



Cinemática e Dinâmica de Engrenagens

1. Aspectos Gerais sobre
Engrenagens

Paulo Flores
José Gomes



Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Guimarães 2014

ÍNDICE

1. Aspectos Gerais sobre Engrenagens	1
1.1. Introdução.....	1
1.2. Breve Resenha Histórica	6
1.3. Classificação das Engrenagens.....	8
1.4. Nomenclatura Fundamental	16
1.5. Geração de Perfis de Dentes.....	22
1.6. Dentado em Evolvente de Círculo.....	28
1.7. Princípio Fundamental do Engrenamento	34
1.8. Revisão de Conhecimentos	39
1.9. Referências Bibliográficas	41

1. ASPETOS GERAIS SOBRE ENGRENAGENS

1.1. INTRODUÇÃO

Nos mecanismos¹, a transmissão ou transformação de movimento pode ser realizada de duas formas distintas, nomeadamente por contacto direto ou por ligação intermédia (Flores e Claro, 2007). No primeiro caso, o movimento é promovido pelo contacto entre as superfícies dos órgãos motor e movido. Neste grupo incluem-se, por exemplo, os sistemas de transmissão por rodas de atrito, as engrenagens e os mecanismos do tipo came-seguidor, tal como ilustra a figura 1.1.

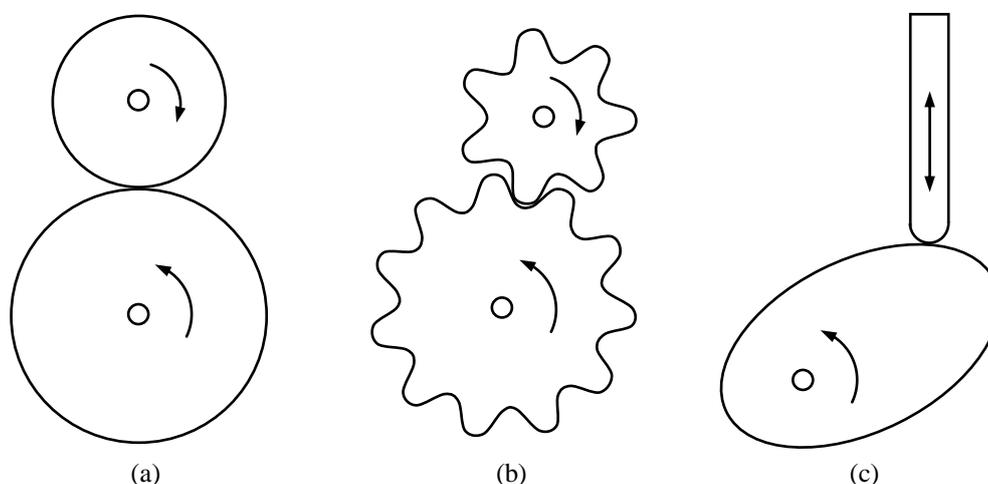


Figura 1.1 – Sistemas de transmissão de movimento por contacto direto: (a) Rodas de atrito; (b) Engrenagem; (c) Mecanismo came-seguidor.

Por seu lado, no segundo grupo encontram-se os sistemas de transmissão de movimento em que os órgãos motor e movido estão ligados por um corpo intermédio. Quando a transmissão de movimento é realizada por ligação intermédia, aquela pode ser rígida, como no caso de um mecanismo de quatro barras, ou flexível, como nas correias e nas correntes. A figura 1.2 ilustra esquematicamente estes três tipos de transmissão de movimento por ligação intermédia (Flores e Claro, 2007).

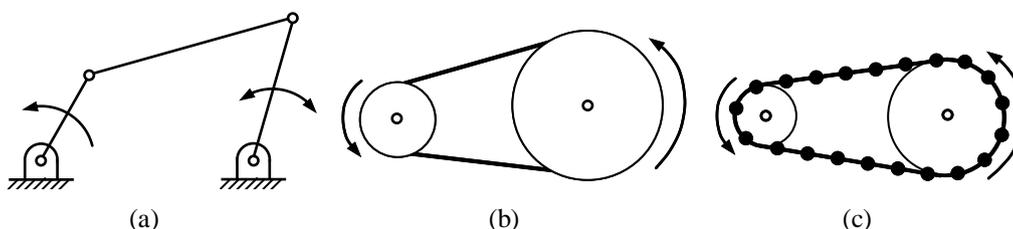


Figura 1.2 – Sistemas de transmissão de movimento por ligação intermédia: (a) Mecanismo de quatro barras; (b) Transmissão por correia; (c) Transmissão por corrente.

¹ Um mecanismo é um conjunto de corpos, em que um deles é fixo, ligados entre si por pares cinemáticos com propósito de transmitir ou transformar um determinado movimento (Flores, 2012).

Na figura 1.3 estão apresentados, de forma resumida, alguns dos principais sistemas de transmissão de movimento utilizados em máquinas e mecanismos.

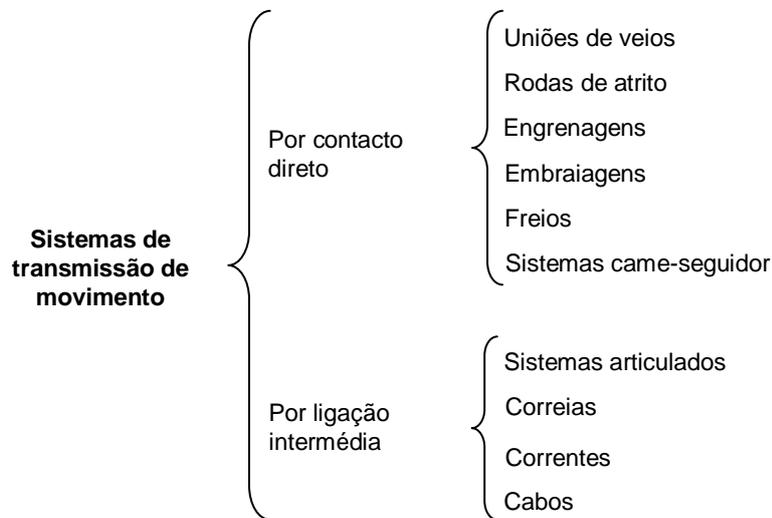


Figura 1.3 – Classificação dos sistemas de transmissão de movimento frequentemente utilizados em máquinas e mecanismos.

Quando se pretende efetuar a ligação entre dois veios em que os seus eixos estão alinhados, ou apresentam um ligeiro desalinhamento axial ou angular, podem utilizar-se órgãos mecânicos denominados genericamente por uniões de veios ou acoplamentos (Cunha, 2008). As uniões elásticas, as juntas *Oldham* e as juntas *Cardan* ou universais, representadas na figura 1.4, são exemplos de uniões de veios frequentemente usadas em mecânica. De um modo geral, este tipo de opção para ligar ou unir veios é adotada quando as velocidades de rotação dos órgãos motor e movido são iguais (Shigley e Mischke, 1989).

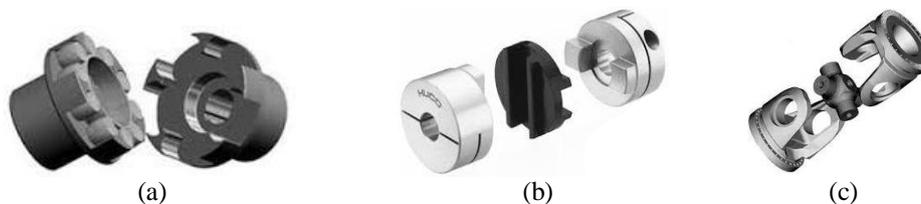


Figura 1.4 – Uniões de veios: (a) União elástica; (b) Junta Oldham; (c) Junta Cardan.

Ao invés, quando os eixos geométricos dos órgãos motor e movido se encontram afastados um do outro e/ou quando se pretende obter uma velocidade de saída diferente da velocidade de entrada, quer em módulo, quer em sentido, pode recorrer-se a outro tipo de transmissão de movimento, tal como as rodas de atrito representadas na figura 1.1a (Antunes, 2012). Quando as forças normais desenvolvidas na zona de contacto são de tal ordem que evitam o escorregamento, então pode dizer-se que a transmissão do movimento entre aquelas rodas é garantida. Esta situação é verdadeira quando as potências em jogo são relativamente baixas. Na realidade, as rodas de atrito têm relativamente pouco interesse prático, uma vez que as forças normais podem causar deformações plásticas nas zonas de contacto e, concomitantemente, penalizar, sobremaneira, o seu desempenho. Por outro lado, o elevado atrito gerado entre as rodas origina desgaste significativo, principalmente na roda de menor diâme-

tro. Por estas razões, as rodas de atrito são apenas utilizadas em situações particulares que envolvam potências reduzidas (Spotts e Shoup, 1998). Com efeito, para obviar as desvantagens associadas às rodas de atrito, talham-se dentes, de perfis idênticos, nas periferias das rodas de modo a garantir que os dentes da roda motora empurram ou arrastam os dentes da roda movida. Assim, o contacto ocorre sem escorregamento e, por conseguinte, a relação de transmissão² é constante. Na realidade, a principal característica das engrenagens é a de transmitirem movimento entre os órgãos motor e movido com uma relação constante. As engrenagens³ são, pois, mecanismos compostos por rodas dentadas rígidas que transmitem movimento entre veios afastados e/ou quando se pretende reduzir ou aumentar a velocidade ou o momento do veio motor. Nestes órgãos mecânicos, o movimento é transmitido pelos dentes da roda, motora que rolam sem escorregar sobre os dentes da roda movida. A roda de menor dimensão e, por isso, também de menor número de dentes, denomina-se de pinhão ou carreto. Por seu lado, a roda de maior dimensão é designada simplesmente por roda ou coroa. Estas denominações nada têm a ver com o facto de uma roda ser motora ou movida, mas sim, e apenas, com as dimensões das rodas (Henriot, 1979).

As engrenagens, que podem ser consideradas como uma evolução ou aperfeiçoamento das rodas de atrito, são utilizadas para transformar o movimento de um veio rotativo num movimento de rotação ou de translação, tal como mostra a figura 1.5. De entre os diversos sistemas de transmissão de movimento de rotação, as engrenagens são bastante versáteis. De facto, utilizando rodas dentadas é possível transmitir movimento entre veios paralelos entre si ou não. As engrenagens permitem ainda operar sistemas mecânicos de baixas e altas rotações. Em geral, as engrenagens apresentam rendimentos considerados elevados (até 99%), sendo exceção as engrenagens de parafuso sem-fim em que os rendimentos são relativamente baixos (da ordem dos 45-70%) devido ao elevado escorregamento que apresentam (Niemann, 1971).



Figura 1.5 – (a) Transmissão de movimento de rotação em rotação; (b) Transmissão de movimento de rotação em translação.

Outras características que concorrem para a popularidade e sucesso das engrenagens prendem-se com (Branco *et al.*, 2009):

- A elevada capacidade de resistência a sobrecargas,
- A boa precisão na transmissão do movimento,
- A relação de transmissão constante e independente das cargas em jogo,
- A boa fiabilidade e durabilidade,
- As dimensões reduzidas do atravancamento.

² Relação de transmissão é o quociente entre as velocidades de rotação de dois corpos, que transmitem movimento de um para o outro.

³ O termo engrenagem diz sempre respeito a um par de rodas dentadas, uma das quais, a mandante, arrasta a outra, a mandada. Não deve, portanto, confundir-se roda dentada com engrenagem.

Um dos exemplos mais significativos relativo à compactidade das engrenagens observa-se nos relógios mecânicos, em que, num espaço bastante reduzido, é possível obter relações de transmissão elevadas. Deve também referir-se o excelente desempenho das rodas dentadas, sendo que para tal basta registar a quantidade de milhares de quilómetros que os diferenciais dos automóveis proporcionam sem necessitarem de reparação ou de substituição (Wilson e Sadler, 1993).

Para além destes aspetos relevantes, as engrenagens podem ser fabricadas em diversos materiais, tais como os metálicos e os poliméricos. Todavia, as engrenagens, pelo facto de serem constituídas por corpos rígidos, não absorvem choques e necessitam, em geral, de ser lubrificadas. Acresce ainda o facto de serem relativamente caras e ruidosas, e podem ser afectadas, no seu desempenho, pelas condições ambientais, tais como a humidade e as poeiras. Finalmente, deve mencionar-se que as engrenagens podem ser utilizadas para transmitir movimento entre eixos paralelos, concorrentes ou não-complanares, tal como se exemplifica na figura 1.6.

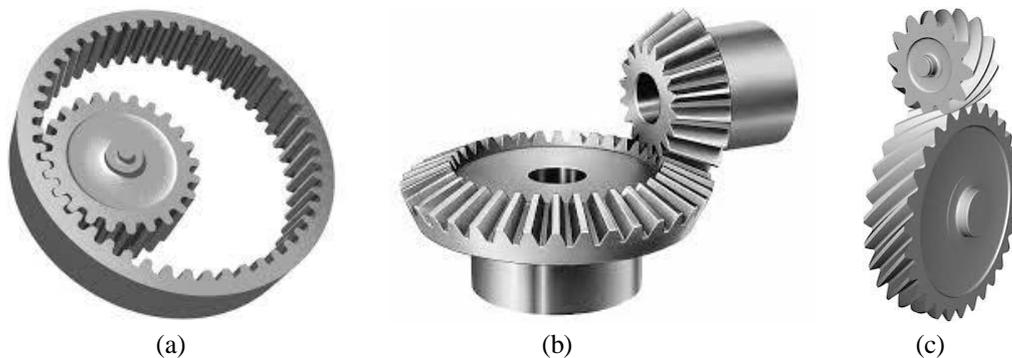


Figura 1.6 – (a) Engrenagem de eixos paralelos; (b) Engrenagem de eixos concorrentes; (c) Engrenagem de eixos não-complanares.

Os principais processos de fabrico das rodas dentadas metálicas são a maquinaria, a sinterização, a fundição e a conformação. Em geral, estes processos requerem acabamentos superficiais posteriores. Por seu lado, as rodas dentadas poliméricas são obtidas por injeção. As rodas dentadas poliméricas apresentam como principais vantagens o baixo peso⁴ e o custo reduzido. Este último aspeto é particularmente relevante quando se trata de grandes séries. As rodas poliméricas têm, todavia, menor capacidade de carga. Este tipo de rodas dentadas é utilizado, sobretudo, em sistemas mecânicos de pequena dimensão, tais como os eletrodomésticos e os brinquedos. A figura 1.7 mostra engrenagens poliméricas utilizadas nas aplicações referidas.

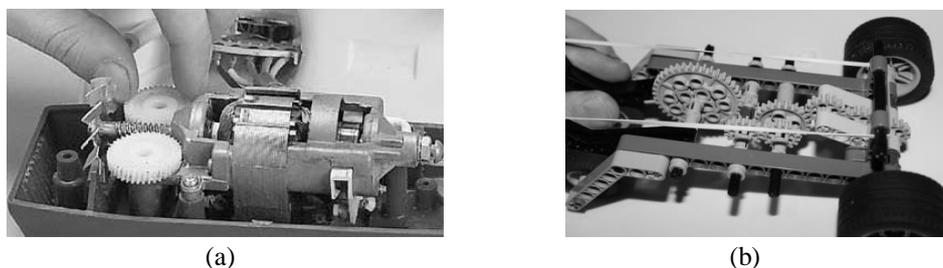


Figura 1.7 – (a) Engrenagens de uma batadeira; (b) Engrenagens de um brinquedo.

⁴ Em relação às rodas dentadas de aço, as rodas dentadas poliméricas têm uma densidade cerca de sete vezes menor (Smith, 1990).

É vasto e bastante diversificado o campo de aplicações das rodas dentadas. A título informativo, na figura 1.8 apresentam-se alguns exemplos, tais como um relógio mecânico, um diferencial de automóvel, um pinhão-cremalheira utilizado em comboios de montanha, uma roda dentada de uma máquina de grande porte⁵, um contador e uma caixa redutora.

