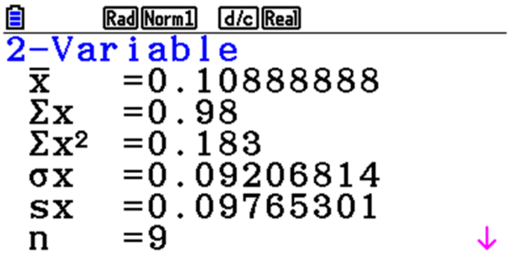


Por observação da representação da nuvem de pontos podemos dizer que os pontos se encontram "grossomodo" dispostos numa reta de declive negativo (quanto maior a temperatura, menor o consumo de gás).

4.2.2. Cálculo das médias x *e* y *com aproximação às décimas:*

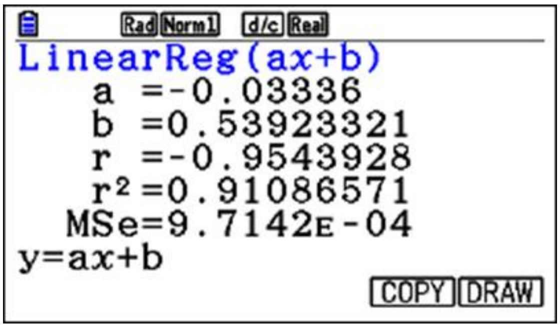


Com aproximação às décimas, a média da temperatura exterior é $12{,}9\ °C$.



Com aproximação às décimas, a média de volume de gás é $0{,}1\ m^3$.

4.2.3. Declive da reta dos mínimos quadrados com aproximação às décimas (peca por defeito!)



A aproximação às décimas do declive não faz sentido! A aproximação às centésimas é

$a = -0{,}03$. *Quanto à ordenada na origem (com aproximação às centésimas) da reta dos mínimos quadrados é* $b = 0{,}54$.

4.2.4. A equação da reta dos mínimos quadrados é $y = -0.03x + 0.54$.

4.2.5. Se a temperatura média exterior for 7, *espera-se que o volume médio de gás consumido seja* $-0{,}03 \times 7 + 0.54 = 0{,}33\ m^3$.

É ainda objetivo a interpretação dos coeficientes da reta de mínimos quadrados. Assim, relativamente à reta anterior, a ordenada na origem da reta pode ser interpretada como o volume médio de gás quando a temperatura exterior é zero (neste caso espera-se um consumo médio de 0,54 com uma temperatura de zero). Note-se que nem sempre faz sentido a interpretação deste parâmetro (por exemplo no caso em que a variável explicativa é o tempo). Relativamente ao declive, podemos interpretá-lo dizendo que a um acréscimo na variável explicativa de uma unidade de medida (um grau no exemplo) corresponde uma variação de valor igual ao declive (neste caso, $-0{,}03$*) na variável resposta.*

2.9.3. Interpretação da relação entre as duas Variáveis Estatísticas

O interesse pode também ser verificar se existe alguma relação entre as variáveis estatísticas (sem que nenhuma seja controlada).

Mais concretamente, para duas variáveis medidas no mesmo conjunto de indivíduos, o interesse é agora identificar uma possível associação entre essas variáveis.

Uma forma simples de explorar a possível associação entre duas variáveis quantitativas, x e y, é a representação da nuvem de pontos que constituem a amostra $\underset{\sim}{(x,y)} = \big((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\big)$ num referencial ortogonal.

Com esta representação gráfica analisamos o padrão geral das observações, assim como os desvios em relação a esse padrão e podemos ainda tirar conclusões acerca do tipo de relação subjacente e a intensidade dessa relação (fraca, moderada, forte).

Esta intensidade pode ser quantificada relativamente à associação linear entre duas variáveis quantitativas através do coficiente de correlação linear, r, definido por

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}} \tag{4}$$

Comparando a expressão (4) com a expressão obtida para a (2), declive da reta dos mínimos quadrados, conclui-se imediatamente,

$$r = a\sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} \tag{5}$$

Pelo que r é negativo se a reta dos mínimos quadrados associada ao mesmo conjunto de pontos tiver declive negativo, significando que a valores elevados de x correspondem, tendencialmente, menores valores de y; se r é positivo, a valores elevados de x correspondem, tendencialmente, valores elevados de y e se r é nulo, não existe relação linear entre as variáveis (podendo existir outro tipo de relação).

• o coeficiente de correlação linear apenas toma valores entre -1 e 1 (inclusive em ambos os casos). Esta afirmação pertence ao “saber'' não havendo necessidade de ser justificada. No entanto, existe uma justificação simples para este facto.

Consideremos dois vetores de $\mathbb{R}^n$ centrados: $u = (x_1 - \bar{x}), (x_2 - \bar{x}), \dots, (x_n - \bar{x})$ e $v = (y_1 - \bar{y}), (y_2 - \bar{y}), \dots, (y_n - \bar{y})$ onde $\bar{x}$ e $\bar{y}$ representam, como habitualmente, a média de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e a média de $(y_1, y_2, \dots, y_n)$. O cosseno do ângulo formado por estes dois vetores, digamos θ, é, como sabemos, dado por:

$$\cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|\|v\|} \tag{6}$$

onde $u.v$ representa a operação do produto interno entre os dois vetores u e v e $\|u\|$, $\|v\|$ a norma euclideana do vetor u e v, respetivamente.

O segundo membro da equação (6) é igual a r (coeficiente de correlação entre u e v), pelo que este pertence ao intervalo real $[-1,1]$.

Seja $0 \leq \theta \leq \pi$; se $\cos(\theta) = 1$, então $\theta = 0$ e u e v são linearmente dependentes, tendo, ainda, o mesmo sentido; se $\cos(\theta) = -1$, então $\theta = \pi$ e u e v são linearmente dependentes, tendo, neste caso, sentidos contrários; se $\cos(\theta) = 0$, então $\theta = \frac{\pi}{2}$ e u e v são linearmente independentes, não existindo qualquer relação linear entre eles. Quanto mais próximo θ se encontra de 0 ou π, ou seja, quanto mais próximo $|r|$ estiver de 1 maior é a intensidade da associação entre as variáveis.

CAPÍTULO III – PROBABILIDADES NO ENSINO OBRIGATÓRIO EM PORTUGAL

3.1. Introdução

O Programa e Metas Curriculares da disciplina de Matemática do 9.º ano de escolaridade que entrará em vigor no próximo ano letivo contemplam um tópico de Probabilidades no domínio de conteúdos OTD9. Na disciplina de Matemática A do 12.º ano, cujo novo Programa será implementado no ano letivo 2017/18, é retomado o tópico de Probabilidades, no domínio de conteúdos PRB12, com uma preocupação acrescida de rigor nas definições apresentadas e na aplicação e demonstração das propriedades.

Após uma primeira abordagem mais restritiva lecionada no 9.º ano, no domínio da Probabilidade, no 12.º ano é feito um estudo mais geral acerca da noção de probabilidade, começando por se introduzir a noção de função de probabilidade definida no conjunto das partes de um conjunto finito, da qual a lei de Laplace – estudada no Ensino Básico – é um exemplo relacionado com situações de equiprobabilidade. É igualmente abordada a noção de probabilidade condicionada e de independência de acontecimentos, apresentando-se ainda o teorema da probabilidade total.

O domínio de conteúdos do Cálculo Combinatório, CC12 é, no novo Programa e Metas Curriculares, um domínio independente dos demais, com uma percentagem de aulas própria, o que não acontecia no Programa anterior. Começa-se pela Teoria de Conjuntos e pela introdução das propriedades das operações sobre conjuntos: propriedades comutativa, associativa, de existência de elemento neutro e de elemento absorvente e da idempotência da união e da intersecção e propriedades distributivas da união em relação à intersecção e da intersecção em relação à união. Seguidamente, e ainda na teoria de conjuntos, são lecionados o produto cartesiano entre conjuntos e a distributividade do produto cartesiano relativamente à união.

Na Teoria das Probabilidades trabalha-se sempre com espaços de resultados finitos, pelo que só será dado enfase a conjuntos finitos. São ainda previamente introduzido no domínio de conteúdos CC12, como um recurso na contagem rápida e eficiente para o cálculo de probabilidades, as técnicas de contagem com recurso a modelos matemáticos, arranjos com e sem repetição, combinações e permutações e ainda o Triângulo de Pascal e o Binómio de Newton.

3.2. Teoria de Conjuntos

A abordagem feita à Teoria de Conjuntos no novo Programa e Metas Curriculares é intuitiva e informal, longe da abordagem axiomática de Zermelo-Fraenkel. No entanto, esta abordagem não deixa de nos dar uma forte base de Teoria de Conjuntos, que permite provar as propriedades e resultados abordados na Teoria de Probabilidades.

3.2.1. Conjuntos – Definições Básicas

Quando se fala num *conjunto* falamos numa coleção de objetos de qualquer natureza. A esses objetos chamam-se *elementos do conjunto*. É costume representar os conjuntos por letras maiúsculas e os objetos por letras minúsculas. Se x é um elemento do conjunto A diz-se que x pertence a A, e escreve-se $x \in A$. Se x não é elemento de A, escrevemos $x \notin A$.

Diz-se que dois conjuntos A e B são *iguais*, e escreve-se $A = B$, se tiverem exatamente os mesmos elementos. Caso contrário, diz-se que os conjuntos são *diferentes* e escreve-se $A \neq B$. Um mesmo conjunto pode ser representado *por extensão*, listando a coleção de elementos, ou *por compreensão*, apresentando uma condição apenas satisfeita por todos os seus elementos. Por exemplo, o conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$ está representado em extensão e o conjunto $B = \{n \in \mathbb{N}: 1 \leq n < 6\}$ está representado em compreensão. No entanto, pode-se afirmar que $A = B$.

Consideramos a coleção vazia como um conjunto, o qual representamos por $\emptyset$ e chamamos *conjunto vazio*. O conjunto vazio pode ser representado por qualquer condição impossível. Dizemos que um conjunto B é um *subconjunto* de um conjunto A se todos os elementos de B são também elementos de A. Se B é subconjunto de A, escrevemos $B \subset A$ ou $A \supset B$ e dizemos que B *está contido em* A ou que A *contém* B. Dado um conjunto A, podemos considerar o conjunto potência de A, que não é mais do que o conjunto de todos os subconjuntos de A. Representa-se a potência de A por $\mathcal{P}(A)$. Assim,

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}$$

Prova-se que A se tem n elementos ($n \in \mathbb{N}_0$), então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

3.2.2. Operações com Conjuntos

Sejam A e B conjuntos. Chama-se:

1. união (reunião) de A com B e representa-se por $A \cup B$ ao conjunto
$$A \cup B \ = \{x: x \in A \vee x \in B\};$$

2. intersecção de A com B e representa-se por $A \cap B$ ao conjunto
$$A \cap B \ = \{x: x \in A \wedge \ x \in B\};$$

3. complementar de A em B, e representa-se por $B \backslash A$ ou $B - A$ ao conjunto
$$B \backslash A = \{x: x \in B \wedge \ x \notin A\}.$$

Se A e B são subconjuntos de um mesmo conjunto X (ao qual, nestas condições, se chama *universo*), os três conceitos anteriores definem, em X, duas operações binárias (intersecção e união de dois subconjuntos de X) e uma operação unária (complementar de um conjunto: chama-se complementar de A, e representa-se por $\bar{A}$, ao conjunto $\bar{A} = \{x: x \in X \wedge \ x \notin A\}$).

Estas operações satisfazem as seguintes propriedades:

Teorema 3.2.2.1. *Sejam X um conjunto e $A, B, C \subseteq X$. Então:*

1. $A \cup A = A$ (i.e., a operação de união satisfaz a propriedade de idempotência);

2. $A \cup B = B \cup A$ (i.e., a operação de união satisfaz a propriedade comutativa);

3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (i.e., a operação de união satisfaz a propriedade associativa);

4. $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ (i.e., a operação de união admite o conjunto vazio como elemento neutro);

5. $A \cup X = X \cup A = X$ (i.e., a operação de união admite o conjunto universo como elemento absorvente).

Demonstração.

1. Seja $x \in X$. Então,

$$x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A \; ou \; x \in A$$

$$\Leftrightarrow x \in A$$

pelo que se verifica a igualdade entre os dois conjuntos. *C.q.m.*

2. Seja $x \in X$. Então,

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \; ou \; x \in B$$

$$\Leftrightarrow x \in B \; ou \; x \in A$$

$$\Leftrightarrow x \in B \cup A$$

pelo que se verifica a igualdade entre os dois conjuntos. *C.q.m.*

3. Seja $x \in X$. Então,

$$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \; ou \; x \in (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \; ou \; x \in B \; ou \; x \in C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \; ou \; x \in C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$$

pelo que se verifica a igualdade entre os dois conjuntos. *C.q.m.*

4. Seja $x \in X$. Então,

$$x \in A \cup \emptyset \Leftrightarrow x \in A \; ou \; x \in \emptyset$$

$$\Leftrightarrow x \in A \; ou \; condição \; impossível$$

$$\Leftrightarrow x \in A$$

pelo que $A \cup \emptyset = A$. A comutatividade da reunião permite-nos concluir a outra igualdade, pelo que se verifica a igualdade entre os três conjuntos. *C.q.m.*

5. Seja $x \in X$. Então,

$$x \in A \cup X \Leftrightarrow x \in A \; ou \; x \in X$$

$$\Leftrightarrow x \in X \; ou \; x \in A$$

$$\Leftrightarrow x \in X \cup A$$

$$\Leftrightarrow x \in X$$

pelo que $A \cup X = X$. A comutatividade da reunião permite-nos concluir a outra igualdade, pelo que se verifica a igualdade entre os três conjuntos. *C.q.m.*

Teorema 3.2.2.2. *Sejam* X *um conjunto e* $A, B, C \subseteq X$*. Então:*

1. $A \cap A = A$ *(i.e., a operação de intersecção satisfaz a propriedade de idempotência);*

2. $A \cap B = B \cap A$ *(i.e., a operação de intersecção satisfaz a propriedade comutativa);*

3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(i.e., a operação intersecção de satisfaz a propriedade associativa);*

4. $A \cap X = X \cap A = A$ *(i.e., a operação de intersecção admite o conjunto universo como elemento neutro);*

5. $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$ *(i.e., a operação de interseção admite o conjunto vazio como elemento absorvente).*

Demonstração.

1. Seja $x \in X$. Então,

$$x \in A \cap A \Leftrightarrow x \in A \; e \; x \in A$$

$$\Leftrightarrow x \in A$$

pelo que se verifica a igualdade entre os dois conjuntos. *C.q.m.*

2. Seja $x \in X$. Então,

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Leftrightarrow x \in A \; e \; x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in B \; e \; x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in B \cap A \end{aligned}$$

pelo que se verifica a igualdade entre os dois conjuntos. *C.q.m.*

3. Seja $x \in X$. Então,

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \; e \; x \in (B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \; e \; x \in B \; e \; x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \; e \; x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

pelo que se verifica a igualdade entre os dois conjuntos. *C.q.m.*

4. Seja $x \in X$. Então,

$$\begin{aligned} x \in A \cap X &\Leftrightarrow x \in A \; e \; x \in X \\ &\Leftrightarrow x \in X \; e \; x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in X \cap A \\ &\Leftrightarrow x \in A \end{aligned}$$

pelo que $A \cap X = A$. A comutatividade da intersecção permite-nos concluir a outra igualdade, pelo que se verifica a igualdade entre os três conjuntos. *C.q.m.*

5. Seja $x \in X$. Então,

$$\begin{aligned} x \in A \cap \emptyset &\Leftrightarrow x \in A \; e \; x \in \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \in A \; e \; condição \; impossível \\ &\Leftrightarrow \; condição \; impossível \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

pelo que $A \cap \emptyset = \emptyset$. A comutatividade da intersecção permite-nos concluir a outra igualdade, pelo que se verifica a igualdade entre os três conjuntos. *C.q.m.*

Do facto de as operações de intersecção e de união satisfazerem a propriedade associativa, permite-nos escrever, sem qualquer ambiguidade, a intersecção ou a união de uma família de subconjuntos do universo sem usar qualquer símbolo de parêntesis. Assim, por exemplo, se, $A, B, C \subset X$ escreve-se $A \cap B \cap C$ para representar $A \cap (B \cap C)$ e $(A \cap B) \cap C$.

Teorema 3.2.2.3. *Sejam X um conjunto e $A, B \subset X$. Então:*

1. $X \backslash (X \backslash A) = A$;

2. Lei de De Morgan: $X \backslash (A \cup B) = X \backslash A \cap X \backslash B$;

3. Lei de De Morgan: $X \backslash (A \cap B) = X \backslash A \cup X \backslash B$;

Demonstração.

1. Seja $x \in X$. Então,

$$\begin{aligned} x \in X \backslash (X \backslash A) &\Leftrightarrow x \in X \ e \ x \notin X \backslash A \\ &\Leftrightarrow x \in X \ e \ (x \notin X \ ou \ x \in A) \\ &\Leftrightarrow (x \in X \ e \ x \notin X) \ ou \ (x \in X \ e \ x \in A) \\ &\Leftrightarrow x \in X \ e \ x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in A \end{aligned}$$ *C.q.m.*

2. Seja $x \in X$. Então,

$$\begin{aligned} x \in X \backslash (A \cup B) &\Leftrightarrow x \in X \ e \ x \notin (A \cup B) \\ &\Leftrightarrow x \in X \ e \ (x \notin A \ e \ x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (\ x \in X \ e \ x \notin A) \ e \ (x \in X \ e \ x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in X \backslash A \ e \ x \in X \backslash B \\ &\Leftrightarrow X \backslash A \ \cap X \backslash B \end{aligned}$$ *C.q.m.*

3. Seja $x \in X$. Então,

$$
\begin{aligned}
x \in X\backslash(A \cap B) &\Leftrightarrow x \in X \; e \; x \notin (A \cap B) \\
&\Leftrightarrow x \in X \; e \; (x \notin A \; ou \; x \notin B) \\
&\Leftrightarrow (\, x \in X \; e \; x \notin A) \; ou \; (x \in X \; e \; x \notin B) \\
&\Leftrightarrow x \in X\backslash A \; ou \; x \in X\backslash B \\
&\Leftrightarrow X\backslash A \; \cup X\backslash B
\end{aligned}
$$

C.q.m.

As operações de interseção e união satisfazem ainda duas propriedades que as interligam:

Teorema 3.2.2.4. *Sejam X um conjunto e, $A, B, C \subseteq X$. Então:*

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(i.e., a união é distributiva em relação à interseção);*

2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(i.e., a interseção é distributiva em relação à união).*

Demonstração.

1. Seja $x \in X$. Então,

$$
\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \; ou \; (\, x \in B \; e \; x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \; ou \; \; x \in B) \; e \; (x \in A \; ou \; x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \; e \; x \in (A \cup C)
\end{aligned}
$$

pelo que se verifica a igualdade entre os dois conjuntos. *C.q.m.*

2. Seja $x \in X$. Então,

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \; e \; (\, x \in B \; ou \; x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \; e \; \; x \in B) \; ou \; (x \in A \; e \; x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \; ou \; x \in (A \cap C)
\end{aligned}
$$

pelo que se verifica a igualdade entre os dois conjuntos. *C.q.m.*

Chama-se a atenção para o facto de, por a intersecção e a união satisfazerem a propriedade comutativa, as propriedades distributivas apresentadas anteriormente são apresentadas apenas com uma igualdade. Na realidade, dizemos que uma dada operação é distributiva em relação a uma segunda se é distributiva à direita e à esquerda. No caso das operações de conjuntos definidas, a distributividade à esquerda conjugada com a comutatividade, permite-nos concluir a distributividade à direita e, portanto, a comutatividade.

3.2.3. Produto Cartesiano

Dados os conjuntos A e B, define-se um novo conjunto, ao qual chamamos *produto cartesiano de* A *por* B e o qual se representa por $A \times B$, à coleção de objetos definidos do seguinte modo: dados $x \in A \;\; y \in B$, um elemento de $A \times B$ é um objeto que se representa por (x, y) e se designa por *par ordenado de primeira componente* x *e segunda componente* y, de tal modo que

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \; e \; y = y'.$$

Assim, $A \times B = \{(x, y): x \in A \; e \; y \in B\}$.

Kuratowski formalizou, em 1921, o conceito de par ordenado do seguinte modo: Dados dois objetos x e y, pode definir-se *par ordenado* (x, y) por

$$(x, y) = \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}.$$

Pela natureza dos seus elementos, o produto cartesiano de subconjuntos de um universo X não pode ser visto como o resultado de uma operação na potência de X. No entanto, se considerarmos que estamos a trabalhar numa determinada classe dos conjuntos, podemos entender que de facto estamos a trabalhar com uma operação e nesse sentido pode-se provar uma série de propriedades envolvendo o produto cartesiano.

Teorema 3.2.3.1. *Sejam* X *um conjunto e* $A, B, C \subset X$. *Então,*

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ *(i.e., distributividade à esquerda do produto cartesiano em relação à união de conjuntos);*

2. $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$ *(i.e., distributividade à direita do produto cartesiano em relação à união de conjuntos);*

3. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ *(i.e., distributividade á esquerda do produto cartesiano em relação à intersecção de conjuntos);*

4. $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$ *(i.e., distributividade à direita do produto cartesiano em relação à intersecção de conjuntos);*

Demonstração. Sejam $x, y \in X$. Então:

1. $(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A\ e\ y \in B \cup C$

$\Leftrightarrow x \in A\ e\ (y \in B\ ou\ y \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A\ e\ y \in B)\ ou\ (x \in A\ e\ y \in C)$

$\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B\ ou\ (x, y) \in A \times C$

$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$ *C.q.m.*

2. $(x, y) \in (B \cup C) \times A \Leftrightarrow x \in B \cup C\ e\ y \in A$

$\Leftrightarrow (x \in B\ ou\ x \in C)\ e\ y \in A$

$\Leftrightarrow (x \in B\ e\ y \in A)\ ou\ (x \in C\ e\ y \in A)$

$\Leftrightarrow (x, y) \in B \times A\ ou\ (x, y) \in C \times A$

$\Leftrightarrow (x, y) \in (B \times A) \cup (C \times A)$ *C.q.m.*

3. $(x, y) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A\ e\ y \in B \cap C$

$\Leftrightarrow x \in A\ e\ y \in B\ e\ y \in C$

$\Leftrightarrow (x \in A\ e\ y \in B)\ e\ (x \in A\ e\ y \in C)$

$\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B\ e\ (x, y) \in A \times C)$

$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ *C.q.m.*

4. $(x, y) \in (B \cap C) \times A = x \in B \cap C \ e \ y \in A$

$\Leftrightarrow x \in B \ e \ x \in C \ e \ y \in A$

$\Leftrightarrow (x \in B \ e \ y \in A) \ e \ (x \in C \ e \ y \in A)$

$\Leftrightarrow (x, y) \in B \times A \ e \ (x, y) \in C \times A)$

$\Leftrightarrow (x, y) \in (B \times A) \cap (C \times A)$ *C.q.m.*

O conceito de par ordenado pode ser generalizado para n-uplo e, assim, generalizamos o conceito de produto cartesiano de dois conjuntos para o produto cartesiano de uma família finita de conjuntos. Se $n \in \mathbb{N}$, e $A_1, A_2, \dots, A_n$ são conjuntos, então define-se seu produto cartesiano, e representa-se por $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, como sendo o conjunto

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in A_i, \forall i \in \{1,2, \dots, n\}\}.$$

3.2.4. Conjuntos Equipotentes e Cardinais

Diz-se que um conjunto A é equipotente a um conjunto B, e escreve-se $A \sim B$, se existe uma bijecção $f: A \to B$. Se A não é equipotente a B, escreve-se $A \nsim B$.

Pelo facto de uma bijecção ser uma função invertível e de a sua inversa ser uma bijeção, pode-se concluir que se $A \sim B$ então também $B \sim A$. Assim, se $A \sim B$ pode-se afirmar que A e B são *equipotentes*. Mais ainda, porque a função identidade em A é uma bijeção e a composta de duas bijeções é ainda uma bijeção, podendo afirmar-se que, para quaisquer conjuntos A, B e C, $A \sim A$ (idempotência) e se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$ (transitividade).

Um conjunto X diz-se um *conjunto infinito* se é equipotente a um seu subconjunto próprio, isto é, se existe $A \subset X$ tal que $X \sim A$. Um conjunto diz-se *conjunto finito* se não é infinito.

Para cada conjunto A, associamos a todos os conjuntos equipotentes a A, e só a esses, um ente matemático a que se chama *cardinal de* A e que se representa por $\#A$. Tendo em conta as propriedades apresentadas anteriormente, dados dois conjuntos A e B, tem-se que $\#A = \#B$ se e só se $A \sim B$. Um conjunto A é finito se e só se é equipotente a um conjunto $I_n = \{p \in \mathbb{N}: p \leq n\}$ para certo $n \in \mathbb{N}_0$. Como $I_n \sim I_m$, $(n, m \in \mathbb{N}_0)$ se e só se $n = m$, diz-se que o cardinal de um conjunto finito é um número natural, mais precisamente, o número de elementos de A.

Em geral, problemas de Análise Combinatória são resolvidos, na sua maioria, através de duas regras básicas: a regra da soma e a regra do produto.

- *Regra da Soma*

Teorema 3.2.4.1. *Sejam X um conjunto finito e* $A, B \subset X$*. Então,*

1. $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$ *(i.e.,o cardinal da união de conjuntos é igual à soma dos cardinais dos respetivos conjuntos e a subtração do cardinal da intersecção dos conjuntos);*

2. *Se* A *e* B *são conjuntos disjuntos, então* $\#(A \cup B) = \#A + \#B$ *(i.e.,o cardinal da união de conjuntos disjuntos é igual à soma dos cardinais dos respetivos conjuntos).*

Demonstração.

1. *Como* $A \cap B \subset B$*, temos que*

$$\#B = \#(A \cap B) + \#(B - (A \cap B))$$

Como $A \subset A \cup B$*, temos que*

$$\#(A \cup B) = \#A + \#((A \cup B) - A).$$

Assim, como $(A \cup B) - A = B - A = B - (A \cap B)$*, concluímos que*

$$\#(A \cup B) = \#A + \#\big((A \cup B) - A\big) = \#A + \#(B - (A \cap B)) =$$

$$= \#A - \#(A \cap B) + \#(A \cap B) + \#(B - (A \cap B)) =$$

$$= \#A - \#(A \cap B) + \#B$$ *C.q.m.*

2. *Como* $A \cap B = \emptyset$*, então* $\#(A \cap B) = 0$*.*

Logo, $\#(A \cup B) = \#A + \#B$ *C.q.m.*

- *Regra do Produto*

Como já foi observado, o conceito de produto cartesiano de conjuntos pode ser generalizado para uma família finita de conjuntos. O Teorema seguinte relaciona o número de elementos destes conjuntos.

Teorema 3.2.4.2. *Sejam* $n \in \mathbb{N}$ *e* $A_1, A_2, \dots, A_n$*, conjuntos de cardinais finitos. Então,*

$\#(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \#A_1 \times \#A_2 \times \dots \times \#A_n$ (*i.e. o cardinal do produto cartesiano é igual ao produto dos produtos cardinais dos conjuntos que o constituem)*

Demonstração. Este resultado pode ser demonstrado por indução.

Comecemos por mostrar que a igualdade é válida para $k = 2$. Sejam $\#A_1 = m_1$ e $\#A_2 = m_2$. Para formar um par em que o primeiro elemento pertence a A_1 e o segundo a A_2, fixando o primeiro elemento, este pode formar um par com cada elemento de A_2. Assim, o elemento de A_1 é componente de m_2 pares. Como há m_1 possíveis primeiros elementos, há no total $m_1 \times m_2$ pares, ou seja o número de elementos do produto cartesiano de A_1 por A_2 é igual a $m_1 \times m_2$. Tem-se assim

$$\#(A_1 \times A_2) = \#A_1 \times \#A_2 = m_1 \times m_2.$$

Admitindo que a igualdade é valida para $k = n$, temos que

$$\#(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \#A_1 \times \#A_2 \times \dots \times \#A_n \, .$$

Pretendemos provar que ela é válida para $k = n + 1$.

Para cada elemento do produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n+1}$ existe um e um só elemento do produto cartesiano $(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1}$, isto é, existe uma correspondência biunívoca entre estes dois conjuntos. Consequentemente os dois conjuntos têm o mesmo produto cardinal. Assim, temos, como se pretendia:

$$\begin{aligned}\#(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times A_{n+1}) &= \#(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) \times \#A_{n+1} = \\ &= \#A_1 \times \#A_2 \times \dots \times \#A_n \times \#A_{n+1}\end{aligned}$$

Estamos, então, em condições de aplicar o principio de indução matemática para concluir que $\#(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \#A_1 \times \#A_2 \times \dots \times \#A_n, \forall n \in \mathbb{N}$. *C.q.m.*

Exercício 1 e 2: Adaptados do Caderno de Apoio do 12.° ano das Metas Curriculares do Ensino Secundário-Matemática A, CC12, em [10]. No primeiro exercício que aparece na página 2 do caderno, é sugerida uma demonstração mais formal da definição de inclusão e das suas propriedades, no segundo exercício que aparece na página 6 do caderno, aprofunda-se o número de subconjuntos de um conjunto de cardinal finito.

1. Demonstre sucessivamente os resultados expressos nas seguintes alíneas:

1.1. Dados conjuntos A e B, $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ se e somente se $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A}$ e se e somente se $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B}$.

