Universidade do Minho
Escola de Ciências

Olandino da Costa

A Matemática Recreativa no Ensino Básico

junho de 2014

A Matemática Recreativa no Ensino Básico
Olandino da Costa
UMinho | 2014

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Olandino da Costa

A Matemática Recreativa no Ensino Básico

Dissertação de Mestrado
Mestrado em Ciências - Formação Contínua de Professores,
Área de Especialização em Matemática

Trabalho realizado sob a orientação da
Doutora Maria Paula Freitas de Sousa Mendes Martins
e do
Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

junho de 2014

Olandino da Costa

Endereço eletrónico: olandino.costa@gmail.com

Título da dissertação: A Matemática Recreativa no Ensino Básico

Orientadores: Doutora Maria Paula Freitas de Sousa Mendes Martins e Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

Ano de conclusão: 2014

Mestrado em Ciências - Formação Contínua de Professores, Ramo Matemática

Universidade do Minho, 11 de junho de 2014

O autor: Olandino da Costa

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a todas as pessoas que tornaram este trabalho possível, em especial à Doutora Maria Paula Freitas de Sousa Mendes Martins e ao Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu, meus orientadores, pelas suas orientações e disponibilidade, pelas suas sugestões e comentários, pelos seus estímulos motivadores.

Aos professores do curso de mestrado que frequentei, pela sua experiência e sabedoria que sempre me apoiaram durante a minha formação.

Ao governo timorense, através do Ministério da Educação, Fundo de Desenvolvimento do Capital Humano Timorense, pela oportunidade que me proporcionou em frequentar um curso que foi determinante para o meu desenvolvimento profissional.

Aos meus amigos e colegas timorenses que comigo vivenciaram o meu percurso de formação, pela partilha de ideias e experiências.

Aos meus pais e familiares que sempre me apoiaram e deram força em todos os momentos que estive afastado da sua presença.

Por fim, dedico este trabalho ao meu filho Immanuel Graciano da Costa, pelos momentos em que não pude estar presente.

RESUMO

A disciplina de Matemática é das disciplinas curriculares que adquire um maior impacto social, sobretudo pelo fraco desempenho de muitos alunos. Muitas vezes, como justificação desse desempenho, os alunos referem-se à disciplina de Matemática como sendo aborrecida, não motivadora, sobretudo por os seus conteúdos lhes chegarem como algo já feito. Os desafios de pensar e de criar nem sempre estão presentes nas atividades de estudo de tópicos matemáticos. Uma forma de contrariar essa visão é através da matemática recreativa. O que se entende por matemática recreativa? Uma resposta imediata será "é aquela matemática que nos desafia a pensar, nos entretém e nos diverte quando pensamos nela". Claro que qualquer matemático diria que se diverte com toda a matemática que faz e, portanto, toda a matemática seria matemática recreativa. É preciso, por isso, uma definição mais concreta.

Quando se fala em matemática recreativa fala-se não só em jogos matemáticos e em puzzles matemáticos, mas também noutras atividades com carácter lúdico e pedagógico. Com ou sem fator competição, pretende-se dar solução a um certo problema. A procura da solução de um problema nem sempre exige um conhecimento profundo de matemática, pelo que as recreações matemáticas atraem a curiosidade de não-matemáticos e inspiram-nos para o seu estudo. Esta é a grande aposta pedagógica da matemática recreativa.

Neste trabalho, apresentam-se e estudam-se algumas recreações matemáticas. O primeiro capítulo é dedicado a três jogos matemáticos: o jogo do semáforo, do final do século XX, o jogo dos pontos e linhas, do meio do século XX, e o ouri, o mais antigo jogo matemático que se conhece, que terá mais de 7000 anos. No segundo capítulo, dedicado aos puzzles matemáticos, são trabalhados o Sudoku, o Quadrado Mágico e o Tangram. No terceiro e último capítulo, apresentam-se algumas atividades que, pelo carácter lúdico com que podem ser realizadas, fazem sentido ser abordadas no âmbito da matemática recreativa. Essas atividades envolvem números, cálculo de áreas, distâncias e transformações geométricas.

Todas estas atividades podem ser realizadas e exploradas nas aulas de Matemática do Ensino Básico, no desenvolvimento de tópicos matemáticos, de competências, tais como raciocínio e cálculo mental, e de atitudes, tais como persistência e gosto em aprender. Pretende-se, assim, que este trabalho seja também um apoio aos professores deste nível de ensino.

ABSTRACT

Mathematics is one of the curriculum syllabus that has greater social impact, specially due to the poor performance of many students. As a justification of this performance, students often refer to mathematics as being boring, not motivating, specially because mathematical contents are taught as something already established. The challenge of thinking and of creating is not always present in study activities of mathematical topics. One way of correcting this situation is through recreational mathematics. What does recreational mathematics mean? An immediate response is " it is that mathematics that challenges us to think, that entertains and amuses us when you think about it." Of course, any mathematician argues that he has fun with all the math involved in his work and so all mathematics would be recreational mathematics. We must, therefore, think of a more precise definition.

When we speak of recreational mathematics we mean not only mathematical games and puzzles, but also other activities of fun and educational nature. With or without competitive edge, we want to find the solution of a certain problem. The search for the problem's solution does not always require a thorough knowledge of mathematics. Hence mathematical recreations attract the curiosity of non-mathematicians and inspire us to its study. This is the great pedagogical objective of recreational mathematics.

In this monography, we present and study several mathematical recreations. The first chapter is dedicated to three mathematical games: the traffic light game, from the late twentieth century, the sprouts game, from the middle of the twentieth century and oware, the oldest known mathematical game, which is more than 7000 years old. In the second chapter, which is about mathematical puzzles, we work with Sudoku, Magical Squares and Tangram. In the third and last chapter, we present some activities that can be considered to be recreational mathematics as they can be performed in a playful way. These activities involve numbers, areas, distances and geometric transformations.

All the activities presented in this thesis can be performed and explored in mathematics classes of the basic curriculum, on the development of topics of mathematics, of skills, such as reasoning and mental calculation, and of attitudes, such as persistence and joy of learning. Having this in mind, we intend that this monography also supports teachers of basic curriculum.

Índice

Introdução **1**

1 Jogos matemáticos **5**

1.1 Semáforo 6

1.2 Pontos e linhas 11

1.3 O jogo do Ouri 14

1.3.1 Um pouco da história do Ouri 15

1.3.2 As regras 15

1.3.3 A estratégia 17

1.3.4 Uma situação de jogo 18

2 Alguns puzzles matemáticos **23**

2.1 O puzzle 14 – 15 23

2.2 O Sudoku 26

2.2.1 Breve história 26

2.2.2 Algumas técnicas para resolver o Sudoku 27

2.2.3 O desafio do Sudoku 30

2.2.4 Classificação do Sudoku 31

2.3 Quadrados mágicos 33

2.3.1 Breve história 33

2.3.2 Construção de quadrados mágicos 36

2.4 O Tangram 43

2.4.1 Um pouco de história 44

2.4.2 Atividades com o Tangram 46

3 Outras atividades matemáticas **55**

3.1 Atividades com números 55

3.1.1 Os dígitos do calendário 55

3.1.2 Um truque de magia 57

3.1.3 Multigraus 59

3.1.4 O Alvo 61

3.2 Teorema de Pick 62

3.2.1 Uma prova do Teorema de Pick 63

3.2.2 Atividades 69

3.3 Atividades com o *GeoGebra* 71

3.3.1 Triângulo duplicado 71

3.3.2 Triângulo equilátero 75

3.4 O jogo de isometrias 77

3.5 O jogo da reta numérica 82

Bibliografia **85**

Introdução

A disciplina de Matemática tem uma forte presença no currículo escolar, o que muitas vezes é justificada pela sua utilidade na compreensão e resolução de situações do quotidiano. Resultante da atividade humana, o ensino desta disciplina tem por finalidade o desenvolvimento das seguintes dimensões: cultural, social, formativa e política (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997). A dimensão cultural resulta da transmissão de geração em geração de factos marcantes da história da matemática, do seu contributo para a compreensão e resolução de problemas ao longo dos tempos e do domínio de uma linguagem específica para a compreensão dos fenómenos. Em termos sociais, o ensino de matemática atende aos interesses do tempo em que vivemos, à qualificação do trabalhador e à apropriação do cidadão comum de ferramentas necessárias para o seu dia-a-dia. Na dimensão formativa, o ensino de Matemática promove o desenvolvimento da capacidade de raciocinar matematicamente, relacionar conceitos, usar definições, fazer demonstrações e resolver problemas, comunicar e interpretar ideias matemáticas expressas oralmente e por escrito, construir e aperfeiçoar modelos matemáticos e aplicar o que se aprende em Matemática a situações de outras ciências ou da vida quotidiana. Na dimensão política, o ensino de Matemática desempenha um papel na transmissão de valores sociais, na difusão de valores democráticos e de integração social, como a capacidade de cooperação, a atividade crítica e a ação comunicativa. A promoção de tais dimensões resulta de atividades que desafiem a pensar e que despertem a curiosidade e persistência na resolução de situações matemáticas. Uma forma de promover estas atividades é através da matemática recreativa, que Singmaster (1993) define como sendo a matemática que é divertida, popular e com uso pedagógico. Essas atividades resultam, por exemplo, de jogos, demonstrações, resolução de problemas e de situações com que o ser humano se depara no dia-a-dia. A essência da diversão na matemática recreativa e da sua aplicação a situações do quotidiano leva a recuar no tempo, contemplando a atividade de matemáticos, como por exemplo das civilizações helénica, mesopotâmica e egípcia. Ao longo dos tempos, os matemáticos encontravam nos seus trabalhos uma sensação de diversão por responderem às situações com que eram confrontados e por contribuírem para a descoberta de novos ramos da matemática. A característica popular da matemática reflete-se nos problemas que são agradáveis e apelativos para os leitores comuns. Embora esses problemas se tornem, por vezes, complicados, a espetacularidade da sua resolução preservou a sua popularidade. Quanto ao uso pedagógico da matemática recreativa, segundo Singmaster (1993), caracteriza a seriedade da atividade matemática, nomeadamente nas atividades na sala de aula ao tornar compreensível e apelativo o conhecimento matemático. A matemática recreativa é tão antiga como a matemática em si, como se constata nos problemas contemplados no papiro de Rhind e nas placas babilónicas. Os dois aspetos da matemática recreativa, o popular e o pedagógico, pouco se distinguem da matemática séria. Na matemática recreativa têm especial destaque os jogos e os quebra-cabeças. Os jogos de azar e de estratégia já existiam desde o início da civilização humana e tiveram a sua evolução na idade média com o contributo de Fermat e Pascal, o que deu origem à teoria das probabilidades. Os quebra-cabeças têm um largo alcance nos conteúdos da matemática, ao exigirem habilidade manual, engenho e raciocínio lógico, aplicação sistemática de padrões matemáticos, como são exemplo o cubo de Rubik, os anéis chineses e a torre de Hanói. O espaço que os *media* dedicam às palavras cruzadas e a outros enigmas revela o interesse manifestado pelas pessoas na resolução deste tipo de problemas, o que se deverá ao desafio, ao prazer da descoberta. A matemática recreativa é frequentemente considerada como sendo a base da matemática séria, como são exemplo os problemas populares que deram origem às probabilidades e à teoria dos grafos. Posteriormente, outras áreas da matemática - tais como a teoria de números, topologia, geometria e álgebra - foram fortemente estimuladas pelos problemas recreativos. Por exemplo, a geometria teve o seu início na civilização egípcia com a prática da agrimensura, mas na civilização helénica os problemas de geometria foram tratados como um jogo intelectual. Nos tempos dos babilónios, os algebristas já resolviam problemas através de equações quadráticas, onde a área de um retângulo era adicionada à diferença entre o comprimento e a largura. Apesar da pouca significância prática, a resolução de problemas conduziu-nos às equações cúbicas e à resolução de algumas dessas equações. O estudo de situações recreativas esteve na origem de muitos tópicos matemáticos, transformando o pensamento genuíno em utilidade prática. A matemática recreativa tem uma grande utilidade pedagógica, ao contemplar um tesouro de problemas qua tornam a matemática divertida independentemente do contexto em que são trabalhados. Tais problemas baseiam-se frequentemente na realidade, o que faz emergir a conceção de que a matemática é tudo o que nos rodeia, bastando somente saber olhar para ela. A utilidade pedagógica da matemática recreativa deriva do destaque que dá à natureza da matemática, que não se resume a uma lista de fórmulas a serem seguidas nas atividades de aprendizagem de conteúdos matemáticos. Bem pelo contrário, a matemática é composta de ideias estruturadas que exigem raciocínio lógico no seu processo de aprendizagem. Com base nesta perspetiva, resolver um bom problema vale mais do que resolver mil exercícios, o que significa que a melhor experiência para aprender consiste na resolução de um bom problema. A matemática recreativa fornece uma variedade de problemas, podendo cada um deles ser alargado ou alterado em função do objetivo que se pretende atingir. Um outro pormenor que caracteriza a utilidade da matemática recreativa é a comunicação de aspetos da história e da cultura da matemática, permitindo que muitos problemas da antiguidade sejam (re)conhecidos e considerados.

Capítulo 1

Jogos matemáticos

Neste capítulo, apresentamos alguns jogos de tabuleiro matemáticos. Jogos matemáticos são jogos cujas regras, estratégias e resultados são explicados pela matemática. Neste jogos não há, portanto, fator sorte nem informação escondida.

E por que é que jogar um jogo matemático é uma boa prática?

Um jogo matemático visa despertar o interesse e mobilizar a atividade do aluno na Matemática. Os jogos matemáticos aliam raciocínio, estratégia e reflexão com desafio e competição, de uma forma lúdica. A sua prática contribui para o desenvolvimento da capacidade de formalização de estratégias, memorização e para o desenvolvimento pessoal e social.

Ao introduzir o jogo matemático, procura-se que os alunos adquiram e desenvolvam, em ambiente lúdico e interativo e em diferentes contextos (sala de aula, recreio, biblioteca, família, etc.), a noção de um conjunto de conceitos e competências básicas relevantes para o desenvolvimento do pensamento matemático, tais como:

- A destreza manual, a lateralidade, as noções de quantidade e de sequência, as operações mentais básicas, aquando da aplicação das regras em cada jogo;
- O uso de processos organizados de contagem na abordagem de problemas combinatórios simples, por exemplo, os conceitos de chance, de eventos aleatórios, de eventos equiprováveis e não-equiprováveis;
- A procura de padrões e regularidades e a formulação de generalizações.

A partir da prática de certos jogos de tabuleiro pode-se obter e desenvolver algumas capacidades de raciocínio e comunicação, importantes no estudo e compreensão de tópicos de matemática. São exemplo de competências desenvolvidas:

- **Concentração:** Uma boa concentração é fundamental para aprender bem os dados associados a cada jogo. Quem não se concentrar nunca poderá obter bons resultados nem no jogo, nem na matemática. A falta de concentração é um dos entraves à aprendizagem da matemática por parte dos alunos.

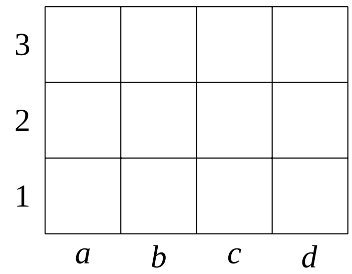
- **Visualização:** Tanto na resolução de um exercício como na participação num jogo, é importante conseguir prever uma sequência de ações antes que esta aconteça. Sempre focado em atingir o objetivo final (quer seja a resposta ao exercício como a vitória no jogo), os alunos devem ser capazes de ter uma visualização global do problema em mãos e reconhecer o papel de cada passo praticado.

- **Pensar primeiro, agir depois:** Este aspeto é absolutamente vital tanto no jogo como na matemática (como em muitas outras áreas). Os alunos devem aprender a não responder aos problemas que surgem sem ponderar primeiro na resposta.

- **“Pesar” as opções:** Na resolução de problemas matemáticos e de problemas de jogo, os alunos podem, muitas vezes, ter modos alternativos de agir. Ter a capacidade de avaliar esses diferentes modos leva à melhor compreensão quer dos tópicos matemáticos quer nos temas dos jogos.

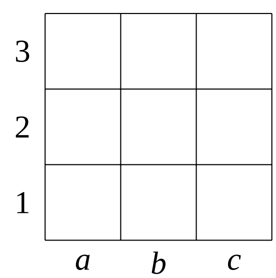
1.1 Semáforo

O jogo *Semáforo* é um jogo matemático inventado em 1998 por Alan Parr. O seu nome original é *traffic lights*. O jogo pertence à classe de jogos de tabuleiro denominada por Jogos de Território. O Semáforo joga-se, geralmente, num tabuleiro formado por um retângulo com 4 x 3 quadrados, aos quais chamamos casas, mas o tamanho deste pode variar. As 24 peças (8 peças verdes, 8 peças amarelas e 8 peças vermelhas) são partilhadas pelos dois jogadores, que jogam alternadamente. O jogo realiza-se no tabuleiro inicialmente vazio. Cada jogada pode ser realizada de três maneiras: ou colocar uma peça verde numa casa vazia ou substituir uma peça verde por uma peça amarela ou substituir uma peça amarela por uma peça vermelha. As peças vermelhas não podem ser mexidas, pelo que uma casa com uma peça vermelha está fechada ao jogo.

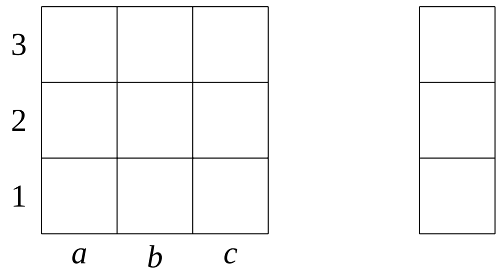


O vencedor é o jogador que, em primeiro lugar, conseguir colocar três peças da mesma cor em linha na vertical, na horizontal ou na diagonal (Neto & Silva, 2004). É um jogo que exige certos processos de previsão de dedução, o que é bom para desenvolver o raciocínio dos alunos. Em cada jogada, os jogadores devem pensar não só na sua jogada, mas também na sua consequência. Introduzir este tipo de atividade na sala de aula permite ensinar aos alunos a pensar antes de agir perante problemas na sua vida diária e a dar importância à aprendizagem a partir de erros cometidos anteriormente.

O jogo original era jogado num tabuleiro 3×3, mas depressa se chegou à conclusão qual era a estratégia ganhadora do jogo:



O primeiro jogador coloca uma peça verde na casa central; o segundo jogador tem de substituir essa peça por uma peça amarela (caso coloque uma peça verde em qualquer casa vazia, o primeiro jogador ganha, colocando outra peça verde para formar uma fila com três peças verdes). Na sua vez de jogar, o primeiro jogador substitui a peça amarela por uma vermelha e, nas jogadas seguintes, apenas tem de fazer um jogo simétrico ao do seu adversário (por exemplo, se o segundo jogador colocar uma peça verde na casa a1, o primeiro jogador coloca outra peça verde na casa c3). Mantendo esta estratégia, o primeiro jogador ganha sempre. Para tornar o jogo mais interessante, adicionou-se uma quarta coluna ao tabuleiro. Existe ainda uma outra versão do jogo: para além do tabuleiro 3×3, considera-se um tabuleiro não fixo 1×3 ou 3×1, cuja posição se pode ir alterando ao longo do jogo.

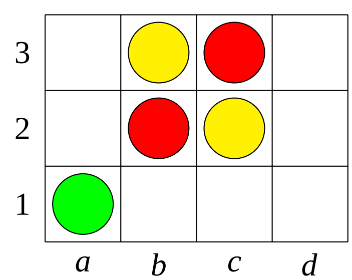


A primeira versão apresentada será aquela que vamos analisar neste trabalho. O facto de trabalharmos com um tabuleiro com 12 casas fixas permite uma leitura do jogo num tempo razoavelmente curto, fator importante a ter em conta se pensarmos em trabalhar com o jogo numa sala de aula do ensino básico.

Para melhor definir uma estratégia ganhadora, definimos dois tipos de casas:

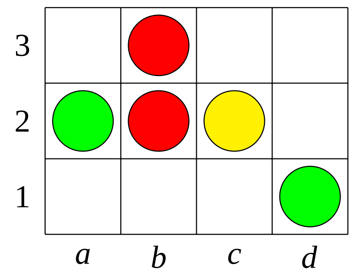
1. **Casas totalmente interditas:** são casas onde o jogador não pode nunca mais jogar, sob pena de perder o jogo;

2. **Casas temporariamente interditas:** são casas onde, num dado momento, o jogador não pode jogar, mas, com a evolução do jogo, poderão ser, por si, usadas.



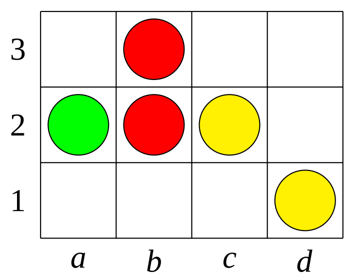
Por exemplo, na situação apresentada, a casa $a1$ é totalmente interdita, pois se o jogador substituir a peça verde por uma amarela, o seu adversário substitui a amarela por uma vermelha e ganha o jogo. O facto de a casa $a1$ ser totalmente interdita implica que as casas $a2$, $a3$, $b1$ e $c1$ também sejam totalmente interditas. A casa $d1$ é temporariamente interdita, pois se o jogador colocar lá uma peça verde, o adversário substitui-a por uma amarela e vence o jogo. No entanto, se alguma das peças amarelas das casas $b3$ e $c2$ for substituída por uma vermelha, o jogador já poderá colocar uma peça verde na casa $d1$. Assim, na situação apresentada, o jogador, para não perder de imediato, deverá substituir uma das peças amarelas das casas $b3$ e $c2$ por uma vermelha ou colocar uma peça verde em $d2$ ou $d3$.

Em seguida, apresenta-se um exemplo de desenvolvimento de jogadas a partir de uma situação. Este é um tipo de atividades que pode ser desenvolvida com alunos de qualquer ano do ensino básico.



Nesta situação, as casas $a1$, $a3$, $b1$, $c1$, $d2$ e $d3$ são temporariamente interditas. Assim, o jogador A tem quatro hipóteses de jogo: ou coloca uma peça verde em $c3$ ou substitui uma das peças verdes por uma peça amarela ou substitui a peça amarela por uma vermelha.