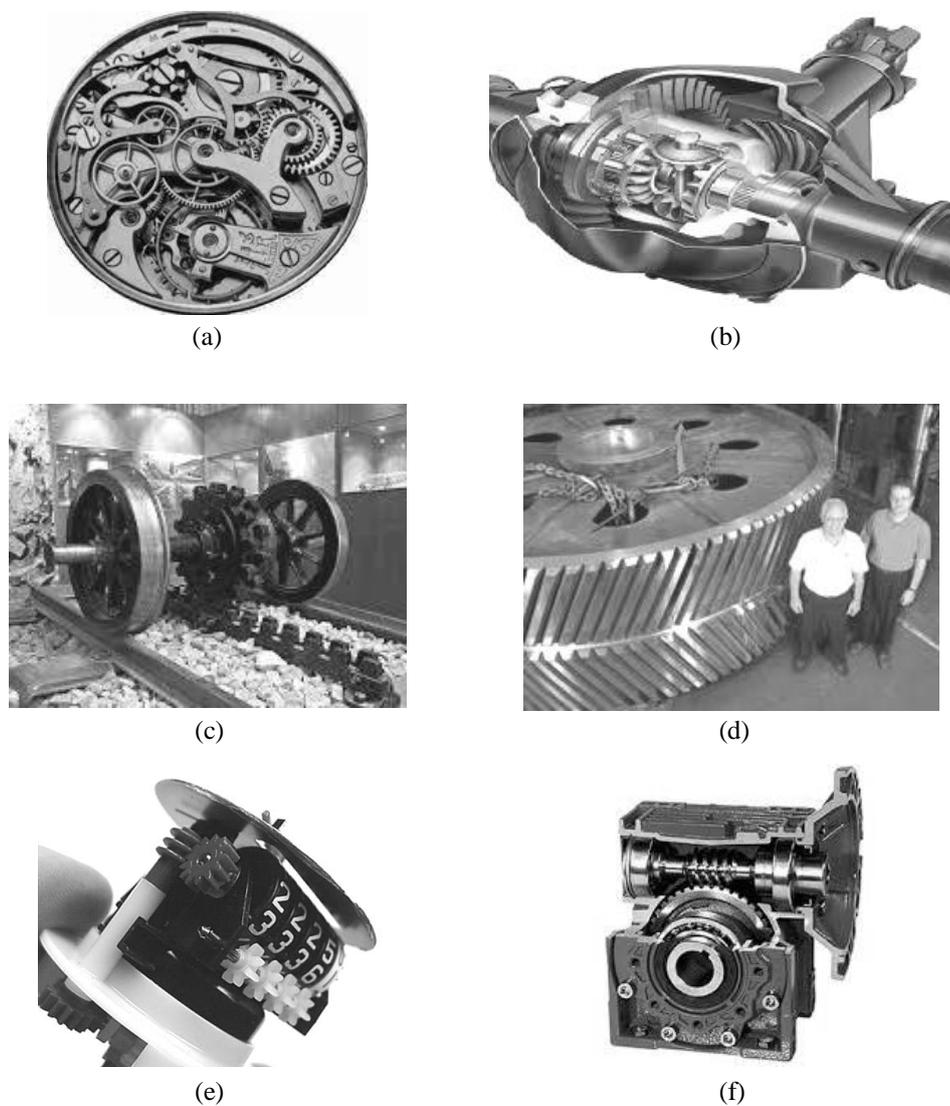


Figura 1.8 – (a) Relógio mecânico; (b) Diferencial de automóvel; (c) Pinhão-cremalheira usado em comboios de montanha; (d) Roda dentada de máquina de grande porte; (e) Contador; (f) Caixa redutora.

⁵ As rodas dentadas de grandes dimensões são utilizadas, por exemplo, na indústria cimenteira.

1.2. BREVE RESENHA HISTÓRICA

É longa a história associada à gênese e evolução das engrenagens. Já por volta do ano 1700 a.C. surgem, em poemas da literatura Hindu, referências a carros e a rodas. Há menções a engrenagens nos trabalhos de Aristóteles (384-322) e de Arquimedes (287-212). Um dos primeiros dispositivos que incluía um conjunto de engrenagens existia já no ano 2634 a.C. na China, cuja denominação era o “carro que segue o sul”. Tratava-se, na realidade, de um engenhoso sistema de engrenagens montado sobre um carro (ou carroça) que, mercê do funcionamento de um trem epicicloidal⁶, mantinha o braço de uma figura humana sempre apontado para o sul, independentemente da direção em que o carro se deslocava (Flores e Claro, 2007). A figura 1.9 ilustra um modelo do carro que segue o sul. Este dispositivo era, na época, utilizado como uma espécie de bússola para orientar os viajantes que atravessavam o deserto de Gobi⁷. Há autores que defendem que o carro que segue o sul existiu de facto, mas, muito provavelmente, não foi utilizado como sistema de ajuda à navegação. Strandh (1979) demonstrou que um desvio de 1% no diâmetro das rodas, resultaria em erros da ordem dos 180° após percorridos poucos quilómetros.

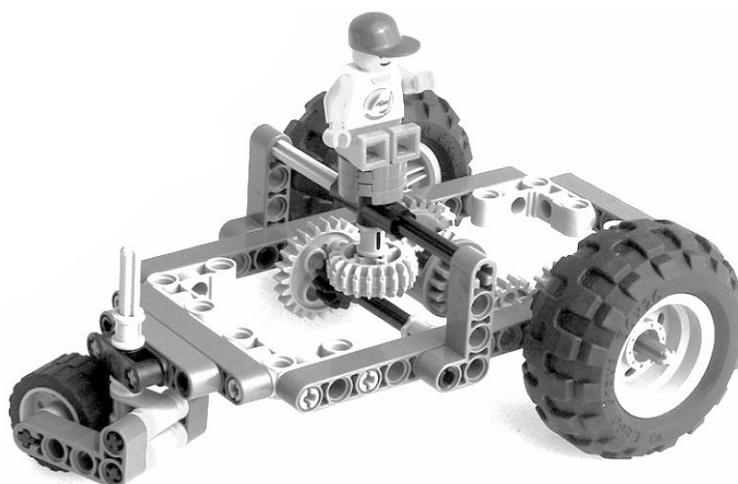


Figura 1.9 – Modelo do carro que segue o sul inventado na China no ano 260 a.C.

A figura 1.10a apresenta uma engrenagem primitiva usada pelos chineses no século III a.C. Este tipo de engrenagem é ainda utilizado nos nossos dias em sistemas de elevação de água, sendo vulgarmente denominadas de noras (Branco *et al.*, 2009). Este tipo de roda é também utilizado em moinhos. As rodas dentadas primitivas eram muito rudimentares, sendo constituídas por pedaços de madeira⁸ que se inseriam num disco ou numa roda. Mais tarde, em pleno Quatrocento, o italiano Leonardo da Vinci (1452-1519) apresenta inúmeras ilustrações onde se podem identificar arranjos de engrenagens, tal como o que se ilustra na figura 1.10b (Drago, 1988).

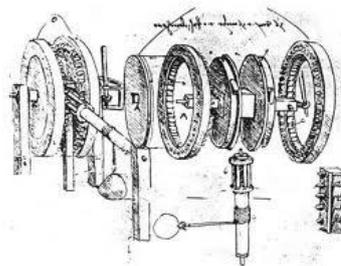
⁶ Trem epicicloidal, também designado por redutor planetário, é um caso especial de engrenagens que permite obter relações de transmissão bastante elevadas em soluções bastante compactas.

⁷ O deserto de Gobi é um extenso deserto situado entre a região norte da China e a região sul da Mongólia. A título de curiosidade, refira-se que o vocábulo *gobi* significa deserto em Mongol.

⁸ Na realidade, as primeiras rodas dentadas eram feitas de madeira ou em materiais similares facilmente trabalháveis. Atualmente, os principais materiais são o aço de baixo carbono, o aço inoxidável, o ferro fundido nodular, o bronze e os materiais poliméricos.



(a)



(b)

Figura 1.10 – (a) Engrenagem primitiva; (b) Representação de engrenagens segundo Leonardo da Vinci.

Até ao século XVI, as engrenagens eram produzidas manualmente, cujo perfil final dos dentes era obtido mais por acidente do que por planeamento ou projeto. A primeira máquina capaz de fabricar rodas dentadas foi desenvolvida pelo espanhol Juanelo Turriano (1501-1585), a qual foi especialmente concebida para facilitar a construção de um relógio mecânico para o Rei Carlos V de Espanha (Vera, 1996). O relógio incluía cerca de 2000 rodas dentadas. De facto, um campo de aplicação que contribuiu significativamente para o desenvolvimento das engrenagens foi o da relojoaria. O primeiro relógio mecânico, em relação ao qual existem esquemas básicos de projeto, deve-se ao italiano Giovanni Dondi (1348-1364) (Drago, 1988).

Com o advento da revolução industrial, no século XVIII, as engrenagens passaram a ser fabricadas em materiais metálicos, apresentando, por isso, maior durabilidade e capacidade de carga. No início do século XIX, a indústria da produção de rodas dentadas assumia já a forma tal como hoje é conhecida, em que os perfis dos dentes obedeciam a curvas previamente definidas, tais como as curvas cicloide⁹ e evolvente¹⁰ (Flores, 2009). A evolvente é, sem dúvida, a forma geométrica mais comum nos perfis dos dentes das engrenagens. De entre os principais nomes que contribuíram decisivamente para o estudo e desenvolvimento das engrenagens podem ser destacados os que se listam na tabela 1.1. Outros autores poderiam ser incluídos, porém, os que aqui se apresentam, resumem, de algum modo, as contribuições mais relevantes (Drago, 1988). Na atualidade, os novos desenvolvimentos na área científico-técnica das engrenagens prendem-se com os novos materiais, as novas técnicas de fabrico e as metodologias avançadas de modelação, simulação, análise e otimização de rodas dentadas, bem como ainda o uso extensivo da eletrónica (Li *et al.*, 2014; Denkena *et al.*, 2014; Simon, 2014).

Tabela 1.1 – Alguns dos principais autores que contribuíram para o estudo e desenvolvimento das engrenagens.

Nome	Ano	Contribuição
Nicolau de Cusa	1451	Efetou estudos sobre a curva cicloidal.
Girolano Cardano	1525	Desenvolveu os primeiros modelos matemáticos de engrenagens.
Leonhard Euler	1754	Conhecido como o pai da engrenagem em evolvente em virtude dos seus estudos.
Robert Willis	1832	Desenvolveu inúmeros estudos sobre engrenagens e trens de engrenagens.
Wilfred Lewis	1892	Propôs um modelo simplificado para avaliar as tensões desenvolvidas nos dentes.

⁹ Cicloide é uma curva traçada por um ponto de uma circunferência, quando esta roda sem deslizar ao longo de uma reta ou sobre uma circunferência.

¹⁰ Evolvente do círculo é a curva definida por um ponto de uma reta que roda sem escorregar sobre um círculo.

1.3. CLASSIFICAÇÃO DAS ENGRENAGENS

Vários são os critérios que permitem classificar as engrenagens mais comumente utilizadas em máquinas e mecanismos. Um dos principais critérios de classificação das engrenagens tem a ver com a disposição relativa dos eixos das rodas (Cunha, 2008). Assim, três grupos podem ser distinguidos, a saber:

- Engrenagens cilíndricas, quando os eixos de rotação são paralelos,
- Engrenagens cónicas, quando os eixos de rotação são concorrentes,
- Engrenagens torsas, quando os eixos de rotação não são coplanares.

Na figura 1.11 estão representadas engrenagens cilíndricas, cónicas e torsas, conforme descrição anteriormente exposta. Deve referir-se que nas engrenagens cilíndricas e cónicas os eixos são coplanares (Shigley e Mischke, 1989).

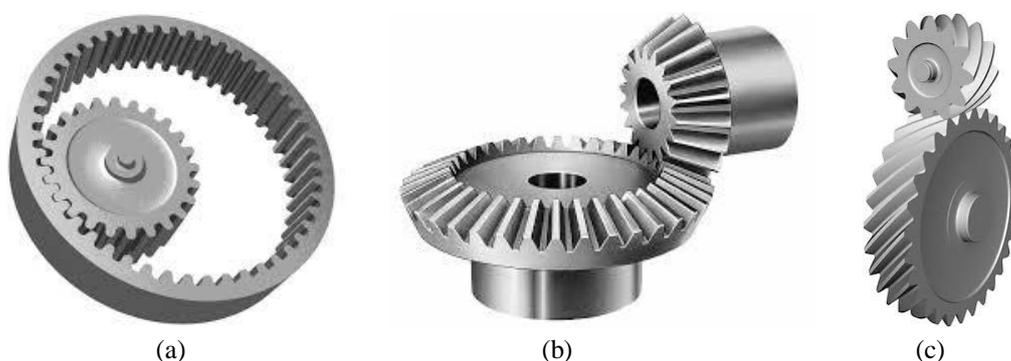


Figura 1.11 – (a) Engrenagem cilíndrica; (b) Engrenagem cónica; (c) Engrenagem torsa.

Um segundo critério, utilizado na classificação das engrenagens, é o que considera a forma dos dentes. Costumam distinguir-se os seguintes tipos (Henriot, 1979):

- Engrenagens de dentes retos,
- Engrenagens de dentes helicoidais,
- Engrenagens de dentes espirais.

A figura 1.12 apresenta duas engrenagens cilíndricas, de dentes retos e de dentes helicoidais (inclinados), e uma engrenagem cónica de dentes espirais (curvos).

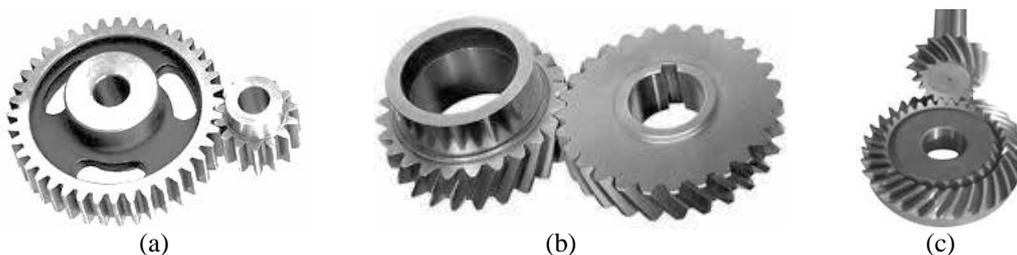


Figura 1.12 – (a) Engrenagem cilíndrica de dentes retos; (b) Engrenagem cilíndrica de dentes helicoidais; (c) Engrenagem cónica de dentes espirais.

Finalmente, um terceiro critério de classificação das engrenagens é o que considera a posição relativa dos centros instantâneos de rotação¹¹. Assim, as engrenagens

¹¹ Centro instantâneo de rotação é o local instantâneo de um par de pontos coincidentes e pertencentes a corpos diferentes para os quais a velocidade absoluta é igual. Por outras palavras, o conceito de centro instantâneo de rotação é o local de um par de pontos coincidentes, de dois corpos distintos, para os quais a velocidade aparente de um dos pontos é nula quando o observador se situa no outro.

podem ser exteriores ou interiores, conforme o centro instantâneo de rotação se situe, ou não, entre os eixos de rotação das rodas. Na figura 1.13 estão representadas engrenagens cilíndricas de dentes retos exteriores e interiores. Em geral, as engrenagens interiores permitem distâncias menores entre os eixos das rodas. Ao contrário das engrenagens exteriores, nas engrenagens interiores, as rodas dentadas rodam no mesmo sentido. As rodas com dentado interior são normalmente utilizadas em sistemas de engrenagens planetárias, quando há limitação de espaço ou quando se pretende proteger os dentes (Juvinal e Marshek, 2006).



Figura 1.13 – (a) Engrenagem cilíndrica exterior; (b) Engrenagem cilíndrica interior.

Os critérios de classificação das engrenagens supramencionados podem ser combinados, especialmente os dois primeiros. Com efeito, as engrenagens cilíndricas¹² podem ter dentes retos, dentes helicoidais ou dentes em espinha, também denominados dentes de dupla hélice (Niemann, 1971). A figura 1.13a mostra uma engrenagem cilíndrica de dentes retos, que é das mais comuns em mecânica quando se pretende transmitir movimento entre eixos paralelos. O projeto, fabrico, montagem e manutenção deste tipo de engrenagem é relativamente simples, já que transmite apenas cargas radiais e admitem grandes relações de transmissão (8:1). As engrenagens cilíndricas de dentes retos apresentam rendimentos elevados (96-99%). Contudo, quando operam a elevadas velocidades de rotação são algo ruidosas. Estas engrenagens podem funcionar em um ou mais andares, podendo transmitir potências da ordem dos 20000 Cv, com velocidades tangenciais até 150-200 m/s (Niemann, 1971).

As engrenagens cilíndricas de dentes helicoidais apresentam¹³ um funcionamento mais suave e menos ruidoso que as de dentes retos, uma vez que o engrenamento se dá de forma mais progressiva. A figura 1.12b mostra uma engrenagem cilíndrica de dentes helicoidais. Os parâmetros de funcionamento e de desempenho são idênticos aos do dentado reto. Todavia, nas engrenagens de dentado helicoidal desenvolvem-se cargas axiais, o que não acontece com o dentado reto. Esta limitação pode ser ultrapassada recorrendo ao dentado em espinha¹⁴, ilustrado na figura 1.14a. De facto, o dentado em espinha ou de dupla hélice apresenta as mesmas vantagens do dentado helicoidal, às quais acresce ainda o facto de não serem desenvolvidos esforços axiais. As engrenagens com dentes em espinha são, em geral, utilizadas quando se pretende transmitir potências elevadas (Norton, 2013).

¹² Numa engrenagem cilíndrica, a relação de transmissão é a mesma que se obteria considerando dois cilindros imaginários equivalentes, comprimidos um contra o outro, e que rodam um relativamente ao outro sem escorregar.

¹³ Nas rodas de dentes helicoidais, os dentes estão dispostos transversalmente em forma de hélice em relação ao eixo da roda.

¹⁴ As engrenagens cilíndricas de dentes em espinha ou de dupla hélice requerem máquinas-ferramenta especiais para o seu fabrico.

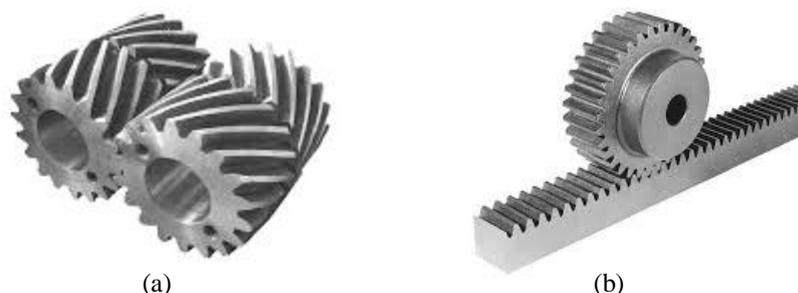


Figura 1.14 – (a) Engrenagem cilíndrica de dentado em espinha ou de dupla hélice;
(b) Engrenagem cilíndrica pinhão-cremalheira.

Quando numa engrenagem cilíndrica, de dentado reto ou helicoidal, uma das rodas tem raio infinito, então aquela é vulgarmente denominada de pinhão-cremalheira. Este tipo particular de engrenagem cilíndrica transforma o movimento de rotação da roda em movimento de translação da cremalheira. A figura 1.14b ilustra um exemplo de uma engrenagem do tipo pinhão-cremalheira. Este tipo de engrenagem é fácil de fabricar e, por vezes, é usada como ferramenta de corte para gerar rodas dentadas.