Demonstração: $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

"$\Rightarrow$" $\quad x \in A \Leftrightarrow x \in A \cap B$

$\Leftrightarrow x \in A \; e \; x \in B$

$\Rightarrow x \in B$

$\therefore A \subset B$

"$\Leftarrow$" $\quad x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \; e \; x \in B$

$\Rightarrow x \in A$

$\therefore A \cap B \subset A$

$x \in A \Rightarrow x \in A \; e \; x \in B$

$\Leftrightarrow x \in A \cap B$

$\therefore A \subset A \cap B$

$\therefore A = A \cap B$

$e \quad A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

"$\Rightarrow$" $\quad x \in A \Leftrightarrow x \in A \cup B$

$\Leftrightarrow x \in A \; ou \; x \in B$

$\Rightarrow x \in B$

$\therefore A \subset B$

"$\Leftarrow$" $\quad x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \; ou \; x \in B$

$\Rightarrow x \in B$

$\therefore A \cup B \subset B$

$x \in A \Rightarrow x \in A \; ou \; x \in B$

$\Leftrightarrow x \in A \cup B$

$\therefore B \subset A \cup B$

$\therefore B = A \cup B$ *C.q.m.*

1.2. O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

Demonstração:

Seja A *um conjunto. Como* $A \cap \emptyset = \emptyset$, *aplicando 1.1.,*

temos que $\emptyset \subset A$. *C.q.m.*

2. Considere um conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ com 3 elementos.

2.1. Determine em extensão todas as partes de X. Quantos subconjuntos tem X?

Resolução:

Como o conjunto X *tem 3 elementos, vamos ter subconjuntos com 0, com 1, com 2 e com 3 elementos. Vejamos quem são os subconjuntos:*

1 – com 0 elementos - apenas temos o conjunto vazio;

2 – com 1 elemento - temos os conjuntos $\{x_1\}, \{x_2\}$ *e* $\{x_3\}$*;*

3 – com 2 elementos - temos os conjuntos $\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}$ *e* $\{x_2, x_3\}$*;*

4 – com 3 elementos - apenas temos o próprio conjunto X.

Logo, o conjunto X *tem oito subconjuntos. Assim,*

$\mathcal{P}(X) = \big\{\{\ \}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\big\}$.

2.2. Mostre que se obtêm todas as partes de X associando a cada sequência (k_1, k_2, k_3) de termos iguais a 0 ou a 1 o subconjunto de X constituído pelos elementos x_i tais que (por exemplo, à sequência $(1,0,1)$ associa-se o conjunto $\{x_1, x_3\}$).

Resolução:

Para $k_1, k_2, k_3 \in \{0,1\}$, *associe-se à sequência* (k_1, k_2, k_3) *o conjunto* $\{x_i \in X : k_i = 1\}$.

Assim, temos que:

- a $(0,0,0)$ *associa-se o conjunto vazio;*

- a $(1,0,0)$ *associa-se o* $\{x_1\}$*;*

- a $(0,1,0)$ *associa-se o* $\{x_2\}$*;*

- *a* $(0,0,1)$ *associa-se o* $\{x_3\}$*;*

- *a* $(1,1,0)$ *associa-se o* $\{x_1, x_2\}$*;*

- *a* $(1,0,1)$ *associa-se o* $\{x_1, x_3\}$*;*

- *a* $(0,1,1)$ *associa-se o* $\{x_2, x_3\}$*;*

- *a* $(1,1,1)$ *associa-se o* X.

Como vimos em 2.1., estes oito conjuntos encontrados são todas as partes de X.

2.3. Justifique que existem exatamente 2^3 sequências das referidas na alínea anterior, sem as construir explicitamente; compare o resultado obtido com o resultado da alínea anterior.

Resolução:

Como $k_i \in \{0,1\}$ $(i = 1,2,3)$*, as sequências de três elementos* (k_1, k_2, k_3) *são os elementos do produto cartesiano*

$$\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$$

Como este conjunto tem $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ *elementos podemos concluir que as sequências apresentadas em 2.2. são exatamente as que existem.*

Assim, os subconjuntos de X *apresentados em 2.1. são exatamente os que existem.*

2.4. Utilizando argumentos inspirados nas duas alíneas anteriores justifique que se um conjunto X tiver $p \epsilon \mathbb{N}_0$ elementos $(\#X = p)$ então $\mathcal{P}(X) = 2^p$ tem elementos.

Resolução:

Sejam $p \in \mathbb{N}$ *e* X *um conjunto tal que* $\#X = p$.

Então, podemos associar cada sequência $(k_1, k_2, \dots, k_i)$ *com* $k_i \in \{0,1\}$ $(i = 1,2, \dots, p)$ *a um e um só subconjunto de* X. *Como tem* 2^p *sequências temos que* $\mathcal{P}(X) = 2^p$.

3.3. Combinatória

Os problemas em combinatória são, fundamentalmente, questões relacionadas com a enumeração de elementos de conjuntos e, por sua vez, de conjuntos que se formam a partir dos primeiros.

A importância da combinatória em probabilidades é amplamente justificada pelo uso da regra de Laplace.

Os dois teoremas que se apresentam de seguida, já enunciados e demonstrados na secção 7.2.3. constituem a base do cálculo combinatório e, a partir deles, é possível obter os resultados importantes que necessitamos para a contagem do número de casos possíveis do espaço amostral e o número de casos favoráveis relativo a um acontecimento.

Teorema 3.3.1. *Com* n *elementos* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *e* m *elementos* $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ *é possível formar* $n \times m$ *pares da forma* $(a_i, b_j), i = 1,2, \dots, n; j = 1,2, \dots, m$ *contendo um elemento de cada grupo.*

Teorema 3.3.2. *Dados* n_1 *elementos* $(a_1, a_2, \dots, a_{n1}), n_2$ *elementos* $(b_1, b_2, \dots, b_{n2})$ *até* n_p *elementos* $(x_1, x_2, \dots, x_{np})$*, é possível formar* $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$ p*-úplos ordenados* $(a_{j1}, b_{j2}, \dots, x_{jp})$ *contendo um elemento de cada grupo.*

Para clarificar ideias, podemos pensar numa caixa opaca fechada que contém bolas numeradas de 1 a n e da qual se vão retirar $p \leq n$ bolas. Pretendemos, então, contar os diferentes resultados possíveis de acordo com o modo como se faz a tiragem.

Teorema 3.3.3. *Considere-se uma caixa com* n *bolas em que se retiram* p*. Se as bolas são extraídas*

- *uma a uma com reposição, então, existem* n^p *diferentes possibilidades. Estas* n^p *maneiras diferentes de os extrair, chamam-se «Arranjos com repetição de* n *elementos* p *a* p*», e representam-se por* ${}^{n}A'_{p}$*.*

• *uma a uma sem reposição, (equivalente a extrair* p *bolas a o número de possibilidades é* $n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$*, que se chamam «Arranjos sem repetição de* n *elementos* p *a* p*», e se representam por* ${}^nA_p$*,* ${}^nA_p = \frac{n!}{(n-p)!}$*.*

Demonstração.

Seja o conjunto de n bolas na caixa $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.
A primeira parte do teorema segue imediatamente da aplicação do Teorema 3.3.2. a p conjuntos iguais a $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. *C.q.m.*

Quanto à segunda parte do teorema aplica-se de novo o Teorema 3.3.2. a p conjuntos em que o primeiro é ainda $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, o segundo será o mesmo menos um elemento, o primeiro elemento da amostra, o terceiro igual ao primeiro menos dois elementos e assim sucessivamente. *C.q.m.*

No caso em que a caixa tem n bolas e se retiram as n sem reposição, estamos apenas a considerar as diferentes ordenações de todas as bolas da caixa.

Corolário 3.3.3.1. *O número de diferentes ordenações de* n *elementos é* $n!$*. A este número chamamos «Permutações de* n *elementos».*

Pensemos agora que vamos retirar bolas não ordenadas de uma caixa (população). Se o subconjunto de bolas (amostra não ordenada) for retirado sem reposição o resultado é apenas um subconjunto da população.

Teorema 3.3.4. *Uma população de* n *elementos possui* $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ *diferentes subpopulações de* p *elementos.*

Demonstração.

Para cada subpopulação de dimensão p correspondem $p!$ ordenações possíveis, isto é, $p!$ amostras ordenadas sem reposição. Então, se for x o número de diferentes subpopulações de dimensão p, temos que o número de amostras ordenadas sem reposição de dimensão

p, $\frac{n!}{(n-p)!}$ é igual a $xp!$, pelo que, $x = {}^{n}C_{p}$, ou $x = C_{p}^{n}$ ou ainda $x = \binom{n}{p}$, que se chamam coeficientes binomiais, ou «Combinações de n Elementos p a p».

$$ {}^{n}C_{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \qquad \textit{C.q.m.} $$

Teorema 3.3.5. *Sejam $p_1, p_2, \dots, p_k$ inteiros tais que $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$. O número de maneiras diferentes em que uma população de n elementos pode ser particionada em k subpopulações das quais a primeira contém p_1 elementos, a segunda contém p_2 elementos, e assim sucessivamente, é $\frac{n!}{p_1! p_{2!} \dots p_k!}$.*

Demonstração.

Para a primeira subpopulação há ${}^{n}C_{p_1}$escolhas possíveis. Para a segunda, como já se retiraram p_1 elementos, podemos formá-la de ${}^{n-p_1}C_{p_2}$maneiras diferentes e assim por sucessivamente. Então o número que procuramos é:

$$ \frac{n!}{p_1!(n-p_1)!} \frac{(n-p_1)!}{p_2!(n-p_2)!} \frac{(n-p_1-\cdots-p_{k-2})!}{p_{k-1}!(n-p_1-\cdots-p_{k-2}-p_{k-1})!} = \frac{n!}{p_1! p_{2!} \dots p_k!} \qquad \textit{C.q.m.} $$

Falta considerar o caso de amostras não ordenadas mas com repetições. Este caso corresponde a retirar bolas de uma urna com reposição mas em que não se regista a ordem por que são retiradas.

Teorema 3.3.6. *Numa população com n elementos o número de diferentes amostras não ordenadas de dimensão p, com reposição, é:*

$$ {}^{n+p-1}C_{p} = {}^{n+p-1}C_{n-1} $$

Demonstração.

Temos que o número de amostras ordenadas com reposição de dimensão p,

por definição é $\frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!}$. *C.q.m.*

3.3.7. Propriedades das Combinações

No que se segue, consideremos n e $p \in \mathbb{N}_0$, $p \leq n$,

Teorema 3.3.7.1. ${}^nC_0 = {}^nC_n = 1$.

Demonstração.

$${}^nC_0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$${}^nC_n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

C.q.m.

Teorema 3.3.7.2. ${}^nC_{n-p} = {}^nC_p$

Demonstração.

Temos, ${}^nC_{n-p} = \frac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = {}^nC_p$

então, ${}^nC_p = {}^nC_{n-p}$ *C.q.m.*

Teorema 3.3.7.3. ${}^nC_{p-1} + {}^nC_p = {}^{n+1}C_p$

Demonstração.

$${}^nC_{p-1} + {}^nC_p = \frac{n!}{(p-1)![n-(p-1)]!} + \frac{n!}{p!(n-p)!} =$$

$$= \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!} + \frac{n!}{p!(n-p)!} =$$

$$= \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)(n-p)!} + \frac{n!}{p(p-1)!(n-p)!} =$$

$$= \frac{n!p}{p(p-1)!(n-p+1)(n-p)!} + \frac{n!(n-p+1)}{p(p-1)!(n-p+1)(n-p)!} =$$

$$= \frac{n!(p+n-p+1)}{p!(n-p+1)!} = \frac{n!(n+1)!}{p!(n-p+1)!} = \frac{(n+1)!}{p!(n-p+1)!} = {}^{n+1}C_p$$

C.q.m.

Teorema 3.3.7.4. $\sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_k = 2^n$

Demonstração.

Este teorema pode ser demonstrado por indução.

Comecemos por provar que a afirmação é válida para $\mathrm{n} = 0$, i.é., que

$$\sum_{\mathrm{k}=0}^{0} {}^{0}\mathrm{C}_{\mathrm{k}} = 2^0$$

Como $\sum_{\mathrm{k}=0}^{0} {}^{0}\mathrm{C}_{\mathrm{k}} = {}^{0}\mathrm{C}_0$ e $2^0 = 1$, concluímos que a afirmação é verdadeira para $\mathrm{n} = 0$.

Suponhamos agora que, dado $\mathrm{n} \in \mathbb{N}_0$, $\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} {}^{\mathrm{n}}\mathrm{C}_{\mathrm{k}} = 2^{\mathrm{n}}$

Queremos provar que $\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}+1} {}^{\mathrm{n}+1}\mathrm{C}_{\mathrm{k}} = 2^{\mathrm{n}+1}$

De facto,

$\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}+1} {}^{\mathrm{n}+1}\mathrm{C}_{\mathrm{k}} = {}^{n+1}C_0 + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} {}^{\mathrm{n}+1}\mathrm{C}_{\mathrm{k}} + {}^{n+1}C_{n+1} =$

$= 1 + \sum_{k=1}^{n}({}^{n}C_k + {}^{n}C_{k-1}) + 1 =$ (pelo teorema 3.3.7.3.)

$= {}^{n}C_0 + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} {}^{\mathrm{n}}\mathrm{C}_{\mathrm{k}} + \sum_{k=1}^{n} {}^{n}C_{k-1} + {}^{n}C_n =$

$= \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} {}^{\mathrm{n}}\mathrm{C}_{\mathrm{k}} + \sum_{k=1}^{n+1} {}^{n}C_{k-1} =$

$= \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} {}^{\mathrm{n}}\mathrm{C}_{\mathrm{k}} + \sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_k = 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$

Estamos, então, em condições de aplicar o principio de indução matemática para concluir que $\sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_k = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$ *C.q.m.*

Observação: Este resultado já foi demonstrado na resolução da alínea 2.4 do exercício 2. da secção anterior, uma vez que é o mesmo que provar que um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos.

3.4. Triângulo de Pascal

As propriedades das combinações permitem a construção do «Triângulo de Pascal», dispondo sequencialmente ${}^{n}C_{p}, p = 0, \ldots, n$ em cada linha $n(n = 0,1,2, \ldots)$

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1 \quad \binom{4}{1} = 4 \quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{4}{3} = 4 \quad \binom{4}{4} = 1$$

$$\binom{5}{0} = 1 \quad \binom{5}{1} = 5 \quad \binom{5}{2} = 10 \quad \binom{5}{3} = 10 \quad \binom{5}{4} = 5 \quad \binom{5}{5} = 1$$

Figura 1. Triângulo de Pascal até à 6ª linha

A construção do triângulo de Pascal deve-se às propriedades das combinações já enunciadas e demonstradas nos teoremas 3.3.7 da secção anterior.

Cada elemento é a soma dos dois que o "enquadram" na linha anterior, devido à identidade $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ (ver teorema 3.3.7.3).

Por outro lado temos as condições iniciais $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ (ver teorema 3.3.7.1) que nos dão os lados do triângulo de Pascal.

Mais ainda, porque $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$ (ver teorema 3.3.7.2), o triângulo de Pascal é simétrico em relação ao eixo vertical que passa no vértice $\binom{0}{0}$.

Por último, tendo em conta o teorema 3.3.7.4., podemos concluir que a soma dos elementos de n-ésimo linha do triângulo é 2^n.

3.5. Binómio de Newton

O binómio do Newton tem o desenvolvimento

$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_{k} x^{n-k} y^k$, ou seja a igualdade entre polinómios nas variáveis x e y, cujos coeficientes ${}^{n}C_{p}$, que se chamam coeficientes binomiais. O grau do polinómio $(x+y)^n$ ou do polinómio reduzido:

$$x^n + {}^{n}C_1 x^{n-1}y^1 + {}^{n}C_2 x^{n-2}y^2 + \cdots + {}^{n}C_{n-1}x^1y^{n-1} + y^n,$$

é n, tendo $n+1$ termos.

Considerando $x = y = 1$, obtemos

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n},$$

que sabemos ser 2^n e que, como já observamos anteriormente, pode ser entendido com a soma dos $n+1$ elementos das n-ésima linha do triângulo de pascal como o número de subconjuntos de um conjunto finito Ω, com n elementos.

O exemplo 1 e 2 foram retirados do caderno de apoio das Metas Curriculares do Ensino Secundário, no 12.º Ano de Escolaridade, pág. 16 do CC12, em [12].

1. Sabe-se que $\sum_{i=0}^{n} {}^{n}C_i = 4096 \ (n \in \mathbb{N})$ Determine:
   1.1. ${}^{n-1}C_4$
   1.2. $^{*}\sum_{i=0}^{n+2} {}^{n+2}C_i$
2. **Determine a soma dos coeficientes dos termos de uma forma reduzida do polinómio $(2x-3)^{11}$, utilizando o Binómio de Newton.

Resolução:

1.

1.1. Como $\sum_{i=0}^{n} {}^{n}C_i = 2^n$

$\sum_{i=0}^{n} {}^{n}C_i = 4096 \Leftrightarrow 2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$ *correspondendo à 11.ª linha do triângulo de Pascal e como,*

$${}^{n-1}C_4 = {}^{n-1}C_{3-1} = {}^{n}C_3 + {}^{n}C_{3-1} = {}^{n}C_3 + {}^{n}C_2 = {}^{11}C_3 + {}^{11}C_2$$

$$= \frac{11!}{3!\,8!} + \frac{11!}{2!\,9!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{3!\,8!} + \frac{11 \times 10 \times 9!}{2!\,9!} =$$

$$= \frac{11 \times 10 \times 9}{3!} + \frac{11 \times 10}{2!} = 165 + 55 = 220$$

1.2. $\sum_{i=0}^{n+2} {}^{n+2}C_i = {}^{n+2}C_0 + {}^{n+2}C_1 + \ldots + {}^{n+2}C_n = 2^{n+2}$

$2^n = 2^{12} \Leftrightarrow 2^{n+2} = 2^{14} = 16384$

Logo $\sum_{i=0}^{n+2} {}^{n+2}C_i = 16384$

2. Desenvolvimento do Binómio de Newton:

$(2x-3)^{11} = \sum_{k=0}^{11} {}^{11}C_k (2x)^{15-k}(-3)^k =$
$= {}^{11}C_0(2x)^{11} + {}^{11}C_1(2x)^{10}(-3)^1 + {}^{11}C_2(2x)^9(-3)^2 +$

$+{}^{11}C_3(2x)^8(-3)^3 + {}^{11}C_4(2x)^7(-3)^4 + {}^{11}C_5(2x)^6(-3)^5 +$

$+{}^{11}C_6(2x)^5(-3)^6 + {}^{11}C_7(2x)^4(-3)^7 + {}^{11}C_8(2x)^3(-3)^8 +$

$+{}^{11}C_9(2x)^2(-3)^9 + {}^{11}C_{10}(2x)^1(-3)^{10} + {}^{11}C_{11}(-3)^{11}$.

O polinómio $(2x-3)^{11}$ *é igual ao polinómio na forma reduzida:*

$2048x^{11} - 33792x^{10} + 253440x^9 - 1078272x^8 + 3421440x^7 - 7185024x^6 +$

$+10777536x^5 - 11547360x^4 + 8660520x^3 - 4330260x^2 + 1299078x - 177147$

Soma dos coeficientes dos termos:

${}^{11}C_0 2^{11} + {}^{11}C_1 2^{10}(-3) + {}^{11}C_2 2^9(-3)^2 + {}^{11}C_3 2^8(-3)^3 + {}^{11}C_4 2^7(-3)^4 +$

$+{}^{11}C_5 2^6(-3)^5 + {}^{11}C_6 2^5(-3)^6 + {}^{11}C_7 2^4(-3)^7 + {}^{11}C_8 2^3(-3)^8 +$

$+{}^{11}C_9 2^2(-3)^9 + {}^{11}C_{10} 2(-3)^{10} + {}^{11}C_{11}(-3)^{11}$.

Como:

${}^{11}C_0 = {}^{11}C_{11} = 1$
${}^{11}C_1 = {}^{11}C_{10} = 11$
${}^{11}C_2 = {}^{11}C_9 = 55$
${}^{11}C_3 = {}^{11}C_8 = 165$
${}^{11}C_4 = {}^{11}C_7 = 330$
${}^{11}C_5 = {}^{11}C_6 = 462$

A soma dos coeficientes dos termos é igual a:

$2048 - 33792 + 253440 - 1078272 + 3421440 - 7185024 + 10777536 -$
$-11547360 + 8660520 - 4330260 + 1299078 - 177147 = 62207$.

3.6. Teoria das Probabilidades

A formalização moderna de Probabilidade baseia-se no conceito de experiência aletória e seus possíveis resultados e ainda na noção de acontecimento.

O novo Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico, no 9.º ano de escolaridade e no domínio de conteúdos ODT9, o tema da Probabilidade, é iniciado com a definição de «experiência aleatória».

O termo aleatório significa acaso, incerto, cujo antónimo é determinista. Assim um resultado ω de uma experiencia aletória é incerto e não pode ser conhecido com exatidão antes de realizada a experiência, no entanto o conjunto dos resultados possíveis é conhecido *à posteriori*, ao contrário uma experiencia determinista conduz a resultados certos. São as experiências aleatórias as que interessam em Probabilidades.

Como exemplo de uma experiência determinista:

●«Colocar água a $0°C$ e observar o seu estado ao fim de 24 horas»

e de uma experiência aleatória:

●«Lançamento de uma moeda de 1€ ao ar e registar a face que fica virada para cima».

Uma experiência aleatória é um processo que conduz a um resultado pertencente a um conjunto previamente fixado, designado por «Universo dos Resultados» ou «Espaço Amostral», o qual se representa por Ω.

Aos elementos do espaço amostral chamam-se «Casos Possíveis».

Definição: Um subconjunto A de Ω é um «Acontecimento». Os elementos de A são os «casos favoráveis».

A acontecimento $\Leftrightarrow A \subseteq \Omega$

A ocorre $\Leftrightarrow \omega \in A; \{\omega\} \subseteq A$, sendo ω o resultado da experiência aleatória.

Pode-se ainda fazer a distinção entre «Experiência Determinista» quando existe um único caso possível e «Experiência Aleatória» quando existe mais do que um caso possível.

Os acontecimentos podem-se classificar como:

● Acontecimentos Elementares – se existir apenas um caso que lhes sejam favorável,

Os conjuntos singulares de elementos ω de Ω, $\{\omega\}$ são acontecimentos elementares

● Acontecimentos Composto – acontecimento com mais de um caso favorável.

● Acontecimento Certo – acontecimento que ocorre sempre. Coincide com o universo de resultados; $\Omega \subseteq \Omega$, Ω designa-se «acontecimento certo».

● Acontecimento Impossível – acontecimento que nunca ocorre. Coincide com o conjunto vazio; $\emptyset \subseteq \Omega$, $\emptyset$ designa-se «acontecimento impossível».

Definição: A $e\,B$ dizem-se acontecimentos «Incompatíveis» ou «Disjuntos» (OTD9) ou «Mutuamente Exclusivos» (PRB12) se são acontecimentos disjuntos, isto é, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$; caso contrário dizem-se acontecimentos «Compatíveis».

Definição: A e B dizem-se acontecimentos «Complementares» (OTD9) ou «Contrários» (PRB12) se são acontecimentos disjuntos e a respetiva união é igual ao espaço amostral, isto é, $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \Omega$.

3.7. Probabilidade Laplaciana (Clássica)

A probabilidade de realização de um dado acontecimento A associado a uma experiência aleatória é igual ao quociente entre o número de resultados favoráveis à realização deste acontecimento e o número total de resultados possíveis para a experiência, num universo Ω finito.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Tendo por base, a fundamentação, que a experiencia aleatória apresenta as caraterísticas seguintes:

- cada vez que se realiza a mesma experiência, obtêm-se um resultado individual que não se consegue prever com exatidão;

- repetindo a experiência em causa um número suficientemente grande de vezes sempre nas mesmas condições, os resultados obtidos apresentam, quando analisados em conjunto, grande regularidade estatística.

Será o dado perfeito?

Com um dado tetraédrico, numerado de 1 a 4, fez-se a seguinte experiência:

●Lançou-se o dado 10 vezes e construiu-se a seguinte tabela:

Número da face	*1*	*2*	*3*	*4*
n_i	*3*	*0*	*4*	*3*
f_i	*0,30*	*0,00*	*0,40*	*0,30*

●Lançou-se o dado 1000 vezes e construiu-se a seguinte tabela:

Número da face	*1*	*2*	*3*	*4*
n_i	*270*	*260*	*240*	*230*
f_i	*0,27*	*0,26*	*0,24*	*0,23*

Com 10 lançamentos pode-se afirmar que o dado é equilibrado? E com 1000 lançamentos?

Com 10 lançamentos, não é possível verificar se o dado é equilibrado, ou seja, se os quatro acontecimentos elementares são equiprováveis, mas com 1000 lançamentos, já é possível verificar que a estabilização da frequência relativa em torno da probabilidade teórica de cada acontecimento elementar, $(0{,}25)$, pelo que o dado tetraédrico deverá ser equilibrado.

O seguinte gráfico, onde se simula o lançamento de 1000 vezes o dado tetraédrico e se regista a respetiva frequência relativa de cada uma das faces, verificando que esse valor tende para a probabilidade de cada face ($P = \frac{1}{4}$):

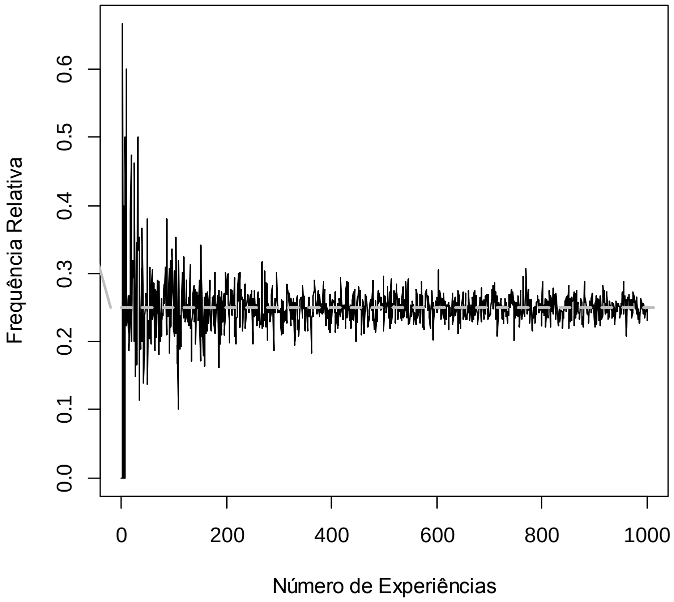
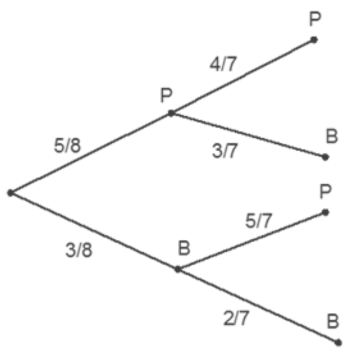


Gráfico 5. Equiprobabilidade no lançamento de um dado Tetraédrico

Aplicação da regra de Laplace

Exercício 1: De uma caixa com 8 bolas todas com o mesmo volume, apenas diferindo na cor, 5 pretas e 3 brancas, extrai-se consecutivamente duas bolas, sem reposição. Qual a probabilidade de retirar duas bolas pretas? Uma bola de cada cor? Pelo menos uma bola branca?

Resolução:



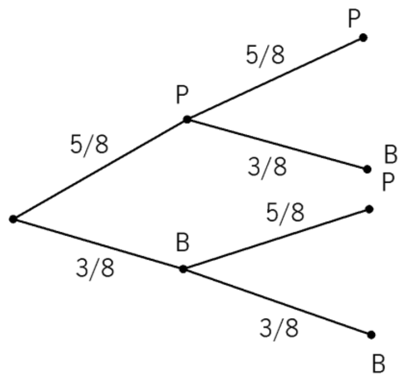
$P(P,P) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$

$P(P,B) + P(B,P) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$

$P(P,B) + P(B,P) + P(B,B) = \frac{15}{28} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{36}{56} = \frac{9}{14}$

ou $1 - P(P,P) = 1 - \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = 1 - \frac{20}{56} = \frac{36}{56} = \frac{9}{14}$.

Exercício 2: Resolver o mesmo exercício, mas agora com reposição.



Resolução:

$P(\text{P,P}) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$

$P(\text{P,B}) + P(\text{B,P}) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{64} + \frac{15}{64} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$

$P(\text{P,B}) + P(\text{B,P}) + P(\text{B,B}) = \frac{15}{32} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{32} + \frac{9}{64} = \frac{30}{64} + \frac{9}{64} = \frac{39}{64}$

ou $1 - P(\text{P,P}) = 1 - \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = 1 - \frac{25}{64} = \frac{64}{64} - \frac{25}{64} = \frac{39}{64}$.

3.8. Limitações da Regra de Laplace

São deveras as limitações da definição clássica de Laplace.

Em primeiro lugar é importante que a definição de Ω tem de ser muito cuidadosa. Este facto não constitui uma limitação mas pode ser uma complicação.

Se se pensar na experiência aleatória que consiste em dois lançamentos consecutivos de uma moeda (com duas faces designadas por C e E), sabemos que $\Omega = \{C_1C_2, C_1E_2, E_1C_2, E_1E_2,\}$, onde $C_i, i = 1{,}2$ e $E_i, i = 1{,}2$ representam, respetivamente, a ocorrência de C no lançamento i e a ocorrência de E no lançamento i e não $\{CC, EC, CE, EE\}$, como se poderia pensar. De facto até d'Alembert[1] cometeu este erro.

