

A FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS NA APRENDIZAGEM DE DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

Maria do Carmo Cunha

Escola Secundária Alberto Sampaio
carmo.fernandes@gmail.com

Paula Mendes Martins

CMAT–Universidade do Minho
pmendes@math.uminho.pt

Floriano Viseu

CIEd–Universidade do Minho
fviseu@ie.uminho.pt

Resumo. A relevância que a resolução de problemas tem nos programas de matemática dos diferentes níveis escolares deve-se à riqueza de atividades que proporciona. Uma dessas atividades é a formulação de problemas, entendida como uma estratégia de aprofundamento de conceitos matemáticos e de desenvolvimento da compreensão dos procedimentos implicados na sua resolução. É bem diferente ter que resolver problemas propostos pelo professor, aos quais o aluno só tem que responder a questões bem estruturadas, do que formular problemas, em que o aluno é desafiado a contextualizar situações usando a sua linguagem, conhecimentos e experiências. Esta diferença despertou o nosso interesse de averiguar como alunos do 11.º ano de Matemática B aplicam os conhecimentos que adquiriram no estudo de derivadas de funções na formulação de problemas. Adotando uma metodologia qualitativa e interpretativa, analisamos os dados recolhidos através das propostas elaboradas pelos alunos e por dois questionários (um no início e outro no final da experiência). Da análise dos dados verificamos que os alunos entendem a resolução de problemas como sendo uma atividade mais fácil de concretizar do que a formulação de problemas, a qual consideram que envolve mais raciocínio e o conhecimento de vários conteúdos. As propostas por eles elaboradas não só traduzem esta posição, como revelam dificuldades que os alunos têm em relacionar e dar sentido aos conhecimentos que adquiriram no estudo de uma derivada de uma função e a sua falta de criatividade e de eficiência de comunicação matemática.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Derivada de uma função; Formulação de problemas; Problemas de otimização.

Introdução

Nas sucessivas reformulações dos programas dos diferentes anos escolares, a resolução de problemas surge como uma atividade central do currículo da Matemática (NCTM, 1991), enquanto processo que fornece o contexto que promove a aprendizagem dos conceitos matemáticos e o desenvolvimento de capacidades de raciocínio e de comunicação matemática. Abrantes et al. (1997) relevam a atividade de resolução de problemas na aprendizagem de conceitos matemáticos por envolver o aluno a “experimentar e a fazer matemática” (p. 42). Trata-se de uma perspetiva de conceber o

ensino de matemática que valoriza a construção do conhecimento matemático em detrimento da perspectiva centrada na transmissão desse conhecimento do professor para o aluno. As recomendações atuais da educação matemática apontam para um ensino que valorize as formas de pensar do aluno, o que na atividade matemática em muito se reflete na discussão de estratégias e de resultados de problemas. A ênfase é colocada na compreensão e o aluno é envolvido no processo de fazer matemática em vez de se restringir a ouvir, ler e a repetir processos. A disciplina de Matemática não se resume a um conjunto de regras nem a sua atividade é reduzida a cálculos ou a demonstrações realizadas mecanicamente. Mas sim, tal como defende a APM (1998), uma atividade criativa assente na formulação e na resolução de problemas. Destas atividades, a resolução de problemas é a que tem mais destaque nos artefactos curriculares, como são o caso dos manuais escolares, e na sala de aula (Silver et al., 1996). Frequentemente, o aluno é confrontado com problemas que apresentam um enunciado bem definido, sobre o qual tem que identificar os dados, estabelecer uma estratégia de resolução e discutir a solução encontrada em função do contexto do problema. Bem diferente é o processo inverso, que perante uma dada solução – por exemplo, na forma de uma expressão, um gráfico, ou condições – o aluno é desafiado a formular um enunciado de um problema cujo contexto dê sentido aos conceitos que aprendeu e se traduz numa estratégia de resolução que tenha como solução a informação dada. Mas será que uma prática mais acentuada de resolução de problemas nas atividades de estudo promove o desenvolvimento da capacidade de formular problemas? Esta questão despertou a nossa atenção de averiguar como alunos do 11.º ano de Matemática B aplicam os conhecimentos que adquiriram no estudo de derivadas de funções na formulação de problemas.

Derivada de uma função e sua aplicação

As derivadas são um dos tópicos do tema das Funções cujo estudo se inicia no 11.º ano a partir da noção de taxa média e instantânea de variação e da sua interpretação geométrica num intervalo do domínio da função (Ministério da Educação, 2002). Os conhecimentos adquiridos permitem a resolução de problemas de otimização. Neste sentido, a importância do conceito de derivada ultrapassa o mero âmbito disciplinar. A aplicabilidade da matemática, enquanto instrumento de estudo dos fenómenos reais, depende da conceção de um dado modelo que sintetize e relacione as principais características do fenómeno a estudar. Desta aplicabilidade, são inúmeros os exemplos

de questões concretas oferecidas por disciplinas afins à Matemática, onde a necessidade de determinar velocidades instantâneas, retas tangentes a curvas, máximos e mínimos de funções, torna imprescindível o estudo da noção de derivada de uma função. Este conceito desempenha um papel central na análise de funções (monotonias, extremos, concavidades, gráficos) e na resolução de muitos problemas das mais variadas ciências (NCTM, 1991).