De seguida, resume-se um percurso possível de jogo se o jogador A optar por substituir a peça verde em $d1$ por uma peça amarela:



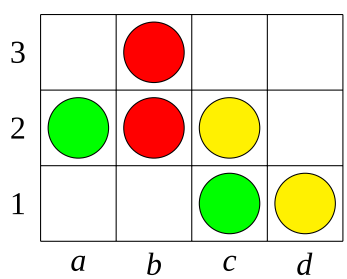
Jogador: B

Casas fechadas: $b2$ e $b3$

Casas Totalmente Interditas: $c2$ e $d1$

Casas Temporariamente interditas: $a1$ e $a3$

Opção de jogada: Peça verde em $c1$



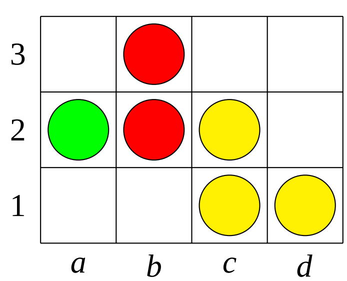
Jogador: A

Casas fechadas: $b2$ e $b3$

Casas Totalmente Interditas: $c2$ e $d1$

Casas Temporariamente interditas: $a1$, $a3$ e $b1$

Opção de jogada: Peça amarela em $c1$



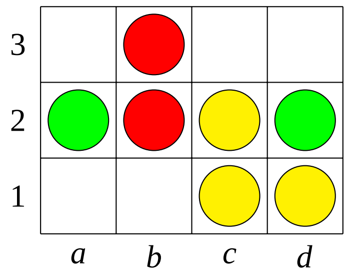
Jogador: B

Casas fechadas: $b2$ e $b3$

Casas Totalmente Interditas: $c2$ e $d1$

Casas Temporariamente interditas: $a1$, $a3$, $b1$ e $c3$

Opção de jogada: Peça verde em $d2$



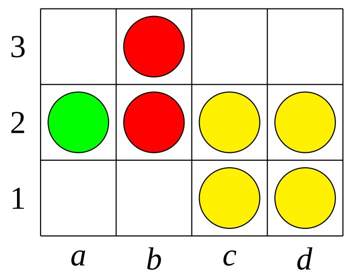
Jogador: *A*

Casas fechadas: *b*2 e *b*3

Casas Totalmente Interditas: *c*2 e *d*1

Casas Temporariamente interditas: *a*1, *a*3, *b*1 e *c*3

Opção de jogada: Peça amarela em *d*2



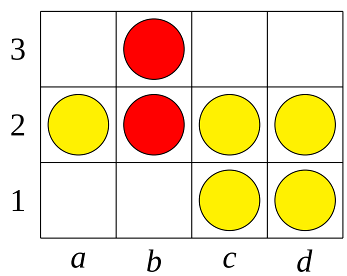
Jogador: *B*

Casas fechadas: *b*2 e *b*3

Casas Totalmente Interditas: *c*2, *d*1, *d*2 e *d*3

Casas Temporariamente interditas: *a*1, *a*3, *b*1 e *c*3

Opção de jogada: Peça amarela em *a*2



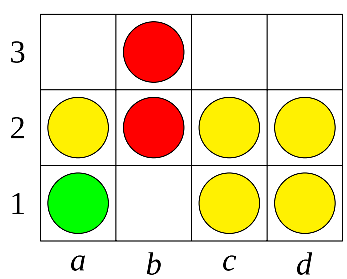
Jogador: *A*

Casas fechadas: *b*2 e *b*3

Casas Totalmente Interditas: *a*2, *c*2, *d*1, *d*2 e *d*3

Casas Temporariamente interditas: *b*1 e *c*3

Opção de jogada: Peça verde em *a*1



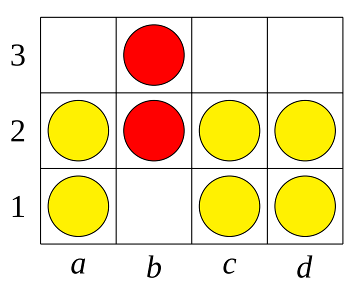
Jogador: *B*

Casas fechadas: *b*2 e *b*3

Casas Totalmente Interditas: *a*2, *c*2, *d*1, *d*2 e *d*3

Casas Temporariamente interditas: *b*1 e *c*3

Opção de jogada: Peça amarela em *a*1



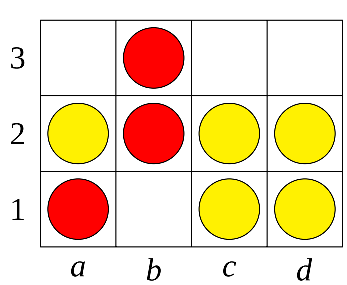
Jogador: *A*

Casas fechadas: *b*2 e *b*3

Casas Totalmente Interditas: *a*2, *c*2, *d*1, *d*2 e *d*3

Casas Temporariamente interditas: *a*3, *b*1 e *c*3

Opção de jogada: Peça vermelha em *a*1



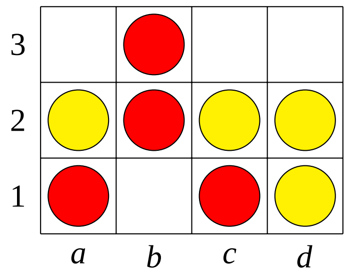
Jogador: *B*

Casas fechadas: *a*1, *b*2 e *b*3

Casas Totalmente Interditas: *a*2, *c*2, *d*1, *d*2 e *d*3

Casas Temporariamente interditas: *b*1 e *c*3

Opção de jogada: Peça vermelha em *c*1



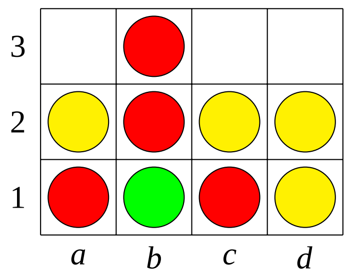
Jogador: *A*

Casas fechadas: *a*1, *b*2, *b*3 e *c*1

Casas Totalmente Interditas: *a*2, *c*2, *d*1, *d*2 e *d*3

Casas Temporariamente interditas: —

Opção de jogada: Peça verde em *b*1



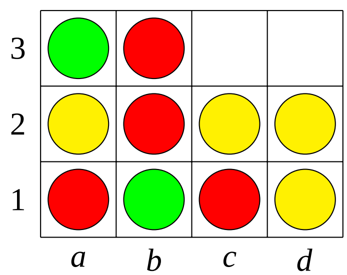
Jogador: *B*

Casas fechadas: *a*1, *b*2, *b*3 e *c*1

Casas Totalmente Interditas: *a*2, *b*1, *c*2, *d*1, *d*2 e *d*3

Casas Temporariamente interditas: —

Opção de jogada: Peça verde em *a*3



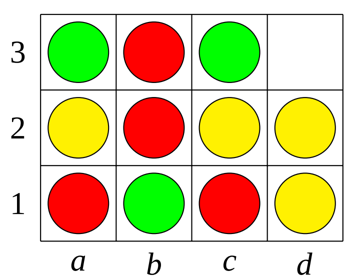
Jogador: *A*

Casas fechadas: *a*1, *b*2, *b*3 e *c*1

Casas Totalmente Interditas: *a*2, *a*3, *b*1 *c*2, *d*1, *d*2 e *d*3

Casas Temporariamente interditas: —

Opção de jogada: Peça verde em *c*3 (única jogada possível)



Jogador: *B*

Casas fechadas: *a*1, *b*2, *b*3 e *c*1

Casas Totalmente Interditas: *a*2, *a*3, *b*1, *c*2, *c*3, *d*1, *d*2 e *d*3

Casas Temporariamente interditas: —

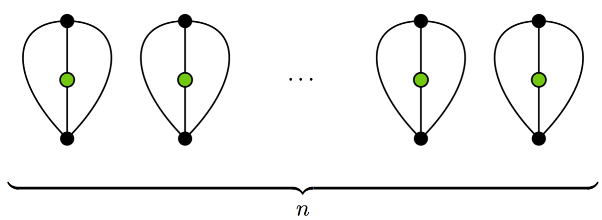
Opção de jogada: Qualquer jogada leva à derrota (não há jogadas sem ser as totalmente interditas)

1.2 Pontos e linhas

O jogo *pontos e linhas* é um jogo matemático cujo nome original é *sprouts* (que significa rebentos) e que foi inventado, em 1967, pelos matemáticos John H. Conway e Michael Peterson, quando ambos eram professores na Universidade de Cambridge. Mas foi Martin Gardner, numa das suas colunas “Mathematical Games” na “Scientific American”, que tornou este jogo popular em todo o mundo. O *pontos e linhas* é um jogo clássico de grafos que se joga com papel e lápis e cuja estratégia assenta na topologia do plano. As regras do jogo são bastante simples:

- O jogo começa por um número qualquer de pontos desenhados no plano;
- Cada jogador deve desenhar uma linha que una um ponto a qualquer outro (incluindo o próprio) e depois colocar um novo ponto no meio dessa linha;
- Nenhum ponto pode ter mais de 3 linhas a partir dele;
- Apesar de ter forma livre, nenhuma linha pode cruzar outra linha nem a si própria;
- O vencedor é a última pessoa que desenhar uma linha.

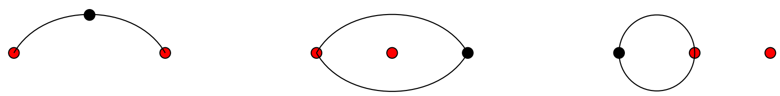
Um dos mais interessantes teoremas relacionados com o jogo *pontos e linhas* foi provado pelo próprio Conway, num trabalho conjunto com Denis P. Mollison, um seu aluno. O Teorema afirma que um jogo que comece com n pontos tem, no mínimo, $2n$ jogadas.



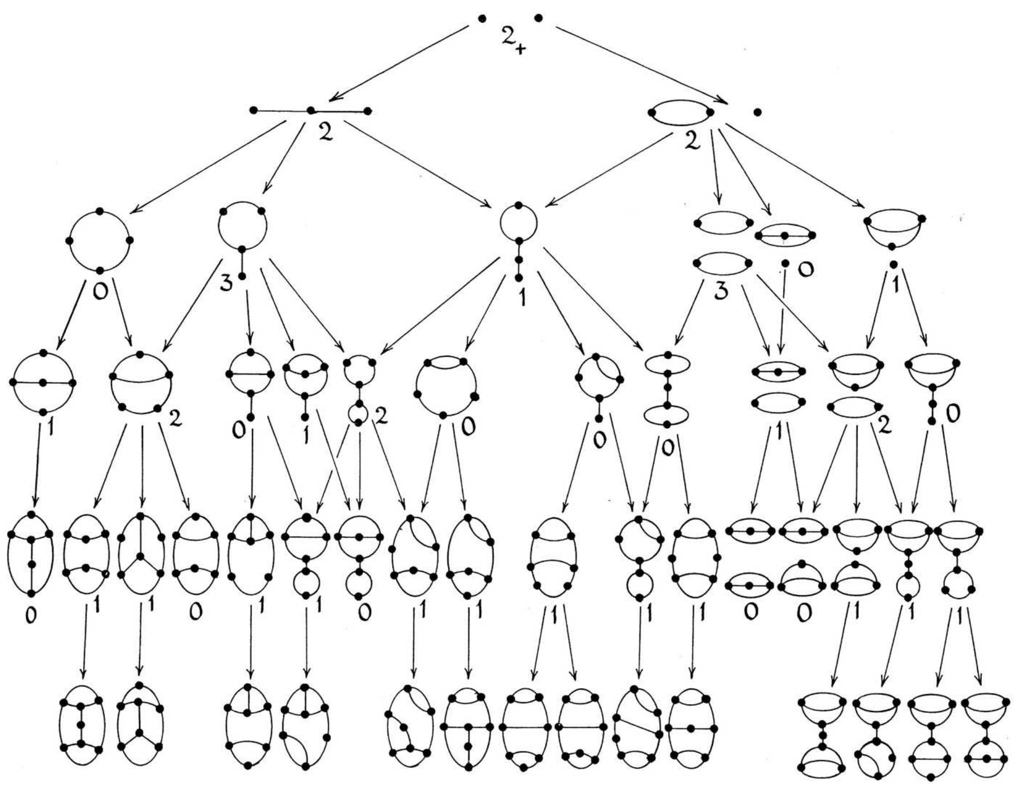
À primeira vista, parece que este jogo se pode prolongar indefinidamente, mas Conway provou que um jogo tem, no máximo, $3n-1$ jogadas. Tendo em conta a terceira regra, podemos afirmar que cada ponto tem, no máximo, três vidas (que correspondem às 3 linhas referidas na regra). Um ponto ao qual já foram ligadas 3 linhas, diz-se um ponto morto. Um jogo que comece com n pontos tem uma esperança de vida (soma de todas as vidas de todos os pontos) de $3n$. Cada jogada usa dois pontos, pelo que mata duas vidas, mas acrescenta um ponto na curva desenhada, o que corresponde a criar uma vida. Assim, cada jogada retira uma vida à esperança de vida do jogo. Como é óbvio, o jogo não pode continuar quando a sua esperança de vida é um. Concluímos assim que nenhum jogo com n pontos iniciais pode durar mais que $3n-1$ jogadas.

O jogo que começa com apenas um ponto é trivial. O jogador A tem apenas uma jogada possível: desenhar uma curva que une o ponto a si mesmo e criar um novo ponto nessa curva. O jogador B une os dois pontos distintos e cria um novo ponto. O Jogador A não pode jogar pois a esperança de vida é 1. Assim, o jogador B é o vencedor.

Quando começa com dois pontos, o interesse do jogo “rebenta”. O jogador *A* tem três hipóteses de começar o jogo, a menos de simetrias:



No entanto, topologicamente, as duas últimas situações são, também, idênticas: basta redefinirmos o interior como exterior e viceversa, ou seja, basta trabalhar com espaços topológicos duais. Podemos dizer que, na verdade, o jogador *A* tem duas hipóteses de jogo. O diagrama seguinte apresenta todas as jogadas distintas possíveis para o jogo que se inicia com dois pontos:



Percorrendo o diagrama, podemos perceber que tanto o jogador *A* como o jogador *B* podem ganhar este jogo. Mas podemos afirmar que o jogador *A* não tem uma estratégia ganhadora, pois o jogador *B* tem sempre uma jogada para evitar a derrota. No caso de o jogo começar com três pontos, Conway provou que o jogador *A* tem uma estratégia ganhadora. Foi, no entanto, o seu aluno Mollison que provou que, no caso de o jogo começar com quatro ou cinco pontos, o jogador *A* também tem uma estratégia ganhadora, mas, no caso de o jogo começar com seis pontos, só o jogador B tem essa estratégia ganhadora. Durante muito tempo, não se sabia se, começando o jogo com sete ou mais pontos, o jogador A teria uma estratégia ganhadora ou não. Foi em 1990 que, através de uma análise computacional, feita por David Applegate, Guy Jacobson e Daniel Sleator, foram estudadas as situações de jogo começando com 7, 8, 9, 10 e 11 pontos. Mais do que estudar estes casos, Applegate, Jacobson e Sleator observaram um padrão nos seus resultados e conjeturaram que o jogador A tem uma estratégia ganhadora quando o resto da divisão do número de pontos iniciais por 6 é 3, 4 ou 5. Equivalentemente, a conjetura afirma que a sequência (u_n) definida pelo jogador que tem estratégia ganhadora quando o número de pontos iniciais é n é periódica de período 6. A seguinte tabela resume o trabalho dos três investigadores.

Pontos inciais	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
Jogador com estratégia ganhadora	B	B	A	A	A	B	B	B	A	A	A	$\cdots$

Mais tarde, em 2006, Josh Jordan confirmou a conjetura para jogos com até 14 pontos iniciais. Julien Lemoine e Simon Viennot, em 2011, confirmaram a conjetura para jogos que começam com até 44 pontos.

1.3 O jogo do Ouri

O Ouri é um dos jogos mais antigos do mundo, pertencentes à família dos jogos Mancala. A palavra Mancala deriva do árabe mangala, mingala ou magala e do verbo naqala, que significa mover, deslocar, transportar de um lado para o outro.

Os jogos Mancala são conhecidos por uma diversidade de nomes com diferentes regras, mas estes jogos de semeadura ou de contagem e captura possuem todos a mesma essência que se baseia num princípio de transferência.

O jogo do Ouri é jogado num tabuleiro, de madeira ou pedra, com doze cavidades centrais e duas cavidades laterais. Estas cavidades laterais funcionam como depósitos para cada um dos jogadores. Em cada uma das doze cavidades centrais são colocadas, no início do jogo, quatro peças (sementes). Antigamente, em Cabo-Verde, usava-se a semente dura e brilhante, de cor acinzentada, do fruto da Ourinzeira, a que chamam Ouri, como peça do jogo. Pensa-se que o nome português do jogo virá deste facto.

1.3.1 Um pouco da história do Ouri

A origem do jogo de tabuleiro é muito antiga. O primeiro tabuleiro que se conhece é de pedra calcária, com 12 cavidades dispostas em 2 linhas de 6, e pertenceu a uma população que viveu, há 7900 anos, na Jordânia. Este tabuleiro de pedra é igual ao de madeira do jogo Mancala, que os jordanos jogam atualmente, e ao do jogo Ouri, que se pratica em Cabo Verde. Os jogos Mancala teriam sido espalhados pelo Egipto, antes dos Árabes os terem difundido em África, através do Sudão para a região do Golfo da Guiné, ao longo da costa do Índico, para a zona do continente, e para Oriente, chegando à Índia, Macau, Insulíndia e Filipinas. Foi levado para Cabo Verde pelos povos da Costa da Guiné, que foram povoar o arquipélago, a partir de 1462. Pensa-se que só a partir do início do século XVI é que foi levado para a costa atlântica das Américas, pelos escravos africanos. O Ouri chegou a Portugal na década de 60 do século XX, pelas mãos dos emigrantes Cabo-Verdianos.

Os jogos Mancala são praticados com muitas e diversificadas regras, mas há duas regras comuns a todas as variedades:

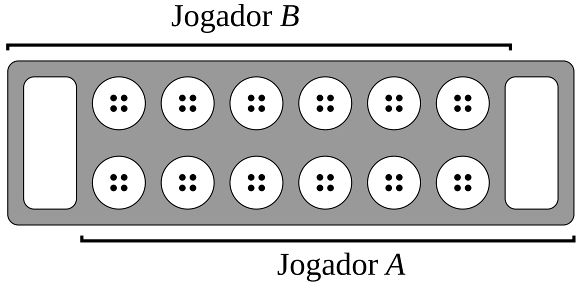
1. O número de pedras e a sua distribuição inicial pelas casas do tabuleiro é sempre constante para cada jogo;

2. A distribuição de uma mão é sempre executada num mesmo circuito fechado, e, no caso geral, num único sentido.

1.3.2 As regras

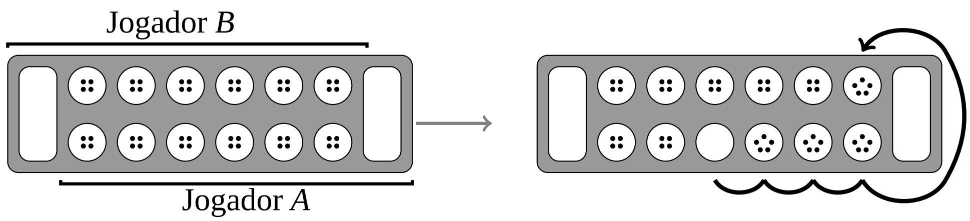
- Regras principais:

  - Inicialmente, cada buraco (exceto os dois depósitos) é preenchido por quatro peças (sementes), num total de 48 peças. Cada jogador escolhe o seu lado do tabuleiro. As seis casas centrais mais próximas de um jogador são identificadas como as suas casas e o depósito à sua direita será o seu.



– Para decidir quem é primeiro, um dos jogadores esconde uma semente numa das mãos. Se o outro jogador acertar corretamente em que mão está a semente, será o primeiro jogador - jogador *A* (Esta regra não altera o carácter matemático do jogo, uma vez que, como mencionamos mais tarde, está provado que qualquer um dos jogadores pode ganhar).

– O jogador *A* recolhe todas as peças de uma das suas casas e distribui uma a uma nas casas seguintes, no sentido anti-horário. Esta regra mantém-se para todas as jogadas.



– Se a casa contiver 12 ou mais peças, o jogador dá uma volta completa ao tabuleiro, saltando a casa donde partiu.

– O jogador não pode mexer nas casas que contenham apenas uma peça enquanto tiver casas com mais peças.

• Captura:

A captura decorre na última parte do movimento: se, ao semear a última peça numa casa do adversário, esta contenha duas ou três sementes (incluindo a peça que acabou de semear), o jogador captura-as, isto é, retira-as da casa do adversário e guarda-as no seu depósito. Se as casas do adversário anteriores à última tiverem duas ou três peças, o jogador também as captura.

• Regras suplementares:

– As regras suplementares aplicam-se quando um dos jogadores fica sem peças.

– Se, ao realizar um movimento, um jogador fica sem peças, o adversário é obrigado a efetuar um movimento que semeie peças no seu lado.

– Se um jogador realiza uma captura e deixa o adversário sem peças, o jogador é obrigado (caso tenha peças que o permita) a jogar de forma a introduzir peças em casa(s) do seu adversário.

• Fim da partida:

- Quando um dos jogadores captura 25 ou mais peças, a partida finaliza e esse jogador ganha.

- Quando um jogador fica sem sementes e o adversário não pode jogar de forma a introduzir as sementes nas casas deste jogador, a partida termina e o adversário recolhe as peças que estão nas suas casas para o seu depósito. Ganha quem tiver um maior número de sementes.

- Quando a partida está a finalizar e ficam poucas peças no tabuleiro criando uma situação cíclica sem que os jogadores possam ou queiram evitá-lo, cada jogador recolhe as peças nas suas casas e colocam-nas nos respetivos depósitos. Ganha quem tiver mais peças.

- Como o número de peças do jogo é par, o jogo pode terminar em empate, mas isto raramente acontece.

1.3.3 A estratégia

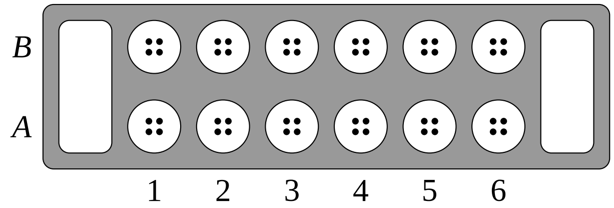
No início do século XXI, John W. Romein e Henri E. Bal anunciaram que tinham resolvido o jogo. Usando computação paralela, num total de 144 processadores e 72 Gb de memória, os dois investigadores da área das ciências da computação identificaram 889.063.398.406 jogadas possíveis e concluíram que o jogo pode de facto terminar em empate. Eles criaram uma base de dados para cada número de sementes existente nas 12 peças centrais. Algumas destas bases têm mais de 204 milhões de entradas. Na altura, foi reconhecido que esta era a maior base de dados construída para um jogo. O conhecimento desta base de dados permite prever, a cada momento, o final do jogo. No entanto, é óbvio que nenhuma mente humana tem capacidade para armazenar este enorme volume de informação, pelo que o jogo de Ouri, embora resolvido, será sempre um jogo interessante de jogar.

As estratégias que os jogadores usam para ganhar o jogo são:

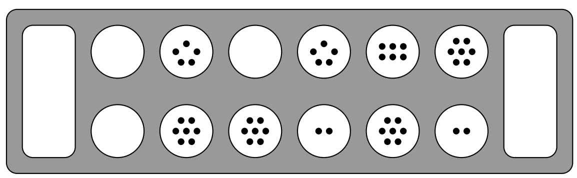
- Depositar as sementes nas suas casas e semear na altura certa para capturar o maior número de sementes possíveis.

- Impedir o adversário de capturas sementes.

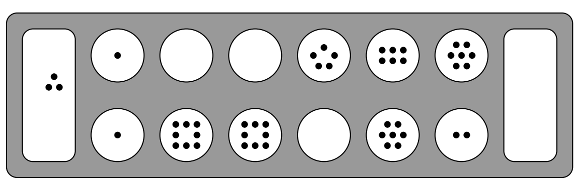
1.3.4 Uma situação de jogo



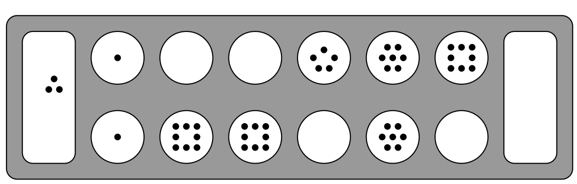
O esquema representa um tabuleiro de Ouri, onde as casas que pertencem ao jogador A se representam por $A1$, $A2$, $A3$, $A4$, $A5$ e $A6$ e ao jogador B, por $B1$, $B2$, $B3$, $B4$, $B5$ e $B6$. Em cada momento, representamos por n/Xi a jogada onde o jogador X ($X \in \{A,B\}$) distribui as n sementes, que tem na cavidade Xi, pelas outras cavidades seguindo o sentido do ponteiro dos relógios. Por exemplo, $4/A6$, $5/B3$, $4/A4$, $5/B1$ e $6/A1$ descrevem uma sequência de jogadas que transformam a configuração inicial do tabuleiro em



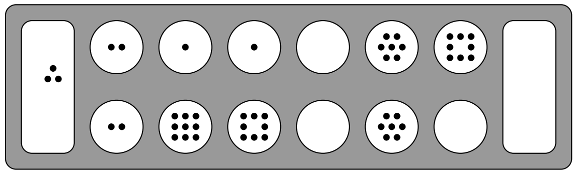
Sendo a sua vez de jogar, o jogador B pode efetuar uma captura de três sementes em $A4$ fazendo a jogada $5/B2$. Qualquer outra jogada por parte do jogador B não só não leva a qualquer captura como também coloca duas casas vulneráveis à captura, $B1$ e $B3$.