Em segundo lugar, na definição de Laplace, a probabilidade é definida a partir de acontecimentos que têm a mesma probabilidade. É uma definição em ciclo. Além disso, não se sabe o significado de igualmente provável.

A maneira como se pretende que os alunos percebam o que são acontecimentos igualmente prováveis passa pela ideia (intuitiva) que se uma experiência aleatória for realizada um número de vezes suficientemente grande, nas mesmas condições, em que não há alteração do espaço amostral, então a frequência com que ocorrem os resultados elementares é sensivelmente a mesma para cada um deles.

Esta questão esteve certamente presente nos autores dos Programas e Metas de Matemática A como é indicado no caderno de apoio do 3.° ciclo na página 83, em [7]:

"Descrever experiências aleatórias que possam ser repetidas mantendo um mesmo universo de resultados e construídas de modo a que se espere, num número significativo de repetições, que cada um dos casos possíveis ocorra aproximadamente com a mesma frequência e designar os acontecimentos elementares dessas experiências por «equiprováveis»."

Por último, em todas as experiências aleatórias cujo espaço amostral é infinito, a definição clássica deixa de fazer sentido. Seja Ω infinito, se um acontecimento A for um conjunto finito vem $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = 0$ e, se for infinito, tem-se $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\infty}{\infty}$ que é uma indeterminação.

A regra de Laplace só pode ser aplicada em espaços amostrais finitos.

Esta definição não é abrangente pelo que existe a necessidade de serem propostas outras definições de probabilidade.

[1] D´Alembert (1717-1783) foi um matemático e físico francês de quem se conta ter cometido um erro na resolução de um problema que lhe foi colocado e que pode ser enunciado da seguinte forma:
"Qual é a probabilidade de obter pelo menos uma cara no lançamento de uma moeda duas vezes?" Ao qual terá respondido 2/3.

No entanto, nenhuma definição proposta é suficientemente abrangente para o cálculo de probabilidades de qualquer acontecimento (subconjunto de um qualquer espaço amostral) pelo que revelou-se necessário, logo no início do séc. XX, teorizar a probabilidade.

A probabilidade passa a ser um termo primitivo (não se define) e é regida por um conjunto de três axiomas e de dois objetos primitivos, a saber, espaço amostral e acontecimento.

A axiomatização da probabilidade utilizada é de Kolmogorov, 1933, e consta do novo programa no caso em que Ω é finito.

Passa-se à teorização de Probabilidade.

Define-se «Espaço de Probabilidade» como o terno $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, onde $\mathcal{P}(\Omega)$ é o conjunto das partes de Ω cujos elementos são os acontecimentos e P é uma função de conjunto, de domínio $\mathcal{P}(\Omega)$, e contradomínio $\mathbb{R}^+$ tal que:

1. $P(A) \geq 0$, qualquer que seja o acontecimento $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ (Positividade)
2. $P(\Omega) = 1$ (Normalização)
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ e A, B acontecimentos disjuntos (Lei da Adição)

3.9. Consequências da Definição Axiomática de Probabilidade

3.9.1. Teorema. *Dado um conjunto finito Ω e uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(\Omega)$,* $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) \in [0,1]$.

Demonstração.

Em primeiro lugar vejamos que $P(\emptyset) = 0$.

Como, $\overline{\emptyset} = \Omega$ e $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$

e como, $\emptyset \subseteq A \Rightarrow P(\emptyset) \leq P(A)$, logo $P(A) \geq 0$

e ainda como, $A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) \leq P(\Omega)$, logo $P(A) \leq 1$ *C.q.m.*

3.9.2. Teorema. *Dado um conjunto finito Ω, uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(\Omega)$, e os acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, se $A \subseteq B$, então é válida a Monotonia da Probabilidade:*

$$P(A) \leq P(B).$$

Demonstração.

Em primeiro lugar vejamos que se $A \subseteq B$, $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$

$$P(B \backslash A) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \geq 0$$

uma vez que, $B = (B - A) \cup (A \cap B)$, com $B - A, A \cap B$ disjuntos

como, $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

logo, $P(A) \leq P(B)$. *C.q.m.*

3.9.3. Teorema. *Dado um conjunto finito E, uma probabilidade P no conjunto $\Upsilon(\Omega)$, e um acontecimento $A \in \Upsilon(\Omega)$, a probabilidade do acontecimento contrario a A é:*

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Demostração.

Como, $\Omega = A \cup \bar{A}$, A e $\bar{A}$ disjuntos

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(E) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$\Leftrightarrow 1 = P(A) + P(\bar{A})$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$ *C.q.m.*

3.9.4. Teorema. *Dado um conjunto finito Ω, uma probabilidade P no conjunto $\Upsilon(\Omega)$, e os acontecimentos $A, B \in \Upsilon(\Omega)$, a probabilidade de ocorrer pelo menos um dos acontecimento A ou B, é:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demonstração.

É fácil ver que, $A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$

$(A \cap \bar{B}), (A \cap B)$ e $(\bar{A} \cap B)$ são acontecimentos disjuntos dois a dois

Por outro lado, $A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$

de facto, $(A \cup A) \cap (\bar{B} \cup B) = A \cap \Omega = A$

então, $P\ (A) = P(A \cap \bar{B}) +\ P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$\boxed{P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)}$$

como, $A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup B) = (A \cup B) \cap \Omega = A \cup B$

então, $P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) = P\ (A) - P(A \cap B) + P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) =\ P\ (A) + P(B) - P(A \cap B)$ *C.q.m.*

Exercício. Mostrar que a definição de probabilidade de Laplace verifica a axiomática de probabilidade.

Resolução:

• $A \subseteq \Omega$, então $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

Ω finito e $\#\Omega = n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \#A \leq n$

Seja, $\#A = m, m \in \mathbb{N}_0$

$P(A) = \frac{m}{n} \geq 0$

• $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$

• A, B acontecimentos disjuntos, tais que $\#A = m$ e $\#B = k$

$A \cup B \subseteq \Omega$, então $\#(A \cup B) \leq n$

$P(A) + P(B) = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A \cup B) = \frac{m+k}{n}$ *C.q.m.*

3.10. Probabilidade Frequencista

Os fenómenos aleatórios apresentam uma grande regularidade estatística, isto é, se se repetir a experiência em causa sempre nas mesmas condições e um número suficientemente grande de vezes, a frequência relativa do acontecimento estabiliza à volta de um valor constante. Esta característica conduz à interpretação intuitiva de probabilidade como frequência limite.

De acordo com a interpretação frequencista, a probabilidade de um acontecimento A,

$\mathbb{P}(A) =$ limite da frequência relativa com que se observa A

Este limite não é o conceito usual da análise matemática, mas sim o limite em probabilidade. Dizer que

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} f_n\,(A)$$

equivale a dizer que para todo $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(|\mathbb{P}(A) - f_n(A)| > 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Em análise, dizer que $\lim_{n\to+\infty} f_n\,(A) = \mathbb{P}(A)$ significa que $|f_n(A) - \mathbb{P}(A)| < \epsilon$ para todo $n > n_0(\epsilon)$, enquanto que na convergência em probabilidade $|f_n(A) - \mathbb{P}(A)|$ pode exceder qualquer valor dado, por maior que este seja (> 1) embora com probabilidades cada vez mais próximas de zero.

É usual escrever-se: $$f_n(A) \overset{P}{\to} \mathbb{P}(A)$$

Esta é a versão primária da Lei dos Grandes Números provada por Bernoulli (séc. XVIII).

Comparação entre a probabilidade teórica de um acontecimento e a respetiva frequência relativa, verificando que à medida que se aumenta o número de repetições nas mesmas condições de uma experiência aleatória, a frequência relativa de um acontecimento equiprovável A, tende para a probabilidade desse acontecimento A – *Lei dos Grande Números*.

A aproximação da probabilidade teórica de um acontecimento e a respetiva frequência relativa é justificada pela Lei Fraca dos Grandes Números (Lei fraca - convergência em probabilidade).

3.10.1 Lei Fraca dos Grandes Números

Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas) com variância finita.

Seja $S_N = \sum_{n=1}^{N} X_n$. Tem-se que

$$\frac{1}{N} S_N \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \mathbb{E}(X)$$

ou é o mesmo que dizer $\forall \epsilon > 0 \ \lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n - \mathbb{E}(X)\right| > \epsilon\right) = 0.$

Demonstração (Consequência da Desigualdade de Chebychev).

$\frac{1}{N}S_N - \mathbb{E}(X) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n - \frac{N}{N}\mathbb{E}(X) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\big(X_n - \mathbb{E}(X)\big)$

Seja agora $\epsilon > 0$ qualquer. Pela desigualdade de Chebychev tem-se que,

$P\left(\left|\frac{1}{N}S_N - \mathbb{E}(X)\right| > \epsilon\right) = P(|\sum_{n=1}^{N} X_n - \mathbb{E}(X)| > \epsilon)$

$< \frac{1}{N^2\epsilon^2}\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{N}(X_n - \mathbb{E}(X))]^2$ (1)

Observe-se agora que como pela hipótese de independência se tem $cov(X_n, X_m) = 0$

$\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{N}(X_n - \mathbb{E}(X))]^2 = \mathbb{E}\big[\sum_{n,m=1,n<m}^{N}(X_n - \mathbb{E}(X))(X_m - \mathbb{E}(X))\big] =$

$= \sum_{n=1}^{N}[\mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}(X)]^2 + 2\sum_{n,m=1,n<m}^{N}\mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}(X))(X_m - \mathbb{E}(X)) =$

$= NVar(X) + 2\sum_{n,m=1,n<m}^{N} cov(X_n, X_m) = NVar(X)$

logo, substituindo em (1)

$\frac{1}{N^2\epsilon^2}\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{N}(X_n - \mathbb{E}(X))]^2 < \frac{1}{N^2\epsilon^2}NVar(X) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$ *C.q.m.*

3.11. Probabilidade Condicionada

Em algumas situações pretendemos calcular a probabilidade de um acontecimento A quando existe já alguma informação acerca do espaço amostral Ω.

Por exemplo se se pretender calcular a probabilidade do acontecimento A : "sair face com 2 pintas" quando se lança um dado equilibrado com o conhecimento que ocorreu B : "saiu face com número par", a probabilidade de A (que *à priori* é $\frac{1}{6}$), é, sabendo que B ocorre, $\frac{1}{3}$.

O que acontece é que a informação acerca da ocorrência de B fez com que o espaço amostral associado à experiência aleatória se modificasse. De facto, sem qualquer informação prévia

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,\}$ e P(“saída de face com duas pintas")$= \frac{1}{6}$ contudo a informação dada faz com que o espaço amostral seja agora $\Omega^{'} = \{2,4,6\}$ pelo que $P(A|B) = \frac{1}{3}$.

O acontecimento lê-se “ocorrer A sabendo (ou dado que) que ocorreu B".

Sendo a probabilidade uma forma de quantificar a incerteza, naturalmente que temos de atender que nova informação pode alterar, e por vezes de forma muito significativa, a avaliação da probabilidade. É natural que se estabeleça um processo de reavaliar a probabilidade por forma a incorporar nova informação.

É o conceito de probabilidade condicional.

Definição. *A probabilidade condicional de A dado B é*

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}, \quad se\, P(B) > 0.$$

Invertendo a expressão acima obtém-se a regra do produto

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Também se tem

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad se\, P(A) > 0.$$

e

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B|A)P(A)}$$

Nota: As probabilidades absolutas e as probabilidades condicionais são equivalentes.

De facto, $\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(A|B)}{P(B|A)}$.

Invertendo agora esta expressão temos

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}}$$

Exercício 1. Mostre que probabilidade condicional satisfaz os axiomas da teoria da probabilidade.

Resolução.

No espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, $\forall A, B \subseteq \Omega$

1. $P(A|B) \geq 0, P(B) > 0$

Demonstração.

Por definição, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0$,

Mas, $P(A \cap B) \geq 0$ e $P(B) > 0$

Logo, $P(A|B) \geq 0$. C.q.m.

2. $P(\Omega|B) = 1$

Demonstração.

Por definição, $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

C.q.m.

3. $P[(A_1 \cup A_2)|B] = P(A_1|B) + P(A_2|B)$, sendo $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Demonstração.

Começa-se por notar que se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, então $(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \emptyset$

assim, $P[(A_1 \cup A_2)|B] = \frac{P[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{P(B)} = \frac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{P(B)} =$

$= \frac{P[(A_1 \cap B) + (A_2 \cap B)]}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ *C.q.m.*

Definição. *O acontecimento A é independente de B se $P(A|B) = P(A)$. Neste caso*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Como quer a intersecção quer o produto são operações comutativas, entre conjuntos e entre números reais, respetivamente, dizer que A é independente de B é equivalente a afirmar que B é independente de A.

Quando consideramos experiências aleatórias sequenciais no tempo, originando espaços amostra sequenciais com o número razoável de resultados possíveis, os acontecimentos podem ser indexados pela ordem da experiência em que ocorrem, e dispostos num grafo.

Nota: A soma das probabilidades nos ramos é 1, uma vez que a probabilidade condicional a um acontecimento fixo é uma medida de probabilidade.

A probabilidade de uma cadeia é simplesmente o produto das probabilidades condicionais escritas nos ramos que unem os acontecimentos.

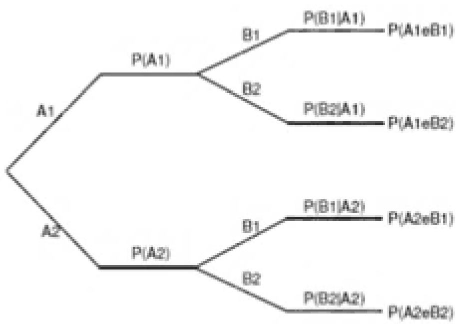


Figura 2. Ramificação da Probabilidade Condicionada

3.12. O Teorema da Probabilidade Total

A simples definição de probabilidade condicional e a expressão da probabilidade que dela decorre, associada à noção de partição do espaço amostra, arrastam um dos resultados mais importantes de toda a Teoria das Probabilidades: o teorema da probabilidade total.

Definição. *A família* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma partição do conjunto* Ω *sse:*

$(i)\ A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$

$(ii)\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$

Note que uma partição $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω induz uma partição $\{A_n \cap B\}_{n\in\mathbb{N}}$ em Ω qualquer $B \subset \Omega$.

Teorema. Teorema da Probabilidade Total

Seja B *um acontecimento e* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma partição do universo* Ω *em acontecimentos. Então,*

$$P(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(B|A_n)P(A_n).$$

Demonstração.

Sendo B um subconjunto de Ω, $B = B \cap \Omega$.

$P(B) = P(B \cap \Omega) = P\big(B \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)\big) =$

$= P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(B \cap A_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(B \cap A_n)$ *C.q.m.*

Corolário. *Quaisquer que sejam os acontecimentos A e B,*

$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$.

Note que basta apenas considerar a partição $\{A, \bar{A}\}$ de Ω.

Exercício: * Demonstre o seguinte resultado: (Teorema de Bayes)

Seja $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma partição do universo Ω em acontecimentos e S um acontecimento de Ω. Então

$$P(D_i|S) = \frac{P(S|D_i)P(D_i)}{\sum_{n\in\mathbb{N}} P(S|D_n)P(D_n)}$$

Demonstração.

$$P(D_i|S) = \frac{P(D_i \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S|D_i)P(D_i)}{\sum_{n\in\mathbb{N}} P(S|D_n)P(D_n)}$$

onde a $P(S)$ do numerador é substituída pela sua expressão dada pelo Teorema da Probabilidade Total. *C.q.m.*

CAPÍTULO IV – ANÁLISE COMPARATIVA DO TEMA DA ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS DO ENSINO BÁSICO, REFENTES AO PROGRAMA ANTERIOR E AO NOVO PROGRAMA E METAS CURRICULARES DA DISCIPLINA DE MATAMÁTICA

4.1. Introdução

A filosofia dos novos programas é um pouco diferente da adotada nos programas anteriores.

É certo que alguns conteúdos foram introduzidos, outros foram retirados, mas não nos parece ser essa a diferença essencial.

Os novos Programas revelam uma grande preocupação com o rigor, introduzindo-se uma linguagem mais formal, exigindo-se que os alunos a utilizem constantemente, conheçam resultados, treinem procedimentos e utilizem a tecnologia de forma criteriosa.

Com esta filosofia os autores dos atuais programas pretendem que:

_ se introduzam os conteúdos de forma progressiva, estruturada e coerente;

_ se indiquem claramente os objetivos a atingir pelos alunos em cada ano curricular;

_ não se coloque em oposição a memorização e a compreensão;

_ se treinem procedimentos rotineiros e se conheçam factos e resultados elementares, por forma a que possam ser facilmente mobilizados quando necessário;

_ se promova a compreensão conceptual dos objetos matemáticos;

_ se utilize a tecnologia de forma cuidadosa e criteriosa.

No Programa anterior é dado grande ênfase à metodologia a utilizar no ensino da matemática. Nos novos Programas não são feitas indicações metodológicas. Também não se dá tanta importância à aplicação imediata de Matemática ao real. Sugere-se que, sempre que possível, tal seja feito mas adaptado aos objetos de ensino.

Os autores dos novos Programas dizem existir dois grandes eixos nas Metas Curriculares:

– Estabelecer objectivos, conceitos ensináveis e avaliáves para cada ano de escolaridade;

– Dar liberdade ao professor na seleção de estratégias de ensino a adotar na lecionação de cada um dos domínios de conteúdos.

Relativamente ao tempo dedicado à Estatística e Probabilidades, não se nota grande diferença em ambos os Programas.

É feita uma breve referência no que diz respeito aos conteúdos curriculares da Organização e Tratamento de Dados, no 1.° e 2.° ciclo, para o entendimento no 3.° ciclo do Ensino Básico, e posteriormente no Ensino Secundário.

4.2. Reflexão da Abordagem Temática relativa a cada um dos Programas, no 1.º ciclo do Ensino Básico

No 1,° ciclo do Ensino Básico, a Organização e Tratamento de Dados surge desde o 1.° ao 4.° ano em ambos os Programas.

No Programa anterior, o objetivo primordial é desenvolver nos alunos a capacidade de ler e interpretar dados organizados na forma de tabelas e gráficos, assim como de os recolher, organizar e representar com o fim de resolver problemas em contextos variados relacionados com o seu quotidiano.

No novo Programa e Metas curriculares é dado ênfase a diversos processos que permitem focar e interpretar informação recolhida em contextos variados. Começa-se por abordar alguns conteúdos básicos da Teoria de Conjuntos que não estavam contemplados no Programa anterior. Relativamente à representação e tratamento de dados, no novo Programa, para além do que já era lecionado no Programa anterior, são introduzidos esquemas de contagem (tally charts), diagramas de caule e folhas, mínimo, máximo, amplitude, frequência relativa e ainda a noção de percentagem.

4.3. Reflexão da Abordagem Temática relativa a cada um dos Programas, no 2.º ciclo do Ensino Básico

A seguinte tabela contempla a distribuição em % do número de aulas no 5.º e 6.º ano, em cada um dos Temas Matemáticos/Domínios de Conteúdos.

	Número de aulas /Ano de escolaridade (%)			
Temas Matemáticos/Domínios de Conteúdos	5º ano		6º ano	
Números e Cálculo	42	30	30	24
Geometria	26	49	44	36
Álgebra e Funções	21	9	14	32
Organização e Tratamento de Dados	11	12	13	8
	Programa 2007	Programa 2013	Programa 2007	Programa 2013

Tabela 1. Temas Matemáticos/ Domínios de Conteúdos no 2.º ciclo do Ensino Básico, no anterior Programa e no novo Programa e Metas Curriculares

No 2.º ciclo do Ensino Básico, no anterior Programa, o Tema Matemático da Organização e Tratamento de Dados é lecionado nos dois anos que compõem este ciclo.

Incide na representação e interpretação de dados: formulação de questões, natureza dos dados, tabelas de frequências absolutas e relativas, gráficos de barras, gráficos circulares, gráficos de linha e diagramas de caule-e-folhas, média aritmética, extremos e amplitude.

No novo Programa e Metas Curriculares, o domínio de conteúdos da Organização e Tratamento de Dados é também lecionado nos dois anos que compõe este ciclo.

Retomam-se várias representações de conjuntos de dados e noções estatísticas elementares como a média, a moda e a amplitude. Introduzem-se os gráficos cartesianos e designações específicas, tais como: referenciais cartesianos, ortogonais e monométricos, abcissas, ordenadas e coordenadas, gráficos cartesianos. Na representação e tratamento de dados abordam-se tabelas de frequências absolutas e relativas, gráficos de barras e de linhas, média aritmética, problemas envolvendo a média e a moda, problemas envolvendo dados em tabelas, diagramas e gráficos, gráficos circulares, análise de conjuntos de dados a partir da média, moda e amplitude, problemas envolvendo dados representados de diferentes formas. Introduzem-se ainda os conceitos de população e unidade estatística, variáveis quantitativas e qualitativas.

Assim, na Representação e Tratamento de Dados, os conteúdos a lecionar são muito semelhantes nos dois programas, bem como as respectivas percentagens do número de aulas, havendo no entanto no novo Programa, a introdução dos conceitos de "população e unidade estatística", e "variáveis quantitativas e qualitativas", No que se refere às Probabilidades, tal como já acontecia no 1.º ciclo, no anterior Programa, os alunos trabalham informalmente a noção de acaso e adquirem o vocabulário básico relativo às situações aleatórias. Este tema não faz parte do novo Programa neste ciclo de estudos.

4.4. Reflexão da Abordagem Temática relativa a cada um dos Programas, no 3.º ciclo do Ensino Básico

No 3.º ciclo do Ensino Básico, no anterior Programa, a Organização e Tratamento de Dados é lecionado nos três anos, que compõem este ciclo. Observando-se desde logo, que o peso deste tema curricular, é menor em qualquer um dos anos letivos, comparativamente com os restantes temas (ver gráficos). Alarga-se o reportório das medidas estatísticas, incluindo o estudo da mediana, quartis e amplitude interquartis e das formas de representação de dados com os diagramas de extremos e quartis, possibilitando-se assim as competências para a realização de estudos estatísticos que incluem a comparação de dois ou mais conjuntos de dados, identificando as suas semelhanças e diferenças na localização central e dispersão. Desenvolve-se as noções de população e amostra, ponderando elementos que afetam a sua representatividade e realizando e discutindo predições baseadas em estudos com amostras. No que se refere à noção de probabilidade, abordam-se os conceitos de probabilidade de Laplace e Frequencista, embora esta última muito superficialmente.

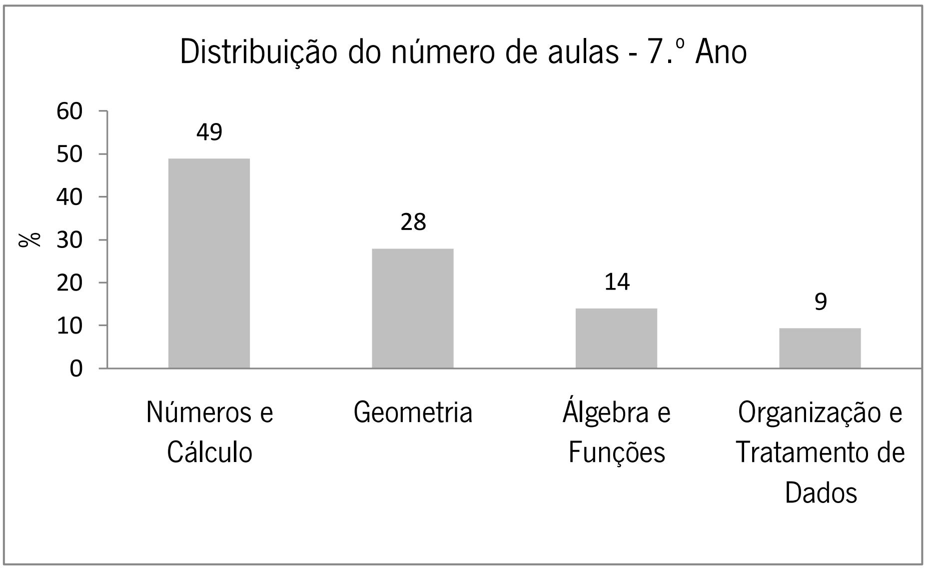


Gráfico 6. Distribuição do número de aulas no 7.º ano de escolaridade no anterior Programa

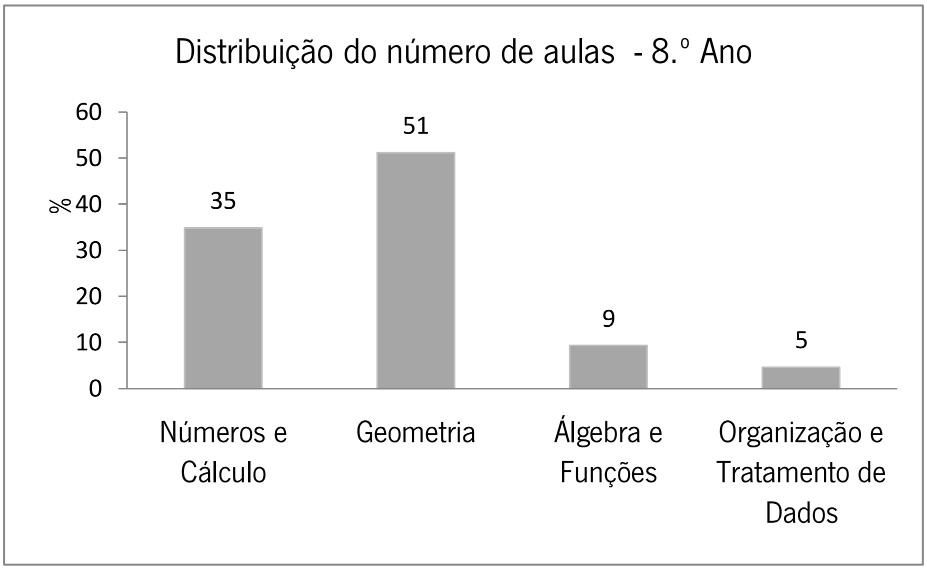


Gráfico 7. Distribuição do número de aulas no 8.º ano de escolaridade no anterior Programa

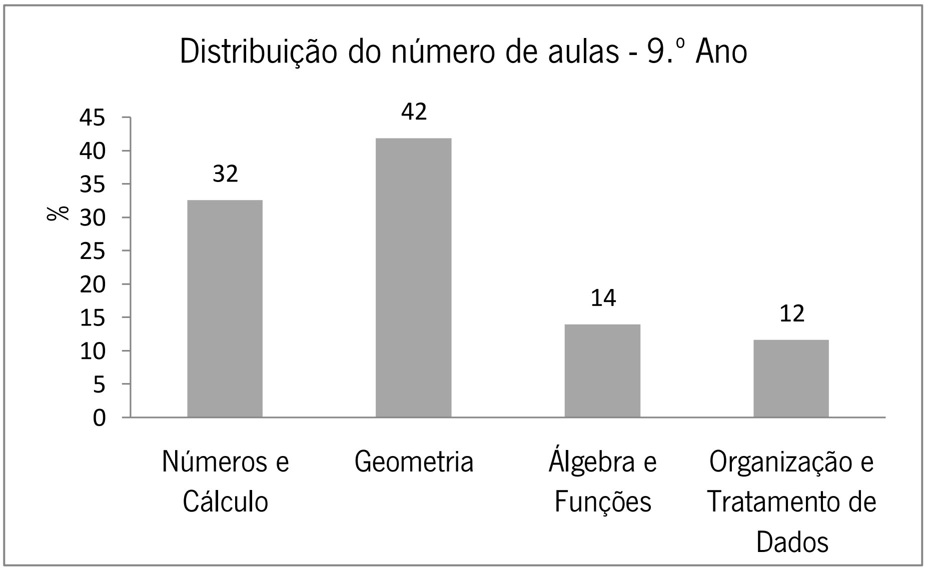


Gráfico 8. Distribuição do número de aulas no 9.º ano de escolaridade no anterior Programa

A seguinte tabela contempla a distribuição do número de aulas no 7.º, 8.º e 9.º ano, em cada um dos Domínios de Conteúdos do 3.º ciclo do novo Programa.

	Número de tempos (45 minutos) /Ano de escolaridade		
Domínios de conteúdos	7º ano	8º ano	9º ano
Números e Operações (NO)	18	20	15
Geometria e Medida (GM)	66	40	65
Funções, Sequências e Sucessões (FSS)	25	15	11
Álgebra (ALG)	28	62	29
Organização e Tratamento de Dados (OTD)	10	10	22
	147	147	142
	Total do número de aulas / Ano		

Tabela 2. Domínios de Conteúdos no 3.º ciclo do Ensino no novo Programa e Metas Curriculares

No 3.º ciclo do Ensino Básico o domínio de conteúdos de Organização e Tratamento de Dados é lecionado nos três anos que compõe este ciclo, embora se consiga desde já observar que o peso deste domínio de conteúdos, no 7.º ano e 8.º ano de escolaridade, é bastante inferior em relação aos outros domínios de conteúdos, havendo no entanto um aumento no 9.º ano de escolaridade, onde, se inicia o tema das Probabilidades. São introduzidas algumas medidas de localização e dispersão de um conjunto de dados e é feita uma iniciação às probabilidades e aos fenómenos aleatórios.

