

Introdução à Teoria de Nós

Sónia Manuela Mendes Dias

Introdução à Teoria de Nós

*Dissertação do Mestrado em Matemática - área de especialização
em ensino apresentada para a obtenção do grau de Mestre*

Orientada por Doutora Lucía Fernández-Suárez

Departamento de Matemática
Universidade do Minho
Dezembro 2004

Resumo

Knots are more numerous than the stars; and equally mysterious and beautiful...

John Turner (1988)

A infinidade de nós distintos e as quase “*misteriosas*” aplicações que lhes foram e são atribuídas, fazem dos nós objectos de estudo científico. Neste trabalho dar-se-á a conhecer um pouco do estudo matemático de um vulgar entrelaçado de fio ou corda que é usado, desde sempre, pelo homem nas mais diversas actividades.

Um nó define-se matematicamente como o mergulho de uma circunferência no espaço tridimensional. Os métodos criados para estudar este objecto matemático foram-se desenvolvendo desde finais do século XIX, tendo sido obtidos, nas últimas décadas, resultados surpreendentes. Actualmente os nós são estudados em diversas áreas da matemática e têm aplicações em outras áreas científicas.

Sendo o conjunto dos nós um conjunto infinito, um dos seus “*mistérios*” está associado à sua classificação. A questão primordial da Teoria de Nós e que não está ainda totalmente solucionada, prende-se com o problema de reconhecer quando é que dois nós, aparentemente diferentes, são ou não iguais. Existem invariantes que permitem saber quando é que dois nós são distintos e alguns métodos que proporcionam a classificação de nós com propriedades muito particulares. Estes são os principais assuntos que abordaremos ao longo deste trabalho.

No primeiro capítulo são apresentadas noções básicas essenciais para o estudo da Teoria de Nós bem como os primeiros invariantes que permitiram fazer a distinção de alguns nós. Estes invariantes clássicos: tricolorabilidade; número de cruzamentos; número de desatamento são relevantes essencialmente pela sua primasia.

Em 1928, para tentar distinguir facilmente nós, Alexander associou a cada nó um polinómio. O polinómio de Alexander não resolveu completamente o problema da classificação (em 1934 aparecem nós diferentes com o mesmo polinómio de Alexander) mas introduziu uma técnica inovadora na área. Posteriormente, outros matemáticos (Conway, Jones, Kauffman,...) definiram, com outros métodos, polinómios associados a nós. O segundo capítulo deste trabalho é dedicado ao estudo de vários desses polinómios.

Por fim, e pelo facto de certos nós com propriedades específicas poderem ser univocamente classificados, o terceiro capítulo desta tese dedica-se ao estudo, mediante métodos topológicos, de um desses tipos de nós, os nós toroidais.

Abstract

Knots are more numerous than the stars; and equally mysterious and beautiful...

John Turner (1988)

The availability of an infinite number of different knots and the “*mysterious*” applications that have been and still are applied to them, make knots desirable for scientific research. In this work, mathematical tools will be applied to study common knots of string or rope, which have been used by mankind in the most diverse activities since ancient times.

In mathematical terms, a knot is defined as an embedding of a circumference in the tridimensional space. The required tools to study this mathematical object are being developed since the end of the XIX century, and surprising results have been obtained in the last few decades. Nowadays, knots are studied by different branches of the mathematical science and the results already obtained are being applied to other scientific areas.

Because knots are an infinite family, one of their “*mysteries*” is associated with how to tabulate them. The prime purpose of Knot Theory, which is not solved yet, is to understand when two knots looking to be the same are equal or not. There are, however, invariants that allow to differentiate between two knots, and some methods have been developed to tabulate knots with certain properties. This thesis will mainly address these issues.

In the first chapter, basic notions that are essential to the understanding of Knot Theory are presented, as well as the first invariants (classical invariants: tricolorability; crossing number; unknotting number) that allowed to differentiate between certain knots.

In 1928, in an attempt to easily tell knots apart, Alexander assigned to each knot to a polynomial. Alexander polynomial was not able to solve all problems in tabulation (in 1934, it was discovered that some distinct knots had the same Alexander polynomial) but introduced a new technique in the field. Following his footsteps, other mathematicians (Conway, Jones, Kauffman ...) defined, with different methods, polynomials associated to knots. The second chapter of this work is dedicated to the study of these various polynomials.

Finally, and because certain knots with particular properties are able to be unequivocally tabulated, the third chapter of this thesis addresses, using topological methods, one of those types of knots, the torus knots.

Meios Computacionais

Neste trabalho, as representações geométricas foram realizadas com o auxílio de dois programas: *MacromediaFreeHand MX* e *KnotPlot*.

O programa *MacromediaFreeHand MX* sendo um programa de desenho, foi utilizado para efectuar algumas das representações gráficas a duas dimensões, bem como para a maioria das representações presentes no capítulo 3.

O *KnotPlot* é um programa específico que permite visualizar e interagir com nós matemáticos. Este possui diversas potencialidades: um catálogo de nós e enlaces; construção e transformação de nós; propriedades topológicas. As funcionalidades do programa foram um auxiliar importante para a elaboração deste trabalho, essencialmente a nível das representações gráficas dos nós tridimensionais, assim como dos seus diagramas.