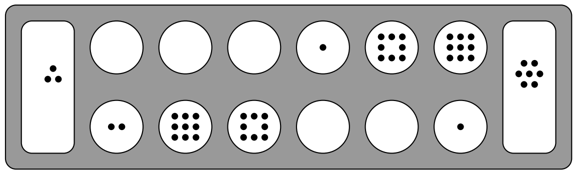
Depois da captura em $A4$, o jogador A joga $2/A6$



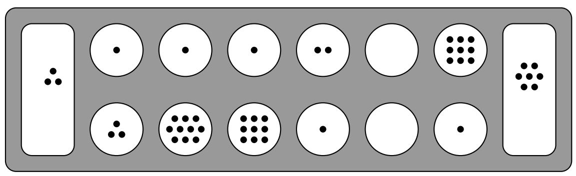
e deixa o jogador B apenas com 3 jogadas possíveis: $5/B4$, $7/B5$ ou $8/B6$, já que não pode jogar $1/B1$. Qualquer uma destas jogadas deixa a casa $B1$ com duas sementes, as casas $B2$ e $B3$ com uma única semente e a casa $A5$ com 7 sementes. Imaginemos que o jogador B joga $5/B4$.



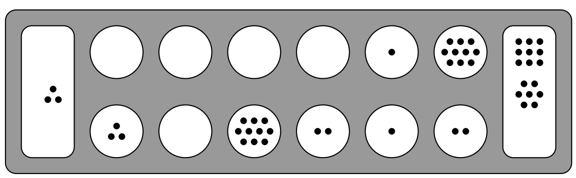
O jogador A joga $7/A5$ e captura $3+2+2=7$ sementes das casas $B1$, $B2$ e $B3$.



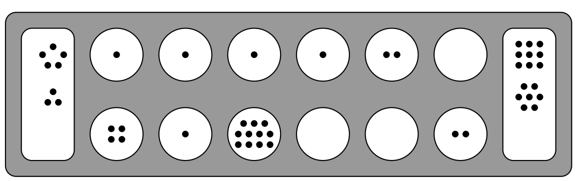
O jogador B só tem duas hipóteses de jogo: $8/B5$ ou $9/B6$. Imaginemos que joga $8/B5$. Então, as casas $B1$, $B2$ e $B3$ ficam com uma semente cada.



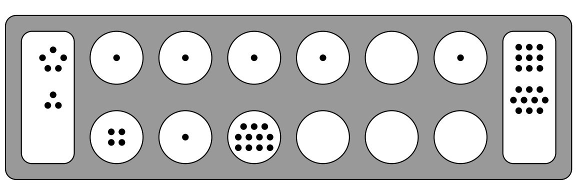
O jogador A joga $10/A2$ e colhe $2+2+2+3=9$ sementes das casas $B1$ - $B4$.



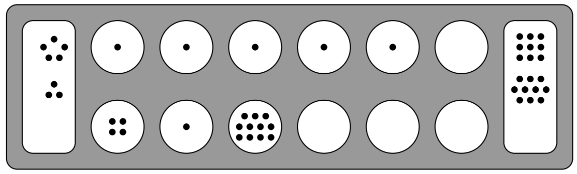
O jogador B só pode jogar $10/B6$ e colhe $3+2=5$ sementes em $A4$ e $A5$.



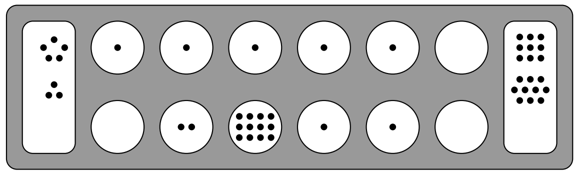
O jogador A joga $2/A6$ e recolhe 3 sementes da casas $B5$.



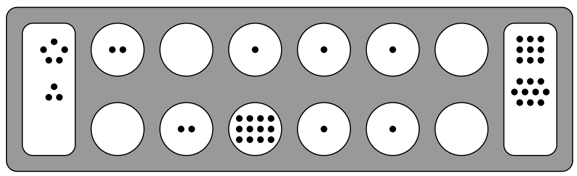
Nesta altura, os jogadores A e B têm, nos seus depósitos, 19 e 8 sementes, respetivamente. O jogador B joga $1/B6$.



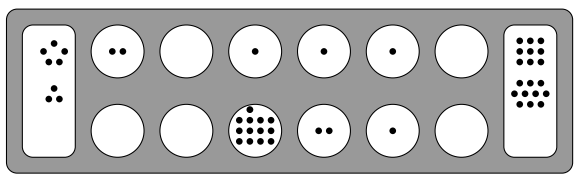
O jogador *A* joga 4/*A*1.



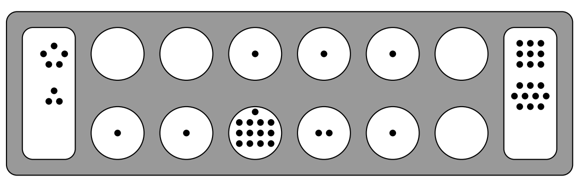
O jogador *B* joga 1/*B*2.



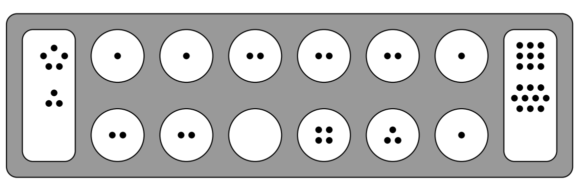
O jogador *A* joga 2/*A*2.



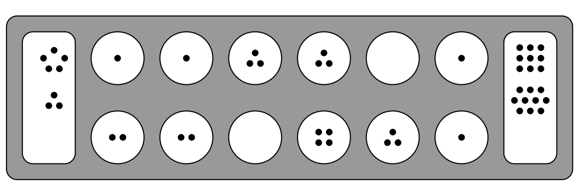
O jogador *B* não tem alternativa se não jogar 2/*B*1.



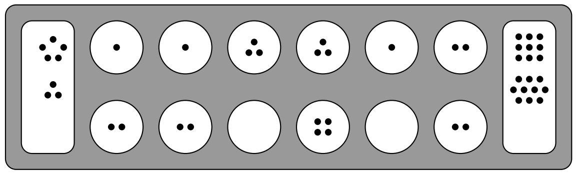
Segue-se a jogada 13/*A*3.



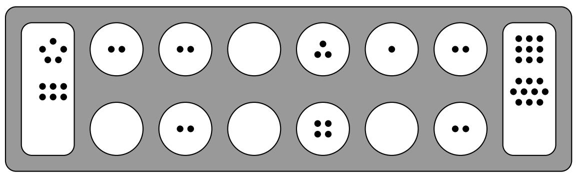
O jogador *B*, para evitar capturas, joga 2/*B*5.



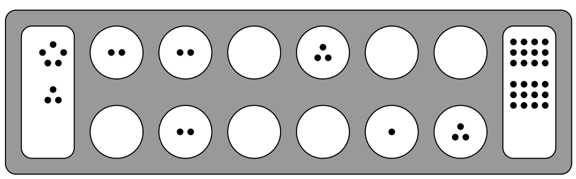
O jogador *A* joga $3/A5$.



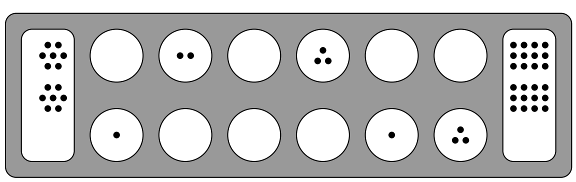
Como não pode jogar $1/B5$, independentemente da jogada que o jogador *B* fizer, vai ficar com 1 ou 2 sementes em $B5$ e não vai alterar o número de sementes de $A4$. Assim, na jogada seguinte, o jogador *A* vai capturar pelo menos duas sementes. O jogador *B* joga $3/B3$ e colhe 3 sementes de $A1$, ficando com 11 sementes no seu depósito.



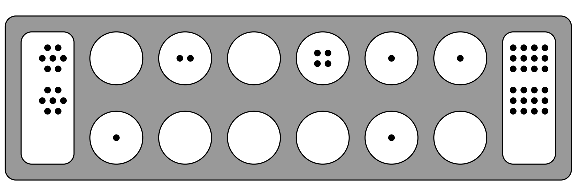
O jogador *A* joga $4/A4$ e captura 2+3=5 sementes em $B5-B6$, ficando com 24 sementes no seu depósito.



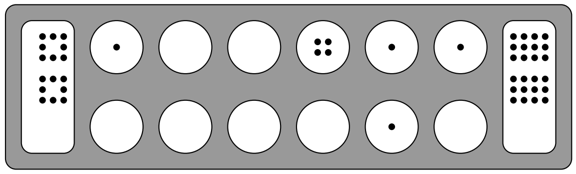
O jogador *B* joga $2/B1$ e captura 3 sementes em $A2$. No seu depósito estão, agora, 14 sementes.



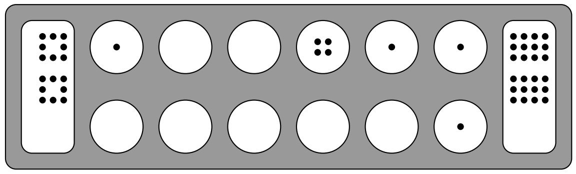
O jogador *A* é obrigado a jogar $3/A6$.



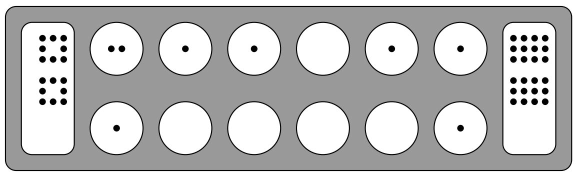
O jogador *B* joga $2/B2$ e captura 2 sementes em $A1$.



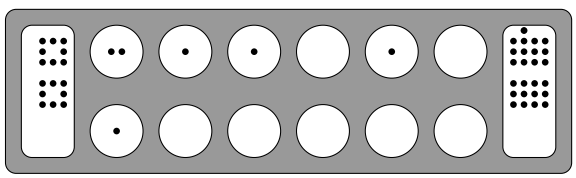
O jogador *A* só pode jogar 1/*A*5.



O jogador *B* é obrigado a jogar 4/*B*4.



O jogador *A* joga 1/*A*6, captura 2 sementes em *B*6 e ganha o jogo com 26 sementes no seu depósito



Capítulo 2

Alguns puzzles matemáticos

Um puzzle matemático é considerado, por muitos, um jogo matemático sem o fator competição. De facto, um puzzle matemático é um desafio que se pretende resolver e explicar usando a matemática. A história dos puzzles matemáticos é paralela à História da Matemática. Exemplo disso é o famoso puzzle das pontes de Königsberg, que deu origem à Teoria de Grafos. Os puzzles são classificados consoante a Matemática que lhes está associada. Puzzles numéricos (como o sudoku), puzzles combinatórios (como o cubo mágico), puzzles topológicos (como os puzzles de arame para separar), puzzles geométricos (como o Tangram) são os tipos de puzzles mais conhecidos e populares. Neste capítulo, apresentamos alguns puzzles que podem ser trabalhados na sala de aula.

2.1 O puzzle $14-15$

O puzzle $14-15$ foi tornado conhecido por Sam Loyd, no final do século XIX. O puzzle consiste numa caixa onde estão 15 peças quadradas numeradas de 1 a 15 como mostra a figura da esquerda. O objetivo do puzzle é, sem retirar as peças da caixa, mas apenas movendo-as para o espaço vazio, obter as peças na disposição apresentada na figura da direita.

Seguindo a regra do jogo, na primeira jogada, apenas se pode mover a peça 12 ou a peça 14.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 11 & 12 \\ \hline 14 & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 11 & \\ \hline 14 & 12 \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 11 & 12 \\ \hline 14 & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 11 & 12 \\ \hline & 14 \\ \hline \end{array}$$

Quando apresentou este desafio, Loyd oferecia a quantia de um bilião de dólares para quem apresentasse uma solução. No entanto, ele sabia que nunca iria entregar esse prémio, já que o puzzle $14-15$ é impossível. Para o provar, temos de considerar o conceito de paridade de uma permutação. Simplificando a apresentação deste puzzle, o que temos de facto é o problema de a partir da permutação no conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$,

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & \mathbf{15} & \mathbf{14} & 16 \end{pmatrix}$$

obtermos, através da composição com outras permutações, a permutação identidade.

Uma *permutação* é uma aplicação bijetiva de um conjunto nele mesmo. Para facilitar a notação, quando esse conjunto é finito, trabalhamos com o conjunto $X_n = \{1,2,\ldots,n\}$. Prova-se que num conjunto finito com n elementos, podemos definir $n!$ permutações diferentes. Representamos o conjunto destas permutações por S_n.

Se existem $a_1,a_2,\ldots,a_k \in X_n$ $(1 < k \leq n)$ tais que $\rho(a_1) = a_2, \rho(a_2) = a_3, \ldots, \rho(a_{k-1}) = a_k$, $\rho(a_k) = a_1$ e $\rho(x) = x$, para $x \in X_n \backslash \{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$, dizemos que a permutação ρ é *ciclo de comprimento k* e escrevemos $\rho = (a_1 a_2 \cdots a_k)$. Por exemplo, em X_8, o ciclo $\pi = (24371)$ de comprimento 5 é a permutação

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 3 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Nem todas as permutações são ciclos, mas sabemos que qualquer permutação se pode escrever como composta de ciclos disjuntos, i.e., ciclos que, na sua notação, não têm qualquer elemento em comum. Por exemplo, em X_8, temos que

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 5 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix} = (124)(3786).$$

Um ciclo de comprimento 2 diz-se uma *transposição*. Um resultado fundamental das permutações permite-nos concluir que qualquer permutação se escreve como a composta de transposições. Mais concretamente, temos que se $\rho = (a_1 a_2 \cdots a_k) \in S_n$ então $\rho = (a_1 a_k)(a_1 a_{k-1}) \cdots (a_1 a_2)$.

No entanto, podemos ter a mesma permutação escrita como composta de um número diferente de transposições, como mostra a seguinte situação. Em X_8, para a permutação θ já apresentada, temos que

$$\theta = (124)(3786) = (14)(12)(36)(38)(37)$$

ou

$$\theta = (14)(12)(36)(38)(37)(15)(51).$$

Apesar de podermos escrever a mesma permutação como compostas de transposições com fatores distintos, o número de fatores destas composições têm a mesma paridade. O teorema que nos permite esta tirar conclusão enuncia que nenhuma permutação de um conjunto finito pode ser expressa simultaneamente como composta de um número par de transposições e como composta de um número ímpar de transposições.

Assim, chegamos ao conceito fundamental que está por detrás da justificação para a impossibilidade da resolução do puzzle de Sam Loyd. Uma permutação diz-se *par* se se escreve como composta de um número par de transposições e diz-se ímpar se se escreve como composta de um número ímpar de transposições. A permutação θ apresentada anteriormente é ímpar. A função identidade é uma permutação par.

Prova-se que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existem tantas permutações pares como ímpares em S_n.

Também é óbvio que a composta de duas permutações com a mesma paridade é uma permutação par e que a composta de duas permutações de paridades diferentes é uma permutação ímpar.

Voltando ao puzzle 14 - 15, a posição inicial é representada pela permutação $\rho = (14\ 15)$, que é obviamente uma permutação ímpar, e a posição final é representada pela permutação identidade que, como já observámos, é uma permutação par. Para o puzzle ser possível, era necessário que todos os movimentos que se fizessem fossem representados por uma permutação ímpar. No entanto, qualquer movimento de peças que mantenha a mesma casa vazia é uma permutação par. A título de exemplo, o seguinte movimento

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline & 2 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

é representado pela permutação: $\rho = (123) = (34)(13)(12)(24)$, que é obviamente uma permutação par. O movimento

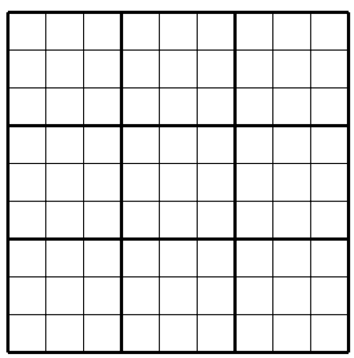
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \\ \hline 4 & 5 & 3 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & 2 \\ \hline 4 & 5 & 3 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 5 & 2 \\ \hline 4 & & 3 \\ \hline \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 5 & 2 \\ \hline & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 5 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & & 2 \\ \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 2 & \\ \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 4 & \\ \hline \end{array}$$

é representado pela permutação $\rho = (145) = (36)(23)(12)(14)(45)(25)(23)(36)$, que é uma permutação par. Como estes movimentos representam uma permutação par, se iniciarmos com a permutação ímpar $(14\;15)$, o resultado será sempre uma permutação ímpar e, portanto, o objetivo do puzzle nunca será alcançado.

2.2 O Sudoku

O Sudoku é um puzzle numérico baseado na colocação dos números de 1 a 9 num quadrado de nove linhas e nove colunas dividido em nove quadrados mais pequenos de três linhas por três colunas, como se mostra na figura 3. Os números de 1 a 9 têm de ser colocados de modo que não haja repetição nem nas linhas nem nas colunas nem nos quadrados pequenos. Num puzzle bem planificado a solução deve ser única.



Quadrado subdividido em 9 quadrados que constitui o Sudoku.

2.2.1 Breve história

Este puzzle começou por ser divulgado no Japão em 1984 por uma empresa, Nikoli, especializada na criação e divulgação de puzzles, sob a designação de Suuji Wa Dokushin Ni Kagiru, o que traduzido significa “que os números aparecem apenas uma vez”. Posteriormente, passou depois a ser conhecido apenas por Sudoku, nome que se obtém juntando as letras iniciais da primeira e terceira palavras. Este puzzle é uma versão moderna do quadrado latino, existente anteriormente na Europa e estudado e aprofundado pelo famoso matemático Leonardo Euler (1707-1783). É também idêntico ao jogo conhecido na América por number place, que foi publicado pela primeira vez pela revista *Dell Pencil Puzzle & World Games* no seu n.º 16 de Maio de 1979 (Nogueira, 2011). Este puzzle é atualmente muito popular, sendo publicado periodicamente em várias revistas e jornais.

2.2.2 Algumas técnicas para resolver o Sudoku

O Sudoku não é um puzzle que necessite de matemática ou de aritmética complexas - é apenas um desafio de lógica. O quadrado do Sudoku apresenta-se inicialmente com algumas das suas células ou casas já preenchidas. O jogador é desafiado a completar o quadrado de modo a que em cada linha, em cada coluna e em cada região de 3 linhas por 3 colunas os algarismos de 1 até 9 surjam só uma vez. Podem-se referir algumas técnicas usadas para facilitar a resolução do Sudoku. Entre elas salientam-se as seguintes:

1. **Candidato Único**

   Nesta técnica identificam-se, em cada um dos quadrados pequenos, as células vazias que não podem ser ocupadas por um dado algarismo por ele já se encontrar na linha ou na coluna que as contém. Se depois de bloquear todas as células onde esse algarismo não pode estar só sobrar uma célula, é nessa célula que o algarismo em questão tem de ser colocado. No exemplo, podem-se ver, pintadas de cinzento, as células em que o algarismo 4 não pode estar. Assim sendo, o algarismo 4 só pode ficar nas casas assinaladas com asterisco.

7			1		3			2
					6		8	
			8			1		9
*		7			9		1	
	9	3				5	4	
	6	1	4			9		
3		8			4			
	4		3					
1					5	*		3

2. **Candidato Solitário**

Nesta técnica localizam-se as células vazias que apenas podem ser ocupadas por um único algarismo. Para isso identificam-se todos os algarismos que estão presentes na linha, na coluna e na região de que a célula faz parte. Se apenas faltar um único algarismo, inscreve-se esse algarismo em falta na célula em questão. No seguinte exemplo, facilmente se vê que o algarismo que se deve colocar no lugar onde está a letra **a** é o algarismo **2**.

	2	5	1		4			
				5		3		
9	6		**a**		8		7	
			6			7		
		4	8		3	1		
		9			7			
	8		3		**b**		5	9
		2		6		**c**		
			7		1	4	3	

Na linha que contém o **a**, estão os números 6, 7, 8 e 9; na coluna estão presentes os números 1, 3, 6, 7 e 8 e, finalmente, no quadrado pequeno que contém a letra **a**, estão os números 1, 4, 5, e 8 faltando então, apenas, o algarismo **2**, que se deve colocar nesta casa. Do mesmo modo se faria para os números **b** e **c** que também só podem ser ocupadas por um único algarismo, neste caso, o algarismo **2** e o algarismo **8**, respetivamente.

3. **Pares Escondidos**

Os algarismos que surgem numa linha ou coluna impedem o aparecimento desses mesmos algarismos na linha ou coluna de um dos quadrados pequenos. Então esses algarismos têm de estar nas outras casas desse quadrado pequeno. É isso que se mostra no exemplo onde os algarismos 2 e 3 que estão na última coluna do quadrado impedem que eles apareçam nas células pintadas de cinzento. Assim, nesse quadrado pequeno, os algarismos 2 e 3 têm de estar nas restantes células, como assinalado.

7	8		1		3			2
	1				6		8	
	3		8			1		9
4		7			9	$^{2}3$	1	
	9	3				5	4	
	6	1	4			9	$^{3}2$	
3		8			4			
	4		3					
1					5	4		3

4. **Candidato Preso**

Por definição, todas as casas do Sudoku estão interligadas entre si. A existência de um dado algarismo numa dada casa impede a sua repetição na linha, na coluna e no quadrado pequeno a que essa casa pertence. Esta técnica (candidato preso) é utilizada frequentemente na resolução do Sudoku. Nos quadros que se seguem, mostram-se duas aplicações desta técnica. No quadrado da esquerda pode-se começar por aplicar a técnica do candidato único para perceber que no primeiro quadrado pequeno, ao lado do 7 deve estar o algarismo 8. Depois pode-se perceber que, na última linha do quadrado, as casas pintadas de cinzento não podem conter o algarismo 8, pelo que este só pode ser localizado na casa assinalada com o asterisco. No quadrado da direita pode-se ver que o algarismo 7 não pode estar nos locais assinalados com as bolas pretas. Então, no quadrado pequeno em baixo à esquerda o algarismo 7 tem de estar numa das três casas da última linha, como assinalado. Isto faz com que no quadrado pequeno inferior central o algarismo 7 não possa estar na última linha, isto é, não pode estar nas casas assinaladas com os círculos por preencher. Então, neste quadrado, resta apenas uma posição onde o algarismo 7 se pode localizar, que é a posição assinalada com o asterisco.

7	8		1		3			2
	1				6		8	4
	3		8			1		9
4		7			9		1	
	9	3				5	4	
	6	1	4			9		
3		8			4			
	4		3					
1				*	5	4		3

		4	6					
						3	8	6
3				9	7			9
	1			8	9		7	
9								1
	5		3	7			2	
6	•	•	6	4	•			7
2	8	1	*	•	•		1	
7	7	7	○	○	5	2		

Usando adequadamente e com lógica, em simultâneo e/ou em sequência, estas regras é possível resolver a maior parte dos Sudokus. Por vezes, alguns Sudokus com um grau de dificuldade maior, com menos casas inicialmente preenchidas, têm de ser resolvidos por tentativas quando já não há possibilidade de colocar inequivocamente, com estas ou outras regras lógicas semelhantes, mais algarismos nas casas vazias.

2.2.3 O desafio do Sudoku

Normalmente os Sudokus que se encontram nos jornais e nas revistas apresentam cerca de 25 das 81 casas possíveis já preenchidas. Para desafiar mais os interessados deste jogo este número de casas pré-preenchidas pode ser mais reduzido. A diminuição do número de células preenchidas à partida aumenta o nível de dificuldade do Sudoku mas também pode fazer com que o puzzle passe a ter várias soluções possíveis, deixando de ser válido. Por exemplo, a grelha inicial com 16 casas preenchidas que se mostra na figura seguinte não é um puzzle "válido" pois admite duas soluções (trocando entre si os algarismos 8 e 9).

5		2				4		
			7	1				3
					4	6		
	7		2					
	1							
6					2			
				3			1	
4								

5	6	2	3	89	98	4	7	1
89	4	98	7	1	6	2	5	3
1	3	7	4	2	5	89	98	6
3	5	89	1	98	4	6	2	7
98	7	4	2	6	3	1	89	5
2	1	6	89	5	7	3	4	98
6	98	1	5	4	2	7	3	89
7	2	5	6	3	89	98	1	4
4	89	3	98	7	1	5	6	2

Puzzle Sudoku com 16 pistas e duas soluções

Durante anos, muitos aficionados tentaram encontrar um puzzle de Sudoku com 16 células pré-preenchidas que tenha solução única. Mas, em 2012, Gary McGuire, Bastian Tugemann e Gilles Civario publicaram um artigo provando que não pode existir nenhum Sudoku de solução única com 16 ou menos casas pré-preenchidas (McGuire, Tugemann & Civario, 2012). Isto não quer dizer que todos os Sudokus com 17 pistas sejam válidos. Em 2006, Gordon Royle apresenta, na sua página de Internet, uma lista de 49 151 combinações diferentes de Sudokus com 17 pistas. O soduku seguinte é exemplo de um desses puzzles.