4.4.1. 7.º Ano de Escolaridade

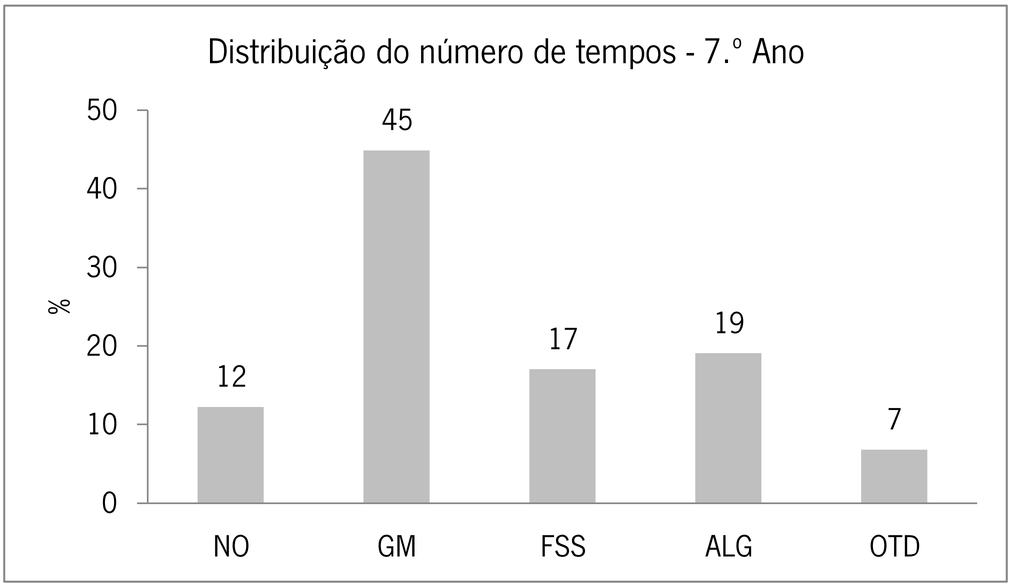


Gráfico 9. Distribuição do número de aulas no 7.º ano de escolaridade no novo Programa e Metas Curriculares

No 7.º ano de escolaridade, os objetivos do domínio de conteúdos da Organização e Tratamento de Dados centram-se no representar, tratar e analisar conjuntos de dados, enfatizando o processo de cálculo, as suas propriedades e limitações, com a medida de localização – mediana. Estão contemplados dez tempos para a sua lecionação, percorrendo os seguintes conteúdos: sequência ordenada dos dados; mediana de um conjunto de dados; definição e propriedades; problemas envolvendo tabelas, gráficos e medidas de localização.

O Programa e Metas Curriculares do 3.° ciclo de 2013 enfatizam que as medidas de localização, média e moda de um conjunto de dados, foram abordadas nos anos letivos anteriores, devendo-se rever os seus conceitos e aplicação, introduzindo agora a mediana. Para o cálculo da mediana, aparece descriminado a sequência ordenada dos dados, embora no anterior Programa, tal esteja implícito e não descriminado, uma vez que na brochura de apoio ao professor, surge a definição da mediana, equivalente ao Programa de 2013 e em seguida, o modo de obtenção da mediana, atendendo à paridade, onde se refere e se destaca a ordenação dos dados.

4.4.2. 8.° Ano de Escolaridade

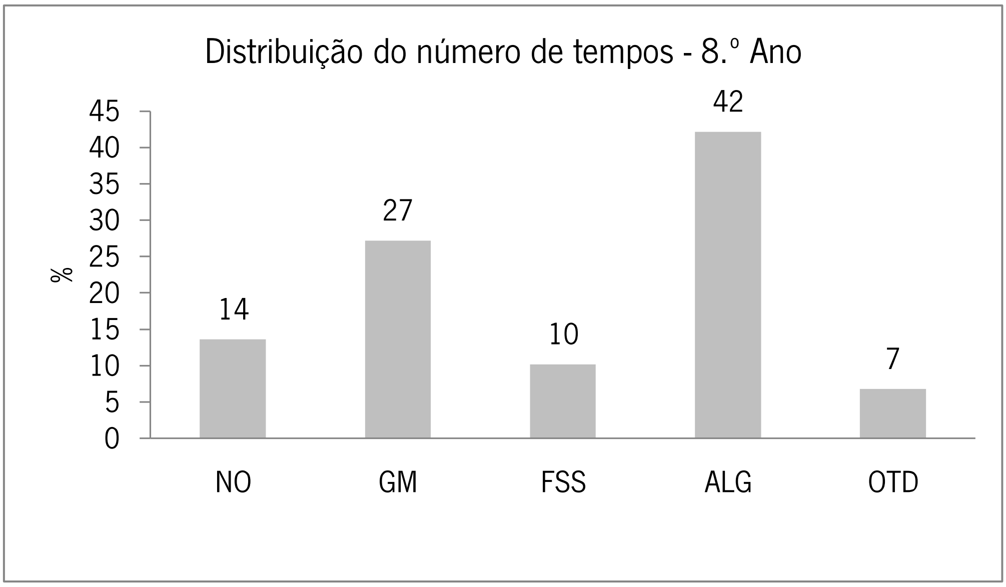


Gráfico 10. Distribuição do número de aulas no 8.° ano de escolaridade novo Programa e Metas Curriculares

No 8.° ano de escolaridade, estão contemplados dez tempos para introduzir os diagramas de extremos e quartis: noção de quartil; diagramas de extremos e quartis; amplitude interquartil; problemas envolvendo gráficos diversos e diagramas de extremos e quartis.

No Ensino Básico e Secundário, quer no Programa anterior, quer no novo Programa, o termo quartis é associado de uma maneira geral à divisão em quatro partes de um conjunto de dados sem que se apresente uma definição mais precisa, recorrendo-se muitas vezes a exemplos relativamente aos quais são indicados os procedimentos para os obter.

Analisando a literatura especializada, verifica-se a existência de uma grande diversidade de processos que não conduzem aos mesmos resultados, para o primeiro e para o terceiro quartil. O segundo quartil, invariavelmente, é definido como sendo igual à mediana. Se recorrermos a meios tecnológicos para determinar o valor dos quartis do mesmo conjunto de dados, usando uma máquina de calcular, uma folha de cálculo ou um programa estatístico, pode acontecer obter-se algumas respostas diferentes. Em suma, não existe uma definição universalmente aceite nem para o primeiro nem para o terceiro quartil.

O processo de determinação de cada quartil inclui dois passos:

1) determinar a posição do quartil no conjunto de dados. A posição do segundo quartil ou mediana, independentemente do método usado é definido sempre da mesma maneira,

$k = \frac{n+1}{2}$.

Já a forma de determinar a posição do primeiro e terceiros quartis, no conjunto de dados pode ser obtida consoante vários métodos:

Método inclusivo – quando o conjunto de dados tem um número ímpar de elementos, o elemento correspondente ao Q_2 é incluído em ambos os subconjuntos de dados para o cálculo de Q_1 e Q_3.

Método exclusivo – quando o conjunto de dados tem um número ímpar de elementos, o elemento correspondente ao Q_2 não é incluído em nenhum dos subconjuntos de dados para o cálculo de Q_1 e Q_3.

Método semi-inclusivo – quando o conjunto de dados tem um número ímpar de elementos, o elemento correspondente ao Q_2 é incluído apenas num dos subconjuntos de dados para o cálculo de Q_1 e Q_3.

A tabela seguinte apresenta as fórmulas para o cálculo das posições do primeiro e do terceiro quartis correspondentes a três métodos mais usuais e diferentes, sempre que o número de elementos da amostra é ímpar, método inclusivo, exclusivo e semi-inclusivo, (este método será focado, considerando a inclusão da mediana no primeiro subconjunto de elementos).

<table>
<tr><td colspan="2">n par</td><td colspan="2">n ímpar</td><td></td></tr>
<tr><td>Q_1</td><td>Q_3</td><td>Q_1</td><td>Q_3</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">$k = \frac{n+2}{4}$</td><td rowspan="3">$k = \frac{3n+2}{4}$</td><td>$k = \frac{n+3}{4}$</td><td>$k = \frac{3n+1}{4}$</td><td>Método inclusivo</td></tr>
<tr><td>$k = \frac{n+1}{4}$</td><td>$k = \frac{3n+3}{4}$</td><td>Método exclusivo</td></tr>
<tr><td>$k = \frac{n+3}{4}$</td><td>$k = \frac{3n+3}{4}$</td><td>Método semi-inclusivo</td></tr>
</table>

Tabela 3. Fórmulas para o cálculo das posições de Q_1 e Q_3

2) calcular o valor do quartil. Quando o quartil coincide com um elemento do conjunto de dados diz-se que a sua posição é um valor inteiro k, e neste caso o valor do quartil é imediato, $Q_p = x_k$. Sempre que isso não acontece, então, $i < k < i + 1$, $Q_p = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

k inteiro	$Q_p = x_k$
k não inteiro $i < k < i + 1$	$Q_p = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

Tabela 4. Fórmulas para cálculo do valor de Q_p dada a sua posição k

A noção intuitiva de que os quartis dividem uma amostra com n observações em 4 partes iguais, faz com que ao efetuar a divisão inteira de n por 4, o resto dá 0, ou 1, ou 2 ou 3. Isto é, dado n o número de observações da amostra, existe um k inteiro não negativo tal que contemple então os quatro casos: $n = 4k$; $n = 4k + 1$; $n = 4k + 2$; $n = 4k + 3$.

Na tabela seguinte, apresenta-se o valor de Q_1, calculado pelo método apresentado em cada um dos três processos.

	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
Método inclusivo	$Q_1 = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$Q_1 = x_k$	$Q_1 = x_k$	$Q_1 = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$
Método exclusivo	$Q_1 = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$Q_1 = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$Q_1 = x_k$	$Q_1 = x_k$
Método semi-inclusivo	$Q_1 = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$Q_1 = x_k$	$Q_1 = x_k$	$Q_1 = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

Tabela 5. Fórmulas para o cálculo da posição de Q_1 segundo os três métodos

Na tabela seguinte, apresenta-se o valor de Q_3, calculado pelo método apresentado em cada um dos três processos.

	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
Método inclusivo	$Q_3 = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$Q_3 = x_k$	$Q_3 = x_k$	$Q_3 = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$
Método exclusivo	$Q_3 = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$Q_3 = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$Q_3 = x_k$	$Q_3 = x_k$
Método semi-inclusivo	$Q_3 = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$Q_3 = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$Q_3 = x_k$	$Q_3 = x_k$

Tabela 6: Fórmulas para o cálculo da posição de Q_3 segundo os três métodos

Generalizando para um conjunto com n dados, cada um dos três processos em análise, convém distinguir os casos correspondentes aos diferentes restos resultantes da divisão de n por 4. Repare-se ainda que quando n é ímpar existe um dado cujo valor é igual à mediana e ao segundo quartil ao passo que, quando n é par, a mediana e o segundo quartil podem não coincidir com o valor de nenhum dos dados já que é calculada como média dos valores de dois dados. Nos casos em que n é par, tanto o método exclusivo como o método semi-inclusivo, fazem intervir no cálculo de Q_1 os valores das ordens até à ordem $\frac{n}{2}$ (inclusive).

No Programa anterior, optou-se pelo método inclusivo, ([26],página 146), da brochura e materiais de apoio de Estatística do 3.º ciclo do Ensino Básico.

"*A metodologia que, a este nível, recomendamos para obter os quartis é a seguinte:*

- *Ordenar os dados e calcular a mediana Me;*
- *O 1.º quartil, Q1, é a mediana dos dados que ficam para a esquerda de Me;*
- *O 3.º quartil, Q3, é a mediana dos dados que ficam para a direita de Me.*

Ao calcular os quartis pelo processo anterior, podem-se levantar algumas dúvidas no caso em que a dimensão da amostra é ímpar. Efetivamente, neste caso a mediana coincide com um dos elementos da amostra e poderíamos optar por considerá- lo incluído nas duas metades em que fica dividida a amostra, ou não o considerar em nenhuma das metades. A nossa opção é considerá-lo pertencente às duas metades."

No novo Programa e Metas Curriculares, faz-se referência aos três métodos, inclusivo, exclusivo e semi-inclusivo, mostrando as falhas de cada um deles em determinadas situações ([7], página 87 a 89) podendo no entanto garantir-se que, nessas situações, as percentagens mínimas dos dados em questão se aproximam dos limiares considerados (respetivamente 25% e 75%), desde que se considerem amostras com dimensões suficientemente elevadas. Os autores do Programa optaram pelo método exclusivo, uma vez que é o mais amplamente utilizado, sendo em particular o que está programado na grande maioria das calculadoras.

4.4.3. 9.º Ano de Escolaridade

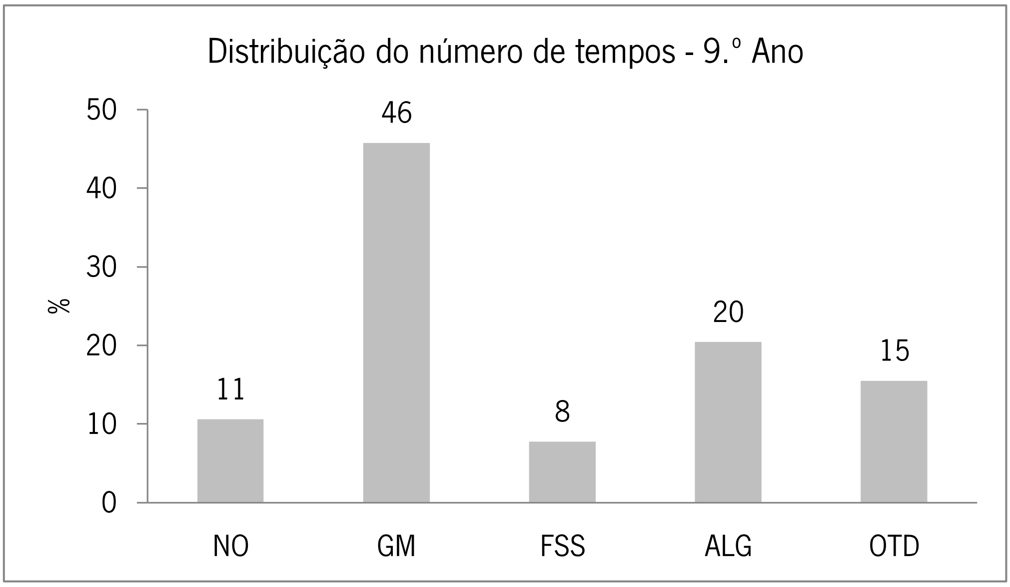


Gráfico 11. Distribuição do número de aulas no 9.º ano de escolaridade novo Programa e Metas Curriculares

No 9.º ano de escolaridade, estão contemplados vinte e dois tempos, para introduzir as variáveis estatísticas discretas e contínuas; classes determinadas por intervalos numéricos; agrupamento de dados em classes da mesma amplitude; histogramas; propriedades; problemas envolvendo a representação de dados em tabelas de frequência e histogramas. Estende-se a noção de variável estatística quantitativa e a sua classificação ao caso em que cada classe fica determinada por um intervalo de números, procedendo á definição de classes de valores, os quais se designam por intervalos de classe ou simplesmente classes, construção e representação gráfica do histograma.

Relativamente às probabilidades, são introduzidas as experiências deterministas e aleatórias; universo dos resultados ou espaço amostral; casos possíveis e acontecimentos: casos favoráveis, acontecimento elementar, composto, certo, impossível; acontecimentos disjuntos ou incompatíveis e complementares; experiências aleatórias com acontecimentos elementares equiprováveis; definição de Laplace de probabilidade; propriedades e exemplos; problemas envolvendo a noção de probabilidade e a comparação de probabilidades de diferentes acontecimentos compostos, utilizando tabelas de dupla entrada e diagramas em árvore; comparação de probabilidades com frequências relativas em experiências aleatórias em que se presume equiprobabilidade dos casos possíveis.

	Ensino Básico – 3.º Ciclo de Escolaridade Organização e Tratamento de Dados (OTD)	
	Programa 2007 (Percurso A e B)	Programa 2013
7.º Ano	**Tratamento de dados** - Organização, análise e interpretação de dados — histograma; - Medidas de localização e dispersão; - Discussão de resultados.	- Histogramas (a lecionar no 9.º ano); - Medidas de localização (lecionado no 7.º ano) e Diagramas de extremos e quartis (a lecionar no 8.º ano); - Idêntico à resolução de problemas envolvendo tabelas, gráficos e medidas de localização e gráficos diversos e diagramas de extremos e quartis.
8.º Ano	**Planeamento estatístico** - Especificação do problema; - Recolha de dados; - População e amostra.	- Não descriminado; - Não descriminado; - A lecionar no 2.º ciclo.
9.º Ano	**Probabilidade** - Noção de fenómeno aleatório e de experiência aleatória; - Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento.	**Probabilidade** (a lecionar no 9.º ano) - Equivalente a experiências deterministas e aleatórias; universo dos resultados ou espaço amostral; casos possíveis; - Equivalente à definição de Laplace de probabilidade; propriedades e exemplos e problemas envolvendo a noção de probabilidade e a comparação de probabilidades de diferentes acontecimentos compostos, utilizando tabelas de dupla entrada e diagramas em árvore.

Tabela 7. Comparação da Abordagem Temática do anterior Programa relativamente ao novo Programa e Metas Curriculares no 3.º Ciclo do Ensino Básico

Tabela 8. Comparação da Abordagem Temática do novo Programa e Metas Curriculares relativamente ao anterior Programa no 3.º Ciclo do Ensino Básico (a seguir)

	Ensino Básico – 3.º Ciclo de Escolaridade Organização e Tratamento de Dados (OTD)	
	Programa 2013	Programa 2007 (Percurso A e B)
7.º Ano	**Medidas de localização** - Sequência ordenada dos dados; - Mediana de um conjunto de dados; definição e propriedades; - Problemas envolvendo tabelas, gráficos e medidas de localização.	**Lecionado no 7.º Ano** - Implícito, embora não discriminado; - Englobado nas medidas de localização; - Idêntico à discussão de resultados.
8.º Ano	**Diagramas de extremos e quartis** - Noção de quartil; - Diagramas de extremos e quartis; - Amplitude interquartil; - Problemas envolvendo gráficos diversos e diagramas de extremos e quartis.	**Lecionado no 7.º Ano** - Englobado nas medidas de dispersão; - Idem; - Idem; - Idêntico à discussão de resultados.
9.º Ano	**Histogramas** - Variáveis estatísticas discretas e contínuas; classes determinadas por intervalos numéricos; agrupamento de dados em classes da mesma amplitude; - Histogramas; propriedades; - Problemas envolvendo a representação de dados em tabelas de frequência e histogramas. **Probabilidade** - Experiências deterministas e aleatórias; universo dos resultados ou espaço amostral; casos possíveis; - Acontecimentos: casos favoráveis, acontecimento elementar, composto, certo, impossível; - Acontecimentos disjuntos ou incompatíveis e complementares; - Experiências aleatórias com acontecimentos elementares equiprováveis; - Definição de Laplace de probabilidade; propriedades e exemplos; - Problemas envolvendo a noção de probabilidade e a comparação de probabilidades de diferentes acontecimentos compostos, utilizando tabelas de dupla entrada e diagramas em árvore; - Comparação de probabilidades com frequências relativas em experiências aleatórias em que se presume equiprobabilidade dos casos possíveis.	**Lecionado no 7.º Ano** - Equivalente à organização, análise e interpretação de dados — histograma; - Implícito, embora não discriminado; - Idêntico à discussão de resultados. **Lecionado no 9.º Ano** - Equivalente à noção de fenómeno aleatório e de experiência aleatória; - Implícito, embora não discriminado; - Implícito, embora não discriminado; - Implícito, embora não discriminado; - Equivalente à noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento; - Idem; - Implícito, embora não discriminado.

Para além do já referido quanto à distribuição do peso atribuído, no anterior Programa, ao tema da Organização e Tratamento de Dados, e no novo Programa e Metas Curriculares, ao Domínio de Conteúdos da Organização e Tratamento de Dados, destaca-se que os conteúdos abordados são praticamente os mesmos, embora por vezes lecionados em anos letivos e mesmos ciclos de ensino diferentes. Em ambos os programas tem-se em atenção que o aluno deve adquirir ao longo da escolaridade do Ensino Básico, conhecimentos, conceitos e representações de modo a compreender e ser capaz de produzir informação estatística e de a utilizar para resolver problemas e tomar decisões informadas. Ambos os programas apontam, também, para o desenvolvimento da compreensão da noção de probabilidade, tanto no seu aspeto teórico, como aplicado.

O número de aulas a lecionar no tema da Organização e Tratamento de Dados (OTD) é sempre inferior comparativamente com os outros Temas Matemáticos, no anterior Programa, ao longo dos três anos, no novo Programa e Metas Curriculares e no 7. º e 8.º anos, mantem-se essa tendência, excetuando-se no 9.º ano, onde o número de aulas a lecionar é superior aos Domínios de Conteúdos dos temas Números e Operações (NO) e Funções, Sequências e Sucessões (FSS). A percentagem de aulas a lecionar em cada um dos três anos de escolaridade que compõe o 3.º ciclo do Ensino Básico, em ambos os programas é apresentada na seguinte tabela:

Organização e Tratamento de Dados (OTD) - % do Número de Aulas		
Ano de Escolaridade	Programa 2007	Programa 2013
7.º Ano	9%	7%
8.º Ano	5%	7%
9.º Ano	12%	15%

Tabela 9. Comparação da percentagem do número de aulas do tema da Organização e Tratamento de Dados em ambos os Programas do 3.º ciclo do Ensino Básico

No gráfico seguinte apresenta-se essa comparação, verificando-se um aumento ligeiro na percentagem do número de aulas a lecionar no Tema da Organização e Tratamento de Dados, no novo Programa e Metas Curriculares, tendência que se vem mantendo também, na lecionação da Estatística, em outros países.

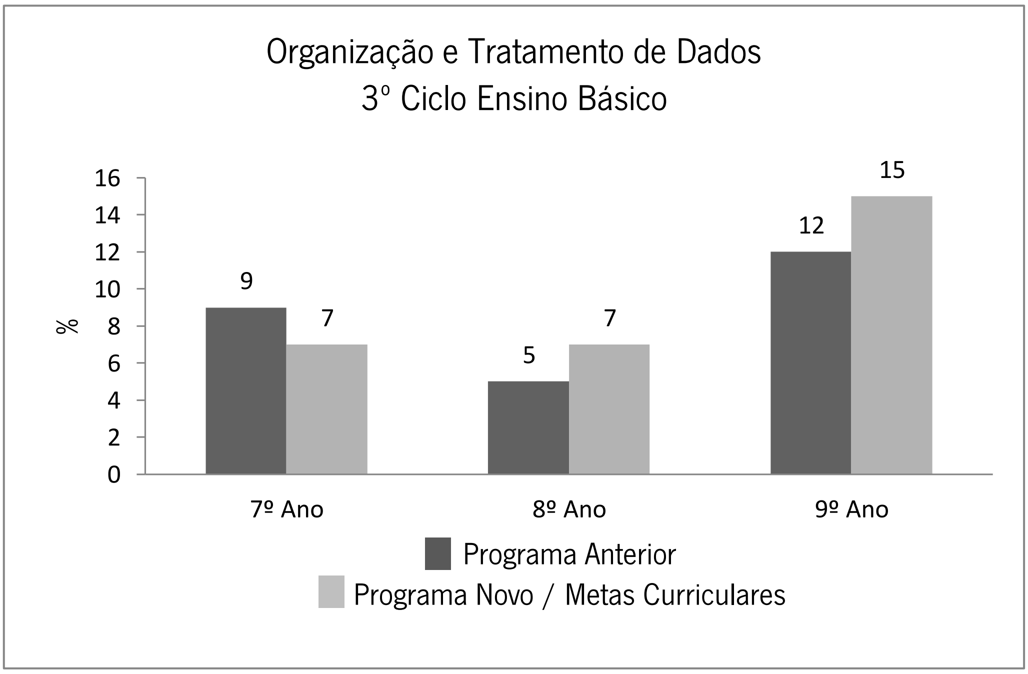


Gráfico 12. Comparação do número de aulas da Abordagem Temática relativa a cada um dos Programas no 3.º ciclo do Ensino Básico

Analisando a Tabela 11 e a Tabela 12, constata-se que os conteúdos lecionados são os mesmos nos dois Programas, com exceção do subtema do Planeamento Estatístico, que passou a ser abordado no 2.º ciclo do Ensino Básico. Em particular, no 7.º ano de escolaridade, no Programa de 2007, menciona-se a lecionação, no subtema do Tratamento de Dados, de organização, análise e interpretação de dados — histograma e as medidas de localização e dispersão, e por fim a discussão de resultados. No Programa de 2013, são introduzidas, no subtema das Medidas de Localização, a mediana de um conjunto de dados ordenados, sua definição e propriedades e por fim a resolução de problemas envolvendo tabelas, gráficos e medidas de localização. No 8.º ano de escolaridade, no Programa de 2007, indica como se desenvolve uma investigação estatística e discute os conceitos fundamentais de dados e variáveis. No Programa de 2013, no subtema dos Diagramas de extremos e quartis, é introduzida uma noção rudimentar de quartil, principalmente com recurso a exemplos, e representação de diagramas de extremos e quartis, bem com a amplitude interquartil, finalizando com a resolução de problemas envolvendo gráficos diversos e diagramas de extremos e quartis. No 9.° ano de escolaridade, no Programa de 2007, é feita uma abordagem dos conceitos fundamentais relativos à Probabilidade, iniciado pela noção de Fenómeno Aleatório e de Experiência Aleatória e a noção e cálculo da Probabilidade de um Acontecimento, essencialmente, com recurso da definição Clássica de Probabilidade com uma breve alusão à definição Frequencista de Probabilidade. No Programa de 2013, são introduzidos os Histogramas e suas propriedades e a resolução de problemas envolvendo a representação de dados em tabelas de frequência e histogramas. Na Probabilidade, os conceitos estão descriminados e pressupõe uma abordagem mais formal com a demonstração de propriedades. São introduzidas as noções básicas de Probabilidades, bem como a definição de Laplace de Probabilidade. Introduzem-se propriedades e exemplos e, por fim, resolução de problemas envolvendo a noção de Probabilidade e a comparação de probabilidades de diferentes acontecimentos compostos, utilizando tabelas de dupla entrada e diagramas em árvore. Tal como no Programa de 2007, faz-se uma breve alusão à Probabilidade Frequencista.

