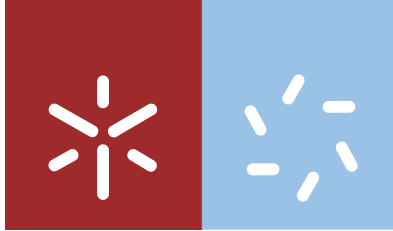




Universidade do Minho
Escola de Ciências

Nuno Miguel Silva Teles Oliveira

**Complexidade do método de ponto interior
para o problema de rastreio regido pela
equação de calor**



Universidade do Minho
Escola de Ciências

Nuno Miguel Silva Teles Oliveira

**Complexidade do método de ponto interior
para o problema de rastreio regido pela
equação de calor**

Dissertação de Mestrado
Mestrado em Matemática

Trabalho realizado sob a orientação do
Professor Doutor Gueorgui Vitalievitch Smirnov

outubro de 2014

DECLARAÇÃO

Nome: Nuno Miguel Silva Teles Oliveira

Endereço electrónico: nunomiguel_oliveira@hotmail.com

Número do Bilhete de Identidade: 13563771

Título dissertação Complexidade do método de ponto interior para o problema de rastreio regido pela equação de calor

Orientador: Professor Doutor Gueorgui Vitalievitch Smirnov

Ano de conclusão: 2014

Designação do Mestrado: Mestrado em Matemática

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTEGRAL DESTA DISSERTAÇÃO APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE;

Universidade do Minho, 09/10/2014

Assinatura: _____

Agradecimentos

Ao professor Gueorgui Smirnov, orientador deste trabalho, pelo esforço que a ele dedicou.

A Stanislav Antontsev pelas suas valiosas sugestões.

À Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT) e ao Fundo Europeu de Desenvolvimento Regional (FEDER) pelo financiamento, no âmbito do projeto de investigação PTDC/MAT/111809/2009, através do programa COMPETE - Programa Operacional Fatores de Competitividade (POFC).

A todos os professores que, de alguma forma, tornaram possível a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho são estudadas algumas questões relativas à complexidade de um método de caminho interior para o problema de rastreio regido pela equação do calor. Os resultados são ilustrados por um exemplo.

Abstract

In this work some complexity issues concerning the path-following method for the tracking problem for heat equation are studied. The results are illustrated by an example.

Índice

1	Introdução	1
2	Espaços Sobolev	2
2.1	Derivadas Fracas	2
2.2	Espaços Sobolev	4
2.3	Espaços de Funções Temporais	6
3	Equações Diferenciais Parabólicas	16
3.1	Equações Parabólicas	16
3.2	Existência e Unicidade de Solução	18
3.3	Dependência Contínua dos Dados e Princípio do Máximo	29
4	Programação Convexa	33
4.1	Funções Auto-concordantes	33
4.2	Barreiras Auto-concordantes	45
4.3	Método de Caminho Interior	48
5	Problema	53
5.1	Formulação do Problema	53
5.2	Resultados Principais	55
5.3	Lemas Auxiliares	56
5.4	Prova dos Resultados Principais	58
5.5	Problema de Rastreo. Exemplos	62

1 Introdução

Aquecimento e arrefecimento controlados são dois processos de fabricação importantes. O surgimento de novas tecnologias requer técnicas mais avançadas no controlo da temperatura [4]. Vários aspectos do problema de seguimento para a equação de calor são discutidos em [1, 2, 3, 8, 9, 11] (ver também a literatura aí referida). Neste trabalho, analisamos a complexidade do método de caminho interior para um problema de rastreio regido pela equação do calor.

Usamos a definição de solução para uma equação parabólica introduzida e estudada por Ladyzenskaja e sua escola [5]. Isso permite-nos garantir a existência de solução para o problema de rastreio e usar o princípio do máximo, a fim de obter um majorante para a diferença entre a solução da equação considerada e a solução numérica do problema de controlo ótimo correspondente. Usamos ainda alguns resultados de programação convexa estudados por Nesterov e Nemirovskii [7] e um método de caminho interior apresentado por Nesterov [6].

O trabalho está organizado da seguinte forma. Na próxima secção, apresentamos alguns aspetos sobre os espaços de funções considerados. Na terceira secção, recordamos alguns resultados bem conhecidos da teoria de EDPs. Alguns resultados de otimização numérica são apresentados na quarta secção. Na secção cinco é declarado o problema de rastreio estudado, os resultados obtidos, bem como a sua prova e, por fim, é considerado um exemplo ilustrativo.

2 Espaços Sobolev

Em alguns problemas modelados por equações diferenciais, não é possível encontrar uma solução no sentido clássico, isto é, uma função diferenciável que satisfaça a equação. Assim, procuramos generalizar a ideia de derivada para podermos solucionar uma maior diversidade de problemas. Dada uma função $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, onde U é um subintervalo de \mathbb{R} , para qualquer função $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável temos

$$\int_U \phi_x u dx = \phi u \Big|_{\partial U} - \int_U u_x \phi dx,$$

onde u_x representa a derivada de u em ordem à variável x . Se ϕ tem suporte compacto em U , então $\phi \Big|_{\partial U} = 0$. Assim, obtemos

$$\int_U \phi_x u dx = - \int_U u_x \phi dx.$$

Procuramos generalizar esta ideia a um grupo mais amplo de funções.

No que se segue, Ω representa um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n e $T \in \mathbb{R}$. Q_T denota o conjunto $\Omega \times (0, T)$. A norma Euclidiana em \mathbb{R} é representada por $|\cdot|$.

2.1 Derivadas Fracas

Notação: Dado $1 \leq p < \infty$, denotamos $L_p(\Omega, \mathbb{R})$ o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\int_\Omega |u|^p dx < \infty$, munido da norma

$$\|u\|_{L_p(Q_T, \mathbb{R})} = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Denotamos $L_\infty(\Omega, \mathbb{R})$ o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\text{ess sup}_\Omega |u| < \infty$, munido da norma

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})} = \text{ess sup}_\Omega |u|.$$

Denotamos por $L_{p,r}(Q_T, \mathbb{R})$ o espaço das funções mensuráveis $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\int_0^T \|u\|_{L_p(\Omega, \mathbb{R})}^r dt < \infty$, munido da norma

$$\|u\|_{L_{p,r}(Q_T, \mathbb{R})} = \left(\int_0^T \|u\|_{L_p(\Omega, \mathbb{R})}^r dt \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Representamos o espaço $L_{q,\infty}(Q_T, \mathbb{R})$ de forma análoga. Se $p = r$, representamos por $L_q(Q_T, \mathbb{R})$ e por $\|\cdot\|_{L_q(Q_T, \mathbb{R})}$, o espaço $L_{q,q}(Q_T, \mathbb{R})$ e a norma $\|\cdot\|_{L_{q,q}(Q_T, \mathbb{R})}$, respetivamente.

Definição 2.1. Seja $u \in L_1(\Omega, \mathbb{R})$. A uma função $v \in L_1(\Omega, \mathbb{R})$ chamamos derivada fraca de u em ordem à variável x_i se, para toda a função $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciável e com suporte compacto em Ω se tem

$$\int_{\Omega} \phi_{x_i} u dx = - \int_{\Omega} v \phi dx,$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$. Uma função $u \in L_1(\Omega, \mathbb{R})$ diz-se fracamente diferenciável se u tem derivadas fracas em ordem a todas as suas variáveis.

Uma vez que apenas estamos interessados em derivadas fracas, usaremos a designação de derivada em vez de derivada fraca.

Lema 2.1. Se $u \in L_1(\Omega, \mathbb{R})$ tem derivada, então ela é única.

Demonstração. Sejam v_1 e v_2 duas derivadas de u . Então, para toda a função $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciável e com suporte compacto em Ω , temos

$$\int_{\Omega} v_1 \phi dx = \int_{\Omega} v_2 \phi dx.$$

Logo, $v_1 = v_2$ em quase todos os pontos. □

Dada a unicidade de derivada, denotaremos a derivada de u em ordem à variável x_i por $\frac{du}{dx_i}$, $D_{x_i}u$ ou, simplesmente, u_{x_i} .

Exemplo 2.1. A derivada da função $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $a \leq 0 \leq b$, definida por $u(x) = |x|$ é a função

$$u_x(x) = \begin{cases} -1, & x \in (a, 0] \\ 1, & x \in (0, b) \end{cases}.$$

De facto, temos

$$\int_a^b \phi_x u dx = \int_0^b x \phi_x dx - \int_a^0 x \phi_x dx = - \int_0^b \phi dx + \int_a^0 \phi dx = - \int_a^b u_x \phi dx$$

Exemplo 2.2. A função $u : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1, 0] \\ 1, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

não tem derivada. De facto, supondo que v é a derivada de u , temos

$$-\int_{-1}^1 v\phi dx = \int_{-1}^1 \phi_x u dx = \int_0^1 \phi_x dx - \int_{-1}^0 \phi_x dx = \phi(1) + \phi(-1) - 2\phi(0) = -2\phi(0),$$

para toda a função $\phi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciável e com suporte compacto em $(-1, 1)$. Considerando uma sucessão de funções, ϕ_n , tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, verifiquem

$$\phi_n(x) \in [0, 1], \forall x \in (-1, 1), \quad \phi_n(0) = 1, \quad \phi_n(x) \rightarrow 0, \forall x \neq 0,$$

temos

$$1 = \lim \phi_n(0) = \frac{1}{2} \lim \int_{-1}^1 v\phi_n dx = 0$$

o que é uma contradição.

2.2 Espaços Sobolev

Vamos agora definir os espaços onde se encontram todas as funções diferenciáveis.

Definição 2.2. Chamamos índice múltiplo a um n -uplo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tal que $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, para todo $i = \overline{1, n}$.

Dados dois índices múltiplos, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, definimos as operações

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n),$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

e

$$D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n}.$$

Definição 2.3. Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e k um inteiro não negativo. Definimos o espaço de Sobolev $W_p^k(\Omega)$ como sendo o espaço que consiste em todas as funções $u \in L_p(\Omega, \mathbb{R})$ tais que todas as derivadas de u até à ordem k existem e estão em $L_p(\Omega, \mathbb{R})$, munido da norma

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D_x^\alpha u\|_{L_p(\Omega, \mathbb{R})}.$$

Lema 2.2. Seja $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em $W_p^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ e $D_{x_i}u_n \rightarrow v$ fracamente em $L_p(\Omega, \mathbb{R})$. Então, $v = D_{x_i}u$.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\int_{\Omega} \phi_{x_i} u_n dx = - \int_{\Omega} D_{x_i} u_n \phi dx,$$

para toda a função $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciável e com suporte compacto em Ω .

Como

$$\int_{\Omega} \phi_{x_i} u_n dx \rightarrow \int_{\Omega} \phi_{x_i} u dx$$

e

$$\int_{\Omega} D_{x_i} u_n \phi dx \rightarrow \int_{\Omega} v \phi dx,$$

pela unicidade do limite temos

$$\int_{\Omega} \phi_{x_i} u dx = - \int_{\Omega} v \phi dx.$$

Logo, $v = D_{x_i}u$. □

Proposição 2.3. O espaço $W_p^k(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy em $W_p^k(\Omega)$. Para cada $i = \overline{1, n}$ temos $\|D_{x_i}^j u_n - D_{x_i}^j u_m\|_{L_p(\Omega, \mathbb{R})} \leq \|u_n - u_m\|_{W_p^k(\Omega)}$, para todo $j \leq k$. Logo, a sucessão $\{D_{x_i}^j u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L_p(\Omega, \mathbb{R})$. Como $L_p(\Omega, \mathbb{R})$ é completo, existem $v_1, v_2, \dots, v_k \in L_p(\Omega, \mathbb{R})$ tais que $D_{x_i}^j u_n \rightarrow v_j$ em $L_p(\Omega, \mathbb{R})$, para todo $j \leq k$. Pelo Lema 2.2, temos $v_j = D_{x_i} v_{j-1}$. De modo análogo, podemos proceder para qualquer índice múltiplo α , com $|\alpha| \leq k$. Logo, $v_0 \in W_p^k(\Omega)$ e $u_n \rightarrow v_0$ em $W_p^k(\Omega)$. □

No caso em que $p = 2$, o espaço $W_2^k(\Omega)$ munido do produto interno definido por

$$(u, v)_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D_x^\alpha u D_x^\alpha v dx$$

é um espaço de Hilbert. A norma associada ao espaço $W_2^k(\Omega)$ e a norma gerada por este produto interno são equivalentes, uma vez que, dados k números reais não negativos a_1, \dots, a_k , temos sempre

$$1 \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^k a_i^2} \leq k^2.$$

2.3 Espaços de Funções Temporais

Definição 2.4. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $W_p^{1,0}(Q_T)$ como sendo o espaço que consiste em todas as funções $u \in L_p(Q_T, \mathbb{R})$ tais que as derivadas de u da forma u_{x_i} existem e estão em $L_p(Q_T, \mathbb{R})$, munido da norma

$$\|u\|_{W_p^{1,0}(Q_T)} = \|u\|_{L_p(Q_T, \mathbb{R})} + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_p(Q_T, \mathbb{R})}.$$

Definição 2.5. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $W_p^{1,1}(Q_T)$ como sendo o espaço que consiste em todas as funções $u \in L_p(Q_T, \mathbb{R})$ tais que as derivadas de u da forma u_t e u_{x_i} existem e estão em $L_p(Q_T, \mathbb{R})$, munido da norma

$$\|u\|_{W_p^{1,1}(Q_T)} = \|u\|_{L_p(Q_T, \mathbb{R})} + \|u_t\|_{L_p(Q_T, \mathbb{R})} + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_p(Q_T, \mathbb{R})}.$$

Proposição 2.4. Os espaços $W_p^{1,0}(Q_T)$ e $W_p^{1,1}(Q_T)$ são espaços de Banach.

Demonstração. A prova da Proposição 2.4 é análoga à prova da Proposição 2.3, pelo que será omitida. □

Definição 2.6. Seja $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$\Lambda(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

onde

$$C = \left(\int_{-1}^1 \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) dx \right)^{-1}.$$

A função Λ é chamada função suavizante padrão.

Para cada $\varepsilon > 0$, consideremos a função $\Lambda_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \Lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Definição 2.7. Seja $u \in L_1((0, T), \mathbb{R})$. Definimos a suavização de u como sendo a função $u_\varepsilon : (\varepsilon, T - \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u_\varepsilon(t) = \int_0^T \Lambda_\varepsilon(t - \tau) u(\tau) d\tau = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Lambda_\varepsilon(t - \tau) u(\tau) dy.$$

Lema 2.5. *Seja $u \in L_1((0, T), \mathbb{R})$. Então:*

1. u_ε é infinitamente diferenciável em $(\varepsilon, T - \varepsilon)$;
2. u_ε converge para u em quase todos os pontos;
3. Se u é contínua, então u_ε converge uniformemente para u nos subconjuntos compactos de $(0, T)$;
4. Se $u \in L_p((0, T), \mathbb{R})$, então u_ε converge para u em $L_p((0, T), \mathbb{R})$.

Demonstração.

1. Sejam $t \in (0, T)$ e h suficientemente pequeno para que $t + h \in (0, T)$. Então,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_\varepsilon(t+h) - u_\varepsilon(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^T \Lambda_\varepsilon(t+h-\tau)u(\tau) - \Lambda_\varepsilon(t-\tau)u(\tau) d\tau \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^T \frac{\Lambda_\varepsilon(t+h-\tau) - \Lambda_\varepsilon(t-\tau)}{h} u(\tau) d\tau = \int_0^T \frac{d\Lambda_\varepsilon}{dt}(t-\tau)u(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Assim, $\frac{du_\varepsilon}{dt}$ existe e é igual a $\int_0^T \frac{d\Lambda_\varepsilon}{dt}(t-\tau)u(\tau) d\tau$. De modo análogo, prova-se que qualquer derivada de u_ε existe.

2. Seja $t \in (0, T)$. Como $(0, T)$ é aberto, existe δ suficientemente pequeno tal que, para $\varepsilon < \delta$, $t \in (\varepsilon, T - \varepsilon)$. Uma vez que

$$u(t) = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Lambda_\varepsilon(t-\tau)u(\tau) d\tau,$$

temos

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(t) - u(t)| &= \left| \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Lambda_\varepsilon(t-\tau)(u(\tau) - u(t)) d\tau \right| \leq \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Lambda_\varepsilon(t-\tau)|u(\tau) - u(t)| d\tau \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Lambda\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right) |u(\tau) - u(t)| d\tau \leq \frac{\Lambda(0)}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} |u(\tau) - u(t)| d\tau. \end{aligned}$$

Como, pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue, $\frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} |u(\tau) - u(t)| d\tau$ tende para 0 em quase todos os pontos, fica provado 2.

3. Seja $[a, b] \subseteq (0, T)$. Como u é contínua, então é uniformemente contínua em $[a, b]$. Logo, $\frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} |u(\tau) - u(t)| d\tau$ tende para 0 uniformemente em (a, b) . Logo, u_ε converge uniformemente para u em (a, b) .
4. Começemos por provar que $\|u_\varepsilon\|_{L_p((a,b),\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L_p((0,T),\mathbb{R})}$, onde $[a, b] \subseteq (0, T)$. Com efeito, notemos que, para $p > 1$,

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(t)| &= \left| \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Lambda_\varepsilon(t-\tau) u(\tau) d\tau \right| \leq \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} (\Lambda_\varepsilon(t-\tau))^{1-1/p} (\Lambda_\varepsilon(t-\tau))^{1/p} |u(\tau)| d\tau \\ &\leq \left(\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Lambda_\varepsilon(t-\tau) d\tau \right)^{1-1/p} \left(\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Lambda_\varepsilon(t-\tau) |u(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Lambda_\varepsilon(t-\tau) |u(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_a^b |u_\varepsilon|^p dt &\leq \int_a^b \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Lambda_\varepsilon(t-\tau) |u(\tau)|^p d\tau dt \leq \int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Lambda_\varepsilon(\tau-t) d\tau |u(t)|^p dt \\ &= \int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} |u(t)|^p dt \leq \int_0^T |u(t)|^p dt, \end{aligned}$$

desde que ε seja suficientemente pequeno para termos $(a - \varepsilon, b + \varepsilon) \subseteq (0, T)$.

Consideremos agora uma função v contínua em $(0, T)$ e tal que $\|v - u\|_{L_p((0,T),\mathbb{R})} \leq \delta$.

Então,

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u\|_{L_p((a,b),\mathbb{R})} &\leq \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L_p((a,b),\mathbb{R})} + \|v_\varepsilon - v\|_{L_p((a,b),\mathbb{R})} + \|v - u\|_{L_p((a,b),\mathbb{R})} \\ &\leq \|u - v\|_{L_p((0,T),\mathbb{R})} + \|v_\varepsilon - v\|_{L_p((a,b),\mathbb{R})} + \|v - u\|_{L_p((0,T),\mathbb{R})} \leq 2\delta + \|v_\varepsilon - v\|_{L_p((a,b),\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Como v é contínua, v_ε converge uniformemente para v em $[a, b]$ e, por isso, para ε suficientemente pequeno temos $\|v_\varepsilon - v\|_{L_p((a,b),\mathbb{R})} \leq \delta$, terminando assim a prova do Lema. □

Proposição 2.6. *Seja $u \in W_p^{1,1}(Q_T)$. Então, para todos $0 \leq s \leq t \leq T$, temos*

$$u(x, t) = u(x, s) + \int_s^t u_t(x, \tau) d\tau.$$

Demonstração. Consideremos a função $u_\varepsilon(x, t) = \int_0^T \Lambda_\varepsilon(t - \tau)u(x, \tau)d\tau$, como na Definição 2.7. Assim, temos

$$\frac{du_\varepsilon}{dt}(x, t) = \int_0^T \frac{d\Lambda_\varepsilon}{dt}(t - \tau)u(x, \tau)d\tau = - \int_0^T \frac{d\Lambda_\varepsilon}{d\tau}(t - \tau)u(x, \tau)d\tau.$$

Uma vez que Λ_ε é infinitamente diferenciável e, para cada $t \in (\varepsilon, T - \varepsilon)$, a função definida por $\tau \mapsto \Lambda_\varepsilon(t - \tau)$ tem suporte compacto em $(0, T)$, temos

$$\frac{du_\varepsilon}{dt}(x, t) = \int_0^T \Lambda_\varepsilon(t - \tau) \frac{du}{d\tau}(x, \tau)d\tau.$$

Logo, $\frac{du_\varepsilon}{dt} = \left(\frac{du}{dt} \right)_\varepsilon$. Uma vez que a função u_ε é contínua, temos

$$u_\varepsilon(x, t) = u_\varepsilon(x, s) + \int_s^t \frac{du_\varepsilon}{dt}(x, \tau)d\tau, \quad 0 < s \leq t < T.$$

Como u_ε converge para u em quase toda a parte e $\frac{du_\varepsilon}{dt}$ converge para $\frac{du}{dt}(x, t)$ em $L_p(Q_T, \mathbb{R})$, obtemos

$$u(x, t) = u(x, s) + \int_s^t \frac{du}{dt}(x, \tau)d\tau,$$

para todos $0 \leq s \leq t \leq T$. □

Definição 2.8. Definimos o espaço de Sobolev $V_2(Q_T)$ como sendo o espaço que consiste em todas as funções $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ com norma

$$\|u\|_{V_2(Q_T)} = \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})}$$

finita.

Definição 2.9. Definimos o espaço de Sobolev $V_2^{1,0}(Q_T)$ como sendo o subespaço de $V_2(Q_T)$ das funções contínuas na norma de $L_2(\Omega, \mathbb{R})$, isto é, das funções $u \in V_2(Q_T)$ tais que $\|u(\cdot, t + \Delta t) - u(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} \rightarrow 0$ sempre que $\Delta t \rightarrow 0$.