O programa *KnotPlot* (1995-2004) foi desenvolvido por Robert Glenn Scharein (Centre for Experimental and Constructive Mathematics, Simon Fraser University - Canada). O download deste software efectuou-se no site da internet: www.knotplot.com, em Junho 2004.

Conteúdo

Resumo	3
Abstract	5
Meios Computacionais	7
Lista de Figuras	14
1 Noções básicas de Teoria de Nós	15
1.1 Origens da Teoria de Nós	15
1.2 Conceitos básicos	16
1.2.1 Definição e representações do nó	16
1.2.2 Movimentos de Reidemeister	21
1.2.3 Nós orientados	23
1.2.4 Nós reflexivos	27
1.2.5 Nós primos e nós compostos	29
1.2.6 Enlaces	32
1.3 Invariantes clássicos dos nós e enlaces	36
1.3.1 Tricolorabilidade	36
1.3.2 Número de cruzamentos	43
1.3.3 Número de desatamento	45
2 Polinómios de nós e enlaces	51
2.1 Polinómio de Alexander	51
2.2 Operações “skein” e polinómio de Conway	57
2.2.1 Operações “skein”.	58
2.2.2 Polinómio de Conway	60
2.3 Polinómio de Jones	63
2.3.1 Definição e exemplos	63
2.3.2 Características do polinómio de Jones	66

2.4	Polinómio Homfly	75
2.5	Polinómio de Kauffman	77
2.5.1	Polinómio suporte	78
2.5.2	Polinómio suporte em nós e enlacs orientados	87
2.5.3	Características do polinómio de Kauffman	90
3	Nós Toroidais	95
3.1	Construção geométrica dos nós toroidais	95
3.2	Definição analítica de nós toroidais	102
3.3	Estudo topológico dos nós	106
3.4	Classificação dos nós toroidais	113
	Bibliografia	121

Lista de Figuras

1.1	Nós: trivial; trevo e figura oito	16
1.2	Transformação do nó trevo no nó trivial	16
1.3	Deformação de um nó no nó trevo	17
1.4	Nós triviais poligonais definidos por distintos conjuntos de pontos	18
1.5	Nó trevo poligonal	18
1.6	Projecções não admitidas	19
1.7	Tipos de cruzamentos	19
1.8	Diagramas do nó trevo	20
1.9	Diagramas dos nós: trivial, trevo e figura oito	20
1.10	Diagrama alternado e diagrama não alternado do nó figura oito	21
1.11	Diagrama de um nó não alternado	21
1.12	Movimentos de Reidemeister	22
1.13	Nós ambiente isotópicos	23
1.14	Nó trevo poligonal orientado	24
1.15	Diagramas do nó trevo com orientações contrárias	24
1.16	Diagramas do nó de Kawauchi com orientações contrárias	25
1.17	Sinal dos cruzamentos de três diagramas distintos do nó trevo	25
1.18	Sinal dos cruzamentos de um diagrama do nó figura oito	25
1.19	Movimentos de Reidemeister	26
1.20	Nós não invertíveis	27
1.21	Diagrama do nó trevo e da respectiva imagem no espelho	27
1.22	Diagrama do nó figura oito e da respectiva imagem no espelho	28
1.23	Diagrama de um nó não invertível e reflexivo	28
1.24	Diagrama de um nó não invertível e não reflexivo	28
1.25	Soma conexa de dois diagramas de nós trevo poligonais	29
1.26	Duas formas distintas de “compôr” os nós trevo e figura oito.	30
1.27	Diagramas dos nós $R\sharp R$ e $R\sharp - R$	30
1.28	Nós compostos	31
1.29	Soma conexa do nó trevo com o nó trivial	31

1.30	Nós primos	31
1.31	Enlaces: trivial com duas componentes; anéis de Hopf; Whitehead e anéis de Borromean	32
1.32	Diagramas de enlaces: anéis de Hopf; Whitehead e anéis de Borromean	32
1.33	Diagramas de enlaces triviais com 2 e 3 componentes	33
1.34	Diagramas de enlaces orientados	33
1.35	Enlace com número de ligação 0	34
1.36	Anéis de Hopf orientados (H_1) e O^2 são enlaces com o mesmo número de componentes mas diferente número de ligação	34
1.37	Anéis de Borromean orientados (B) e O^3 são enlaces com o mesmo número de componentes e de ligação	34
1.38	Anéis de Hopf orientados, H_2	35
1.39	Imagem no espelho dos anéis de Hopf, $H_1^!$	35
1.40	Diagramas tricolores do nó trevo	36
1.41	Nós e enlaces tricolores	38
1.42	Nós e enlaces que não são tricolores	38
1.43	Nó pentacolor	42
1.44	Nó que não é pentacolor	42
1.45	Diagramas do nó trivial	43
1.46	Diagramas minimais dos nós: trivial (O); trevo (T); anéis de Hopf (H)	43
1.47	Diagrama minimal?	44
1.48	Nós de Perko	44
1.49	Notação para nós: nó trivial 0_1 ; nó trevo 3_1 ; nó figura oito 4_1	45
1.50	Notação para enlaces: enlace trivial com 3 componentes 0_1^3 ; anéis de Hopf 2_1^2 ; anéis de Borromean 6_2^3	45
1.51	Troca de um cruzamento no diagrama do nó trevo	45
1.52	Nó com 8 cruzamentos que se desata trocando 1 cruzamento	46
1.53	Nó com 8 cruzamentos que se desata trocando 4 cruzamentos (o máximo)	46
1.54	Diagramas do mesmo nó mas com diferente número de desatamento	46
1.55	Diagrama do nó 10_8 com 14 cruzamentos	47
1.56	Diagrama minimal do nó 10_8	47
1.57	Diagrama do nó 10_8 desatado com a troca de 2 cruzamentos	48
2.1	Diagrama minimal do nó trevo, D_T^1	52
2.2	Diagrama minimal do nó trevo, D_T^2	53
2.3	Diagrama do nó trevo com 4 cruzamentos, D_T^3	53
2.4	Diagrama do trevo com 4 cruzamentos, D_T^4	54
2.5	Diagrama da imagem no espelho do nó trevo, $D_{T^!}$	54