As engrenagens cónicas podem ter dentes retos, dentes helicoidais, dentes espirais e podem ainda ser descentradas (hipoide¹⁵), tal como se apresenta na figura 1.15. As engrenagens cónicas são utilizadas quando há necessidade de cruzar os eixos dos órgãos motor e movido. Em geral, este tipo de engrenagem admite relações de transmissão até 6:1, tendo um desempenho comparável ao das engrenagens cilíndricas. As velocidades tangenciais podem atingir os 50-75 m/s. É frequente encontrar situações práticas em que se associam engrenagens cónicas com engrenagens cilíndricas, como é exemplo o caso dos diferenciais dos automóveis. As engrenagens cónicas com dentes espirais e a engrenagem hipoide apresentam maior capacidade de carga, maior relação de transmissão (10:1) e menor ruído do que as engrenagens cónicas de dentado reto e helicoidal. Contudo, apresentam, em geral, rendimentos ligeiramente inferiores (60-95%), bem como uma maior geração de calor. As engrenagens cónicas exigem maior rigor, quer no fabrico, quer na montagem, sendo, por isso, mais caras. As engrenagens hipoides permitem soluções bastante compactas e requerem um lubrificante de elevada viscosidade (Niemann, 1971).

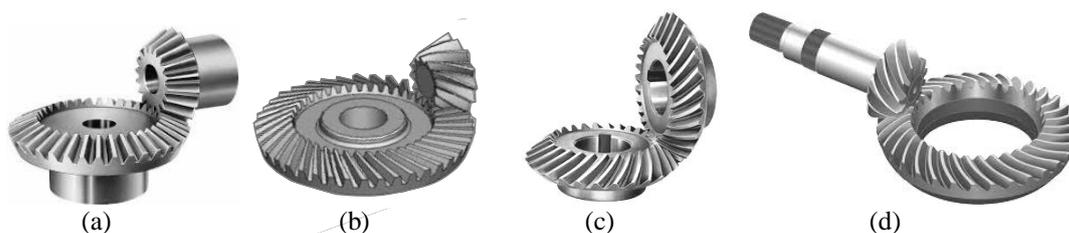


Figura 1.15 – (a) Engrenagem cónica de dentes retos; (b) Engrenagem cónica de dentes helicoidais; (c) Engrenagem cónica de dentes espirais; (d) Hipoide.

As engrenagens torsas podem apresentar dentes helicoidais ou dentes espirais. No caso particular das engrenagens torsas de dentes helicoidais em que o carroto toma a forma de um parafuso, estas denominam-se de engrenagens de parafuso sem-fim, ou simplesmente sem-fim. A figura 1.16 ilustra estes três tipos de engrenagens torsas, as quais são, em geral, utilizadas para fazer a mudança de direção do movimento. As

¹⁵ A hipoide pertence à família das hiperboloides de revolução que são quadráticas e que representam uma superfície tridimensionais.

engrenagens torsas de dentes helicoidais apresentam rendimentos elevados (95%), velocidades até 25-50 m/s e relações de transmissão até 5:1. No caso do parafuso sem-fim as relações de transmissão são mais elevadas podendo atingir 100:1 e velocidades da ordem dos 70 m/s. O sem-fim é, em geral, não reversível e funciona apenas quando o veio motor aciona o sem-fim propriamente dito. Nestas engrenagens o ângulo formado entre os eixos é, na maioria dos casos, igual a 90°. Deve ainda referir-se que devido ao elevado escorregamento que apresentam podem surgir problemas de aquecimento¹⁶ e perda de rendimento (45-70%). Este tipo de engrenagem pode, em geral, ter uma, duas ou três entradas, sendo o avanço igual à distância axial percorrida pelo sem-fim quando a roda efetua uma volta completa (Drago, 1988).

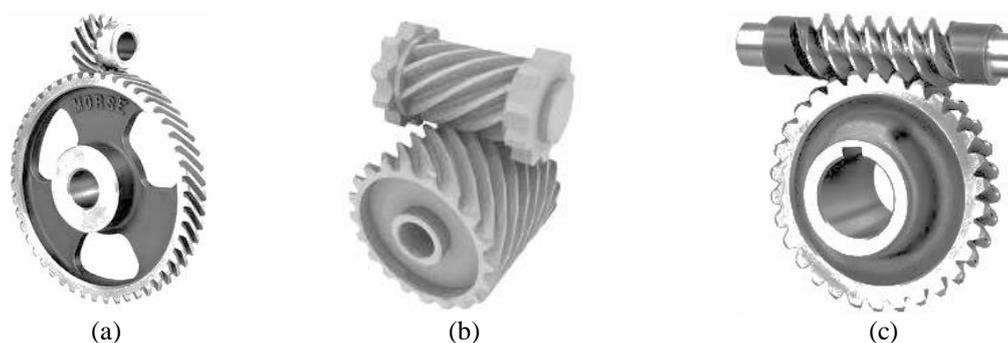


Figura 1.16 – (a) Engrenagem torsa de dentes helicoidais; (b) Engrenagem torsa de dentes espirais; (c) Engrenagem torsa de parafuso sem-fim.

Na figura 1.17 resumem-se os principais tipos de engrenagens anteriormente descritas e primeiramente agrupadas quanto à disposição relativa dos eixos. Como segundo critério de classificação desta sinopse considera-se a forma dos dentes. Deve ainda referir-se que no caso das engrenagens do tipo hipoide os eixos das rodas não se intersectam, sendo, por isso, uma exceção nas engrenagens cónicas.

Nas engrenagens, a transmissão do movimento é feita quando os dentes de uma das rodas iniciam o contacto com os da outra. Esta situação é denominada de engrenamento. O modo como o engrenamento ocorre depende do tipo de engrenagem. Por exemplo, nas engrenagens de dentes retos o contacto é fundamentalmente do tipo rolamento de um dente sobre o outro. No caso das engrenagens torsas, como, por exemplo o parafuso sem-fim, o contacto entre os dentes é feito com escorregamento. É, pois, evidente que o engrenamento nas engrenagens de dentado reto provoca menor nível de desgaste das superfícies dos dentes e reduz as forças de atrito. Deve referir-se, contudo, que nestes casos existe o inconveniente de aquando do engrenamento/desengrenamento de dois dentes, se produzir um choque que pode provocar ruídos e induzir vibrações nos sistemas mecânicos que as integram. Por este facto, as engrenagens de dentado reto não devem ser utilizadas em situações de velocidades elevadas. Por seu lado, as engrenagens helicoidais e espirais, devido à forma dos dentes que apresentam, o engrenamento acontece com um misto de rolamento e de escorregamento. Estas conseguem, com efeito, associar as vantagens que os vários tipos de contacto apresentam, sendo frequentemente usadas em casos de velocidades elevadas, ou quando se pretende um baixo nível de ruído (Niemann, 1971).

¹⁶ Com o intuito de controlar o desgaste e a geração de calor, devem seleccionar-se diferentes materiais para o sem-fim (e.g. aço) e para roda (e.g. ferro fundido ou bronze), devendo o conjunto funcionar com lubrificação em banho de óleo (Juvinal e Marshek, 2006).

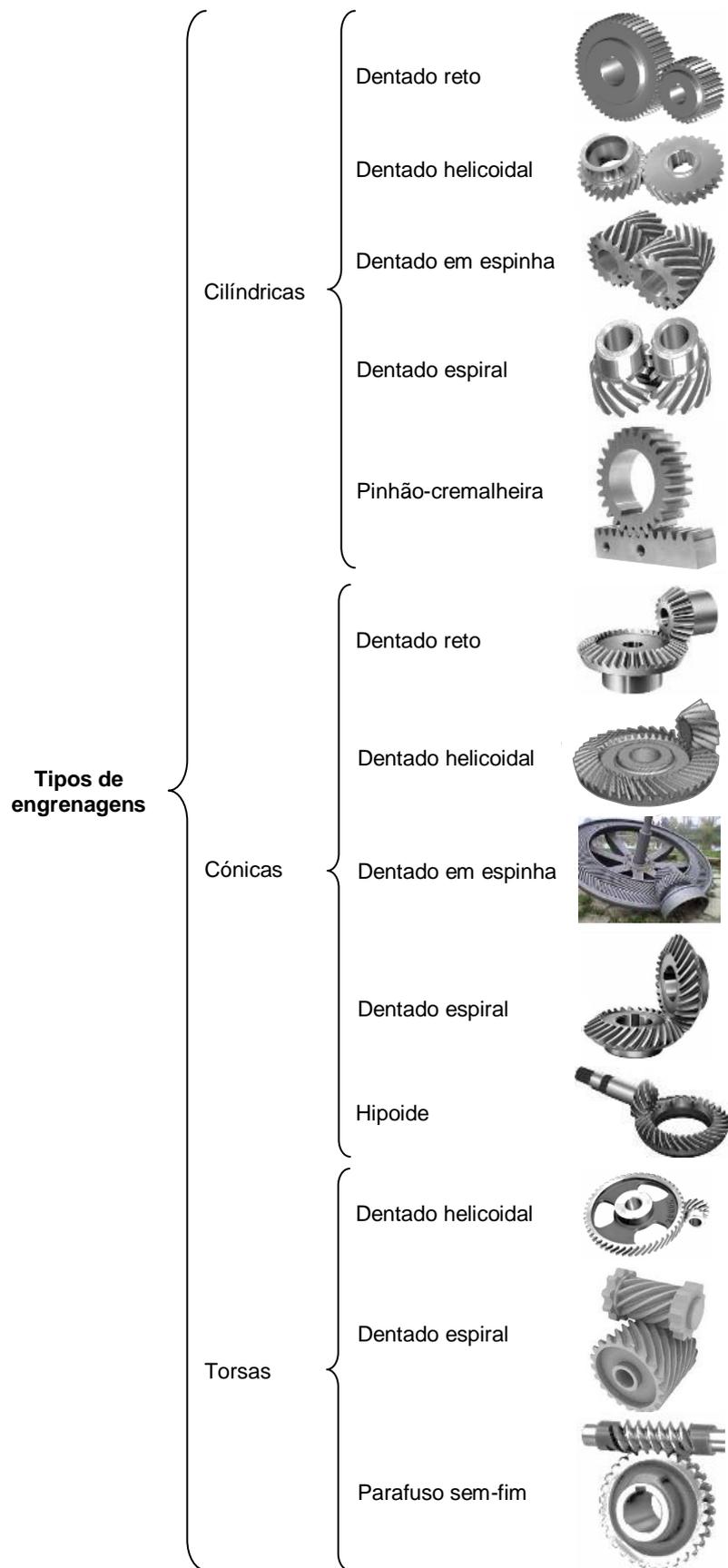


Figura 1.17 – Classificações das engrenagens mais comuns em máquinas e mecanismos.

Embora sejam menos frequentemente utilizados em máquinas e mecanismos, há determinados tipos de engrenagens que pelas suas especificidades merecem aqui uma breve referência. Assim, considere-se a roda dentada ilustrada na figura 1.18a, a qual pode ser considerada como um caso particular de uma roda cônica em que os dentes se desenvolvem paralelamente ao eixo da roda. Este tipo de roda, denomina-se roda coroa, funciona com rodas similares às cónicas e, em alguns casos, com rodas cilíndricas. A roda coroa encontra aplicação em relógios mecânicos como mecanismo de escape (Flores e Claro, 2007).

As engrenagens não-circulares constituem um outro tipo especial de rodas dentadas, as quais estão representadas na figura 1.18b. Ao contrário das engrenagens circulares tradicionais, em que se pretende transmitir um momento constante minimizando o ruído e o desgaste, nas engrenagens não-circulares o principal propósito é o de se obter relações de transmissão variáveis e, por vezes, oscilações no deslocamento dos eixos das rodas. Este tipo de engrenagem é comum em máquinas-têxteis, potenciômetros e variadores contínuos de velocidade.

O sistema de transmissão denominado *harmonic drive*, ilustrado na figura 1.18c, é um tipo de engrenagem bastante utilizado em robótica e sistemas de controlo, devido à sua compactidade, elevadas relações de transmissão (100:1) e inexistência de folgas (Shigley e Uicker, 1995).

A engrenagem em gaiola, ou lanterna, é também um caso particular das engrenagens, em que os dentes do pinhão são elementos cilíndricos paralelos ao eixo de rotação e dispostos circularmente em torno daquele eixo. Esta disposição dos dentes assemelha-se a uma gaiola ou uma lanterna. As rodas dentadas em gaiola são, em geral, as rodas mandadas, sendo feitas em madeira de modo bastante artesanal. Este tipo de engrenagem, ilustrada na figura 1.18d, é utilizado em relógios (Drago, 1988).

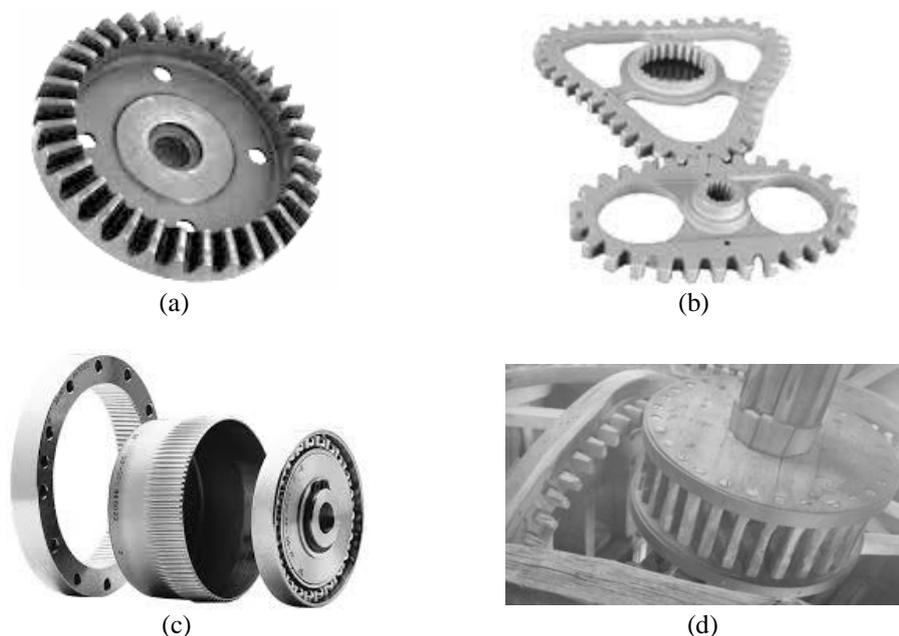


Figura 1.18 – (a) Roda coroa; (b) Engrenagem não-circular; (c) Harmonic drive; (d) Engrenagem em gaiola ou lanterna.

Um outro tipo especial de engrenagem é a engrenagem magnética, em que ímanes montados de forma circular em torno do eixo de rotação, com pólos magnéticos orientados ao longo do eixo, possibilitam a transmissão de movimentos mecânicos rota-

tivos sem que haja contacto físico e, por conseguinte, não causam desgaste dos seus componentes. Este tipo de engrenagem tem baixa capacidade de carga quando comparadas com as engrenagens ditas tradicionais. A figura 1.19 ilustra um exemplo de uma engrenagem magnética.

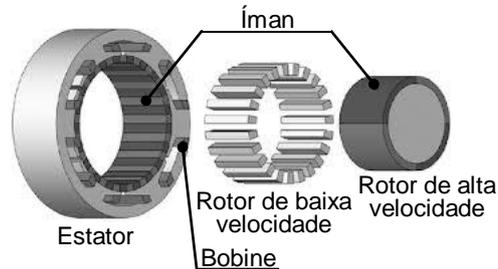


Figura 1.19 – Esquema de uma engrenagem magnética.

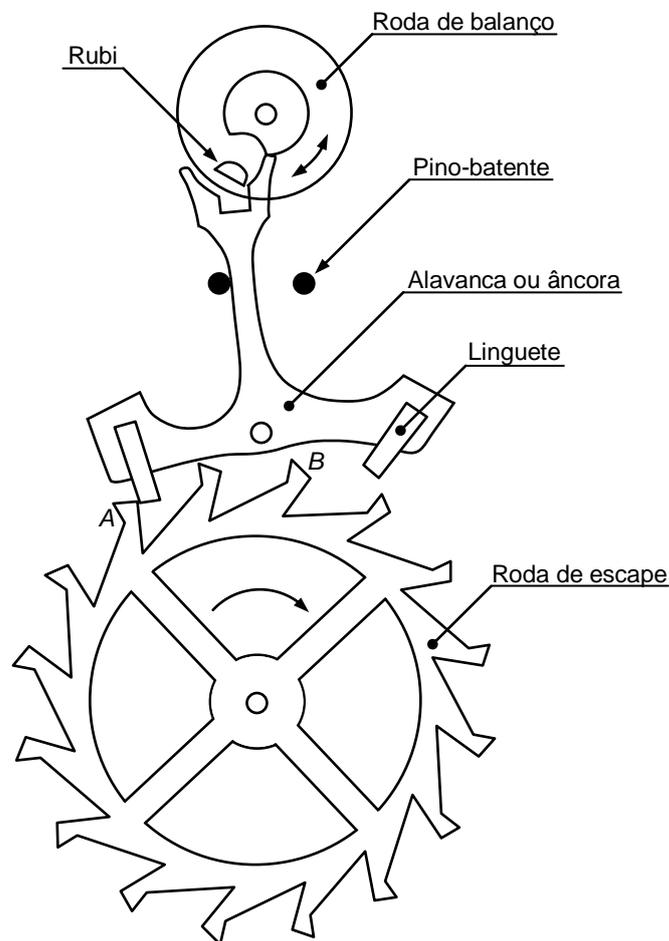


Figura 1.20 – Roda de balanço utilizada em relógios mecânicos.