Formulação de problemas

A formulação de problemas é uma atividade que tem vindo a ganhar destaque nas sugestões metodológicas dos programas de matemática (NCTM, 1991, 2008). Esse destaque deve-se, na perspetiva de Abrantes (1992), sobretudo por os alunos quando enfrentam uma situação-problema da realidade muitas vezes não a conseguem resolver por considerarem que ela não é em nada parecida com os problemas que resolvem na sala de aula. Na vida real, muitas vezes os problemas não apresentam uma formulação adequada e esta indefinição tende a gerar dificuldades aos alunos. Uma forma de ultrapassar esta dificuldade consiste em envolver, na sala de aula, os alunos na formulação de problemas de contexto real, a partir de, por exemplo, uma expressão ou um gráfico. Esta atividade é entendida como uma estratégia de aprofundamento de conceitos matemáticos e de desenvolvimento da compreensão dos procedimentos implicados na sua resolução (Boavida et al, 2008). Corroborando esta perspetiva, Freudenthal (1983) defende que a formulação de problemas é uma atividade fulcral na aprendizagem e no aprofundamento de conceitos matemáticos.

A formulação de problemas surge referida na literatura, do âmbito da educação matemática, como atividade ligada quer à formação de um novo problema quer à reformulação de problemas dados (Silver, 1997). Quanto à primeira perspetiva, o objetivo da formulação de problemas não é a solução de um dado problema mas a criação de um novo problema sobre uma situação. Relativamente à segunda perspetiva, o autor considera que a formulação de problemas é comumente referida como reformulação, processo que ocorre na resolução de problemas complexos através da recriação de um dado problema de modo a tornar o seu processo de resolução mais acessível. A formulação de problemas consiste assim de sucessivas reformulações de um problema inicial através de uma série de representações mais refinadas do problema, incorporando relações entre a informação dada e o objetivo desejado e adicionando

novas informações. A formulação de problemas pode também ocorrer depois da resolução de um problema particular, ou após a análise das condições do problema com o intuito de gerar alternativas relacionadas, o que se associa à fase de Polya designada por “looking back”.

A formulação de problemas liga-se à criatividade, o que para Silver (1997) integra três componentes: fluência (número de ideias geradas em resposta a uma solicitação), flexibilidade (mudanças aparentes na abordagem ao gerar respostas para uma dada solicitação) e novidade (originalidade das ideias geradas em resposta a uma solicitação).

A formulação de problemas na disciplina de Matemática tem sido objeto de alguns estudos, como são exemplo os realizados por Porfírio (1993), Christou et al. (2005) e Gonçalves (2011). Porfírio (1993) constatou que os alunos mostram ter cuidado com a organização e clareza dos enunciados e evidenciam aspetos que permitem enriquecer o enunciado produzido à medida que o trabalho decorre. Quando os alunos trabalhavam em grupos apresentavam quase sempre formulações de problemas, enquanto nas produções individuais formulavam enunciados de exercícios. Em algumas das formulações de problemas apresentadas, o enunciado era semelhante a outros problemas já resolvidos pelos alunos, mas, apesar desta semelhança, esta formulação permitia a explicitação de relações que aprofundavam a compreensão da situação problemática original. Foi ainda possível verificar um aumento de criatividade nos alunos quando trabalhavam em grupo, o que permitiu inventar problemas que suscitavam questões ainda não analisadas ou mais complicadas na sua resolução. Christou et al. (2005) realizaram um estudo com o objetivo de construir um modelo teórico sobre a formulação/reformulação de problemas pelos alunos. Este estudo teve a participação de 143 alunos do 6.º ano de seis turmas distintas. Foram apresentadas a estes alunos cinco situações problemáticas diferentes sobre as quais teriam de elaborar cinco enunciados de problemas que lhes permitisse verificar a aplicação da Matemática em diferentes contextos. Os autores esperavam que os alunos fossem capazes de editar, selecionar, compreender e traduzir informação quantitativa. A edição de informação foi no sentido de os alunos serem capazes de elaborar um problema, ao qual não estava associado qualquer restrição. A seleção de informação referia-se a tarefas onde os alunos deveriam elaborar um problema, do qual conheciam a resposta, funcionando assim como uma restrição. A compreensão relacionava-se com tarefas nas quais os alunos deveriam criar um problema tendo por base uma equação ou um cálculo dado. A tradução aparecia

associada a situações onde era pedido aos alunos que elaborassem um problema apoiado numa tabela ou num gráfico. Os autores concluíram que a formulação realizada pelos alunos seguia um processo algorítmico baseado na operação e não na estrutura semântica do problema. A tradução foi um processo mais rigoroso para o aluno do que a compreensão, uma vez que exigia que este fosse capaz de compreender as diferentes representações de relações matemáticas. Os processos de edição e seleção foram revelados mais pelos alunos que apresentavam uma melhor capacidade matemática. Finalmente, Gonçalves (2011) desenvolveu um estudo com ênfase na formulação de problemas na aprendizagem de grafos de alunos do 11.º ano de MACS. Os alunos revelaram dificuldades na elaboração de problemas mediante um dado contexto. A autora conclui que a perplexidade dos alunos de terem que enunciar um problema indicia que esta atividade foi pouco trabalhada ao longo do seu percurso escolar. Embora as recomendações atuais para o ensino de Matemática incentivem a formulação de problemas, na perspetiva de Brown (2008) esta atividade é pouco trabalhada porque as práticas de ensino incidem mais sobre as estratégias de resolução de problemas do que na formulação de problemas.

Metodologia

Com este estudo pretendemos averiguar como alunos do 11.º ano de Matemática B aplicam os conhecimentos que adquiriram no estudo de derivadas de funções na formulação de problemas. A turma onde se realizou a experiência frequentava o 11.º ano do curso de Artes Visuais, Matemática B, é constituída por 20 alunos (5 rapazes e 15 meninas) com uma idade média de 17 anos, três dos quais se encontram a repetir o ano e um é assistente. Em termos de desempenho, trata-se de uma turma heterogénea, o que se reflete na amplitude do intervalo das classificações finais do 10.º ano. Dois alunos obtiveram classificação igual ou superior a 19 e três alunos apenas alcançaram classificações entre 5 e 9.