			8		1			
							4	3
5								
				7		8		
						1		
	2			3				
6							7	5
		3	4					
			2			6		

2	3	7	8	4	1	5	6	9
1	8	6	7	9	5	2	4	3
5	9	4	3	2	6	7	1	8
3	1	5	6	7	4	8	9	2
4	6	9	5	8	2	1	3	7
7	2	8	1	3	9	4	5	6
6	4	2	9	1	8	3	7	5
8	5	3	4	6	7	9	2	1
9	7	1	2	5	3	6	8	4

Puzzle Sudoku com 17 pistas e solução única

2.2.4 Classificação do Sudoku

Em muitos livros com puzzles Sudoku, estes são classificados em diversos níveis. Uns classificam-nos como fácil, difícil, terrível e enxaqueca. Muitas vezes, estes puzzles aparecem classificados em cinco níveis, de $*$ até $*****$. Esta classificação não é, contudo, universal, mas sim relativa. O grau de dificuldade destes puzzles não depende apenas do número de células previamente preenchidas mas também do seu posicionamento na grelha e, portanto, das técnicas a usar. De seguida, apresenta-se um exemplo de cada um dos graus de dificuldade tendo em conta a primeira classificação mencionada.

A análise do nível de complexidade do Sudoku, começando por atribuir os candidatos possíveis nas casas vazias de cada grelha dos puzzles apresentados nestas quatro situações, permite destacar diferentes formas de preencher o quadrado. No puzzle com nível de dificuldade fácil encontram-se seis candidatos únicos; no puzzle com nível de dificuldade difícil encontram-se três candidatos únicos; em seguida, no nível de dificuldade terrível encontram-se dois candidatos únicos; e, por último, no nível de dificuldade enxaqueca apresenta-se apenas um único candidato. Num puzzle válido, a presença destes candidatos únicos têm efeito imediato na diminuição de números candidatos dentro das outras casas vazias.

1. Fácil - grelha com 36 células pré-preenchidas

	7		5		4			6
			8	1	9		4	
		2	3				5	8
3	5	1		8	2			
		7				4		
			7	9		5	3	1
7	1				8	9		
	6		9	4	1			
4			6		3		1	

1 8 9	7	3 8 9	5	2	4	1 2 3 8	2 9	6
5 6	3	3 5 6	8	1	9	2 3 7	4	2 3 7
1 6 9	4 9	2	3	6 7	7 6	1 6 7	5	8
3	5	1	4	8	2	6 7	6 7 9	7 9
2 6 8 9	2 8 9	7	1	3 5 6	5 6	4	2 6 8 9	2 9
2 6 8	2 4 8	4 6 8	7	9	6	5	3	1
7	1	3 5	2	2 5	8	$\boxed{9}$	2 6	2 3 4 5
2 5 8	6	3 5 8	9	4	1	2 3 7 8	2 7 8	2 3 5 7
4	2 8 9	5 8 9	6	2 5 7	3	2 7 8	1	2 5 7

2. Difícil - grelha com 29 células pré-preenchidas

7	2	3	5				6	
					4	1		
						9		3
	6		1			3	4	
3				2				5
	7	5			9		8	
8		7						
		2	4					
	9				3	6	7	1

7	2	3	5	1 8 9	1 8	4 8	6	4 8
5 6 9	5 8	6 8 9	2 3 6 7 8 9	3 6 7 8 9	4	1	2 5	2 7 8
1 4 5 6	1 4 5 8	1 4 6 8	2 6 7 8	1 6 7 8	1 2 6 7 8	9	2 5	3
2 9	6	8 9	1	5 7 8	5 7 8	3	4	2 7 9
3	1 4 8	1 4 8 9	6 7 8	2	6 7 8	7	1 9	5
1 2 4	7	5	3 6	3 4 6	9	2	8	2 6
8	1 3 4 5	7	2 6 9	1 5 6 9	1 2 5 6	2 4 5	2 3 5 9	2 4 9
1 5 6	1 3 5	2	4	1 5 6 7 8 9	1 5 6 7 8	5 8	3 5 9	8 9
4 5	9	4	2 8	5 8	3	6	7	1

3. Terrível - grelha com 25 células pré-preenchidas

	9			5				
6		1			4			
2	4		3	7		8		
4	8							
				3				
							2	4
		7		9	6		5	1
			8			3		6
				4			9	

3 7 8	9	3 8	1 2 6	5	1 2 8	1 2 4 6 7	1 3 4 6 7	2 3 7
6	3 5 7	1	2 9	2 8	4	2 5 7 9	3 7	2 3 5 7 9
2	4	5	3	7	1 9	8	1 6	5 9
4	8	2 3 5 6 9	1 2 5 6 7 9	1 2 6	1 2 5 7 9	1 5 6 7 9	1 3 6	3 5 7 9
1 5 7 9	1 2 5 6 7	2 5 6 9	1 2 4 5 6 7 9	3	1 2 5 7 8 9	1 5 6 7 9	1 6 7 8	5 7 8 9
1 3 5 7 9	1 3 5 6 7	3 5 6 9	1 5 6 7 9	1 6 8	1 5 7 8 9	1 5 6 7 9	2	4
3 8	2 3	7	2	9	6	2 4	5	1
1 5 9	1 2 5	2 4 5 9	8	1 2	1 2 5 7	3	4 7	6
1 3 5 8	1 2 3 5 6	2 3 5 6 8	1 2 5 7	4	1 2 3 5 7	2 7	9	2 7 8

4. Enxaqueca - grelha com 23 células pré-preenchidas

			1	2				8
3	9						4	
		5						
	8		9		4			1
				7				
4			6		2		3	
						7		
	1						2	9
2				3	5			

6 7	4 6 7	4 6 7	1	2	3 6 7 9	3 5 6 9	5 6 7 9	8
3	9	1 2 6 7 8	5 7 8	5 6 8	6 7 8	1 2 5 6	4	2 5 6 7
1 6 7 8	2 4 6 7	5	3 4 7 8	4 6 8 9	3 6 7 8 9	1 2 3 6 9	1 6 7 9	2 3 6 7
5 6 7	8	2 3 6 7	9	5	4	2 5 6	5 6 7	1
1 5 6 9	2 3 5 6	1 2 3 6 9	3 5 8	7	1 3 8	2 4 5 6 8 9	5 6 8 9	2 4 5 6
4	5 7	1 7 9	6	1 5 8	2	5 8 9	3	5 7
5 6 8 9	3 4 5 6	3 4 6 8 9	2 4 8	1 4 6 8 9	1 6 8 9	7	1 5 6 8	3 4 5 6
5 6 7 8	1	3 4 6 7 8	4 7 8	4 6 8	6 7 8	3 4 5 6 8	2	9
2	4 6 7	4 6 7 8 9	4 7 8	3	5	1 4 6 8	1 6 8	4 6

2.3 Quadrados mágicos

Um **Quadrado mágico** é um quadro com n linhas e n colunas preenchido com n^2 números tais que a soma dos números de uma qualquer linha, coluna ou diagonal é constante. A essa constante chamamos **constante mágica** e a n chamamos a **ordem do quadrado mágico**.

A construção de um quadrado mágico pode ser vista como a resolução de um puzzle. Há quadrados mágicos triviais. Por exemplo, basta considerar os n^2 números iguais ou, num quadrado 3×3, considerar três números repetidos três vezes.

3	4	5
5	3	4
4	5	3

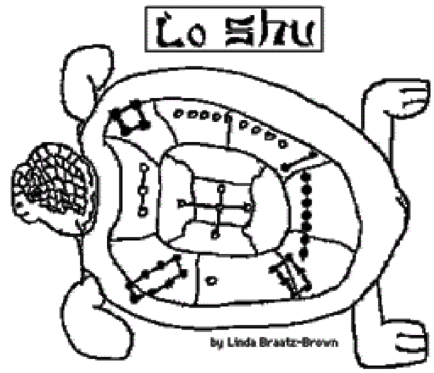
Estes são exemplos de quadrados mágicos sem grande interesse matemático. O interesse aumenta exponencialmente quando se considera a condição de se ter n^2 números distintos. Os quadrados mágicos mais estudados são aqueles que são preenchidos com os n^2 primeiros números naturais. A estes últimos quadrados é costume dar-se o nome de **quadrados mágicos elementares**. De seguida, apresentam-se dois quadrados mágicos elementares, de ordens 3 e 5, respetivamente.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

2.3.1 Breve história

A origem do quadrado mágico é desconhecida. O registo mais antigo que se conhece é um quadrado mágico de origem chinesa que se chama **Lo Shu**, o que significa *o livro do rio lo*. Este quadrado, apresentado de seguida, relata a lenda sobre um rapaz que, um dia, reparou nas marcas na carapaça de uma tartaruga que pareciam representar os números de 1 até 9:



Este quadrado mágico constituído pelos primeiros nove números naturais tem a constante mágica 15. Segundo Nogueira (2011), surgiu na China, em 80 d.C., o primeiro texto referente a um quadrado mágico, da autoria de Ta Tai Li Chi, e um segundo por volta de 570 d.C. O assunto permaneceu dormente até cerca de 1275, data em que na literatura chinesa ocorre uma nova referência a um quadrado mágico de ordem superior a 3.

No início, os chineses construiram quadrados mágicos não como objeto de estudo, mas sim como algo de sobrenatural:

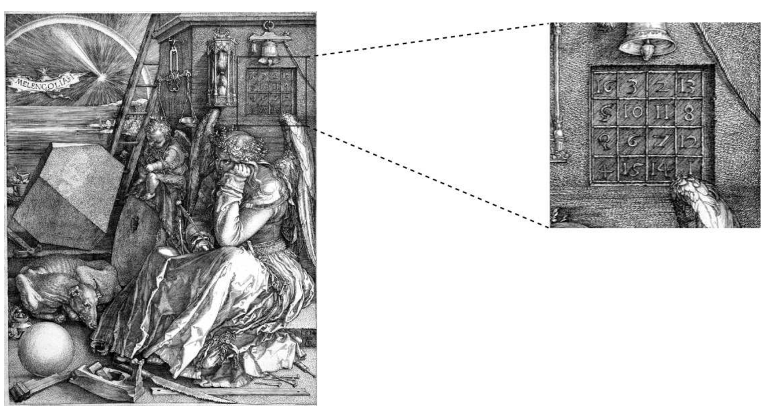
4 Metal	9 Metal	2 Fogo
3 Madeira	5 Terra	7 Fogo
8 Madeira	1 Água	6 Água

Até ao século X, os números pares presentes neste quadrado mágico eram associados, pelos habitantes do império do Meio, ao **yin**, o princípio feminino, e os números ímpares ao **yang**, o princípio masculino. Os números **1** (que significava o principio de tudo) e o **9** (que representava a completação) eram considerados os mais auspiciosos, enquanto que o número **5**, no quadrado central, era considerado o mais poderoso; este estava associado à terra e encontrava-se rodeado pelos quatro elementos, todos igualmente repartidos pelo yin e pelo yang.

Na India, o matemático Nagarajuna, no século I, obteve um quadrado mágico de ordem 4, o astrónomo Varâhamihira obteve um outro no século VI e um terceiro surgiu aproximadamente no século XII associado à religião local Jaina. Devido ao facto de possuir propriedades invulgares, esse objeto numérico deu origem a uma classe de quadrados (de ordem 4 e superior) conhecidos por quadrados de Jaina. No sáculo XIV foi formulada uma teoria completa de construção de quadrados mágicos no Ganita-Kaumadi, tratado de aritmética da autoria de Nârâyana, onde são referidos diversos métodos de construção conforme tivessem ordem $4n$, $4n \pm 1$ ou $4n \pm 2$.

O quadrado mágico chegou à Europa pelas mãos do filósofo e astrólogo judeu Abraham Ben Meir ibn Ezra (1090-1167), que se interessou pelos quadrados mágicos quando traduziu textos árabes para o hebreu. No início do século XIII, Ahmed al-Buni estudou o quadrado mágico, procurando descobrir as suas propriedades místicas. Em 1225, mostrou como construir um quadrado mágico a partir de outros já existentes, utilizando técnicas de preenchimento da fronteira. Baseado nos seus textos, o bizantino Manuel Moschopoulos redigiu, em 1306, um tratado sobre o assunto, sob um ponto de vista puramente matemático. Não demorou muito para que os quadrados mágicos se popularizassem na Europa por meio das artes da astrologia e alquimia, tendo sido muitas vezes usados como talismãs contra a peste e outros perigos.

Os quadrados mágicos foram estudados, por volta de 1450, por Luca Pacioli (1445-1517) e por Cornelius Agrippa (1486-1535). Este último expôs na sua obra De Oculta Philosophia (1531) quadrados mágicos de ordem 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, que, segundo ele, simbolizavam respetivamente Saturno, Jupiter, Marte, Sol, Vénus, Mercúrio e Lua - os sete *planetas* até então conhecidos. Em 1514 surgiu, num quadro de Albercht Dürer (1471-1528), *Melancolia*, no canto superior direito, representado um quadrado mágico de ordem 4. No centro da linha inferior deste quadrado, encontram-se os números 15 e 14, lado a lado, a indicar a data da obra.



Posteriormente, alguns conhecidos matemáticos investigaram este assunto: Pierre Fermat (1601 - 1665), que obteve o primeiro exemplo de um cubo mágico generalizado a três dimensões e os discutiu com Marin Marsene (1588-1648), e Bernard Frenicle de Bessy (1605 - 1675) que, na obra Des Quarrez Magiques Da Academia Royale Des Sciences, em 1693 enumerou os 880 diferentes quadrados elementares de ordem 4. Nos finais do século XIX, Eduard Lucas (1842-1891) estudou os quadrados mágicos na sua obra Recréations Mathématiques e, em 1910, Henry

Dudeney publicou uma completa classificação dos 880 quadrados mágicos de ordem 4 na revista *The Queen*. Não se conhece uma fórmula de obter o números de quadrados mágicos elementares de ordem n, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Sabe-se que, a menos de simetria e rotação, existe um quadrado mágico elementar de ordem 1, nenhum de ordem 2, um de ordem 3, 880 de ordem 4 e 275305224 de ordem 5. Não se sabe o número exato de quadrado mágicos elementares de ordem superior a 5.

2.3.2 Construção de quadrados mágicos

Existem diversos métodos que permitem construir um quadrado mágico. No entanto, os métodos que servem para construir um quadrado mágico de ordem ímpar não servem para construir um quadrado mágico da ordem par e viceversa. Começamos por estudar a construção de quadrados mágicos elementares. A partir destes, existem métodos que nos permitem construir quadrados mágicos não elementares, i.e., com outros números que não os n^2 primeiros naturais.

Num quadrado mágico elementar de ordem n, a constante mágica é dada pela expressão

$$\frac{n^3+n}{2}.$$

De facto, os números do quadrado podem ser considerados como os n^2 primeiros termos de uma progressão aritmética. Assim, a soma destes termos é

$$1+2+3+\cdots+n^2 = \frac{n^4+n^2}{2}.$$

Se C é a constante mágica, ou seja, se C é a soma dos números de uma coluna, por exemplo, temos que

$$nC = \frac{n^4+n^2}{2},$$

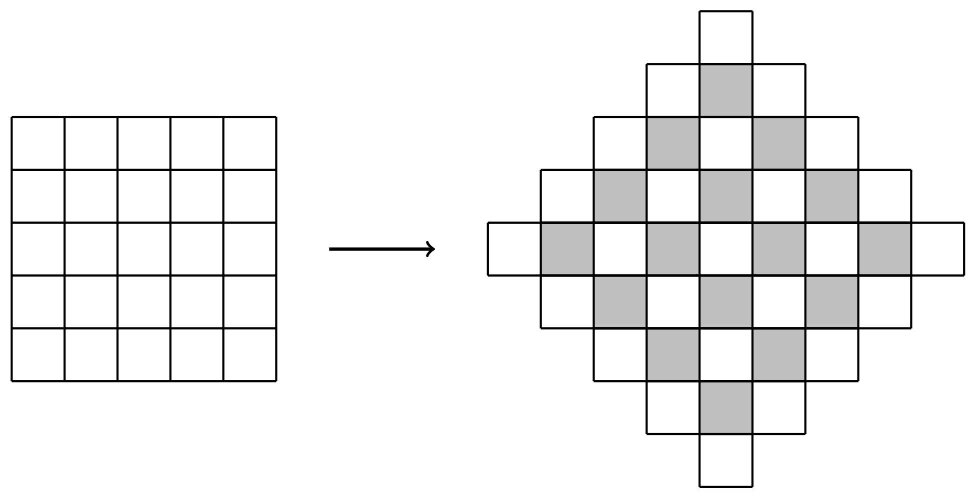
pelo que

$$C = \frac{n^3+n}{2}.$$

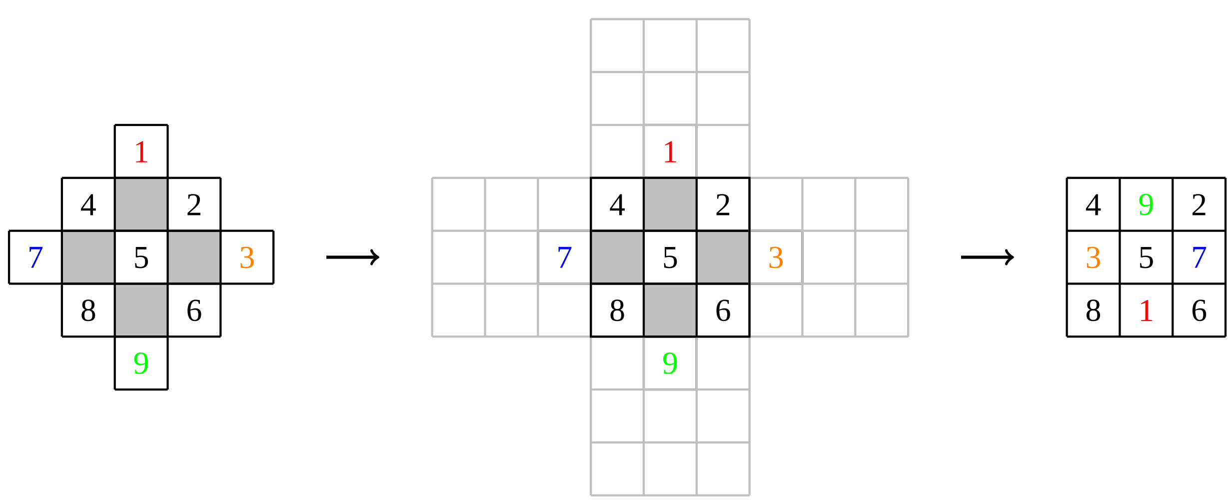
O preenchimento de um quadrado mágico elementar de ordem ímpar é feito essencialmente tendo em conta as simetrias em relação à casa central. Por isso, nos quadrados com este tipo de ordem, a constante mágica é sempre o produto da ordem do quadrado pelo número da casa central. Este facto vai ter influência nos métodos usados para a construção de quadrados mágicos.

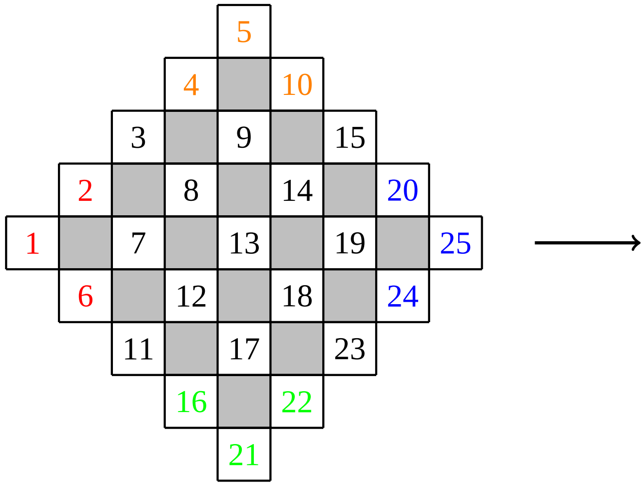
Quadrados Mágicos de ordem ímpar

Dos métodos que existem para construir um quadrado mágico elementar de ordem $n \times n$, com n ímpar, vamos apresentar o *método da pirâmide*. Este método consiste em formar um quadrado com as n^2 casas do quadrado original, mas unindo-as apenas pelos vértices e não pelos lados, como mostra a figura seguinte:



No quadrado criado, devem-se inserir todos os números de 1 até n^2 ao longo das linhas diagonais e, de seguida, imaginando que os números que estão fora do quadrado original estão em quatro quadrados de igual dimensão, sobrepomos os cinco quadrados e obtemos o quadrado original totalmente preenchido. De seguida apresenta-se este método para os casos de $n = 3$ e $n = 5$:





3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

A particularidade do quadrado mágico de ordem 3

O quadrado mágico de ordem 3 com os mesmos *n* números é único, a menos de simetrias axiais e rotacionais possíveis, independentemente dos números que o preenchem (e, portanto, da constante mágica). Para demonstrarmos tal facto, considere-se o quadrado mágico

a	b	c
d	e	f
g	h	i

de constante mágica m. Então,

i. $a+b+c=m$, $a+d+g=m$, $c+f+i=m$ e $g+h+i=m$;

ii. $a+e+i=m$, $b+e+h=m$, $c+e+g=m$ e $d+e+f=m$.

Se somarmos as três primeiras equações de ii., obtemos

$$a+b+c+g+h+i+3e=3m.$$

Aplicando i., obtemos

$$m+m+3e=3m,$$

pelo que

$$e=\frac{m}{3}.$$

Podemos ainda concluir que

$$a+i=b+h=d+f=2e,$$

pelo que podemos afirmar que (a,i), (b,h) e (d,f) formam pares de números complementares, no sentido em que distam o mesmo de e.

Vejamos agora que o número maior da lista nunca poderá estar num dos cantos do quadrado.

Suponhamos que o quadrado mágico é elementar. Então, a constante mágica é 15 e, sabemos já que $e = 5$. Suponhamos ainda que $a = 1$ e $i = 9$. Então, c (ou o seu complementar g) terá de ser um dos números 2, 3 ou 4. O mesmo acontece com o número b (ou o seu complementar h). Mas isso é absurdo, pois, por exemplo, no primeiro caso, obtem-se $1+b+c < 15$ para qualquer b (ou $1+d+g < 15$ para qualquer d). Um raciocínio análogo leva-nos à conclusão que o segundo caso também é contraditório. Logo 1 e 9 não podem estar nos cantos. Supondo agora que 3 ocupa um canto, se estiver na mesma linha que o 1, o quadrado só seria mágico se o terceiro número na linha fosse o 11, o que é impossível. Se o 3 estiver na mesma linha com o 9, o quadrado só seria mágico se o terceiro número da linha fosse outro 3, o que também é impossível. Portanto o 3 e o 9 também não podem estar nos cantos. Fica assim provada a unicidade do quadrado mágico elementar.

Se o quadrado mágico não for elementar, o raciocínio é análogo, provando que o maior e o menor números estão em posições simétricas em relação ao quadrado central e não podem estar nas diagonais.

Quadrados mágicos de ordem par

Para ilustrar a construção de um quadrado de ordem par, vamos apresentar a construção de um quadrado 4×4. Existem dois métodos muito semelhantes:

1. Em primeiro lugar, preenche-se um quadrado 4×4 com os números por ordem crescente começando pelo canto superior esquerdo e acabando no canto inferior direito. De seguida, apagam-se os números nas duas diagonais e, por último, recolocam-se esses números, mas trocando os lugares de 1 e 16, 4 e 13, 6 e 11 e 7 e 10:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

$\longrightarrow$

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

$\longrightarrow$

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

2. Preenche-se um quadrado 4×4 com os números por ordem crescente começando pelo canto superior esquerdo e acabando no canto inferior direito. De seguida, apagam-se os

números que não estão nas duas diagonais e, por último, recolocam-se esses números, mas trocando os lugares de 2 e 15, 3 e 14, 5 e 12 e 8 e 9:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

$\longrightarrow$

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

$\longrightarrow$

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Embora pareçam dois quadrados mágicos distintos de constante mágica 34, o segundo quadrado obtém-se do primeiro através de uma simetria rotacional de centro no centro do quadrado mágico e de ângulo de amplitude de 180°, pelo que podemos afirmar que os dois métodos distintos levam ao mesmo quadrado. No entanto, este não é o único quadrado mágico elementar de ordem 4 possível. A partir deste quadrado, podemos permutar linhas ou colunas de modo a obter diversos quadrados com a mesma constante. Por exemplo, o quadrado mágico

13	3	2	16
12	6	7	9
8	10	11	5
1	15	14	4

é obtido do último quadrado apresentado trocando a primeira e a quarta linhas.