Um mecanismo de escape que utiliza rodas dentadas especiais é o que se representa na figura 1.20. Este sistema mecânico, denominado de roda de balanço encontra aplicação em relojoaria. A roda de balanço está ligada a um pêndulo de período fixo não ilustrado na figura. A roda de escape é, em geral, movida por uma mola de torção e possui um movimento intermitente comandado pela alavanca ou âncora.

Para cada oscilação completa da roda de balanço, a âncora permite o avanço de um dente da roda de escape. Simultaneamente, o movimento da roda de escape promove o retorno da âncora à sua posição anterior, transmitindo energia à roda de balanço para iniciar um novo ciclo.

Numa análise mais detalhada do funcionamento deste mecanismo pode considerar-se, como ponto de partida, a posição em que a âncora se encontra encostada ao pino-batente localizado no lado esquerdo. Nesta posição, o dente *A* da roda de escape atua contra o linguete da esquerda, enquanto a roda de balanço, rodando no sentido anti-horário por ação da energia acumulada no pêndulo, leva a que o rubi mova a âncora no sentido horário. O movimento da âncora levará o linguete a soltar o dente *A*, empurrando o linguete para cima e, a partir deste instante, a âncora fará movimentar o rubi, transmitindo energia ao pêndulo ligado à roda de balanço. Após um certo ângulo de rotação da roda de escape, o dente *B* será bloqueado pelo linguete da direita que, entretanto baixou devido à rotação da âncora. O movimento desta é restringido pelo pino-batente da direita, enquanto a roda de balanço inverte o sentido de rotação, por ação do pêndulo que havia acumulado energia suficiente para o efeito. Uma vez que o rubi contacta com a superfície esquerda do garfo no topo da âncora, esta inicia o movimento de rotação no sentido anti-horário, destravando o dente *B* da roda de escape. Após um certo ângulo de rotação da roda de escape, o linguete da esquerda da âncora bloqueia um novo dente, reiniciando-se o processo (Flores e Claro, 2007).

1.4. NOMENCLATURA FUNDAMENTAL

O principal objetivo desta secção é o de introduzir a nomenclatura fundamental associada à configuração geométrica dos dentes das engrenagens. Para o efeito, tome-se em consideração o setor de uma roda cilíndrica exterior de dentado reto representado na figura 1.21, na qual se inclui alguma terminologia básica relativa ao referido dentado (Shigley e Mischke, 1989).

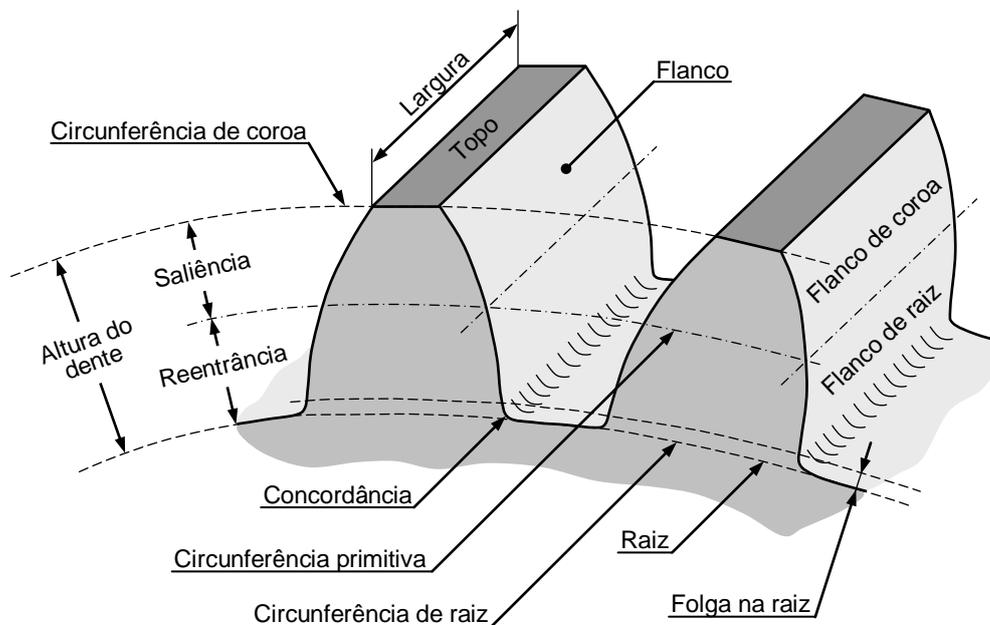


Figura 1.21 – Setor de uma roda cilíndrica exterior de dentes retos.

Considere-se agora que uma engrenagem cilíndrica exterior de dentes retos é interseccionada por um plano perpendicular ao eixo das rodas. Deste modo, obtém-se o perfil transversal¹⁷ do dentado, tal como se representa parcialmente na figura 1.22. Assim, neste perfil do dentado podem distinguir-se os seguintes elementos¹⁸:

- Coroa ou cabeça, que é o arco de circunferência que delimita superiormente o dente (segmento AE),
- Raiz ou pé, que é o arco de circunferência que delimita inferiormente o dente (segmento DF),
- Linha de flanco, que é a parte do perfil do dente compreendida entre a coroa e a raiz (segmentos AD e EF).

Às superfícies cilíndricas coaxiais com o eixo da roda que contêm as coroas e as raízes dos dentes dá-se o nome de superfície de coroa e superfície de raiz, respetivamente. Por conseguinte, os diâmetros destas superfícies denominam-se de diâmetro de coroa (d_a) e diâmetro de raiz (d_f), os quais estão representados na figura 1.22. O cilindro primitivo tem um diâmetro intermédio entre o diâmetro de coroa e o diâmetro de raiz. O diâmetro primitivo é representado simplesmente pela letra d , tal como se pode observar na figura 1.22. Refira-se ainda que o diâmetro de base (d_b) tem um diâmetro superior ao do da circunferência de raiz, como se verá ulteriormente. Deve

¹⁷ Quando o plano de interseção passa pelo eixo da roda obtém-se o perfil axial do dentado.

¹⁸ Dever referir-se que a nomenclatura adotada no presente texto segue a norma ISO 701 de 1988, revista em 2013 e denominada *International gear notation - Symbols for geometrical data*.

ainda referir-se que no caso de uma transmissão do tipo pinhão-cremalheira, os cilindros e as circunferências anteriormente referidos para o caso das rodas cilíndricas transformam-se em planos e retas, respetivamente (Budynas e Nisbett, 2011).

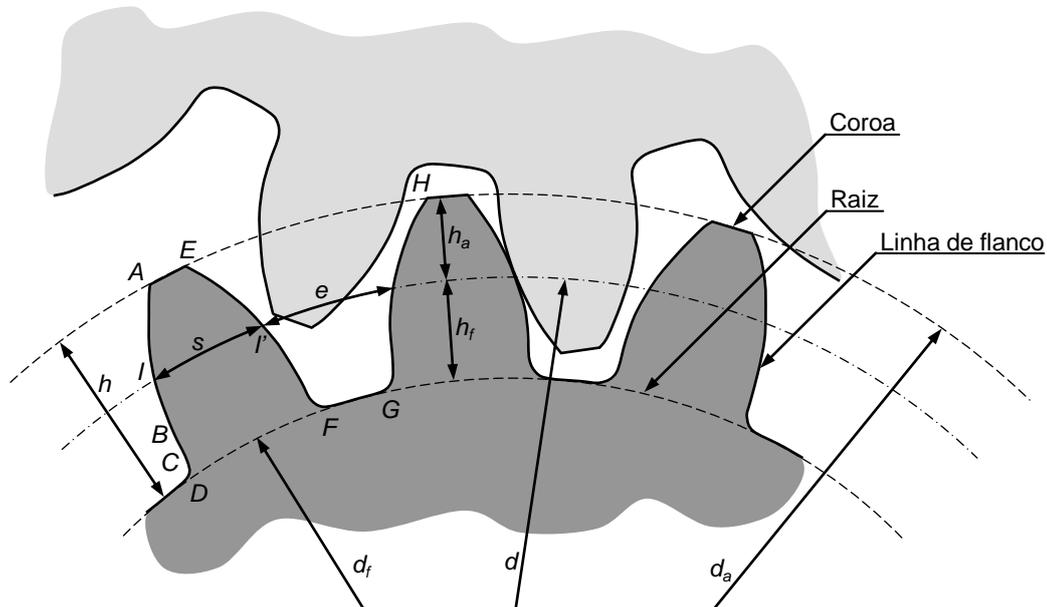


Figura 1.22 – Nomenclatura fundamental de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos.

Numa engrenagem cilíndrica de dentado reto a superfície primitiva corresponde aos cilindros primitivos que representam os diâmetros das rodas de atrito equivalentes que transmitiriam o movimento com a mesma relação de transmissão da engrenagem, desde que não exista escorregamento. O círculo ou circunferência primitiva representa, pois, uma circunferência teórica sobre a qual todos os cálculos são baseados. Deve referir-se que numa engrenagem as circunferências primitivas são tangentes num ponto denominado ponto primitivo. A circunferência primitiva também pode ser designada de circunferência de passo (Henriot, 1979).

O flanco do dente é a parte exterior do dente compreendida entre a raiz e a coroa. Aos flancos que se podem sobrepor por rotação da roda denominam-se flancos homólogos (e.g. segmentos AD e GH). Por outro lado, aos flancos simétricos em relação ao eixo de cada dente designam-se flancos anti-homólogos e, por conseguinte, não se podem sobrepor (e.g. segmentos AD e EF). O flanco de um dente pode ser dividido em três partes distintas, a saber (Norton, 2013):

- Flanco ativo, que é a parte do flanco ao longo do qual ocorre o contacto com os dentes da outra roda (segmento AB),
- Flanco útil, que é a parte do flanco que pode ser utilizada como flanco ativo durante o engrenamento (segmento AC),
- Flanco de concordância, que é a parte do flanco não utilizável e destina-se a efetuar a concordância com a superfície de raiz (segmento CD).

Os flancos dos dentes podem ainda ser divididos pela superfície ou circunferência primitiva. Assim, podem distinguir-se:

- Flanco de coroa ou de cabeça, que é a parte do flanco compreendida entre a superfície de coroa e a superfície primitiva (segmento AI),
- Flanco de raiz ou de pé, que é a parte do flanco compreendida entre a superfície primitiva e a superfície de raiz (segmento ID).

É evidente que a superfície primitiva divide o dente em duas partes distintas, nomeadamente (Henriot, 1979):

- Saliência ou altura da cabeça, que é a parte do dente compreendida entre a superfície de coroa e a superfície primitiva, sendo medida pela distância (h_a) entre a circunferência de coroa e a circunferência primitiva,
- Reentrância ou altura do pé, que é a parte do dente compreendida entre a superfície primitiva e a superfície de raiz, sendo medida pela distância (h_f) entre a circunferência primitiva e a circunferência de raiz.

A altura do dente (h) é, portanto, a distância entre a circunferência de coroa e a circunferência de raiz, ou seja, é igual à soma dos valores da saliência e da reentrância, ou seja, $h=h_a+h_f$. Numa roda dentada, tal como a que se representa parcialmente nas figuras 1.21 e 1.22, podem ainda identificar-se os seguintes elementos:

- Entredente, que é o espaço compreendido entre dois dentes consecutivos,
- Espessura do dente (s), que é o comprimento do arco da circunferência primitiva compreendido entre os pontos primitivos¹⁹ dos flancos anti-homólogo e homólogo do mesmo dente,
- Intervalo entre dentes (e), que é o comprimento do arco da circunferência primitiva compreendido entre os pontos primitivos dos flancos anti-homólogo e homólogo de dois dentes consecutivos,
- Largura do dente (b), que é o comprimento do perfil axial do dente,
- Passo primitivo ou, simplesmente, passo (p), que é o comprimento do arco da circunferência primitiva compreendido entre dois flancos homólogos e consecutivos, ou seja, $p=s+e$,
- Passo normal (p_n), que é a distância que separa dois flancos homólogos consecutivos. Trata-se, portanto, de um segmento de reta,
- Corda, que é a distância medida entre os pontos primitivos dos flancos homólogo e anti-homólogo do mesmo dente. À distância medida sobre o eixo de simetria do dente desde a corda até à coroa chama-se saliência na corda.

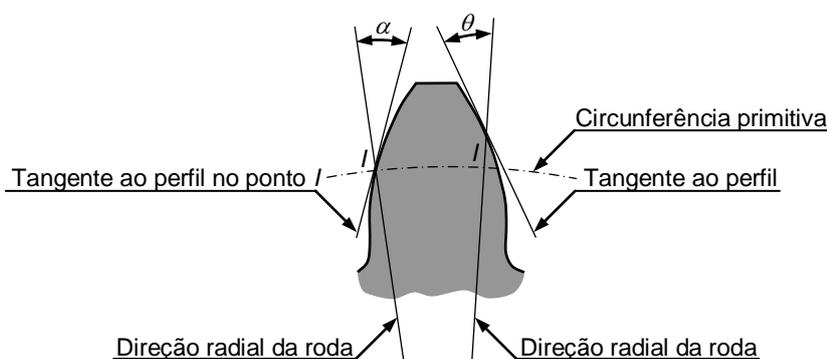


Figura 1.23 – Representação dos ângulos de incidência (θ) e de pressão (α).

Ao ângulo agudo formado pela tangente ao perfil do dente num ponto qualquer e pelo raio da roda nesse ponto chama-se ângulo de incidência (θ), tal como ilustra a figura 1.23. Na situação em que o ponto considerado para a tangência é o ponto primitivo (I), então o ângulo denomina-se ângulo de pressão (α). O ângulo de pressão é o ângulo que define a direção da força que a roda motora exerce sobre a movida.

¹⁹ Ponto primitivo é o ponto de tangência de duas circunferências primitivas de engrenagens conjugadas. Este assunto será objeto de estudo aprofundado nas secções subsequentes deste documento.

Com o intuito de relacionar as dimensões características dos dentes definia-se passo angular de uma roda dentada como sendo

$$p_{ang} = \frac{P}{r} \quad (1.1)$$

em que p é o passo primitivo e r representa o raio primitivo da roda. Por seu lado, o passo primitivo é expresso do seguinte modo

$$p = \frac{2\pi r}{z} \quad (1.2)$$

onde z é o número de dentes da roda. Da substituição de (1.1) em (1.2) resulta que

$$p_{ang} = \frac{2\pi}{z} \quad (1.3)$$

Deve notar-se que este parâmetro não é de todo conveniente na definição de engrenagens, uma vez que nele aparece explicitamente o número irracional π . Por isso, define-se uma outra grandeza denominada de módulo, que é indubitavelmente mais apropriada e conveniente na definição das rodas dentadas. Deve desde já referir-se que só é possível o engrenamento de rodas dentadas se estas tiverem o mesmo módulo, a fim de que os espaços entre os dentes sejam compatíveis. O módulo, que é expresso em milímetros, é, por definição, escrito do seguinte modo (Henriot, 1979)

$$m = \frac{P}{\pi} \quad (1.4)$$

Substituindo a equação (1.2) em (1.4) vem que

$$m = \frac{2\pi r}{z\pi} = \frac{d}{z} \quad (1.5)$$

que é também uma definição de módulo (Henriot, 1979). Alternativamente, a equação (1.5) pode ser reescrita da seguinte forma

$$d = mz \quad (1.6)$$

Com efeito, o módulo, conjuntamente com o número de dentes, define completa e perfeitamente qualquer roda dentada. Pode dizer-se que o módulo está diretamente relacionado com a dimensão dos dentes e, por conseguinte, com a sua resistência. Por seu lado, o número de dentes de uma roda dentada está diretamente associado à relação de transmissão de uma engrenagem. A equação (1.6) estabelece a relação fundamental, a partir da qual se podem traçar os perfis dos dentes (Norton, 2013).

Deve ainda referir-se que nos países anglossaxónicos se considera uma notação distinta, a qual resulta do facto das dimensões lineares no sistema imperial serem expressas em polegadas. Assim, em vez de módulo, naqueles países utiliza-se o conceito de *diametral pitch* (P), que se relaciona com o módulo da seguinte forma

$$mP = 25,4 \quad (1.7)$$

O módulo é um parâmetro normalizado que visa uniformizar os perfis adotados para os dentes das engrenagens e facilitar a obtenção de máquinas e ferramentas. A tabela 1.2 apresenta os valores normalizados²⁰ para o módulo.

²⁰ Os valores dos módulos listados seguem as recomendações da norma ISO 54 de 1996, revista em 2011, e intitulada *Cylindrical gears for general engineering and for heavy engineering - Modules*.