CAPÍTULO V – ANÁLISE COMPARATIVA DOS TEMAS DA ESTATÍSTICA E PROBABILIDADES DO ENSINO SECUNDÁRIO, REFENTES AO PROGRAMA ANTERIOR E AO NOVO PROGRAMA E METAS CURRICULARES DA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA A

5.1. Introdução

Os Temas Matemáticos contemplados a abordar são, no 10.º ano de escolaridade, Geometria, Funções e Estatística, por esta ordem, iniciando por uma breve revisão dos conteúdos abordados no Ensino Básico, com enfase nos conteúdos abordados no 9.º ano de escolaridade, o Módulo Inicial. No 11.º ano de escolaridade, e por esta ordem, são lecionados os Temas Matemáticos da Geometria, Sucessões e Cálculo Diferencial. No 12.º ano de escolaridade, são abordados os Temas Matemáticos Probabilidades e Combinatória, Cálculo Diferencial, Trigonometria e Números Complexos. Na tabela da página seguinte estão descriminados o número de aulas por ano de escolaridade, dos Temas Matemáticos no Ensino Secundário, no anterior Programa de Matemática A, de 2001a (10.º Ano), de 2002b (11.º Ano) e de 2002c (12.º Ano)

5.2. Temas Matemáticos no Ensino Secundário no anterior Programa

	Número de aulas/Ano de escolaridade		
Temas Matemáticos	10° Ano	11° Ano	12° ano
Módulo Inicial	9		
Estatística	15		
Funções	27		
Geometria	27	30	
Sucessões		24	
Cálculo Diferencial		30	30
Probabilidades e Combinatória			30
Trigonometria e Números Complexos			24
	78	84	84
	Total do número de aulas / Ano		

Tabela 10. Temas Matemáticos no anterior Programa de Matemática do Ensino Secundário

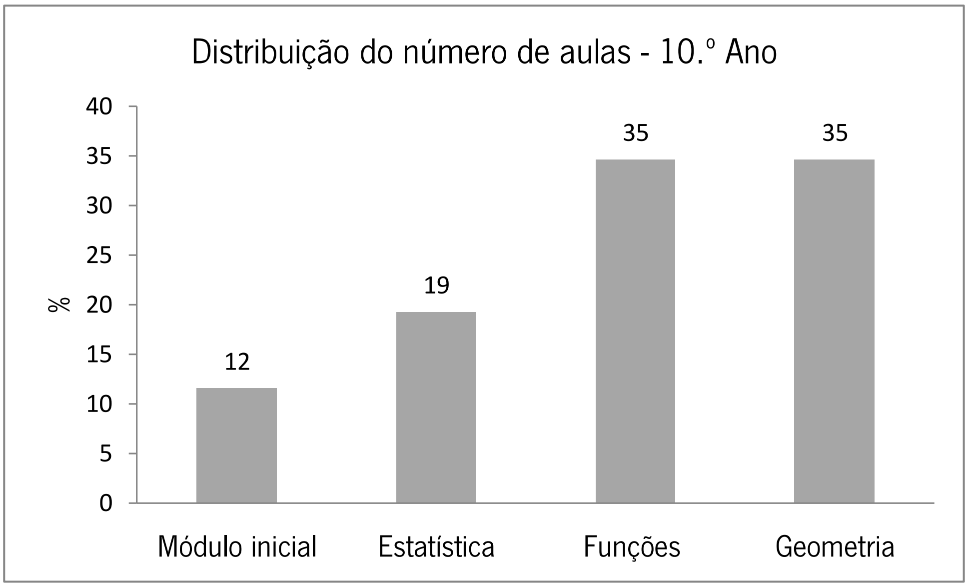


Gráfico 13. Distribuição do número de aulas no 10.º ano de escolaridade no anterior Programa

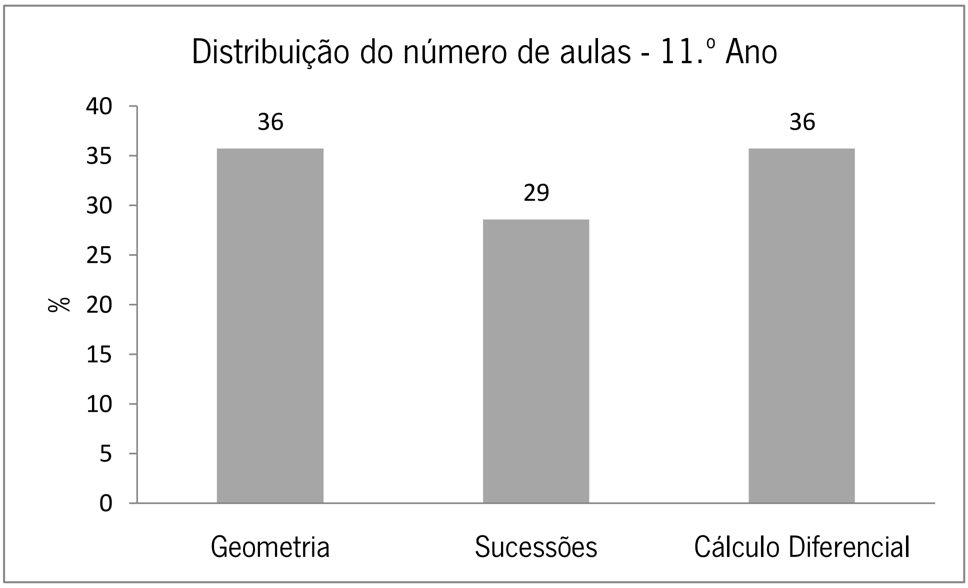


Gráfico 14. Distribuição do número de aulas no 11.º ano de escolaridade no anterior Programa

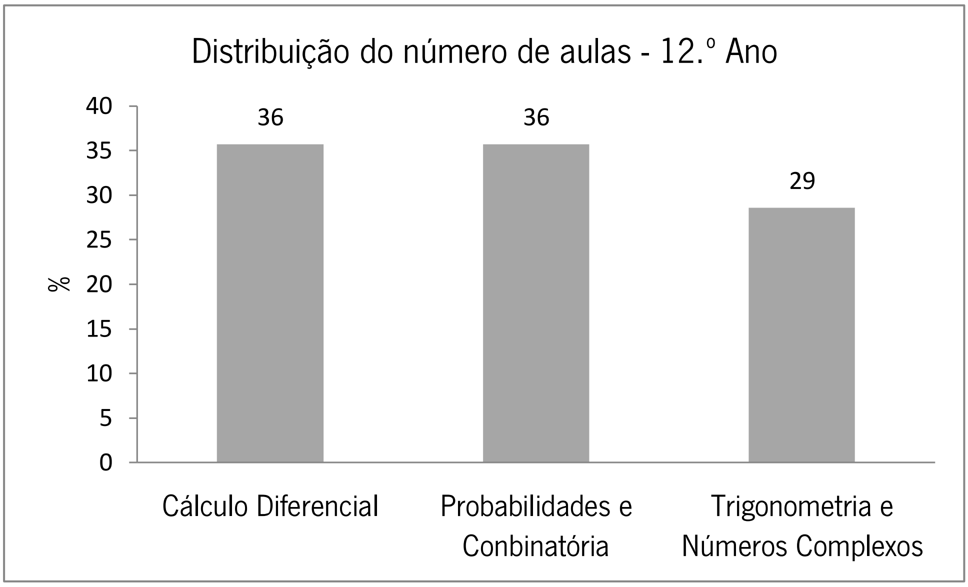


Gráfico 15. Distribuição do número de aulas no 12.º ano de escolaridade no anterior Programa

No Ensino Secundário, no anterior Programa, a componente Estatística é lecionada no 10.º ano de escolaridade e contemplada com 15 aulas, assumindo um caráter puramente descritivo, onde a ênfase está na organização e interpretação de dados qualitativos e quantitativos. Inicia-se pela lecionação de generalidades sobre o objeto da estatística, uma breve nota histórica e sua utilidade nos fenómenos em situações de vida real. São lecionados os conceitos de recenseamento e sondagem, população e amostra e a diferença entre os conceitos de estatística descritiva e estatística indutiva. É feita uma breve alusão ao conceito de amostragem.

Procede-se depois à análise, representação e redução de dados em tabelas de frequências e nos vários tipos de gráficos, atendendo à classificação das variáveis em estudo. Amplia-se o reportório das medidas estatísticas de localização e dispersão, introduzindo a variância e o desvio padrão e procede-se à discussão das limitações destas estatísticas. Finalmente é feita referência a distribuições bidimensionais, numa abordagem gráfica e intuitiva através do diagrama de dispersão e a ideia intuitiva de correlação com exemplos gráficos de correlação positiva, negativa ou nula e o coeficiente de correlação e sua variação. É ainda lecionada a ideia intuitiva de reta de regressão e sua interpretação e limitações.

As componentes Combinatória e Probabilidades são lecionadas no 12.° ano de escolaridade e contempladas com 36 aulas. O cálculo combinatório e as suas técnicas de contagem aparecem como auxiliar na aplicação do cálculo de probabilidades, sendo exemplificados e calculados arranjos completos, arranjos simples, permutações e combinações, triângulo de Pascal e o binómio de Newton. Na Probabilidade, volta-se a enfatizar os conteúdos abordados no 9.° ano de escolaridade do Ensino Básico, a noção de experiência aleatória, conjunto de resultados, acontecimentos e operações sobre acontecimentos. São dadas as aproximações concetuais para a Probabilidade, aproximação frequencista, clássica e definição axiomática de probabilidade (caso finito) e suas propriedades. É feita referência à probabilidade condicionada, definição e consequências. Faz-se o estudo da distribuição de frequências relativas e distribuição de probabilidades. Na estatística indutiva são lecionados o modelo Binomial e o modelo Normal.

5.3. Domínios de Conteúdos no Ensino Secundário no novo Programa e Metas Curriculares

	Número de aulas/Ano de escolaridade		
Domínios de Conteúdos	10° Ano	11° Ano	12° ano
Lógica e Teoria dos Conjuntos (LTC)	18		
Álgebra (ALG)	30		
Geometria Analítica (GA)	54	32	
Funções Reais de Variável Real (FRVR)	58	56	34
Estatística (EST)	18	8	
Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI)		38	26
Sucessões (SUC)		44	
Cálculo Combinatório (CC)			18
Probabilidades (PRB)			20
Funções Exponenciais e Logarítmicas (FEL)			40
Primitivas e Cálculo Integral (PCI)			20
Números Complexos (NC)			26
	178	178	174
	Total do número de aulas / Ano		

Tabela 11. Domínio de Conteúdos no novo Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Secundário

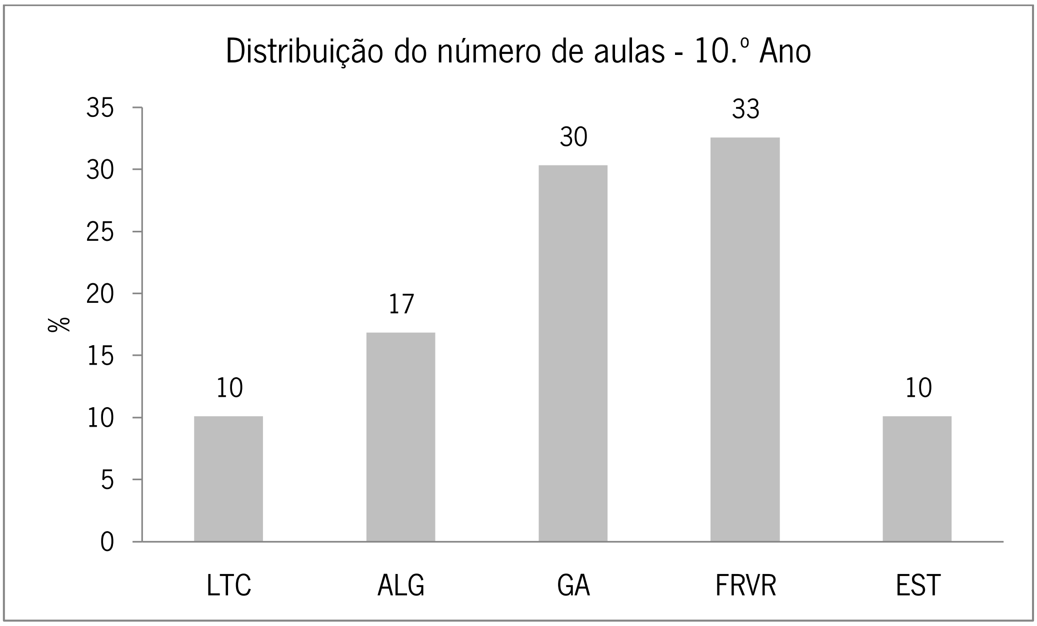


Gráfico 16. Distribuição do número de aulas no 10.º ano de escolaridade no novo Programa e Metas Curriculares

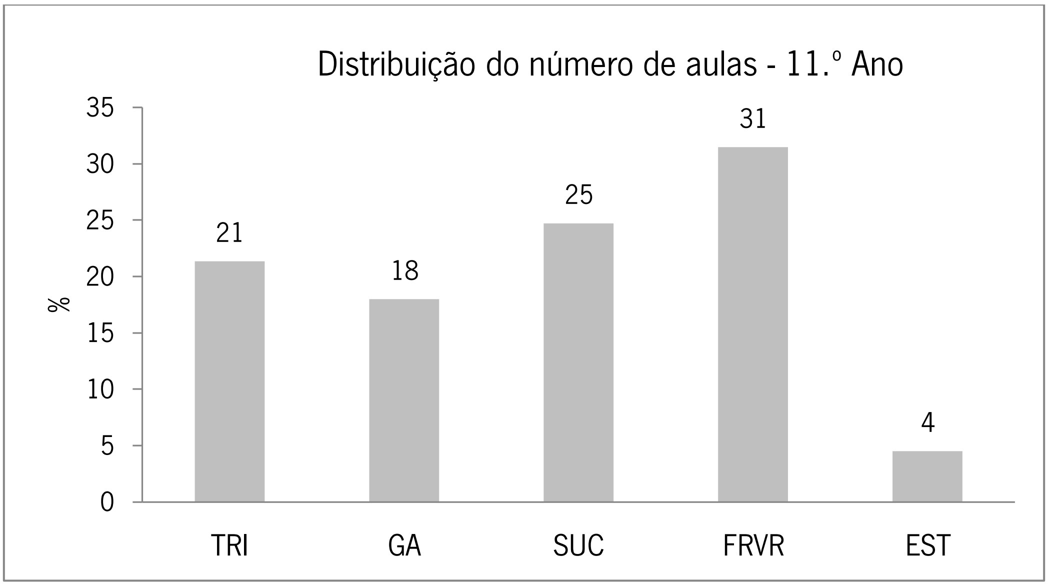


Gráfico 17. Distribuição do número de aulas no 11.º ano de escolaridade no novo Programa e Metas Curriculares

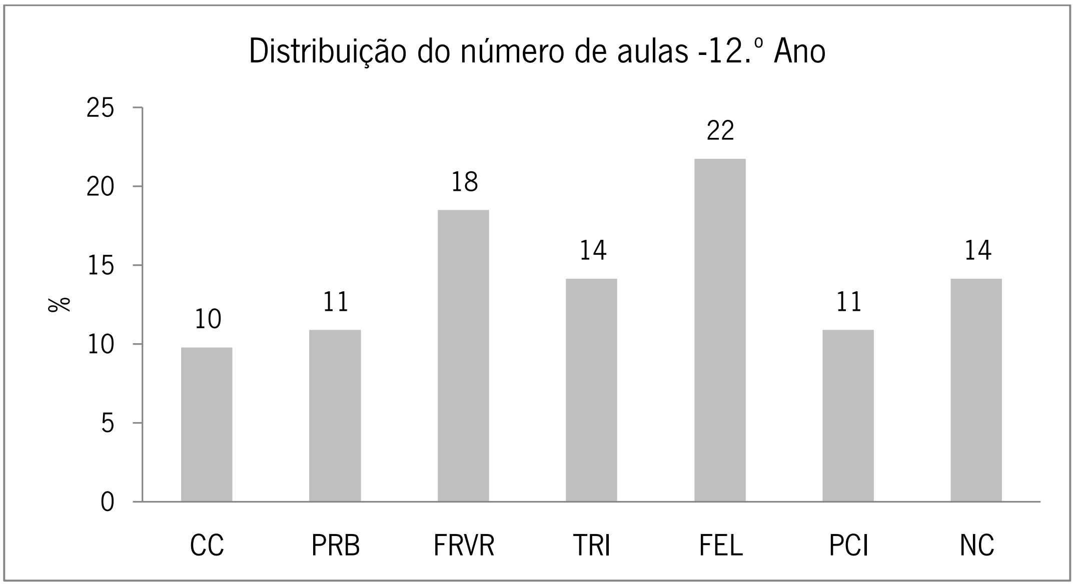


Gráfico 18. Distribuição do número de aulas no 12.º ano de escolaridade no novo Programa e Metas Curriculares

O número de aulas a lecionar no domínio de conteúdos da Estatística (EST) no 10.º ano e 11.º ano de escolaridade é menor ou igual ao número de aulas referentes aos restantes domínios de conteúdos. No 10.º ano, estão contempladas 18 aulas e no 11.º ano, 8 aulas, respetivamente. O domínio de conteúdos PRB – Probabilidades, pressupõe 20 aulas, correspondendo a 11%, sendo a sua percentagem igual ao domínio de conteúdos das Primitivas e Cálculo Integral (PCI), e superior em 1%, ao domínio de conteúdos do Cálculo Combinatório (CC).

De acordo com os princípios gerais de interpretação das Metas Curriculares, o estudo de alguns domínios de conteúdos podem ser integrados no tratamento de conteúdos pertencentes a outros domínios, assim como em revisões de conteúdos de anos anteriores. Em particular, o domínio de conteúdo do Cálculo Combinatório é fundamental como ferramenta para o estudo das probabilidades, aparecendo como um domínio de conteúdos autónomo dos demais.

5.3.1. 10.º Ano de Escolaridade

O domínio de conteúdos da Estatística – EST10 surge no 10.º ano de escolaridade contemplado com 18 aulas, começando-se por introduzir o sinal de somatório e algumas das suas regras operatórias, que serão úteis em diversas ocasiões ao longo do Ensino Secundário. Em particular poderão ser utilizadas neste mesmo domínio, nomeadamente aquando da manipulação de médias e desvio-padrão de amostras, ou de percentis. Para além das definições de variável estatística, amostra, média, variância, desvio-padrão e percentil, analisam-se as propriedades básicas destes conceitos e as respetivas interpretações em exemplos concretos. Em concreto os conteúdos específicos são: somatórios; tradução no formalismo dos somatórios das propriedades associativa e comutativa generalizada da adição e distributiva generalizada da multiplicação em relação à adição; variável estatística quantitativa como função numérica definida numa população e amostra de uma variável estatística; média de uma amostra e suas propriedades; variância e desvio-padrão de uma amostra e suas propriedades e percentil de ordem k e suas propriedades.

5.3.2. 11.° Ano de Escolaridade

No 11.° ano de escolaridade, o domínio de conteúdos da Estatística – EST11 aparece contemplado com 8 aulas. Estudam-se as retas de mínimos quadrados associadas a uma sequência de pontos do plano. As coordenadas destes pontos podem em particular representar os valores de uma amostra bivariada, o que permite a aplicação deste conceito ao estudo da correlação de duas variáveis estatísticas definidas numa mesma população. Em concreto, os conteúdos específicos são: reta de mínimos quadrados de uma sequência de pontos do plano; amostras bivariadas; variável resposta e variável explicativa; nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos; reta dos mínimos quadrados de uma amostra de dados bivariados quantitativos e o coeficiente de correlação.

5.3.3. 12.° Ano de Escolaridade

No início do 12° ano de escolaridade, é introduzido o domínio de conteúdos do Cálculo Combinatório – CC12 com 18 aulas, como pré-requisito da Probabilidade, uma vez que é a área da Matemática dedicada à realização eficiente de contagens essenciais para o cálculo de probabilidades. Começa-se por estabelecer algumas propriedades das operações sobre conjuntos e, em seguida, estudam-se progressivamente arranjos, com ou sem repetição, permutações e combinações, o que permite, em situações muito distintas, efetuar contagens de forma expedita. É igualmente introduzido o binómio de Newton e o triângulo de Pascal, deduzindo-se algumas propriedades dos coeficientes binomiais. Concretamente: propriedades comutativa, associativa, de existência de elemento neutro e elemento absorvente e da idempotência da união e da interseção e propriedades distributivas da união em relação à interseção e da interseção em relação à união;

distributividade do produto cartesiano relativamente à união. Introdução ao cálculo combinatório; conjuntos equipotentes e cardinais; cardinal da união de conjuntos disjuntos; cardinal do produto cartesiano de conjuntos finitos; arranjos com repetição; número de subconjuntos de um conjunto de cardinal finito; permutações; fatorial de um número inteiro não negativo; arranjos sem repetição; número de subconjuntos de elementos de um conjunto de cardinal; combinações; fórmula do binómio de Newton e triângulo de Pascal: definição e construção.

Ainda, no 12.º ano de escolaridade é introduzido o domínio de conteúdos das Probabilidades – PRB12, com 20 aulas letivas. Após uma primeira abordagem mais restritiva elaborada no 9.º ano de escolaridade, pretende-se agora, no domínio das Probabilidades, estudar de um modo mais geral a noção de probabilidade, começando por se introduzir a noção de função de probabilidade definida no conjunto das partes de um conjunto finito, da qual a lei de Laplace – estudada no Ensino Básico – é um caso particular, relacionado com situações de equiprobabilidade. É igualmente abordada a noção de probabilidade condicionada e de independência de acontecimentos, apresentando-se em particular o teorema da probabilidade total. Em concreto, os conteúdos específicos são: probabilidade no conjunto das partes de um espaço amostral finito; espaço de probabilidades; acontecimento impossível, certo, elementar e composto; acontecimentos incompatíveis, acontecimentos contrários, acontecimentos equiprováveis e regra de Laplace; propriedades das probabilidades: probabilidade do acontecimento contrário, probabilidade da diferença e da união de acontecimentos; monotonia da probabilidade; probabilidade condicionada; acontecimentos independentes e o teorema da probabilidade total.

5.4. Reflexão da Abordagem Temática relativa a cada um dos Programas, no Ensino Secundário

	Ensino Secundário	
	Programa 2001	**Programa 2014**
10° Ano	**Estatística – Generalidades** - Objeto da Estatística e breve nota histórica sobre a evolução desta Ciência; utilidade na vida moderna. - Clarificação de quais os fenómenos que podem ser objeto de estudo estatístico; - Exemplificação de tais fenómenos com situações da vida real, salientando o papel relevante da Estatística na sua descrição.	**Estatística (EST)** (a lecionar no 10° ano) - Não descriminado; - Não descriminado; - Não descriminado.
	Recenseamento e sondagem - As noções de população e amostra. - Compreensão do conceito de amostragem e reconhecimento do seu papel nas conclusões estatísticas; - Distinção entre os estudos e conclusões sobre a amostra e a correspondente análise sobre a população. Noções intuitivas sobre as escolhas de amostras, sobre a necessidade de serem aleatórias, representativas e livres de vícios de conceção.	- Variável estatística quantitativa como função numérica definida numa população e amostra de uma variável estatística; -Idem.
	Estatística Descritiva e Estatística Indutiva **Organização e interpretação de carateres estatísticos (qualitativos e quantitativos)** - Análise gráfica de atributos qualitativos (gráficos circulares, diagramas de barras, pictogramas); - Determinação da moda; - Análise de atributos quantitativos: variável discreta e variável contínua. Dados agrupados em classes. - Variável discreta; função cumulativa. - Variável contínua: tabelas de frequências (absolutas, relativas e relativas acumuladas); - Gráficos (histograma, polígono de frequências); função cumulativa.	- A lecionar no 2° ciclo. - A lecionar no 2° ciclo. - A lecionar no 9° ano, em variáveis estatísticas discretas e contínuas; classes determinadas por intervalos numéricos; agrupamento de dados em classes da mesma amplitude; - Problemas envolvendo a representação de dados em tabelas de frequência e histogramas. - Histogramas; propriedades;

	Ensino Secundário (continuação)	
	Programa 2001	Programa 2014
10° Ano	- Medidas de localização de uma amostra: moda ou classe modal; média; mediana; quartis. - Medidas de dispersão de uma amostra: amplitude; variância; desvio padrão; amplitude interquartis. - Discussão das limitações destas estatísticas. - Diagramas de "extremos e quartis". **Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva)** - Diagrama de dispersão; dependência estatística; ideia intuitiva de correlação; exemplos gráficos de correlação, positiva, negativa ou nula. - Coeficiente de correlação e sua variação em $[-1, 1]$. - Definição de centro de gravidade de um conjunto finito de pontos; sua interpretação física. - Ideia intuitiva de reta de regressão; sua interpretação e limitações.	- Lecionado no 7° ano em mediana de um conjunto de dados; definição e propriedades; - Amplitude interquartil (a lecionar no 8° ano); variância e desvio-padrão de uma amostra (a lecionar no 10° ano); - Não descriminado; - A lecionar no 8° ano em diagramas de extremos e quartis. (A lecionar no 11° ano) - Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos; - Coeficiente de correlação; - Não descriminado; - Reta dos mínimos quadrados de uma amostra de dados bivariados quantitativos.
12° Ano	**Análise Combinatória** (As técnicas de contagem que aqui aparecem como auxiliar do cálculo de probabilidades constituem uma aprendizagem significativa por si só, especialmente se desenvolverem mais as capacidades do raciocínio combinatório e as conexões matemáticas e menos a aplicação das fórmulas.) - Arranjos completos, arranjos simples, permutações e combinações. - Triângulo de Pascal. - Binómio de Newton. - Aplicação ao cálculo de probabilidades.	**Cálculo Combinatório (CC) (**a lecionar no 12° ano) - Arranjos com repetição; Permutações; fatorial de um número inteiro não negativo; Arranjos sem repetição; - Triângulo de Pascal: definição e construção; - Fórmula do binómio de Newton; - Resolução de problemas envolvendo o triângulo de Pascal e o binómio de Newton.

<table>
<tr><td rowspan="3">12° Ano</td><td colspan="2">Ensino Secundário (conclusão)</td></tr>
<tr><td>Programa 2001</td><td>Programa 2014</td></tr>
<tr><td>Introdução ao cálculo de Probabilidades:
- Experiência aleatória; conjunto de resultados; acontecimentos.
- Operações sobre acontecimentos.
- Aproximações conceptuais para Probabilidade:
● aproximação frequencista de probabilidade;
● definição clássica de probabilidade ou de Laplace.
● definição axiomática de probabilidade (caso finito); propriedades da probabilidade.

- Probabilidade condicionada e independência; probabilidade da intersecção de acontecimentos. Acontecimentos independentes.

Distribuição de frequências relativas e distribuição de probabilidades.
- Variável aleatória; função massa de probabilidade:
● distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta; distribuição de frequências versus distribuição de probabilidades;
● média versus valor médio;
● desvio padrão amostral versus desvio padrão populacional.
- Modelo Binomial.
- Modelo Normal; histograma versus função densidade.</td><td>Espaços de Probabilidade (PRB)
- Acontecimento impossível, certo, elementar e composto; acontecimentos incompatíveis, acontecimentos contrários, acontecimentos equiprováveis;

- Não descriminado, mas a lecionar;
- Regra de Laplace;

- Propriedades das probabilidades: probabilidade do acontecimento contrário, probabilidade da diferença e da união de acontecimentos; monotonia da probabilidade;

- Probabilidade condicionada;
- Acontecimentos independentes;
- Teorema da probabilidade total;

Tema não contemplado nos novos programas.

- A não lecionar;

- A não lecionar;
- A não lecionar.</td></tr>
</table>

Tabela 12. Comparação da Abordagem Temática em estudo do anterior Programa relativamente ao novo Programa e Metas Curriculares no Ensino Secundário

<table>
<tr><td rowspan="3">10° Ano</td><td colspan="2">Ensino Secundário (continuação)</td></tr>
<tr><td>Programa 2014</td><td>Programa 2001</td></tr>
<tr><td>Estatística (EST)
Caraterísticas amostrais

- Sinal de somatório; tradução no formalismo dos somatórios das propriedades associativa e comutativa generalizadas da adição e distributiva generalizada da multiplicação em relação à adição;
- Variável estatística quantitativa como função numérica definida numa população e amostra de uma variável estatística;
- Média de uma amostra; propriedades da média de uma amostra;
- Variância e desvio-padrão de uma amostra; propriedades da variância e do desvio-padrão de uma amostra;
- Percentil de ordem; propriedades do percentil de ordem;
- Resolução de problemas envolvendo a média e o desvio-padrão de uma amostra;
- Resolução de problemas envolvendo os percentis de uma amostra.</td><td>Lecionado no 10°Ano
Estatística – Generalidades – Lecionado no 10°Ano
- Sinal de somatório, tendo como objetivo apenas a compreensão do formulário estatístico;
- As noções de população e amostra;
- Distinção entre os estudos e conclusões sobre a amostra e a correspondente análise sobre a população;

- Inserido nas Medidas de localização de uma amostra: moda; média; mediana; quartis;
- Inserido nas Medidas de dispersão de uma amostra: amplitude; variância; desvio padrão; amplitude interquartis;
- Lecionados apenas os percentis, 25%, 50% e 75% (quartis);
- Discussão das limitações destas estatísticas;

- Idem.</td></tr>
</table>

	Ensino Secundário (continuação)	
	Programa 2014	Programa 2001
11° Ano	**Estatística (EST)** Reta de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficiente de correlação - Reta de mínimos quadrados de uma sequência de pontos do plano; - Amostras bivariadas; variável resposta e variável explicativa; - Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos; - Reta dos mínimos quadrados de uma amostra de dados bivariados quantitativos; - Coeficiente de correlação; - Resolução de problemas envolvendo a determinação de retas de mínimos quadrados; - Resolução de problemas envolvendo amostras de dados bivariados quantitativos e o cálculo e interpretação dos coeficientes da reta de mínimos quadrados e do coeficiente de correlação.	**Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva)** - Dada apenas a ideia intuitiva de reta de regressão; sua interpretação e limitações; - Não descriminado, mas subentendido; - Diagrama de dispersão; dependência estatística; ideia intuitiva de correlação; - Dada apenas a ideia intuitiva de reta de regressão; sua interpretação e limitações; - Coeficiente de correlação e sua variação em $[-1, 1]$; - Não descriminado, mas subentendido; - Exemplo de gráficos de correlação positiva, negativa ou nula.

	Ensino Secundário (continuação)	
	Programa 2014	Programa 2001
12º Ano	**Cálculo Combinatório (CC)**	**Análise Combinatória – Lecionado no 12ºAno** (As técnicas de contagem aparecem como auxiliar do cálculo de probabilidades e constituem uma aprendizagem significativa por si só, pretendendo-se que desenvolvam mais as capacidades do raciocínio combinatório e as conexões matemáticas e menos a aplicação das fórmulas.)
	Propriedades das operações sobre conjuntos	
	- Propriedades comutativa, associativa, de existência de elemento neutro e elemento absorvente e da idempotência da união e da interseção e propriedades distributivas da união em relação à interseção e da interseção em relação à união;	
	- Distributividade do produto cartesiano relativamente à união.	- Não lecionado;
	Introdução ao cálculo combinatório	
	- Conjuntos equipotentes e cardinais; cardinal da união de conjuntos disjuntos;	- Não lecionado;
	- Cardinal do produto cartesiano de conjuntos finitos;	- Não lecionado;
	- Arranjos com repetição;	- Arranjos completos, arranjos simples, permutações e combinações;
	- Número de subconjuntos de um conjunto de cardinal finito;	
	- Permutações; fatorial de um número inteiro não negativo;	- Idem;
	- Arranjos sem repetição;	- Idem;
	- Número de subconjuntos de elementos de um conjunto de cardinal ; combinações;	- Idem;
	- Resolução de problemas envolvendo cardinais de conjuntos, contagens, arranjos e combinações.	- Não descriminado, mas subentendido.
	Triângulo de Pascal e Binómio de Newton	
	- Fórmula do binómio de Newton;	- Binómio de Newton;
	- Triângulo de Pascal: definição e construção;	- Triângulo de Pascal;
	- Resolução de problemas envolvendo o triângulo de Pascal e o binómio de Newton.	- Não descriminado, mas subentendido.