Atendendo à natureza do objetivo delineado, adotamos uma abordagem qualitativa e interpretativa na procura de compreender as atividades dos alunos na resolução de tarefas em contexto de sala de aula (Bogdan & Biklen, 1994). Com esta finalidade, os dados foram recolhidos através de dois questionários (um no início e outro no final da experiência) e dos registos escritos que os alunos produziram na resolução de cinco tarefas sobre a formulação de problemas mediante algumas informações. Esta resolução

aconteceu em contexto de sala de aula, a que nos referimos no texto por experiência. Com o primeiro questionário procuramos recolher as perspetivas dos alunos sobre: (i) a distinção entre exercício e problema; (ii) as estratégias utilizadas na resolução de problemas; (iii) a importância da resolução de problemas na sua formação; (iv) a noção de formulação de problemas; e (v) a importância da formulação de problemas no estudo de conceitos matemáticos. Com o segundo questionário indagamos as perspetivas dos alunos sobre: (i) a experiência de formulação de problemas; (ii) a importância da formulação de problemas na sua formação; e (iii) a diferença entre resolução e formulação de problemas.

Da análise dos dados relativos aos questionários e às produções dos alunos, apresentamos a informação sob a designação de: (i) Perspetivas antes da experiência; (ii) Realização da experiência; e (3) Perspetivas sobre a formulação de problemas após a experiência.

Perspetivas antes da experiência

Neste trabalho, começámos por identificar as perspetivas dos alunos sobre a resolução e a formulação de problemas. Na discussão deste tipo de atividades, importa averiguar a distinção que os alunos fazem entre exercício e problema:

Tabela 1: Distinção entre exercício e problema.

		Tipo de resposta
Exercício	Aplicação direta do que se pretende	10
	Fora do contexto real	4
	É de resolução imediata	3
	Não responde	3
Problema	Desenvolve a compreensão	6
	É em contexto real	7
	É de resolução complexa	7

Para a maior parte dos alunos, o exercício é uma tarefa de aplicação direta, enquanto para alguns é de resolução imediata e fora do contexto real. Quanto à noção de problema, os alunos identificam por igual como sendo uma tarefa que desenvolve a compreensão, de resolução complexa e que incide sobre situações do contexto real. A ideia de maior complexidade atribuída ao problema parece dever-se à necessidade que os alunos têm de definir estratégias de resolução de problemas, o que já não acontece com a resolução de exercícios. Nessa definição, os alunos entendem ter de considerar várias fases, que identificamos na tabela seguinte.

Tabela 2: Estratégias utilizadas na resolução de um problema.

Tipo de resposta	
Interpretação do problema	15
Sistematização dos dados	10
Apresentação da solução	13
Avaliação da solução	1
Sem estratégia	2

Grande parte dos alunos considera que é importante interpretar o enunciado do problema, como exemplifica a seguinte afirmação: “ler e reler para uma melhor compreensão de como utilizar os conhecimentos da matéria”. Porém, apenas dez alunos referem a importância de sistematizar os dados, como ilustra a resposta: “tiro notas”. Treze alunos destacam a apresentação da solução como parte da estratégia, tal como refere um deles: “ir respondendo às perguntas conforme é pedido”. Apenas um aluno identifica como relevante a verificação dos resultados obtidos. De facto, este aluno foi o único a apresentar uma estratégia que completa as várias fases da resolução de problemas: “primeiro identifico de que se trata o problema, depois tento visualizar o percurso para a sua resolução e executo-o e verifico o resultado”.

Questionados sobre a importância da resolução de problemas nas situações do dia-a-dia, os alunos identificam essencialmente dois aspetos, a preparação para a cidadania e o desenvolvimento do raciocínio.

Tabela 3: Importância da resolução de problemas no dia-a-dia.

Tipo de resposta	
Prepara para a resolução de problemas do dia-a-dia	13
Desenvolve o raciocínio	5
Não identifica qualquer importância	3

Apesar de identificarem estes dois aspetos fundamentais, quando solicitados a darem um exemplo, apenas dois alunos o fizeram: “uso a regra de três simples para saber o produto mais barato no supermercado” e “a regra de três simples como ajuda nos descontos”.

Há ainda três alunos que consideram que a resolução de problemas é irrelevante para o seu dia-a-dia: “alguns não passam de exercícios demasiado complexos para situações do dia-a-dia”; “o ser relacionado com o dia-a-dia é irrelevante, o tipo de questões é que é o mais importante”; “há computadores para alguma coisa”.

A resolução de problemas faz parte dos objetivos e das sugestões metodológicas propostos nos programas de matemática do ensino básico e secundário. No entanto, a formulação destes não foi, para a maioria dos alunos, uma prática comum nas aulas de

matemática. Apesar de só alguns alunos ter experiência na formulação de problemas, isso não impediu que todos eles apresentassem características desta atividade.

Tabela 4: Entendimento dos alunos sobre a formulação de problemas.

Tipo de resposta	
Aplicar conhecimentos matemáticos apreendidos.	4
Adequar uma dada situação a conhecimentos matemáticos apreendidos.	8
Formular questões para serem resolvidas	8

Entre essas características, destaca-se a adequação de uma dada situação a conhecimentos matemáticos já conhecidos – “é pegar numa base do dia-a-dia e estrutura-la de forma a enquadrar a matéria dada” – e elaboração de questões para serem resolvidas – “é o processo inverso, em vez de o resolver sou eu a elaborar o problema”; “é tentar fazer um problema ou seja um enunciado para que depois possa ser resolvido”.