Segundo Nogueira, existem 880 quadrados mágicos elementares de ordem 4 distintos, a menos das quatro possíveis rotações e das duas simetrias. Dos 880 quadrados, apenas 48 são pandiagonais, i.e. são quadrados mágicos em que a soma nas diagonais quebradas (diagonais dos três quadrados obtidos do original “quebrando-o” segundo as linhas e colocando estas pelas ordens 2 - 3 - 4 - 1, 3 - 4 - 1 - 2 e 4 - 1 - 2 - 3) são também iguais à constante mágica. O seguinte quadrado, de constante mágica 34, é exemplo disso.

1	8	13	12
14	11	2	7
4	5	16	9
15	10	3	6

Construção de quadrados mágicos a partir de outros quadrados mágicos

Dado um quadrado mágico de ordem *n* já conhecido (elementar, por exemplo), é possível construir outros quadrados de ordem *n*. Para isso, bastar somar um mesmo número a cada um dos números do quadrado original. Por exemplo, o quadrado

17	10	15
12	14	16
13	18	11

é o quadrado mágico de constante mágica 42 obtido do quadrado mágico elementar

8	1	6
3	5	7
4	9	2

somando 9 a todos os seus números ($42 = 15 + 3 \times 9$). Interessante é observar que se construirmos oito quadrados, somando 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63 e 72 a todos os números do quadrado elementar obtemos nove quadrados mágicos de ordem 3 com os números de 1 a 81. Substituindo cada casa do quadrado elementar pelo quadrado encontrado correspondente, obtemos o quadrado mágico de ordem 9 de constante mágica 369.

71	64	69	8	1	6	53	46	51
66	68	70	3	5	7	48	50	52
67	72	65	4	9	2	49	54	47
26	19	24	44	37	42	62	55	60
21	23	25	39	41	43	57	59	61
22	27	20	40	45	38	58	63	56
35	28	33	80	73	78	17	10	15
30	32	34	75	77	79	12	14	16
31	36	29	78	81	74	13	18	11

Repetindo o processo, se somarmos 81, $2\times 81, \ldots, 7\times 81$ e 8×81 aos números deste quadrado mágico, obtemos nove quadrados mágicos de ordem 9 com os números de 1 a 27^2. Partindo do quadrado mágico elementar de ordem 3, podemos obter um quadrado mágico de ordem 27. Deste modo, podemos facilmente construir quadrados mágicos de ordem 3^n, para qualquer natural n.

O método seguinte permite-nos formar um conjunto de 9 números não consecutivos com os quais é possível construir um quadrado mágico de ordem 3.

Considere-se um número a qualquer para começar. Em seguida, consideram-se dois números diferentes, p e q, que serão adicionados ao número original, como mostra e seguinte esquema:

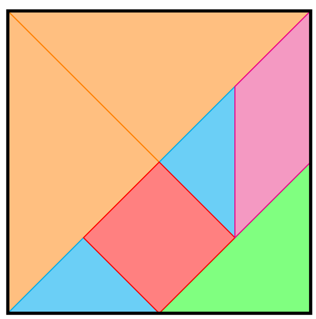
$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "+p"] \arrow[d, "+q"'] & a+p \arrow[r, "+p"] & a+2p \\
a+q \arrow[d, "+q"'] & a+q+p & a+q+2p \\
a+2q & a+2q+p & a+2q+2p
\end{tikzcd}$$

De seguida, basta construir o quadrado mágico de ordem 3 e de constante $3a+3q+3p$ seguindo o esquema

$a+2q+p$	a	$a+q+2p$
$a+2p$	$a+q+p$	$a+2q$
$a+q$	$a+2q+2p$	$a+p$

2.4 O Tangram

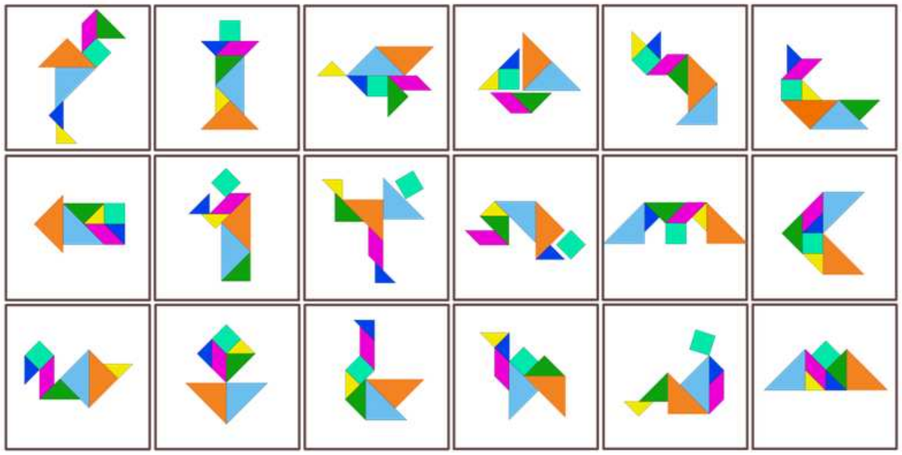
O Tangram é um puzzle formado por 7 peças - um quadrado, cinco triângulos e um paralelogramo, como se mostra na figura seguinte. O objetivo do puzzle é construir um quadrado.



Quadrado formado pelas sete peças do Tangram

Os cinco triângulos são isósceles e retângulos. Os dois maiores são congruentes e a área de cada um corresponde a um quarto da área do quadrado construído, o triângulo médio ocupa um oitavo da área do quadrado construído e os dois triângulos mais pequenos são congruentes e a sua área corresponde a um-dezasseis avos da área do quadrado construído. Estes dois triângulos formam um quadrado congruente com a peça quadrada, visto que os catetos dos triângulos são geometricamente iguais aos lados do quadrado. A peça quadrada ocupa uma área que corresponde a um oitavo da área do quadrado final. O mesmo se verifica em relação ao paralelogramo. As peças do Tangram têm a particularidade de as amplitudes dos seus ângulos serem múltiplos de 45º, nomeadamente 45º, 90º e 135º (Gardner, 1988).

Com as sete peças que constituem o Tangram constroem-se muitas formas diferentes, sendo algumas semelhantes a figuras que representam pessoas, animais, letras do alfabeto, formas geométricas (Slocum, 2003).



Algumas figuras que se podem construir com as sete peças do Tangram

2.4.1 Um pouco de história

Não se sabe exatamente quando o Tangram surgiu, sendo corrente que se trata de um jogo muito antigo. Segundo Snape e Scott (1994), a primeira menção ao Tangram surgiu em livros chineses impressos em 1800. Para evidenciar a quantidade de figuras que se podem construir com as peças do Tangram, este autor refere que Lewis Carroll tinha em seu poder um livro, intitulado The Fashionable Chinese Puzzle, do qual se desconhece a data da sua publicação, com 323 figuras feitas a partir das peças do Tangram. Trata-se de um jogo com potencialidades pedagógicas, que pode ser utilizado desde o pré-escolar até aos níveis mais avançados. A combinação das peças do Tangram oferece tantas possibilidades que a sua exploração contribui para o desenvolvimento da criatividade dos alunos (Slocum, 2003).

A origem do Tangram é um enigma sobre o qual existem muitas versões. Na procura de identificar a sua origem, Slocum (2003) apresenta factos históricos que dão conta da referência ao Tangram. De acordo com a literatura chinesa, Yang-cho-chü-shih (um recluso iletrado) inventou o Tangram durante o reinado de Chia-ch'ing (1796-1820), a quem é atribuído a autoria do primeiro livro sobre problemas com o Tangram, usando um pseudônimo que na altura era comum na China. A data desse livro resulta da inscrição escrita à mão numa caixa de papelão coberta de seda contendo um Tangram de marfim entalhado que foi dado a Francis Waln no dia 4 de abril de 1802, que mostramos na figura seguinte.

Sang-hsia-k'o compilou o segundo livro sobre problemas com o Tangram, intitulado Ch'i ch'iao t'u ho pi. A introdução e as 334 figuras deste livro, que foi publicado em 1813, foram reimpressas em inúmeras edições de várias editoras chinesas durante mais de 100 anos. Uma réplica desse livro - incluindo a capa, o texto e 130 figuras - foi descoberta no Japão, da qual Slocum (2003) pondera ter sido publicada em 1839. Na sua introdução, Sang-hsia-k'o conta um pouco da história do Tangram e das figuras contempladas, salientando que a origem deste jogo se liga com o teorema de Pitágoras. Porém, Slocum (2003) salienta que a sua investigação sobre a presença do teorema de Pitágoras na matemática chinesa não encontrou evidências de que o Tangram tivesse sido inventado na China ou conhecido pelos antigos matemáticos chineses. O editor do livro de Sang-hsia-k'o de 1813 publicou uma nova edição com a mesma introdução e os mesmos problemas, conjuntamente com um livro de soluções dos problemas propostos, cujas cópias foram largamente distribuídas na China, Europa e América. Em Inglaterra, os problemas deste livro foram compilados e publicados, o que fez com que o puzzle se tornasse famoso em Londres e a sua popularidade se espalhasse rapidamente noutros países europeus.

Acredita-se assim que o Tangram começou no Oriente e se espalhou para o Ocidente. Alcançou a Europa e a América no princípio do séc. XIX e a popularidade continua até hoje. Atualmente, o Tangram está a tornar-se novamente popular nos computadores pessoais e de escolas, constituindo um jogo intemporal. Em termos pedagógicos, o Tangram pode ser utilizado no ensino de Geometria, exigindo somente imaginação, paciência e criatividade e potencia a realização de atividades de perceção visual no plano e a capacidade de ver partes no todo. Manipulando e comparando as suas peças, é possível estabelecer variadíssimas relações de perímetro e de área, compor e transformar figuras geométricas noutras figuras equivalentes, ordenar peças por áreas, comparar, ordenar e adicionar medidas de comprimento, estudar propriedades de convexidade e concavidade de polígonos e estudar figuras semelhantes. O carácter lúdico deste puzzle levou os responsáveis educativos a apontarem no programa de matemática a utilização do Tangram, com a convicção de que a sua utilização na sala de aula promove o desenvolvimento nos alunos da intuição geométrica, da capacidade de visualização e de uma relação mais afetiva com a matemática (Ministério da Educação, 2007).

2.4.2 Atividades com o Tangram

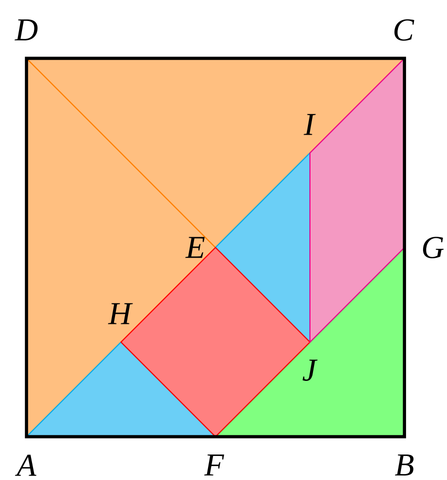
Com as peças do Tangram podem-se realizar muitas atividades de exploração de tópicos geométricos, como, por exemplo, áreas, perímetros e semelhanças de figuras. Segundo Gardner (1988), tais atividades classificam-se em três categorias principais: (1) procurar diferentes modos para formar um dado Tangram ou uma prova da impossibilidade de formar um Tangram; (2) encontrar formas que descrevam, com criatividade, silhuetas de animais, figuras humanas e outros objetos reconhecíveis; (3) resolver uma variedade de problemas de geometria que envolvam as sete peças. Estas atividades podem-se concretizar em todos os níveis de escolaridade, com a ressalva de que os objetivos que se pretendam atingir se relacionem com os conhecimentos dos alunos envolvidos. Com os alunos do ensino primário, o Tangram serve para identificar os tipos de polígonos representados pelas suas peças, compor e decompor figuras geométricas, o que, através da visualização, lhes possibilita a aquisição do conhecimento sobre a forma dos polígonos abordados. Relativamente aos alunos do segundo e terceiro ciclos as atividades com o Tangram podem ser mais desafiantes e variadas, tais como: distinguir parte do todo, compor polígonos equivalentes, calcular área e perímetro de figuras cujas medidas dos lados são traduzidas por números racionais e irracionais, construir os possíveis polígonos convexos, construir quadrados semelhantes segundo o número das peças utilizadas, justificar matematicamente a impossibilidade de se poder construir um quadrado pela ausência de alguma peça e propor alguns paradoxos sobre figuras construídas com as peças do Tangram.

De seguida apresentam-se alguns exemplos de tarefas que podem ser desenvolvidas na aula de Matemática:

1. **Tarefa 1**

> 1. Compor e decompor o Tangram;
> 2. Entre as peças que compõem o Tangram, identificar:
>   i. Polígonos geometricamente iguais;
>   ii. Polígonos semelhantes não geometricamente iguais, indicando a razão de semelhança do maior para o menor;

A construção de um Tangram obtém-se a partir de um quadrado, $[ABCD]$, com uma dada medida dos seus lados. Uma folha quadriculada facilita a construção do Tangram. Traça-se uma das diagonais do quadrado, por exemplo $[AC]$. Determina-se o seu ponto médio E, assim como os pontos médios dos lados $[BC]$ e $[AB]$, designando-os por G e F, respetivamente. Traça-se o segmento de reta $[GF]$ e determina-se o seu ponto médio J. Traça-se o segmento de reta de extremos D e J. Determina-se os pontos médios dos segmentos $[AE]$ e $[EC]$, H e I, respetivamente. O Tangram ganha forma quando se une os pontos I e J e os pontos F e H. Ao serem recortadas, as figuras que compõem o Tangram (triângulos, quadrado e paralelogramo propriamente dito) podem ser utilizadas com paciência e imaginação numa variedade de atividades.



Na identificação das peças do Tangram que são polígonos geometricamente iguais, tem-se que atender às peças que têm a mesma forma e as mesmas dimensões, que, neste caso, correspondem aos triângulos $[ADE]$ e $[CDE]$ e aos triângulos $[AFH]$ e $[EIJ]$. Já quanto à identificação de polígonos semelhantes, é a razão (r) entre os lados correspondentes desses polígonos que determina se a semelhança é uma ampliação ($r > 1$), ou uma redução ($r < 1$) ou se são geometricamente iguais ($r = 1$). Assim, as peças do Tangram que formam polígonos semelhantes não geometricamente iguais são os triângulos representados por $[ADE]$, $[BFG]$ e $[AFH]$, cujas razões de semelhança do maior para os restantes são, respetivamente, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

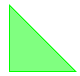
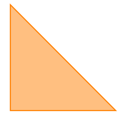
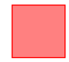
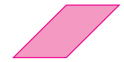
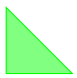
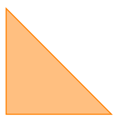
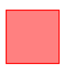
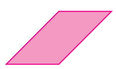
2. **Tarefa 2**

> Determinar a área de cada uma das peças do Tangram considerando como unidade de área a área das restantes peças.

Para determinar a área de cada uma das peças do Tangram em função da área das restantes peças pode-se começar por considerar que a área do quadrado formado pelas sete peças mede x^2 u.a. Com o conhecimento das relações que determinam as medidas das áreas das sete peças do Tangram em função da medida das áreas do quadrado por elas formado, torna-se possível determinar a expressão das áreas de cada uma dessas peças (de acordo com a construção do quadrado de Tangram apresentado na tarefa 1):

- Área dos triângulos $[ADE]$ e $[CDE]$: $A = \frac{1}{4}x^2$;
- Área do triângulo $[BFG]$: $A = \frac{1}{8}x^2$;
- Área dos triângulos $[AFH]$ e $[EIJ]$: $A = \frac{1}{16}x^2$;
- Área do paralelogramo $[CGJI]$: $A = \frac{1}{8}x^2$;
- Área do quadrado $[EJFH]$: $A = \frac{1}{8}x^2$.

As expressões que representam a área de cada uma das peças do Tangram permitem determinar a relação que há entre a área de cada uma das peças em função da área da peça que se considere como unidade de área, como se constata na seguinte tabela:

	Área de				
Unidade de área					
	1	2	4	2	2
	$\frac{1}{2}$	1	2	1	1
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	1	2	1	1
	$\frac{1}{2}$	1	2	1	1

Os valores da tabela relacionam-se com a razão entre as áreas das figuras relacionadas, visto que são semelhantes, razão que é determinada pelo quadrado da razão de semelhança.

3. **Tarefa 3**

> Utilizando algumas das peças do Tangram identificar as diferentes possibilidades de construir quadrados.

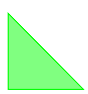
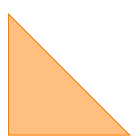
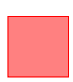
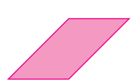
Começa-se por considerar que o lado do quadrado formado pelas sete peças mede x u.c. A partir desta medida, determinam-se as seguintes medidas (de acordo com a construção do quadrado de Tangram apresentado na tarefa 1):

- $\overline{AD} = x$;
- Como o triângulo $[ADC]$ é isósceles e retângulo, pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{AC} = \sqrt{2}x$;
- $\overline{EC} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$, visto que E é o ponto médio de $[AC]$;

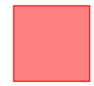
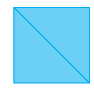
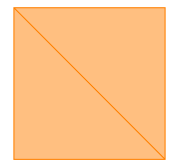
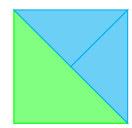
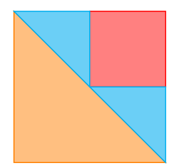
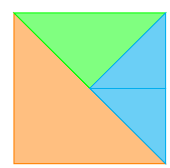
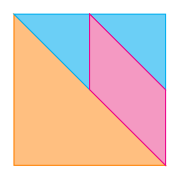
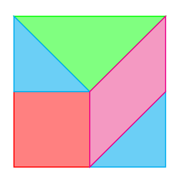
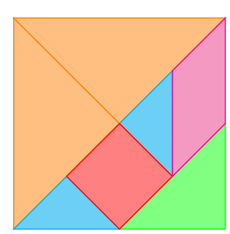
- $\overline{EI} = \frac{\sqrt{2}}{4}x = \overline{EH}$, porque I é o ponto médio de $[EC]$ e H é o ponto médio de $[EA]$, que é congruente com $[EC]$;

- Como o triângulo $[EIJ]$ é isósceles e retângulo, pelo teorema de Pitágoras $\overline{IJ} = \frac{1}{2}x = \overline{CG}$.

Considere-se agora que a medida do lado da peça quadrada do Tangram é 1 u.c. Isto significa que o lado do quadrado formado pelas sete peças é $x = 2\sqrt{2}$ e a sua área é 8 u.a. As medidas dos lados das sete peças e as respetivas áreas são apresentadas na seguinte tabela:

Peças do Tangram	Medida dos lados	Medida das áreas
	catetos: 1 u.c. hipotenusa: $\sqrt{2}$ u.c.	$\frac{1}{2}$ u.a.
	catetos: $\sqrt{2}$ u.c. hipotenusa: 2 u.c.	1 u.a.
	catetos: 2 u.c. hipotenusa: $2\sqrt{2}$ u.c.	2 u.a.
	lados: 1 u.c.	1 u.a.
	lados: 1 e $\sqrt{2}$ u.c.	1 u.a.

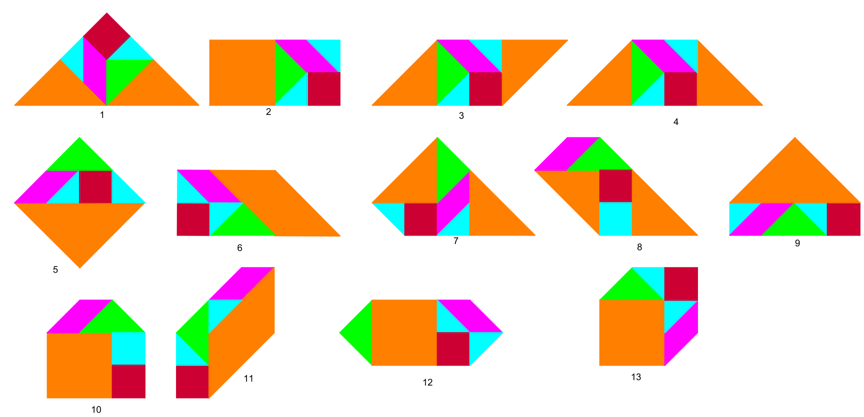
Com esta informação, torna-se possível determinar o número de peças do Tangram necessário para formar quadrados:

Número de peças utilizadas	Medida do lado do quadrado formado	Área	Quadrado formado
1 (quadrado pequeno)	1	1	
2 (triângulos pequenos)	1	1	
2 (triângulos grandes)	2	4	
3 (triângulo médio e dois triângulos pequenos)	$\sqrt{2}$	2	
4 (1 triângulo grande, 2 triângulos pequenos e 1 quadrado pequeno)	2	4	
4 (1 triângulo grande, 2 triângulos pequenos e 1 triângulo médio)	2	4	
4 (1 triângulo grande, 2 triângulos pequenos e 1 paralelogramo)	2	4	
5 (1 triângulo médio, 2 triângulos pequenos, 1 quadrado pequeno e 1 paralelogramo)	$\sqrt{2}$	4	
7 (2 triângulos grandes, 2 triângulos pequenos, 1 triângulo médio, 1 quadrado pequeno e 1 paralelogramo)	$2\sqrt{2}$	8	

Da análise dos dados obtidos sobre cada uma das peças e do quadrado formado por elas, chegamos à conclusão que é impossível formar um quadrado com 6 peças do Tangram. Para provar esta impossibilidade, retira-se do Tangram qualquer uma das peças, para perfazer as 6 peças, o que faz com que a área da figura que se obtém seja $\frac{15}{2}$ u.a. ou 7 u.a. ou 6 u.a. Se a figura obtida fosse um quadrado, o seu lado teria de medir $\frac{\sqrt{30}}{2}$ u.c., $\sqrt{7}$ u.c. e $\sqrt{6}$ u.c., medidas impossíveis de obter com as peças do Tangram, cujos lados medem 1, $\sqrt{2}$, 2 e $2\sqrt{2}$.

4. **Tarefa 4**

Com as sete peças do Tangram formar os seguintes polígonos convexos. Quais desses polígonos têm o mesmo perímetro? (Sugestão: utilizar como medidas das peças as que são propostas na tarefa 3).

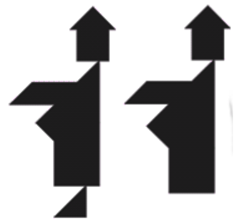


Os polígonos apresentados são exatamente os treze polígonos convexos que é possível formar com as sete peças do Tangram (demonstrado em Araújo , 2005). Considerando as medidas utilizadas na tarefa 3, a determinação dos perímetros de tais polígonos permite constatar que alguns deles têm o mesmo valor, tais como:

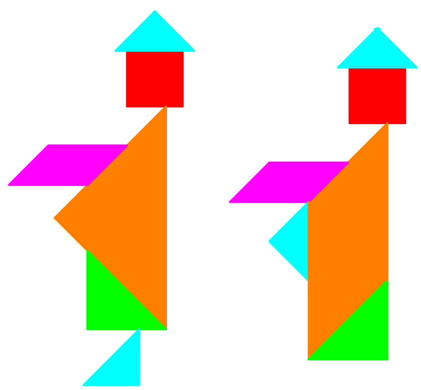
- Os polígonos denominados por 1, 3 e 4 têm de perímetro $8+4\sqrt{2}$ u.c.;
- os polígonos denominados por 7 e 8 têm de perímetro $4+6\sqrt{2}$ u.c.;
- os polígonos denominados por 9, 11 e 12 têm de perímetro $6+4\sqrt{2}$ u.c.;
- os polígonos denominados por 10 e 13 têm de perímetro $8+2\sqrt{2}$ u.c.;
- Os polígonos 2, 5 e 6 têm perímetros diferentes dos demais, respetivamente 12 u.c., $8\sqrt{2}$ u.c. e $10+2\sqrt{2}$ u.c.