	Ensino Secundário (conclusão)	
	Programa 2014	Programa 2001
12º Ano	**Espaços de Probabilidade (PRB)**	**Introdução ao cálculo de Probabilidades, axiomática das probabilidades – Lecionado no 12ºAno**
	- Probabilidade no conjunto das partes de um espaço amostral finito; espaço de probabilidades;	- Experiência aleatória; conjunto de resultados; acontecimentos;
	- Acontecimento impossível, certo, elementar e composto; acontecimentos incompatíveis, acontecimentos contrários, acontecimentos equiprováveis e regra de Laplace;	- Operações sobre acontecimentos. - Aproximações conceptuais para Probabilidade: • definição clássica de probabilidade ou de Laplace;
	- Propriedades das probabilidades: probabilidade do acontecimento contrário, probabilidade da diferença e da união de acontecimentos; monotonia da probabilidade;	• definição axiomática de probabilidade (caso finito); propriedades da probabilidade.
	- Resolução de problemas envolvendo a determinação de probabilidades em situações de equiprobabilidade de acontecimentos elementares;	- Não descriminado, mas subentendido;
	- Resolução de problemas envolvendo espaços de probabilidade e o estudo de propriedades da função de probabilidade.	- Não descriminado, mas subentendido.
	Probabilidade condicionada - Probabilidade condicionada; - Acontecimentos independentes;	- Probabilidade condicionada e independência; probabilidade da intersecção de acontecimentos. Acontecimentos independentes;
	- Teorema da probabilidade total;	- Não descriminado, mas lecionado;
	- Resolução de problemas envolvendo probabilidade condicionada, acontecimentos independentes e o Teorema da probabilidade total.	- Não descriminado, mas subentendido.

Tabela 13. Comparação da Abordagem Temática em estudo do novo Programa e Metas Curriculares com o anterior Programa no Ensino Secundário

A percentagem de aulas a lecionar em cada um dos três anos de escolaridade que compõe o Ensino Secundário, em ambos os programas é apresentada na seguinte tabela:

Estatística, Combinatória e Probabilidade - % do Número de Aulas		
Ano de Escolaridade	Programa 2001	Programa 2014
10.º Ano	19%	10%
11.º Ano	0%	4%
12.º Ano	36%	21%

Tabela 14. Comparação da percentagem do número de aulas dos Temas/Domínios de Conteúdos da Estatística, Combinatória e Probabilidade em ambos os Programas do Ensino Secundário

O gráfico seguinte traduz essa mesma informação:

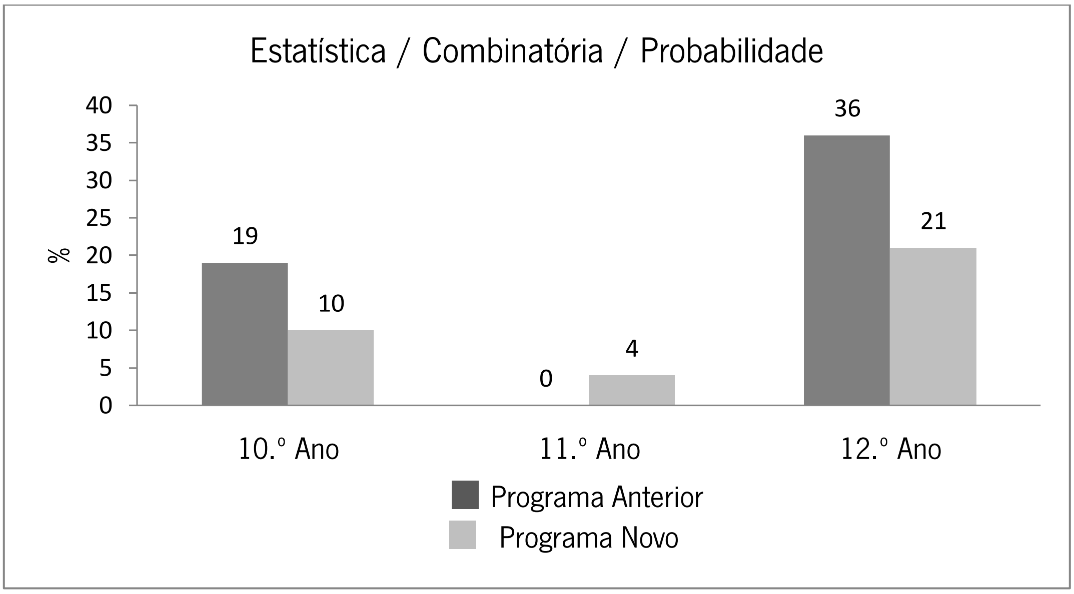


Gráfico 19. Comparação do número de aulas da Abordagem Temática em estudo relativa a cada um dos Programas no Ensino Secundário

Salienta-se a diferença nos totais do número de aulas atribuídos aos Temas/Domínios de Conteúdos da Estatística, Combinatória e Probabilidade, no anterior Programa (55%) e no novo Programa e Metas Curriculares (35%), explicável fundamentalmente por duas razões:

— a introdução de novos domínios de conteúdos não contemplados no Programa anterior,

— a exclusão de alguns conteúdos relativos à Estatística no novo Programa.

Em particular, o Programa de 2001, ao contrário do Programa de 2014, não contempla, como domínios de conteúdos independente, os temas da Lógica e Teoria de Conjuntos e do Cálculo Combinatório. Assim as questões de lógica e de teoria de conjuntos são referidas entre os temas transversais, com um determinado desenvolvimento, não abordando estas questões como conteúdo em si, mas com o intuito de as utilizar quotidianamente em apoio do trabalho de reflexão científica, e só na medida em que elas possam esclarecer verdadeiramente os conceitos. Não são localizadas temporalmente na lecionação em nenhum determinado ano de escolaridade, sendo abordadas à medida que são necessárias e à medida que aumenta a compreensão sobre os assuntos em si, considerando sempre o sentido de oportunidade, as vantagens e as limitações. O cálculo combinatório surge como uma ferramenta no cálculo de probabilidades, tal como no Programa de 2014.

No Tema Matemático da Estatística, no Programa de 2001 e ainda em vigor, é introduzida uma breve nota histórica sobre a evolução da Estatística, o que estuda e a sua utilidade na vida moderna. Os somatórios não são referidos como tema a lecionar, embora se faça recurso do seu uso na escrita de algumas medidas de localização e dispersão. Contrariamente, no Programa de 2014, não se aborda a temática teórica sobre a evolução da Estatística e estudam-se os somatórios e suas propriedades e posterior aplicação na escrita e demonstração de propriedades das medidas de localização e dispersão.

É introduzido o conceito de variável estatística quantitativa como função numérica definida numa população e amostra de uma variável estatística, enquanto no programa de 2001, se fala nas noções de população e amostra e a compreensão do conceito de amostragem.

Os conteúdos relativos à análise gráfica de atributos qualitativos (gráficos circulares, diagramas de barras, pictogramas), bem como a determinação da moda, lecionados no 10° ano, no Programa anterior, passam no novo Programa e Metas Curriculares para o 2.º ciclo do Ensino Básico, tal como a análise de atributos quantitativos, variável contínua e os dados agrupados em classes, que passam para o 9.º ano de escolaridade. Também a definição e propriedades da mediana de um conjunto de dados passam a ser lecionados no 7º ano e os quartis, amplitude interquartil e diagrama de extremos e quartis, são agora lecionados no 8º ano de escolaridade.

No Programa de 2014, é dado o conceito de percentil de ordem e suas propriedades, com visualização gráfica e recurso do histograma, para o seu cálculo, no Programa anterior apenas são lecionados os percentis, 25%, 50% e 75% (quartis).

No Programa de 2014, em EST11, é introduzido pela primeira vez, o conceito de reta de mínimos quadrados, numa sequência de pontos do plano (nuvem de pontos) e em amostras bivariadas e os conceitos de variável resposta e variável explicativa. No Programa de 2001, e ainda no 10.º ano de escolaridade, apenas se falava na ideia intuitiva de reta de regressão, (a partir do diagrama de dispersão), sua interpretação e limitações e variável dependente e variável independente.

No domínio de conteúdos do Cálculo Combinatório, agora independente dos demais, mas sempre em articulação com o domínio de conteúdos das Probabilidades, são introduzidas as propriedades das operações sobre conjuntos, a noção de produto cartesiano e a distributividade do produto cartesiano relativamente à união, bem como a noção de conjuntos equipotentes, o cardinal de um conjunto e o cardinal da união de conjuntos disjuntos. Todos estes conceitos não fazem parte formalmente do anterior Programa, sendo que, neste as técnicas de contagem aparecem apenas como auxiliar do cálculo de probabilidades, pretendendo-se que desenvolvam mais as capacidades do raciocínio combinatório e as conexões matemáticas e menos a aplicação das fórmulas.

No Programa de 2014, o domínio de conteúdos da Probabilidade (PRB12) é iniciado com a definição de probabilidade no conjunto das partes de um espaço amostral finito e espaço de probabilidades. As propriedades das probabilidades estão descriminadas e devem ser formalmente introduzidas e demonstradas, esta formalização não é bem patente no Programa de 2001, em vigor, embora se faça menção das propriedades inerentes à definição axiomática de probabilidade.

No anterior Programa o Tema Matemático Probabilidades e Combinatória (Estatística Indutiva), faz ainda parte a distribuição de frequências relativas e distribuição de probabilidades, a média versus o valor médio, desvio padrão amostral versus desvio padrão populacional e histograma versus função densidade. São ainda lecionados os Modelos Binomial e Modelo Normal. Todos estes conceitos integrantes da Estatística Inferencial foram excluídos do novo Programa e Metas Curriculares do Ensino Secundário, pelo que serão apenas abordados no Ensino Universitário.

CAPÍTULO VI – CONCLUSÕES

6.1. Conclusões

Com a introdução do ensino obrigatório de doze anos no ano letivo de 2011/2012, é essencial repensar o papel da Estatística e Probabilidade na formação do jovem, seja qual for o seu percurso escolar, dando-lhe a importância devida e conferindo-lhe o lugar de destaque merecido, como seria de esperar na sociedade de informação atual, por ser um tema útil para a vida quotidiana de qualquer cidadão, na sua participação social esclarecida e crítica.

Na minha opnião, podem surgir problemas devido à calendarização do novo Programa de Matemática e Metas Curriculares do Ensino Secundário, uma vez que este será aplicado a alunos que estão a aprender através do Programa anterior, já que, no ano letivo 2015/2016, entram em vigor e em simultâneo para o 9.º ano e 10.º ano de escolaridade os novos Programas, pese-embora os alunos do 10.º ano terem tido sempre um percurso escolar de nove anos acompanhados pelo Programa anterior, uma vez que o novo Programa só no ano letivo de 2013/2014 foi introduzido no 7.º ano de escolaridade.

Dada a extensão do novo Programa e Metas Curriculares, sobretudo no Ensino Secundário, o professor terá de ter “sensibilidade” suficiente para, de acordo com os alunos e a turma, adequar as estratégias necessárias para o melhor entendimento possível do mesmo, nunca descurando o cumprimento integral do Programa, mas também a preocupação que todos os alunos façam esse acompanhamento com a menor dificuldade possível. Essa “sensibilidade” exige uma certa formação e acompanhamento por parte dos professores e a qual é crucial para o sucesso da implementação do novo Pograma e Metas Curriculares, visando o sucesso educativo dos alunos.

Se o professor já tem um papel importante na captação do interesse e motivação dos alunos para a aprendizagem da Matemática, terá agora um papel primordial para o sucesso de todos os alunos, em particular aqueles que se distanciam da disciplina, podendo a Estatística e a Probabilidade, pelo seu carater mais prático, serem um estimulo particular para a aprendizagem global da disciplina de Matemática.

A grande diferença entre o Programa de 2007 e o Programa e Metas Curriculares de 2013 de Matemática no Ensino Básico e o Programa de 2001 e o Programa e Metas Curriculares de 2014 de Matemática A, no Ensino Secundário, no que diz respeito à Estatística e Probabilidade, não é tanto nos conteúdos a leccionar, mas sim na sua abordagem, uma vez que os novos Programas apelam muitas vezes a um maior formalismo e abstração, podendo levar a um maior rigor e qualidade e motivar os alunos para a disciplina de Matemática. No entanto deve–se dar a atenção que a prática e a intuição matemática merecem. Sebastião e Silva, o grande matemático português, cujo centenário do seu nascimento, se comemora este ano, afirmou que "o extremo rigor lógico, em vez de formativo pode tornar-se perigosamente deformador". Já Poincaré, num texto de 1905, afirmava que "sem [a intuição] os espíritos ainda jovens não teriam meios de ceder ao entendimento da Matemática, não aprenderiam a gostar dela e, sobretudo, nunca viriam a ser capazes de aplicar a Matemática".

Os novos Programas e Metas Curriculares de Matemática salientam que os alunos devem saber definir adequadamente os conceitos, construir argumentações coerentes, saber justificar passos e elaborar demonstrações matemáticas o mais rigorosamente possível. É dada especial atenção aos conteúdos introduzidos pela primeira vez assim como os que se abordam de forma diferente (quando comparados com o programa anterior). É feito um esforço de encadeamento de conteúdos a abordar assim como de contextualização.
Muitas das atividades propostas nos cadernos de apoio são incluídas com o objetivo de proporcionar não só uma clarificação dos conteúdos, como também, uma reflexão sobre os mesmos.

Relativamente à linguagem utilizada no Programa e Metas Curriculares, assim como nos cadernos de apoio, esta é adequada a professores podendo não ser adequada aos alunos. O rigor matemático que se pretende não impede uma linguagem menos formal entre professores e alunos. A linguagem é mais exigente. A técnica é mais valorizada. Podemos ler a este respeito nos novos Programas «O domínio de procedimentos padronizados deverá ser objeto de particular atenção no ensino desta disciplina. As rotinas e automatismos são essenciais à atividade matemática, uma vez que permitem libertar a memória de trabalho, de modo que esta se possa dedicar, com maior exclusividade, a tarefas que exigem funções cognitivas superiores.»

O uso da tecnologia deve ser muito cauteloso, em particular das máquinas de calcular, considerando-se que apenas deverão ser utilizadas em determinadas tarefas da aula e apenas em provas de avaliação onde sejam estritamente necessárias, devendo o aluno questionar sempre os resultados obtidos e relacionar os valores encontrados, com o conhecimento teórico adquirido, de modo a chegar a soluções fidedignas.

6.2. Trabalho Futuro

Para terminar e já em vista a continuação do trabalho desenvolvido, um futuro projeto, será o estudo do impacto da aplicação dos novos Programas na aprendizagem da Estatística e da Probabilidade, nos alunos do Ensino Básico e Ensino Secundário.

BIBLIOGRAFIA

[1] Alpuim, T., Estatística, Apontamentos de Apoio à disciplina de Estatística da Licenciatura em Matemática e Matemática Aplicada, FCUL, 2012.

[2] Alpuim, T., Probabilidade, Apontamentos de Apoio à disciplina de Probabilidade da Licenciatura em Matemática e Matemática Aplicada, FCUL, 2008.

[3] Athayde, M. E., Estatística. R, Escola de Ciências, Universidade do Minho, Braga, Portugal, 2013.

[4] Azevedo, Cecília, O que é a probabilidade? Interpretações da probabilidade, Departamento de Matemática, Universidade do Minho, Braga, Portugal, 2004.

[5] Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M.C., Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática, Caderno de Apoio - 1.º Ciclo, Ministério da Educação e Ciência: Direção Geral da Educação, 2012.

[6] Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M.C., Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática, Caderno de Apoio - 2.º Ciclo, Ministério da Educação e Ciência: Direção Geral da Educação, 2012.

[7] Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M.C., Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática, Caderno de Apoio - 3.º Ciclo, Ministério da Educação e Ciência: Direção Geral da Educação, 2013.

[8] Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M.C., Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática, Caderno de Apoio – 10.º ano, Ministério da Educação e Ciência: Direção Geral da Educação, 2013.

[9] Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M.C., Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática, Caderno de Apoio – 11.º ano, Ministério da Educação e Ciência: Direção Geral da Educação, 2013.

[10] Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M.C., Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática, Caderno de Apoio – 12.º ano, Ministério da Educação e Ciência: Direção Geral da Educação, 2014.

[11] Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M.C., Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática, Programa e Metas Curriculares – Ensino Básico, Ministério da Educação e Ciência: Direção Geral da Educação, 2013.

[12] Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M.C., Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática, Programa e Metas Curriculares – Ensino Secundário, Ministério da Educação e Ciência: Direção Geral da Educação, 2013.

[13] Bloch, Ethan D., Proofs and Fundamentals, A First Course in Abstract Mathematics, Birkhauser.

[14] Carvalho, C. e César, M. As aparências iludem: reflexões em torno do ensino da estatística no Ensino Básico. In C. Loureiro, F. Oliveira e L. Brunheira (orgs.). *Ensino e Aprendizagem da Estatística*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática, Departamentos de Educação e de Estatística e Investigação operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2000.

[15] Fernandes, J. P., Intuições e Aprendizagem de Probabilidades, Uma Proposta de ensino de Probabilidade no 9.º Ano de Escolaridade, Tese de Doutoramento em Educação, Universidade do Minho, Braga, Portugal, 1999.

[16] Fernandes, J.P. & Barros, P.M., Revista Portuguesa da Educação, Vol. 18 número 1, Instituto de Educação e Psicologia, Universidade do Minho, Braga, Portugal, 2005.

[17] Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 1, 3rd Edition, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, 1970.

[18] Garfield, J. & Chance, B., Assesment in Statistics Education: Issues and Challanges, 2000.

[19] Garfield, J. & Ahlgren, A.. Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implication for Research, Journal for Research in Mathematics Education, Vol.,1988.

[20] Gonçalves, E., Mendes-Lopes, N., Probabilidades-Princípios Teóricos, 2ª edição, Escolar Editora, 2003.

[21] Graça Martins, M. E., Branco, J., Literacia Estatística. Revista da APM, 2000.

[22] Grimaldi P. Ralph – Discrete and Combinatorial Mathematics (3Rd Edition).

[23] Katz, V.J., História da Matemática, Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

[24] Loura, L.C.C. & Martins, M.E.G., Introdução à Probabilidade, Projecto REANIMAT, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e Fundação Calouste Gulbenkian, 2003.

[25] Machado, A., Abrantes, P., & Carvalho, R.F., Matemática: 12.º ano: M12, Lisboa, Texto Editora, 1986.

[26] Martins Maria Eugénia Graça, Estatística: Matemática 10.º Ano de Escolaridade 1ª ed. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, 1997.

[27] Martins Maria Eugénia Graça, Probabilidades e Combinatória: Matemática 12.º Ano de Escolaridade 1ª ed. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, 1999.

[28] Martins Maria Eugénia Graça, João Pedro Ponte: Organização e Tratamento de Dados Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular, 2010.

[29] Ministério da Educação, Artigo 14o Lei Bases da Educação, http://www.me.gov.tl/leide-base-da-educação, 2008.

[30] Ministério da Educação e Ciência. Matemática A, Questões de Exames Nacional e de Teste Intermédios do 12.° Ano 1997-2013, Volume I, Probabilidade e Combinatória, Editorial Lisboa, Portugal, 2013.

[31] Murteira, B., Ribeiro, C. S., Silva, J. A. & Pimenta, C., Introdução à Estatística, Escolar Editora, Lisboa, Portugal, 2010.

[32] N. Crato (Org.), Ensino da matemática: Questões e soluções, Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2008.

[33] Pestana, D. D. & Velosa, S. F., Introdução à Probabilidade e à Estatística, Volume 1, 4a Edição, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, Portugal, 2010.

[34] Ponte, J. P.,O Computador no Ensino de Matemática, Um Processo de Investigação e Formação de Professores, Faculdade da Ciência de Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal, 1991.

[35] Ponte, J. P. & Fonseca, H., Orientações Curriculares para o Ensino da Estatística análise comparativo de três países, Faculdade da Ciência de Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2001.

[36] Ponte, J. P., Serrazina L., Guimarães H.,...,Programa de Matemática do Ensino Básico, Ministério da Educação, Departamento do Ensino Básico, Lisboa, Portugal, 2007.

[37] Ponte, J. P., Serrazina L., Guimarães H.,...,Percursos Temáticos de aprendizagem de Matemática do Ensino Básico, Ministério da Educação, Departamento do Ensino Básico, Lisboa, Portugal.

[38] Seymour Lipschutz, Ph. D., Probabilidade, Coleção Schaum

[39] Silva, J.C., Fonseca, C.M., Fonseca, M.G., Lopes, I. & Martins, A., Programa de Matemática A, 10.º ano, Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, 2001.

[40] Silva, J.C., Fonseca, C.M., Fonseca, M.G., Lopes, I. & Martins, A., Programa de Matemática A, 11.º ano, Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, 2002.

[41] Silva, J.C., Fonseca, C.M., Fonseca, M.G., Lopes, I. & Martins, A., Programa de Matemática A, 12.º ano, Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, Lisboa, 2002.

[42] Snedecor, G. W. Cochran, W. G., Statistical Methods. 8th ed., Iowa State University Press,1989.

[43] Stordahl, K., .The History Behind the Probability Theory and the Queuing Theory, 2007.

[44] Struik, D., História concisa das Matemáticas, Colecção Ciência Aberta, Lisboa, Gradiva, 1997.

[45] Stuart, T., Changing the Teaching of Statistics, Source: The Statistician, Vol. 44, 1995.

[46] Tiago de Oliveira, J., Probabilidades e Estatística, Conceitos fundamentais, Vol 1., Livraria Escolar Editora, Lisboa, 1967.

[47] Torgo, L., A Linguagem R, Programação para a análise de dados, Escolar Editora, Lisboa, Portugal, 2009.

[48] Venables, W. N., Ripley, B. D, Modern Applied Statistics with S, 4th ed., Springer, 2002.

[49] Verzani, J.Simple R, http://www.cran.r-project.org, 2002.

[50] Watson J. M., Issues for Statistical Literacy in the Middle School, ICOTS-7, 2006.

[51] Manuais de software R: http://www.cran.r-project.org (An Introduction to R, Venables, W. N., Smith, D. M. and the R Development Core Team).

Páginas na Internet

ALEA - http://www.alea.pt

Instituto Nacional de Estatística - www.ine.pt

(Tem informação sobre Portugal, ao nível da freguesia)

Eurostat – europa.eu.int/comm/eurostat/

(Tem informação relativa aos diversos países da Europa)

World Health Organization – http://www.who.int/research/en/

(Tem informação sobre temas ligados à saúde, para todos os países do mundo)

World in figures – http://.stat.fi/tup/maanum/index_en.html

(Tem informação das mais diversas áreas, tais como população e estatísticas vitais,

cultura, religiões, emprego, consumo, etc., relativa a todos os países do mundo)

Revistas recomendadas

[52] Journal of Statistical Education (online)

Journal of Education and Behavioral Statistics

Journal of Research in Mathematics Education

Statiscal Association (2000)

Teaching Statistics

ANEXO I

(Revisão da Estrutura Curricular)

Despacho Normativo da Avaliação – Ensino Básico

O Despacho normativo n.º 24-A/2012, publicado no Diário da República, 2.ª série, N.º 236 de 6 de dezembro de 2012, regulamenta a avaliação e certificação dos conhecimentos adquiridos e das capacidades desenvolvidas pelos alunos do ensino básico, nos estabelecimentos de ensino público, particular e cooperativo, bem como as medidas de promoção do sucesso escolar que podem ser adotadas no acompanhamento e desenvolvimento dos alunos.

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

(inclui as matrizes curriculares do Ensino Básico e Secundário)

Foi revista a Estrutura Curricular do ensino da Matemática, no Decreto-lei n.º 139/2012 de 5 de julho, bem como no Despacho n.º 5306/2012 de 18 de Abril, tendo em vista melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem, através de uma cultura de rigor e de excelência desde o Ensino Básico até ao Ensino Secundário. De modo coerente com as diretrizes expressas nesses diplomas, a organização curricular da disciplina de Matemática nestes níveis de escolaridade é guiada pelo princípio de que deve ficar claramente estabelecido quais os conhecimentos e as capacidades fundamentais que os alunos devem adquirir e desenvolver. Com base em investigação recente sobre o ensino da Matemática, adota-se uma estrutura curricular sequencial, que se justifica atendendo a que a aquisição de certos conhecimentos e o desenvolvimento de certas capacidades depende de outros a adquirir e a desenvolver previamente. Promove-se desta forma uma aprendizagem progressiva, na qual se caminha etapa a etapa, respeitando a estrutura própria de uma disciplina cumulativa como a Matemática. Note-se também que a abstração desempenha um papel fundamental na atividade Matemática, permitindo agregar e unificar objetos, conceitos e linhas de raciocínio, e adaptar métodos e resultados conhecidos a novos contextos. É no entanto reconhecido que a aprendizagem da Matemática, nos anos iniciais, deve partir do concreto, pelo que é fundamental que a passagem do concreto ao abstrato, um dos propósitos do ensino da Matemática, se faça de forma gradual, respeitando os tempos próprios dos alunos e promovendo assim o gosto por esta ciência e pelo rigor que lhe é caraterístico.

ANEXO II

(Metas Curriculares)

Despacho N.º 868-B/2014, DR. n.º 13, Suplemento ,Série - II, de 20 de janeiro

Homologa os Programas e Metas Curriculares das disciplinas de Português, de Matemática A e de Física e Química A do Ensino Secundário e as Metas Curriculares das disciplinas de Física e de Química do Ensino Secundário.

Despacho N.º 5165-A/2013, de 16 de abril

Revoga o Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007, a partir do ano letivo de 2013-2014, prevendo a realização de uma nova proposta de Programa que agregue as Metas Curriculares desta disciplina, de forma a constituir um documento único perfeita

Despacho N.º 5306/2012, DR. Série - II, de 18 de abril

Prevê a realização de Metas Curriculares para as diferentes disciplinas dos ensinos básico e secundário, criando, para este efeito, um grupo de trabalho coordenador e diversos subgrupos de trabalho consoante as diferentes disciplinas dos ensinos básico e secundário.

Despacho N.º 7000/2013, DR. Série - II, de 30 de maio

Prolonga o mandato do grupo de trabalho responsável pela coordenação de todo o processo de formulação das Metas Curriculares e dos reajustamentos necessários aos Programas, bem como cria as condições necessárias à realização de um plano de formação de professores em todo o país.

Despacho N.º 9888-A/2013, de 26 de julho

Homologa o Programa de Matemática do Ensino Básico, estabelecendo a data da sua entrada em vigor (ano letivo de 2013-2014).

Despacho N.º 15971/2012, DR. Série - II, de 14 de dezembro

Define o calendário de implementação das Metas Curriculares enquanto documentos de utilização obrigatória por parte dos professores, bem como os seus efeitos na avaliação externa dos alunos.

Despacho N.º 10874/2012, DR. Série - II, de 10 de agosto

Homologa as Metas Curriculares das disciplinas de Português, de Matemática, de Tecnologias de Informação e Comunicação, de Educação Visual e de Educação Tecnológica do ensino básico, apresentando estes documentos como orientações recomendadas para estas disciplinas no ano letivo de 2012-2013. Este despacho homologa as Metas Curriculares para a disciplina de

Matemática, Metas essas, (de utilização obrigatória por parte dos professores), que identificam o essencial na aprendizagem dos alunos, por ano de escolaridade, ou por ciclo de escolaridade, realçando o que dos programas deve ser objeto primordial de ensino. As Metas Curriculares identificam os desempenhos que traduzem os conhecimentos a adquirir e as capacidades que se querem ver desenvolvidas, respeitando a ordem de progressão da sua aquisição. São, por isso, o meio privilegiado de apoio à planificação e à organização do ensino, incluindo a produção de materiais didáticos, e constituem -se como referencial para a avaliação interna e externa, com especial relevância para as provas finais de ciclo e exames nacionais. Este despacho enfatiza as Metas Curriculares, implementadas no ano letivo de 2012 -2013, sendo posteriormente tornadas vinculativas e devendo ser respeitadas na lecionação dos conteúdos da disciplina e ano escolar a que dizem respeito.

Despacho N.º 17169/2011, DR. Série - II, de 23 de setembro

Revoga o currículo nacional do ensino básico, prevendo a realização de documentos clarificadores das prioridades nos conteúdos fundamentais dos Programas, na forma de Metas Curriculares.

Implementação das Metas Curriculares

O Despacho nº 39854/2012 do DR, 2ª série, nº 242 de 12 de dezembro de 2012, define o calendário de implementação das Metas Curriculares na disciplina de Matemática.

Ano letivo	Anos de escolaridade					
de aplicação obrigatória	7º	8º	9º	10º	11º	12º
2013-2014	X					
2014-2015		X				
2015-2016			X	X		
2016-2017					X	
2017-2018						X

Nota: O Programa e Metas Curriculares de Matemática, estão implementadas do 1º ao 8º ano de escolaridade, em 2013/2014, foram introduzidas nos 1º, 3º, 5º e 7º anos de escolaridade e este ano letivo no 2º, 4º ,6º e 8º anos de escolaridade, para o próximo ano letivo serão introduzidos 9º e 10º ano de escolaridade e depois consecutivamente nos dois anos letivos seguintes, 11º e 12º anos de escolaridade, respetivamente.