Por último, quando questionados sobre a importância da formulação de problemas na sua formação, os alunos destacam a promoção da compreensão dos conceitos matemáticos e o desenvolvimento do raciocínio crítico.

Tabela 5: Importância da formulação de problemas na perspectiva dos alunos.

Tipo de resposta	
Promove a compreensão de conhecimentos matemáticos.	9
Desenvolve o raciocínio crítico.	6
Não identifica qualquer importância.	5

As respostas “posso ficar a perceber melhor o que estou a estudar” e “obriga-nos a questionar diferentes matérias” ilustram os dois aspetos referidos.

Realização da experiência

Dois exemplos clássicos da aplicação do estudo de extremos de uma função real de variável real são as demonstrações de que, de todos os retângulos com o mesmo perímetro, o quadrado é o de maior área e de que, de todos os retângulos com a mesma área, o quadrado é o de menor perímetro. Tendo conhecimento que os alunos estudaram estes exemplos, apresentámos a seguinte proposta:

Tarefa 1.

- Dado $S > 0$, mostra que, de todos os números reais positivos x e y tais que $x + y = S$, a soma $x^2 + y^2$ é mínima quando $x = y$.
- Dado $R > 0$, mostra que, de todos os números reais positivos x e y tais que $x^2 + y^2 = R$, a soma $x + y$ é máxima quando $x = y$.
- Enuncia um problema cuja resolução passe pela análise da função estudada na questão a).
- Enuncia um problema cuja resolução passe pela análise da função estudada na questão b).

Nesta tarefa, procurámos que, numa primeira instância, os alunos resolvessem equações literais em ordem a uma incógnita para, de seguida, reescreverem uma expressão com duas variáveis em função de uma só. A aquisição de conhecimentos sobre derivada de uma função real de variável real permite determinar o mínimo ou o máximo das expressões obtidas. A maior parte dos alunos não deu qualquer resposta à determinação do mínimo (máximo) relativo das funções definidas pelas expressões em estudo. Quanto à formulação de problemas, cuja resolução contemplasse a informação dada para essas funções, nenhum aluno revela qualquer iniciativa.

Tabela 6: Frequência de respostas dos alunos a cada uma das questões da Tarefa 1.

Tipo de resposta	
Resolver equações	3
Estabelecer relações entre expressões	0
Formular problemas	0
Não responde	15

Nos registos dos alunos sobre as alíneas desta tarefa prevalece a expressão “não percebi”, o que poderá dever-se à presença dos parâmetros S e R, para além das incógnitas x e y , o que lhes terá dificultado a relação entre as expressões. Somente três alunos resolveram a equação dada em ordem a y , mas não fizeram qualquer uso do resultado obtido na conclusão da sua resposta, como o exemplo a seguir apresentado:

Handwritten work on grid paper:

1. a) $S > 0 \rightarrow x + y = S \Leftrightarrow y = S - x$ mínimo $\Rightarrow x = y$
 $x^2 + y^2 = x^2 + (S - x)^2 = x^2 + S^2 - 2Sx + x^2 = 2x^2 - 2Sx + S^2 > 0$ [CA] $2x^2 > 0 \Leftrightarrow x > 0$

b) $R > 0 \rightarrow x^2 + y^2 = R \Leftrightarrow y^2 = R - x^2$ mínimo $\Rightarrow x = y$

Esta resolução traduz a dificuldade que muitos alunos que frequentam Matemática B têm em trabalhar com expressões com símbolos e revela um pensamento algébrico pouco desenvolvido, como se constata na resolução da inequação do 2.º grau, na incompletude da resolução da equação do 2.º grau e na ausência de estabelecer conexões entre as expressões.

Numa tarefa similar, os alunos depararam-se com uma equação e uma expressão que envolvem as mesmas variáveis.

Tarefa 2. Pretende-se saber quando é que é mínima a expressão $2x^2 + 4xy$ sabendo que $x^2y = 1000$.

a) Enuncia um problema concreto cuja resposta passe pela situação apresentada.

b) Apresenta uma resposta ao problema formulado.

Perante a informação apresentada, quinze alunos resolveram a equação em ordem a y e, destes, doze aplicaram este resultado para obter a expressão $2x^2 + \frac{4000}{x}$. Somente cinco alunos formularam um enunciado de um problema:

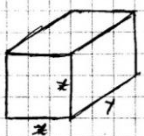
Tabela 7: Frequência de respostas dos alunos à tarefa 2.

Tipo de resposta	
Resolver equações	15
Estabelecer relações entre expressões	12
Formular problemas	5
Não responde	3

Dos problemas formulados, um aluno relaciona a equação dada com o volume de um prisma e a expressão com a área total deste sólido.

2. a) Para construir um prisma pretende-se usar dois tipos de formas: 2 em forma quadrada e 4 em forma retangular. Sabe-se que o volume da figura é 1000. Sendo um prisma quadrangular, escreve a expressão que traduz a área de papel usado.

b)



Volume do prisma = $Ab \times \text{comprimento}$
 $V_p = x \times x \times y$
 $V_p = x^2 y \Leftrightarrow x^2 y = 1000$

Expressão:

2 quadrados + 4 retangulos
 área de 1 quad. = x^2 — 2 x^2
 área de 1 retan. = xy — 4 xy } $2x^2 + 4xy$

R: A expressão que traduz a área de papel usado é: $2x^2 + 4xy$

No entanto, o problema formulado não aborda a questão da otimização referida na tarefa. Esta omissão indicia dever-se à ausência de capacidade crítica em confrontar o que é pedido e o que se responde.