2.6	Diagrama minimal do nó trivial, D_O^1	54
2.7	Diagrama do nó trivial com 2 cruzamentos, D_O^2	55
2.8	Diagrama do nó trivial com 2 cruzamentos, D_O^3	55
2.9	Diagrama do nó trivial com 4 cruzamentos, D_O^4	55
2.10	Diagrama do nó com 11 cruzamentos, D_K [17]	56
2.11	Diagrama minimal do nó figura oito, D_F	56
2.12	Diagrama do nó não invertível de Kawauchi, D_R	56
2.13	Diagramas “skein”	58
2.14	Diagrama “skein” em árvore dos anéis de Hopf (H_1)	58
2.15	Diagrama “skein” em árvore do nó trevo (T)	58
2.16	Diagrama “skein” em árvore do nó figura oito (F)	59
2.17	Diagrama “skein” em árvore do nó de Kawauchi (R)	59
2.18	Diagrama “skein” em árvore	61
2.19	Diagrama de um nó não trivial com $\nabla_D(z) = 1$	63
2.20	Digrama em árvore do nó $T \sharp F$	69
2.21	Digrama em árvore do enlace $T \cup F$	70
2.22	Nó 9_{42}	72
2.23	Nós K_1 e K_2 não distinguíveis pelo polinómio de Jones	74
2.24	Nós J_1 e J_2 não distinguíveis pelos polinómios de Jones e Alexander	75
2.25	Nós distintos mas que possuem o mesmo polinómio de Homfly	77
2.26	Regiões A e B; cruzamento de valor A; cruzamento de valor B	78
2.27	Regiões A e B no diagrama minimal do nó trevo, D_T	78
2.28	Estados do diagrama minimal do nó trevo	79
2.29	Regiões A e B no diagrama D'_T do nó trevo	79
2.30	Estados do diagrama D'_T do nó trevo	80
3.1	Toro	95
3.2	Nós toroidais: $K_{3,2}$ e $K_{4,3}$	97
3.3	Nós toroidais: $K_{3,2}$; $K_{3,-2}$; $K_{-3,2}$; e $K_{-3,-2}$	97
3.4	Enlaces toroidais: $K_{6,3}$; $K_{9,3}$; $K_{6,4}$; e $K_{8,4}$	98
3.5	$K_{3,2}$ e o nó trevo são ambiente isotópicos	98
3.6	$K_{4,3}$ e o nó 8_{19} são ambiente isotópicos	98
3.7	Diagrama tipo de um nó toroidal $K_{q,r}$	99
3.8	Diagrama do nó $K_{4,3}$	99
3.9	Diagramas dos nós: $K_{3,2}$; $K_{3,-2}$; $K_{-3,2}$; $K_{-3,-2}$	100
3.10	$K_{3,2}$ é ambiente isotópico a $K_{2,3}$	100
3.11	Enlace Whitehead	102
3.12	Diagrama planar do toro	103

3.13	Da identificação planar do nó $K_{3,2}$ à sua representação em \mathbf{T}	104
3.14	Circunferência meridional (a) e circunferência longitudinal (b)	104
3.15	Diagrama planar do nó $K_{3,2}$	105
3.16	Representação planar do subespaço X	107
3.17	Representação planar do subespaço Y	107
3.18	Conjunto A e lacete α	108
3.19	Conjunto B e lacetes β_1, β_{-1}	108
3.20	Representação geométrica do conjunto X considerando $K_{2\varepsilon} = K_{3,2}$	110
3.21	Representação do conjunto $X \cap Y$ considerando $K_{2\varepsilon} = K_{3,2}$	110
3.22	Representação planar do conjunto $X \cap Y$ no caso particular do nó $K_{3,2}$	111
3.23	Secção de X	111
3.24	Secção de Y	112

Capítulo 1

Noções básicas de Teoria de Nós

1.1 Origens da Teoria de Nós

Quando quotidianamente se fala de nós, associamo-los a um pedaço de corda ou fio que pode ser entrelaçado de variadíssimas formas. É perfeitamente vulgar no nosso dia a dia fazermos nós com os mais diversos objectivos. Contudo, a utilidade dos nós é muito mais abrangente do que se possa aparentemente imaginar.