5. **Tarefa 5**

Cada uma das seguintes figuras foram obtidas com as sete peças do Tangram. Em que diferem?



Como as duas figuras são obtidas com as sete peças do Tangram, elas são equivalentes. Visualmente, fica-se com a ideia de que a segunda figura difere da primeira por não apresentar uma peça (o triângulo que forma o "pé" da primeira figura). Porém, uma observação mais atenta das figuras permite-nos perceber que o desaparecimento de tal peça é uma questão de ilusão, visto que ela faz parte da segunda figura.



A alteração da posição dos triângulos que fazem parte do "tronco" da primeira figura e a inclusão do triângulo que forma o seu "pé" no "tronco" da segunda dá a ilusão de ambas as figuras terem o mesmo "tronco". Esta alteração faz com que as alturas dos troncos das duas figuras sejam diferentes: considerando que o lado da peça quadrada mede 1 u.c. (como anteriormente), a altura do tronco da primeira figura mede

$$2+2=4 \text{ u.c.},$$

enquanto a altura do tronco da segunda figura mede

$$\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}\approx 4,24 \text{ u.c.}.$$

Se representarmos as figuras numa unidade de medida muito pequena, esta diferença de altura passa despercebida e cria-se a ilusão.

Capítulo 3

Outras atividades matemáticas

Neste último capítulo, apresentam-se alguns conceitos e atividades matemáticos que, não sendo classificados nem de jogos nem de puzzles matemáticos, têm carácter recreativo e uma enorme potencialidade pedagógica.

3.1 Atividades com números

Um dos objetivos das atividades matemáticas na sala de aula é desenvolver o conhecimento que os alunos têm dos números. No dia a dia, usamos os números de muitas e variadas formas, em tabelas ou em listas, que manipulamos com mais ou menos destreza. Essas formas numéricas podem ser utilizadas como ferramenta nas atividades dos alunos. Manipulando-as, os alunos podem descobrir padrões e regularidades, explorar curiosidades numéricas ou simplesmente trabalhar as operações. Neste trabalho apresentam-se quatro atividades diferentes: (i) os dígitos no calendário, (ii) um truque de magia, (iii) multigraus e (iv) o alvo.

3.1.1 Os dígitos do calendário

Nos calendários, os números (datas) de cada mês são listados, normalmente, em sete colunas, correspondentes aos dias da semana. Várias atividades podem ser criadas através desta lista que é bem conhecida pelos alunos. Fixemos um mês do calendário. Nele, podemos encontrar alguns padrões, que envolvam, por exemplo, três números consecutivos da mesma coluna, quatro números dispostos num quadrado 2×2 e nove números dispostos num quadrado 3×3:

JUNHO						2014
SEG	TER	QUA	QUI	SEX	SÁB	DOM
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30						

- Considerem-se três números consecutivos numa mesma coluna. Então, a sua soma é igual ao triplo do número que está no meio. De facto, se o número do meio for D, então, o primeiro número considerado é $D-7$ e $D+7$ é o último número.

D-7
D
D+7

Logo, a soma deste três números é $3D$. Assim, se é dado um número qualquer como sendo a soma de três números de uma coluna, facilmente se indica os números que a compõem, pois basta dividir este número por três para obter o número no meio, subtrair sete ao quociente para obter o menor e adicionar sete ao quociente para se obter o maior dos três números.

- As datas que formam um quadrado 2×2 também se relacionam matematicamente. Se D é o menor dos quatro números considerados, então os outros três números considerados são $D+1$, $D+7$ e $D+8$.

D	D+1
D+7	D+8

Assim, a soma destes quatro números é

$$S = D + (D+1) + (D+7) + (D+8) = 4(D+4).$$

Com esta expressão facilmente se relaciona a soma com cada um dos números que compõem o quadrado.

- Para as datas que se agrupam em quadrados de 3×3 também se pode estabelecer uma relação.

C-8	C-7	C-6
C-1	C	C+1
C+6	C+7	C+8

Considera-se o número C que é a data que está no centro do quadrado. A partir destes obtemos uma expressão para os restantes números: $C-8$, $C-1$, $C+6$ na primeira coluna, $C-7$ e $C+7$ na segunda coluna e $C-6$, $C+1$ e $C+8$ na terceira e última coluna. A soma destes nove números

$$S = 9C.$$

A particularidade da representação destes números permite outro desafio: construir um quadrado mágico com estes nove números. Para tal, basta ver que, em cada linha, cada número é obtido somando 1 ao anterior e que, em cada coluna, cada número é obtido somando 7 ao anterior. Assim, aplicando a construção estudada na secção dos quadrados mágicos, fazendo $a = C-8$, $p = 1$ e $q = 7$, obtém-se o quadrado mágico cuja soma mágica é $3C$:

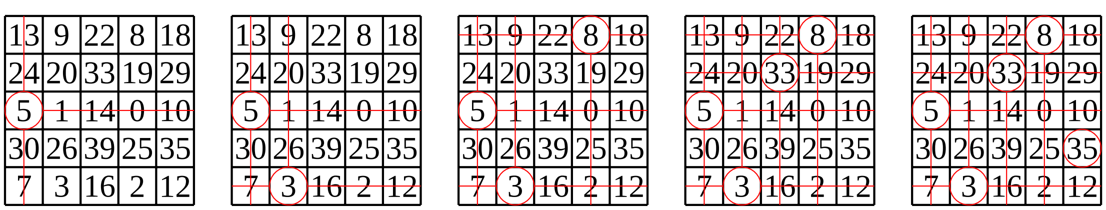
C+7	C-8	C+1
C-6	C	C+6
C-1	C+8	C-7

3.1.2 Um truque de magia

Para este truque de magia é necessário um quadro com linhas e colunas que é construído com base na tabuada da soma. Considere-se, por exemplo, o quadro de números apresentado a seguir:

13	9	22	8	18
24	20	33	19	29
5	1	14	0	10
30	26	39	25	35
7	3	16	2	12

O truque de magia inicia-se pedindo cinco números do quadro, todos de diferentes linhas e de diferentes colunas. Antes que a audiência diga quais os números escolhidos, o mágico escreve num papel qual vai ser a soma desses cinco números. Para o quadro apresentado, por exemplo, o mágico vai escrever 84. Se a audiência escolher 5 como primeiro número, em seguida 3, depois 8 e a quarta escolha for 33, o único número que se pode escolher como quinto número é o 35. A soma destes números é igual ao 84 escrito antecipadamente pelo mágico, o que deixa surpreendida a plateia. Este número é igual às somas dos números nas duas diagonais. Este valor designa-se por valor mágico ou valor próprio do quadro.



1.ª escolha 2.ª escolha 3.ª escolha 4.ª escolha 5.ª escolha

Claro que a verdadeira magia está na construção do quadro. Tudo acontece porque os números que estão no quadro são obtidos como soma de dois de dez números cuja soma é igual a 84. O quadro apresentado no exemplo foi obtido da seguinte forma:

+	5	1	14	0	10
8	13	9	22	8	18
19	24	20	33	19	29
0	5	1	14	0	10
25	30	26	39	25	35
2	7	3	16	2	12

Ao exigir que a audiência escolha um e um só número de cada linha e de cada coluna, estamos a exigir que sejam escolhidos cinco números que resultam de cinco somas de pares dos dez números iniciais. Aqui se percebe que a magia tem de acontecer.

3.1.3 Multigraus

Outro tipo de recreação que se pode desenvolver com os alunos do Ensino Básico envolve o conceito de **multigraus**, i.e., dois conjuntos de números que satisfazem a condição de serem iguais não só as somas dos seus números, mas também as somas de algumas potências desses mesmos números.

Começa-se por considerar o quadrado mágico elementar de ordem 3, apresentado no segundo capítulo deste trabalho.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Sabemos que, porque o quadrado é mágico, temos que

$$8+1+6=15=4+9+2.$$

Mas, também se verifica que

$$8^2+1^2+6^2=101=4^2+9^2+2^2.$$

A igualdade envolvendo a potência cúbica destes números já não se verifica. De facto,

$$8^3+1^3+6^3=729\neq 801=4^3+9^3+2^3.$$

Neste caso, dizemos que os conjuntos $\{8,1,6\}$ e $\{4,9,2\}$ são multigraus de *segunda ordem*. Do quadrado mágico também se pode retirar, por exemplo, os multigraus de segunda ordem $\{3,2,4\}$ e $\{6,7,2\}$.

Simples cálculos dão um exemplo de multigraus de terceira ordem:

$$1+8+7+14=2+4+11+13$$

$$1^2+8^2+7^2+14^2=2^2+4^2+11^2+13^2$$

$$1^3+8^3+7^3+14^3=2^3+4^3+11^3+13^3$$

Mas, será que encontrar estes números foi pura sorte? Veremos de seguida que existe um método para encontrar multigraus de qualquer ordem.

Para encontrar este tipo de relação em algum conjunto de números, começa-se, por exemplo, com a igualdade:

$$1+5=2+4.$$

Repare-se que $1^2+5^2 \neq 2^2+4^2$. Adiciona-se a cada termo da igualdade um número k e obtém-se

$$(1+k)+(5+k)=(2+k)+(4+k).$$

De seguida, considera-se uma cópia desta igualdade, à qual trocamos ambos os membros e adicionamos à igualdade original

$$1+5+(2+k)+(4+k)=2+4+(1+k)+(5+k).$$

Elevando ao quadrado cada parcela, obtemos

$$\begin{aligned}1^2+5^2+(2+k)^2+(4+k)^2 &= 1^2+5^2+2^2+4k+k^2+4^2+8k+k^2\\ &= 2^2+4^2+1^2+2k+k^2+5^2+10k+k^2\\ &= 2^2+4^2+(1+k)^2+(5+k)^2.\end{aligned}$$

Se, por exemplo, $k=4$, então, $1+k=5$, e, neste caso, os dois membros teriam um termo igual. Simplificando, obtém-se as igualdades

$$1+6+8=2+4+9,$$

$$1^2+6^2+8^2=2^2+4^2+9^2.$$

Observe-se que estes são multigraus obtidos do quadrado mágico elementar de ordem 3.

Se se quer obter conjuntos com quatro elemento, teremos de ter $k > 4$. Se, por exemplo, $k = 5$, obtém-se:

$$1 + 5 + 7 + 9 = 2 + 4 + 6 + 10,$$

$$1^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + 10^2.$$

Para obter multigraus de terceira ordem, utiliza-se o mesmo processo, mas começando com uma igualdade obtida de multigraus de segunda ordem. Por exemplo, adicionando 5 a todos os números no exemplo anterior e seguindo o processo, obtém-se

$$1 + 6 + 8 + 7 + 9 + 14 = 2 + 4 + 9 + 6 + 11 + 13.$$

Cancelando as parcelas comuns a ambos os membros, obtém-se multigraus de terceira ordem, já que, para $n = 1, 2, 3$, se tem

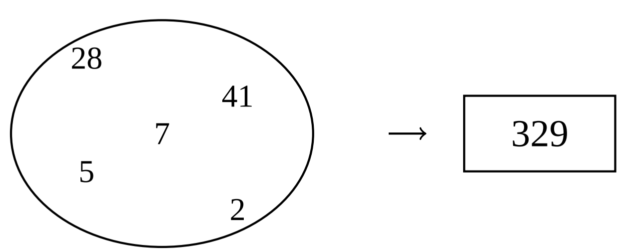
$$1^n + 8^n + 7^n + 14^n = 2^n + 4^n + 11^n + 13^n.$$

Utilizando o mesmo processo com este conjunto como ponto de partida, pode-se formar multigraus de quarta ordem e assim sucessivamente.

3.1.4 O Alvo

O alvo é uma atividade, apresentada como um jogo aos alunos, boa para o exercício do cálculo mental. É uma atividade que pode desafiar um número grande de pessoas simultaneamente e, por isso, boa para se trabalhar com todos os alunos da turma.

Começa-se por escolher um número de três dígitos qualquer e um conjunto de números com um ou dois dígitos. Desafia-se os alunos para combinar alguns ou todos os números do conjunto com as operações $+, -, \times$ e $\div$ e, se necessário, os parêntesis, de modo a obter número de três dígitos apresentado inicialmente, o alvo. Caso ninguém dê a resposta certa, ganha aquele que deu a resposta mais próxima do valor do alvo. Por exemplo:



Os cálculos efetuados pelos alunos podem ser os seguintes:

$$(5+7)\times 28-2=334$$

$$(28\div 7)\times 2\times 41=328$$

e

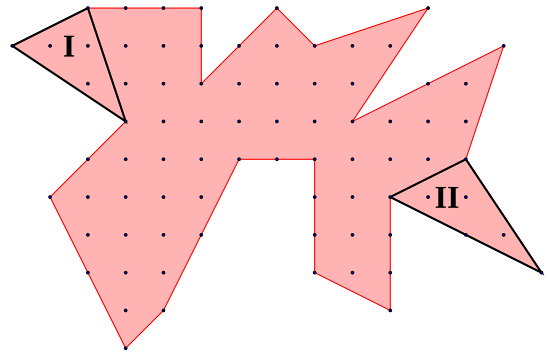
$$(41+28)\times 5-(7\times 2)=331.$$

Neste caso, o segundo aluno ganha, pois foi aquele que deu a resposta mais próxima.

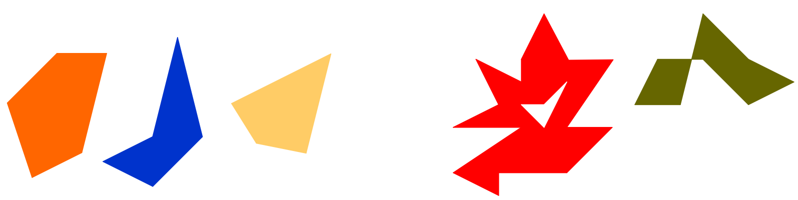
Pode-se fazer algumas variações deste jogo. Se o conjunto contém exatamente quatro números com um dígito, o alvo é o número 24 e se cada um dos quatro números tem de ser usado uma e uma só vez, está-se perante o famoso jogo do 24.

3.2 Teorema de Pick

A determinação da área de figuras geométricas convencionais resulta, na maior parte das vezes, da aplicação de uma fórmula que depende da figura em estudo. Em termos escolares, começa-se por aplicar essas fórmulas em situações concretas - como por exemplo na determinação da área de polígonos (tais como triângulos, quadrados, trapézios, losangos, pentágonos e hexágonos regulares) e de círculos - para mais tarde serem aplicadas em figuras que resultam da decomposição de uma dada figura. Por exemplo, como determinar a área de uma dada região a partir de um mapa? A demarcação dessa região no mapa nem sempre faz com que as suas dimensões sejam bem definidas (regulares) ou que deem origem a formas de polígonos conhecidas. Este tipo de atividades é relevante no ensino de alguns tópicos na sala de aula. Como calcular essas áreas? As atividades na sala de aula devem encaminhar os alunos a desenvolver a capacidade de conectar as experiências que realizam com a resolução de situações com que são confrontados na sua vida diária. Uma das atividades que os alunos frequentemente são confrontados no seu quotidiano é, por exemplo, a determinação de áreas de terrenos e de divisões de uma casa. Porém, nem sempre a determinação da área de alguns polígonos resulta da aplicação direta das fórmulas de áreas de figuras estudadas, como é exemplo o cálculo da área do seguinte polígono:



A representação da figura em papel quadriculado permite ter como referência a área de cada quadrado como 1 u.a. Uma estratégia de resolução passa por decompor o polígono em polígonos conhecidos (triângulos, quadrados, retângulos e trapézios) e calcular a área de cada um deles para obter a área pretendida. Atendendo à configuração da figura, nem os polígonos que se obtêm permitem a aplicação direta da respetiva fórmula de determinação da sua área, como se verifica com os polígonos designados por **I** e **II**. Como fazer? Há um resultado que permite o cálculo da área de polígonos simples. Um polígono designa-se **simples** quando não tem nenhum 'buraco' no seu interior ou se os seus lados não se cruzam.



Exemplos de polígonos simples e de polígonos não simples

O resultado passa pela contagem de pontos interiores e fronteiros do polígono, quando este é desenhado com os vértices assentes em pontos de um geoplano, e foi descoberto pelo matemático austríaco Georg Alexandre Pick (1859-1943), que o apresentou em 1899 num artigo sobre geometria reticular. O resultado, hoje em dia designado por **Teorema de Pick**, estabelece que a área de polígonos simples com p_f pontos fronteiros e p_i pontos interiores é dada pela expressão

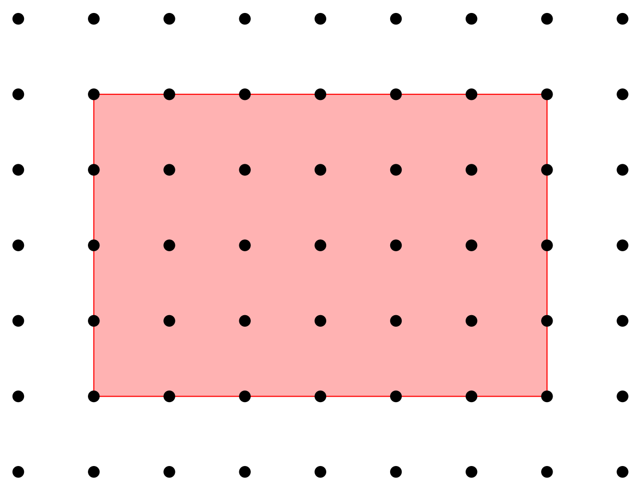
$$\frac{p_f}{2} + p_i - 1.$$

3.2.1 Uma prova do Teorema de Pick

Para provar o teorema de Pick recorre-se a polígonos mais simples, o retângulo e o triângulo, uma vez que os polígonos convexos podem ser decompostos por estes dois polígonos.

- **Retângulo**

Considera-se um retângulo na posição paralela à margem inferior de uma folha de papel e cujos vértices são valores inteiros em relação à unidade considerada no reticulado, como se mostra na figura seguinte:



A área deste retângulo de comprimento 6 e largura 4 é 24 u.a. (6×4). Que relação tem este valor com o número de pontos fronteiros (p_f) e interiores (p_i) do retângulo?

Por contagem, verifica-se que $p_f = 20$ e $p_i = 15$ e

$$\frac{p_f}{2} + p_i - 1 = 10 + 15 - 1 = 24.$$

Em abstrato, se pensarmos que o comprimento do retângulo mede c u.c. e a largura mede l u.c., o número de pontos fronteiros é

$$p_f = 2c + 2l.$$

O número de pontos interiores é

$$p_i = (c-1)(l-1).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{p_f}{2} + p_i - 1 &= \frac{2c+2l}{2} + (c-1)(l-1) - 1\\ &= c + l + c\times l - c - l + 1 - 1\\ &= c\times l,\end{aligned}$$

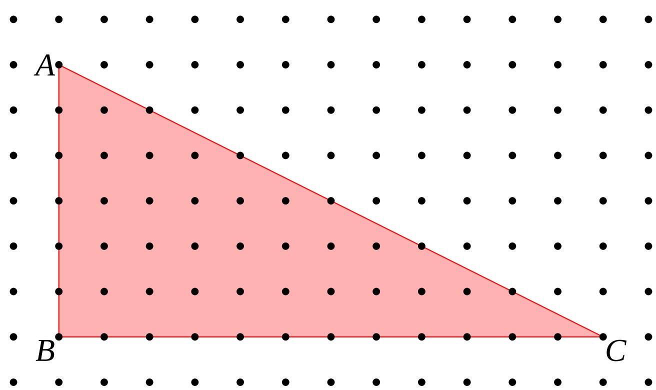
o que prova o resultado.

- **Triângulo**

A dedução do resultado de Pick num triângulo leva a considerar três situações: (i) triângulo retângulo com os catetos na vertical e na horizontal do reticulado; (ii) triângulo com apenas um dos lados na horizontal (ou vertical) no reticulado; e (iii) triângulo cujos lados não estão posicionados nem na horizontal nem na vertical do reticulado:

1. **Triângulo retângulo com os catetos na vertical e na horizontal do reticulado**

Considere-se o triângulo $[ABC]$, retângulo em B, representado na seguinte figura:



A área deste triângulo é de 36 u.a. $(= \frac{12\times 6}{2})$. Por contagem, verificamos que $p_f = 24$ e que $p_i = 25$. Alicando a fórmula de Pick, obtemos

$$\frac{p_f}{2} + p_i - 1 = 12 + 25 - 1 = 36.$$

Supondo agora que a base do triângulo mede b u.c. e a sua altura mede a u.c., podemos concluir que o número de pontos fronteiros sobre a hipotenusa do triângulo é

$$h = \text{m.d.c.}\,(b,a) + 1.$$

Assim,

$$p_f = b + a + h - 1$$

e

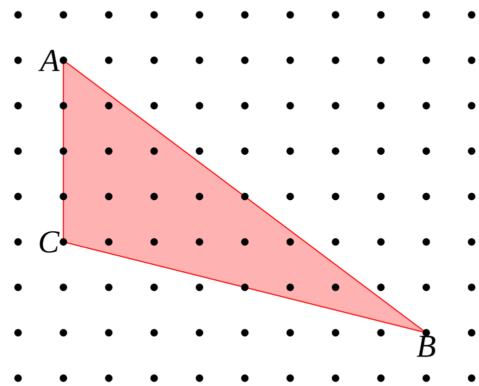
$$pi = \frac{(b-1)(a-1)-(h-2)}{2}.$$

Logo, substituindo na fórmula de Pick, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{p_f}{2} + p_i - 1 &= \frac{b+a+h-1}{2} + \frac{(b-1)(a-1)-(h-2)}{2} - 1 \\ &= \frac{b+a+h-1+ab-a-b+1-h+2-2}{2} = \frac{ab}{2}. \end{aligned}$$

2. **Triângulo com apenas um dos lados na horizontal (ou vertical) no reticulado**

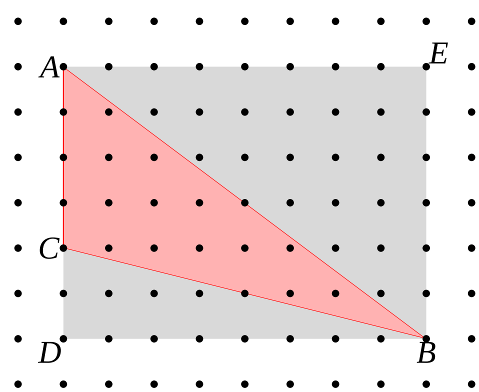
Considere-se agora o triângulo $[ABC]$ representado na figura:



A área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{4\times 8}{2} = 16$ u.a. O número de pontos fronteiros deste triângulo é $p_f = 8$ e o seu número de pontos interiores é $p_i = 13$, pelo que $\frac{p_f}{2} + p_i - 1 = 4 + 13 - 1 = 16$, o que confirma o resultado de Pick.

Suponhamos agora que $\overline{AC} = b$ e que a altura do triângulo em relação a base $[AC]$ é c.