Dois alunos apresentam o mesmo tipo de problema, com um enunciado idêntico ao de problemas presentes no manual escolar e que foram resolvidos nas aulas:

2. $y = 2x^2 + 4xy$
 $x^2 y = 1000$ (G)
 (E) $y = \frac{1000}{x^2}$
 $y = 2x^2 + 4x \left(\frac{1000}{x^2} \right)$ (G)
 (E) $y = 2x^2 + \frac{4000x}{x^2}$
 a) Considera a função $y = 2x^2 + \frac{4000x}{x^2}$, $0 < x \leq 20$.
 Num espaço de tempo de 20 anos foi calculado o nº de imigrantes ilegais no mundo. Calcula a taxa de variação média entre o 5º e o 8º ano.
 b) T.M.V. = $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (E) T.M.V. = $\frac{f(8) - f(5)}{8 - 5}$

Este é mais um exemplo da falta de capacidade crítica dos alunos e também de ausência de criatividade. O enunciado apresentado não só peca por não responder à situação apresentada, como também por não traduzir um contexto real.

Outro aluno, apesar de relacionar corretamente as expressões, faz uma leitura completamente errada da representação gráfica da função definida pela expressão obtida:

1. $x^2 y = 1000$
 $y = \frac{1000}{x^2}$

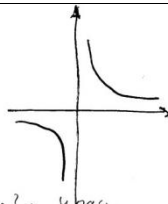
$2x^2 + 4x \left(\frac{1000}{x^2} \right) =$
 $= 2x^2 + 4 \times \frac{1000}{x} = 2x^2 + \frac{4000}{x}$

R: Não tem mínimos.

a) Calcule as assíntotas horizontais e verticais da expressão anterior

b) $2x^2 + 4 \times \frac{1000}{x} = 2x^2 + \frac{4000}{x}$

A horizontal \rightarrow não tem
 vertical $\rightarrow \frac{4000}{x}$



A preocupação do aluno na formulação do problema incide sobre a determinação das assíntotas do gráfico da função, o que revela não ter noção do que significam, o que poderá dever-se à ênfase que se dá a estes tópicos na representação de gráficos de funções racionais. Este aluno também não revela capacidade crítica em confrontar o que fez com o que era pedido.

Finalmente, o quinto enunciado apresentado revela uma total falta de noção da estrutura de um problema, em particular na identificação das variáveis que ocorrem nos dados e da relação entre elas:

2.

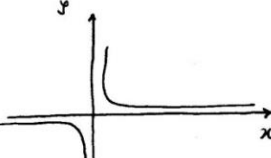
a. Num exploração agrícola existe vários tipos de animais. Para facilitar a sua contagem e representação o engenheiro agrícola decidiu atribuir aos cavalos x e aos ovelhas y .
 O jumento é dada por:
 $2x^2 + 4xy$ sabendo que $x^2 = 1000$

Será que a exploração agrícola tem um número mínimo de animais na sua exploração?

b. $x^2 y = 1000 \Rightarrow y = \frac{1000}{x^2}$

$2x^2 + 4xy = 2x^2 + 4x \times \frac{1000}{x^2} = \frac{2x^3}{1(x^2)} + \frac{4000x}{x^2} = \frac{2x^4 + 4000x}{x^2}$

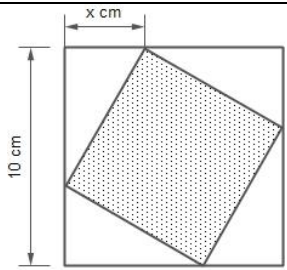
y



x graficamente

Tendo em conta que muitos problemas de otimização propostos nos manuais escolares abordam questões de áreas de terrenos, apresentámos a seguinte tarefa:

Tarefa 3. Considera os dois quadrados da figura. Elabora 2 questões cuja resposta passe pelo estudo de extremos de funções.



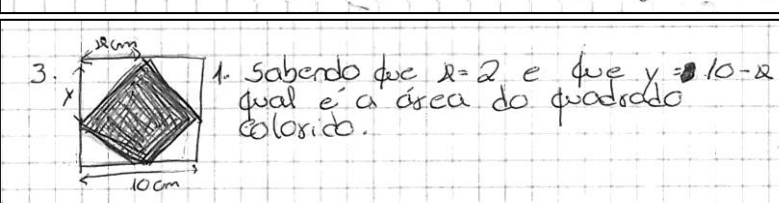
Respondendo às nossas expectativas, sete alunos começam por determinar as expressões que definem áreas da figura apresentada, mas poucos são aqueles que, a partir das expressões obtidas, formalizam corretamente duas questões como era pedido. Sem trabalhar qualquer expressão, seis alunos formalizam questões. A tabela seguinte resume as produções dos alunos em resposta a esta tarefa:

Tabela 8: Frequência de respostas dos alunos à tarefa 3.

Tipo de resposta	
Trabalhar expressões	7
Formular problemas	12
Não responde	5

Há alunos que, nas suas propostas, não identificam o estudo de extremos. As questões formuladas envolvem apenas conteúdos matemáticos a nível do ensino básico. As respostas seguintes são dois destes casos:

3- Qual é a área do quadrado se x for igual a 3?



Algumas questões formuladas pelos alunos limitam-se a reconhecer o que se pretende, de um modo geral, quando se fala em estudo de extremos: cálculo de máximos e de mínimos. É exemplo disso a proposta de questões por três alunos:

3. $A_{\square} = 10 \times 10 = 100$
 $A_{\Delta} = \frac{(10-x) \times x}{2}$ e) $A_{\Delta} = \frac{10x - x^2}{2}$
 $4 \times \frac{(10x - x^2)}{2} = \frac{40x - 4x^2}{2} = 20x - 2x^2$
 $100 - (20x - 2x^2) = 100 - 20x + 2x^2 = 2x^2 - 20x + 100$
 1. Calcula o máximo.
 2. Calcula o mínimo.