A procura de uma compreensão mais profunda em matéria de nós começou com William Thompson (1824-1907). Numa época em que se estudava a teoria do átomo, este físico apresentou em 1867 o seu modelo de átomo, “teoria do vórtice”, segundo a qual toda a substância era gerada pelo movimento (“vórtice”) na hipotética atmosfera de éter [26]. Esta ideia de Thompson surge por influência do trabalho de Scotsman Peter Tait (1831-1901) que estudou os vórtices dos anéis de fumo, que quando submetidos a colisões elásticas exibiam interessantes modos de vibração. A “teoria do vórtice” foi totalmente apoiada por Tait que passou a dedicar-se ao estudo das partículas como sendo “minúsculas torções topológicas ou nós na estrutura espaço-tempo”[26]. Deste modo pensavam conseguir uma descrição de alguns aspectos da química à custa dos nós, por exemplo a estabilidade da matéria seria explicada pela estabilidade dos nós. Mas foi a tentativa de estabelecer uma correlação entre os elementos químicos da tabela periódica e os nós que levou ao declínio desta teoria.

Apesar de não se ter comprovado a teoria de Thompson, Tait fascinado pela topologia dos nós, continuou dedicado ao seu estudo. A “teoria do vórtice” faz então nascer a “Teoria de Nós”. A tarefa de enumerar nós rapidamente leva Tait a deparar-se com o problema central, ainda não resolvido, da classificação dos nós.

A Teoria de Nós tornou-se assim um ramo da matemática em constante evolução. Contudo, apesar de existirem vários métodos para classificar nós, nenhum deles é ainda um método completo.

A Teoria de Nós, que surge numa tentativa de explicar fenómenos físicos e se desenvolveu no âmbito da matemática pura, apresenta actualmente várias aplicações. Ao nível da física, aplica-se à teoria das supercordas, uma teoria que explica as partículas elementares como se fossem pequenos enlaces, e à teoria quântica. Out-

ra surpreendente aplicação diz respeito à compressão da estrutura e propriedades das grandes moléculas, como os polímeros, e especialmente ao comportamento das moléculas de DNA.

1.2 Conceitos básicos

1.2.1 Definição e representações do nó

Um nó que intuitivamente é um entrelaçado de uma corda no espaço, que pode ter as pontas unidas, expressa-se matematicamente como uma inclusão contínua de uma circunferência no espaço tridimensional.

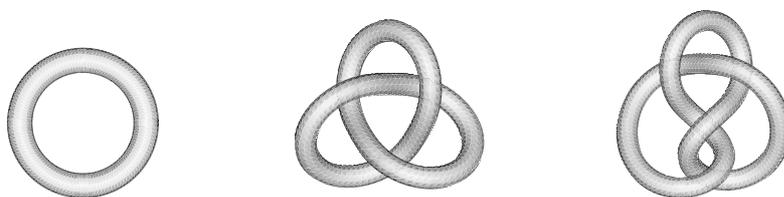


Figura 1.1: Nós: trivial; trevo e figura oito

Definição 1.2.1 *Seja f uma aplicação contínua e injectiva da circunferência usual S^1 em \mathbf{R}^3 . A imagem $K = f(S^1)$ diz-se um nó.*

Os nós são então objectos intrinsicamente iguais (à circunferência) mas que podem estar colocados de maneira muito diferente em \mathbf{R}^3 . Observe-se que todos os nós representados anteriormente são homeomorfos ou seja, se nos imaginarmos colocados sobre qualquer um deles, é impossível distinguirmos em qual nos encontramos.

Contudo, intuitivamente não é aceitável a ideia de “igualdade” entre todos os nós quando estamos a observá-los do exterior.

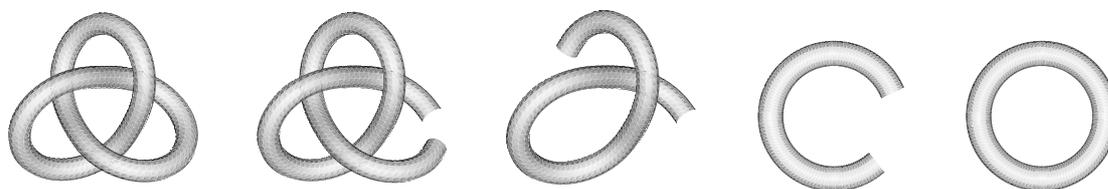


Figura 1.2: Transformação do nó trevo no nó trivial

Tal como mostra a figura 1.2, só conseguiríamos transformar o nó trevo no nó trivial se o cortássemos em algum ponto, o torcessem e depois o voltássemos a colar no mesmo ponto. Ou seja, é impossível “desamarrá-lo” com continuidade, dentro do espaço \mathbf{R}^3 .

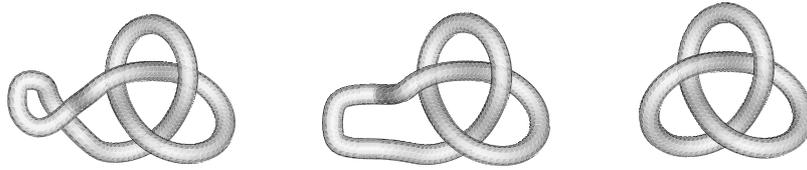


Figura 1.3: Deformação de um nó no nó trevo

No entanto, se considerarmos os nós da figura 1.3 já seria possível deformá-los um no outro continuamente, dentro do espaço \mathbf{R}^3 . Este tipo de nós dizem-se ambiente isotópicos.