Proposição 2.7. Os espaços $V_2(Q_T)$ e $V_2^{1,0}(Q_T)$ são espaços de Banach.

Demonstração. A prova da Proposição 2.7 é análoga à prova da Proposição 2.3, pelo que será omitida. □

Proposição 2.8. O espaço $V_2^{1,0}(Q_T)$ é o completado de $W_2^{1,1}(Q_T)$ relativamente à norma de $V_2(Q_T)$.

Demonstração. Consideremos $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a partição do intervalo $[0, T]$, $[0 = \tau_0, \tau_1], [\tau_1, \tau_2], \dots, [\tau_{n-1}, \tau_n = T]$ tal que $\tau_{k+1} - \tau_k = \frac{T}{n}$, para todo $k = \overline{0, n-1}$ e a função u_n definida por

$$u_n(x, t) = u(x, \tau_k) + \frac{t - \tau_k}{\tau_{k+1} - \tau_k} (u(x, \tau_{k+1}) - u(x, \tau_k)), \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}].$$

É claro que $u_n \in W_2^{1,1}(Q_T)$. Resta mostrar que u_n converge para u em $V_2^{1,0}(Q_T)$. De facto temos

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_{V_2(Q_T)} &= \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u - u_n\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i} - (u_n)_{x_i}\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})} \\ &= \max_{k=0, n-1} \left(\operatorname{ess\,sup}_{\tau_k \leq t \leq \tau_{k+1}} \|u - u_n\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} \right) + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i} - (u_n)_{x_i}\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Uma vez que $\|u(x, t + \Delta t) - u(x, t)\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})} \rightarrow 0$, quando $\Delta t \rightarrow 0$, temos $\|u_{x_i} - (u_n)_{x_i}\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, uma vez que $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, também temos $\operatorname{ess\,sup}_{\tau_k \leq t \leq \tau_{k+1}} \|u - u_n\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Logo, u_n converge para u em $V_2^{1,0}(Q_T)$. \square

Os Lemas que se seguem têm como objetivo fornecer-nos condições suficientes para a inclusão do espaço $V_2(Q_T)$ em espaços da forma $L_{q,r}(Q_T, \mathbb{R})$, onde q e r são constantes arbitrárias satisfazendo

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = \frac{n}{4}, \\ &q \in [2, \frac{2n}{n-2}], r \in [2, \infty], \text{ se } n \geq 3, \\ &q \in [2, \infty], r \in (2, \infty], \text{ se } n = 2, \\ &q \in [2, \infty], r \in [4, \infty], \text{ se } n = 1. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Lema 2.9. Suponhamos $n > 1$. Seja $u \in W_2^1(\Omega)$ tal que $u(x) = 0$, quando $x \in \partial\Omega$. Então, é válida a desigualdade

$$\|u\|_{L_{\frac{n}{n-1}}(\Omega, \mathbb{R})} \leq \prod_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_1(\Omega, \mathbb{R})}^{1/n}. \quad (2)$$

Demonstração. A prova desta desigualdade será feita por indução em n . Tomemos para caso base $n = 2$. Temos

$$\begin{aligned} \int \int u^2(x_1, x_2) d(x_1, x_2) &\leq \int \int \max_{x_1} \{|u(x_1, x_2)|\} \max_{x_2} \{|u(x_1, x_2)|\} d(x_1, x_2) \\ &= \int \max_{x_1} \{|u(x_1, x_2)|\} dx_2 \int \max_{x_2} \{|u(x_1, x_2)|\} dx_1 \\ &\leq \int \int |u_{x_1}(x_1, x_2)| d(x_1, x_2) \int \int |u_{x_2}(x_1, x_2)| d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} \leq \|u_{x_1}\|_{L_1(\Omega, \mathbb{R})}^{1/2} \|u_{x_2}\|_{L_1(\Omega, \mathbb{R})}^{1/2}.$$

Supondo agora que a desigualdade é verdadeira para $n - 1 \geq 1$, vamos provar que é também verdadeira para n . Com efeito temos

$$\begin{aligned} \int |u(x_1, \dots, x_n)|^{\frac{n}{n-1}} d(x_1, \dots, x_n) &\leq \int dx_n \int \max_{x_n} |u(x_1, \dots, x_n)|^{\frac{n}{n-1}} d(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ &\leq \int dx_n \int \max_{x_n} \{|u(x_1, \dots, x_n)|\}^{\frac{n}{n-1}} d(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ &\leq \int dx_n \int \max_{x_n} \{|u(x_1, \dots, x_n)|\} \max_{x_n} \{|u(x_1, \dots, x_n)|\}^{\frac{1}{n-1}} d(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ &\leq \left(\int \max_{x_n} \{|u(x_1, \dots, x_n)|\}^{\frac{n-1}{n-2}} d(x_1, \dots, x_n) \right)^{\frac{n-2}{n-1}} \\ &\quad \left(\int \max_{x_n} \{|u(x_1, \dots, x_n)|\} d(x_1, \dots, x_{n-1}) \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &\leq \int \prod_{i=1}^{n-1} \|u\|_{L_1(\Omega_{n-1}, \mathbb{R})}^{\frac{1}{n-1}} dx_n \left(\int |u_{x_n}(x_1, \dots, x_n)| d(x_1, \dots, x_n) \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &\leq \prod_{i=1}^{n-1} \|u\|_{L_1(\Omega, \mathbb{R})}^{\frac{1}{n-1}} \left(\int |u_{x_n}(x_1, \dots, x_n)| d(x_1, \dots, x_n) \right)^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{i=1}^n \|u\|_{L_1(\Omega, \mathbb{R})}^{\frac{1}{n-1}}, \end{aligned}$$

onde Ω_{n-1} representa o subespaço de dimensão $n - 1$ de Ω formado pelos pontos da forma (x_1, \dots, x_{n-1}, a) com a fixo. Assim, temos

$$\|u\|_{L_{\frac{n}{n-1}}(\Omega, \mathbb{R})} \leq \prod_{i=1}^n \|u\|_{L_1(\Omega, \mathbb{R})}^{1/n}.$$

□

Lema 2.10. *Seja $u \in W_2^1(\Omega)$ tal que $u(x) = 0$, quando $x \in \partial\Omega$. Se q satisfaz a condição (1), então existe $\beta > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L_q(\Omega, \mathbb{R})} \leq \beta \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^\alpha \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{1-\alpha},$$

onde $\alpha = \frac{n}{2} - \frac{n}{q}$.

Demonstração. Consideremos $n = 1$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} |u(x)|^q &= |u(x)|^2 (|u(x)|^2)^{\frac{q-2}{2}} \leq |u(x)|^2 \left(\int_{\Omega} 2|u(x)||u_x(x)| dx \right)^{\frac{q-2}{2}} \\ &\leq 2^{\frac{q-2}{2}} |u(x)|^2 \|u(x)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{\frac{q-2}{2}} \|u_x(x)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{\frac{q-2}{2}}. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_q(\Omega, \mathbb{R})} &\leq 2^{\frac{q-2}{2q}} \|u(x)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{\frac{2}{q}} \|u(x)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{\frac{q-2}{2q}} \|u_x(x)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{\frac{q-2}{2q}} \\ &= 2^{\frac{q-2}{2q}} \|u(x)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{\frac{1}{q} + \frac{1}{2}} \|u_x(x)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Se $q = \infty$, a demonstração é análoga, mostrando que

$$|u(x)| \leq 2^{\frac{1}{2}} \|u(x)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|u_x(x)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{\frac{1}{2}}.$$

Vamos agora provar que, se $n \geq 2$, então dado $1 < p < n$, verifica-se a desigualdade

$$\|u\|_{L_{\frac{pn}{n-p}}(\Omega, \mathbb{R})}^\alpha \leq c_p^\alpha \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_p(\Omega, \mathbb{R})}^\alpha,$$

onde $c_p = \frac{p(n-1)}{n^2-pn}$. Seja $v = u^{1/\lambda}$, onde $\lambda = \frac{n-p}{p(n-1)}$. Temos então

$$v^{\frac{n}{n-1}} = u^{\frac{pn}{n-p}},$$

e assim, usando a desigualdade (2), temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_{\frac{pn}{n-p}}(\Omega, \mathbb{R})} &= \|v\|_{L_{\frac{n}{n-1}}(\Omega, \mathbb{R})}^\lambda \leq \prod_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{L_1(\Omega, \mathbb{R})}^{\frac{\lambda}{n}} = \prod_{i=1}^n \left\| \frac{1}{\lambda} u^{\frac{1}{\lambda}-1} u_{x_i} \right\|_{L_1(\Omega, \mathbb{R})}^{\frac{\lambda}{n}} \\ &\leq \frac{1}{\lambda^\lambda} \prod_{i=1}^n \left(\left\| u^{\frac{1}{\lambda}-1} \right\|_{L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega, \mathbb{R})} \left\| u_{x_i} \right\|_{L_p(\Omega, \mathbb{R})} \right)^{\frac{\lambda}{n}} = \frac{1}{\lambda^\lambda} \left\| u^{\frac{1}{\lambda}-1} \right\|_{L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega, \mathbb{R})}^\lambda \prod_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_p(\Omega, \mathbb{R})}^{\frac{\lambda}{n}}. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\left\| u^{\frac{1}{\lambda}-1} \right\|_{L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega, \mathbb{R})}^\lambda = \left(\int_{\Omega} u^{\frac{pn}{n-p}} dx \right)^{\frac{(p-1)(n-p)}{p^2(n-1)}} = \|u\|_{L_{\frac{pn}{n-p}}(\Omega, \mathbb{R})}^{1-\lambda},$$

temos

$$\|u\|_{L_{\frac{pn}{n-p}}(\Omega, \mathbb{R})}^\alpha \leq \frac{1}{\lambda^\alpha} \prod_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_p(\Omega, \mathbb{R})}^{\frac{\alpha}{n}},$$

e aplicando a desigualdade de Young ao membro direito desta desigualdade, temos ainda

$$\|u\|_{L_{\frac{pn}{n-p}}(\Omega, \mathbb{R})}^\alpha \leq \frac{1}{n\lambda^\alpha} \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_p(\Omega, \mathbb{R})}^\alpha.$$

Consideremos $n = 2$. Sejam $\delta \in [0, 1]$, $s > 1$ e $p \in (1, 2)$ tais que

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\delta}{s} = 1 - \frac{2}{q}; \\ \frac{2p}{2-p}(s-1) &= 2; \\ \frac{1}{q} &= \frac{\delta}{s} \frac{2-p}{2p} + \frac{1-\delta}{2}. \end{aligned} \right\}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_q(\Omega, \mathbb{R})} &= \|u^\delta u^{1-\delta}\|_{L_q(\Omega, \mathbb{R})} \leq \|u^\delta\|_{L_{\frac{2p}{2-p} \frac{s}{\delta}}(\Omega, \mathbb{R})} \|u^{1-\delta}\|_{L_{\frac{2}{1-\delta}}(\Omega, \mathbb{R})} \\ &= \|u^s\|_{L_{\frac{2p}{2-p}}(\Omega, \mathbb{R})}^{\delta/s} \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{1-\delta} \leq c_p^{\delta/s} \sum_{i=1}^n \|(u^s)_{x_i}\|_{L_p(\Omega, \mathbb{R})}^{\delta/s} \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{1-\delta} \\ &\leq (sc_p)^{\delta/s} \sum_{i=1}^n \| |u|^{s-1} |u_{x_i}| \|_{L_p(\Omega, \mathbb{R})}^{\delta/s} \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{1-\delta} \\ &\leq (sc_p)^{\delta/s} \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{\delta/s} \| |u|^{s-1} \|_{L_{\frac{2p}{2-p}}(\Omega, \mathbb{R})}^{\delta/s} \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{1-\delta} \\ &= (sc_p)^{\delta/s} \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{\delta/s} \|u\|_{L_{\frac{2p}{2-p}(s-1)}(\Omega, \mathbb{R})}^{\delta(s-1)/s} \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{1-\delta} \\ &= (sc_p)^{\delta/s} \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{\delta/s} \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{1-\delta/s}. \end{aligned}$$

Notemos agora que, quando $n \geq 3$, temos

$$\frac{\alpha}{\frac{2n}{n-2}} + \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1}{q}.$$

Deste modo, temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_q(\Omega, \mathbb{R})} &= \|u^\alpha u^{1-\alpha}\|_{L_q(\Omega, \mathbb{R})} \leq \|u^\alpha\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega, \mathbb{R})} \|u^{1-\alpha}\|_{L^{\frac{2}{1-\alpha}}(\Omega, \mathbb{R})} \\ &= \|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega, \mathbb{R})}^\alpha \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{1-\alpha} \leq c_2^\alpha \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^\alpha \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{1-\alpha} \end{aligned}$$

□

Lema 2.11. Se $u \in V_2(Q_T)$ e $u(x, t) = 0$, $(x, t) \in (\partial\Omega \times [0, T])$, então a estimativa

$$\|u\|_{L_{q,r}(Q_T, \mathbb{R})} \leq C \|u\|_{V^2(Q_T)}$$

vale, para todos q e r que satisfazem a condição (1).

Demonstração. Pelo Lema anterior, temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_{q,r}(Q_T, \mathbb{R})} &= \left(\int_0^T \|u\|_{L_q(\Omega, \mathbb{R})}^r dt \right)^{1/r} \leq \beta \left(\int_0^T \left(\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^\alpha \right)^r \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{(1-\alpha)r} dt \right)^{1/r} \\ &\leq \beta \left(\int_0^T \left(\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^\alpha \right)^r dt \right)^{1/r} \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{(1-\alpha)} \\ &\leq \beta \sum_{i=1}^n \left(\int_0^T \|u_{x_i}\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{\alpha r} dt \right)^{1/r} \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{(1-\alpha)} \\ &= \beta \sum_{i=1}^n \left(\int_0^T \|u_{x_i}\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^2 dt \right)^{1/r} \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{(1-2/r)} \\ &= \beta \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})}^{2/r} \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{(1-2/r)}. \end{aligned}$$

Nas igualdades anteriores foi usada a relação $\alpha = \frac{n}{2} - \frac{n}{q} = \frac{2}{r}$. Uma vez que, pela desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})}^{2/r} \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^{(1-2/r)} &\leq \frac{2}{r} \left(\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})}^2 \right)^{r/2} + \left(1 - \frac{2}{r} \right) \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} \\ &\leq \frac{2}{r} \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})} + \left(1 - \frac{2}{r} \right) \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}, \end{aligned}$$

obtemos o resultado tomando $C = \beta \max\{\frac{2}{r}, 1 - \frac{2}{r}\}$. □

Usaremos a notação que se segue.

Notação: Dada uma função $\phi \in L_1(\Omega \times (-h, T), \mathbb{R})$, denotamos por $\phi_{\bar{h}}$ a função definida em Q_T por

$$\phi_{\bar{h}}(x, t) = \frac{1}{h} \int_{t-h}^t u(x, \tau) d\tau. \quad (3)$$

Dada uma função $u \in L_1(Q_T, \mathbb{R})$, denotamos por u_h a função definida em $\Omega \times (0, T-h)$ por

$$u_h(x, t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(x, \tau) d\tau. \quad (4)$$

Estas funções verificam as seguintes propriedades:

1. $\phi_{\bar{h}}$ e u_h são diferenciáveis;
2. Se $\phi \in L_p(\Omega \times (-h, T), \mathbb{R})$ e $u \in L_p(Q_T, \mathbb{R})$, então $\phi_{\bar{h}}$ e u_h são elementos de $L_p(Q_T, \mathbb{R})$ e $L_p(\Omega \times (0, T-h), \mathbb{R})$ e convergem para ϕ e u , respetivamente, nos respetivos espaços;
3. Se ϕ se anula em $(T-h, T)$ e $(-h, 0)$, então

$$\int_0^T \int_{\Omega} u \phi_{\bar{h}} dx dt = \int_0^{T-h} \int_{\Omega} u_h \phi dx dt.$$

A propriedade 1. é consequência do Teorema da Diferenciação de Lebesgue, a propriedade 2. pode ser demonstrada de forma análoga ao que foi feito no Lema 2.5, 4., enquanto que a propriedade 3. consiste apenas numa mudança na ordem de integração.

3 Equações Diferenciais Parabólicas

Nesta secção apresentamos alguns resultados sobre equações diferenciais parabólicas já conhecidos.

3.1 Equações Parabólicas

Consideremos a equação linear

$$u_t - \mathcal{M}u = \sum_{i=1}^n D_{x_i} f_i - f \quad (5)$$

e o problema

$$\left. \begin{aligned} u_t - \mathcal{M}u &= \sum_{i=1}^n D_{x_i} f_i - f, \\ u(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) &= \psi_0(x). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

onde

$$\mathcal{M}u = \sum_{i=1}^n D_{x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_j} + a_i(x, t) u \right) - \sum_{i=1}^n b_i(x, t) u_{x_i} - a(x, t) u,$$

satisfazendo a condição de parabolicidade

$$\nu_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \leq \nu_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \nu_1, \nu_2 = (\text{const}) > 0. \quad (7)$$

Sejam q e r números reais arbitrários satisfazendo as condições

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} + \frac{n}{2q} &= 1, \\ q &\in \left(\frac{n}{2}, \infty \right], r \in [1, \infty), \text{ se } n \geq 2, \\ q &\in [1, \infty], r \in [1, 2], \text{ se } n = 1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Assumamos que as condições

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i^2 \right\|_{L_{q,r}(Q_T, \mathbb{R})} \leq \mu_1, \quad \left\| \sum_{i=1}^n b_i^2 \right\|_{L_{q,r}(Q_T, \mathbb{R})} \leq \mu_1, \quad \|a\|_{L_{q,r}(Q_T, \mathbb{R})} \leq \mu_1, \quad (9)$$

são satisfeitas. Assumamos também

$$\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})} \leq \mu_2, \quad \|f\|_{L_{q_1, r_1}(Q_T, \mathbb{R})} \leq \mu_2, \quad (10)$$

onde

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{r_1} + \frac{n}{2q_1} = 1 + \frac{n}{4}, \\ & q_1 \in \left[\frac{2n}{n+2}, 2 \right], r_1 \in [1, 2], \text{ se } n \geq 3, \\ & q_1 \in (1, 2], r_1 \in [1, 2), \text{ se } n = 2, \\ & q_1 \in [1, 2], r_1 \in \left[1, \frac{4}{3} \right], \text{ se } n = 1. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Usaremos a definição de solução da equação (5) e do problema (6) introduzida e estudada por Ladyzenskaja e sua escola (ver [5]).

Tomemos

$$I(t_i; u, \phi) = \int_{\Omega} u(x, t_i) \phi(x, t_i) dx - \int_0^{t_i} \int_{\Omega} u \phi_t dx dt + \int_0^{t_i} (\mathcal{L}_1(u, \phi) + \mathcal{L}_2(f, \phi)) dt,$$

onde

$$\mathcal{L}_1(u, \phi) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} u_{x_j} + a_i u \right) \phi_{x_i} + \left(\sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + a u \right) \phi \right) dx$$

e

$$\mathcal{L}_2(f, \phi) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n f_i \phi_{x_i} + f \phi \right) dx.$$

Definição 3.1. Dizemos que uma função $u \in V_2(Q_T)$ é solução da equação (5) se, para todo $t_1 \in [0, T]$, verifica a igualdade

$$I(t_1; u, \phi) = 0,$$

para todo $\phi \in W_2^{1,1}$ tal que $\phi(x, 0) = 0$ e $\phi(x, t) = 0$, $(x, t) \in (\partial\Omega \times [0, T])$. Dizemos que $u \in V_2(Q_T)$ é solução do problema (6) se, $u(x, t) = 0$, $(x, t) \in (\partial\Omega \times [0, T])$ e, para todo $t_1 \in [0, T]$, verifica a igualdade

$$I(t_1; u, \phi) = \int_{\Omega} \psi_0(x) \phi(x, 0) dx, \quad (12)$$

para todo $\phi \in W_2^{1,1}$ tal que $\phi(x, t) = 0$, $(x, t) \in (\partial\Omega \times [0, T])$.

Para esta a definição de solução do problema, os teoremas que se seguem garantem a existência e unicidade de solução, bem como a dependência contínua dos dados do problema, e ainda a possibilidade de usar um princípio do máximo (Teorema 3.8) que permitirá encontrar um majorante para a solução em termos das suas condições de fronteira.

3.2 Existência e Unicidade de Solução

A estimativa a priori que se segue permite-nos relacionar a norma da solução da equação (5) com as normas do seu valor inicial e dos coeficientes independentes da equação. Assim, é possível mostrar a impossibilidade de existência de duas soluções diferentes para o mesmo problema de valores iniciais.

Lema 3.1. *Consideremos $u \in V_2(Q_T)$ tal que $u(x, t) = 0$, $(x, t) \in (\partial\Omega \times [0, T])$ e satisfazendo, para quase todos $t_1, t_2 \in [0, T]$, incluindo $t_1 = 0$, a desigualdade*

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{L}_1(u, u) + \mathcal{L}_2(f, u)) dt \leq 0. \quad (13)$$

Então, a desigualdade

$$\|u\|_{V_2(Q_T)} \leq c \left[\|u(\cdot, 0)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})} + \|f\|_{L_{q_1, r_1}(Q_T, \mathbb{R})} \right] \quad (14)$$

verifica-se para algum $c > 0$.