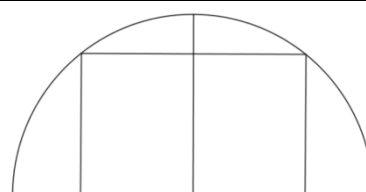
Dois alunos, sem trabalhar qualquer expressão, apresentam duas questões, semelhantes, que respondem ao pretendido nesta tarefa. No entanto, cometem a imprecisão de referir “o quadrado” quando na figura existem dois quadrados:

3. 1. Qual é a área mínima que o quadrado pode tomar?
 2. Quando a área do quadrado é máxima, qual é o valor de x ?

A quarta tarefa proposta segue a linha da anterior. No entanto, tendo em conta que a figura apresentada poderia trazer alguma dificuldade de interpretação para os alunos, foi introduzida uma expressão algébrica de referência.

Tarefa 4. Considera a expressão $y = 2x\sqrt{25 - x^2}$ e o semicírculo de raio 5 representado na figura.

- a) Identificando x como a medida de um segmento de reta da figura, enuncia um problema sobre a figura cuja resposta passe pelo estudo dos extremos da função definida pela expressão.
 b) Pede a um colega teu que resolva o problema.

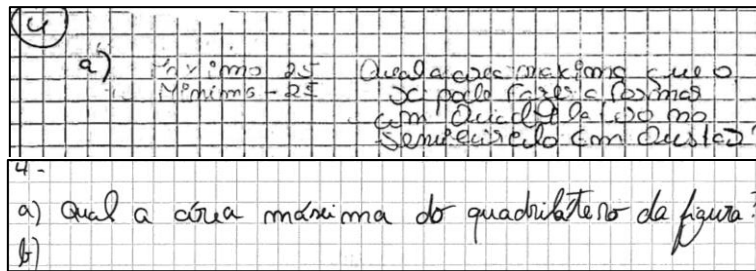


Praticamente todos os alunos não respondem ou apenas escrevem que não sabem responder. Apenas dois alunos formulam um problema. No entanto, não fazem qualquer referência sobre a identificação da variável x mencionada na tarefa.

Tabela 9: Frequência de respostas dos alunos à tarefa 4.

Tipo de resposta	Frequência
Identificar os dados	0
Formular problemas	2
Não responde	16

Embora os dois problemas propostos pelos alunos respondam, no essencial, à tarefa, distinguem-se pela correção da escrita. No entanto, os dois cometem a imprecisão de reconhecer na figura apenas um quadrilátero, o de maiores medidas.



A última tarefa apresentada é de interpretação mais direta, mas omite qualquer referência ao estudo da derivada de função. Depois de realizarem quatro tarefas relacionadas com este tópico, esperávamos que os alunos direcionassem algumas questões, se não todas, para este tópico.

Tarefa 5. Numa folha de papel quadriculado elabora um referencial cartesiano. Em seguida recorta um quadrilátero de uma folha de papel com tamanho aceitável de modo a que seja possível inferir valores aproximados para os seus vértices (4) quando colocado em cima do referencial cartesiano construído anteriormente.

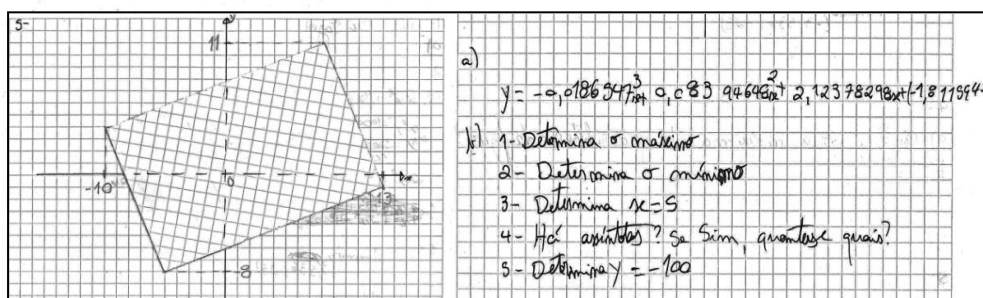
- a) Através da calculadora gráfica obtém uma expressão de grau 3 usando os pontos determinados pelos vértices do quadrilátero.
- b) Elabora 5 questões que consideres possíveis de resolver para a expressão encontrada.

Mais de metade dos alunos não respondeu. Pode-se sempre colocar a hipótese de os alunos, por falta de capacidade de gestão de tempo, não terem tido oportunidade de analisar a tarefa. Dos que respondem, apenas três obtêm o polinómio de grau 3 a partir dos vértices do quadrilátero construído e, destes, apenas dois formulam questões.

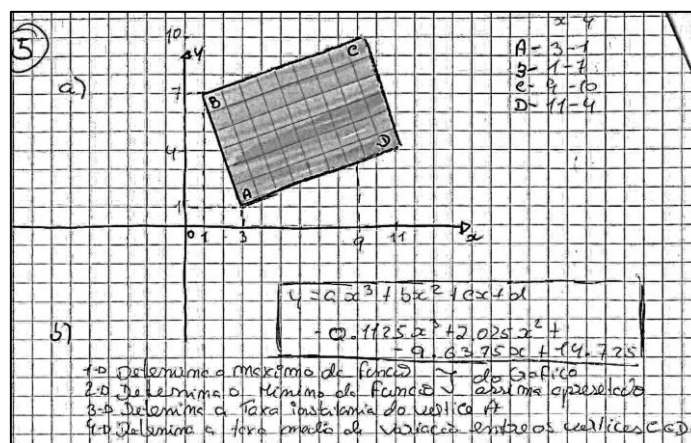
Tabela 10: Frequência de respostas dos alunos à tarefa 5.