Definição 1.2.2 *Dois nós K e K' dizem-se ambiente isotópicos se existir uma aplicação contínua*

$$H : \mathbf{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$$

tal que $h_t : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definida por:

$$h_t = H(-, t) \text{ é um homeomorfismo } \forall t \in [0, 1], \text{ com } h_0 = Id_{\mathbf{R}^3} \text{ e } h_1(K) = K'.$$

A grande questão, ainda por resolver, da Teoria de Nós, consiste em saber quando é que dois nós são ou não ambiente isotópicos.

A noção de nós ambiente isotópicos satisfaz a definição de relação de equivalência. Dizemos que é *impossível deformar um nó noutro*, se os nós pertencem a diferentes classes de equivalência, para a relação “ser ambiente isotópico”. Note-se que, por uma questão de simplificação da linguagem utiliza-se muitas vezes o termo nó quando nos referimos à classe de equivalência do nó.

Existem nós muito complexos que apesar de contemplados na definição 1.2.1, não serão considerados neste trabalho. Esses nós, com um número infinito de cruzamentos, designam-se por nós selvagens.

Para dois quaisquer pontos distintos do espaço tridimensional, p e q , representaremos o segmento que os une por $[p, q]$. Para um conjunto ordenado de pontos distintos, $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$, a união dos segmentos $[p_1, p_2], [p_2, p_3], \dots, [p_{n-1}, p_n]$ e $[p_n, p_1]$ é designada por curva poligonal fechada. Se cada um destes segmentos intersecta exactamente outros dois, cada um deles apenas num ponto, então a curva diz-se simples.

Definição 1.2.3 *Um nó poligonal é uma curva fechada simples e poligonal em \mathbf{R}^3 . Um nó dócil é um nó ambiente isotópico a um nó poligonal.*

Se considerarmos uma circunferência S^1 e uma curva poligonal simples e fechada em \mathbf{R}^3 podemos sempre construir uma aplicação f contínua e bijectiva entre ambas. Para tal, basta identificar $S^1 \simeq [0, 1]/0 \sim 1$ e definir f como $f\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right) = [p_1, p_2]$, $f\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]\right) = [p_2, p_3]$, \dots , $f\left(\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]\right) = [p_n, p_1]$. Ou seja, qualquer nó poligonal é um nó, de acordo com a definição 1.2.1.

Neste trabalho vamos apenas estudar nós dóceis. Assim, a designação de nó referir-se-á sempre a nós dóceis.

Sendo um nó poligonal definido como a união de um conjunto de segmentos em \mathbf{R}^3 , vários conjuntos ordenados de pontos podem definir o mesmo nó poligonal. Por exemplo, se três pontos consecutivos são colineares, eliminando o do meio temos ainda o mesmo nó poligonal, mas definido por um diferente conjunto ordenado de pontos.



Figura 1.4: Nós triviais poligonais definidos por distintos conjuntos de pontos

Este exemplo mostra a importância da definição que se segue:

Definição 1.2.4 *Se o conjunto ordenado (p_1, p_2, \dots, p_n) define um nó poligonal, e nenhum subconjunto não próprio ordenado define o mesmo nó poligonal, então cada um dos elementos deste conjunto são os vértices do nó poligonal.*

Definição 1.2.5 *O nó trivial é o nó poligonal que fica totalmente definido à custa de três pontos não colineares.*

Embora um nó poligonal seja um subconjunto do espaço \mathbf{R}^3 , grande parte do seu estudo é feito com base na sua representação no plano. Sejam Π um plano de \mathbf{R}^3 e $p : \mathbf{R}^3 \rightarrow \Pi$ a projecção ortogonal. O conjunto imagem do nó poligonal K , $p(K)$ é projecção planar de K em Π .

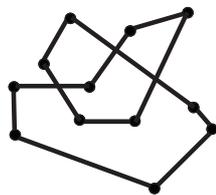


Figura 1.5: Nó trevo poligonal

Um ponto $x \in p(K)$ diz-se um ponto de cruzamento se $p^{-1}(x) \cap K$ é um conjunto com pelo menos dois elementos.

De facto, como um nó poligonal está definido por um número finito de segmentos é possível projectá-lo num plano Π tal que:

- exista um número finito de cruzamentos;
- todos os pontos de cruzamento são pontos duplos, isto é, $p^{-1}(x) \cap K$ possui exactamente dois elementos;
- os vértices do nó não são pontos duplos.

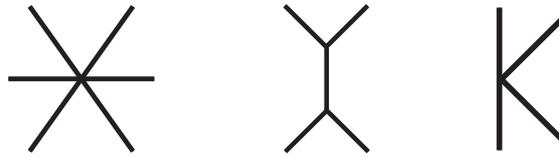


Figura 1.6: Projecções não admitidas

Equivalentemente, dado um nó poligonal K , podemos deslocar ligeiramente K , isto é, encontrar um nó K' ambiente isotópico a K , tal que a projecção de K' no plano $x_3 = 0$ verifique as condições anteriores.

Suponhamos então que a projecção planar de K no plano $x_3 = 0$ verifica as condições anteriores. Esta projecção planar não representa fielmente todas as suas características. Consoante a corda passa por cima ou por baixo, temos nós distintos com a mesma projecção. Em cada cruzamento, existem duas possibilidades e portanto 2^n potenciais nós para cada projecção com n cruzamentos.