Para verificar o teorema de Pick neste tipo de triângulos, constrói-se o retângulo $[DBEA]$ em torno do triângulo, como se apresenta na seguinte figura:



Sejam $\overline{DC} = l - b$ e h_1 e h_2 o número de pontos fronteiros do triângulo $[ABC]$ sobre os lados $[AB]$ e $[CB]$, respetivamente. Considerando o triângulo retângulo $[EBA]$, temos que

$$h_1 = \text{m.d.c.}(c, l) + 1$$

e, considerando o triângulo retângulo $[BCD]$, temos que

$$h_2 = \text{m.d.c.}(c, l - b) + 1.$$

Assim, o número de pontos fronteiros do triângulo $[ABC]$ é

$$p_f = b + h_1 + h_2 - 2.$$

O número de pontos interiores do triângulo retângulo $[EBA]$ é

$$p_i = \frac{(l-1)(c-1)-(h_1-2)}{2}$$

e o número de pontos interiores do triângulo retângulo $[BCD]$ é

$$p_i = \frac{(l-b-1)(c-1)-(h_2-2)}{2}.$$

Relacionando estes dois números com o número de pontos interiores do triângulo $[ABC]$, podemos concluir que este número é

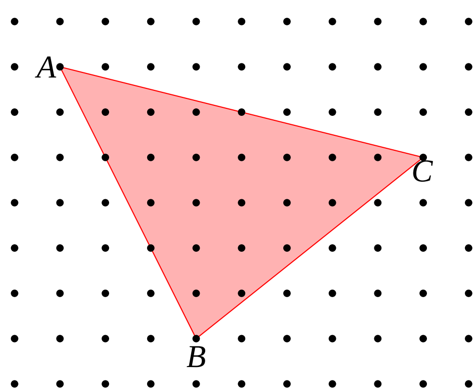
$$\begin{aligned} p_i &= \frac{(l-1)(c-1)-(h_1-2)}{2} - \frac{(l-b-1)(c-1)-(h_2-2)}{2} - h_2 + 2 \\ &= \frac{cb-b-h_1-h_2+4}{2}. \end{aligned}$$

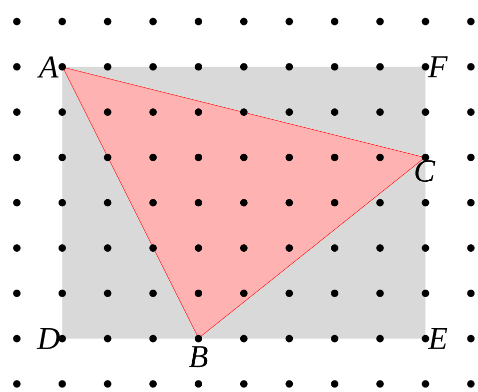
Logo,

$$\begin{aligned} \frac{p_f}{2} + p_i - 1 &= \frac{b+h_1+h_2-2}{2} + \frac{cb-b-h_1-h_2+4}{2} - 1 \\ &= \frac{bc}{2} \end{aligned}$$

3. **Triângulo cujos lados não estão posicionados nem na horizontal nem na vertical do reticulado**

Considere-se um triângulo $[ABC]$, formado por lados que não incidem sob a vertical ou a horizontal do plano reticulado. Usando a estratégia anterior, este triângulo pode ser contornado pelo retângulo $[ADEF]$:





Atendendo às medidas específicas do triângulo apresentado, podemos afirmar que a sua área pode ser obtida subtraindo à área do retângulo as áreas dos três triângulos retângulos. Assim:

$$A_{[ABC]} = 8 \times 6 - \frac{6 \times 3}{2} - \frac{5 \times 4}{2} - \frac{8 \times 2}{2} = 21 \text{ u.a.}$$

O número de pontos fronteiros do triângulo $[ABC]$ é $p_f = 6$ e o seu número de pontos interiores é $p_i = 19$, o que confirma a fórmula de Pick, pois $\frac{6}{2} + 19 - 1 = 21$.

Suponhamos que $\overline{AD} = l$ u.c., que $\overline{AF} = c$ u.c., que $\overline{BE} = a$ u.c. e que $\overline{EC} = b$ u.c. Sejam h_1, h_2 e h_3 o número de pontos do reticulado sobre os segmentos $[AB]$, $[BC]$ e $[CA]$, respetivamente.

Então, o número de pontos fronteiros do triângulo $[ABC]$ é

$$p_f = h_1 + h_2 + h_3 - 3$$

e o número de pontos interiores do mesmo triângulo é

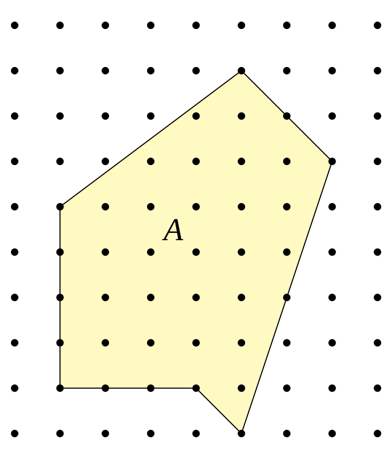
$$\begin{aligned} p_i &= (c-1)(l-1) - \frac{1}{2}[(l-1)(c-a-1) - (h_1 - 2)] - \frac{1}{2}[(a-1)(b-1) - (h_2 - 2)] \\ &\qquad -\frac{1}{2}[(c-1)(l-b-1) - (h3-2)] - p_f + 3 \\ &= \frac{1}{2}(al - ab + cb + 5 - h_1 - h_2 - h_3) \end{aligned}$$

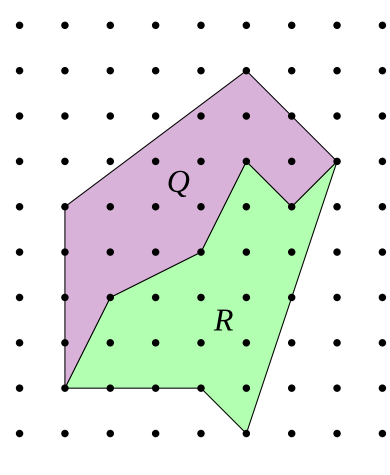
e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{p_f}{2} - p_i + 1 &= \frac{h_1 + h_2 + h_3 - 3}{2} + \frac{1}{2}(al - ab + cb + 5 - h_1 - h_2 - h_3) - 1 \\ &= \frac{1}{2}(al - ab + cb) = \frac{2cl - c(l-b) - l(c-a) - ab}{2} \\ &= cl - \frac{c(l-b)}{2} - \frac{l(c-a)}{2} - \frac{ab}{2} \end{aligned}$$

dá-nos a área do triângulo $[ABC]$.

- Como o teorema de Pick é válido para qualquer retângulo e triângulo, então também é válido para qualquer polígono, uma vez que todos os polígonos podem ser decompostos em triângulos e retângulos. Além disso, se um polígono simples se decompõe em dois polígonos simples, a fórmula de Pick é compatível com a soma. Vejamos o seguinte exemplo:





Queremos determinar a área do polígono A da figura, sabendo as áreas dos polígonos Q e R.

Designemos os pontos fronteiros dos polígonos A, Q e R por p_{f_A}, p_{f_Q} e p_{f_R}, respetivamente, e os pontos interiores de A, Q e R por p_{i_A}, p_{i_Q} e p_{i_R}, respetivamente. Queremos provar a igualdade

$$\frac{p_{f_A}}{2} + p_{i_A} - 1 = \left(\frac{p_{f_Q}}{2} + p_{i_Q} - 1\right) + \left(\frac{p_{f_R}}{2} + p_{i_R} - 1\right)$$

e, deste modo, concluimos que, sendo a fórmula de Pick válida para os polígonos Q e R, também o é para o polígono A.

Depois de justapor os dois polígonos Q e R, os pontos do reticulado situados sobre as arestas comuns dos dois polígonos tornam-se os pontos interiores do polígono A, exceto dois deles, que se situam nos extremos que continuam a ser pontos fronteiros deste polígono. Seja k o número de pontos de contacto de Q e R, que, após justaposição, se tornam pontos interiores de A. Então,

$$p_{i_A} = p_{i_Q} + p_{i_R} + k.$$

O número de pontos fronteiros de A é dado por:

$$p_{f_A} = (p_{f_Q} - k) + (p_{f_R} - k) - 2,$$

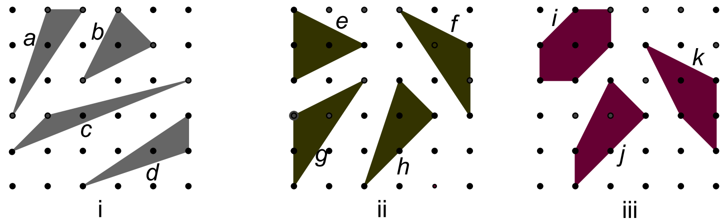
pelo que

$$\begin{aligned}
\frac{p_{f_A}}{2} + p_{i_A} - 1 &= \frac{(p_{f_Q} - k) + (p_{f_R} - k) - 2}{2} + p_{i_Q} + p_{i_R} + k - 1 \\
&= \frac{p_{f_Q} + p_{f_R}}{2} - k - 1 + p_{i_Q} + p_{i_R} + k - 1 \\
&= \left(\frac{p_{f_Q}}{2} + p_{i_Q} - 1\right) + \left(\frac{p_{f_R}}{2} + p_{i_R} - 1\right)
\end{aligned}$$

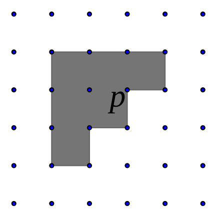
3.2.2 Atividades

Conclui-se esta secção com uma listagem de algumas tarefas que os alunos podem desenvolver na sala de aula:

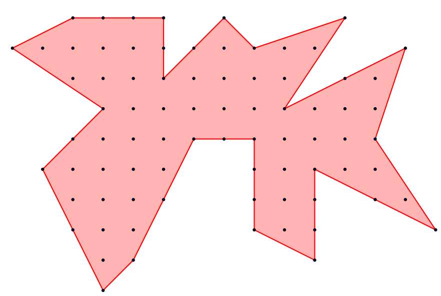
1. Considera os seguintes polígonos e determina as respetivas áreas:



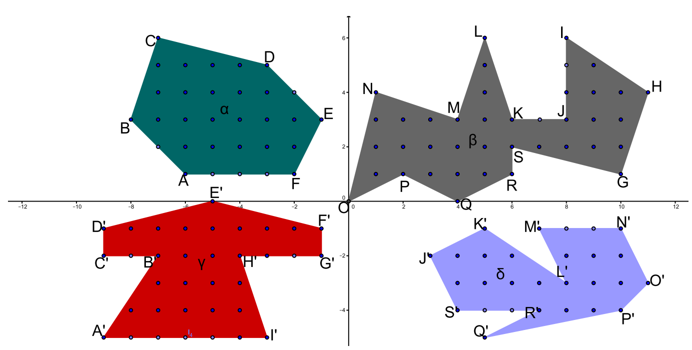
2. Na figura seguinte, o polígono p tem 12 pontos fronteiros e tem um ponto interior. Determinar os polígonos com 12 pontos fronteiros com $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$ pontos interiores. Existe algum limite de pontos interiores para um polígono com 12 pontos fronteiros? Calcula as áreas desses polígonos e justifica se existe alguma relação com o polígono p.



3. Calcula a área do seguinte polígono recorrendo ao teorema de Pick:



4. Determina as coordenadas dos vértices de cada um dos polígonos α, β, γ e δ e a respetiva área:



3.3 Atividades com o *GeoGebra*

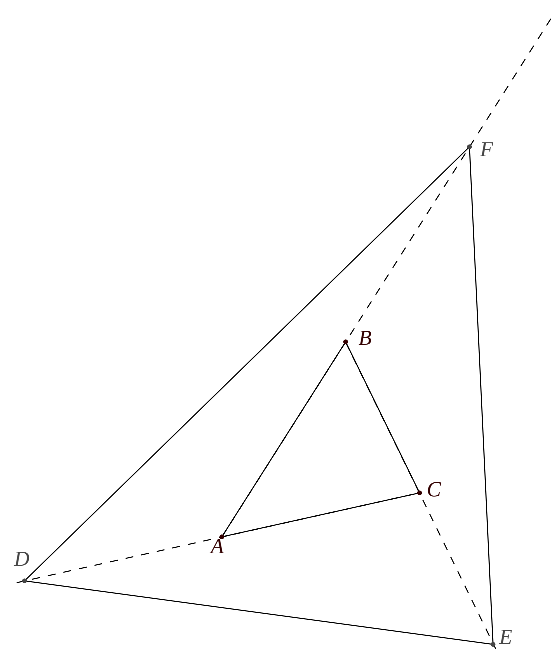
O *GeoGebra* é um software de matemática dinâmico que junta geometria, álgebra e cálculo. Foi criado e é desenvolvido para aprender e ensinar matemática nas escolas por Markus Hohenwarter e uma equipa internacional de programadores.

O facto de se usar uma ferramenta de trabalho diferente pode atribuir um carácter recreativo a uma aula, tornando-se assim mais apelativo para os alunos. De seguida, apresentam-se dois resultados da geometria plana e como podem ser trabalhados recorrendo ao *GeoGebra*.

3.3.1 Triângulo duplicado

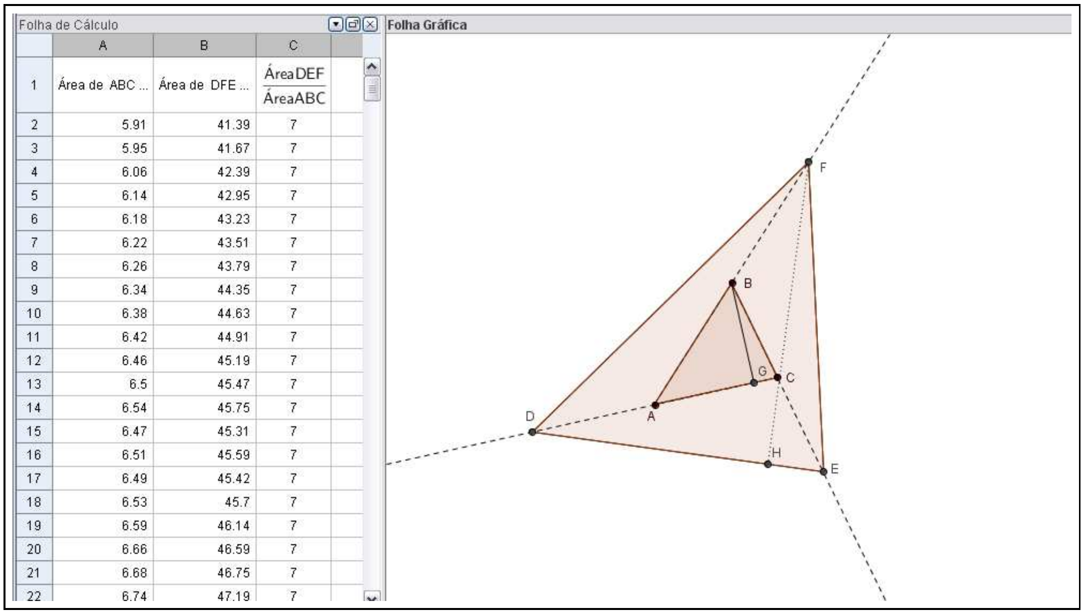
Considera um triângulo qualquer $[ABC]$. Constrói um novo triângulo $[FDE]$, prolongando os lados de $[ABC]$, como mostra a figura, sabendo que:

$$\overline{FA} = 2\overline{BA}, \qquad \overline{EB} = 2\overline{CB}, \qquad \overline{DC} = 2\overline{AC}.$$



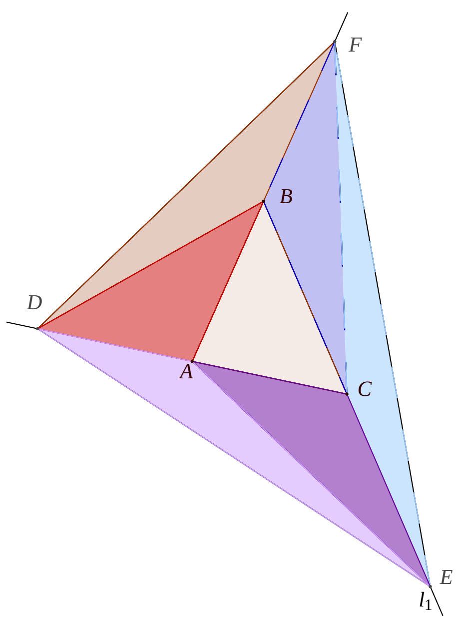
Que relação há entre as áreas dos triângulos $[FDE]$ e $[ABC]$? Prova essa relação.

Recorrendo ao software de geometria dinâmica *GeoGebra*, conjetura-se que, quaisquer que sejam as medidas do triângulo de partida, a área do triângulo $[DEF]$ é sete vezes a área do triângulo $[ABC]$, como informam os dados recolhidos com o *GeoGebra* apresentados na seguinte figura:



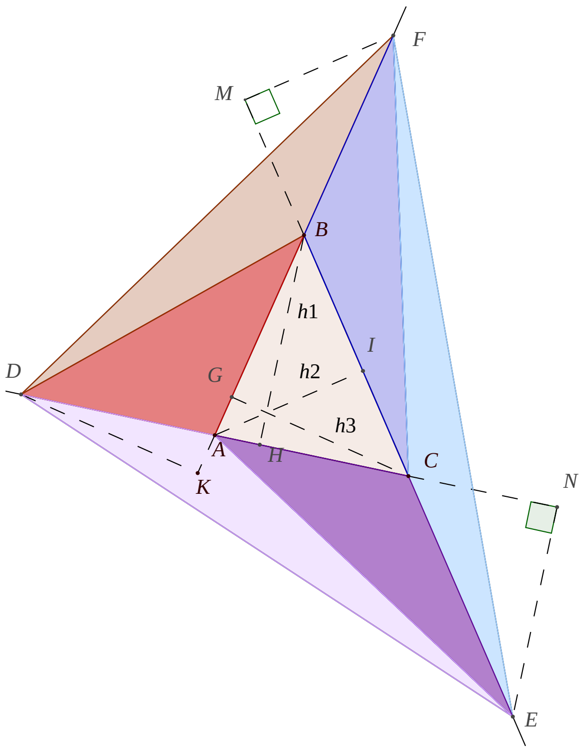
	A	B	C
1	Área de ABC ...	Área de DFE ...	$\frac{\text{Área DEF}}{\text{Área ABC}}$
2	5.91	41.39	7
3	5.95	41.67	7
4	6.06	42.39	7
5	6.14	42.95	7
6	6.18	43.23	7
7	6.22	43.51	7
8	6.26	43.79	7
9	6.34	44.35	7
10	6.38	44.63	7
11	6.42	44.91	7
12	6.46	45.19	7
13	6.5	45.47	7
14	6.54	45.75	7
15	6.47	45.31	7
16	6.51	45.59	7
17	6.49	45.42	7
18	6.53	45.7	7
19	6.59	46.14	7
20	6.66	46.59	7
21	6.68	46.75	7
22	6.74	47.19	7

Para se perceber a obtenção deste resultado, decompõe-se o triângulo $[DEF]$ a partir dos vértices do triângulo $[ABC]$ da seguinte forma:



Área de ABC = 14.8
Área de DBA = 14.8
Área de FBC = 14.8
Área de FCE = 14.8
Área de ACE = 14.8
Área de DAE = 14.8
Área de FBD = 14.8

O triângulo $[DEF]$ é assim decomposto em sete triângulos equivalentes. Os valores recolhidos na folha de cálculo que verificam a conjetura entre as áreas dos triângulos $[DEF]$ e $[ABC]$ são comprovados pela razão entre a soma das áreas dos triângulos que decompõem o triângulo $[DEF]$ e a área do triângulo $[ABC]$. Para provar esta relação, determinam-se as áreas de cada um dos triângulos, considerando $h1$, $h2$ e $h3$ as medidas das alturas do triângulo $[ABC]$ relativamente a cada uma das suas bases.



As áreas dos sete triângulos são:

- Área do triângulo $[ABC]$:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times h1}{2} = \frac{\overline{BC} \times h2}{2} = \frac{\overline{AB} \times h3}{2}.$$

- Área do triângulo $[ABD]$:

$$A_{[ABD]} = \frac{\overline{AC} \times h1}{2}.$$

  Na determinação da área deste triângulo, considera-se a base $[AD]$ que é congruente com $[AC]$.

- Área do triângulo $[BDF]$:

$$A_{[BDF]} = \frac{\overline{AB} \times h3}{2}.$$

  Na determinação da área deste triângulo, considera-se a base $[BF]$ que é congruente com $[AB]$. A altura do triângulo em relação a esta base é $[DK]$. A construção desta altura originou o triângulo $[ADK]$ que é geometricamente igual ao triângulo $[ACG]$, visto que têm um lado geometricamente igual ($\overline{AD} = \overline{AC}$) e os ângulos adjacentes as estes lados em cada um dos triângulos são geometricamente iguais ($C\hat{A}G = D\hat{A}K$, uma vez que são verticalmente opostos; e $A\hat{D}K = A\hat{C}G$ porque os ângulos $\angle DKA$ e $\angle CGA$ são retos). Então $\overline{DK} = h3$.

- Área do triângulo $[BCF]$:

$$A_{[BCF]} = \frac{\overline{AB} \times h3}{2}.$$

Na determinação da área deste triângulo, considera-se a base $[BF]$ que é congruente com $[AB]$.

- Área do triângulo $[CEF]$:

$$A_{[CEF]} = \frac{\overline{BC} \times h2}{2}.$$

Na determinação da área deste triângulo considerou-se a base $[CE]$ que é congruente com $[BC]$. A altura do triângulo em relação a esta base é $[FM]$. A construção desta altura originou o triângulo $[BMF]$ que é geometricamente igual ao triângulo $[AIB]$, visto que têm um lado geometricamente igual ($\overline{AB} = \overline{BF}$) e os ângulos adjacentes a estes lados em cada um dos triângulos são geometricamente iguais ($A\hat{B}I = F\hat{B}M$, já que estes ângulos são verticalmente opostos; e $I\hat{A}B = B\hat{F}M$ porque os ângulos $\angle AIB$ e $\angle BMF$ são retos). Então $\overline{FM} = h2$.

- Área do triângulo $[ACE]$:

$$A_{[ACE]} = \frac{\overline{BC} \times h2}{2}.$$

Na determinação da área deste triângulo considerou-se a base $[CE]$ que é congruente com $[BC]$.

- Área do triângulo $[ADE]$:

$$A_{[ADE]} = \frac{\overline{AC} \times h1}{2}.$$

Na determinação da área deste triângulo considerou-se a base $[AD]$ que é congruente com $[AC]$. A altura do triângulo em relação a esta base é $[EN]$. A construção desta altura originou o triângulo $[ECN]$ que é geometricamente igual ao triângulo $[BCH]$, visto que os dois triângulos têm um lado geometricamente igual ($\overline{DA} = \overline{AC}$ e os ângulos adjacentes as estes lados em cada um dos triângulos são geometricamente iguais ($B\hat{C}A = N\hat{C}E$ pois são ângulos verticalmente opostos; e $H\hat{B}C = N\hat{E}C$ porque os ângulos $\angle BHC$ e $\angle CNE$ são retos). Então $\overline{EN} = h1$.

Estamos então em condições de concluir que, como as áreas são todas iguais,

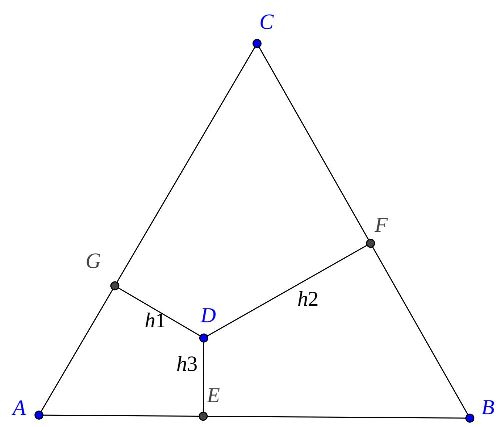
$$\begin{aligned} A_{[DEF]} &= A_{[ABC]} + A_{[ABD]} + A_{[BDF]} + A_{[BCF]} + A_{[CEF]} + A_{[ACE]} + A_{[ADE]} \\ &= 7A_{[ABC]}. \end{aligned}$$

Prova-se, assim, que a área do triângulo $[DEF]$, formado a partir do triângulo $[ABC]$ com as condições sugeridas, é sete vezes a área do triângulo $[ABC]$.

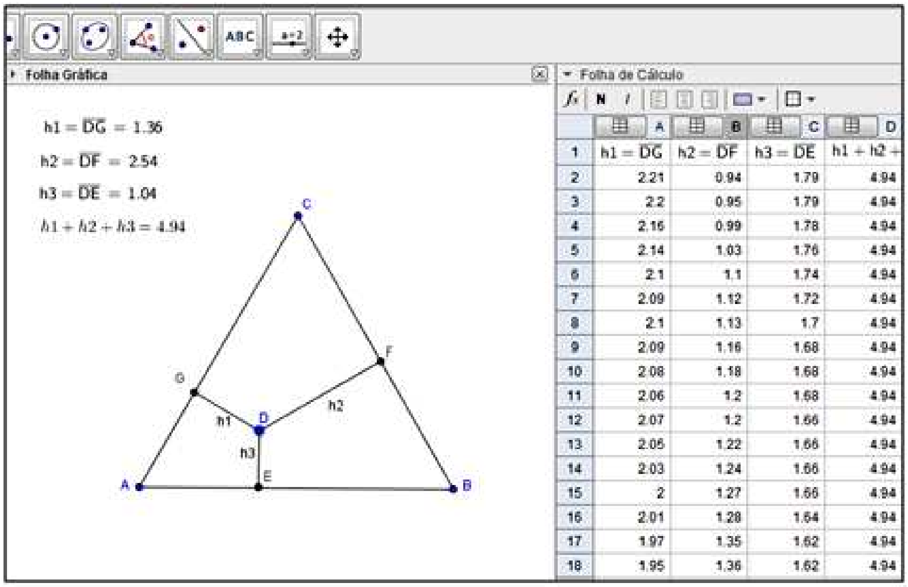
3.3.2 Triângulo equilátero

Determina a relação entre a soma das distâncias de um ponto qualquer do interior de um triângulo equilátero aos seus três lados e a altura do triângulo.