*Tabela 1.2 – Valores normalizados do módulo expressos em milímetros.
A escolha do módulo deve iniciar-se pelas séries mais baixas.*

Série 1	Série 2	Série 3	Série 1	Série 2	Série 3
0,1				3,5	
	0,15				3,75
0,2			4	4,5	
	0,25				
0,3			5	5,5	
	0,35				
0,4			6		
	0,45				6,5
0,5			8	7	
	0,55				
0,6			10	9	
		0,65			
	0,7			11	
	0,75		12		
0,8				14	
	0,9		16		
1				18	
1,25			20		
1,5				22	
	1,75		25		
2				28	
	2,25		32		
2,5				36	
	2,75		40		
3				45	
		3,25	50		

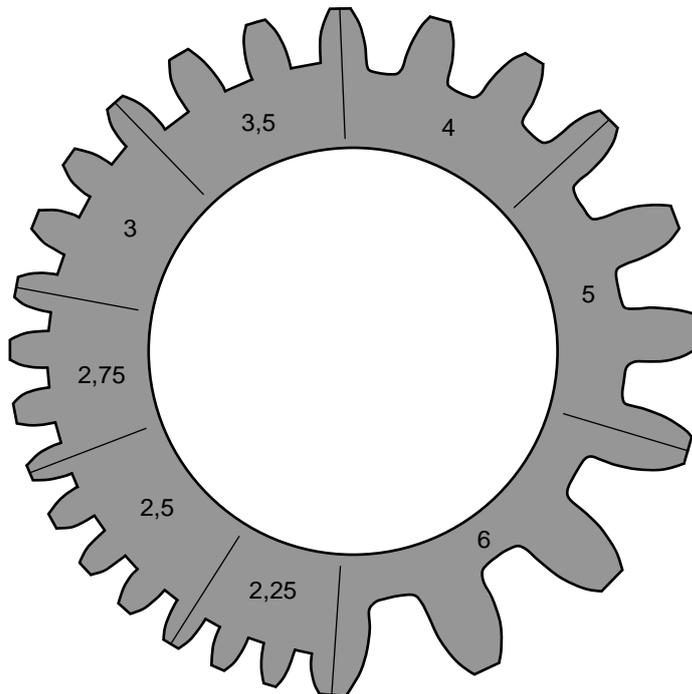


Figura 1.24 – Relação entre o módulo, tamanho dos dentes e número de dentes.

A figura 1.24 ilustra a evolução do tamanho e do número de dentes de rodas dentadas, para o mesmo diâmetro primitivo, em função do módulo. Da análise desta figura observa-se que com o aumento do módulo aumenta-se também o tamanho do dente e, conseqüentemente, a resistência da roda. Por outro lado, com o aumento do módulo diminui-se o número de dentes da roda. É, pois, evidente que para um diâme-

tro primitivo constante, se se considerar um módulo pequeno resulta numa roda com muitos dentes, em que os dentes são de pequenas dimensões. Deve ainda referir-se que existem calibres de dentes que permitem com facilidade aferir e comparar tamanhos de dentes para diferentes valores de módulo.

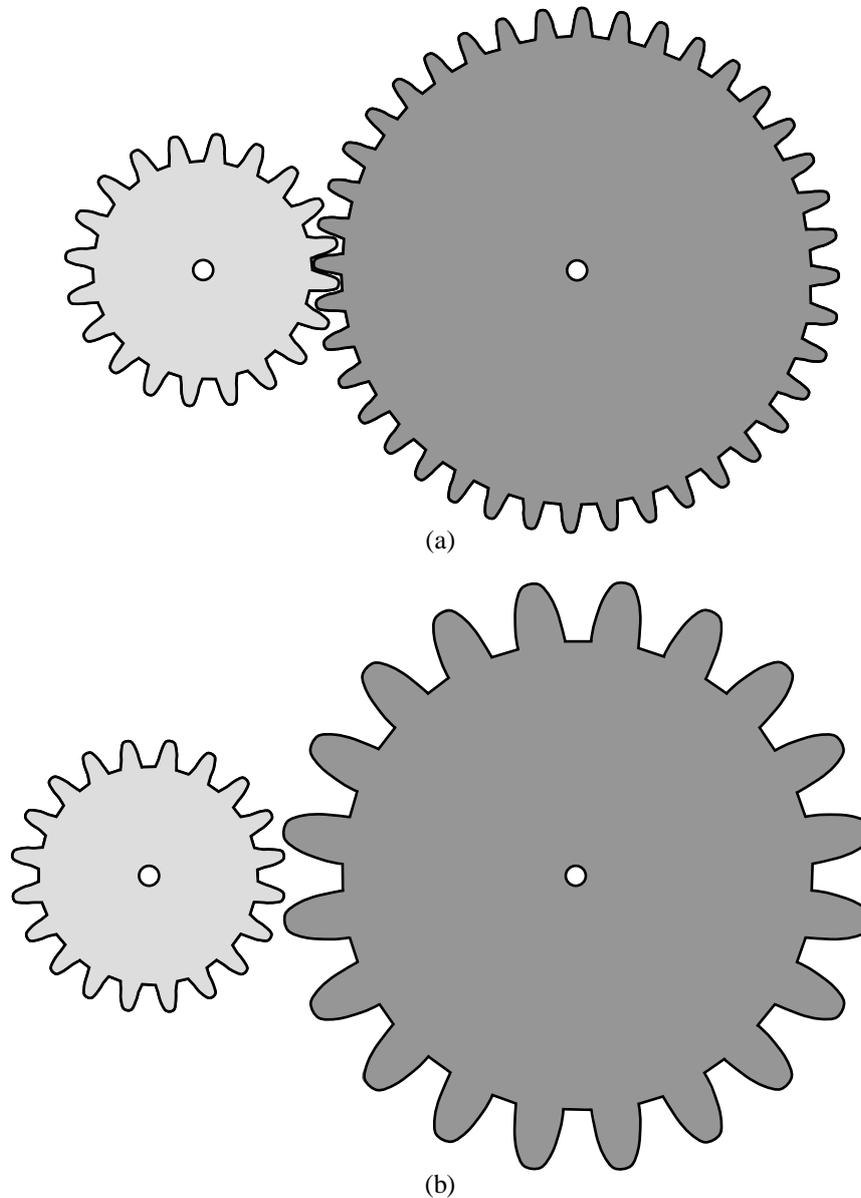


Figura 1.25 – (a) Engrenagem com módulo $m_1=m_2=1$ mm, $z_1=20$ e $z_2=40$;
(b) Engrenagem com módulo $m_1=1$ mm, $m_2=2$ mm e $z_1=z_2=20$.

Tal como foi referido anteriormente, duas rodas dentadas só podem funcionar corretamente se tiverem o mesmo módulo. Assim, a fim de se demonstrar este princípio considere-se duas engrenagens com as seguintes características:

- $m_1=m_2=1$ mm, $z_1=20$ e $z_2=40$,
- $m_1=1$ mm, $m_2=2$ mm, $z_1=z_2=20$.

A figura 1.25 ilustra este par de engrenagens onde são visíveis as diferenças pelo facto de se considerar ou não o mesmo módulo. Engrenagens com maior número de dentes proporcionam transmissões mais suaves e evitam interferências.

1.5. GERAÇÃO DE PERFIS DE DENTES

Tal como foi apresentado na secção anterior, o perfil transversal de um dente de uma roda dentada cilíndrica é o resultado da interseção da superfície do dente com um plano perpendicular ao eixo da roda. É por demais evidente que o perfil dos dentes desempenha um papel de importância crucial no bom funcionamento das engrenagens. Com efeito, uma engrenagem só funcionará corretamente²¹ se, durante o período de contacto entre as superfícies dos dentes, de uma e outra roda, aquelas forem permanentemente tangentes. Quando assim não sucede, o desgaste dos dentes ocorrerá muito rapidamente, prejudicando sobremaneira o desempenho das engrenagens (Mabie e Reinholtz, 1987). Assim, para que as superfícies dos dentes em contacto sejam sempre tangentes entre si durante o engrenamento é necessário que toda a infinidade de pares de perfis correspondentes numa e noutra roda, obtidos pela interseção das superfícies dos dentes em ambas as rodas com os diferentes planos perpendiculares aos seus eixos, sejam continuamente tangentes. Quando existe tangência entre as superfícies de dois dentes de duas rodas engrenadas, então estes perfis dos dentes denominam-se perfis conjugados. A figura 1.26 ilustra dois setores de duas rodas dentadas com perfis conjugados. Os perfis dos dentes devem ser projetados de modo a garantir uma relação de transmissão constante durante todo o engrenamento. Na verdade, esta ideia traduz o princípio fundamental do engrenamento, tal como se analisará mais detalhadamente nas secções seguintes deste documento (Henriot, 1979; Shigley e Mischke, 1989).

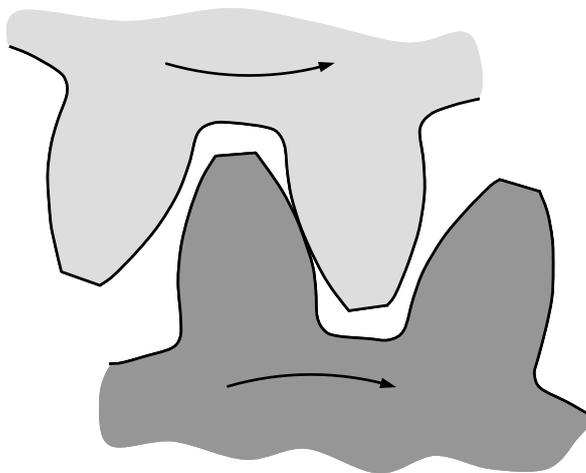


Figura 1.26 – Setores de duas rodas dentadas com perfis conjugados.

O modo mais frequente de gerar os perfis dos dentes é o que se baseia na utilização de curvas cíclicas ou de curvas evolventes (Wilson e Sadler, 1993). As curvas cíclicas são geralmente obtidas a partir de trajetórias de pontos associados à circunferência. Estas curvas são caracterizadas por um processo de oscilação periódica entre distâncias iguais. No sentido mais lato, uma evolvente é uma curva obtida a partir de uma dada curva, unindo a esta uma corda inextensível e traçando a trajetória de um ponto da corda ao ser enrolada ou desenrolada sobre a curva dada. A figura 1.27 resume as principais curvas utilizadas na geração de perfis de dentes.

²¹ O funcionamento correto de uma engrenagem diz respeito, fundamentalmente, à garantia na transmissão do movimento com relação de transmissão constante.

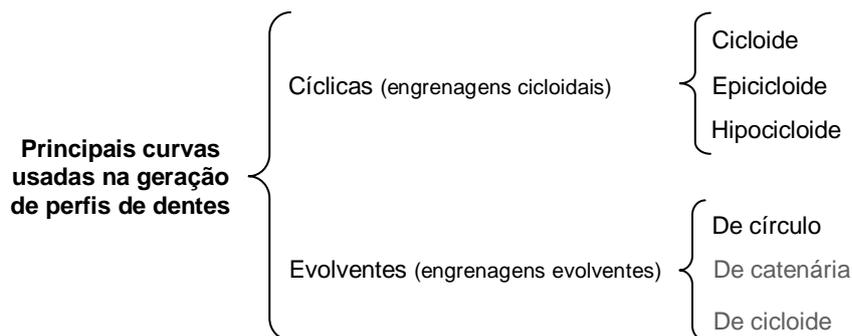


Figura 1.27 – Principais curvas usadas na geração de perfis de dentes.

Embora seja pouco usado em mecânica corrente, estuda-se aqui a geração do dentado cicloidal, no qual os perfis dos dentes são arcos de cicloides. Cicloide²² é uma curva traçada por um ponto de uma circunferência, dita rolante, quando esta rola sem escorregar ao longo de uma reta ou sobre outra circunferência. Quando a base é uma reta, a curva obtida denomina-se de cicloide ordinária. Quando a base é uma circunferência, a curva resultante designa-se de epicicloide²³, quando a rolante é exterior à base, e hipocicloide quando a rolante é interior à base (Henriot, 1979).

A título de exemplo, na figura 1.28 ilustra-se o procedimento relativo à obtenção de uma curva cíclica epicicloide, em que a rolante é a circunferência de centro em O_1 e de raio r_1 , sendo a base a circunferência centrada em O_2 e de raio r_2 . A circunferência de base está fixa, enquanto a geratriz ou rolante rola sem escorregar sobre a circunferência de base, tal como se representa na figura 1.28a. Com efeito, para se obter o traçado da epicicloide, deve começar-se por dividir a rolante num número de partes iguais. No presente caso, a rolante é dividida em oito partes iguais, delimitadas pelos pontos 1 a 8, como se ilustra na figura 1.28b. De seguida, pelo centro da rolante e pelos pontos 1 a 8, desenham-se arcos de circunferência concêntricos com a base. Os últimos estão desenhados a traço interrompido na representação da figura 1.28b. Na circunferência de base desenham-se arcos de circunferência iguais entre si e com um comprimento igual a $1/8$ do perímetro da rolante. Estes arcos estão representados a cinzento na figura 1.28b e delimitados pelos pontos $PI_1, I_1I_2, \dots, I_7I_8$. As sucessivas posições do centro da rolante obtêm-se pela interseção do arco que passa pelo centro da rolante, desenhado a cinzento na figura 1.28b, com as correspondentes direções radiais. Estes centros estão representados na figura 1.28c por C_1, C_2, \dots, C_8 . Podem agora ser desenhadas as novas rolantes em cada centro obtido pelo procedimento anterior, tal como se mostra na figura 1.28c. Finalmente, as sucessivas posições do ponto de traçagem são obtidas pela interseção de cada rolante com os correspondentes arcos de circunferência inicialmente desenhados, como mostra a figura 1.28d. Unindo os pontos P, P_1, P_2, \dots, P_8 , obtém-se a curva epicicloide.

Deve referir-se que é possível obter as equações paramétricas de uma curva epicicloide. Da análise da geometria da figura 1.28, observa-se que, por um lado, a curva epicicloide é simétrica em relação a um eixo e, por outro, a normal em qualquer dos seus pontos passa sempre pelo ponto de contacto da rolante com a base (Henriot, 1979; Wilson e Sadler, 1993).

²² Cicloide é uma palavra de origem grega que traduz a ideia de circular ou círculo.

²³ Epicicloide vem do grego, onde *epi* significa sobre, e cicloide círculo. Por seu lado, o vocábulo hipocicloide é também de origem grega, em que *hipo* significa sob, por debaixo.

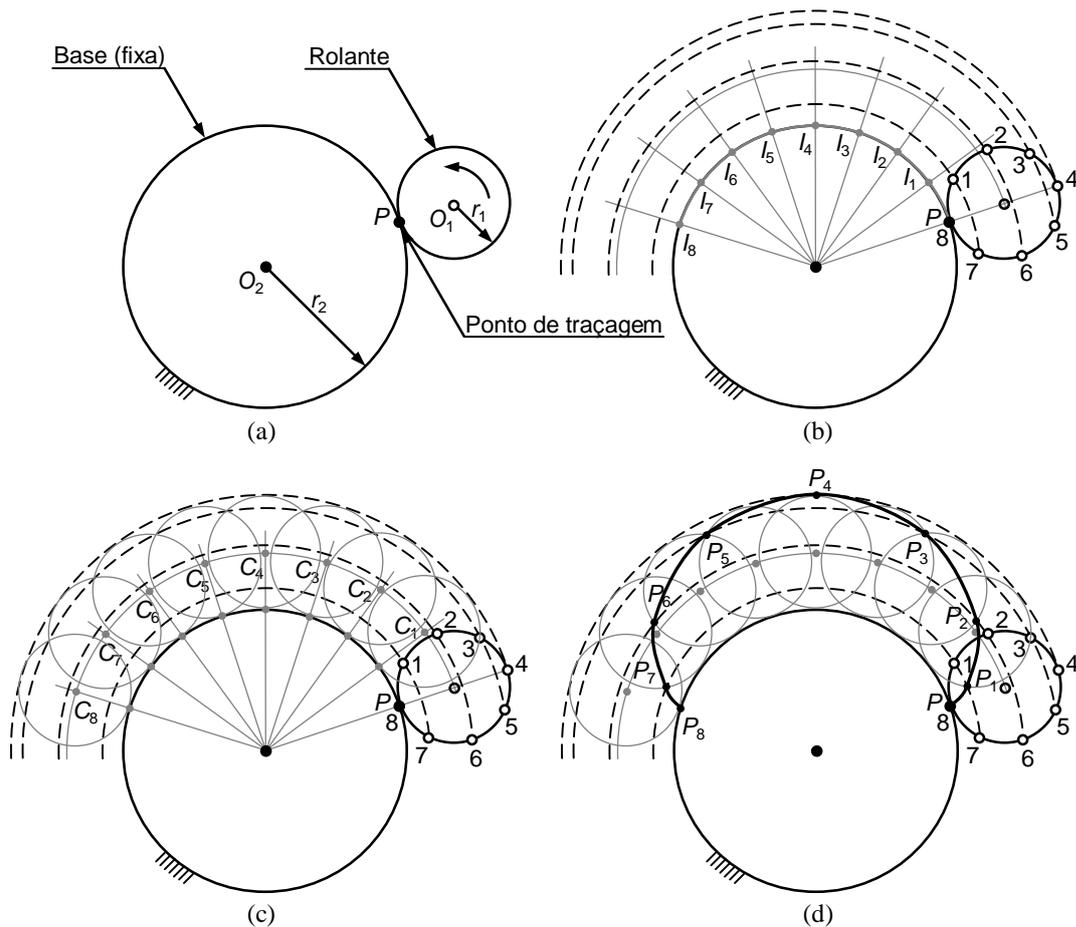


Figura 1.28 – Traçado de uma curva cíclica epicycloide.

De seguida é apresentado o procedimento para se obter um dentado cicloidal para uma engrenagem cilíndrica exterior de dentes retos. Assim, para o efeito devem considerar-se as circunferências primitivas das duas rodas como as bases do movimento. Então as circunferências rolantes rolam sem escorregar, ora uma, ora outra, sobre cada circunferência de base, consoante se pretende gerar o perfil acima ou abaixo do ponto primitivo. A figura 1.29 mostra como se obtêm os perfis cicloidais para o caso de uma engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto. Em primeiro lugar traçam-se as circunferências primitivas representadas por C_1 e C_2 , cujos centros são O_1 e O_2 , respetivamente, tal como se ilustra na figura 1.29a. Considere-se agora G_1 e G_2 como sendo as circunferências geradoras, cujos centros e raios são, respetivamente P_1 , P_2 , r_1 e r_2 , tal como representado na figura 1.29b. As circunferências geradoras são tangentes no ponto I às duas circunferências primitivas, sendo este o ponto gerador ou de traçagem. O perfil do dente da roda 1 é constituído por dois arcos (cf. figura 1.29c):

- O arco IA_1 , que é um arco de hipocicloide que resulta de G_1 rolar sem escorregar interiormente sobre C_1 ,
- O arco IB_1 , que é o arco de epicycloide que resulta de G_2 rolar sem escorregar exteriormente sobre C_1 .