ANEXO III

(Rotinas implementadas no *software* R)

Lei dos Grandes Números

```
ex1<-function(n,p){
x=sample(c(0,1), n, replace = TRUE, prob = c(1-p,p))
sum(x)/length(x)
}
ex1(10,0.16)
lst=c()
repeteex1<- function(m,n,p){
for(i in 1:m) lst[i]=ex1(n,p)
lst
}
repeteex1(10,10,0.16)
#fazer n crescer até N (a entrar como argumento)
estima<-c()
lgn<-function(N,p){
for(i in 1:N)  estima[i]=sum(sample(c(0,1), i, replace = TRUE, prob = c(1-
p,p)))/length(sample(c(0,1), i, replace = TRUE, prob = c(1-p,p)))
estima
}
lista=lgn(200,0.16)
plot(lista,type="l", xlab="Número de Experiências", ylab="Probabilidade", col="black")
abline(h=0.16,col="grey",lty=2,lwd=2)
```

Desvios

```
plot(0:4,c(1.5,3,2,4.8,6), xlab="x",ylab="y",pch=21,bg="blue",xlim=c(0,4.5),ylim=c(0,6.5))
abline(a=1,b=1,col="blue",lwd=2)
lines(c(0,0),c(1.5,1),type="h",col="blue",lty=3)
lines(c(0,0),c(1,1),type="h",col="white",lty=3)
lines(c(1,1),c(2,3),type="h",col="blue",lty=3)
lines(c(1,1),c(2,2),type="h",col="white",lty=3)
lines(c(2,2),c(3,2),type="h",col="blue",lty=3)
lines(c(2,2),c(2,2),type="h",col="white",lty=3)
lines(c(3,3),c(4,4.8),type="h",col="blue",lty=3)
lines(c(3,3),c(4,4),type="h",col="white",lty=3)
lines(c(4,4),c(5,6),type="h",col="blue",lty=3)
lines(c(4,4),c(5,5),type="h",col="white",lty=3)
text(0.1,1.3,"e1",cex=0.8,col="blue")
text(1.1,2.5,"e2",cex=0.8,col="blue")
text(2.1,2.5,"e3",cex=0.8,col="blue")
text(3.1,4.5,"e4",cex=0.8,col="blue")
text(4.1,5.5,"e5",cex=0.8,col="blue")
lines(c(-0.5,0),c(1.5,1.5),type="l",col="brown",lty=4)
lines(c(-0.5,1),c(3,3),type="l",col="brown",lty=4)
lines(c(-0.5,2),c(2,2),type="l",col="brown",lty=4)
lines(c(-0.5,3),c(4.8,4.8),type="l",col="brown",lty=4)
lines(c(-0.5,4),c(6,6),type="l",col="brown",lty=4)
```

Médias

```
#0 coroa
#1 cara
#Exp: lançamento da moeda 1000 vezes (equivalente a lançar 1000 moedas idênticas 1 vez)
#os resultados destes 1000 lançamentos constituem a população finita de dimensão 1000
#a variável estatística pode tomar 2 valores: 0 ou 1 (0 se sai coroa, 1 se sai cara)
#a média populacional é p: proporção de caras na população
#vamos começar por retirar 50 amostras de dimensão 10 e calcular a média de cada uma destas
amostras
#no fim deste procedimento ficamos com 50 valores da média amostral de dimensão 10
#fazemos gráfico
lanca<-function(p){sample(0:1,1000,replace=TRUE,prob=c(1-p,p))}
resultado<-lanca(0.2)
m=matrix(,nrow=50,ncol=10,byrow=TRUE)
for(i in 1:50) m[i,]=sample(resultado,10,replace=TRUE)
m
medias<-apply(m,1,mean)
plot(medias,xlab="amostras",ylab="média",col="blue",type="l",lty=2)
points(medias,pch=21,bg="blue")
abline(h=0.2,col="orange")
#vamos agora retirar 50 amostras de dimensão 100 e calcular as médias
#representar os pontos no mesmo gráfico
mm=matrix(,nrow=50,ncol=100,byrow=TRUE)
for(i in 1:50) mm[i,]=sample(resultado,100,replace=TRUE)
medias100<-apply(mm,1,mean)
lines(medias100,type="l",lty=3,col="red")
points(medias100,pch=21,bg="red")
legend(locator(1),legend=c("amostras dimensão 10","amostras dimensão 100","média
populacional"),col=c("blue","red","orange"),lty=c(2,3,1),cex=0.8)
abline(h=0.2-sqrt(0.2*0.8)/sqrt(10),col="blue")
```

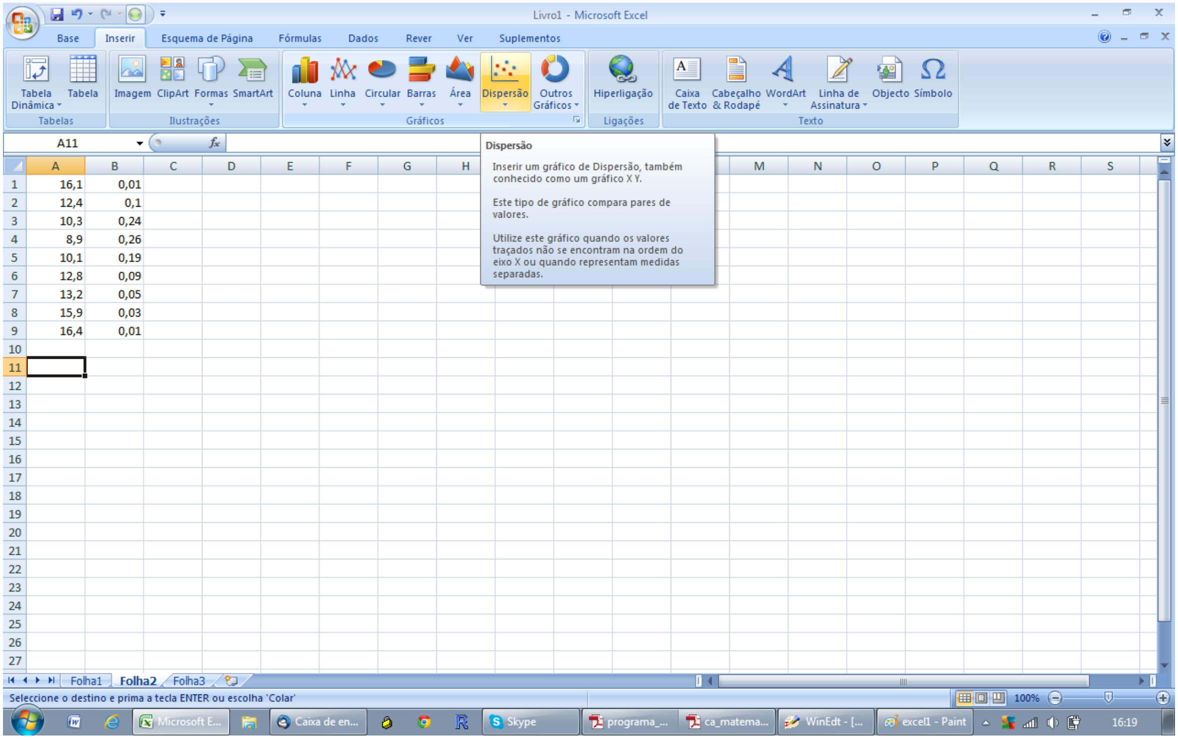
```
abline(h=0.2+sqrt(0.2*0.8)/sqrt(10),col="blue")
abline(h=0.2-sqrt(0.2*0.8)/sqrt(100),col="red")
abline(h=0.2+sqrt(0.2*0.8)/sqrt(100),col="red")
```

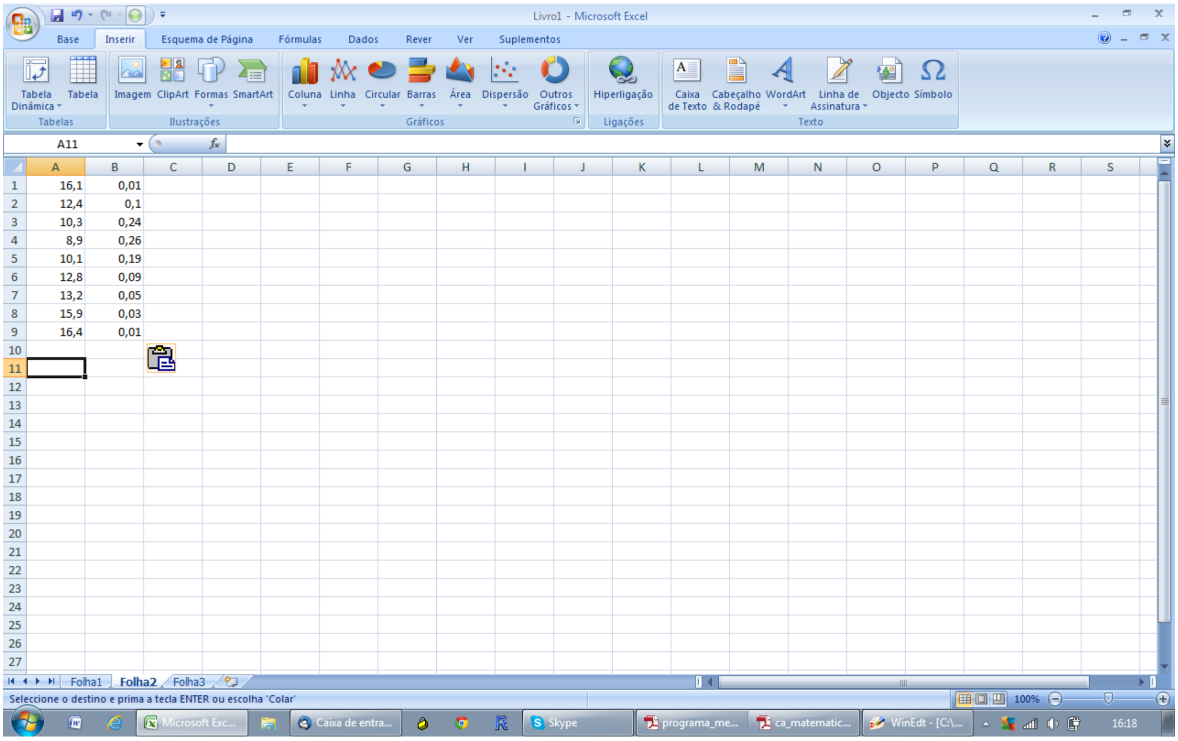
Variabilidade da Média

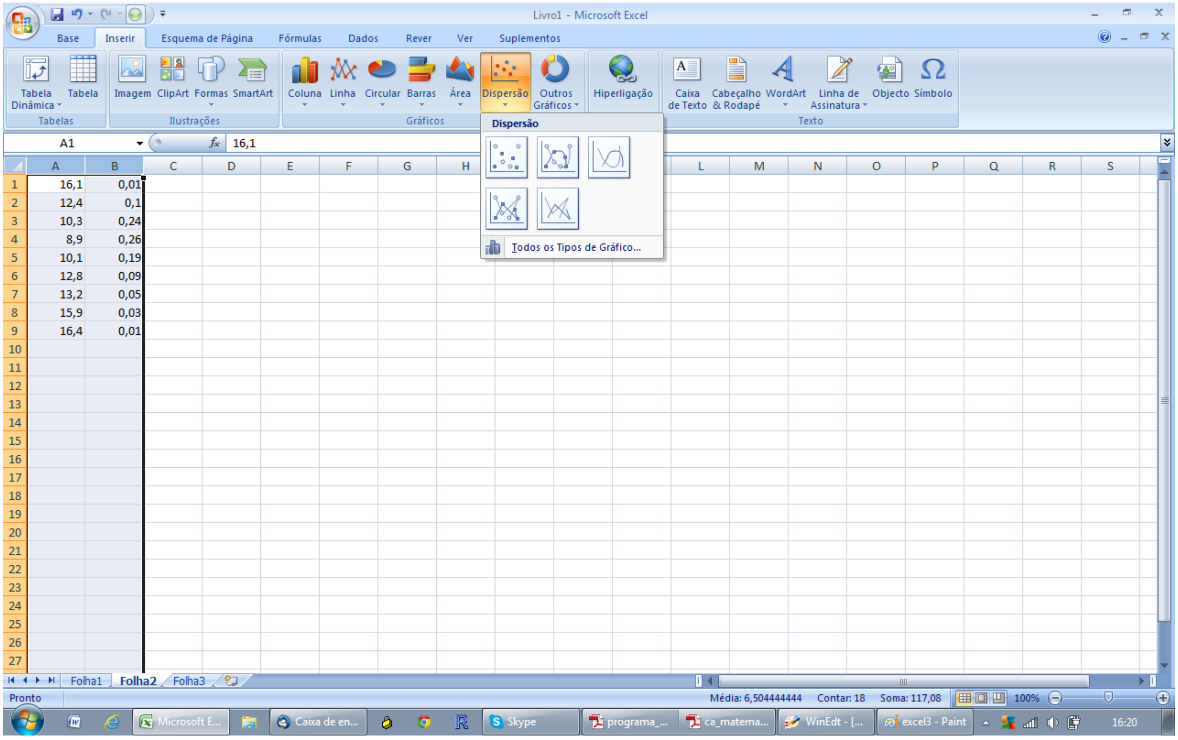
```
set.seed(123456789)
pop1<-rnorm(1000,165,6)
mean(pop1)
sd(pop1)
pop2<-rnorm(5000,165,15)
mean(pop2)
sd(pop2)
#####################
# retiramos agora 20 amostras de dimensão 50 de cada uma das populações e calculamos
# as respetivas médias
mediaspop1<-c()
for(i in 1:20){mediaspop1[i]=sample(pop1,50,replace=TRUE)}
################
mediaspop2<-c()
for(i in 1:20){mediaspop2[i]=sample(pop2,50,replace=TRUE)}
#############
# representação gráfica
#############
plot(mediaspop2,pch=21,bg="brown",xlab="amostras",ylab="médias")
abline(h=165,col="blue")
lines(mediaspop2,col="brown",type="l")
points(mediaspop1,pch=21,bg="green")
lines(mediaspop1,col="green",type="l")
```

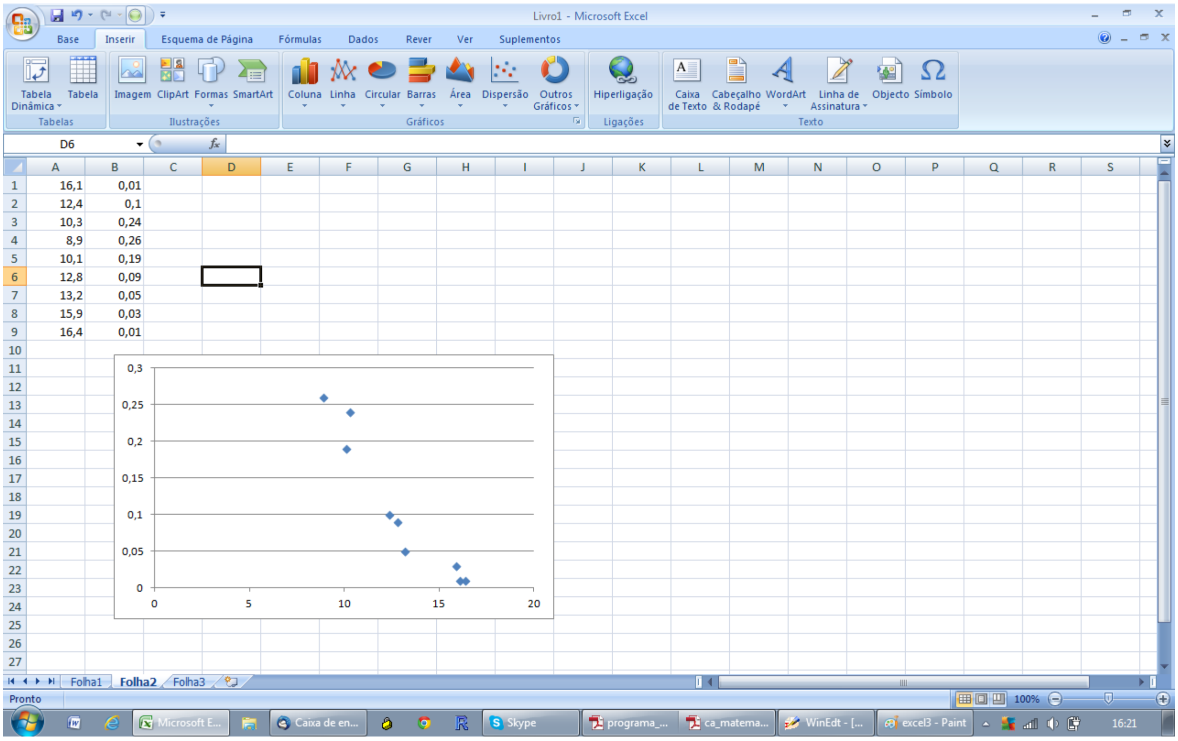
ANEXO IV

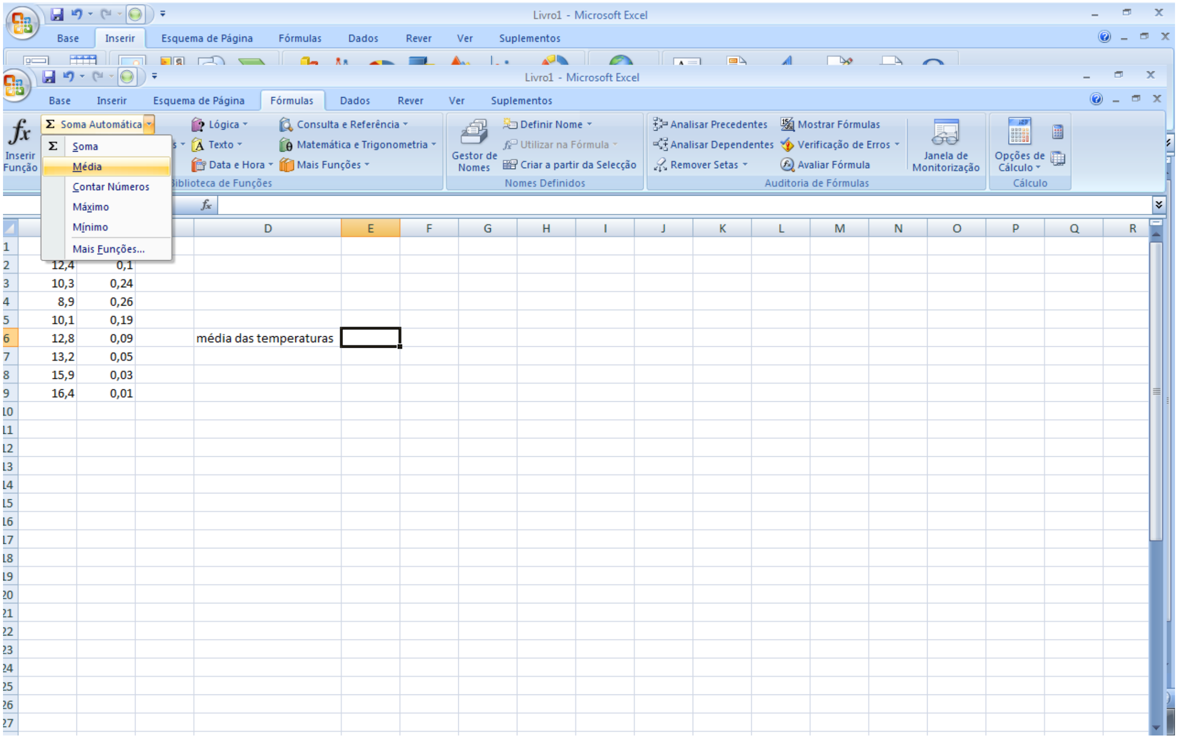
(Resolução da atividade com recurso do Microsoft Office Excel 2007)

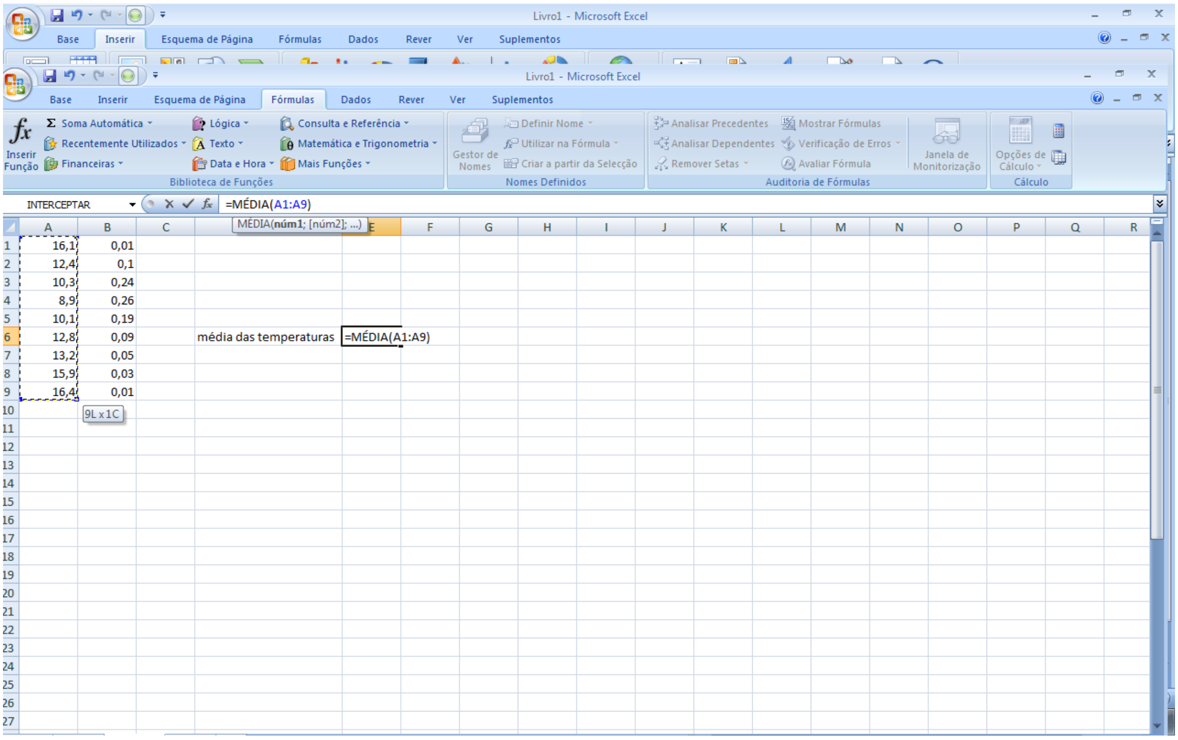

Livro1 - Microsoft Excel
Dispersão
Inserir um gráfico de Dispersão, também conhecido como um gráfico X Y.
Este tipo de gráfico compara pares de valores.
Utilize este gráfico quando os valores traçados não se encontram na ordem do eixo X ou quando representam medidas separadas.
16,1 0,01
12,4 0,1
10,3 0,24
8,9 0,26
10,1 0,19
12,8 0,09
13,2 0,05
15,9 0,03
16,4 0,01
Seleccione o destino e prima a tecla ENTER ou escolha 'Colar'

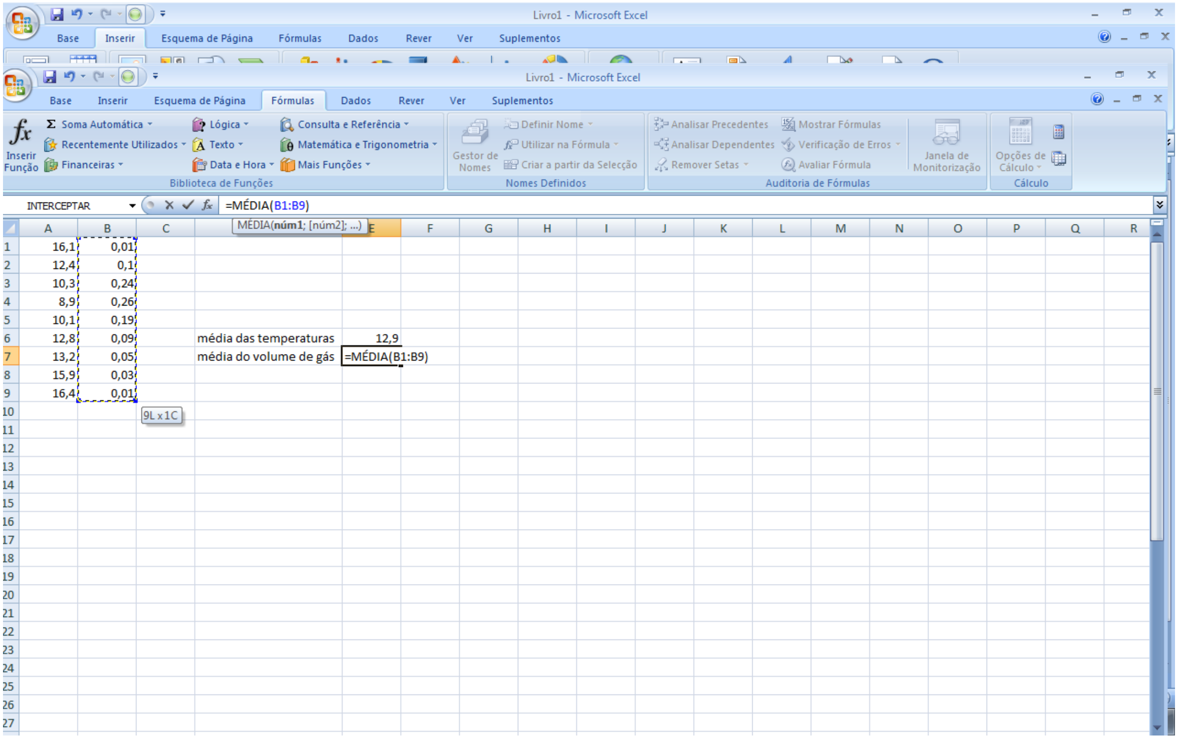

Livro1 - Microsoft Excel
16,1 0,01
12,4 0,1
10,3 0,24
8,9 0,26
10,1 0,19
12,8 0,09
13,2 0,05
15,9 0,03
16,4 0,01
Seleccione o destino e prima a tecla ENTER ou escolha 'Colar'

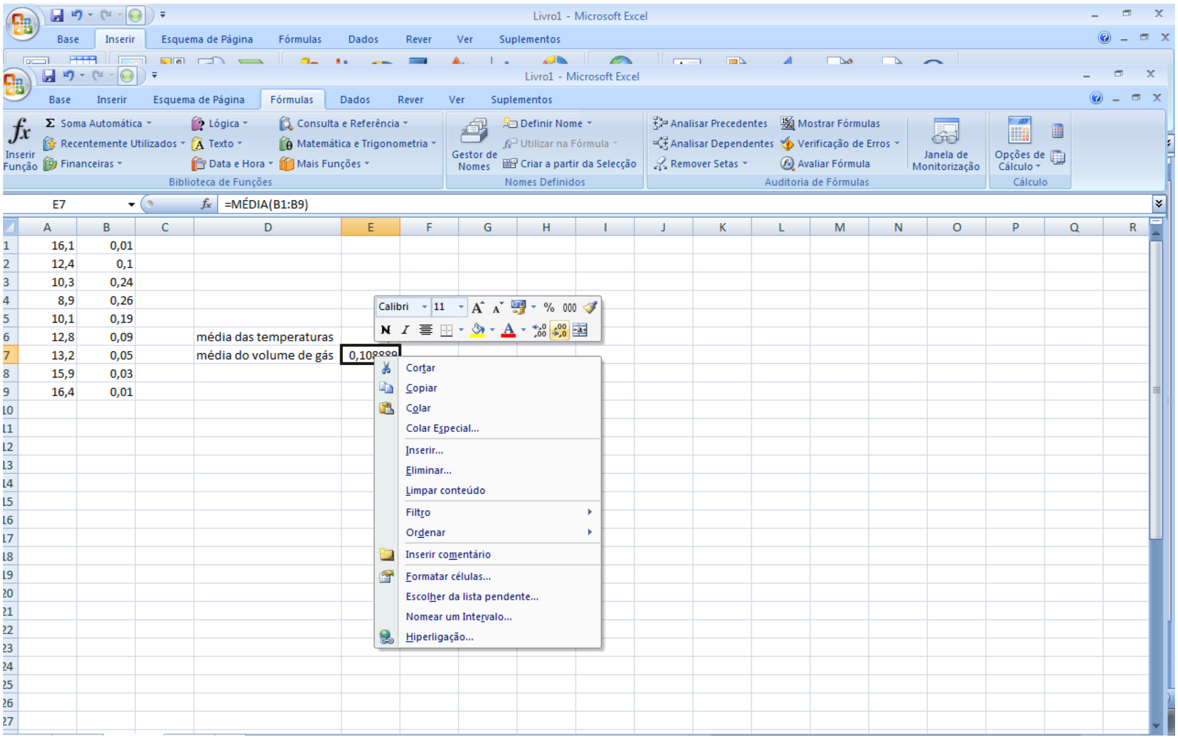

Livro1 - Microsoft Excel
Base
Inserir
Esquema de Página
Fórmulas
Dados
Rever
Ver
Suplementos
Tabela Dinâmica
Tabela
Imagem
ClipArt
Formas
SmartArt
Coluna
Linha
Circular
Barras
Área
Dispersão
Outros Gráficos
Hiperligação
Caixa de Texto
Cabeçalho & Rodapé
WordArt
Linha de Assinatura
Objecto
Símbolo
Tabelas
Ilustrações
Gráficos
Texto
A1
16,1
Dispersão
Todos os Tipos de Gráfico...
16,1 0,01
12,4 0,1
10,3 0,24
8,9 0,26
10,1 0,19
12,8 0,09
13,2 0,05
15,9 0,03
16,4 0,01
Folha1
Folha2
Folha3
Pronto
Média: 6,504444444
Contar: 18
Soma: 117,08