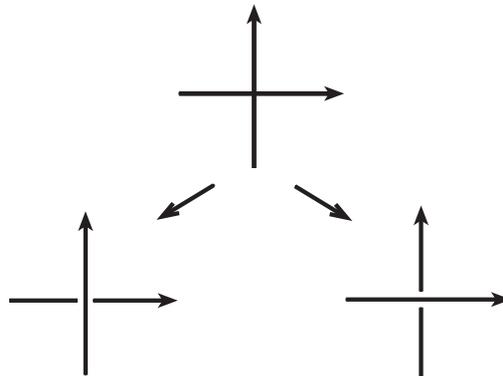


Figura 1.7: Tipos de cruzamentos

Para representar rigorosamente um nó K , em cada cruzamento uma das linhas é interrompida e a outra é contínua, de forma a identificar a parte da corda que cruza por baixo e a que cruza por cima, respectivamente. Esta representação de um nó K é designada por diagrama do nó e representa-se por D_K .

Na medida em que definimos um nó poligonal como uma curva poligonal simples e fechada do espaço tridimensional, deveríamos representar os diagramas dos nós à custa de segmentos do plano. Contudo, por uma questão de simplificação e de estética, normalmente representamos os nós com curvas planas e não com segmentos de recta em \mathbf{R}^2 . A representação à custa de segmentos tornar-se-ia bastante mais complexa.

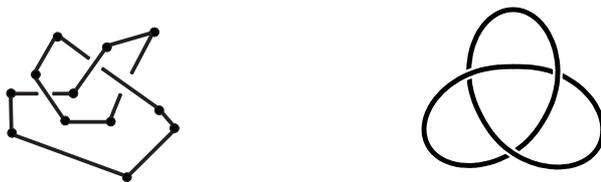


Figura 1.8: Diagramas do nó trevo

Um diagrama de um nó é constituído por uma colecção de curvas planares contínuas cujos arcos se encontram nos cruzamentos. O arco que não é interrompido no cruzamento diz-se que passa por cima ou cruza por cima e os dois restantes arcos envolvidos no cruzamento diz-se que passam por baixo ou cruzam por baixo.

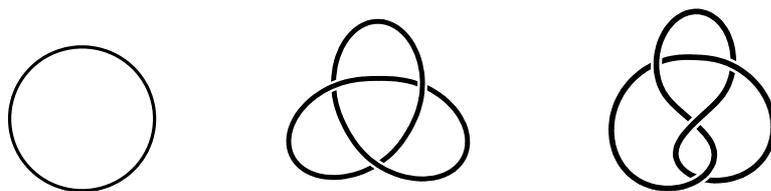


Figura 1.9: Diagramas dos nós: trivial, trevo e figura oito

Se observarmos os exemplos apresentados verificamos que o diagrama do trevo tem 3 cruzamentos e 3 arcos, o da figura oito 4 cruzamentos e 4 arcos e o diagrama do nó trivial não tem arcos nem cruzamentos. Esta igualdade entre arcos e cruzamentos verifica-se para qualquer diagrama de um nó. Uma outra observação relevante é a de que em cada cruzamento se encontram normalmente três arcos.

Todos os nós com menos de oito cruzamentos podem ser representados por diagramas com a particularidade dos seus arcos se cruzarem por cima e por baixo, alternadamente [7].

Definição 1.2.6 *Um diagrama de um nó diz-se alternado se à medida que vamos percorrendo o diagrama encontrarmos alternadamente cruzamentos por cima e cruzamentos por baixo.*

Existem nós que podem ou não ser representados por diagramas alternados, o nó figura oito é um exemplo disso.



Figura 1.10: Diagrama alternado e diagrama não alternado do nó figura oito

Por outro lado, existem nós que não podem ser representados por diagramas alternados [7]. O diagrama da figura 1.11 representa o nó com menor número de cruzamentos que não admite uma representação por um diagrama alternado [11].

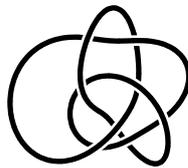


Figura 1.11: Diagrama de um nó não alternado

1.2.2 Movimentos de Reidemeister

Tal como já foi referido no início deste estudo, todos os nós são homeomorfos entre si. Contudo, existem nós que podem ser deformados um no outro dentro do espaço \mathbf{R}^3 . Estes nós são então “iguais” ou mais correctamente, ambiente isotópicos. Representando cada um deles pelo respectivo diagrama, estamos perante nós ambiente isotópicos se sobre os seus diagramas puderem ser efectuados certos movimentos contínuos dentro de \mathbf{R}^2 , que permitam transformar um no outro.

Vejamos como Reidemeister (1893-1971) definiu esses movimentos [24].