Demonstração. Começemos por notar que a desigualdade

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{L}_1(u, u) + \mathcal{L}_2(f, u)) dt \leq 0$$

pode ser reescrita de forma equivalente como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j} u_{x_i} dx dt \\ & \leq - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n (a_i u + b_i u) u_{x_i} + a u^2 + \sum_{i=1}^n f_i u_{x_i} + f u \right) dx dt. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade (7) e a desigualdade de Young, obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \nu_1 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dx dt \\ & \leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(\frac{\nu_1}{2} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + \left(\frac{1}{\nu_1} \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) + |a| \right) u^2 + \left| \sum_{i=1}^n f_i u_{x_i} \right| + |fu| \right) dx dt. \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u^2 dx \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \nu_1 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dx dt \\ & \leq 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(\left(\frac{1}{\nu_1} \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) + |a| \right) u^2 + \left| \sum_{i=1}^n f_i u_{x_i} \right| + |fu| \right) dx dt. \end{aligned}$$

Denotemos por

$$\|\cdot\|_{q,r,t_1,t_2} = \left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} |\cdot|^r dx \right)^{r/q} dt \right)^{1/r}$$

e

$$\|\cdot\|_{V_2(Q_{t_1,t_2})} = \operatorname{ess\,sup}_{t_1 \leq t \leq t_2} \|\cdot\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} + \sum_{i=1}^n \|D_{x_i} \cdot\|_{2,2,t_1,t_2}.$$

Usando a desigualdade de Holder e o Lema 2.11 temos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\nu_1} \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) + |a| \right) u^2 dx dt & \leq \left\| \frac{1}{\nu_1} \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) + |a| \right\|_{q,r,t_1,t_2} \|u\|_{\bar{q},\bar{r},t_1,t_2}^2 \\ & \leq C^2 \left\| \frac{1}{\nu_1} \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) + |a| \right\|_{q,r,t_1,t_2} \|u\|_{V_2(Q_{t_1,t_2})}^2, \end{aligned}$$

onde $\bar{q} = \frac{2q}{q-1}$ e $\bar{r} = \frac{2r}{r-1}$,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^n f_i u_{x_i} \right| dx dt & \leq \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{2,2,t_1,t_2} \|u_{x_i}\|_{2,2,t_1,t_2} \\ & \leq \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{2,2,t_1,t_2} \|u\|_{V_2(Q_{t_1,t_2})} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |fu| dx dt & \leq \|f\|_{q_1,r_1,t_1,t_2} \|u\|_{\bar{q}_1,\bar{r}_1,t_1,t_2} \\ & \leq C \|f\|_{q_1,r_1,t_1,t_2} \|u\|_{V_2(Q_{t_1,t_2})} \end{aligned}$$

onde $\bar{q}_1 = \frac{q_1}{q_1-1}$ e $\bar{r}_1 = \frac{r_1}{r_1-1}$. Da desigualdade (9) obtemos

$$\left. \begin{aligned} & \|u(\cdot, t_2)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^2 + \nu_1 \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{2,2,t_1,t_2}^2 \\ & \leq \|u(\cdot, t_1)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^2 + 2C^2 \left\| \frac{1}{\nu_1} \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) + |a| \right\|_{q,r,t_1,t_2} \|u\|_{V_2(Q_{t_1,t_2})}^2 \\ & \quad + 2 \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{2,2,t_1,t_2} + C\|f\|_{q_1,r_1,t_1,t_2} \right) \|u\|_{V_2(Q_{t_1,t_2})}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Defina-se

$$\xi(t_1, t_2) = 2(n+1)^2 C^2 \left\| \frac{1}{\nu_1} \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) + |a| \right\|_{q,r,t_1,t_2}.$$

e

$$\mathcal{F}(t_1, t_2) = 2(n+1)^2 \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{2,2,t_1,t_2} + C\|f\|_{q_1,r_1,t_1,t_2} \right)$$

Ora, como

$$\|u(\cdot, t_2)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^2 + \nu_1 \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{2,2,t_1,t_2}^2 \geq \frac{1}{(n+1)^2} \left(\|u(\cdot, t_2)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} + \sqrt{\nu_1} \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{2,2,t_1,t_2} \right)^2$$

e uma vez que a desigualdade (15) se verifica para quase todos $t_1, t_2 \in [0, T]$, em particular temos

$$\min\{1, \nu_1\} \|u\|_{V_2(Q_{t_1,t_2})}^2 \leq (n+1)^2 \|u(\cdot, t_1)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^2 + \xi(t_1, t_2) \|u\|_{V_2(Q_{t_1,t_2})}^2 + \mathcal{F}(t_1, t_2) \|u\|_{V_2(Q_{t_1,t_2})}.$$

Se $\xi(t_1, t_2) < \min\{1, \nu_1\}$, esta desigualdade dá-nos uma estimativa para $\|u\|_{V_2(Q_{t_1,t_2})}$ nas condições desejadas. Para obter essa estimativa em todo o intervalo $[0, T]$, vamos dividir-lo em intervalos $[0 = \tau_0, \tau_1], [\tau_1, \tau_2], \dots, [\tau_{s-1}, \tau_s = T]$, de tal forma que

$$\xi(\tau_{k-1}, \tau_k) \leq \frac{1}{2} \min\{1, \nu_1\}, \quad k = \overline{1, s}.$$

Assim, para $k = \overline{1, s}$ temos

$$\frac{\min\{1, \nu_1\}}{2} \|u\|_{V_2(Q_{\tau_{k-1}, \tau_k})}^2 \leq (n+1)^2 \|u(\cdot, \tau_{k-1})\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^2 + \mathcal{F}(\tau_{k-1}, \tau_k) \|u\|_{V_2(Q_{\tau_{k-1}, \tau_k})}.$$

Como, pela desigualdade de Young,

$$\mathcal{F}(\tau_{k-1}, \tau_k) \|u\|_{V_2(Q_{\tau_{k-1}, \tau_k})} \leq \frac{1}{\min\{1, \nu_1\}} \mathcal{F}(\tau_{k-1}, \tau_k)^2 + \frac{\min\{1, \nu_1\}}{4} \|u\|_{V_2(Q_{\tau_{k-1}, \tau_k})}^2,$$

temos

$$\frac{\min\{1, \nu_1\}}{4} \|u\|_{V_2(Q_{\tau_{k-1}, \tau_k})}^2 \leq (n+1)^2 \|u(\cdot, \tau_{k-1})\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^2 + \frac{1}{\min\{1, \nu_1\}} \mathcal{F}(\tau_{k-1}, \tau_k)^2.$$

Como

$$\|u\|_{V_2(Q_{\tau_{k-1}, \tau_k})} \geq \|u(\cdot, \tau_k)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})},$$

para concluirmos (14) basta provarmos que o número de intervalos da forma $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ é finito.

Ora, como

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^s \xi^r(t_1, t_2) &= (2(n+1)^2 C^2)^r \sum_{k=1}^s \left\| \frac{1}{\nu_1} \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) + |a| \right\|_{q,r,t_1,t_2}^r \\ &= (2(n+1)^2 C^2)^r \left\| \frac{1}{\nu_1} \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) + |a| \right\|_{q,r,0,T}^r \end{aligned}$$

e cada uma das partições, exceto possivelmente a última, pode ser feita de forma a termos $\xi(t_1, t_2) \geq \min\{1, \nu_1\}/4$, temos

$$(s-1) \frac{\min\{1, \nu_1\}}{4} \leq (2(n+1)^2 C^2)^r \left\| \frac{1}{\nu_1} \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) + |a| \right\|_{q,r,0,T}^r$$

e daqui tiramos

$$s \leq \left(\frac{8(n+1)^2 C^2}{\min\{1, \nu_1\}} \right)^r \left\| \frac{1}{\nu_1} \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) + |a| \right\|_{q,r,0,T}^r + 1.$$

□

Lema 3.2. *Seja $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$ uma solução do problema (6). Então, a desigualdade*

$$\|u\|_{V_2(Q_T)} \leq c \left[\|\psi_0\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})} + \|f\|_{L_{q_1, r_1}(Q_T, \mathbb{R})} \right] \quad (16)$$

verifica-se para algum $c > 0$.

Demonstração. Seja $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$ uma solução do problema (6). Consideremos $\phi \in W_2^{1,1}(\Omega \times (-h, T))$ tal que $\phi(x, t) = 0$, $(x, t) \in (\partial\Omega \times [0, T])$, $t < 0$ e $t > T - h$, e

$$\phi_{\bar{h}}(x, t) = \int_{t-h}^t \phi(x, \tau) d\tau$$

como em (3). Então, para todo $t_1 \in [0, T - h]$, verifica-se

$$I(t_1; u, \phi_{\bar{h}}) = \int_{\Omega} \psi_0(x) \phi_{\bar{h}}(x, 0) dx,$$

isto é,

$$\int_{\Omega} u(x, t_1) \phi_{\bar{h}}(x, t_1) dx - \int_0^{t_1} \int_{\Omega} u(\phi_{\bar{h}})_t dx dt + \int_0^{t_1} (\mathcal{L}_1(u, \phi_{\bar{h}}) + \mathcal{L}_2(f, \phi_{\bar{h}})) dt = \int_{\Omega} \psi_0(x) \phi_{\bar{h}}(x, 0) dx,$$

ou equivalentemente,

$$\int_{\Omega} u_h(x, t) \phi(x, t) dx \Big|_{t=0}^{t=t_1} - \int_0^{t_1} \int_{\Omega} u_h \phi_t dx dt + \int_0^{t_1} (\mathcal{L}_1(u_h, \phi) + \mathcal{L}_2(f_h, \phi)) dt = 0. \quad (17)$$

É claro que $u_h \in W_2^{1,1}(Q_T)$. Além disso, como u é solução do problema (6), $u_h(x, t) = 0$, $(x, t) \in (\partial\Omega \times [0, T])$. Assim, tomando $\phi = u_h$, temos

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u_h^2(x, t) dx \Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_0^{t_1} (\mathcal{L}_1(u_h, u_h) + \mathcal{L}_2(f, u_h)) dt = 0,$$

e, uma vez que u_h converge para u em $L_2(Q_T)$, temos

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(x, t) dx \Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_0^{t_1} (\mathcal{L}_1(u, u) + \mathcal{L}_2(f, u)) dt = 0. \quad (18)$$

Logo, pelo Lema anterior, u verifica a estimativa (16). \square

Teorema 3.3. *O problema (6) não pode ter duas soluções distintas em $V_2^{1,0}(Q_T)$.*

Demonstração. Sejam $u, v \in V_2^{1,0}(Q_T)$ duas soluções do problema (6). Então, a função $w = u - v \in V_2^{1,0}(Q_T)$ é também solução do problema (6) com $\psi_0 \equiv f_i \equiv f \equiv 0$. Logo, pelo lema anterior, $w = 0$. \square

Usando o método de Galerkin demonstraremos a existência de solução do problema (6). Em seguida, vamos verificar que, de facto, as condições (7)-(11) nos garantem uma maior regularidade da solução do que a principio possa parecer.

No resto desta secção, denotaremos o produto interno em $L_2(\Omega, \mathbb{R})$ por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}$

Teorema 3.4. *Se $\psi_0 \in L_2(\Omega, \mathbb{R})$, então o problema (6) tem uma solução $u \in V_2(Q_T)$.*

Demonstração. Consideremos um sistema fundamental de funções $\xi_k \in W_2^1(\Omega)$, $k \in \{1, 2, \dots\}$, com $\xi_k(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$, ortonormadas em $L_2(\Omega, \mathbb{R})$. Vamos aproximar a solução do problema (6) através das funções da forma

$$u^N(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \xi_k(x),$$

onde $c_k^N(t) = \langle u^N, \xi_k \rangle_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}$ é determinado pelo sistema

$$\frac{d}{dt} \langle u^N, \xi_k \rangle_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} + \mathcal{L}_1(u^N, \xi_k) + \mathcal{L}_2(f, \xi_k) = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad (19)$$

$$c_k^N(0) = \langle \psi_0, \xi_k \rangle_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}. \quad (20)$$

Uma vez que o sistema é um sistema de EDOs lineares, a solução existe e é única em $[0, T]$. Vamos mostrar que a sucessão u^N é uniformemente limitada. Para isso, vamos multiplicar a equação (19) por c_k^N , somar em k e integrar de 0 a t_1 . Obtemos

$$\frac{1}{2} \|u^N\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^2 \Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_0^{t_1} (\mathcal{L}_1(u^N, u^N) + \mathcal{L}_2(u^N, u^N)) dt = 0.$$

Pelo Lema 3.1, e uma vez que

$$\|u^N(x, 0)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^2 = \sum_{k=1}^N (c_k^N(0))^2 \leq \|\psi_0\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^2$$

temos uma estimativa para a norma de u^N em $V_2(Q_T)$ que não depende de N . Mais, uma vez que, para todo $t \in [0, T]$, se tem $\|u^N\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} \leq \|u^N\|_{V_2(Q_T)}$, a mesma estimativa vale para $\left(\sum_{k=1}^N |c_k^N(t)|^2\right)^{1/2}$. Fixemos k arbitrário e $N \geq k$. Integrando a igualdade (19) de t a $t + \Delta t$, obtemos

$$|c_k^N(t + \Delta t) - c_k^N(t)| \leq \int_t^{t+\Delta t} (|\mathcal{L}_1(u^N, \xi_k)| + |\mathcal{L}_2(f, \xi_k)|) dt.$$

Considerando as estimativas seguintes

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j}^N(\xi_k)_{x_i} dx dt \leq \nu_2 \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n |u_{x_j}^N(\xi_k)_{x_i}| dx dt \\ & \leq \nu_2 \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}^N\|_{2,2,t,t+\Delta t} \|(\xi_k)_{x_i}\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} \leq \nu_2 \sqrt{\Delta t} \|u^N\|_{V_2(Q_{t,t+\Delta t})} \sum_{i=1}^n \|(\xi_k)_{x_i}\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i u^N (\xi_k)_{x_i} dx dt &\leq \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} u^N \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n (\xi_k)_{x_i}^2 \right)^{1/2} dx dt \\
&\leq \sqrt{\Delta t} \left\| \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \right\|_{2q, 2r, t, t+\Delta t} \|u^N\|_{\bar{q}, \bar{r}, t, t+\Delta t} \left(\sum_{i=1}^n \|(\xi_k)_{x_i}\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{\Delta t} \left\| \sum_{i=1}^n a_i^2 \right\|_{q, r, t, t+\Delta t}^{1/2} \|u^N\|_{V_2(Q_{t, t+\Delta t})} \sum_{i=1}^n \|(\xi_k)_{x_i}\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} \\
&\leq \sqrt{\Delta t} \sqrt{\mu_1} \|u^N\|_{V_2(Q_{t, t+\Delta t})} \sum_{i=1}^n \|(\xi_k)_{x_i}\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}^N \xi_k dx dt &\leq \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n (u_{x_i}^N)^2 \right)^{1/2} \xi_k dx dt \\
&\leq \bar{\sqrt{\Delta t}} \left\| \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \right\|_{2q, 2r, t, t+\Delta t} \left(\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}^N\|_{2, 2, t, t+\Delta t}^2 \right)^{1/2} \|\xi_k\|_{L_{\bar{q}}(\Omega, \mathbb{R})} \\
&\leq \bar{\sqrt{\Delta t}} \left\| \sum_{i=1}^n b_i^2 \right\|_{q, r, t, t+\Delta t}^{1/2} \|u^N\|_{V_2(Q_{t, t+\Delta t})} \|\xi_k\|_{L_{\bar{q}}(\Omega, \mathbb{R})} \\
&\leq \bar{\sqrt{\Delta t}} \sqrt{\mu_1} \|u^N\|_{V_2(Q_{t, t+\Delta t})} \|\xi_k\|_{L_{\bar{q}}(\Omega, \mathbb{R})},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} a u^N \xi_k dx dt &\leq \bar{\sqrt{\Delta t}} \|a\|_{q, r, t, t+\Delta t} \|u^N\|_{\bar{q}, \bar{r}, t, t+\Delta t} \|\xi_k\|_{L_{\bar{q}}(\Omega, \mathbb{R})} \\
&\leq \bar{\sqrt{\Delta t}} \mu_1 \|u^N\|_{V_2(Q_{t, t+\Delta t})} \|\xi_k\|_{L_{\bar{q}}(\Omega, \mathbb{R})},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n f_i (\xi_k)_{x_i} dx dt &\leq \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n f_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n (\xi_k)_{x_i}^2 \right)^{1/2} dx dt \\
&\leq \sqrt{\Delta t} \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{2, 2, t, \Delta t}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|(\xi_k)_{x_i}\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{\Delta t} \mu_2 \sum_{i=1}^n \|(\xi_k)_{x_i}\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})},
\end{aligned}$$

e

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} f \xi_k dx dt \leq \bar{\sqrt{\Delta t}} \|f\|_{q_1, r_1, t, t+\Delta t} \|\xi_k\|_{L_{\bar{q}_1}(\Omega, \mathbb{R})} \leq \bar{\sqrt{\Delta t}} \mu_2 \|\xi_k\|_{L_{\bar{q}_1}(\Omega, \mathbb{R})},$$

onde $\bar{q} = \frac{2q}{q-1}$, $\bar{r} = \frac{2r}{r-1}$, $\bar{q}_1 = \frac{q_1}{q_1-1}$ e $\bar{r}_1 = \frac{r_1}{r_1-1}$, temos uma estimativa para $|c_k^N(t + \Delta t) - c_k^N(t)|$ em termos de Δt e normas de funções conhecidas. Para provar que esta estimativa tende para 0 quando $\Delta t \rightarrow 0$, basta provar que $\|\xi_k\|_{L_{\bar{q}}(\Omega, \mathbb{R})} < \infty$ e $\|\xi_k\|_{L_{\bar{q}_1}(\Omega, \mathbb{R})} < \infty$. Isto segue do Lema 2.11, uma vez que $\|\xi_k\|_{V_2(Q_T)} = 1 + T \sum_{i=1}^n \|(\xi_k)_{x_i}\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} < \infty$. Concluímos então que a sucessão c_k^N é equicontínua e, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma função contínua c_k e uma subsucessão $c_k^{N_p}$ de c_k^N tal que $c_k^{N_p}$ converge uniformemente em $[0, T]$ para c_k . Estas funções determinam uma função $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \xi_k(x)$. A sucessão $u^{N_p} = \sum_{k=1}^{N_p} c_k^{N_p}(t) \xi_k(x)$ converge fracamente em $L_2(\Omega, \mathbb{R})$ e uniformemente na variável t para a função u . Notemos que se φ é uma função em $L_2(\Omega, \mathbb{R})$, então

$$\langle u^{N_p} - u, \varphi \rangle_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} = \left\langle u^{N_p} - u, \sum_{i=1}^s \varphi_i \xi_i \right\rangle_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} + \left\langle u^{N_p} - u, \sum_{i=s+1}^{\infty} \varphi_i \xi_i \right\rangle_{L_2(\Omega, \mathbb{R})},$$

onde $\varphi_i = \langle \varphi, \xi_i \rangle_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}$. Temos

$$\begin{aligned} \left| \left\langle u^{N_p} - u, \sum_{i=s+1}^{\infty} \varphi_i \xi_i \right\rangle_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} \right| &\leq \|u^{N_p} - u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} \left\| \sum_{i=s+1}^{\infty} \varphi_i \xi_i \right\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} \\ &= \|u^{N_p} - u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} \left(\sum_{i=s+1}^{\infty} \varphi_i^2 \right)^{1/2} \leq K \left(\sum_{i=s+1}^{\infty} \varphi_i^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

onde K não depende de N_p . Para s suficientemente grande, podemos fazer o último termo desta desigualdade inferior a qualquer $\varepsilon > 0$. Além disso, sem perda de generalidade, tomando $N_p > s$, temos

$$\begin{aligned} \left| \left\langle u^{N_p} - u, \sum_{i=1}^s \varphi_i \xi_i \right\rangle_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} \right| &= \left| \sum_{i=1}^s \langle (c_i^{N_p}(t) - c_i(t)) \xi_i, \varphi_i \xi_i \rangle_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^s |c_i^{N_p}(t) - c_i(t)| |\varphi_i|. \end{aligned}$$

Quando $N_p \rightarrow \infty$, esta quantidade também tende para zero. Logo, $\langle u^{N_p} - u, \varphi \rangle_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}$ pode ser feito tão pequeno quanto se queira, desde que N_p seja suficientemente grande. Como $c_k^{N_p}$ converge uniformemente para c_k , o mesmo raciocínio pode ser feito para provar que u^{N_p} converge fracamente em $L_2(Q_T, \mathbb{R})$ e uniformemente na variável t para a função u . Uma

vez que u^{N_p} é limitada em $V_2(Q_T)$, as suas derivadas também o são em $L_2(Q_T, \mathbb{R})$. Assim, podemos escolher uma subseqüência de u^{N_p} tal que as suas derivadas convergem fracamente.