O perfil do dente da roda 2 é também constituído por dois arcos (cf. figura 1.29d):

- O arco IA_2 , que é um arco de hipocicloide que resulta de G_2 rolar sem escorregar interiormente sobre C_2 ,
- O arco IB_2 , que é o arco de epicycloide que resulta de G_1 rolar sem escorregar exteriormente sobre C_2 .

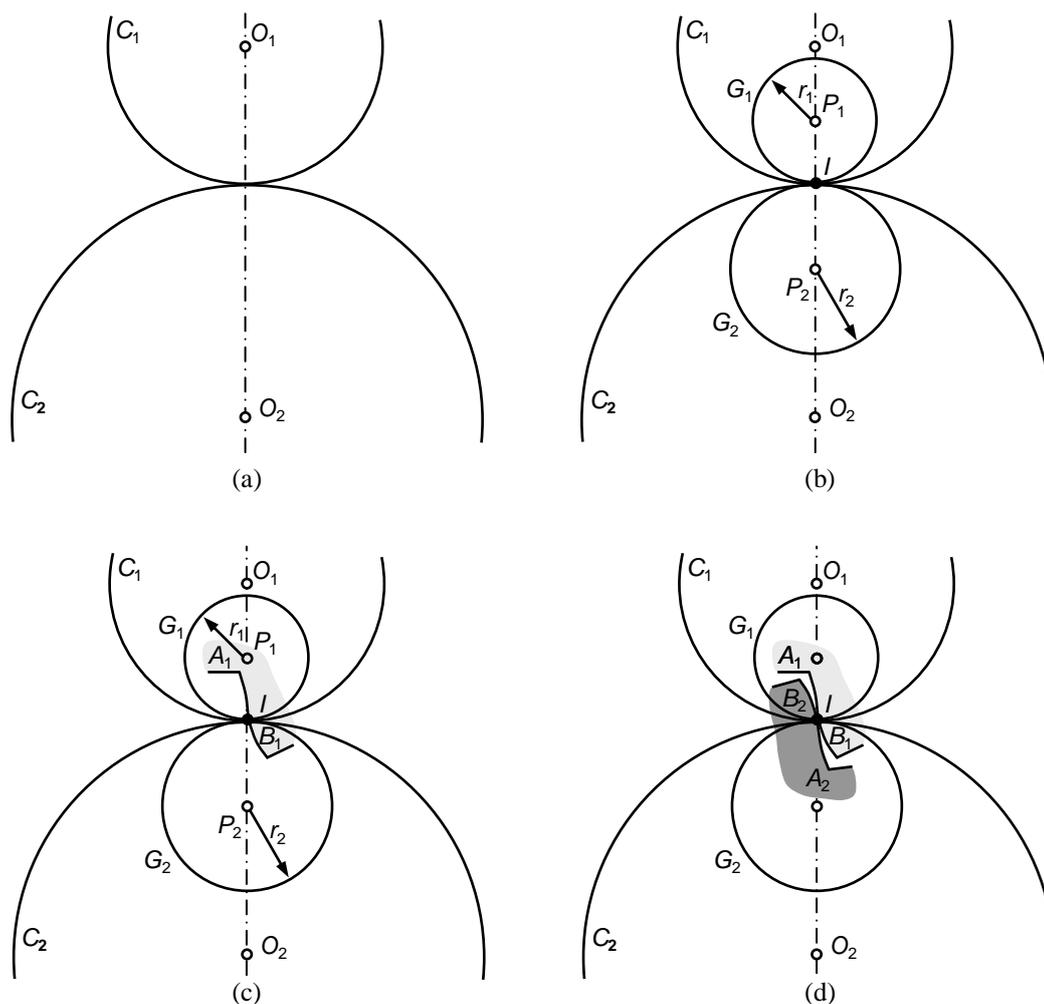


Figura 1.29 – Obtenção de um dentado cicloidal para engrenagens cilíndricas exteriores de dentes retos.

Deve mencionar-se que a obtenção de perfis cicloidais para dentados interiores e engrenagens do tipo pinhão-cremalheira segue procedimentos idênticos aos anteriormente expostos (Henriot, 1979; Budynas e Nisbett, 2011).

Pode observar-se que os dentes com perfil cicloidal são constituídos por duas curvas cíclicas, em que na saliência o perfil é do tipo epicicloide e na reentrância o perfil é do tipo hipocicloide. A saliência e a reentrância são, portanto, formadas por curvas convexas e côncavas, respetivamente. Verifica-se que em engrenagens de dentado cicloidal, a linha de ação²⁴ é constituída por dois arcos das circunferências geradoras, tal como se representa na figura 1.30. Acresce ainda o facto de que neste tipo de perfil de dente, o ângulo de pressão variar durante o engrenamento das rodas. De entre os vários inconvenientes associados ao dentado cicloidal, e que o tornam pouco atractivo para aplicações industriais, podem destacar-se os seguintes (Henriot, 1979; Mabbie e Reinholtz, 1987):

- Uma vez que o perfil dos dentes é formado por duas partes curvas distintas (*e.g.*, epicicloide e hipocicloide), torna difícil a sua manufatura devido ao ponto de inflexão (I), tal como é ilustrado na figura 1.31. Com efeito, não é possível utilizar

²⁴ Linha de ação ou linha de engrenamento é a trajetória do ponto de contacto de uma engrenagem de dentes com perfis conjugados. Este assunto será objeto de estudo detalhado posteriormente.

- os métodos mais vulgares de talhe com fresa, obrigando, assim, ao recurso a processos de fabrico alternativos como a fundição e a estampagem,
- Para o mesmo módulo, o dentado cicloidal apresenta uma menor área na raiz quando comparado com o dentado em evolvente e, conseqüentemente, apresenta menor resistência,
 - O entre-eixo no dentado cicloidal é rigorosamente constante e igual à soma dos raios primitivos das rodas, não sendo possível, deste modo, compensar desalinhamentos e desgaste das engrenagens, nem evitar variações da relação de transmissão durante o engrenamento,
 - Uma dada roda dentada de perfil cicloidal funciona apenas com outra para a qual foi projetada, uma vez que, durante o engrenamento, a cada ponto do dente da roda motora corresponde um ponto bem definido no perfil do dente da roda movida,
 - As forças de contacto que se desenvolvem nos dentes das engrenagens de perfis cicloidais variam em cada instante, quer em direção, quer em intensidade, dando origem, deste modo, a choques e vibrações, com todas as conseqüências nefastas que daí advêm,
 - A montagem de duas rodas dentadas de perfis cicloidais é de difícil execução, e quando se conseguem montar com exactidão, o progressivo desgaste que se verifica nos apoios, devido ao modo de funcionamento deste tipo de dentado, origina desgaste dos próprios dentes e, conseqüentemente, aumenta o entre-eixo.

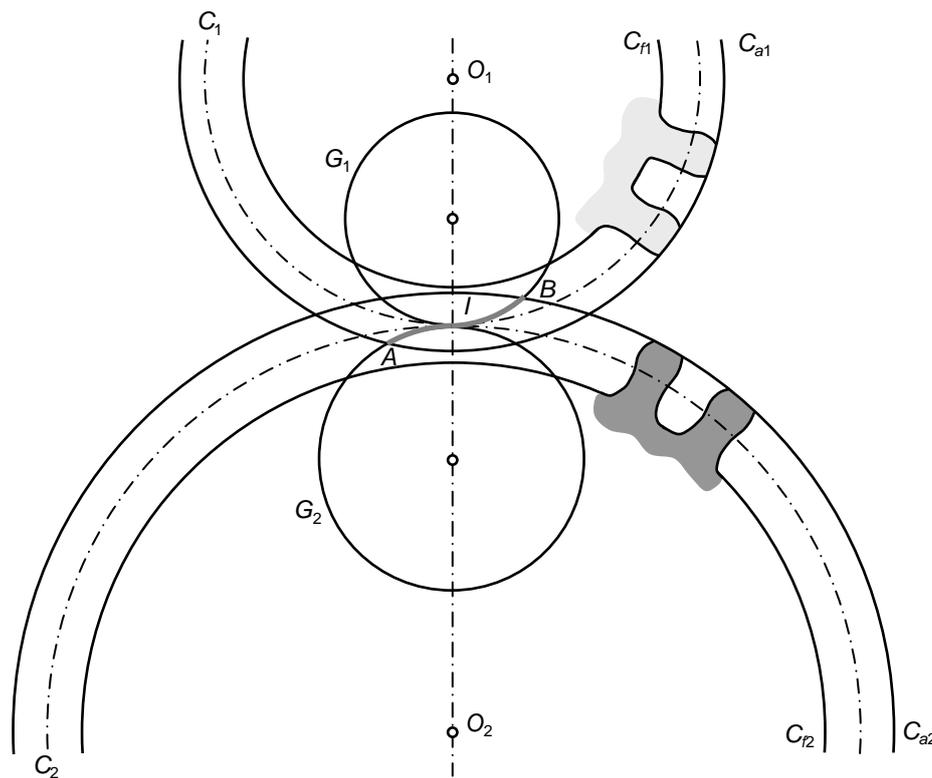


Figura 1.30 – Representação da linha de ação numa engrenagem de dentado reto de perfil cicloidal.

Na verdade, o dentado cicloidal é pouco utilizado na mecânica em virtude das limitações e desvantagens acima expostas. Este tipo de dentado é utilizado em casos muito particulares, como, por exemplo, em relógios e em sistemas mecânicos de pe-

quenas dimensões que funcionam com cargas relativamente baixas e que não afetam os perfis dos dentes. Uma das principais razões que concorre para o sucesso nas aplicações descritas, prende-se com o facto de não existir escorregamento entre os dentes, pelo que o desgaste é menor que no caso do dentado em evolvente. Por outro lado, os dentes de perfis cicloidalis funcionam sempre entre uma superfície côncava e outra convexa, tornando, deste modo, mais suaves as transmissões de movimento (Budynas e Nisbett, 2011; Norton, 2013).

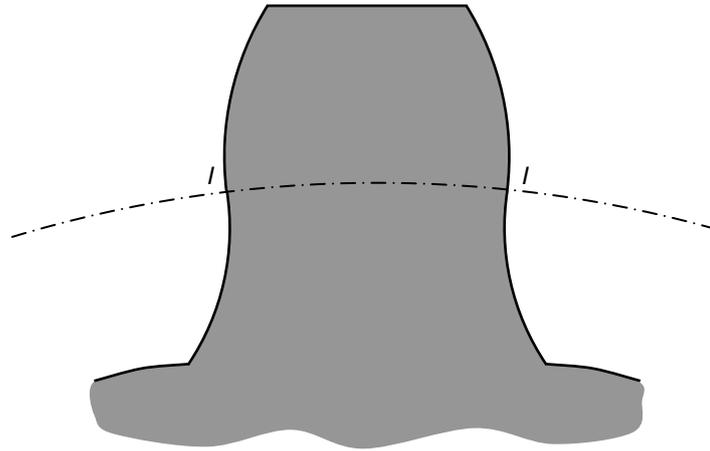


Figura 1.31 – Dente de perfil cicloidal.

1.6. DENTADO EM EVOLVENTE DE CÍRCULO

Nesta secção estuda-se o dentado gerado em evolvente de círculo e faz-se ainda uma análise comparativa com o dentado cicloidal. Na verdade, a maioria das engrenagens de uso corrente utiliza dentes com perfis em evolvente de círculo (Norton, 2013). Com este tipo de perfil evitam-se muitos dos inconvenientes associados ao dentado cicloidal, tais como os choques e as dificuldades de fabrico. No dentado em evolvente, os perfis dos dentes são constituídos por arcos de evolvente com um único sentido de curvatura, a qual é convexa. Por definição, uma evolvente de círculo é a curva descrita por um ponto de uma reta que rola sem escorregar em torno de um círculo, denominado círculo de base (Wilson e Sadler, 1993). A figura 1.32 ilustra uma evolvente onde se evidenciam alguns dos seus principais elementos. A reta, que é representada por uma corda esticada e inextensível, é sempre tangente ao círculo de base. Verifica-se ainda que o centro de curvatura da evolvente está sempre localizado num ponto de tangência da corda com o círculo de base. Finalmente, pode atestar-se que qualquer tangente à evolvente é perpendicular à corda, que representa o raio instantâneo de curvatura da evolvente. Observa-se, portanto, que a evolvente apresenta um raio variável (Budynas e Nisbett, 2011).

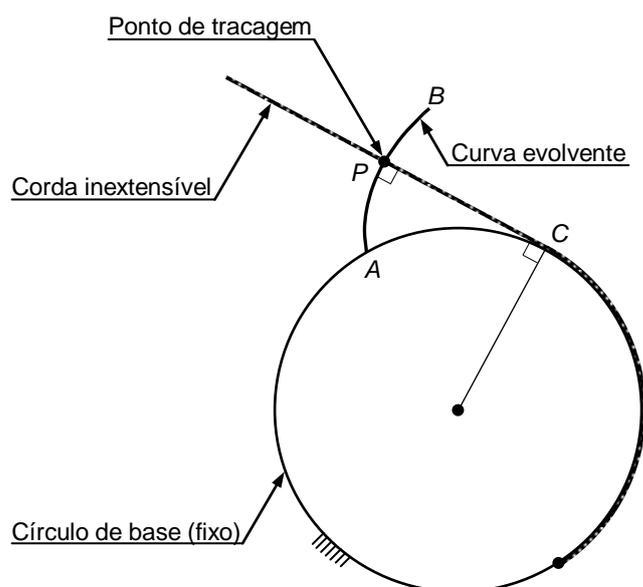


Figura 1.32 – Curva evolvente de círculo.

A evolvente é desenhada quando a corda é enrolada ou desenrolada à volta do círculo. O ponto P , situado na corda, é o ponto traçador, sendo considerado para desenhar a curva evolvente AB . Na configuração representada na figura 1.32, no ponto P , o raio de curvatura é igual ao comprimento do segmento de reta PC . Deve referir-se que em A o raio de curvatura é nulo, atingido o seu valor máximo em B . A corda é perpendicular à evolvente em todos os pontos de interseção com esta, sendo também sempre tangente ao círculo de base, tal como na representação da figura 1.32.

A figura 1.33 mostra o procedimento gráfico utilizado no traçado de uma evolvente de círculo. Assim, em primeiro lugar desenha-se o círculo de base de raio r_b . De seguida divide-se o círculo em partes iguais, desenhando também os segmentos de reta radiais OP , OA_1 , OA_2 , ... OA_4 , tal como se ilustra na figura 1.33. Agora, a partir dos pontos A_1 , A_2 , ... A_4 desenhavam-se segmentos perpendiculares às direções radiais

anteriormente traçadas, como se representa na figura 1.33. O segmento de reta A_1P_1 mede exatamente o mesmo que o comprimento do arco A_1P . Do mesmo modo, o segmento de reta A_2P_2 mede exatamente o mesmo que o comprimento do arco A_2P , e assim sucessivamente para os demais segmentos. Finalmente, unindo os pontos P, P_1, P_2, \dots, P_4 obtém-se a curva evolvente do círculo de base.

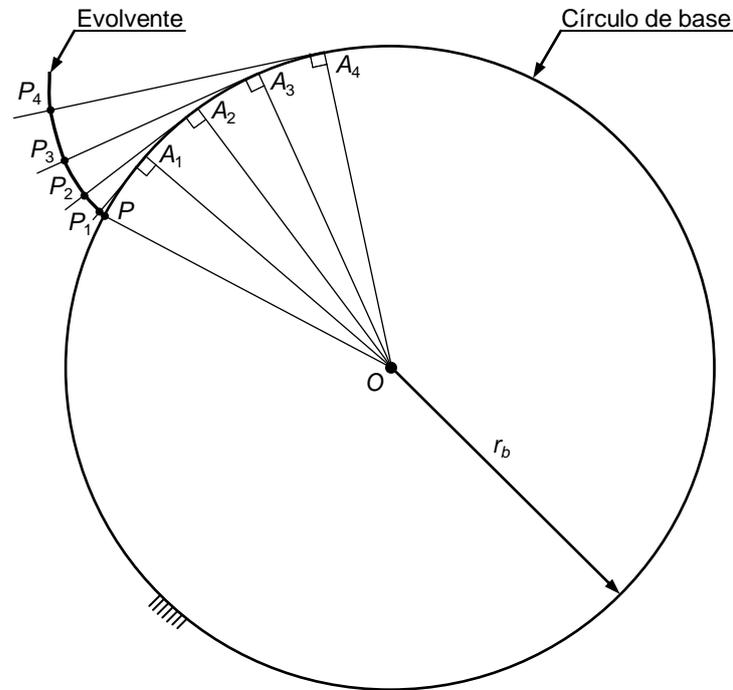


Figura 1.33 – Traçado de uma curva evolvente de círculo.

A figura 1.34 ilustra a evolvente de um círculo, bem como um dente obtido a partir da curva evolvente. Pode observar-se que quanto maior for o raio do círculo de base, menos acentuada será a evolvente. No caso de uma cremalheira (roda de raio infinito), a evolvente é uma reta (Henriot, 1979; Budynas e Nisbett, 2011).