Tipo de resposta	
Trabalhar os dados	7
Determinar o polinómio	3
Formular problemas	2
Não responde	11

Dos dois alunos que respondem, o primeiro apresenta 5 questões e o segundo apresenta 4 questões. Novamente, as ideias base estão patentes, mas o modo como os alunos se exprimem realça a falta de eficiência na comunicação matemática.



Quando pergunta “Determine $x = 5$ ” e “Determine $y = -100$ ”, o primeiro aluno querará perguntar “Determine $f(5)$ ” e “Determina x de tal modo que $f(x) = -100$ ”, respetivamente. Em termos de conhecimento, estas são perguntas de nível básico. Das três outras questões, duas relacionam-se com o cálculo de extremos e a terceira menciona assíntotas. Está aqui patente a falta de sentido crítico do aluno. Pelo facto de ter estudado assíntotas a propósito das funções racionais, não foi capaz de concluir que não o fez aquando o estudo das funções polinomiais do 3º grau, porque não faz sentido.



A proposta do segundo aluno tem quatro questões sobre o tópic pretendido. São quatro perguntas formuladas de modo pouco correto: fala, por exemplo, em “função f do gráfico” sem apresentar qualquer gráfico; em taxa de variação instantânea num vértice e em taxa de variação média entre dois vértices. Mas, este aluno consegue focar, em quatro questões, quatro conceitos base no estudo da derivada de uma função: máximo, mínimo, taxa instantânea de variação e taxa média de variação de uma função real de variável real.

Perspetivas sobre a formulação de problemas após a experiência

Após a realização das tarefas sobre formulação de problemas, pretendemos perceber se as perspetivas iniciais dos alunos sofreram alguma alteração. Dividimos a análise das respostas dos alunos ao segundo questionário em três partes: Perspetivas sobre a experiência desenvolvida; Perspetivas sobre a importância da formulação de problemas; Formulação de problemas versus resolução de problemas.

Relativamente à experiência propriamente dita, as respostas dos alunos estão sintetizadas na seguinte tabela.

Tabela 11: Perspetivas sobre a experiência desenvolvida.

Tipo de resposta	DT	D	I	C	CT
Particpei na formulação de problemas.	0	0	6	10	2
A formulação de problemas desafiou a minha criatividade.	2	1	4	7	4
Na formulação de problemas segui exemplos de problemas do manual.	0	3	3	11	1
A formulação de problemas incentivou a troca de ideias com os meus colegas	1	0	2	11	4
A formulação de problemas ajudou a perceber a utilidade dos conteúdos que aprendi	0	3	9	4	1
Tive dificuldades em formular problemas	1	1	4	8	4

Os alunos consideram que participaram na formulação de problemas, o que para a maioria, constituiu um desafio à sua criatividade. No entanto, doze alunos admitem ter recorrido aos exemplos do manual para formularem os seus problemas. A maioria dos alunos considera que esta atividade os incentivou à troca de ideias com os colegas, embora muitos deles tenham sentido dificuldades. Apenas cinco alunos consideram que esta atividade os ajudou a clarificar os conceitos apreendidos nas aulas.

O envolvimento dos alunos na formulação de problemas leva-os a destacar positivamente o ter que pensar mais do que na resolução de outro tipo de tarefas e a saber os conteúdos estudados. No entanto, talvez por sentirem dificuldades, a maioria dos alunos não valoriza este tipo de atividade na sua aprendizagem.

Tabela 12: Perspetivas sobre a importância da formulação de problemas.

Tipo de resposta	DT	D	I	C	CT
A formulação de problemas desafia a pensar	0	1	1	9	7
A formulação de problemas obriga a saber os conteúdos contemplados	0	1	2	12	3
A formulação de problemas deve fazer parte da aprendizagem de todos os temas matemáticos	3	3	10	0	2
A formulação de problemas prepara-me para responder a situações do quotidiano	3	4	9	2	0

Há alunos para quem a formalização de problemas é uma tarefa exigente pois “temos, de acordo com a matéria, de fazer os problemas”, como também “ajuda a pensar não só na resolução mas também na sua estrutura”. Para outros, esta atividade “exige uma imaginação mais fluente” e “é uma forma de aprofundar matérias visto que é necessário ter a certeza absoluta das mesmas”. Estas características inerentes à formulação de problemas levam alguns alunos a considerá-la “uma forma diferente de encarar a matemática que os alunos não gostam”.

Finalmente, os alunos foram interpelados sobre as diferenças entre resolver e formular problemas.

Tabela 13: Formulação de problemas versus resolução de problemas.

Tipo de resposta	DT	D	I	C	CT
Prefiro resolver a formular problemas	1	0	1	3	13
A formulação de problemas ajudou a perceber a resolução de problemas	1	5	6	6	0
É mais importante saber formular problemas do que saber resolver problemas	7	7	4	0	0

Desafiados a escolher entre resolver ou formular os problemas, a maioria dos alunos considera que prefere resolver a formular problemas, pois resolver é “mais fácil, mais acessível, pois temos todos os meios é só escolher o mais adequado”. Consideram que uma das dificuldades encontradas na formalização de problemas é “não estamos habituados, está tudo mais ligado a uma parte mais criativa” e “ as possibilidades são infinitas, é mais complicado escolher os procedimentos”.