Pelo Lema 2.2, elas convergem para as derivadas de u . Ora, temos

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (c_i(t))^2 \right)^{1/2} = \lim_{N_p \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{N_p} (c_i^{N_p}(t))^2 \right)^{1/2} < \infty$$

e

$$\|u_{x_i}\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})} \leq \sup_{N_p \in \mathbb{N}} \|u_{x_i}^{N_p}\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})} < \infty.$$

Logo, $u \in V_2(Q_T)$. Vamos agora provar que u é solução do problema (6). Consideremos $d_k(t)$ uma seqüência de funções suaves. Multiplicando a equação (19) por d_k , somando em k de 1 a $N' \leq N$ e integrando de 0 a t_1 , obtemos

$$I(t_1; u^N, \Phi_{N'}) = \int_{\Omega} u^N(x, 0) \Phi_{N'}(x, 0) dx,$$

onde $\Phi_{N'}(x, t) = \sum_{i=1}^{N'} d_i(t) \xi_i(x)$. Uma vez que todas as funções desta igualdade são elementos de $L_2(\Omega, \mathbb{R})$ (pode ser verificado recorrendo às estimativas apresentadas acima) e que u^{N_p} converge fracamente para u em $L_2(\Omega)$ e uniformemente em t , podemos passar ao limite referente à seqüência u^{N_p} , obtendo

$$I(t_1; u, \Phi_{N'}) = \int_{\Omega} \psi_0 \Phi_{N'}(x, 0) dx.$$

Como qualquer função em $W_2^{1,1}(Q_T)$ pode ser aproximada por funções do tipo $\Phi_{N'}(x, t)$, u é solução do problema (6). \square

Tomemos agora $u \in V_2(Q_T)$ a solução do problema (6). Então, u verifica

$$\int_{\Omega} u \phi dx \Big|_{t=0}^{t=t_1} - \int_0^{t_1} \int_{\Omega} u \phi_t dx dt = \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n F_i \phi_{x_i} + F \phi \right) dx dt,$$

onde

$$F_i^p = \sum_{j=1}^n -a_{ij} u_{x_j} - a_i u - f_i$$

e

$$F^p = - \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} - a u - f.$$

Ora, uma vez que

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_{ij} u_{x_j} \right\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})} \leq \nu_2 \left\| \sum_{j=1}^n u_{x_j} \right\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})} \leq \nu_2 \|u\|_{V_2(Q_T)}, \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \|a_i u\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})} &\leq \|a_i\|_{L_{2q, 2r}(Q_T, \mathbb{R})} \|u\|_{L_{\bar{q}, \bar{r}}(Q_T, \mathbb{R})} \\ &= \|a_i^2\|_{L_{q, r}(Q_T, \mathbb{R})}^{1/2} \|u\|_{V_2(Q_T, \mathbb{R})} \leq \sqrt{\mu_1} \|u\|_{V_2(Q_T)}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\|b_i u_{x_i}\|_{L_{q_1, r_1}(Q_T, \mathbb{R})} \leq \|b_i\|_{L_{\bar{q}_1, \bar{r}_1}(Q_T, \mathbb{R})} \|u_{x_i}\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})} \leq \mu_1 \|u\|_{V_2(Q_T)} \quad (23)$$

e

$$\|a u\|_{L_{q_1, r_1}(Q_T, \mathbb{R})} \leq \|a\|_{L_{\bar{q}_1, \bar{r}_1}(Q_T, \mathbb{R})} \|u\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})} \leq \mu_1 \sqrt{T} \|u\|_{V_2(Q_T)}, \quad (24)$$

onde $\bar{q}_1 = \frac{2q_1}{2-q_1}$ e $\bar{r}_1 = \frac{2r_1}{2-r_1}$ satisfazem a condição (8), F_i e F satisfazem a condição (11).

Se, adicionalmente, tivermos $\phi(x, T) = 0$, então u verifica a equação

$$-\int_{\Omega} \psi_0 \phi(x, 0) dx - \iint_{Q_T} u \phi_t dx dt = \iint_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^n F_i \phi_{x_i} + F \phi \right) dx dt, \quad (25)$$

O Lema que se segue garante-nos a regularidade de uma função nestas condições.

Lema 3.5. *Seja $u \in V_2(Q_T)$ uma função que verifica $u(x, t) = 0$, $(x, t) \in (\partial\Omega \times [0, T])$ e a equação (25), para todo $\phi \in W_2^{1,1}(\Omega)$ tal que $\phi(x, T) = 0$ e $\phi(x, t) = 0$, $(x, t) \in (\partial\Omega \times [0, T])$, onde F_i e F satisfazem (11). Então $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$.*

Demonstração. Começemos por denotar por Q o conjunto $\Omega \times (-\infty, \infty)$ e consideremos u^* , F_i^* e F^* os prolongamentos de u , F_i e F , respetivamente, definidos por

$$u^*(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & t \in [0, T] \\ u(x, -t), & t \in [-T, 0] \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

$$F_i^*(x, t) = \begin{cases} F_i(x, t), & t \in [0, T] \\ -F_i(x, -t), & t \in [-T, 0] \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

$$F^*(x, t) = \begin{cases} F(u, t), & t \in [0, T] \\ -F(x, -t), & t \in [-T, 0) \\ 0, & |t| > T \end{cases} .$$

Temos então

$$- \iint_Q u^* \phi_t dx dt = \iint_Q \left(\sum_{i=1}^n F_i^* \phi_{x_i} + F^* \phi \right) dx dt,$$

para todo $\phi \in W_2^{1,1}(Q)$ tal que $\phi(x, t) = 0$, $(x, t) \in (\partial\Omega \times (-\infty, \infty))$.

Consideremos $\phi(x, t) = \chi(t)\xi(x)$, onde $\chi(t)$ é uma função suave que se anula para $|t| \geq T$ e $\xi(x) \in W_2^1(\Omega)$, anula-se em $\partial\Omega$, e $\phi_{\bar{h}}(x, t) = \int_{t-h}^t \phi(x, \tau) d\tau$, como em (3). Temos

$$\iint_Q u^* \phi_{\bar{h}} dx dt = \iint_Q u_h^* \phi dx dt.$$

Assim, temos

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \chi_t \int_{\Omega} u_h^* \xi dx dt = \int_{-\infty}^{\infty} \chi \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n (F_i^*)_h \xi_{x_i} + F_h^* \xi \right) dx dt.$$

Por definição de derivada, temos então

$$\int_{\Omega} (u_h^*)_t \xi dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_h^* \xi dx = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n (F_i^*)_h \xi_{x_i} + F_h^* \xi \right) dx,$$

para todo $\xi \in W_2^1(\Omega)$ tal que $\xi(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$. Por linearidade dos integrais, obtemos

$$\int_{\Omega} ((u_{h_1}^*)_t - (u_{h_2}^*)_t) \phi dx = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n ((F_i^*)_{h_1} - (F_i^*)_{h_2}) \phi_{x_i} + (F_{h_1}^* - F_{h_2}^*) \phi \right) dx,$$

para todo $\phi \in W_2^{1,1}(Q)$ tal que $\phi(x, t) = 0$, $(x, t) \in (\partial\Omega \times (-\infty, \infty))$. Em particular, tomando $\phi = u_{h_1}^* - u_{h_2}^*$, temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u_{h_1}^* - u_{h_2}^*)^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n ((F_i^*)_{h_1} - (F_i^*)_{h_2}) (u_{h_1}^* - u_{h_2}^*)_{x_i} + (F_{h_1}^* - F_{h_2}^*) (u_{h_1}^* - u_{h_2}^*) \right) dx, \end{aligned}$$

Integrando ambos os membros de $-\infty$ a t , onde t é arbitrário, obtemos

$$\frac{1}{2} \|u_{h_1}^*(\cdot, t) - u_{h_2}^*(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}^2$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^t \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n ((F_i^*)_{h_1} - (F_i^*)_{h_2}) (u_{h_1}^* - u_{h_2}^*)_{x_i} + (F_{h_1}^* - F_{h_2}^*) (u_{h_1}^* - u_{h_2}^*) \right) dx dt \\
&\leq \| (F_i^*)_{h_1} - (F_i^*)_{h_2} \|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})} \| (u_{h_1}^*)_{x_i} - (u_{h_2}^*)_{x_i} \|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})} \\
&\quad + \| F_{h_1}^* - F_{h_2}^* \|_{L_{q_1, r_1}(Q_T, \mathbb{R})} \| u_{h_1}^* - u_{h_2}^* \|_{L_{\bar{q}, \bar{r}}(Q_T, \mathbb{R})} \\
&\leq (\| (F_i^*)_{h_1} - (F_i^*)_{h_2} \|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})} + \| F_{h_1}^* - F_{h_2}^* \|_{L_{q_1, r_1}(Q_T, \mathbb{R})}) \| u_{h_1}^* - u_{h_2}^* \|_{V_2(Q_T)} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Assim, como $L_2(\Omega, \mathbb{R})$ é completo, u_h^* é convergente em $L_2(\Omega, \mathbb{R})$, uniformemente em t . Logo, a função u^* é contínua na norma de $L_2(\Omega, \mathbb{R})$. \square

Segue diretamente do Lema anterior o seguinte Teorema.

Teorema 3.6. *A solução $u \in V_2(Q_T)$ do problema (6) pertence a $V_2^{1,0}(Q_T)$.*

3.3 Dependência Contínua dos Dados e Princípio do Máximo

Teorema 3.7. *Suponhamos que todos os problemas*

$$\left. \begin{aligned}
u_t - \mathcal{M}^p u &= \sum_{i=1}^n D_{x_i} f_i^p - f^p, \\
u(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\
u(x, 0) &= \psi_0^p(x),
\end{aligned} \right\}$$

onde

$$\mathcal{M}^p u = \sum_{i=1}^n D_{x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^p(x, t) u_{x_j} + a_i^p(x, t) u \right) - \sum_{i=1}^n b_i^p(x, t) u_{x_i} - a^p(x, t) u,$$

verificam as condições (7)-(11) para as mesmas constantes. Suponhamos ainda que os coeficientes a_{ij}^p são uniformemente limitados e convergem em quase toda a parte para a_{ij} e que os coeficientes a_i^p , b_i^p , a^p , f_i^p e f^p convergem nas respectivas normas de acordo com as condições (8)-(11) para a_i , b_i , a , f_i e f , respectivamente, e $\psi_0^p \in L_2(\Omega, \mathbb{R})$ converge em $L_2(\Omega, \mathbb{R})$ para ψ_0 . Então, as soluções $u^p \in V_2^{1,0}(Q_T)$ dos problemas convergem fortemente em $V_2^{1,0}(Q_T)$ para a solução u do problema (6).

Demonstração. Consideremos a diferença entre a identidade (12) para u^p e a identidade (12) para u . Fazendo $v^p = u^p - u$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v^p(x, t_1) \phi(x, t_1) dx - \int_0^{t_1} \int_{\Omega} v^m \phi_t dx dt + \int_0^{t_1} \mathcal{L}_1(v^p, \phi) dx dt \\ = & - \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (a_{ij}^p - a_{ij}) u_{x_j} + (a_i^p - a_i) u + f_i^p - f_i \right) \phi_{x_i} \right. \\ & \left. + \left(\sum_{i=1}^n (b_i^p - b_i) u_{x_i} + (a^p - a) u + f^p - f \right) \phi \right) dx dt + \int_{\Omega} (\psi^p(x) - \psi(x)) \phi(x, 0) dx \end{aligned}$$

Tomando

$$F_i^p = \sum_{j=1}^n (a_{ij}^p - a_{ij}) u_{x_j} + (a_i^p - a_i) u + f_i^p - f_i$$

e

$$F^p = \sum_{i=1}^n (b_i^p - b_i) u_{x_i} + (a^p - a) u + f^p - f,$$

v^p é solução do problema

$$\left. \begin{aligned} u_t - \mathcal{M}^p u &= \sum_{i=1}^n D_{x_i} F_i^p - F^p, \\ u(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) &= \psi_0^p(x) - \psi_0(x). \end{aligned} \right\}$$

Ora, pelas estimativas (21)-(24), o problema satisfaz as condições (7)-(11), e portanto, pelo Lema 3.2, v^p verifica

$$\|v^p\|_{V_2(Q_T)} \leq c \left[\|\psi_0^p - \psi_0\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})} + \sum_{i=1}^n \|F_i^p\|_{L_2(Q_T, \mathbb{R})} + \|F^p\|_{L_{q_1, r_1}(Q_T, \mathbb{R})} \right].$$

Assim, temos $\|v^p\|_{V_2(Q_T)} \rightarrow 0$ quando $p \rightarrow \infty$. □

Seja $\Gamma = (\partial\Omega \times [0, T]) \cup (\Omega \times \{0\})$.

Teorema 3.8. *Seja $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$ a solução da equação (5). Assumamos que as seguintes condições são satisfeitas:*

1. $a(x, t) \geq 0$,

2. $a_i = f_i = f = 0$.

Então,

$$\min\{0, \operatorname{ess\,inf}_{\Gamma} u(x, t)\} \leq u(x, t) \leq \max\{0, \operatorname{ess\,sup}_{\Gamma} u(x, t)\}$$

para quase todo (x, t) de Q_T .

Demonstração. Começemos por considerar a equação (17). Consideremos ainda a função $v_h = \max\{0, u_h - M_h\}$, onde $M_h = \max\{0, \operatorname{ess\,sup}_{\Gamma} u_h(x, t)\}$.

Para todo $t_1 \in [0, T]$, temos

$$\int_{\Omega} u_h(x, t_1) v_h(x, t_1) dx - \int_0^{t_1} \int_{\Omega} u_h (v_h)_t dx dt + \int_0^{t_1} \mathcal{L}_1(t_1, u_h, v_h) dt = 0.$$

Ora,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \int_{\Omega} u_h (v_h)_t dx dt &= \int_{\Omega} u_h v_h dx \Big|_{t=0}^{t=t_1} - \int_0^{t_1} \int_{\Omega} (u_h)_t v_h dx dt = \int_{\Omega} u_h v_h dx \Big|_{t=0}^{t=t_1} - \int_0^{t_1} \int_{\Omega} (v_h)_t v_h dx dt \\ &= \int_{\Omega} u_h v_h dx \Big|_{t=0}^{t=t_1} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} v_h^2 dx \Big|_{t=0}^{t=t_1}. \end{aligned}$$

Como $v_h(x, 0) = 0$, usando a desigualdade (7) e fazendo h tender para zero, obtemos

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2(x, t_1) dx + \nu_1 \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dx dt \leq - \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} v dx dt.$$

Uma vez que

$$- \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} v dx dt \leq \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \left(\frac{\nu_1}{2} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + \frac{1}{2\nu_1} \sum_{i=1}^n b_i^2 v^2 \right) dx dt$$

e

$$v_{x_i}^2 \leq u_{x_i}^2,$$

temos

$$\int_{\Omega} v^2(x, t_1) dx + \nu_1 \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dx dt \leq \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \frac{1}{\nu_1} \sum_{i=1}^n b_i^2 v^2 dx dt,$$

e assim,

$$\min\{1, \nu_1\} \|v\|_{V_2(Q_0, t_1)}^2 \leq \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \frac{1}{\nu_1} \sum_{i=1}^n b_i^2 v^2 dx dt.$$

Pelo Lema 2.11, temos ainda

$$\int_0^{t_1} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i^2 v^2 dx dt \leq C^2 \left\| \sum_{i=1}^n b_i^2 \right\|_{q,r,0,t_1} \|v\|_{V_2(Q_{0,t_1})}^2.$$

Logo,

$$\min\{1, \nu_1\} \|v\|_{V_2(Q_{0,t_1})}^2 \leq \frac{C^2}{\nu_1} \left\| \sum_{i=1}^n b_i^2 \right\|_{q,r,0,t_1} \|v\|_{V_2(Q_{0,t_1})}^2.$$

Se $\min\{1, \nu_1\} \geq \frac{C^2}{\nu_1} \left\| \sum_{i=1}^n b_i^2 \right\|_{q,r,0,t_1}$, então concluímos $\|v\|_{V_2(Q_{0,t_1})}^2 \leq 0$. Fazendo o mesmo para intervalos da forma $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ temos $\|v\|_{V_2(Q_{\tau_k, \tau_{k+1}})}^2 \leq 0$. Como esses intervalos podem ser feitos em número finito e de forma a cobrir $[0, T]$, temos $\|v\|_{V_2(Q_{0,T})}^2 \leq 0$. Assim, $u(x, t) \leq \max\{0, \text{ess sup}_U u(x, t)\}$. A prova da outra desigualdade é feita verificando que $-u$ também é solução da equação (5). \square

4 Programação Convexa

No que se segue, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\|\cdot\|$ representam o produto interno Euclidiano e a norma Euclideana em \mathbb{R}^n , respetivamente. Dadas duas matrizes quadradas de ordem n , A e B , escreveremos $A \preceq B$ para significar $\langle Au, u \rangle \leq \langle Bu, u \rangle$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

4.1 Funções Auto-concordantes

Consideremos f uma função convexa fechada, pelo menos 3 vezes diferenciável e com domínio aberto. Dado um ponto $x \in \text{dom } f$ e uma direção $u \in \mathbb{R}^n$, consideramos a seguinte notação:

Notação: Denotamos

$$Df(x)[u] = \langle f'(x), u \rangle,$$

$$D^2f(x)[u, u] = \langle f''(x)u, u \rangle,$$

$$D^3f(x)[u, u, u] = \langle f'''(x)[u]u, u \rangle,$$

onde $f'''(x)[u] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} (f''(x + \alpha u) - f''(x))$.

Definição 4.1. Dizemos que a função f é uma função auto-concordante se a desigualdade

$$|D^3f(x)[u, u, u]| \leq M_f (D^2f(x)[u, u])^{3/2}$$

se verifica para todo $x \in \text{dom } f$ e todo $u \in \mathbb{R}^n$, para alguma constante $M_f \geq 0$.

Exemplo 4.1. Consideremos a função $f(x) = \alpha + \langle a, x \rangle + \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle$, com $A = A^T \geq 0$. Uma vez que $f''(x) = A$ e $f'''(x) = 0$, a função f é auto-concordante com constante $M_f = 0$.

Exemplo 4.2. Consideremos a função $f(x) = -\ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$. Uma vez que $f''(x) = \frac{1}{x^2}$ e $f'''(x) = -\frac{2}{x^3}$, a função f é auto-concordante com constante $M_f = 2$.

Exemplo 4.3. Consideremos a função $f(x) = -\ln \phi(x)$, onde $\phi(x) = \alpha + \langle a, x \rangle - \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle$, com $A = A^T \geq 0$. Uma vez que

$$Df(x)[u] = -\frac{1}{\phi(x)} (\langle a, u \rangle - \langle Ax, u \rangle),$$

$$D^2f(x)[u, u] = \frac{1}{\phi(x)} \langle Au, u \rangle + \frac{1}{\phi^2(x)} (\langle a, u \rangle - \langle Ax, u \rangle)^2$$

e

$$D^3f(x)[u, u, u] = -\frac{3}{\phi^2(x)} \langle Au, u \rangle (\langle a, u \rangle - \langle Ax, u \rangle) - \frac{2}{\phi^3(x)} (\langle a, u \rangle - \langle Ax, u \rangle)^3,$$

tomando $r = \frac{1}{\phi(x)} (\langle a, u \rangle - \langle Ax, u \rangle)$ e $s = \frac{1}{\phi(x)} \langle Au, u \rangle$, temos

$$\frac{|D^3f(x)[u, u, u]|}{(D^2f(x)[u, u])^{3/2}} = \frac{|3rs + 2r^3|}{(s + r^2)^{3/2}} \leq \frac{3|r|s + 2|r|^3}{(s + r^2)^{3/2}}.$$

Assumindo $r \neq 0$ e tomando $k = s/r^2$, obtemos

$$\frac{|D^3f(x)[u, u, u]|}{(D^2f(x)[u, u])^{3/2}} \leq \frac{\frac{1}{|r|^3}(3|r|s + 2|r|^3)}{\frac{1}{|r|^3}(s + r^2)^{3/2}} = \frac{3k + 2}{(k + 1)^{3/2}}.$$

Uma vez que o máximo da função $k \mapsto \frac{3k+2}{(k+1)^{3/2}}$ é atingido quando $k = 0$, temos

$$\frac{|D^3f(x)[u, u, u]|}{(D^2f(x)[u, u])^{3/2}} \leq 2.$$

Logo, a função f é auto-concordante com constante $M_f = 2$.

Proposição 4.1. Sejam f_1 e f_2 duas funções auto-concordantes com constantes M_{f_1} e M_{f_2} , respectivamente, e $\alpha, \beta > 0$. Então, a função $f = \alpha f_1 + \beta f_2$ é auto-concordante com constante $M_f = \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} M_{f_1}, \frac{1}{\sqrt{\beta}} M_{f_2} \right\}$.

Demonstração. Começemos por notar que f é convexa e fechada. Assim, fixando $x \in \text{dom } f$ e $u \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\frac{|D^3f(x)[u, u, u]|}{(D^2f(x)[u, u])^{3/2}} \leq \frac{\alpha M_{f_1} (D^2f_1(x)[u, u])^{3/2} + \beta M_{f_2} (D^2f_2(x)[u, u])^{3/2}}{(\alpha D^2f_1(x)[u, u] + \beta D^2f_2(x)[u, u])^{3/2}}$$

Fazendo a mudança de variável $D^2f_1(x)[u, u] = tw_1$ e $D^2f_2(x)[u, u] = tw_2$ e tomando t de modo a que $\alpha w_1 + \beta w_2 = 1$, obtemos

$$\frac{|D^3f(x)[u, u, u]|}{(D^2f(x)[u, u])^{3/2}} \leq \frac{\alpha M_{f_1} (tw_1)^{3/2} + \beta M_{f_2} (tw_2)^{3/2}}{(\alpha tw_1 + \beta tw_2)^{3/2}} = \frac{\alpha M_{f_1} w_1^{3/2} + \beta M_{f_2} w_2^{3/2}}{(\alpha w_1 + \beta w_2)^{3/2}}$$

$$= \alpha M_{f_1} w_1^{3/2} + \beta M_{f_2} w_2^{3/2} = \frac{M_{f_1}}{\sqrt{\alpha}} (\alpha w_1)^{3/2} + \frac{M_{f_2}}{\sqrt{\beta}} (1 - \alpha w_1)^{3/2}$$

Esta última expressão é uma função convexa na variável $w_1 \in \left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$ e, por isso, toma o seu máximo num dos extremos do intervalo, ficando provado o resultado. \square

Proposição 4.2. *Sejam f uma função auto-concordante com constante M_f e $\mathcal{A}(x) = Ax + b$ um operador afim. Então, a função $g(x) = f(\mathcal{A}(x))$ é auto-concordante com constante $M_g = M_f$.*

Demonstração. Começemos por notar que g é convexa, uma vez que

$$\begin{aligned} g(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= f(\alpha Ax + (1 - \alpha)Ay + b) = f(\alpha(Ax + b) + (1 - \alpha)(Ay + b)) \\ &\leq \alpha f(Ax + b) + (1 - \alpha)f(Ay + b) = \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y). \end{aligned}$$

Alem disso, por continuidade, g também é fechada.