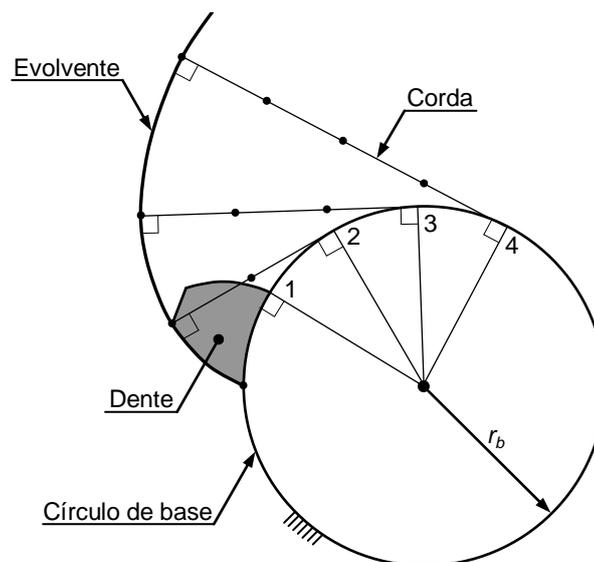


Figura 1.34 – Dente gerado em evolvente de círculo.

Pelo acima exposto, observa-se que, quando um dentado tem perfil em evolvente de círculo, a normal a esse perfil do dente é tangente à circunferência de base. Assim, torna-se necessário estabelecer uma relação entre as circunstâncias de base (que servem para gerar o perfil dos dentes em evolvente de círculo) e as circunferências primitivas (que ajudam a definir uma roda dentada). Para o efeito, considerem-se as circunferências primitivas C_1 e C_2 , cujos centros e raios são O_1 , O_2 , r_1 e r_2 , respectivamente. Considere-se também o segmento de reta EF , que faz um ângulo α com a tangente comum às duas circunferências primitivas. As circunferências de base C_{b1} e C_{b2} estão centradas em O_1 e O_2 , têm raios r_{b1} e r_{b2} , sendo tangentes ao segmento de reta EF nos pontos A e B , tal como se representa na figura 1.35. Para que não exista escorregamento entre os círculos primitivos é condição *sine qua non* que a relação entre os seus raios primitivos seja constante, e a mesma que a relação entre os raios de base, ou seja

$$i = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} \quad (1.8)$$

que representa a relação de transmissão da engrenagem da figura 1.35. Como a corda, representada na figura 1.35 pelo segmento de reta EF , é sempre tangente aos círculos de base, então este segmento intersecta a linha de centros no mesmo ponto de contacto entre os círculos primitivos (*i.e.* o ponto primitivo I), qualquer que seja o valor de α . Como já foi apresentado anteriormente, o ângulo α representa o ângulo de pressão, sendo o segmento EF denominado de linha da ação, linha de engrenamento, linha de pressão, linha de geração ou ainda linha de forças (Henriot, 1979; Shigley e Mischke, 1989). Esta linha não altera a sua direção tangente aos círculos de base. Por outro lado, atendendo a que a linha de ação é sempre perpendicular à evolvente no ponto de contacto, a condição de transmissão uniforme de movimento é garantida, isto é, com relação de transmissão constante.

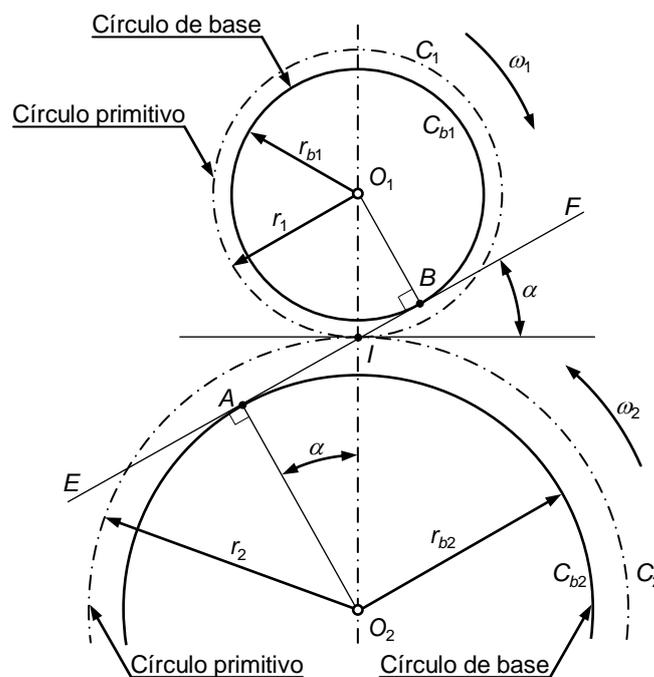


Figura 1.35 – Representação da linha de ação ou linha de engrenamento.

Da análise da figura 1.35 podem ser escritas as seguintes relações

$$r_{b1} = r_1 \cos \alpha \quad (1.9)$$

$$r_{b2} = r_2 \cos \alpha \quad (1.10)$$

Com efeito, estas duas equações estabelecem a relação entre os raios primitivos e os raios de base de uma engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto com perfil em evolvente de círculo. Considere-se agora um qualquer ponto C , situado entre A e B no segmento de reta EF , tal como representado na figura 1.36. Supondo que a corda é cortada em C , então resultam dois segmentos da corda que podem ser usados para gerar os perfis em evolvente dos círculos de base das rodas 1 e 2. A figura 1.36 ilustra os perfis gerados pelo ponto C . Observa-se que ambas são curvas evolventes, cuja normal num qualquer ponto é tangente à respetiva circunferência de base. Verifica-se ainda que o ponto de contacto se situa no segmento de reta EF . Esta situação traduz o facto de que numa engrenagem com dentes em perfil em evolvente de círculo, os dentes de uma e outra rolam sem escorregar uns sobre os outros durante o engrenamento. Este assunto está diretamente relacionado com o princípio fundamental do engrenamento que será objeto de estudo na secção seguinte deste documento.

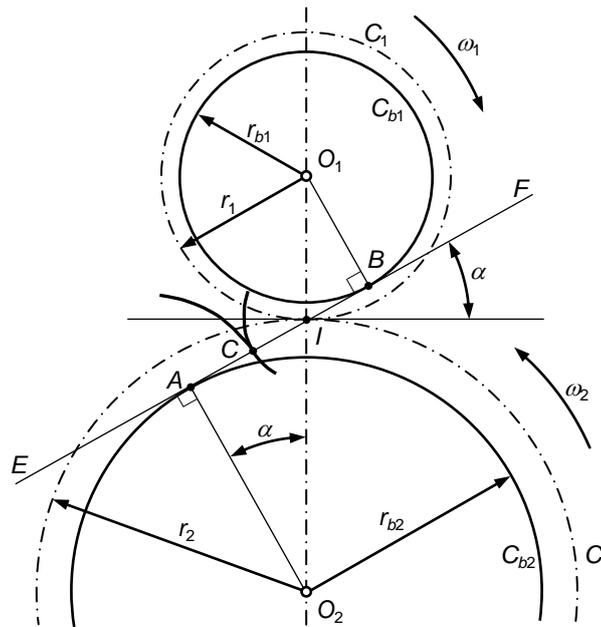


Figura 1.36 – Geração do dente a partir da linha de ação ou linha de geração.

Deve notar-se que a velocidade linear do ponto C é tangente às circunferências de base das rodas 1 e 2. Pelo que dividindo esta velocidade linear pelo raio de base de cada roda, obtêm-se as respetivas velocidades de rotação das rodas 1 e 2. Este facto é verificado para qualquer ponto situado no segmento de reta EF . Assim, pode escrever-se a seguinte relação matemática

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} \quad (1.11)$$

em que ω_1 e ω_2 representam as velocidades angulares das rodas 1 e 2, respetivamente. Fica assim, demonstrado que o perfil em evolvente de círculo obedece à condição

de que é constante a relação de transmissão. Também se pode observar que a curva evolvente não pode ser gerada para o interior das circunferências de base. Assim, uma vez que o ângulo de pressão é estabelecido *a priori*, não poderá existir contacto entre os dentes fora do segmento de reta *AB*.

Tal como foi referido anteriormente, o dentado em evolvente é o mais utilizado em engrenagens de máquinas e mecanismos, dado o leque de vantagens que apresenta face ao dentado cicloidal. De seguida resumem-se algumas das características que tornam atrativos os dentados em evolvente de círculo (Henriot, 1979; Wilson e Sadler, 1993; Budynas e Nisbett, 2011; Norton, 2013):

- Os perfis dos dentes em evolvente de círculo apresentam uma curvatura com um sentido único, tornando fácil a maquinagem dos dentes pelos processos mais vulgares de talhe,
- Os dentes com perfil em evolvente de círculo proporcionam maior área na raiz do dente, tornando-os mais resistentes e com maior capacidade de carga quando comparados com os dentados cicloidais com características idênticas (*e.g.*, mesmo módulo),
- Uma roda dentada com perfis dos dentes em evolvente de círculo pode funcionar com qualquer outra roda, desde de que ambas apresentem o mesmo módulo,
- É possível o engrenamento, em condições ainda aceitáveis, entre rodas com dentes com perfil em evolvente, mesmo quando existe variação do entre-eixo (aumento ou diminuição), desgaste dos apoios ou deformação dos elementos de transmissão. Esta circunstância altera, todavia, o valor do ângulo de pressão, tal como se ilustra na figura 1.37,
- A linha de ação ou de linha de engrenamento é um segmento de reta que forma com a tangente às circunferências primitivas um ângulo de pressão que é constante durante a transmissão do movimento. Todos os pontos de contacto estão localizados sobre a linha de ação.

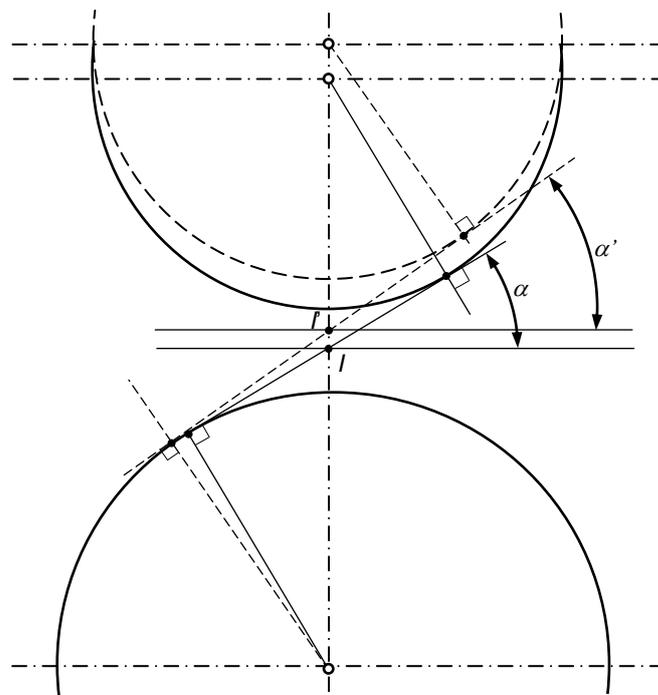


Figura 1.37 – Efeito da variação do entre-eixo no ângulo de pressão.

Numa engrenagem de dentado reto com dentes com perfil em evolvente de círculo, a linha de ação é constituída por um troço da reta geradora, a qual está compreendida entre as circunferências de coroa das duas rodas engrenadas. Assim, a força transmitida entre os dentes apresenta sempre a direção da linha de ação. Esta força está representada pela letra N na figura 1.38, a qual se pode relacionar com a força tangencial, responsável pela transmissão de potência, do seguinte modo

$$F_t = N \cos \alpha \quad (1.12)$$

Por outro lado, o momento (ou binário) a ser transmitido pela engrenagem é dado pela seguinte expressão

$$M_1 = F_t r_1 \quad (1.13)$$

em que r_1 é o raio primitivo da roda motora. Com efeito, para uma engrenagem que transmite um momento constante, a potência transmitida será também constante e, conseqüentemente, a força normal de contacto nos dentes é constante, uma vez que

$$P = M_1 \omega_1 \quad (1.14)$$

Logo, combinando as equações (1.12)-(1.14) resulta que

$$N = \frac{P}{\omega_1 r_1 \cos \alpha} \quad (1.15)$$

Deste modo, pode concluir-se que as transmissões em engrenagens de dentado em evolvente de círculo são mais suaves e sem vibrações, quando comparadas com as de dentado cicloidal. Porém, como a força normal nos dentes é maior do que no dentado cicloidal, verifica-se um maior atrito e desgaste no dentado em evolvente de círculo.

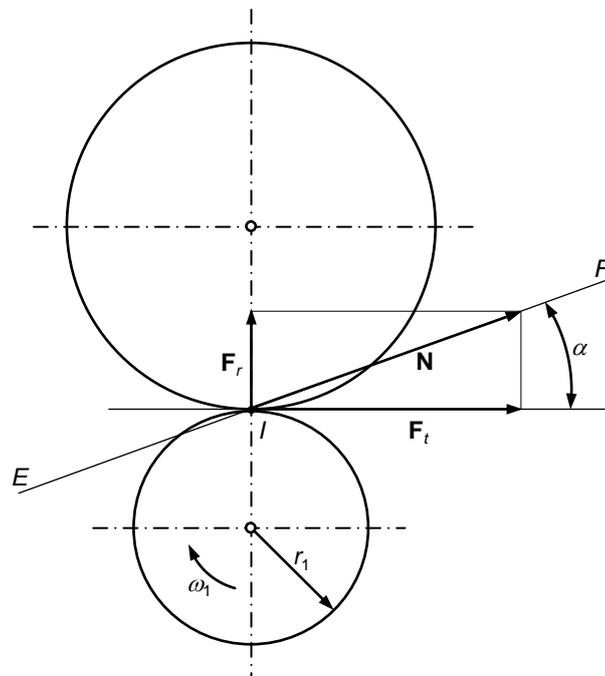


Figura 1.38 – Forças transmitidas numa engrenagem de dentado em evolvente.

1.7. PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DO ENGRENAMENTO

Antes de apresentar o princípio fundamental do engrenamento é oportuno rever os conceitos de eixo e de centro instantâneo de rotação. Quando um corpo roda no espaço tridimensional em relação a outro corpo existe um eixo comum de rotação, cuja posição relativamente a ambos os corpos pode ou não variar de instante para instante. A estes eixos dá-se o nome de eixos instantâneos de rotação. Em mecanismos planares, os eixos instantâneos de rotação são sempre perpendiculares ao plano do movimento e interseam os corpos num ponto, denominado de centro instantâneo de rotação. Durley (1903) chama aos centros instantâneos de rotação centros virtuais ou centroides. Há autores que utilizam as designações de centros instantâneos de velocidade, pólos ou, simplesmente, centros. Com efeito, centro instantâneo de rotação é, por definição, o local, em cada instante, de um par de pontos que coincidem no espaço e que pertencem a corpos distintos, para os quais é igual a velocidade absoluta (Flores e Claro, 2007). Por outras palavras, o conceito de centro instantâneo de rotação pode ser enunciado como sendo o local de um par de pontos coincidentes e que pertencem a dois corpos diferentes, cuja velocidade relativa é nula. Em suma, um centro instantâneo de rotação, para sistemas planos é um ponto de um corpo em relação ao qual um corpo roda em relação a outro.

O número de centros instantâneos de rotação que existe num mecanismo pode ser calculado utilizando a seguinte expressão (Flores e Claro, 2007)

$$n_{CIR} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (1.16)$$

em que n representa o número de corpos do sistema. Os centros instantâneos de rotação podem ser fixos, permanentes ou imaginários.

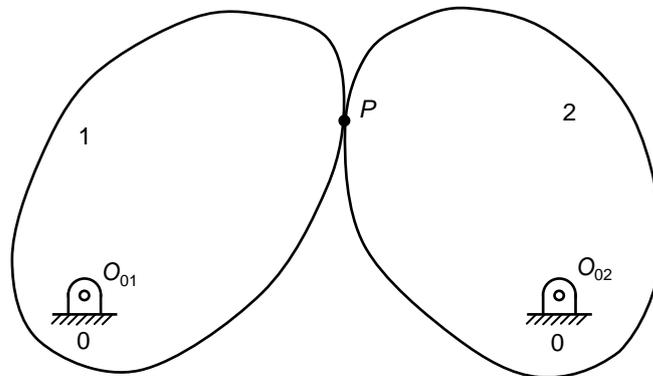


Figura 1.39 – Sistema mecânico constituído por três corpos, em quem que dois deles estão em contacto direto.

Considere-se o sistema mecânico constituído por três corpos em que dois deles estão em contacto direto, tal como ilustra a figura 1.39. O corpo 0 é fixo, correntemente denominado de fixe, enquanto os corpos 1 e 2 rodam relativamente ao corpo 0 em torno dos centros instantâneos de rotação O_{01} e O_{02} , respetivamente. É por demais evidente que estes dois centros instantâneos de rotação se podem localizar por simples inspeção ou observação direta do sistema. Da aplicação da equação (1.16) conclui-se que neste sistema existem três centros instantâneos de rotação, ou seja, O_{01} , O_{02} e O_{12} . Para determinar a localização O_{12} deve recorrer-se, conjuntamente ao teorema da normal comum e ao teorema dos três centros. Este último teorema é também

denominado de teorema de Aronhold-Kennedy²⁵, o qual diz que quando três corpos têm movimento relativo entre si, então existem três centros instantâneos de rotação situados sobre a mesma linha reta. Por seu lado, o teorema da normal comum pode ser enunciado do seguinte modo, o centro instantâneo de rotação de dois corpos em contacto direto num ponto localiza-se na direção definida pela normal comum aos dois corpos no ponto de contacto. Combinado agora os dois teoremas anteriormente descritos, é possível localizar o centro instantâneo de rotação O_{12} , tal como se representa na figura 1.40. O centro O_{12} é o ponto do corpo 1 em torno do qual o corpo 2 roda, ou vice-versa.