Considere-se um triângulo equilátero $[ABC]$, de altura h u.c., e um ponto D no seu interior. Sejam $h1$, $h2$ e $h3$ as distâncias desse ponto a cada um dos lados do triângulo (medidas dos segmentos de reta perpendiculares a esses lados e com um dos extremos em D).

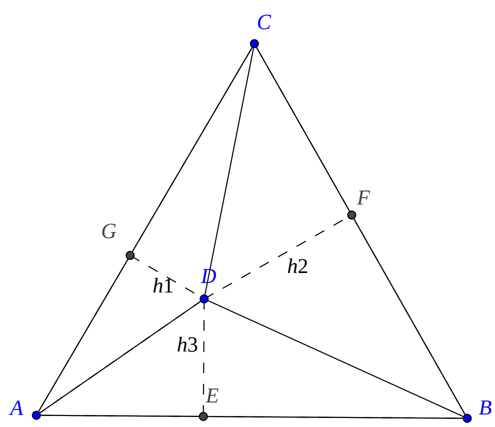


Com recurso ao *GeoGebra*, determinaram-se as distâncias do ponto interior (D) do triângulo $[ABC]$ a cada um dos seus lados. Movendo esse ponto, verifica-se que essa soma é constante, tal como comprovam os valores recolhidos numa folha de cálculo relativos à soma de tais distâncias:



	A	B	C	D
1	h1 = DG	h2 = DF	h3 = DE	h1 + h2 +
2	2.21	0.94	1.79	4.94
3	2.2	0.95	1.79	4.94
4	2.16	0.99	1.78	4.94
5	2.14	1.03	1.76	4.94
6	2.1	1.1	1.74	4.94
7	2.09	1.12	1.72	4.94
8	2.1	1.13	1.7	4.94
9	2.09	1.16	1.68	4.94
10	2.08	1.18	1.68	4.94
11	2.06	1.2	1.68	4.94
12	2.07	1.2	1.66	4.94
13	2.05	1.22	1.66	4.94
14	2.03	1.24	1.66	4.94
15	2	1.27	1.66	4.94
16	2.01	1.28	1.64	4.94
17	1.97	1.35	1.62	4.94
18	1.95	1.36	1.62	4.94

Para provar esta conjetura, decompõe-se o triângulo $[ABC]$ em três triângulos ($[ADC]$, $[ADB]$ e $[BDC]$). Cada um destes triângulos tem, em relação aos respetivos lados do triângulo $[ABC]$, altura $h1$, $h2$ e $h3$ u.c., respetivamente.



Determinando as áreas dos quatro triângulos verifica-se que:

$$\frac{\overline{AB}\times h}{2}=\frac{\overline{AB}\times h3}{2}+\frac{\overline{BC}\times h2}{2}+\frac{\overline{AC}\times h1}{2}.$$

Como o triângulo $[ABC]$ é equilátero, $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}$. Então,

$$\frac{\overline{AB}\times h}{2}=\frac{\overline{AB}\times(h1+h2+h3)}{2}$$

ou seja,

$$h=h1+h2+h3$$

e, portanto, podemos concluir que a soma das três distâncias é constante (e igual à medida da altura do triângulo).

3.4 O jogo de isometrias

Em contextos informais, os alunos criam noções de como se podem mover determinadas figuras. No contexto escolar, formalizam alguns desses movimentos, tais como translações, reflexões e rotações. O estudo isolado de cada uma destas transformações geométricas compartimenta as suas características, o que, de alguma forma, poderá impedir o desenvolvimento da capacidade de visualização dos alunos sobre o que é invariante e o que varia. Atualmente, existem várias formas de promover esta capacidade, como por exemplo através de softwares de geometria dinâmica e de jogos. Entre os jogos, o jogo das isometrias potencia o conhecimento sobre as noções que caracterizam as reflexões, rotações, translações e as composições destas transformações. O jogo das isometrias é constituído por uma folha quadriculada e por uma peça triangular. Na folha de papel representam-se:

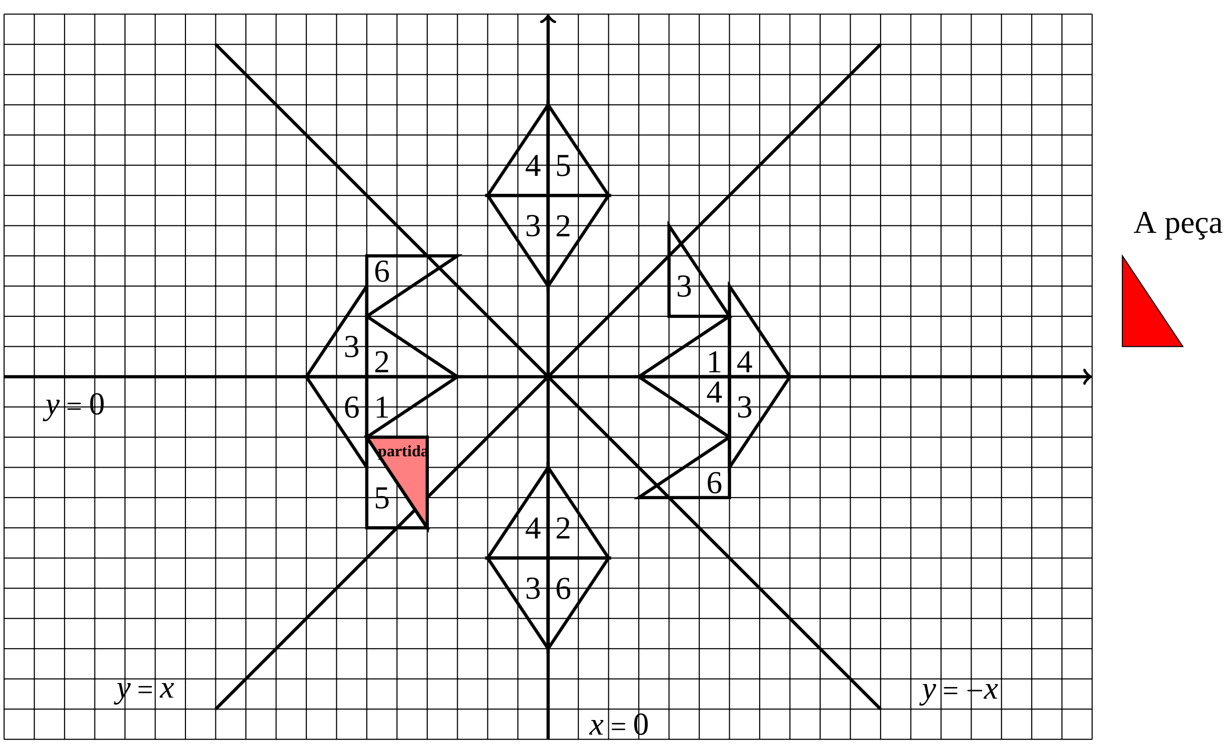
(i) o sistema de eixos cartesianos;

(ii) as bissetrizes dos quadrantes deste sistema;

(iii) as retas que caraterizam os eixos cartesianos;

(iv) figuras congruentes com a peça triangular do jogo; e

(v) cartas do jogo.



Os números contemplados nas figuras traduzem a pontuação que se obtém quando a peça do jogo se posiciona na figura com essa pontuação através do(s) movimento(s) descrito(s) nas cartas do jogo.

As cartas do jogo são 42. Cada uma delas descreve um tipo de transformação que é utilizada pelos jogadores para movimentar a peça triangular do jogo. As cartas do jogo são agrupadas da seguinte forma:

- Cartas que indicam diretamente uma das transformações de Simetria ou de Rotação, por exemplo um 'eixo de simetria: $y = x$ ou $y = 0$ ou uma 'rotação de 90° com centro na origem', como ilustram as seguintes cartas:

SIMETRIA	ROTAÇÃO
Eixo de simetria	Centro: Origem
$y = 0$	Amplit. ângulo: $-90°$

- Cartas designadas por Jokers, que permitem ao jogador efetuar livremente a transformação apresentada na carta. Significa isso que é o jogador quem designa as características da transformação que lhe são mais convenientes no jogo, como mostra as seguintes cartas:

Joker	Joker
ROTAÇÃO	TRANSLAÇÃO
Centro:	
Amplit. ângulo:	Vetor: (,)

As cartas do jogo contemplam as seguintes situações:

Transformações			**Número de cartas**
Rotação	Centro	Amplitude de rotação	
	Origem	+90°	3
		−90°	3
		180°	3
	Vértice do ângulo reto do triângulo	+90°	2
		−90°	2
		180°	2
Simetria	Eixo de Simetria		
	$x = 0$		3
	$y = 0$		3
	$y = x$		3
	$y = -x$		3
Jokers	Translação: vetor		7
	Rotação: centro e amplitude		4
	Simetria: eixo de simetria		4

Como em qualquer jogo, o jogo das isometrias também tem um conjunto de regras:

1. No jogo podem jogar dois, três ou quatro jogadores.

2. Distribuem-se cinco cartas para cada jogador e as restantes são colocadas em cima da mesa com a face do jogo voltada para baixo.

3. Determinar quem começa o jogo, por exemplo através da obtenção da face com mais pontos de um dado. O próximo jogador é o que estiver à direita de quem começou.

4. Na sua vez, um jogador tenta mover a peça triangular da posição de onde foi deixada pelo jogador anterior para outra posição que representa um dos triângulos contemplados no sistema de eixos cartesianos. Os movimentos permitidos correspondem aos que estão presentes nas cartas que o jogador tem naquele momento. Esses movimentos traduzem uma transformação designada numa carta ou uma combinação de transformações contempladas em várias cartas. No caso de uma combinação de cartas, as posições intermédias da peça triangular não precisam de corresponder aos triângulos marcados no sistema de eixos cartesianos.

5. Depois de cada jogada, as cartas são colocadas na mesa, com a face voltada para cima, e o jogador retira uma carta do baralho, por forma a ter 5 cartas.

6. A pontuação de cada jogada corresponde ao número de pontos marcado no triângulo onde ’cai’ a peça triangular segundo o(s) movimento(s) resultante da jogada.

7. O objetivo do jogo é obter o maior número de pontos.

8. Se um jogador não puder fazer uma jogada ou se preferir não mover a peça triangular pode lançar fora uma carta e pegar outra do baralho.

9. Quando um jogador usar uma carta de joker deve referir as características da carta que lhe permite efetuar o movimento antes de mover a peça (por exemplo, eixo de simetria).

10. Se um jogador acreditar que o movimento efetuado por outro jogador não corresponde à carta ou às cartas usadas pode questioná-lo. Se estiver certo, o triângulo é devolvido à sua posição anterior e o jogador em falta falha a sua vez.

11. O jogo termina quando o baralho das cartas se esgota e ninguém pode efetuar qualquer movimento. Alternativamente, o jogo pode continuar com as cartas que foram sendo depositadas na mesa, que para esse efeito são baralhadas e voltadas para baixo.

O jogo pode ser desenvolvido com o grau de complexidade que se desejar. Os jogadores podem ser desafiados a recorrer a combinações de transformações que lhes permitam mover a peça triangular de modo a obter a máxima pontuação possível.

Uma situação de Jogo

Na sua vez de jogar, um jogador tem as seguintes cartas:

ROTAÇÃO Centro: Origem Amplit. ângulo: $-90°$	SIMETRIA Eixo de simetria $x=0$	SIMETRIA Eixo de simetria $y=-x$
Joker TRANSLAÇÃO vetor:(,)	ROTAÇÃO Centro: vértice do ângulo reto do triângulo Amplit. ângulo: 180°	

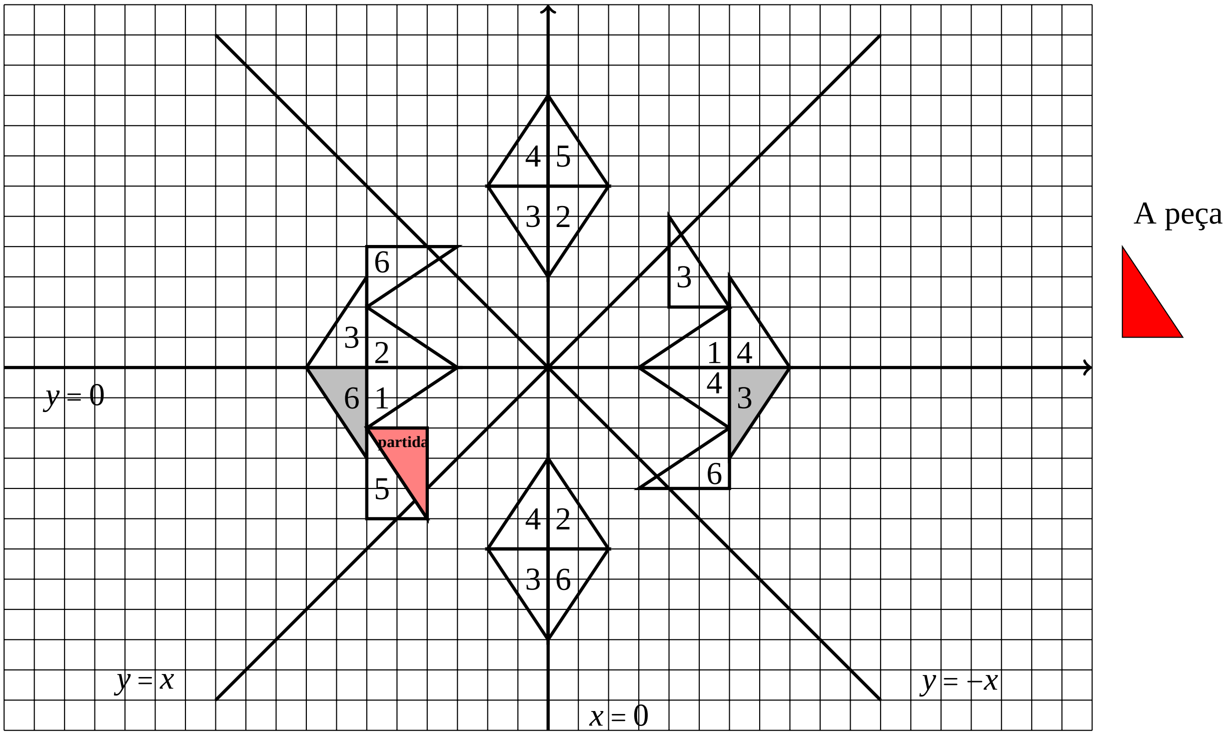
Uma das possibilidades de jogo é:

1. a partir da figura de partida, com a carta Joker de translação movimenta a peça triangular segundo o vetor de coordenadas $(-2,2)$, o que lhe permite obter 6 pontos;

2. de seguida, com a carta de simetria por reflexão, movimenta a peça triangular segundo o eixo de simetria $x=0$, obtendo assim 3 pontos.

Com estes movimentos, o jogador obtém 9 pontos. As cartas que foram jogadas são deitadas fora e o jogador retira duas cartas do baralho, para ter 5 cartas, e espera a sua vez de jogar.

Os movimentos das jogadas estão representados pelos triângulos sombreados da seguinte figura:



As próximas jogadas do jogador em questão depende da posição da peça triangular deixada pelo jogador que lhe antecede e das cartas que tem na mão.

3.5 O jogo da reta numérica

A exploração do jogo das Isometrias incentivou-me a criar um jogo que seja concretizável na sala de aula. Dos diferentes tópicos abordados no ensino básico, os números é um dos tópicos que são transversais a todos os anos de escolaridade. Começa-se por desenvolver a capacidade dos alunos de conceber e operar com números naturais e inteiros. Posteriormente, no estudo dos números racionais muitos alunos revelam dificuldades de trabalhar com números fracionários.

O jogo que proponho tem por objetivo desenvolver a capacidade dos alunos de operar com expressões numéricas que integram números racionais, de comparar e de ordenar números racionais na reta. O jogo também se pode desenvolver para desafiar os alunos a trabalhar com outros números, como, por exemplo, os números irracionais.

O jogo é constituído por um baralho de 45 cartas, por uma reta numérica desenhada numa folha de cartolina, da qual se conhece a representação do ponto origem, e por um conjunto de regras, apresentadas de seguida. Cada uma das cartas apresenta uma expressão numérica, sobre a qual os alunos têm de determinar o seu valor para o representar na reta numérica. As expressões que estão inscritas nas cartas do jogo classificam-se em três níveis: (i) fácil; (ii) médio; e (iii) difícil. Nas expressões com nível fácil, o valor a determinar resulta somente da aplicação das operações elementares. Nas expressões com nível médio, para determinar o seu valor são necessárias algumas transformações, como, por exemplo, ter que reduzir frações ao mesmo denominador. As expressões de nível difícil contemplam várias operações e necessitam de algumas transformações. As cartas podem contemplar, por exemplo, as seguintes expressões:

- Nível fácil:

$-1-2$	-1×2	$-2+1$	$-6\div(-3)$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}$	$-0,5-1$	$-3+1,5$	$-1,5\times 2$

- Nível médio:

$-1-(-2)$	$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}+\frac{3}{8}$
$0,25-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}+0,125$	$-\frac{2}{5}\times\frac{3}{2}$	$0,2-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$
$0,1-0,25$	$\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}+(-\frac{3}{5})$	$0,5\div\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{4}\div(-\frac{5}{2}$
$-0,25\div(-\frac{1}{5})$	$\frac{1}{4}\times(-0,5)$	$3\frac{1}{3}+(-1,5)$		

- Nível difícil:

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}\div 2-\frac{1}{6}$
$2\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{5})$;	$-0,5\times(-3)+\frac{1}{4}$	$-0,75\times(-\frac{1}{2})+\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}\div(-0,5)+\frac{4}{5}$
$3\frac{2}{3}-2\frac{1}{5}+\frac{1}{4}$	$2+\frac{3}{4}-0,2$	$0,6+\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}$	$-3-(-1,5)\times 4$
$0,75\div 0,5-(-\frac{1}{5})$	$-1\frac{1}{5}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}$	$(-0,15+1,65)\div\frac{1}{2}$	$3\times 0,2+(-3)$
$0,8-(-\frac{1}{2})+\frac{2}{3}$			

As expressões surgem nas cartas como o seguinte exemplo:

$$0,75\div 0,5-(-\frac{1}{5})$$

Regras do jogo

1. Este é um jogo para cinco jogadores;

2. Para começar o jogo, os jogadores tiram uma carta à sorte do baralho. Quem obtiver um maior valor, joga primeiro. Segue-lhe o jogador da sua direita e assim sucessivamente.

3. Cada jogador recebe 5 cartas e o baralho restante fica colocado em cima da mesa voltado para baixo.

4. O jogo tem duas fases:

   (a) Na primeira fase, na sua vez, cada jogador calcula a expressão de uma das cartas que tem na mão e representa, na reta numérica, o ponto de abcissa igual ao valor calculado. De seguida, coloca a carta usada na mesa e retira uma carta do baralho. Deste modo, volta a ficar com 5 cartas na mão. Se o valor está corretamente calculado e o ponto for bem marcado na reta, o jogador recebe 2 pontos. Caso contrário, o jogador recebe -1 ponto.

   (b) A primeira fase do jogo termina quando se esgotam as cartas do baralho. No final da primeira fase, a pontuação parcial de cada jogador é igual à soma de todos os pontos (positivos e negativos) obtidos até esta fase.

   (c) Numa segunda fase, todos os jogadores calculam os valores representados pelas expressões das suas 5 cartas. Com esses cinco números determinam um novo número, usando uma e uma só vez cada uma das quatro operações básicas ($+$, $-$, $\times$, $\div$). É permitido o uso de parêntesis. A pontuação final é obtida somando este número à pontuação parcial do final da primeira fase.

5. Ganha o jogador que obtiver a pontuação final maior.

Sendo um jogo para cinco jogadores, depois de distribuídas as primeiras cartas, o baralho fica com 20 cartas, o que significa que cada jogador faz, na primeira fase, quatro jogadas. Assim, no final da primeira fase, a pontuação obtida é um número inteiro entre -4 e 8. As expressões numéricas sugeridas representam números racionais entre -3 e 3, pelo que, em muitos casos, pode ser obtido um valor superior a 12. Assim, no final da primeira fase do jogo, nenhum jogador pode dar o jogo como perdido ou como vencido. Todos os cálculos e representações na reta numérica devem ser validados pelos cinco jogadores.

Bibliografia

[1] Araújo, D. M. C. (2005), Um teorema sobre o tangram. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

[2] Berlekamp, E. R., Conway, J. H. & Guy, R. K. (2003), Winning ways for your mathematical plays - Volume 2, A. K. Peters, Lda.

[3] Bolt, B. (1982), Mathematical activities, Cambridge University Press.

[4] Bolt, B. (1987), Even more mathematical activities, Cambridge, Cambridge University Press.

[5] Bolt, B. (1992), Mathematical cavalcade, Cambridge, Cambridge University Press.

[6] Bolt, B. (1993), Mathematical Pandora's box, Cambridge, Cambridge University Press.

[7] Carvalho, A. & Santos, C. (2007), Colectânea de artigos - estratégias utilizadas nos jogos do 4º CNJM (36 exercícios), Associação LUDUS.

[8] Cascallana, M. T. (1988), Iniciación a la matemática. Materiais y recursos didácticos. Madrid: Santillana.

[9] Crilly, T. (2011), 50 Ideias de Matemática que precisa mesmo de saber, D. Quixote.

[10] Estrada, M. F. et al. (2000), História da Matemática, Universidade Aberta.

[11] Gardner, M. (1988), Time travel and other mathematical bewilderments, Freeman and Company.

[12] Guzman, M. (1990), Aventuras matemáticas, Lisboa: Gradiva.

[13] McGuire, G., Tugemann & Civario, G. (2012), There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem", *preprint* arXiv:1201.0749 (Janeiro 2012), 36 páginas.

[14] Mendes Martins, P. & Picado, J. (2012), Existe um Sudoku com 16 pistas? Boletim de Sociedade Portuguesa de Matemática, 66, 57-63.

[15] Ministério da Educação, (2007), Programa de Matemática do Ensino Básico, Lisboa: autor.

[16] Ministério da Educação de Timor Leste (2010), Programa de Matemático do Ensino Básico, Timor Leste.

[17] Moran, J. (1992), The wonders of Magic Squares, Random House.

[18] Neto, J. P. & Silva, J. N. (2004), Jogos matemáticos, jogos abstractos, Lisboa: Gradiva.

[19] Nogueira, J. E. (2011), Puzzles com História, Lisboa: Editora Prefácio.

[20] Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M. & Abrantes, P. (1997), Didáctica da Matemática. Lisboa: DES do ME.

[21] Santos, C, Neto, J. P. & Silva, J. N. (2007), A Teoria do Grupos + o Puzzle de 15, Público.

[22] Santos, C., Neto, J. P. & Silva, J. N. (2007), As Somas Nim + Jogo ouri, Público.

[23] Santos, C., Neto, J. P. & Silva, J. N. (2007), Os quadros Latinos + puzzle hexágono mágico, Público.

[24] Sigmaster, D. (1992), The unreasonable utility of recreation mathematics, London.

[25] Silva, E. S. (1994), O ”Ouri”Um jogo Cabo-verdiano e a sua prática em Portuga. Lisboa: APM

[26] Sinden, P. (2005), Sudoku: O jogo que está a conquistar o mundo. Lisboa: Editora Livros do Brasil.

[27] Slocum, J. (2008), Tangram: the world first puzzle graze, In E. Demaine, M. Demaine & T. Rodgers, A lifetime of puzzles, A.K. Peters Lda.

[28] Snape, C. & Scott, H. (1994), Enigmas matemáticos. Gradiva Júnior.

[29] Sobel, A. M. & Maletsky, E. M. (2002), Theaching Mathematics: A sourcebook of aids, and estrategies.

[30] Srinivasan, P. K. (1992), Mathematics and Magic Square, The Association of Mathematics Teachers of India.

[31] Werner Blum, W., Peter L. Galbraith, Hans-Wolfgang Henn & Mogens Niss (2007), Modelling and Aplications in mathematics Education, International commission mathematical intruction.