Uma vez que

$$\begin{aligned} Dg(x)[u] &= \langle f'(\mathcal{A}x), Au \rangle = Df(\mathcal{A}x)[Au], \\ D^2g(x)[u, u] &= \langle f''(\mathcal{A}x)Au, Au \rangle = D^2f(\mathcal{A}x)[Au, Au], \end{aligned}$$

e

$$D^3g(x)[u, u, u] = \langle D^3f(\mathcal{A}x)[Au]Au, Au \rangle = D^3f(\mathcal{A}x)[Au, Au, Au],$$

temos

$$\begin{aligned} |D^3g(x)[u, u, u]| &= |D^3f(\mathcal{A}x)[Au, Au, Au]| \\ &\leq M_f (D^2f(\mathcal{A}x)[Au, Au])^{3/2} = M_f (D^2g(x)[u, u])^{3/2}. \end{aligned}$$

\square

Lema 4.3. *Sejam f uma função auto-concordante e $x \in \partial \text{dom } f$. Se $x_k \in \text{dom } f$ é tal que $x_k \rightarrow x$, então $f(x_k) \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Começemos por notar que, uma vez que f é convexa, temos $f(x_k) \leq f(x_0) + \langle f'(x_0), x_k - x_0 \rangle$. Como $\langle f'(x_0), x_k - x_0 \rangle$ converge para $\langle f'(x_0), x - x_0 \rangle$, a sucessão $f(x_k)$ é

minorada. Suponhamos que é também majorada. Então, existe uma sua subsequência $f(x_{k_p})$ convergente para um limite y . Assim, temos

$$(x_{k_p}, f(x_{k_p})) \rightarrow (x, y)$$

e, como f é fechada, (x, y) pertence ao epigrafo de f , o que é um absurdo, uma vez que $x \notin \text{dom } f$. Logo, $f(x_k)$ não pode ser majorada. \square

Definição 4.2. Seja f uma função auto-concordante. Dizemos que f é uma função auto-concordante padrão se $M_f = 2$.

Estamos interessados apenas nas funções f auto-concordantes padrão tais que f'' é não singular em todos os pontos. Neste caso, tomemos as seguintes notações:

$$\|u\|_x^f = \langle f''(x)u, u \rangle^{1/2},$$

$$\|u\|_x^{f*} = \langle [f''(x)]^{-1}u, u \rangle^{1/2}.$$

As aplicações $\|\cdot\|_x^f$ e $\|\cdot\|_x^{f*}$ estão bem definidas, uma vez que f é uma aplicação convexa e, portanto, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, tanto $f''(x)$ como a sua inversa são definidas positivas.

Lema 4.4. As aplicações $\|\cdot\|_x^f$ e $\|\cdot\|_x^{f*}$ são normas.

Demonstração. Começemos por notar que, por f'' ser estritamente positiva, temos $\|u\|_x^f \geq 0$ e $\|u\|_x^f = 0$ se e apenas se $u = 0$.

Tomando $u \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\|\alpha u\|_x^f = \langle f''(x)\alpha u, \alpha u \rangle^{1/2} = (\alpha^2 \langle f''(x)u, u \rangle)^{1/2} = |\alpha| \langle f''(x)u, u \rangle^{1/2} = |\alpha| \|u\|_x^f.$$

Finalmente, dados $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, uma vez que $f''(x)$ é simétrica, temos

$$0 \leq \langle f''(x)(u - \lambda v), u - \lambda v \rangle = \langle f''(x)u, u \rangle - 2\lambda \langle f''(x)u, v \rangle + \lambda^2 \langle f''(x)v, v \rangle.$$

Tomando $\lambda = \langle f''(x)u, v \rangle \langle f''(x)v, v \rangle^{-1}$, obtemos

$$0 \leq \langle f''(x)u, u \rangle - \langle f''(x)u, v \rangle^2 \langle f''(x)v, v \rangle^{-1},$$

ou equivalentemente,

$$\langle f''(x)u, v \rangle \leq \|u\|_x^f \|v\|_x^f$$

Logo,

$$\begin{aligned} (\|u + v\|_x^f)^2 &= \langle f''(x)(u + v), u + v \rangle = \langle f''(x)u, u \rangle + \langle f''(x)v, v \rangle + \langle f''(x)u, v \rangle + \langle f''(x)v, u \rangle \\ &\leq (\|u\|_x^f)^2 + (\|v\|_x^f)^2 + 2\|u\|_x^f \|v\|_x^f = (\|u\|_x^f + \|v\|_x^f)^2. \end{aligned}$$

De forma análoga se mostra que $\|\cdot\|_x^{f*}$ é norma. \square

Lema 4.5. *Seja $u \in \mathbb{R}^n$. Então, $\|u\|_x^{f*} = \max\{\langle u, v \rangle : \|v\|_x^f \leq 1\}$. Em particular, $\langle u, v \rangle \leq \|u\|_x^{f*} \|v\|_x^f$.*

Demonstração. Fixemos $u \in \mathbb{R}^n$. Usando o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar $\max\{\langle u, v \rangle : \|v\|_x^f \leq 1\}$, obtemos

$$u = \lambda \frac{1}{\|v\|_x^f} f''(x)v,$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange. Obviamente, o máximo de $\langle u, v \rangle$ é atingido para v com norma 1, pelo que podemos assumir que v é da forma

$$v = \frac{1}{\lambda} [f''(x)]^{-1} u, \quad \lambda = \|[f''(x)]^{-1} u\|_x^f.$$

Assim, temos

$$\max\{\langle u, v \rangle : \|v\|_x^f \leq 1\} = \frac{1}{\|[f''(x)]^{-1} u\|_x^f} \langle u, [f''(x)]^{-1} u \rangle = \|u\|_x^{f*}.$$

\square

De forma análoga é possível demonstrar que $\|u\|_x^f = \max\{\langle u, v \rangle : \|v\|_x^{f*} \leq 1\}$.

O lema que se segue é uma propriedade de todas as formas multilineares simétricas. Dele podemos concluir que toda a função auto-concordante f verifica a desigualdade

$$|D^3 f(x)[u_1, u_2, u_3]| \leq M_f \|u_1\|_x^f \|u_2\|_x^f \|u_3\|_x^f. \quad (26)$$

Lema 4.6. *Seja H uma forma k -linear simétrica sobre \mathbb{R}^n e A uma forma quadrática definida positiva sobre \mathbb{R}^n . Se*

$$|H(u, \dots, u)| \leq A(u, u)^{k/2}, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n,$$

então

$$|H(u_1, \dots, u_k)| \leq \prod_{i=1}^k A(u_i, u_i)^{1/2}, \quad \forall u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n,$$

Demonstração. A aplicação $A(\cdot, \cdot)$ é um produto escalar sobre \mathbb{R}^n . Assim, usaremos a notação $\langle u, v \rangle_A = A(u, v)$ e $\|u\|_A = A(u, u)^{1/2}$. É suficiente provar que

$$\omega = \sup\{|H(u_1, \dots, u_k)| : \|u_i\|_A \leq 1, i = \overline{1, k}\} = \sup\{|H(u, \dots, u)| : \|u\|_A \leq 1\}. \quad (27)$$

Para isso, chamaremos a uma coleção $\mathcal{E} = [E_1, \dots, E_k]$ de subespaços de dimensão 1 de \mathbb{R}^n um extremal se tivermos $|H(e_1, \dots, e_k)| = \omega$, onde $e_i \in E_i$ são vetores unitários. Pela linearidade de H , os extremais existem. Tomaremos \mathbf{E} o conjunto de todos os extremais. Assim, provar (27) é equivalente a provar que \mathbf{E} contém um extremal da forma $[E, \dots, E]$.

A prova deste Lema será feita por indução sobre k . Tomemos, por base, $k = 2$. Consideremos $[E_1, E_2] \in \mathbf{E}$, com $E_1 \neq E_2$, e Q a matriz simétrica definida por

$$\langle Qu, v \rangle_A = H(u, v).$$

Sejam $e_1 \in E_1$ e $e_2 \in E_2$ vetores unitários. Vamos provar que $[\mathbb{R}(e_1 + e_2), \mathbb{R}(e_1 + e_2)] \in \mathbf{E}$. Temos

$$\omega = |\langle Qe_1, e_2 \rangle_A| = \sup\{|\langle Qu, v \rangle_A| : \|u\|_A \leq 1, \|v\|_A \leq 1\}.$$

Consideremos P^+ , P^- e P' os subespaços de \mathbb{R}^n definidos por $P^+ = \{u \in \mathbb{R}^n : Qu = \omega u\}$, $P^- = \{u \in \mathbb{R}^n : Qu = -\omega u\}$ e $P' = (P^+ + P^-)^\perp$. Pelo menos um dos subespaços P^+ ou P^- não é nulo. Assim, temos $\|Qx\|_A \leq \omega' \|x\|_A$, $x \in P'$, onde $\omega' < \omega$. Uma vez que os espaços P^+ , P^- e P' são ortogonais dois a dois e invariantes para Q , temos

$$\begin{aligned} \omega &= |\langle Qe_1, e_2 \rangle_A| = |\langle Qe_1^+, e_2^+ \rangle_A + \langle Qe_1^-, e_2^- \rangle_A + \langle Qe_1', e_2' \rangle_A| \\ &= |\omega \langle e_1^+, e_2^+ \rangle_A - \omega \langle e_1^-, e_2^- \rangle_A + \langle Qe_1', e_2' \rangle_A| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \omega(\|e_1^+\|_A\|e_2^+\|_A + \|e_1^-\|_A\|e_2^-\|_A) + \|Qe_1'\|_A\|e_2'\|_A \\ &\leq \omega\left((\|e_1^+\|_A^2 + \|e_1^-\|_A^2)(\|e_2^+\|_A^2 + \|e_2^-\|_A^2)\right)^{1/2} + \omega'\|e_1'\|_A\|e_2'\|_A \leq \omega. \end{aligned}$$

Note-se que $\|e_i^+\|_A^2 + \|e_i^-\|_A^2 + \|e_i'\|_A^2 = \|e_i\|_A^2 = 1$, $i \in \{1, 2\}$. Segue então que as desigualdades acima são todas igualdades. Uma vez que ω' é estritamente menor que ω , concluímos que $\|e_1'\|_A = \|e_2'\|_A = 0$. Mais, das desigualdades acima, temos ainda

$$\begin{cases} \|e_1^+\|_A\|e_2^+\|_A + \|e_1^-\|_A\|e_2^-\|_A = 1 \\ \|e_1^+\|_A^2 + \|e_1^-\|_A^2 = 1 \\ \|e_2^+\|_A^2 + \|e_2^-\|_A^2 = 1 \end{cases},$$

de onde se conclui $\|e_1^+\|_A = \|e_2^+\|_A$ e $\|e_1^-\|_A = \|e_2^-\|_A$. Além disso, como $|\langle e_1^+, e_2^+ \rangle_A| + |\langle e_1^-, e_2^- \rangle_A| = 1$ e $\|e_1^+\|_A\|e_2^+\|_A + \|e_1^-\|_A\|e_2^-\|_A = 1$, temos $|\langle e_1^+, e_2^+ \rangle_A| = \|e_1^+\|_A\|e_2^+\|_A$ e $|\langle e_1^-, e_2^- \rangle_A| = \|e_1^-\|_A\|e_2^-\|_A$ e, portanto, $e_1^+ = \pm e_2^+$ e $e_1^- = \pm e_2^-$. Uma vez que $e_1 \neq e_2$, pois $E_1 \neq E_2$, temos apenas duas possibilidades

- (a) $e_1^+ = e_2^+$, $e_1^- = -e_2^-$;
- (b) $e_1^+ = -e_2^+$, $e_1^- = e_2^-$.

No caso (a), temos $e_1 + e_2 = 2e_1^+ \in E^+$. Logo, $[\mathbb{R}(e_1 + e_2), \mathbb{R}(e_1 + e_2)] \in \mathbf{E}$. No caso (b), temos $e_1 + e_2 = 2e_1^- \in E^-$. Logo, $[\mathbb{R}(e_1 + e_2), \mathbb{R}(e_1 + e_2)] \in \mathbf{E}$.

Consideremos agora que a igualdade (27) se verifica para todas as formas $(\ell - 1)$ -lineares simétricas sobre \mathbb{R}^n e vamos provar que também se verifica para as formas ℓ -lineares simétricas sobre \mathbb{R}^n .

Consideremos \mathbf{E}^* o subconjunto de \mathbf{E} formado pelos extremais da forma $[E, \dots, E, F, \dots, F]$, onde o espaço E aparece p vezes e o espaço F aparece q vezes (p e q dependem dos extremais considerados). Uma vez que, ficado $v \in \mathbb{R}^n$, a aplicação G_v definida por $G_v(u_1, \dots, u_{\ell-1}) = H(u_1, \dots, u_{\ell-1}, v)$ é uma forma $(\ell - 1)$ -linear simétrica sobre \mathbb{R}^n , pelo passo de indução, o conjunto \mathbf{E}^* contém um extremal da forma $[E, \dots, E, F]$. Logo, \mathbf{E}^* não é vazio. Seja $\mathcal{E} = [E, \dots, E, F, \dots, F]$, onde o espaço E aparece p vezes e o espaço F aparece q vezes. Sem perda de generalidade, suponhamos $p \leq q$. Designemos por $\alpha(\mathcal{E})$ o ângulo formado pelos

espaços E e F e $e \in E$ e $f \in F$ dois vetores com ângulo entre eles igual a $\alpha(\mathcal{E})$. Como feito no passo base, a coleção $\mathcal{E}' = [\mathbb{R}(e + f), \dots, \mathbb{R}(e + f), F, \dots, F]$, onde $\mathbb{R}(e + f)$ aparece $2p$ vezes e F aparece $q - p$ vezes, é também um extremal. Mais, $\alpha(\mathcal{E}') = \alpha(\mathcal{E})/2$. Logo, podemos encontrar uma sequência $\{\mathcal{E}_i \in \mathbf{E}^*\}$ tal que $\alpha(\mathcal{E}_i) \rightarrow 0$. Esta sequência converge para uma certa coleção $\mathcal{E} \in \mathbf{E}^*$ que verifica $\alpha(\mathcal{E}) = 0$. Logo, \mathcal{E} é um extremal do tipo $[E, \dots, E]$. \square

Para cada $x \in \text{dom } f$ e $u \in \mathbb{R}^n$, consideremos a função auxiliar

$$\phi(t) = \frac{1}{\|u\|_{x+tu}^f}. \quad (28)$$

Uma vez que

$$|\phi'(t)| = \frac{|D^3 f(x + tu)[u, u, u]|}{2(D^2 f(x + tu)[u, u])^{3/2}} \leq 1,$$

para todo $t \in \text{dom } \phi$, temos as desigualdades

$$\phi(0) - |t| \leq \phi(t) \leq \phi(0) + |t|. \quad (29)$$

Lema 4.7. *O domínio da função ϕ contém o intervalo $(-\phi(0), \phi(0))$.*

Demonstração. Uma vez que $f(x + tu) \rightarrow \infty$ quando $x + tu$ se aproxima da fronteira do domínio de f , o mesmo acontece com $\|u\|_{x+tu}^f = \langle f''(x + tu)u, u \rangle^{1/2}$. Assim, quando $x + tu$ se aproxima da fronteira do domínio de f , $\phi(t) \rightarrow 0$ e, pela desigualdade (29), temos $\phi(0) - |t| \leq \phi(t) \rightarrow 0$. \square

Lema 4.8. *Sejam $x \in \text{dom } f$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Se $\|y - x\|_x^f \leq 1$, então $y \in \text{dom } f$.*

Demonstração. Consideremos $u = y - x$ na função definida em (28). Se $\|y - x\|_x^f \leq 1$, então $\phi(0) \geq 1$. Logo, pelo Lema 4.7, $1 \in \text{dom } \phi$, ou seja, $y \in \text{dom } f$. \square

Proposição 4.9. *Para todos $x, y \in \text{dom } f$ a desigualdade*

$$\|y - x\|_y^f \geq \frac{\|y - x\|_x^f}{1 + \|y - x\|_x^f}$$

verifica-se. Se $\|y - x\|_x^f < 1$, então também se verifica a desigualdade

$$\|y - x\|_y^f \leq \frac{\|y - x\|_x^f}{1 - \|y - x\|_x^f}.$$

Demonstração. Consideremos a função ϕ definida em (28) e tomemos $u = y - x$. Pela desigualdade (29) temos $\phi(1) \leq \phi(0) + 1$. Ora $\phi(1) = \frac{1}{\|y - x\|_y^f}$ e $\phi(0) = \frac{1}{\|y - x\|_x^f}$, ou seja,

$$\frac{1}{\|y - x\|_y^f} \leq \frac{1}{\|y - x\|_x^f} + 1$$

ou, equivalentemente,

$$\|y - x\|_y^f \geq \frac{\|y - x\|_x^f}{1 + \|y - x\|_x^f}.$$

Se, adicionalmente, tivermos $\|y - x\|_x^f < 1$, então, neste caso, $\phi(0) > 1$ e também $\phi(1) \geq \phi(0) - 1$, ou seja,

$$\|y - x\|_y^f \leq \frac{\|y - x\|_x^f}{1 - \|y - x\|_x^f}.$$

□

Proposição 4.10. *Sejam $x \in \text{dom } f$ e $y \in \mathbb{R}^n$ tais que $\|y - x\|_x^f \leq 1$. Então temos*

$$(1 - \|y - x\|_x^f)^2 f''(x) \preceq f''(y) \preceq \frac{1}{(1 - \|y - x\|_x^f)^2} f''(x).$$

Demonstração. Seja $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$. Consideremos a função

$$\psi(t) = \langle f''(x + t(y - x))u, u \rangle, \quad t \in [0, 1].$$

Denotando por $y_t = x + t(y - x)$, pela desigualdade (26) e Proposição 4.9, temos

$$\begin{aligned} |\psi'(t)| &= |D^3 f(y_t)[y - x, u, u]| \leq 2\|y - x\|_{y_t} \|u\|_{y_t}^2 = \frac{2}{t} \|y_t - x\|_{y_t} \psi(t) \\ &\leq \frac{2}{t} \frac{\|y_t - x\|_x}{1 - \|y_t - x\|_x} \psi(t) = \frac{2\|y - x\|_x}{1 - t\|y - x\|_x} \psi(t). \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = (\ln \psi(t))'$$

e

$$\frac{2\|y - x\|_x}{1 - t\|y - x\|_x} = -2(\ln(1 - t\|y - x\|_x))',$$

temos

$$2(\ln(1 - t\|y - x\|_x))' \leq (\ln \psi(t))' \leq -2(\ln(1 - t\|y - x\|_x))'$$

Integrando as desigualdades de 0 a 1, obtemos

$$2(\ln(1 - \|y - x\|_x)) \leq \ln \psi(1) - \ln \psi(0) \leq -2(\ln(1 - \|y - x\|_x)),$$

ou equivalentemente,

$$(1 - \|y - x\|_x)^2 \leq \frac{\psi(1)}{\psi(0)} \leq \frac{1}{(1 - \|y - x\|_x)^2}.$$

□

Corolário 4.11. *Sejam $x \in \text{dom } f$ e $y \in \mathbb{R}^n$ tais que $\|y - x\|_x^f \leq 1$. Então temos*

$$(1 - \|y - x\|_x^f)^2 [f''(x)]^{-1} \preceq [f''(y)]^{-1} \preceq \frac{1}{(1 - \|y - x\|_x^f)^2} [f''(x)]^{-1}.$$

Demonstração. Aplicando o Lema 4.5 e a Proposição 4.10 temos

$$\begin{aligned} \langle [f''(y)]^{-1}u, u \rangle &= (\max\{\langle u, v \rangle : \langle [f''(y)]^{-1}v, v \rangle \leq 1\})^2 \\ &\geq \left(\max\left\{ \langle u, v \rangle : \frac{1}{(1 - \|y - x\|_x^f)^2} \langle [f''(x)]^{-1}v, v \rangle \leq 1 \right\} \right)^2 \\ &= (\max\{(1 - \|y - x\|_x^f) \langle u, v \rangle : \langle [f''(x)]^{-1}v, v \rangle \leq 1\})^2 \\ &= (1 - \|y - x\|_x^f)^2 (\max\{\langle u, v \rangle : \langle [f''(x)]^{-1}v, v \rangle \leq 1\})^2 \\ &= (1 - \|y - x\|_x^f)^2 \langle [f''(x)]^{-1}u, u \rangle. \end{aligned}$$

De modo análogo, temos

$$\begin{aligned} \langle [f''(y)]^{-1}u, u \rangle &= (\max\{\langle u, v \rangle : \langle [f''(y)]^{-1}v, v \rangle \leq 1\})^2 \\ &\leq (\max\{\langle u, v \rangle : (1 - \|y - x\|_x^f)^2 \langle [f''(x)]^{-1}v, v \rangle \leq 1\})^2 \\ &= \left(\max\left\{ \frac{1}{1 - \|y - x\|_x^f} \langle u, v \rangle : \langle [f''(x)]^{-1}v, v \rangle \leq 1 \right\} \right)^2 \\ &= \frac{1}{(1 - \|y - x\|_x^f)^2} (\max\{\langle u, v \rangle : \langle [f''(x)]^{-1}v, v \rangle \leq 1\})^2 \\ &= \frac{1}{(1 - \|y - x\|_x^f)^2} \langle [f''(x)]^{-1}u, u \rangle. \end{aligned}$$