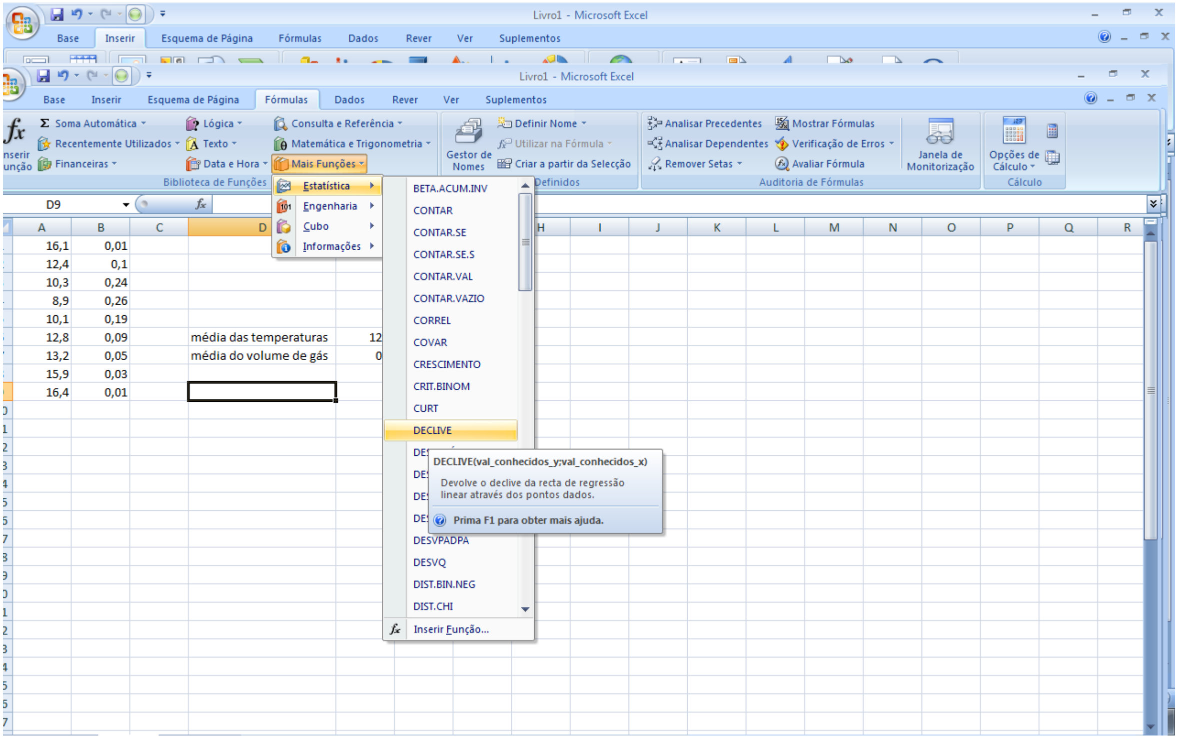

Livro1 - Microsoft Excel
Base
Inserir
Esquema de Página
Fórmulas
Dados
Rever
Ver
Suplementos
D6
16,1 0,01
12,4 0,1
10,3 0,24
8,9 0,26
10,1 0,19
12,8 0,09
13,2 0,05
15,9 0,03
16,4 0,01
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
0
5
10
15
20
Folha1
Folha2
Folha3
Pronto

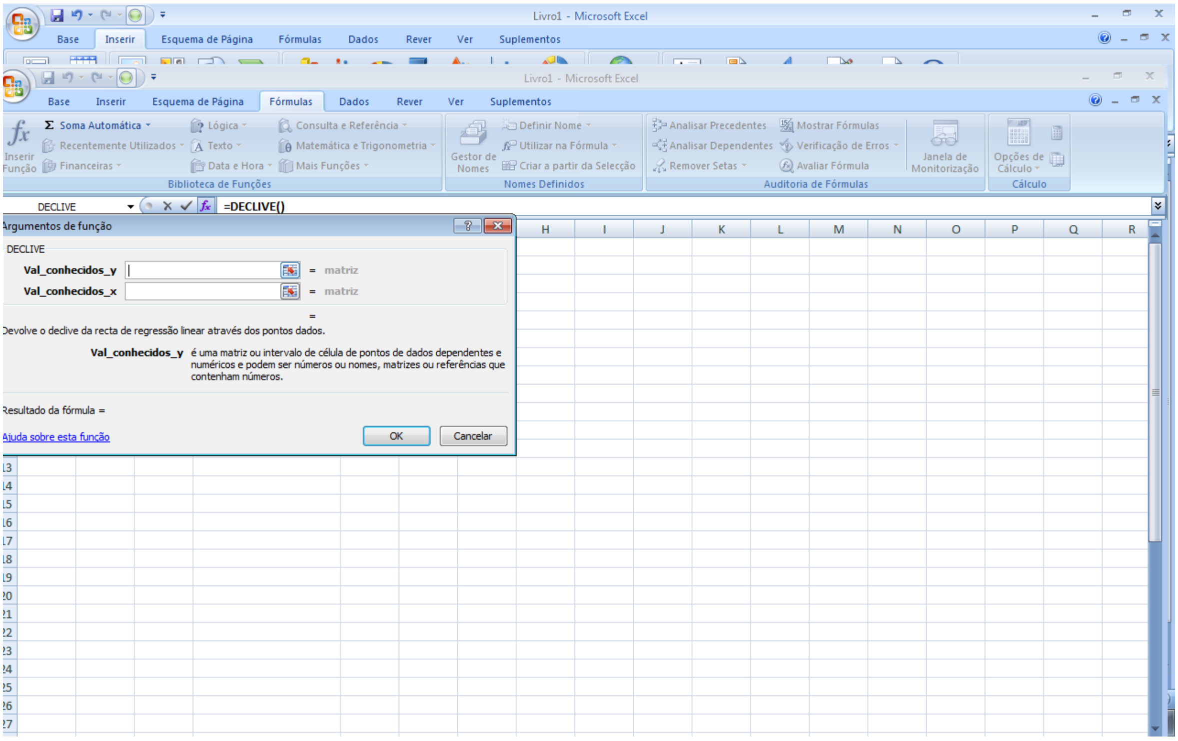


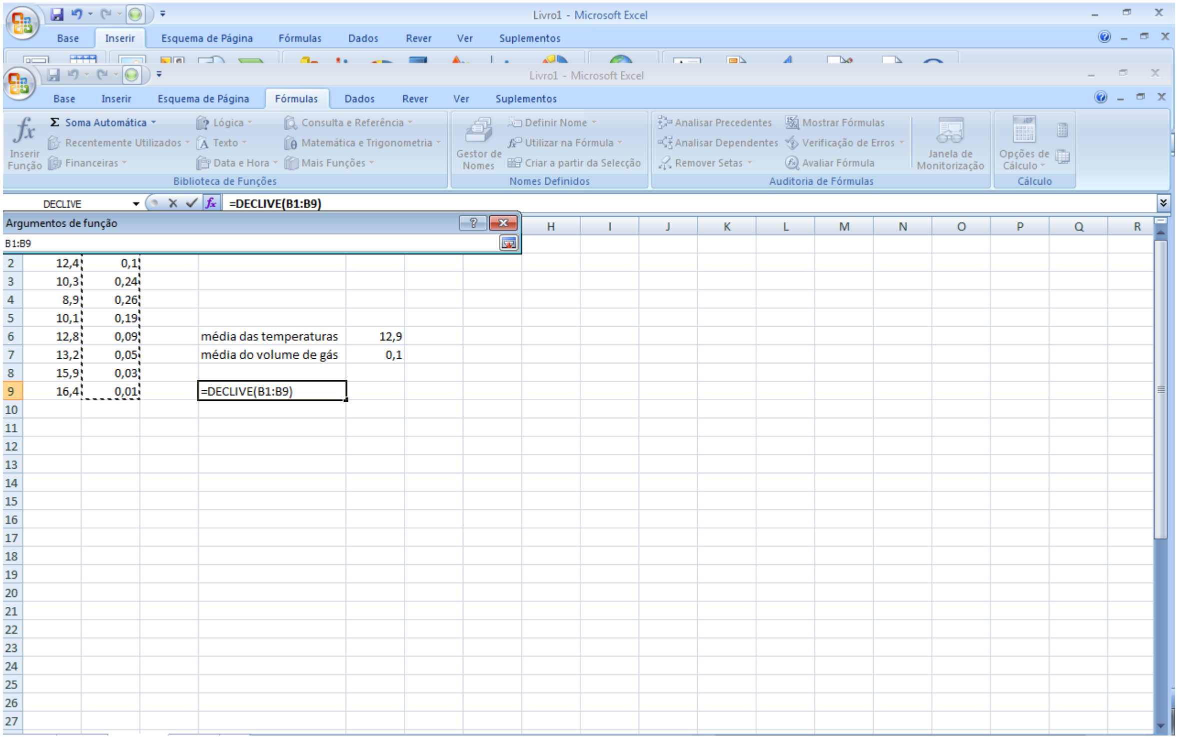


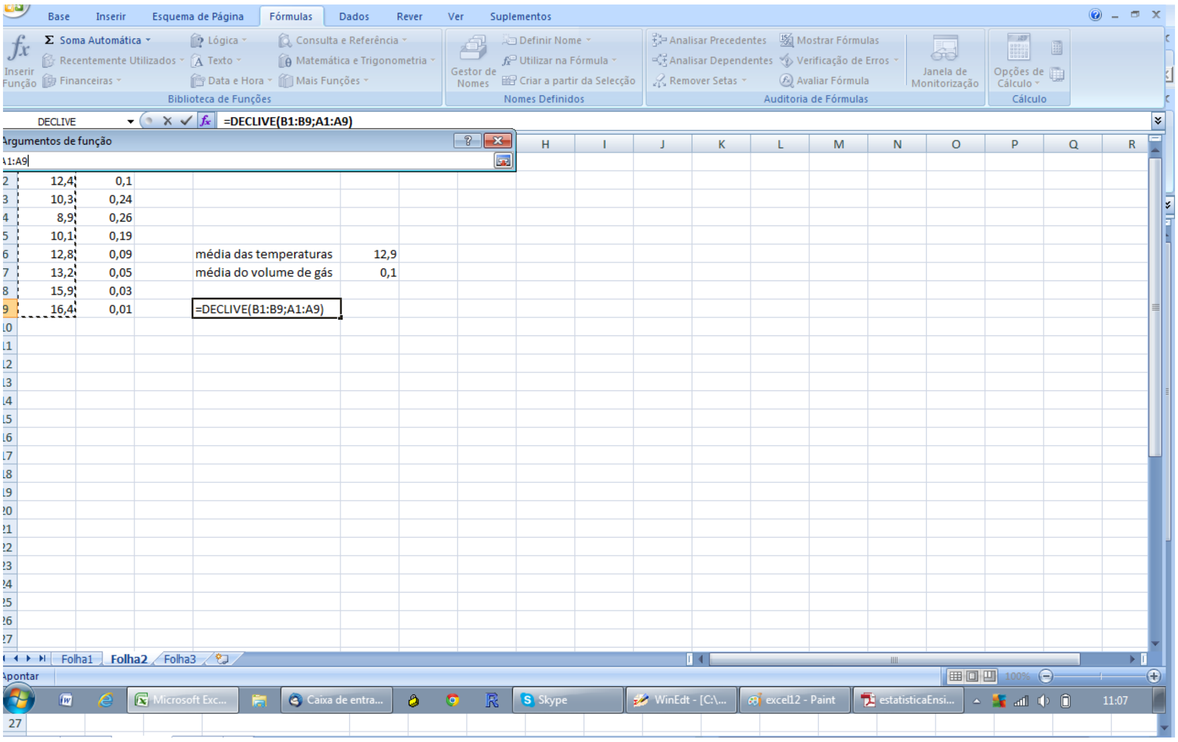


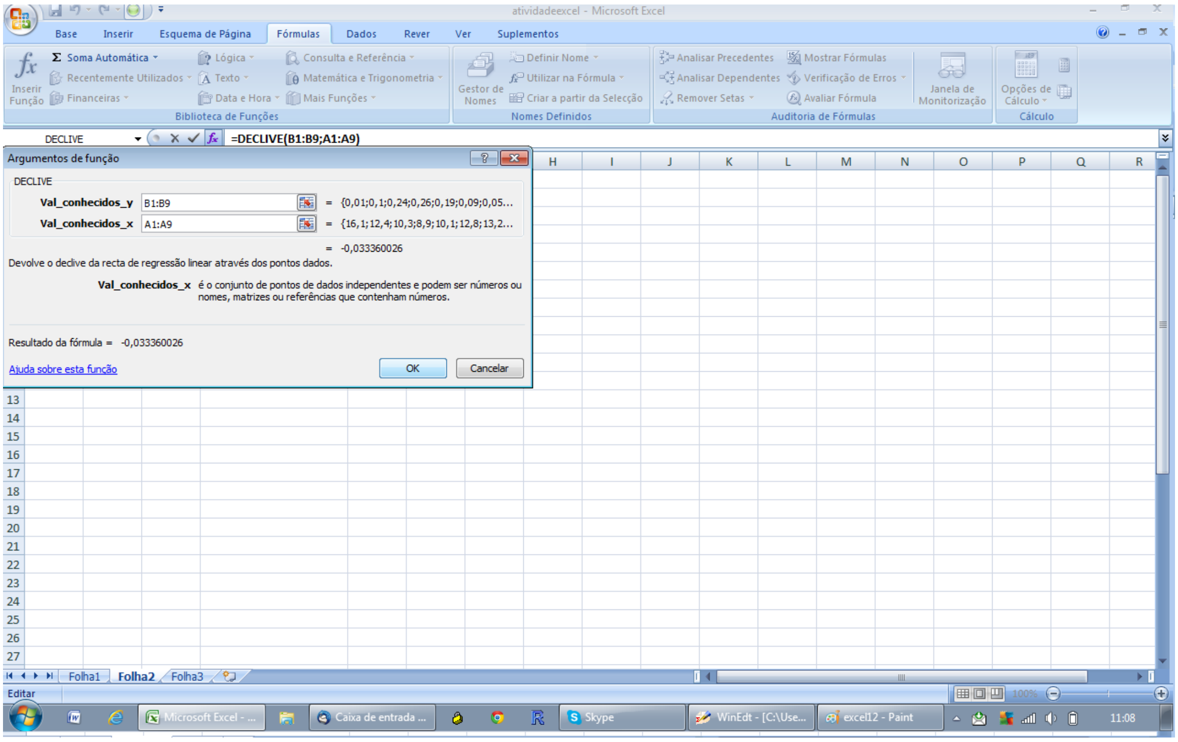


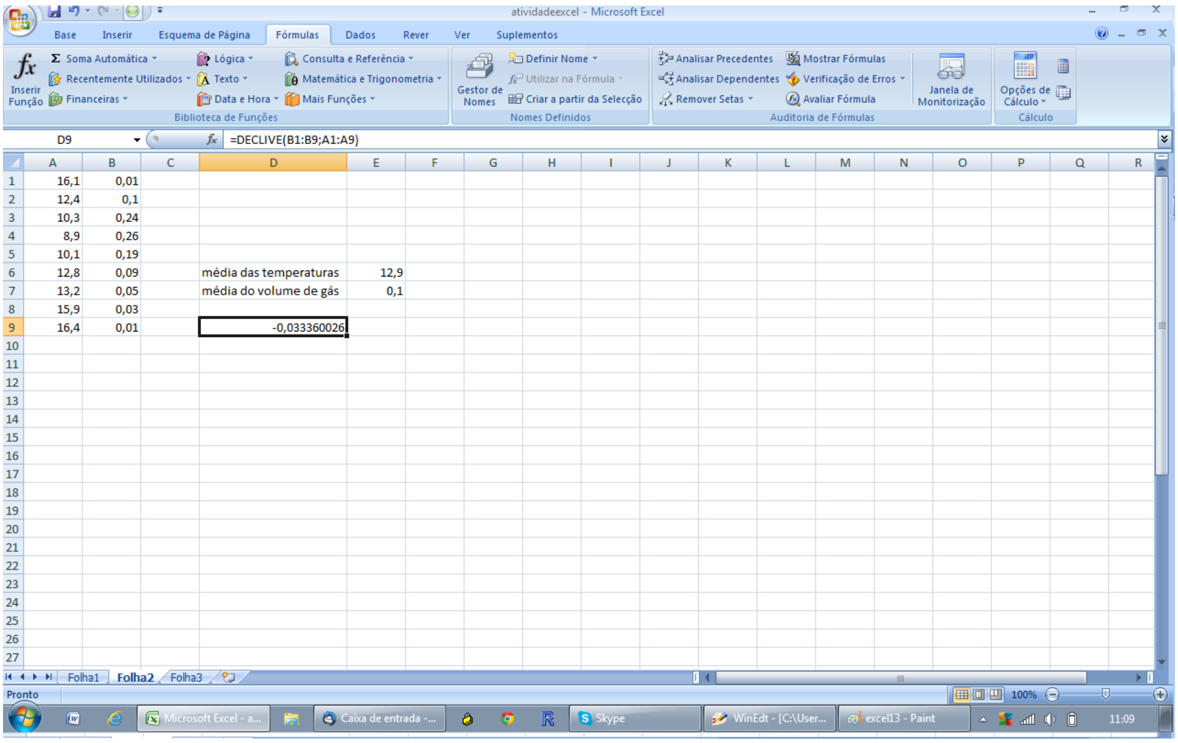

Livro1 - Microsoft Excel
Base
Inserir
Esquema de Página
Fórmulas
Dados
Rever
Ver
Suplementos
Soma Automática
Recentemente Utilizados
Financeiras
Lógica
Texto
Data e Hora
Consulta e Referência
Matemática e Trigonometria
Mais Funções
Estatística
Engenharia
Cubo
Informações
16,1 0,01
12,4 0,1
10,3 0,24
8,9 0,26
10,1 0,19
12,8 0,09
13,2 0,05
15,9 0,03
16,4 0,01
média das temperaturas
média do volume de gás
BETA.ACUM.INV
CONTAR
CONTAR.SE
CONTAR.SE.S
CONTAR.VAL
CONTAR.VAZIO
CORREL
COVAR
CRESCIMENTO
CRIT.BINOM
CURT
DECLIVE
DESVPADPA
DESVQ
DIST.BIN.NEG
DIST.CHI
Inserir Função...
DECLIVE(val_conhecidos_y;val_conhecidos_x)
Devolve o declive da recta de regressão linear através dos pontos dados.
Prima F1 para obter mais ajuda.

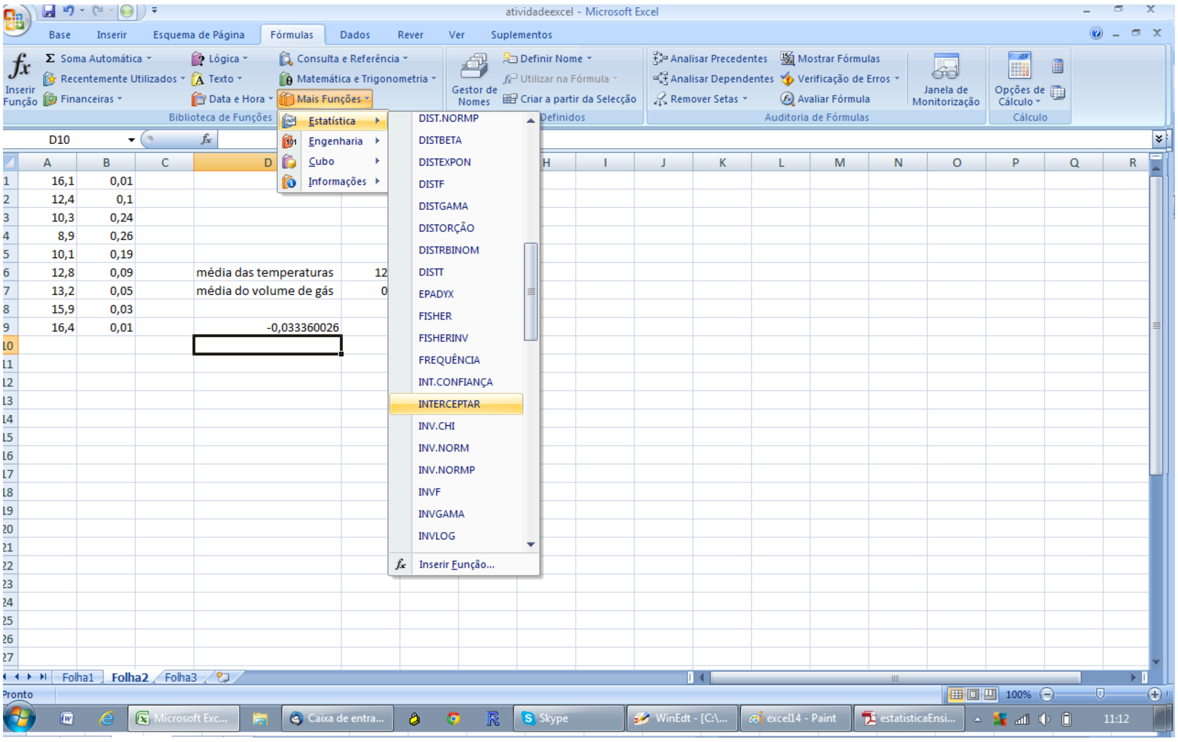

Livro1 - Microsoft Excel
DECLIVE
=DECLIVE()
Argumentos de função
DECLIVE
Val_conhecidos_y = matriz
Val_conhecidos_x = matriz
Devolve o declive da recta de regressão linear através dos pontos dados.
Val_conhecidos_y é uma matriz ou intervalo de célula de pontos de dados dependentes e numéricos e podem ser números ou nomes, matrizes ou referências que contenham números.
Resultado da fórmula =
Ajuda sobre esta função
OK
Cancelar

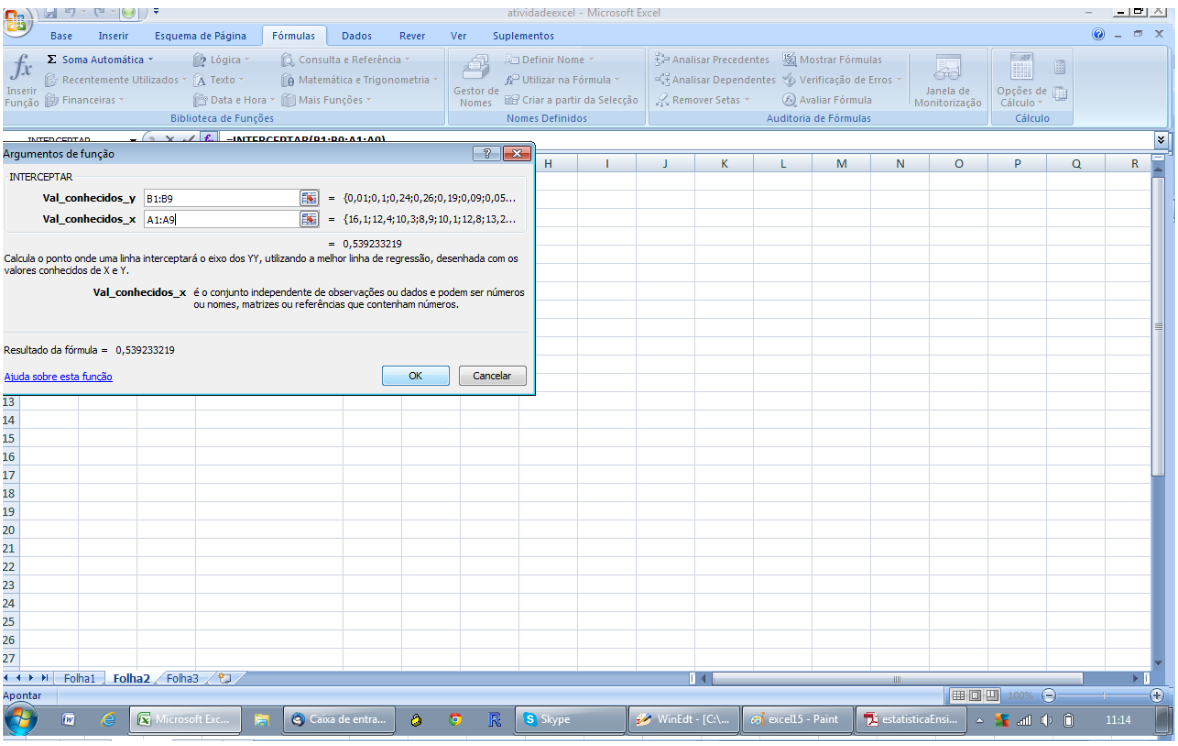

Livro1 - Microsoft Excel
=DECLIVE(B1:B9)
Argumentos de função
B1:B9
12,4 0,1
10,3 0,24
8,9 0,26
10,1 0,19
12,8 0,09
média das temperaturas 12,9
13,2 0,05
média do volume de gás 0,1
15,9 0,03
16,4 0,01
=DECLIVE(B1:B9)

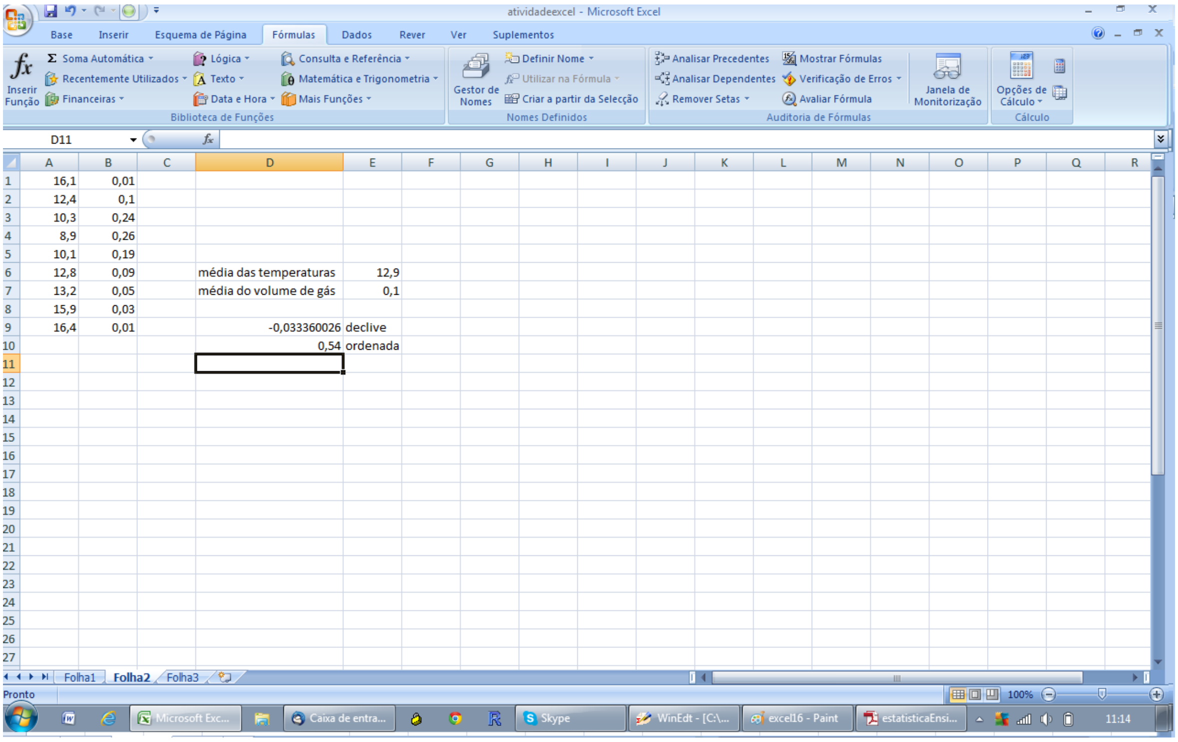

=DECLIVE(B1:B9;A1:A9)
Argumentos de função
A1:A9
12,4 0,1
10,3 0,24
8,9 0,26
10,1 0,19
12,8 0,09
média das temperaturas 12,9
13,2 0,05
média do volume de gás 0,1
15,9 0,03
16,4 0,01
=DECLIVE(B1:B9;A1:A9)
Folha1 Folha2 Folha3
Apontar


atividadeexcel - Microsoft Excel
=DECLIVE(B1:B9;A1:A9)
Argumentos de função
DECLIVE
Val_conhecidos_y B1:B9 = {0,01;0,1;0,24;0,26;0,19;0,09;0,05...
Val_conhecidos_x A1:A9 = {16,1;12,4;10,3;8,9;10,1;12,8;13,2...
= -0,033360026
Devolve o declive da recta de regressão linear através dos pontos dados.
Val_conhecidos_x é o conjunto de pontos de dados independentes e podem ser números ou nomes, matrizes ou referências que contenham números.
Resultado da fórmula = -0,033360026
Ajuda sobre esta função
OK
Cancelar


atividadeexcel - Microsoft Excel
D9
=DECLIVE(B1:B9;A1:A9)
16,1 0,01
12,4 0,1
10,3 0,24
8,9 0,26
10,1 0,19
12,8 0,09 média das temperaturas 12,9
13,2 0,05 média do volume de gás 0,1
15,9 0,03
16,4 0,01 -0,033360026






atividadeexcel - Microsoft Excel
16,1 0,01
12,4 0,1
10,3 0,24
8,9 0,26
10,1 0,19
12,8 0,09 média das temperaturas 12,9
13,2 0,05 média do volume de gás 0,1
15,9 0,03
16,4 0,01 -0,033360026 declive
0,54 ordenada