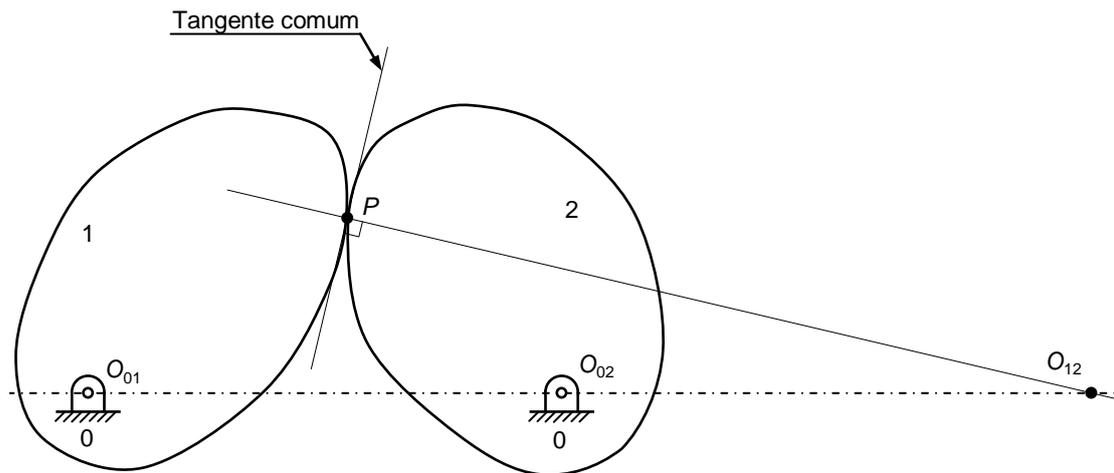


Figura 1.40 – Localização dos centros instantâneos de rotação de um sistema constituído por três corpos, em quem que dois deles estão em contacto direto.

Considere-se agora o sistema representado na figura 1.41, o qual é constituído por dois dentes de uma engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto. Ainda nesta mesma figura estão incluídos os centros instantâneos de rotação, ou seja, O_{01} , O_{02} e O_{12} , cuja localização pode ser determinada considerando os procedimentos supra-mencionados. Representa-se também o ponto de contacto entre os dentes, P , bem como as direções tangente e normal neste ponto.

Se se considerarem as sucessivas posições do ponto I , que coincide com o centro instantâneo de rotação O_{12} , obtêm-se as curvas C_1 e C_2 , denominadas centrodos ou trajetórias polares. Como foi já apresentado anteriormente, o ponto I designa-se de ponto primitivo ou pólo. Pode observar-se que as curvas C_1 e C_2 descrevem um movimento de rolamento puro, isto é, rolam sem escorregar uma sobre a outra à medida que as rodas 1 e 2 giram em torno de O_{01} e O_{02} , respetivamente. No caso das engrenagens, as curvas C_1 e C_2 designam-se de curvas primitivas, e em particular no caso de engrenagem circulares, aquelas curvas chamam-se circunferências primitivas²⁶.

²⁵ O teorema dos três centros ou teorema de Aronhold-Kennedy foi, primeiramente, desenvolvido por Aronhold em 1872 e, posteriormente, por Kennedy em 1886. Os trabalhos destes dois cientistas foram realizados de forma independente. Na literatura alemã é comum encontrar-se a referência a este teorema, como sendo o teorema de Aronhold, ao passo que na literatura anglossaxónica se pode encontrar a referência ao teorema de Kennedy.

²⁶ Quando as engrenagens estão no espaço tridimensional, então o centro instantâneo de rotação dá lugar ao eixo instantâneo de rotação, e as curvas primitivas dão lugar às superfícies primitivas (e.g. cones, cilindros, etc.).

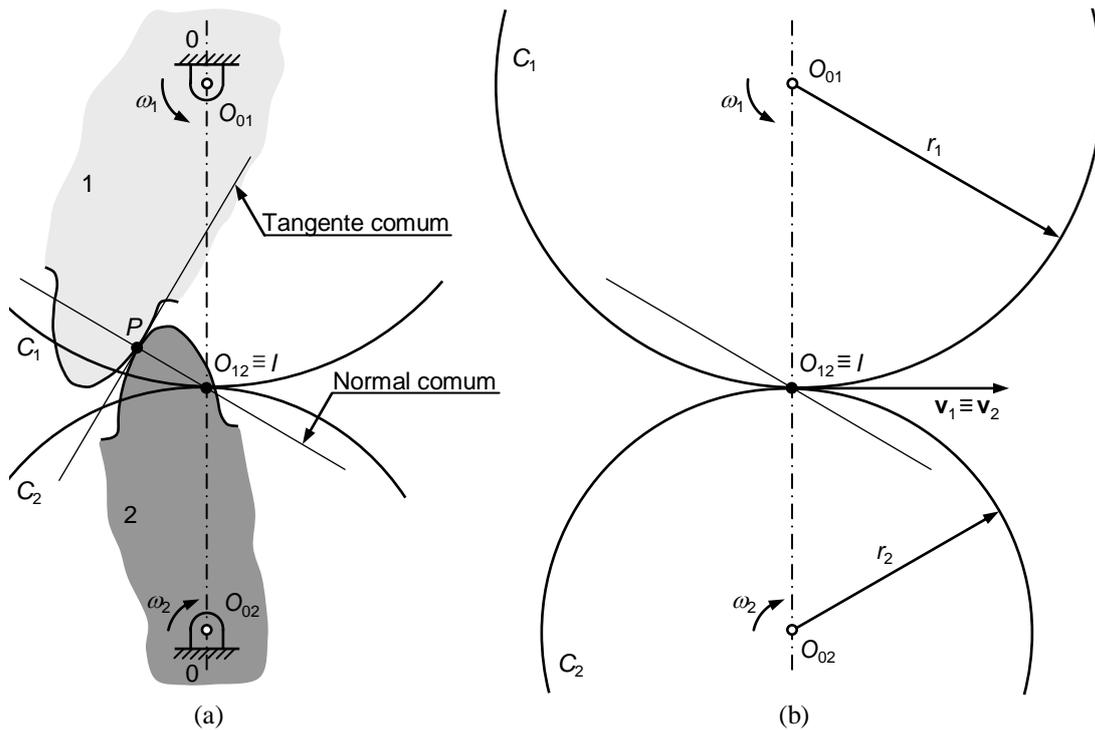


Figura 1.41 – Identificação das curvas primitivas numa engrenagem.

Atendendo a que as rodas 1 e 2, representadas parcialmente na figura 1.41, rodam com velocidades angulares ω_1 e ω_2 , respetivamente, então pode definir-se relação de transmissão como sendo o quociente entre estas duas quantidades, ou seja,

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (1.17)$$

em que nesta definição se admite que a roda 1 é a motora, sendo, por conseguinte a roda 2 movida ou mandada. A velocidade linear do ponto primitivo pode ser calculada pela da roda 1 ou pela roda 2, resultando a mesma quantidade, uma vez que este ponto é um centro instantâneo de rotação. Assim, pode escrever-se que

$$v_1 = v_2 \Rightarrow \omega_1 \overline{O_{01}I} = \omega_2 \overline{O_{02}I} \quad (1.18)$$

A equação (1.18) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{O_{02}I}}{\overline{O_{01}I}} \quad (1.19)$$

Da análise da equação (1.19) pode concluir-se que a relação de velocidades angulares das rodas 1 e 2 é inversamente proporcional aos segmentos que definem as distâncias do ponto primitivo aos centros de rotação das rodas. Quando a relação de transmissão é constante, então a posição do ponto primitivo é fixa. De facto, para que isto aconteça, deve verificar-se uma de duas situações:

- A normal comum em qualquer ponto de contacto mantém sempre a mesma posição, ou
- A normal comum varia de posição, todavia, intersesta a linha de centros, $O_{01}O_{02}$, sempre no mesmo ponto.

O facto de o ponto primitivo ser fixo e de haver constância na relação de velocidades angulares das rodas, traduz o princípio fundamental do engrenamento. Às curvas dos perfis dos dentes que obedecem a este princípio chamam-se curvas conjugadas²⁷. Com efeito, a lei fundamental da ação conjugada entre dentes de uma engrenagem pode enunciar-se do seguinte modo, no engrenamento de duas rodas dentadas, a normal comum às superfícies dos dentes no ponto de contacto tem que interseccionar a linha de centros sempre no ponto primitivo²⁸ (Branco *et al.*, 2009). Então, duas quaisquer curvas podem ser consideradas para os flancos dos dentes, desde que, em cada instante, a normal comum às superfícies dos dentes passe continuamente no ponto primitivo, o qual divide o entre-eixo na relação inversa das velocidades angulares das rodas. Por conseguinte, é constante a relação de velocidades angulares das rodas motora e movida em cada instante, uma vez que não se admite escorregamento. A constância de relação de transmissão é, na verdade, um objetivo associado ao funcionamento das engrenagens, ou seja,

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (1.20)$$

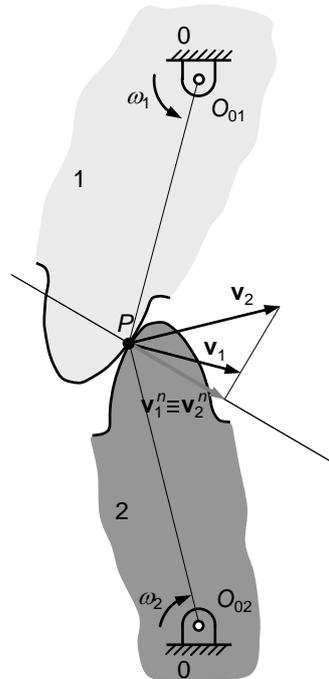


Figura 1.42 – Representação da velocidade periférica do ponto de contacto.

Atendendo a que o ponto de contacto, P , pertence simultaneamente aos corpos 1 e 2, a velocidade periférica deste ponto pode ser calculada do seguinte modo

$$v_1 = \omega_1 \overline{O_{01}P} \quad (1.21)$$

$$v_2 = \omega_2 \overline{O_{02}P} \quad (1.22)$$

²⁷ A ação conjugada de curvas é utilizada em engrenagens e mecanismos do tipo came-seguidor, com o propósito de se obter uma relação de velocidades constante durante funcionamento.

²⁸ Nas engrenagens não circulares não é necessário que a normal comum passe pelo ponto primitivo, basta que se verifique constância na relação de velocidades em cada instante do engrenamento.

As projeções destas duas velocidades, na direção normal²⁹ no ponto de contacto, têm de ter a mesma intensidade, caso assim não fosse, os dentes penetrariam um no outro ou afastar-se-iam um do outro. A figura 1.42 incluiu as velocidades periféricas do ponto *P*, bem como as respetivas projeções na direção normal, representadas a cinzento na mesma figura 1.42.

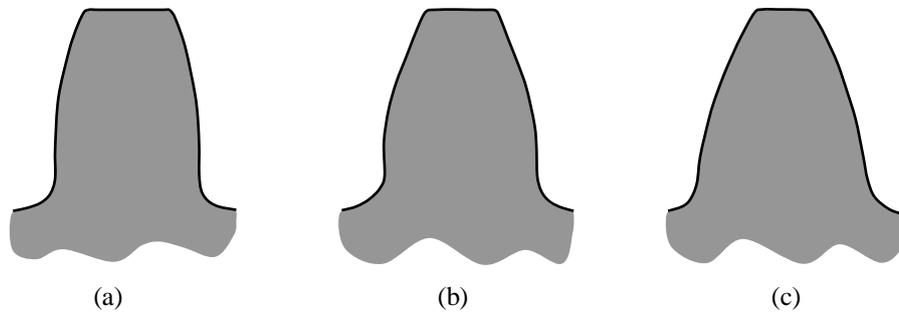


Figura 1.43 – Efeito do ângulo de pressão no perfil do dente: (a) 14,5°; (b) 20°; (c) 25°.

Tal como foi já referido anteriormente, o ângulo de pressão é um dos parâmetros que caracterizam o desempenho das engrenagens (Flores, 2009). Os valores do ângulo de pressão são normalizados, sendo 20° e 25° os valores de uso mais frequente. O valor de 14,5°, embora considerado no passado, tem vindo a cair em desuso. A figura 1.43 ilustra três perfis de dentes para estes três valores do ângulo de pressão (Juvinall e Marshek, 2006).

²⁹ Deve desde já notar-se que a direção normal no ponto de contacto não deve ser confundida com a direção definida pela linha de engrenamento.

1.8. REVISÃO DE CONHECIMENTOS

Com o propósito de proporcionar uma revisão de conhecimentos, apresenta-se nesta secção, um conjunto diversificado de questões relativas aos principais aspetos relacionados com a temática das engrenagens.

1. Apresente uma definição de engrenagem.
2. Compare a transmissão de movimento por engrenagem com um sistema alternativo.
3. Liste cinco exemplos de aplicações das engrenagens.
4. Classifique a engrenagem da figura de baixo quanto à forma dos dentes e à posição relativa dos eixos.



5. Classifique a engrenagem da figura de baixo quanto à forma dos dentes e à posição relativa dos eixos.



6. Classifique a engrenagem da figura de baixo quanto à forma dos dentes e à posição relativa dos eixos.



7. Apresente duas vantagens e um inconveniente das engrenagens de dentado helicoidal face ao dentado reto.

8. Represente, em perspectiva, um setor dentado de uma roda cilíndrica de dentes retos, indicando dez dos seus principais elementos relativos à notação básica.
9. Defina saliência de um dente.
10. Defina módulo de uma roda dentada.
11. Discuta a importância do módulo no funcionamento de uma engrenagem.
12. Quais são os principais parâmetros que definem e caracterizam uma roda dentada de uso corrente?
13. Para o mesmo diâmetro, explique a influência do módulo na quantidade e dimensão dos dentes de uma roda dentada.
14. Indique quais as principais curvas utilizadas na geração de perfis de dentes.
15. Apresente dois inconvenientes associados ao uso de rodas com dentado cicloidal.
16. Apresente três vantagens do dentado em evolvente de círculo quando comparado com o dentado cicloidal.
17. Descreva o procedimento gráfico que permite obter uma curva evolvente de círculo.
18. Faça a representação, e respectiva legenda, da linha de engrenamento de uma engrenagem cilíndrica exterior de dentes retos.
19. Estabeleça a relação matemática entre o diâmetro primitivo e o diâmetro de base.
20. Qual é o efeito do aumento do entre-eixo no ângulo de pressão numa engrenagem de dentado em evolvente de círculo?
21. Descreva o princípio fundamental do engrenamento.
22. Defina relação de transmissão de uma engrenagem.
23. Explique o conceito de ângulo de pressão.
24. Quais os valores mais frequentemente utilizados para o ângulo de pressão?
25. Diga o que entende por perfis conjugados.

1.9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Antunes, F. (2012) *Mecânica Aplicada - Uma abordagem prática*. Lidel.
- Branco, C.M., Ferreira, J.M., da Costa, J.D., Ribeiro, A.S. (2009) *Projecto de Órgãos de Máquinas*. 2ª Edição, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Budynas, R.G., Nisbett, J.K. (2011) *Elementos de Máquinas de Shigley*. 8ª edição McGraw-Hill, Brasil.
- Cunha, L.V. (2008) *Desenho Técnico*. 14ª Edição. Fundação Calouste Gulbenkian.
- Denkena, B., Köhler, J., Schindler, A., Woiwode, S. (2014) Continuous generating grinding - Material engagement in gear tooth root machining. *Mechanism and Machine Theory*, 81, 11-20.
- Drago, R.J. (1988) *Fundamentals of Gear Design*. London, Butterworths.
- Durley, R.J. (1903) *Kinematics of Machines*. John Wiley and Sons, New York.
- Flores, P. (2009) *Projeto de Mecanismos Came-Seguidor*. Publindústria, Porto.
- Flores, P. (2012) *Análise Cinemática e Dinâmica de Mecanismos - Exercícios resolvidos e propostos*. Publindústria, Porto.
- Flores, P., Claro, J.C.P. (2007) *Cinemática de Mecanismos*. Edições Almedina, Coimbra.
- Henriot, G. (1979) *Traité Théorique et Pratique des Engrenages*. Editora Dunod.
- Juvinall, R.C., Marshek, K.M. (2006) *Fundamentals of Machine Component Design*. John Wiley and Sons, New York.
- Li, H., Wei, W., Liu, P., Kang, D., Zhang, S. (2014) The kinematic synthesis of involute of spiral bevel gears and their tooth contact analysis. *Mechanism and Machine Theory*, 79, 141-157.
- Mabie, H.H., Reinholtz, C.F. (1987) *Mechanisms and Dynamics of Machinery*. Fourth Edition, John Wiley and Son, New York.
- Niemann, G. (1971) *Elementos de Máquinas*. Volume II, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, Brasil.
- Norton, R.L. (2013) *Machine Design*. Pearson Education, New York.
- Shigley, J.E., Mischke, C.R. (1989) *Mechanical Engineering Design*. 5th Edition, McGraw-Hill, New York.
- Shigley, J.E., Uicker, J.J. (1995) *Theory of Machines and Mechanisms*. 2nd Edition, McGraw-Hill, New York.
- Simon, V.V. (2014) Optimization of face-hobbed hypoid gears. *Mechanism and Machine Theory*, 77, 164-181.
- Smith, W.F. (1990) *Principles of Materials Science and Engineering*. 2nd Edition, McGraw-Hill, New York.
- Spotts, M.F., Shoup, T.E. (1998) *Design of Machine Elements*. 7th Edition Prentice-Hall, New Jersey.
- Strandh, S. (1979) *A History of the Machine*. A&W Publishers, Inc, New York.
- Vera, L.C. (1996) *Documentos Biográficos de Juanelo Turriano*. Madrid, Fundación Juanelo Turriano.
- Wilson, C.E., Sadler, J.P. (1993) *Kinematics and Dynamics of Machinery*. 2nd Edition, Harper Collins College Publishers, New York.