□

Corolário 4.12. Sejam $x \in \text{dom } f$ e $y \in \mathbb{R}^n$ tais que $\|y - x\|_x^f \leq 1$. Então temos

$$\left(1 - \|y - x\|_x^f + \frac{(\|y - x\|_x^f)^2}{3}\right) f''(x) \preceq \int_0^1 f''(x + \tau(y - x)) d\tau \preceq \frac{1}{1 - \|y - x\|_x^f} f''(x).$$

Demonstração. Pela Proposição 4.10, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 f''(x + \tau(y - x)) d\tau &\succeq \int_0^1 (1 - \|\tau(y - x)\|_x^f)^2 f''(x) d\tau = f''(x) \int_0^1 (1 - \tau\|y - x\|_x^f)^2 d\tau \\ &= \left(1 - \|y - x\|_x^f + \frac{(\|y - x\|_x^f)^2}{3}\right) f''(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^1 f''(x + \tau(y - x)) d\tau &\preceq \int_0^1 \frac{1}{(1 - \|\tau(y - x)\|_x^f)^2} f''(x) d\tau = f''(x) \int_0^1 \frac{1}{(1 - \tau\|y - x\|_x^f)^2} d\tau \\ &= \frac{1}{1 - \|y - x\|_x^f} f''(x) \end{aligned}$$

□

Lema 4.13. Para todos $x, y \in \text{dom } f$, temos

$$\langle f'(y) - f'(x), y - x \rangle \geq \frac{(\|y - x\|_x^f)^2}{1 + \|y - x\|_x^f}.$$

Demonstração. Sejam $x, y \in \text{dom } f$ e denotemos por $y_t = x + t(y - x)$, $t \in [0, 1]$. Então, temos

$$\begin{aligned} \langle f'(y) - f'(x), y - x \rangle &= \int_0^1 \langle f''(y_t)(y - x), y - x \rangle dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t^2} \langle f''(y_t)(y_t - x), y_t - x \rangle dt = \int_0^1 \frac{1}{t^2} (\|y_t - x\|_{y_t}^f)^2 dt. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.9, temos

$$\|y_t - x\|_{y_t}^f \geq \frac{\|y_t - x\|_x^f}{1 + \|y_t - x\|_x^f} = \frac{t\|y - x\|_x^f}{1 + t\|y - x\|_x^f}.$$

Logo,

$$\langle f'(y) - f'(x), y - x \rangle \geq \int_0^1 \left(\frac{\|y - x\|_x^f}{1 + t\|y - x\|_x^f} \right)^2 dt = \frac{(\|y - x\|_x^f)^2}{1 + \|y - x\|_x^f}.$$

□

Proposição 4.14. *Seja $x \in \text{dom } f$ tal que $\|f'(x)\|_x^{f^*} < 1$ e x_f^* o valor ótimo da função f .*

Então

$$\|x - x_f^*\|_x^f \leq \frac{\|f'(x)\|_x^{f^*}}{1 - \|f'(x)\|_x^{f^*}}.$$

Demonstração. Uma vez que x_f^* é o valor ótimo da função f , temos $f'(x_f^*) = 0$. Usando os Lemas 4.5 e 4.13, obtemos

$$\frac{(\|x - x_f^*\|_x^f)^2}{1 + \|x - x_f^*\|_x^f} \leq \langle f'(x), x - x_f^* \rangle \leq \|f'(x)\|_x^{f^*} \|x - x_f^*\|_x^f.$$

Logo,

$$\|x - x_f^*\|_x^f \leq \frac{\|f'(x)\|_x^{f^*}}{1 - \|f'(x)\|_x^{f^*}}.$$

□

Proposição 4.15. *Seja $x \in \text{dom } f$ tal que $\|f'(x)\|_x^{f^*} < 1$. Então $x_+ = x - [f''(x)]^{-1}f'(x)$ pertence ao domínio de f e*

$$\|f'(x_+)\|_{x_+}^{f^*} \leq \left(\frac{\|f'(x)\|_x^{f^*}}{1 - \|f'(x)\|_x^{f^*}} \right)^2.$$

Demonstração. Começemos por notar que

$$\|x_+ - x\|_x^f = \|[f''(x)]^{-1}f'(x)\|_x^f = \|f'(x)\|_x^{f^*} \leq 1.$$

Logo, pelo Lema 4.8, $x_+ \in \text{dom } f$.

Pelo Corolário 4.11, temos

$$\begin{aligned} \|f'(x_+)\|_{x_+}^{f^*} &= \langle [f''(x_+)]^{-1}f'(x_+), f'(x_+) \rangle^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{1 - \|x_+ - x\|_x^f} \langle [f''(x)]^{-1}f'(x_+), f'(x_+) \rangle^{1/2} = \frac{1}{1 - \|x_+ - x\|_x^f} \|f'(x_+)\|_x^{f^*} \\ &= \frac{\|f'(x_+)\|_x^{f^*}}{1 - \|f'(x)\|_x^{f^*}}. \end{aligned}$$

Tomando $G = \int_0^1 (f''(x + \tau(x_+ - x)) - f''(x)) d\tau$, temos

$$f'(x_+) = f'(x_+) - f'(x) - f''(x)(x_+ - x) = G(x_+ - x).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(\|f'(x_+)\|_{x_+}^{f^*})^2 &= \langle [f''(x)]^{-1}G(x_+ - x), G(x_+ - x) \rangle \\
&= \langle [f''(x)]^{-1}G[f''(x)]^{-1}f'(x), G[f''(x)]^{-1}f'(x) \rangle \\
&= \langle [f''(x)]^{-1/2}G[f''(x)]^{-1}f'(x), [f''(x)]^{-1/2}G[f''(x)]^{-1}f'(x) \rangle \\
&= \|[f''(x)]^{-1/2}G[f''(x)]^{-1}f'(x)\|^2 \leq \|[f''(x)]^{-1/2}G[f''(x)]^{-1/2}\|^2 \|[f''(x)]^{-1/2}f'(x)\|^2 \\
&= \|[f''(x)]^{-1/2}G[f''(x)]^{-1/2}\|^2 (\|f'(x)\|_x^{f^*})^2
\end{aligned}$$

Pelo Corolário 4.12, temos

$$\left(-\|f'(x)\|_x^{f^*} + \frac{(\|f'(x)\|_x^{f^*})^2}{3} \right) I \preceq [f''(x)]^{-1/2}G[f''(x)]^{-1/2} \preceq \frac{\|f'(x)\|_x^{f^*}}{1 - \|f'(x)\|_x^{f^*}} I,$$

onde I representa a aplicação identidade. Assim,

$$\begin{aligned}
\|[f''(x)]^{-1/2}G[f''(x)]^{-1/2}\| &\leq \max \left\{ \|f'(x)\|_x^{f^*} - \frac{(\|f'(x)\|_x^{f^*})^2}{3}, \frac{\|f'(x)\|_x^{f^*}}{1 - \|f'(x)\|_x^{f^*}} \right\} \\
&= \frac{\|f'(x)\|_x^{f^*}}{1 - \|f'(x)\|_x^{f^*}}.
\end{aligned}$$

Concluimos então que,

$$(\|f'(x_+)\|_{x_+}^{f^*})^2 \leq \left(\frac{\|f'(x_+)\|_{x_+}^{f^*}}{1 - \|f'(x)\|_x^{f^*}} \right)^2 \leq \left(\frac{\|f'(x)\|_x^{f^*}}{1 - \|f'(x)\|_x^{f^*}} \right)^4.$$

□

4.2 Barreiras Auto-concordantes

Definição 4.3. Seja F uma função auto-concordante padrão. Dizemos que F é uma ν -barreira auto-concordante para o conjunto $\text{Dom } F$, onde $\text{Dom } F$ representa a aderência do conjunto $\text{dom } F$, se a desigualdade

$$\max_{u \in \mathbb{R}^n} [2DF(x)[u] - D^2F(x)[u, u]] \leq \nu \tag{30}$$

se verifica para todo $x \in \text{dom } F$.

Estamos interessados apenas em funções com segunda derivada invertível. Neste caso, a condição (30) é equivalente a

$$\langle [F''(x)]^{-1}F'(x), F'(x) \rangle \leq \nu.$$

Exemplo 4.4. Consideremos a função $F(x) = -\ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$. Uma vez que $F'(x) = \frac{1}{x}$ e $F''(x) = \frac{1}{x^2}$, temos

$$\max_{u \in \mathbb{R}} [2DF(x)[u] - D^2F(x)[u, u]] = \max_{u \in \mathbb{R}} \left[-\frac{2u}{x} - \frac{u^2}{x^2} \right].$$

Fazendo a mudança de variável $u/x = s$, obtemos

$$\max_{u \in \mathbb{R}} [2DF(x)[u] - D^2F(x)[u, u]] = \max_{s \in \mathbb{R}} [-2s - s^2] = 1$$

Logo, a função F é uma 1-barreira auto-concordante.

Exemplo 4.5. Consideremos a função $f(x) = -\ln \phi(x)$, onde $\phi(x) = \alpha + \langle a, x \rangle - \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle$, com $A = A^T \geq 0$. Uma vez que

$$Df(x)[u] = -\frac{1}{\phi(x)} (\langle a, u \rangle - \langle Ax, u \rangle),$$

e

$$D^2f(x)[u, u] = \frac{1}{\phi(x)} \langle Au, u \rangle + \frac{1}{\phi^2(x)} (\langle a, u \rangle - \langle Ax, u \rangle)^2,$$

tomando $r = \frac{1}{\phi(x)} (\langle a, u \rangle - \langle Ax, u \rangle)$ e $s = \frac{1}{\phi(x)} \langle Au, u \rangle$, temos

$$\max_{u \in \mathbb{R}^n} [2DF(x)[u] - D^2F(x)[u, u]] \leq \max_{r \in \mathbb{R}} \max_{s \in \mathbb{R}^+} [-2r - r^2 - s] \leq \max_{r \in \mathbb{R}} [-2r - r^2] = 1$$

Logo, a função F é uma 1-barreira auto-concordante.

Proposição 4.16. Seja F uma ν -barreira auto-concordante. Então, $(DF(x)[u])^2 \leq \nu D^2F(x)[u, u]$.

Demonstração. Consideremos $x \in \text{dom } F$ e $u \in \mathbb{R}^n$ tais que $D^2F(x)[u, u] > 0$ e a função ψ definida por

$$\psi(\lambda) = 2DF(x)[\lambda u] - D^2F(x)[\lambda u, \lambda u] = 2\lambda DF(x)[u] - \lambda^2 D^2F(x)[u, u].$$

A função ψ atinge o seu máximo quando $\lambda = \frac{DF(x)[u]}{D^2F(x)[u, u]}$. Assim, temos

$$\psi\left(\frac{DF(x)[u]}{D^2F(x)[u, u]}\right) = \frac{(DF(x)[u])^2}{D^2F(x)[u, u]} \leq \nu,$$

pelo que $(DF(x)[u])^2 \leq \nu D^2F(x)[u, u]$. □

Proposição 4.17. *Sejam F_i ν_i -barreiras auto-concordantes, $i = 1, 2$. Então, a função $F = F_1 + F_2$ é uma ν -barreira auto-concordante com $\nu = \nu_1 + \nu_2$.*

Demonstração. Começemos por notar que, pela Proposição 4.1, a função F é auto-concordante padrão. Assim, para todo $x \in \text{dom } F$, temos

$$\begin{aligned} \max_{u \in \mathbb{R}^n} [2DF(x)[u] - D^2F(x)[u, u]] &= \max_{u \in \mathbb{R}^n} [2DF_1(x)[u] + 2DF_2(x)[u] - D^2F_1(x)[u, u] - D^2F_2(x)[u, u]] \\ &\leq \max_{u \in \mathbb{R}^n} [2DF_1(x)[u] - D^2F_1(x)[u, u]] + \max_{u \in \mathbb{R}^n} [2DF_2(x)[u] - D^2F_2(x)[u, u]] \leq \nu_1 + \nu_2. \end{aligned}$$

□

Proposição 4.18. *Sejam F uma ν -barreira auto-concordante e $\mathcal{A}(x) = Ax + b$ um operador afim. Então, a função $G(x) = F(\mathcal{A}(x))$ é uma ν -barreira auto-concordante.*

Demonstração. Começemos por notar que, pela Proposição 4.2, G é uma função auto-concordante padrão. Uma vez que

$$DG(x)[u] = DF(\mathcal{A}x)[Au]$$

e

$$D^2G(x)[u, u] = D^2F(\mathcal{A}x)[Au, Au],$$

temos

$$\max_{u \in \mathbb{R}^n} [2DG(x)[u] - D^2G(x)[u, u]] = \max_{u \in \mathbb{R}^n} [2DF(\mathcal{A}x)[Au] - D^2F(\mathcal{A}x)[Au, Au]] \leq \nu.$$

□

Proposição 4.19. *Seja F uma ν -barreira auto-concordante. Então, para todo $x \in \text{dom } F$ e $y \in \text{Dom } F$ a desigualdade*

$$\langle F'(x), y - x \rangle \leq \nu$$

verifica-se.

Demonstração. Sejam $x \in \text{dom } F$ e $y \in \text{Dom } F'$. Consideremos a função

$$\varphi(t) = \langle F'(x + t(y - x)), y - x \rangle, \quad t \in [0, 1].$$

A função φ está bem definida, uma vez que o domínio de F é convexo.

Se $\varphi(0) \leq 0$, então o resultado é imediato, uma vez que, pela proposição 4.16, podemos concluir que ν é não negativo. Suponhamos que $\varphi(0) > 0$. Pela proposição 4.16 temos

$$\varphi'(t) = \langle F''(x + t(y - x))(y - x), y - x \rangle \geq \frac{1}{\nu} \langle F'(x + t(y - x)), y - x \rangle^2 = \frac{1}{\nu} \varphi^2(t),$$

de onde se conclui que

$$-\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right)' = \frac{\varphi'(t)}{\varphi^2(t)} \geq \frac{1}{\nu}.$$

Uma vez que

$$-\frac{1}{\varphi(t)} + \frac{1}{\varphi(0)} = \int_0^t -\left(\frac{1}{\varphi(s)}\right)' ds \geq \frac{t}{\nu},$$

temos

$$\varphi(0) \leq \frac{\nu}{t}$$

para todo $t \in (0, 1)$. □

4.3 Método de Caminho Interior

Consideremos o problema de minimização

$$\min\{\langle c, x \rangle : x \in Q\}, \quad (31)$$

onde $c \in \mathbb{R}^n$ e Q é um subconjunto limitado, fechado e convexo de \mathbb{R}^n com interior não vazio e para o qual é conhecida uma ν -barreira auto-concordante F tal que $Q = \text{Dom } F$. Para resolver o problema (31), usaremos o seguinte caminho central:

$$x^*(t) = \arg \min_{x \in \text{dom } F} f(t; x),$$

onde $f(t; x) = t\langle c, x \rangle + F(x)$, $t \geq 0$. Assim, para cada $t \geq 0$ temos $tc + F'(x^*(t)) = 0$.

Consideremos a condição de aproximação central

$$\|tc + F'(x)\|_x^{F^*} = \|f'(t; x)\|_x^{F^*} \leq \beta, \quad (32)$$

onde $\beta \in (0, 1)$ é um parâmetro suficientemente pequeno.

Proposição 4.20. Para todo $t > 0$, verifica-se a desigualdade

$$\langle c, x^*(t) \rangle - c^* \leq \frac{\nu}{t},$$

onde c^* é o valor ótimo do problema (31). Se $x \in \text{dom } F$ satisfaz a condição (32) então

$$\langle c, x \rangle - c^* \leq \frac{1}{t} \left(\nu + \frac{(\beta + \sqrt{\nu})\beta}{1 - \beta} \right).$$

Demonstração. Seja $x^* \in Q$ tal que $\langle c, x^* \rangle = c^*$. Uma vez que $tc + F'(x^*(t)) = 0$, temos

$$\langle c, x^*(t) \rangle - c^* = \langle c, x^*(t) - x^* \rangle = \frac{1}{t} \langle F'(x^*(t)), x^* - x^*(t) \rangle.$$

Pela proposição 4.19, concluímos $\langle c, x^*(t) \rangle - c^* \leq \frac{\nu}{t}$. Consideremos agora $x \in \text{dom } F$ satisfazendo a condição (32). Então,

$$\begin{aligned} \langle c, x - x^*(t) \rangle &= \frac{1}{t} \langle f'(t; x) - F'(x), x - x^*(t) \rangle = \frac{1}{t} (\langle f'(t; x), x - x^*(t) \rangle + \langle F'(x), x^*(t) - x \rangle) \\ &\leq \frac{1}{t} (\|f'(t; x)\|_x^{F^*} + \|F'(x)\|_x^{F^*}) \|x - x^*(t)\|_x^F \leq \frac{1}{t} (\beta + \sqrt{\nu}) \|x - x^*(t)\|_x^F \end{aligned}$$

Uma vez que $\langle c, x \rangle - c^* = \langle c, x - x^*(t) \rangle + \langle c, x^*(t) \rangle - c^*$, usando o Lema 4.14 obtemos o resultado. \square

Lema 4.21. Se x satisfaz a condição (32), então

$$\|c\|_x^{F^*} \leq \frac{1}{t} (\beta + \sqrt{\nu}).$$

Demonstração. Temos o seguinte

$$\|c\|_x^{F^*} = \frac{1}{t} \|f'(t, x) - F'(x)\|_x^{F^*} \leq \frac{1}{t} (\|f'(t, x)\|_x^{F^*} + \|F'(x)\|_x^{F^*}) \leq \frac{1}{t} (\beta + \sqrt{\nu}).$$

\square

Consideremos $\beta < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ e $\gamma = \frac{\sqrt{\beta}}{1 + \sqrt{\beta}} - \beta$ e o seguinte método de minimização

Inicialização: Estabeleça $t_0 = 0$. Escolha uma precisão $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in \text{dom } F$ tal que

$$\|F'(x_0)\|_{x_0}^{F^*} \leq \beta.$$

Passo k : Faça

$$t_{k+1} = t_k + \frac{\gamma}{\|c\|_{x_k}^{F^*}},$$

$$x_{k+1} = x_k - [F''(x_k)]^{-1}(t_{k+1}c + F'(x_k)).$$

Pare o processo se

$$\nu + \frac{(\beta + \sqrt{\nu})\beta}{1 - \beta} \leq \varepsilon t_k.$$

Tabela 1: Método de caminho interior

Para avaliarmos a complexidade deste método, usaremos os lemas que se seguem.

Consideremos a seguinte iteração do método:

$$\left. \begin{aligned} t_+ &= t + \frac{\gamma}{\|c\|_x^{F^*}}, \\ x_+ &= x - [F''(x)]^{-1}(t_+c + F'(x)). \end{aligned} \right\}$$

Lema 4.22. Se $x \in \text{dom } F$ é tal que $\|tc + F'(x)\|_x^{F^*} \leq \beta$, então $\|t_+c + F'(x_+)\|_{x_+}^{F^*} \leq \beta$.

Demonstração. Começemos por notar que

$$\|t_+c + F'(x)\|_x^{F^*} = \|tc + F'(x) + \frac{\gamma}{\|c\|_x^{F^*}}c\|_x^{F^*} \leq \|tc + F'(x)c\|_x^{F^*} + |\gamma| \leq \beta + |\gamma|.$$

Ora, pela Proposição 4.15, temos

$$\|t_+c + F'(x_+)\|_{x_+}^{F^*} \leq \left(\frac{\|t_+c + F'(x)\|_x^{F^*}}{1 - \|t_+c + F'(x)\|_x^{F^*}} \right)^2 \leq \left(\frac{\beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} \right)^2 = \beta.$$

□

Usando os Lemas 4.21 e 4.22, podemos concluir que para cada $k \in \mathbb{N}$ temos

$$t_{k+1} = t_k + \frac{\gamma}{\|c\|_{x_k}^{F^*}} \geq t_k + \frac{\gamma}{\frac{1}{t_k}(\beta + \sqrt{\nu})} = \left(1 + \frac{\gamma}{\beta + \sqrt{\nu}}\right) t_k.$$

Teorema 4.23. *O método de caminho interior termina em menos de \mathcal{N} iterações, onde*

$$\mathcal{N} \leq \frac{\ln \left(\frac{(1 + \beta)\nu + (\beta + \sqrt{\nu})\beta}{\gamma(1 - 2\beta)\varepsilon} \|c\|_{x_F^*}^{F^*} \right)}{\ln \left(1 + \frac{\gamma}{\beta + \sqrt{\nu}} \right)} + 2.$$

No final do processo, temos $\langle c, x_{\mathcal{N}} \rangle - c^ \leq \varepsilon$, onde c^* é o valor ótimo do problema (31).*

Demonstração. Notemos que, pelo Lema 4.14, temos

$$\|x_0 - x_F^*\|_{x_0}^{F^*} \leq \frac{\|F'(x_0)\|_{x_0}^{F^*}}{1 - \|F'(x_0)\|_{x_0}^{F^*}} \leq \frac{\beta}{1 - \beta} \leq 1.$$

Assim, pelo Lema 4.10, obtemos

$$t_1 = \frac{\gamma}{\|c\|_{x_0}^{F^*}} \geq \frac{1 - \|x_0 - x_F^*\|_{x_0}^{F^*}}{\|c\|_{x_F^*}^{F^*}} \gamma \geq \frac{1 - 2\beta}{1 - \beta} \frac{\gamma}{\|c\|_{x_F^*}^{F^*}}$$

Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$t_k \geq \left(1 + \frac{\gamma}{\beta + \sqrt{\nu}} \right)^{k-1} t_1 \geq \frac{1 - 2\beta}{1 - \beta} \frac{\gamma}{\|c\|_{x_F^*}^{F^*}} \left(1 + \frac{\gamma}{\beta + \sqrt{\nu}} \right)^{k-1}.$$

Uma vez que o processo para quando $\nu + \frac{(\beta + \sqrt{\nu})\beta}{1 - \beta} \leq \varepsilon t_k$, na penúltima iteração, $\mathcal{N} - 1$, temos

$$\nu + \frac{(\beta + \sqrt{\nu})\beta}{1 - \beta} \geq \varepsilon t_{\mathcal{N}-1} \geq \varepsilon \frac{1 - 2\beta}{1 - \beta} \frac{\gamma}{\|c\|_{x_F^*}^{F^*}} \left(1 + \frac{\gamma}{\beta + \sqrt{\nu}} \right)^{\mathcal{N}-2},$$

ou seja,

$$\mathcal{N} \leq \frac{\ln \left(\frac{(1 + \beta)\nu + (\beta + \sqrt{\nu})\beta}{\gamma(1 - 2\beta)\varepsilon} \|c\|_{x_F^*}^{F^*} \right)}{\ln \left(1 + \frac{\gamma}{\beta + \sqrt{\nu}} \right)} + 2.$$

Por fim, pelo Lema 4.20, temos

$$\langle c, x_{\mathcal{N}} \rangle - c^* \leq \frac{1}{t_{\mathcal{N}}} \left(\nu + \frac{(\beta + \sqrt{\nu})\beta}{1 - \beta} \right) \leq \varepsilon.$$

□

Sejam $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e $K_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$. Consideremos o problema:

$$\left. \begin{aligned} P(x) &\rightarrow \min, \\ x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \\ x_i^2 &\leq K_i, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Para aplicarmos o método de caminho interior a este problema, consideremos o seguinte problema de programação matemática:

$$\left. \begin{aligned} \sigma = \langle b, (x, \sigma) \rangle &\rightarrow \min, \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) &\in \mathbb{R}^n, \\ P(x) &\leq \sigma, \\ x_i^2 &\leq K_i, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

onde $b = (0, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Podemos ainda usar a barreira auto-concordante \mathbf{F} definida por

$$\mathbf{F}(x, \sigma) = -\ln(\sigma - P(x)) - \ln(\bar{\sigma} - \sigma) - \sum_{i=1}^n \ln(K_i - x_i^2),$$

onde $\bar{\sigma} = \max_{\{x | x_i^2 \leq K_i, i = \overline{1, n}\}} P(x)$.