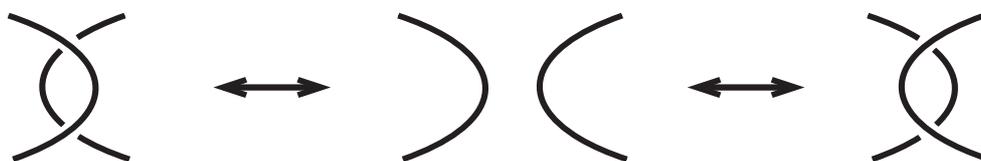
Definição 1.2.7 *Um movimento de Reidemeister é uma forma de alterar o diagrama de um nó que permite deformar os arcos ou alterar a relação entre os cruzamentos.*

$[R_0]$ *Movimento simples que consiste em arrastar ou puxar os arcos que constituem o nó, sem que seja introduzida qualquer alteração nos cruzamentos.*

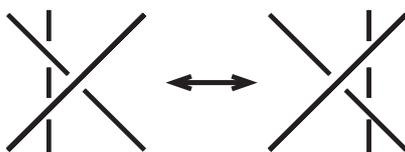
$[R_1]$ *Movimento que introduz ou remove uma torção no diagrama.*



$[R_2]$ Movimento que introduz ou remove dois cruzamentos que cruzam ambos por cima ou ambos por baixo.



$[R_3]$ Movimento que faz passar um dos arco que constitui o diagrama por cima ou por baixo de um cruzamento.



Vejamos como estes movimentos permitem transformar um no outro dois diagramas do nó trevo.

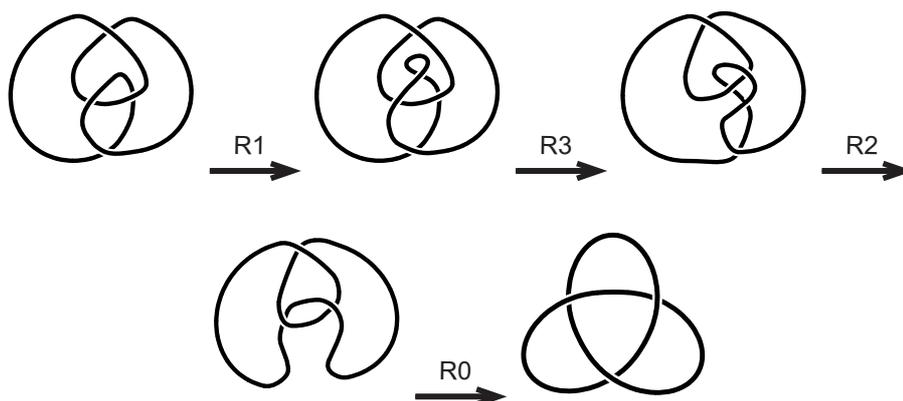


Figura 1.12: Movimentos de Reidemeister

A demonstração do teorema que se segue pode ser consultada em [15].

Teorema 1.2.1 *Dois nós são ambiente isotópicos se e só se qualquer diagrama de um dos nós puder ser deformado num diagrama do outro nó através de uma sequência finita de movimentos de Reidemeister.*

O teorema 1.2.1 implica a definição que se segue:

Definição 1.2.8 *Dois diagramas D e D' dizem-se ambiente isotópicos se D puder ser transformado em D' por algumas sucessões de movimentos de Reidemeister R_0, R_1, R_2, R_3 e regularmente isotópicos se as transformações puderem ser efectuadas sem usar o movimento R_1 .*

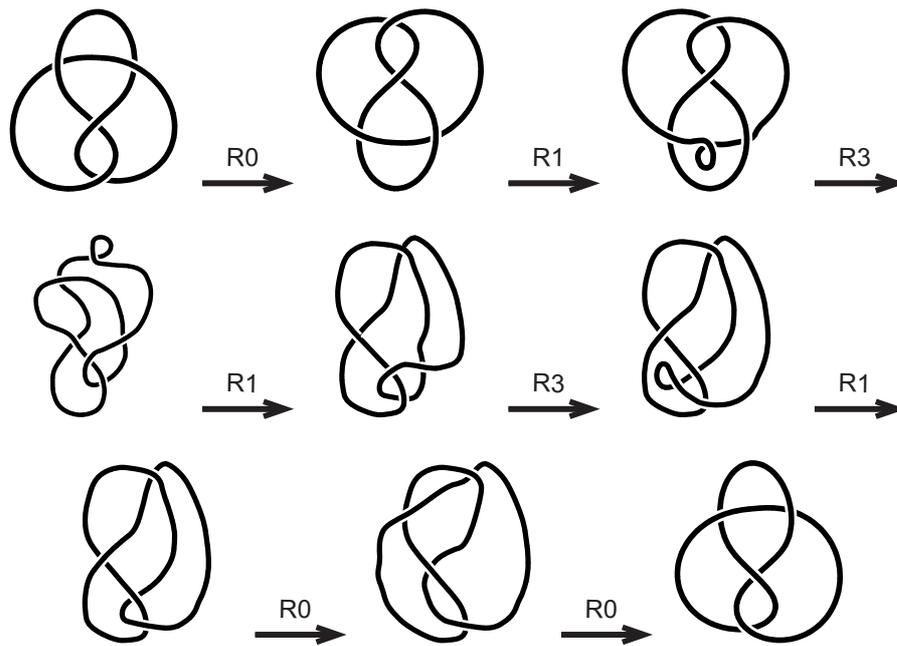


Figura 1.13: Nós ambiente isotópicos

As classes de equivalência dos nós, vão então corresponder às classes de equivalência (por movimentos de Reidemeister) dos seus diagramas e portanto diagramas da mesma classe representam o mesmo modelo de interligações, isto é, são ambiente isotópicos.