Conclusões

As atividades realizadas na sala de aula são determinadas pelo tipo de tarefas que o professor de matemática integra nas suas estratégias de ensino (Ponte, 2005). Entre essas tarefas, os exercícios e os problemas são as que adquirem mais expressão (APM, 1998). A prática escolar faz com que os alunos deste estudo identifiquem as características de um problema, como revela a distinção que fazem entre tarefa e exercício, possíveis estratégias a utilizar na sua resolução e a relevância desta atividade na sua preparação para situações do seu quotidiano. Apesar da resolução de problemas indicar ser uma atividade, por vezes, recorrente no estudo dos alunos, o mesmo já não acontece com a atividade de formulação de problemas. Embora para Polya (1986) e Silver (1997) esta atividade seja intrínseca à resolução de problemas, na prática verificamos que no contexto de sala de aula nem todos os alunos tiveram a oportunidade de experienciar esta atividade. A ausência desta prática não inibe os alunos de dar sentido à palavra formular, concebendo-a como um ato de aplicação e adequação de conhecimentos apreendidos. O ato de aplicar o que se aprende tanto é intrínseco à resolução de problemas como à formulação de problemas, o que já não acontece com a adequação que se relaciona mais com a formulação de problemas. Para os alunos, esta distinção faz com que a resolução de problemas se ligue ao desenvolvimento do

raciocínio, enquanto a formulação de problemas promove o desenvolvimento do raciocínio crítico.

Na formulação de problemas de situações que apresentam expressões algébricas, o número de condicionantes que integram essas situações têm influência como os alunos as interpretam, estabelecem relações e formulam um enunciado. Nessa formulação, os poucos alunos que a apresentam não aplicam os conhecimentos que adquiriram no estudo de derivadas de uma função, como também não revelam capacidade crítica em confrontar o que fazem e o que lhes é pedido. Apesar das tarefas explicitarem a determinação de extremos, o contexto dos problemas que formulam não atendem a estes dados. Ao apelarem aos seus conhecimentos, alguns alunos confundem a taxa de variação com a taxa média de variação, enquanto outros, ao depararem-se com funções racionais, procuram as assintotas do seu gráfico e fazem referência a extremos sem que lhes deem qualquer aplicação.

Em situações que integram figuras geométricas também houve diferenças nas respostas dos alunos. A tarefa que apresenta uma figura idêntica às que integram as tarefas que são trabalhadas na sala de aula e estão contempladas nos manuais escolares foi a que os alunos aderiram mais na formulação de problemas. Das questões que formulam, alguns alunos relacionam áreas de figuras, tópico demasiado trabalhado ao longo da sua escolarização, e outros limitam-se a repetir o que lhes é indicado sem qualquer intenção de aplicar o que estudaram no tópico das derivadas. Já na situação em que a figura não apresenta implicitamente dados e se liga a uma expressão irracional, os alunos revelam dificuldades em identificar os dados e em formular um problema.

Na situação em que os dados surgem com a exploração que cada aluno faz, a maioria não apresenta qualquer resposta e poucos são os que trabalham os dados que estabelecem e tentam formular um problema.

As dificuldades reveladas na formulação de problemas são corroboradas nas perspetivas que apresentam sobre a experiência. Os alunos consideram que a formulação de problemas é uma atividade que desafia a sua criatividade e que incentiva a troca de ideias com os colegas. A referência que fazem à criatividade parece dever-se ao desafio que sentiram de ter que pensar sobre as situações propostas. A ausência dessa criatividade ganha expressão pelos próprios alunos ao reconhecerem que tiveram que recorrer aos exemplos do manual para formular problemas. Em termos de

aprendizagem, os alunos consideram que a formulação de problemas os obriga a saber os conteúdos matemáticos em jogo, embora deem pouca importância a este tipo de atividades para a sua formação, o que provavelmente se deve à pouca prática que essa atividade merece nas suas atividades de estudo. A valorização que os alunos atribuem à resolução de problemas em detrimento da sua formulação põe em destaque a força que tem as experiências em que são envolvidos. A formulação de problemas exige do aluno mais capacidade para dar sentido ao que aprende do que a resolução de problemas cujos enunciados são fornecidos pelo professor ou pelo manual escolar (Gonçalves & Viseu, 2013).

Referências bibliográficas

- Abrantes, P. (1992). Matemática em problemas da vida real? *Educação e Matemática*, 23, 25–29.
- Abrantes, P., Leal, L. C., Teixeira, P., & Veloso, E. (1997). *Mat789. Inovação Curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM.
- Boavida, A. M. R., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência Matemática no Ensino Básico. Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Brown, S. (2008). *Reconstruir a Matemática Escolar. Problemas com problemas e o mundo real*. Mangualde: Edições Pedagogo.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An Empirical Taxonomy of problem posing process. *ZDM*, 37(3), 149–158.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.
- Gonçalves, M. I. M. (2011). *Aprendizagem dos modelos de grafos, por alunos de MACS do 11.º ano, através do trabalho de projeto*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho.
- Gonçalves, M., & Viseu, F. (2013). Aprendizagem dos modelos de grafos, por alunos de MACS do 11.º ano, através da resolução de problemas. In B. D. Silva, L. S. Almeida, A. Barca, M. Peralbo, A. Franco, & R. Monginho (Orgs.), *Atas do XII Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia* (pp. 4537- 4552). Braga: Centro de Investigação em Educação, Instituto de Educação, Universidade do Minho.
- Ministério da Educação (2002). *Programa de Matemática B*. Lisboa: Autor.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.
- National Council of Teachers of Mathematics (2008). *Princípios e Normas para o Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Polya, G. (1986). *A arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

- Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigações em educação matemática. Implicações curriculares*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Porfírio, J. (1993). *A resolução de problemas na aula de matemática: Uma experiência no 7º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa.
- Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, 29(3), 75-80.
- Silver, E., Downs, J., Leung, S., & Kenney, P. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematical Education*, 27 (3), 293-309.