5 Problema

No que se segue, o conjunto das funções reais absolutamente contínuas definidas no intervalo $[0, T]$ será denotado por $AC([0, T], \mathbb{R})$. O vetor gradiente e a matriz Hessiana de uma função F iremos denotar por ∇F e $\nabla^2 F$, respetivamente. Denotaremos por \mathcal{H}_N o conjunto das funções $\eta \in L_2((0, T), \mathbb{R})$ constantes por partes tomando valores $\eta(t) = \eta(\tau k)$, $t \in (\tau k, \tau(k+1)]$, $k = \overline{0, N-1}$, $\tau = T/N$. O produto interno usual em \mathbb{R}^n será denotado por $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

5.1 Formulação do Problema

Seja $\check{\theta} \in V_2^{1,0}(Q_T) \cap L_\infty(Q_T, \mathbb{R})$. Consideremos $\varphi(\theta, t) = |\check{\theta}(x, t) - \theta(x, t)|^2$. Sejam $Q_j \in W_2^2(\Omega)$, $j = \overline{1, m}$, $K_j > 0$, $j = \overline{1, m}$, and $\theta_0 \in L_2(\Omega, \mathbb{R})$. Fixemos $C \in \mathbb{R}$. Consideremos o problema de controlo ótimo

$$J(\theta, q_1, \dots, q_m) = \iint_{Q_T} \varphi(\theta(x, t), t) dx dt \rightarrow \min, \quad (35)$$

$$\theta_t = C\theta_{xx}, \quad (36)$$

$$\theta(x, t) = \sum_{j=1}^m Q_j(x)q_j(t), \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T] \quad (37)$$

$$\theta(x, 0) = \sum_{j=1}^m Q_j(x)q_j(0) = \theta_0(x), \quad (38)$$

$$\|\dot{q}_j\|_{L_\infty((0, T), \mathbb{R})} \leq K_j, \quad (39)$$

onde $(\theta, q_1, \dots, q_m)$ pertence ao espaço $V_2^{1,0}(Q_T) \times (AC([0, T], \mathbb{R}))^m$.

A condição de fronteira (37) abrange a maioria das situações enfrentadas em problemas práticos. As funções Q_j , $j = \overline{1, m}$, podem ser consideradas como uma partição da unidade definida em Ω ou então como funções de forma (shape functions) para algum conjunto de elementos. As funções q_j , $j = \overline{1, m}$, determinam a dinâmica de θ em $\Omega \cap \text{supp}(Q_j)$, $j = \overline{1, m}$. A continuidade absoluta de q_j é a condição mais fraca que pode ser imposta. De facto, em aplicações, q_j , $j = \overline{1, m}$, são temperaturas ou concentrações que têm alguma inercia e são

funções bastante regulares. As derivadas \dot{q}_j , $j = \overline{1, m}$, são consideradas como parâmetros de controlo.

Começaremos o estudo deste problema considerando um problema auxiliar onde a função $\varphi : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa e localmente Lipschitziana em relação à variável θ e mensurável em relação à variável t . Assumimos que $|\varphi(\theta_1, t) - \varphi(\theta_2, t)| \leq K_\varphi |\theta_1 - \theta_2|$, $K_\varphi > 0$, sempre que $\theta_1, \theta_2 \in [-\Theta, \Theta]$.

Tomemos $u(x, t) = \theta(x, t) - \sum_{j=1}^m Q_j(x)q_j(t)$. Sejam $q_j^0 \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, tais que $\sum_{j=1}^m Q_j(x)q_j^0 = \theta_0(x)$. O problema (35)-(39) é equivalente ao problema seguinte:

$$J(u, q_1, \dots, q_m) = \iint_{Q_T} \varphi\left(u + \sum_{j=1}^m Q_j q_j, t\right) dx dt \rightarrow \min, \quad (40)$$

$$u_t = C u_{xx} + \sum_{j=1}^m C(Q_j q_j)_{xx} - \sum_{j=1}^m Q_j \eta_j, \quad (41)$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (42)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (43)$$

$$\dot{q}_j = \eta_j, \quad q_j(0) = q_j^0, \quad (44)$$

$$\|\eta_j\|_{L_\infty((0, T), \mathbb{R})} \leq K_j, \quad (45)$$

onde $(u, q_1, \dots, q_m, \eta_1, \dots, \eta_m)$ pertence ao espaço $V_2^{1,0}(Q_T) \times (AC([0, T], \mathbb{R}))^m \times (L_\infty((0, T), \mathbb{R}))^m$.

Juntamente com este problema, consideraremos o problema:

$$J(\bar{u}, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_m) = \iint_{Q_T} \varphi\left(\bar{u} + \sum_{j=1}^m Q_j \bar{q}_j, t\right) dx dt \rightarrow \min, \quad (46)$$

$$\bar{u}_t = C \bar{u}_{xx} + \sum_{j=1}^m C(Q_j \bar{q}_j)_{xx} - \sum_{j=1}^m Q_j \bar{\eta}_j, \quad (47)$$

$$\bar{u}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (48)$$

$$\bar{u}(x, 0) = 0, \quad (49)$$

$$\dot{\bar{q}}_j = \bar{\eta}_j, \quad \bar{q}_j(0) = q_j^0, \quad (50)$$

$$\|\bar{\eta}_j\|_{L_\infty((0, T), \mathbb{R})} \leq K_j, \quad (51)$$

onde $(\bar{u}, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_m, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_m)$ pertence ao espaço $V_2^{1,0}(Q_T) \times (AC([0, T], \mathbb{R}))^m \times (\mathcal{H}_N)^m$. Uma vez que as funções η_j , $j = \overline{1, m}$ e $\bar{\eta}_j$, $j = \overline{1, m}$ determinam completamente as funções (u, q_1, \dots, q_m) e $(\bar{u}, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_m)$, respetivamente, usaremos as notações $J(\eta) = J(\theta, q_1, \dots, q_m) = J(u, q_1, \dots, q_m)$ e $J(\bar{\eta}) = J(\bar{\theta}, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_m) = J(\bar{u}, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_m)$.

Não consideramos qualquer discretização da equação diferencial (47). A solução para (47) admite uma representação em série de Fourier que converge rapidamente e, como consequência, pode ser calculada rapidamente com precisão do computador.

5.2 Resultados Principais

Vamos agora formular os resultados principais deste trabalho.

Teorema 5.1. *O problema (35)-(39) tem uma solução.*

Teorema 5.2. *Seja $\hat{\theta}$ uma solução ótima de (35)-(39) e $\hat{\theta} = \hat{u} + \sum_{j=1}^m Q_j \hat{q}_j$ uma solução ótima de (46)-(51). Então*

$$|J(\hat{\theta}, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_m) - J(\hat{\theta}, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_m)| \leq \frac{T^2}{N} \left(V_\Omega K_\varphi \sum_{j=1}^m \|Q_j\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})} K_j \right),$$

onde $V_\Omega = \int_\Omega dx$.

Consideremos a função

$$\mathcal{F}(\bar{\eta}, \sigma) = -\ln(\sigma - J(\bar{\eta})) - \ln(\bar{\sigma} - \sigma) - \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{N-1} \ln(K_i - (\bar{\eta}_i(k))^2). \quad (52)$$

Sejam $\varepsilon > 0$,

$$N > \frac{2 \left(V_\Omega K_\varphi \sum_{j=1}^m \left(\|Q_j\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})} K_j \right) \right) T^2}{\varepsilon}, \quad (53)$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} T^2 V_\Omega K_\varphi \sum_{j=1}^m \|Q_j\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})} K_j \quad (54)$$

e

$$\mathcal{N} \geq \frac{\ln \left(2 \frac{(1 + \beta)(mN + 2) + (\beta + \sqrt{mN + 2})\beta}{\gamma(1 - 2\beta)\varepsilon} C \right)}{\ln \left(1 + \frac{\gamma}{\beta + \sqrt{mN + 2}} \right)} + 2. \quad (55)$$

Seja $\hat{\eta}$ um controlo ótimo de (40)-(45).

Teorema 5.3. *O método de caminho interior encontra $\bar{\eta} \in \mathcal{H}_N$ satisfazendo $|J(\bar{\eta}) - J(\hat{\eta})| < \varepsilon$, em não mais que \mathcal{N} iterações.*

5.3 Lemas Auxiliares

Os seguintes resultados serão necessários.

Lema 5.4. *Seja $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) \in L_\infty((0, T), \mathbb{R}^m)$ uma função satisfazendo $\|\eta_j\|_{L_\infty((0, T), \mathbb{R})} \leq K_j$ e seja (u, q_1, \dots, q_m) uma solução do problema (41)-(45). Então, as desigualdades*

$$\left\| \sum_{j=1}^m Q_j q_j \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \leq \|\theta_0\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})} + T \left\| \sum_{j=1}^m Q_j \eta_j \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})}$$

e

$$\|u\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \leq 2 \left(\|\theta_0\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})} + T \left\| \sum_{j=1}^m Q_j \eta_j \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \right).$$

verificam-se.

Demonstração. A partir da equação (44), obtemos

$$\sum_{j=1}^m Q_j(\cdot) q_j(t) = \sum_{j=1}^m Q_j(\cdot) \left(q_j(0) + \int_0^t \eta_j(s) ds \right).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^m Q_j q_j \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} &\leq \left\| \sum_{j=1}^m Q_j(\cdot) q_j(0) \right\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})} + T \left\| \sum_{j=1}^m Q_j \eta_j \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \\ &= \|\theta_0\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})} + T \left\| \sum_{j=1}^m Q_j(\cdot) \eta_j(\cdot) \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Uma vez que $u(x, t) = \theta(x, t) - \sum_{j=1}^m Q_j(x) q_j(t)$, temos

$$\|u\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \leq \|\theta\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})} + \left\| \sum_{j=1}^m Q_j q_j \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})}.$$

Pelo Teorema 3.8, obtemos

$$\|\theta\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \leq \left\| \sum_{j=1}^m Q_j q_j \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})}$$

e o fim da demonstração. □

Lema 5.5. Sejam $\eta^{(1)} = (\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \dots, \eta_m^{(1)}) \in L_\infty((0, T), \mathbb{R}^m)$ e $\eta^{(2)} = (\eta_1^{(2)}, \eta_2^{(2)}, \dots, \eta_m^{(2)}) \in L_\infty((0, T), \mathbb{R}^m)$ funções satisfazendo $\|\eta_j^{(1)}\|_{L_\infty((0, T), \mathbb{R})} \leq K_j$ e $\|\eta_j^{(2)}\|_{L_\infty((0, T), \mathbb{R})} \leq K_j$. Então, verifica-se a desigualdade

$$|J(\eta^{(1)}) - J(\eta^{(2)})| \leq T^2 V_\Omega K_\varphi \left\| \sum_{j=1}^m Q_j \left(\eta_j^{(1)} - \eta_j^{(2)} \right) \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})}.$$

Demonstração. Sejam $(u^{(i)}, q_1^{(i)}, \dots, q_m^{(i)}) \in V_2^{1,0}(Q_T) \times AC([0, T], \mathbb{R})^m$ funções satisfazendo

$$u_t^{(i)} = C u_{xx}^{(i)} + \sum_{j=1}^m C(Q_j q_j^{(i)})_{xx} - \sum_{j=1}^m Q_j \eta_j^{(i)},$$

$$u^{(i)}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T],$$

$$u^{(i)}(x, 0) = 0,$$

$$\dot{q}_j^{(i)} = \eta_j^{(i)}, \quad q_j^{(i)}(0) = q_j^0, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Tomemos $\theta^{(1)}(x, t) = u^{(1)}(x, t) + \sum_{j=1}^m Q_j(x) q_j^{(1)}(t)$ e $\theta^{(2)}(x, t) = u^{(2)}(x, t) + \sum_{j=1}^m Q_j(x) q_j^{(2)}(t)$.

Então, temos

$$\begin{aligned} |J(\eta^{(1)}) - J(\eta^{(2)})| &= \left| \iint_{Q_T} (\varphi(\theta^{(1)}(x, t)) - \varphi(\theta^{(2)}(x, t))) dx dt \right| \\ &\leq \iint_{Q_T} K_\varphi |\theta^{(1)}(x, t) - \theta^{(2)}(x, t)| dx dt \leq T V_\Omega K_\varphi \|\theta^{(1)} - \theta^{(2)}\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \end{aligned}$$

Pelo Lema 5.4 obtemos

$$\left\| \sum_{j=1}^m Q_j \left(q_j^{(1)} - q_j^{(2)} \right) \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \leq T \left\| \sum_{j=1}^m Q_j \left(\eta_j^{(1)} - \eta_j^{(2)} \right) \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})}.$$

Logo, pelo Teorema 3.8, temos

$$\|\theta^{(1)} - \theta^{(2)}\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \leq T \left\| \sum_{j=1}^m Q_j \left(\eta_j^{(1)} - \eta_j^{(2)} \right) \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})},$$

e assim

$$|J(\eta^{(1)}) - J(\eta^{(2)})| \leq T^2 V_\Omega K_\varphi \left\| \sum_{j=1}^m Q_j \left(\eta_j^{(1)} - \eta_j^{(2)} \right) \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})}.$$

□

5.4 Prova dos Resultados Principais

Prova do Teorema 5.1. Seja ℓ o ínfimo do problema (40)-(45) e $\{u^l\}$ e $\{q^l\}$ uma solução de

$$\left. \begin{aligned} u_t^l &= C u_{xx}^l + \sum_{j=1}^m C(Q_j q_j^l)_{xx} - \sum_{j=1}^m Q_j \eta_j^l, \\ u^l(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\ u^l(x, 0) &= 0 \\ \dot{q}_j^l &= \eta_j^l, \quad q_j^l(0) = q_j^0, \\ \|\eta_j^l\|_{L_\infty((0, T), \mathbb{R})} &\leq K_j, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

onde $(\theta, q_1, \dots, q_m, \eta_1, \dots, \eta_m)$ pertence ao espaço $V_2^{1,0}(Q_T) \times (AC([0, T], \mathbb{R}))^m \times (L_\infty((0, T), \mathbb{R}))^m$, tal que $J(u^l(\cdot, \cdot), q^l(\cdot)) \rightarrow \ell$. Como $\{\eta^l\}$ é limitada em $L_2((0, T), \mathbb{R}^m)$, existe uma subsequência $\{\eta^{l_k}\}$ fracamente convergente em $L_2((0, T), \mathbb{R}^m)$. Seja η^0 o limite fraco de $\{\eta^{l_k}\}$. Pelo Teorema de Mazur, existe uma sequência de combinações convexas de $\{\eta^{l_k}\}$, $\xi^p = \sum_{i=p}^{I(p)} \lambda_i \eta^{l_i}$, tal que $\xi^p \rightarrow \eta^0$ in $L_2((0, T), \mathbb{R}^m)$. Uma vez que a equação (41) é linear, pelo Teorema 3.7 temos $\sum_{i=p}^{I(p)} \lambda_i u^{l_i} \rightarrow u^0$ e $\sum_{i=p}^{I(p)} \lambda_i q^{l_i} \rightarrow q^0$. Assim, como J é convexa, pelo Lema 5.5 obtemos

$$J(u^0, q^0) = \lim_{p \rightarrow \infty} J \left(\sum_{i=p}^{I(p)} \lambda_i u^{l_i}, \sum_{i=p}^{I(p)} \lambda_i q^{l_i} \right) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=p}^{I(p)} \lambda_i J(u^{l_i}, q^{l_i}) = \ell.$$

Logo, (u^0, q^0) é uma solução de (40)-(45). \square

No que se segue, denotaremos por $(\hat{\theta}, \hat{q}_j)$ um processo ótimo de (35)-(39). O problema (46)-(51) tem também solução. Isto segue da compacidade do conjunto de controlos e do Teorema 3.7. Iremos mostrar que a diferença entre $J(\hat{\theta})$ e $J(\hat{\theta})$, onde $\hat{\theta} = \hat{u} + \sum_{j=1}^m Q_j \hat{q}_j$ é uma solução ótima de (46)-(51), pode ser feita arbitrariamente pequena quando N é suficientemente grande. Consideremos as funções \tilde{q}_j , $j = \overline{1, m}$, definidas por

$$\tilde{q}_j(0) = \hat{q}_j(0),$$

e

$$\tilde{q}_j(t) = \tilde{q}_j(\tau k) + \frac{t - \tau k}{\tau} \int_{\tau k}^{\tau(k+1)} \dot{\hat{q}}_j(s) ds,$$

$$j = \overline{1, m}, \quad t \in (\tau k, \tau(k+1)]\tau = \frac{T}{N}.$$

Obviamente, estas funções são lineares por partes, contínuas e satisfazem $|\dot{\tilde{q}}_j(t)| \leq K_j$, $t \in [0, T]$, $j = \overline{1, m}$. A função $\sum_{j=1}^m Q_j \tilde{q}_j$ está próxima da função $\sum_{j=1}^m Q_j \hat{q}_j$ no seguinte sentido.

Lema 5.6. *A seguinte desigualdade verifica-se:*

$$\left\| \sum_{j=1}^m Q_j (\tilde{q}_j - \hat{q}_j) \right\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})} \leq \tau \sum_{j=1}^m \left(\|Q_j\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})} K_j \right). \quad (57)$$

Demonstração. Por indução temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m Q_j(x) \tilde{q}_j(\tau(k+1)) &= \sum_{j=1}^m Q_j(x) \tilde{q}_j(\tau k) + \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{\tau k}^{\tau(k+1)} \dot{\tilde{q}}_j(s) ds \\ &= \sum_{j=1}^m Q_j(x) \hat{q}_j(\tau k) + \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{\tau k}^{\tau(k+1)} \dot{\hat{q}}_j(s) ds = \sum_{j=1}^m Q_j(x) \hat{q}_j(\tau(k+1)). \end{aligned}$$

Logo, temos

$$\sum_{j=1}^m Q_j(x) \tilde{q}_j(\tau k) = \sum_{j=1}^m Q_j(x) \hat{q}_j(\tau k), \quad k = \overline{0, N}. \quad (58)$$

Notemos que, para todo $t \in (\tau k, \tau(k+1)]$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m Q_j(x) \tilde{q}_j(t) &= \sum_{j=1}^m Q_j(x) \tilde{q}_j(\tau k) + \frac{t - \tau k}{\tau} \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{\tau k}^{\tau(k+1)} \dot{\tilde{q}}_j(s) ds \\ &= \sum_{j=1}^m Q_j(x) \tilde{q}_j(\tau(k+1)) + \frac{t - \tau(k+1)}{\tau} \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{\tau k}^{\tau(k+1)} \dot{\tilde{q}}_j(s) ds \end{aligned}$$

Se $t \in (\tau k, \tau(k + \frac{1}{2})]$, então obtemos

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{j=1}^m Q_j(x) (\tilde{q}_j(t) - \hat{q}_j(t)) \right| \\ &= \left| \frac{t - \tau k}{\tau} \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{\tau k}^{\tau(k+1)} \dot{\tilde{q}}_j(s) ds - \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{\tau k}^t \dot{\hat{q}}_j(s) ds \right| \\ &\leq \frac{t - \tau k}{\tau} \left| \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{\tau k}^{\tau(k+1)} \dot{\tilde{q}}_j(s) ds \right| + \left| \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{\tau k}^t \dot{\hat{q}}_j(s) ds \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m |Q_j(x)| \int_{\tau k}^{\tau(k+1)} |\dot{\hat{q}}_j(s)| ds + \sum_{j=1}^m |Q_j(x)| \int_{\tau k}^t |\dot{\hat{q}}_j(s)| ds \\
&\leq \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^m |Q_j(x)| K_j + \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^m |Q_j(x)| K_j = \tau \sum_{j=1}^m |Q_j(x)| K_j
\end{aligned}$$

e, se $t \in (\tau(k + \frac{1}{2}), \tau(k + 1)]$, então temos

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{j=1}^m Q_j(x) (\tilde{q}_j(t) - \hat{q}_j(t)) \right| \\
&= \left| \frac{t - \tau(k + 1)}{\tau} \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{\tau k}^{\tau(k+1)} \dot{\hat{q}}_j(s) ds - \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_t^{\tau(k+1)} \dot{\hat{q}}_j(s) ds \right| \\
&\leq \frac{\tau(k + 1) - t}{\tau} \left| \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_{\tau k}^{\tau(k+1)} \dot{\hat{q}}_j(s) ds \right| + \left| \sum_{j=1}^m Q_j(x) \int_t^{\tau(k+1)} \dot{\hat{q}}_j(s) ds \right| \\
&\leq \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^m |Q_j(x)| K_j + \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^m |Q_j(x)| K_j = \tau \sum_{j=1}^m |Q_j(x)| K_j.
\end{aligned}$$

Assim, temos (57). □

Agora, usaremos o princípio do máximo (Teorema 3.8) para encontrar uma estimativa para a diferença entre a solução ótima de (40)-(45) e a solução ótima de (46)-(51).

Lema 5.7. *Seja $\sum_{j=1}^m Q_j(x) \tilde{q}_j(t)$ a função definida acima e $\tilde{\theta}$ a solução do problema*

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_t &= C\tilde{\theta}_{xx}, \\
\tilde{\theta}(x, t) &= \sum_{j=1}^m Q_j(x) \tilde{q}_j(t), \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\
\tilde{\theta}(x, 0) &= \theta_0(x).
\end{aligned}$$

Então, a estimativa

$$\left\| \tilde{\theta} - \hat{\theta} \right\|_{L^\infty(Q_T, \mathbb{R})} \leq \frac{T}{N} \sum_{j=1}^m \|Q_j\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R})} K_j$$

verifica-se.

Demonstração. Seja $\delta\theta = \tilde{\theta} - \hat{\theta}$. Temos

$$\delta\theta_t = C\delta\theta_{xx},$$

$$\delta\theta(x, t) = \sum_{j=1}^m Q_j(x)(\tilde{q}_j(t) - \hat{q}_j(t)), \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T],$$

e

$$\delta\theta(x, 0) = 0.$$

Pelo Teorema 3.8 e Lema 5.6, temos,

$$\|\delta\theta\|_{L^\infty(Q_T, \mathbb{R})} \leq \left\| \sum_{j=1}^m Q_j(\tilde{q}_j - \hat{q}_j) \right\|_{L^\infty(Q_T, \mathbb{R})} \leq \frac{T}{N} \sum_{j=1}^m \|Q_j\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R})} K_j.$$

□

Prova do Teorema 5.2. Consideremos $\tilde{\theta}$ a função definida no Lema 5.7. Assim como na prova do Lema 5.5, obtemos

$$\begin{aligned} \left| J(\tilde{\theta}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_m) - J(\hat{\theta}, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_m) \right| &= \left| \iint_{Q_T} (\varphi(\tilde{\theta}) - \varphi(\hat{\theta})) \, dxdt \right| \\ &\leq TV_\Omega K_\varphi \|\tilde{\theta} - \hat{\theta}\|_{L^\infty(Q_T, \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 5.7, temos

$$\left| J(\tilde{\theta}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_m) - J(\hat{\theta}, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_m) \right| \leq \frac{T^2}{N} V_\Omega K_\varphi \sum_{j=1}^m \|Q_j\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R})} K_j.$$

Uma vez que

$$J(\hat{\theta}, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_m) \leq J(\hat{\theta}, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_m) \leq J(\tilde{\theta}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_m),$$

temos

$$\left| J(\hat{\theta}, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_m) - J(\tilde{\theta}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_m) \right| \leq \frac{T^2}{N} \left(V_\Omega K_\varphi \sum_{j=1}^m \|Q_j\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R})} K_j \right).$$

□

Prova do Teorema 5.3. Seja

$$N > \frac{2 \left(V_\Omega K_\varphi \sum_{j=1}^m \|Q_j\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R})} K_j \right) T^2}{\varepsilon}.$$

Pelo Teorema 5.2, temos $|J(\hat{\eta}) - J(\hat{\eta})| < \varepsilon/2$, onde $\hat{\eta}$ é um processo ótimo de (46)-(51) e $\hat{\eta}$ é um processo ótimo de (40)-(45). Usando o método de caminho interior, encontramos $\bar{\eta}$ tal que $|J(\bar{\eta}) - J(\hat{\eta})| \leq \varepsilon/2$. Pelo Teorema 4.23, o número de iterações é no máximo

$$\frac{\ln \left(2 \frac{(1 + \beta)(mN + 2) + (\beta + \sqrt{mN + 2})\beta}{\gamma(1 - 2\beta)\varepsilon} \|b\|_{(\tilde{x}, \tilde{\sigma})}^{\mathcal{F}} \right)}{\ln \left(1 + \frac{\gamma}{\beta + \sqrt{mN + 2}} \right)} + 2,$$

onde $b = (0, 1)$. Temos

$$|J(\bar{\eta}) - J(\hat{\eta})| \leq |J(\bar{\eta}) - J(\hat{\eta})| + |J(\hat{\eta}) - J(\hat{\eta})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como $\|b\|_{(\tilde{x}, \tilde{\sigma})}^{\mathcal{F}}$ é a raiz quadrada da $(n + 1, n + 1)$ -ésima entrada da matriz $[\nabla^2(\mathcal{F})(\tilde{x}, \tilde{\sigma})]$, usando a fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury, temos

$$\|b\|_{(\tilde{x}, \tilde{\sigma})}^{\mathcal{F}} \leq \left(\frac{1}{(\tilde{\sigma} - J(\tilde{\eta}))^2} + \frac{1}{(\bar{\sigma} - \tilde{\sigma})^2} \right)^{-1/2} = \left(\frac{(\tilde{\sigma} - J(\tilde{\eta}))^2(\bar{\sigma} - \tilde{\sigma})^2}{(\tilde{\sigma} - J(\tilde{\eta}))^2 + (\bar{\sigma} - \tilde{\sigma})^2} \right)^{1/2},$$

onde $\bar{\sigma} = \max_{\{\eta \in \mathcal{H}_N \mid \|\eta_i\|_{L_\infty((0, T), \mathbb{R})} \leq K_i\}} J(\eta)$ e $(\tilde{\eta}, \tilde{\sigma}) = \operatorname{argmin}(\mathcal{F})$ (ver 52).

Consideremos a função

$$g(\lambda) = \frac{(\lambda - J(\tilde{\eta}))^2(\bar{\sigma} - \lambda)^2}{(\lambda - J(\tilde{\eta}))^2 + (\bar{\sigma} - \lambda)^2}, \quad \lambda \in [J(\tilde{\eta}), \bar{\sigma}].$$

Ela atinge o máximo em $\lambda = (\bar{\sigma} + J(\tilde{\eta}))/2$. Logo,

$$\|b\|_{(\tilde{x}, \tilde{\sigma})}^{\mathcal{F}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}(\bar{\sigma} - J(\tilde{\eta})).$$

Aplicando o Lema 5.5, obtemos o resultado. \square

5.5 Problema de Rastreo. Exemplos

Consideremos o problema de rastreo. Neste caso, $\varphi(\theta, t) = |\check{\theta}(x, t) - \theta(x, t)|^2$, onde $\check{\theta} \in V_2^{1,0}(Q_T) \cap L_\infty(Q_T, \mathbb{R})$. O número de iterações necessárias para alcançar uma dada precisão é determinada por (53)-(55), onde $K_\varphi = 2(\|\theta_0\|_{L_\infty(\Omega, \mathbb{R})} + T \max_{j=1, \dots, m} K_j + \|\check{\theta}\|_{L_\infty(Q_T, \mathbb{R})})$.

Note-se que, uma vez que a funcional é estritamente convexa, o problema de rastreo tem uma única solução. Além disso, a sequência de soluções do problema (46)-(51) convergem em quase todos os pontos para a solução do problema de rastreo.

Abaixo apresentamos alguns exemplos. Consideremos o problema

$$J(\theta(\cdot, \cdot), q(\cdot)) = \int_0^{10} \int_0^\pi |\theta(x, t) - 3 \cos(\pi t)/4|^2 dx dt \rightarrow \min,$$

$$\theta_t = \theta_{xx},$$

$$\theta(0, t) = \theta(\pi, t) = q(t),$$

$$\|\dot{q}\|_{L^\infty((0,10), \mathbb{R})} \leq 1,$$

$$\theta(x, 0) = q(0) = 3/4.$$

Introduzindo a nova função $y = \theta - \mathbb{1}q$ temos

$$y_t = y_{xx} - (\mathbb{1}q)_t,$$

$$y(0, t) = y(\pi, t) = 0,$$

$$y(x, 0) = 0,$$

$$\dot{q} = \eta,$$

$$q(0) = 3/4.$$

Agora, o problema assume a forma

$$J(y(\cdot, \cdot), q(\cdot)) = \int_0^{10} \int_0^\pi |y(x, t) + (\mathbb{1}q) - 3 \cos(\pi t)/4|^2 dx dt \rightarrow \min,$$

$$y_t = y_{xx} - (\mathbb{1}q)_t,$$

$$y(0, t) = y(\pi, t) = 0,$$

$$y(x, 0) = 0,$$

$$\dot{q} = \eta,$$

$$q(0) = 3/4.$$

Obviamente, temos $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \sin(nx)$ e $\mathbb{1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$, onde

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - \cos(\pi x)}{n} \right) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n = 2k - 1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Logo, temos

$$\begin{cases} \dot{y}_k = -(2k - 1)^2 y_k - \frac{4}{(2k - 1)\pi} \eta & k = 1, 2, \dots, \\ \dot{q} = \eta, \end{cases}$$

$$y_k(0) = 0, \quad q(0) = 3/4.$$

A funcional toma a forma

$$J = \int_0^{10} \left(\frac{\pi}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} y_k^2 + 4(q - 3 \cos(\pi t)/4) \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{y_k}{2k-1} + \pi(q - 3 \cos(\pi t)/4)^2 \right) dt$$

Tomando

$$Y = \begin{bmatrix} q(0) \\ \vdots \\ y_k(0) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(2k-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 4 \\ -(2k-1)\pi \\ \vdots \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \frac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ \frac{4}{2k-1} & 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\pi \cos(\pi t) \\ \vdots \\ -\frac{3 \cos(\pi t)}{2k-1} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(2k-1)^2 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix},$$

temos

$$J = \int_0^{10} (\langle Y | MY \rangle + \langle Y | \mu \rangle) dt + \frac{45\pi}{16},$$

$$Y(t) = S(t)Y(0) + \int_0^t S(t-s)B\eta(s)ds.$$

Vamos agora mostrar que

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \sin((2k-1)x),$$

onde

$$y_k(t) = -\frac{4}{(2k-1)\pi} \int_0^t e^{-(2k-1)^2(t-s)} \eta(s) ds$$

é solução da equação $y_t = y_{xx} - \eta$. Começemos por notar que y é limitada. Temos

$$\left| \sum_{k=1}^N y_k(t) \sin((2k-1)x) \right| \leq \sum_{k=1}^N |y_k(t)| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1 - e^{-(2k-1)^2 t}}{(2k-1)^3} \leq \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} < \infty$$

para qualquer $N \in \mathbb{N}$. De forma análoga, concluímos que $\left| \sum_{k=1}^N (2k-1)y_k(t) \cos((2k-1)x) \right| < \infty$. Logo, $y \in V_2(Q_T)$.

Seja $\phi \in W_2^{1,1}(Q_T)$ tal que $\phi(0,t) = \phi(\pi,t) = 0$, $t \in [0,10]$. É claro que $\phi(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t) \sin(ix)$, onde $\phi_i(t) = \int_0^\pi \phi(x,t) \sin(ix) dx$. Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi y(x,t_1) \phi(x,t_1) dx &= \int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k(t_1) \sin((2k-1)x) \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t_1) \sin(ix) \right) dx \\
&= \int_0^\pi \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^N y_k(t_1) \sin((2k-1)x) \right) \left(\sum_{i=1}^{2N-1} \phi_i(t_1) \sin(ix) \right) dx \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^N y_k(t_1) \sin((2k-1)x) \right) \left(\sum_{i=1}^{2N-1} \phi_i(t_1) \sin(ix) \right) dx \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi \sum_{k=1}^N y_k(t_1) \phi_{2k-1}(t_1) \sin^2((2k-1)x) dx \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N y_k(t_1) \phi_{2k-1}(t_1) \int_0^\pi \sin^2((2k-1)x) dx \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^N y_k(t_1) \phi_{2k-1}(t_1) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t_1) \phi_{2k-1}(t_1).
\end{aligned}$$

De modo análogo, provamos ainda que

$$\int_0^{t_1} \int_0^\pi y \phi_t dx dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} y_k (\phi_{2k-1})_t dt,$$

$$\int_0^{t_1} \int_0^\pi y_x \phi_x dx dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^2 y_k \phi_{2k-1} dt$$

e

$$\int_0^{t_1} \int_0^\pi \eta \phi dx dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{(2k-1)\pi} \eta \phi_{2k-1} dt,$$

onde, a convergência da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^2 y_k \phi_{2k-1}$$

é obtida a partir das desigualdades de Holder e de Bessel. Notemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(2k-1)^2 y_k \phi_{2k-1}| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^4 |y_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\phi_{2k-1}|^2 \right)^{1/2}$$

$$< \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \right)^{1/2} \|\phi\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R})}$$

Ora, uma vez que

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} y_k(\phi_k)_t dt &= \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t_1) \phi_k(t_1) - \int_0^{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} (y_k)_t \phi_k dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t_1) \phi_k(t_1) + \int_0^{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^2 y_k \phi_k dt + \int_0^{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{(2k-1)\pi} \eta(t) \phi_k(t) dt, \end{aligned}$$

temos

$$\int_0^{\pi} y(x, t_1) \phi(x, t_1) dx - \int_0^{t_1} \int_0^{\pi} y \phi_t dx dt + \int_0^{t_1} \int_0^{\pi} y_x \phi_x dx dt + \int_0^{t_1} \int_0^{\pi} \eta \phi dx dt = 0,$$

para todo $t_1 \in [0, 10]$.

Atribua-se

$$\bar{J} = \frac{T}{N} \sum_{k=1}^N (\langle \bar{Y}_k | M \bar{Y}_k \rangle + \langle \bar{Y}_k | \mu(k/N) \rangle) + \frac{45\pi}{16}.$$

O valor de \bar{Y}_k pode ser calculado numericamente como

$$\bar{Y}_k = S(k/N) Y_0 + \frac{T}{N} \sum_{i=1}^k (S((k-i)/N) B \bar{\eta}(i)).$$

Sejam $N = 10$, $\varepsilon = 10^{-12}$, $F(\bar{\eta}, \sigma) = -\ln(\sigma - \bar{J}(\bar{\eta})) - \ln(\bar{\sigma} - \sigma) - \sum_{k=1}^{10} \ln(1 - \bar{\eta}(k)^2)$, $\eta_{in} \equiv 0$, $\sigma_{in} = \bar{J}(\eta_{in}) + 50$, and $\bar{\sigma} = \sigma_{in} + 50$. (precisamos fazer σ_{in} e $\bar{\sigma}$ suficientemente grandes para garantir a desigualdade $\|\nabla(F)(\eta_{in}, \sigma_{in})\|_{(\eta_{in}, \sigma_{in})}^F < \beta$). Usando o método de caminho interior com $\beta = 1/9$ e $\gamma = 5/36$, obtemos, após 693 iterações, a solução

$$\eta = [-1, -1, 0.73, -1, 1, -1, 1, -1, 0.95, -1, -0.18]$$

e a funcional toma o valor 15.8919. A estimativa teórica para o número de iterações é 1096.

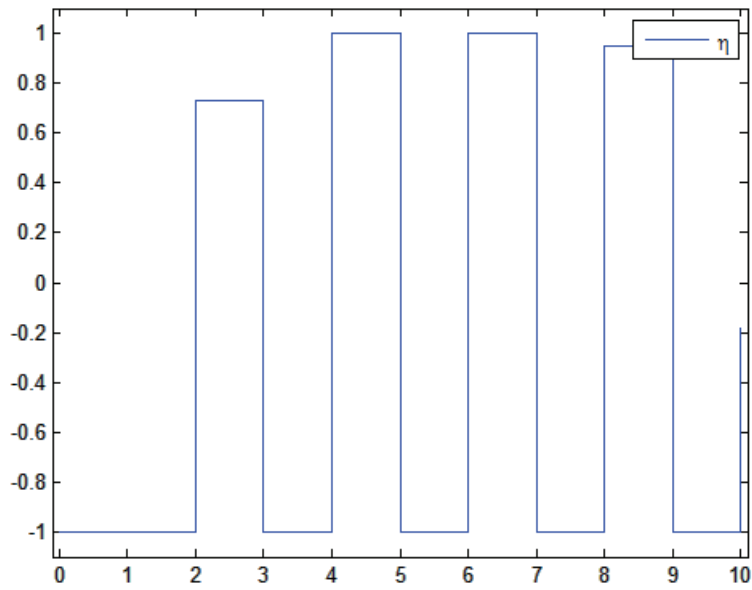


Figura 1: Evolução do controlo discreto

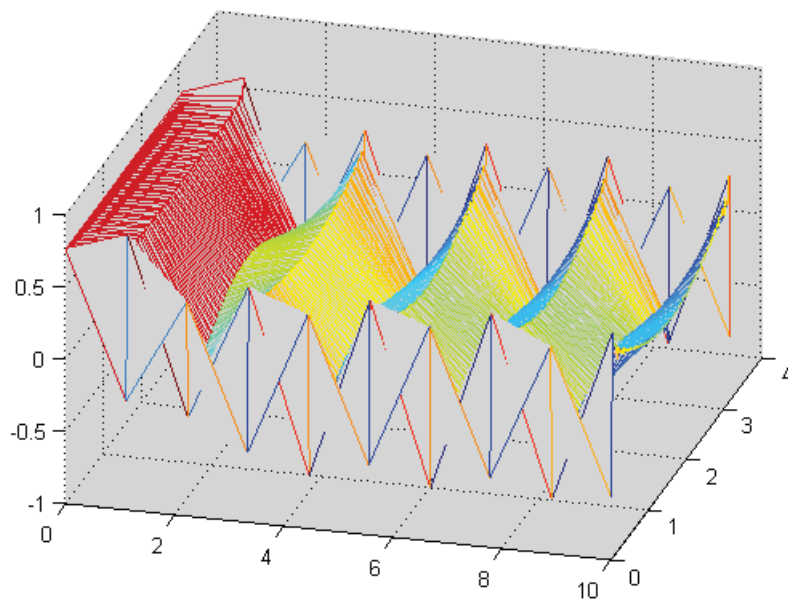


Figura 2: Evolução da função θ

A tabela 2 mostra-nos o número real e o número estimado de iterações para diferentes precisões e outras funções objetivo.

precisão	e^{-t}	$\cos(\pi t)$	$\cos(10t)$	$ \cos(5t) $	estimado
10^{-1}	85	138	116	85	431
10^{-2}	110	188	158	111	492
10^{-3}	133	239	199	136	552
10^{-4}	157	289	240	159	613
10^{-5}	180	340	281	182	673
10^{-6}	203	390	323	206	733
10^{-7}	227	441	364	229	794
10^{-8}	250	491	405	252	854
10^{-9}	273	542	446	276	915
10^{-10}	297	592	488	299	975
10^{-11}	320	643	529	322	1035
10^{-12}	343	693	570	345	1096
10^{-13}	367	744	611	369	1156
10^{-14}	389	794	626	390	1217

Tabela 2: 10 partições

Referências

- [1] Badkoubeh, A. e Guchuan, Z., *Tracking Control of a Linear Parabolic PDE with In-domain Point Actuators*, World Academy of Science, Engineering and Technology, Vol 5, No. 11, 2011, pp. 650-655.
- [2] Byrnes, I., Gilliam, S., Isidori, A. e Shubov, I., *Interior Point Control of a Heat Equation Using Zero Dynamics Design*. In: *American Control Conference, 2006*, IEEE Conference Publications, 2006.
- [3] Huntley, E., *Optimal boundary control of a tracking problem for a parabolic distributed parameter system*, International Journal of Control, 1985, Vol. 42, No. 2, pp. 411-431.
- [4] Kharitonov, A. e Sawodny, O., *Optimal flatness based control for heating processes in the glass industry*, Conference on Decision and Control, Atlantis, Bahamas, 2004, pp. 2435-2440.
- [5] Ladyženskaja, O., Solonnikov, V. e Ural'ceva, N., *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, 1968.
- [6] Nesterov, Y. e Nemirovskii, A., *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*, SIAM, Philadelphia, 1994.
- [7] Nesterov, Y., *Introductory Lectures on Convex Programming*, Kluwe Academic Publishers, 2004.
- [8] Pandolfi, L. e Priola, E., *Tracking Control of Parabolic Systems*. In: *System Modeling and Optimization*, Springer US, 2005, Vol. 166, pp. 135-146.
- [9] Pisano, A., Orlov, Y. e Usai, E., *Tracking Control of the Uncertain Heat and Wave Equation Via Power-fractional and Sliding-mode Techniques*, SIAM J. Control Optim. 2011 Vol. 49, No. 2, pp. 363–382.
- [10] Renardy, M. e Rogers, R., *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

- [11] Stonier, R. e Drumm, M., *Optimal boundary control of a tracking problem for a parabolic distributed system with open-loop control using evolutionary algorithms*, Journal of Systemics, Cybernetics and Informatics, 2003, Vol. 1, No. 4, pp. 38-43.