Uma classe de equivalência, que passaremos a designar por classe de isotopia, inclui os vários “modelos” do mesmo nó e portanto os nomes normalmente atribuídos a estas classes são os dos nós que representam. Podemos então colocar a questão primordial da Teoria de Nós noutros termos: *Quando é que dois diagramas são ambiente isotópicos?*

Os movimentos de Reidemeister nem sempre permitem determinar facilmente quando é que dois diagramas são ambiente isotópicos. Mostrar que dois diagramas são distintos pode ser ainda uma tarefa mais complicada, uma vez que é necessário demonstrar que nenhuma manipulação pode rearranjar um dos diagramas de modo a que este se transforme no outro.

1.2.3 Nós orientados

Recorde-se que um nó poligonal é uma curva fechada simples de \mathbf{R}^3 , definida a partir de um conjunto ordenado de vértices (p_1, p_2, \dots, p_n) . Facilmente se encontram reordenações deste conjunto de vértices que originam a mesma curva de \mathbf{R}^3 : (p_1, p_2, \dots, p_n) ; $(p_2, p_3, \dots, p_n, p_1)$; $(p_n, p_{n-1}, \dots, p_2, p_1)$.

Definição 1.2.9 *Seja K um nó poligonal definido a partir de um conjunto de vértices (p_1, p_2, \dots, p_n) . Dizemos que $(p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, \dots, p_{\sigma(n)})$ define o mesmo nó orientado do que (p_1, p_2, \dots, p_n) quando $\sigma(k) = i + k(\text{mod } n)$ para algum $i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$.*

Considerando os conjuntos ordenados de vértices (p_1, p_2, \dots, p_n) e $(p_n, p_{n-1}, \dots, p_2, p_1)$, podemos perceber uma diferença fundamental. Uma vez que a ordem dos vértices indica um “sentido de percurso” do nó, estes conjuntos ordenados indicariam percursos em sentidos contrários.

Recordemos que um nó poligonal é definido como a imagem por uma aplicação f contínua e bijetiva da circunferência S^1 dividida em n partes. Os vértices do nó (p_1, p_2, \dots, p_n) são então imagem dos n pontos marcados na circunferência. Vejamos o exemplo do nó trevo:

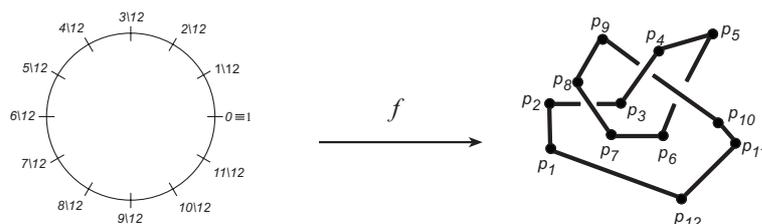


Figura 1.14: Nó trevo poligonal orientado

Se considerarmos a aplicação f tal que $f\left(\left[0, \frac{1}{12}\right]\right) = [p_1, p_2]$, $f\left(\left[\frac{1}{12}, \frac{2}{12}\right]\right) = [p_2, p_3]$, \dots , $f\left(\left[\frac{11}{12}, 1\right]\right) = [p_{12}, p_1]$ temos o nó trevo definido por $(p_1, p_2, \dots, p_{12})$.

Mas se a aplicação \tilde{f} que define o nó trevo for tal que $\tilde{f}\left(\left[0, \frac{1}{12}\right]\right) = [p_1, p_{12}]$, $\tilde{f}\left(\left[\frac{1}{12}, \frac{2}{12}\right]\right) = [p_{12}, p_{11}]$, \dots , $\tilde{f}\left(\left[\frac{11}{12}, 1\right]\right) = [p_2, p_1]$ temos o nó trevo definido por $(p_{12}, p_{11}, \dots, p_1)$, ou seja temos definido um nó trevo com orientação contrária à do anterior. Assim, ao percorrermos a circunferência no sentido positivo estamos, no primeiro caso, a percorrer o nó trevo num sentido, enquanto que quando consideramos a aplicação f , o nó trevo é percorrido no sentido inverso.

Definição 1.2.10 *O inverso de um nó poligonal orientado K definido pelo conjunto ordenado de vértices (p_1, p_2, \dots, p_n) é o nó poligonal orientado $-K$ definido com os mesmos vértices mas em ordem inversa, isto é $(p_n, p_{n-1}, \dots, p_2, p_1)$.*

Uma vez que todo o nó dócil é ambiente isotópico a um nó poligonal, de acordo com o exposto anteriormente vamos considerar que qualquer nó K pode ter associados dois sentidos de percurso.

Esta orientação do nó pode ser informalmente representada nos seus diagramas através de uma seta, que indica o sentido no qual se pretende percorrê-lo. Assim, considerando um diagrama do nó K , o diagrama de $-K$ apenas difere do de K no sentido de percurso.



Figura 1.15: Diagramas do nó trevo com orientações contrárias



Figura 1.16: Diagramas do nó de Kawauchi com orientações contrárias

Num diagrama orientado os cruzamentos podem ser ou positivos ou negativos. Um cruzamento é positivo quando, localizados no arco que passa por cima efectuarmos o percurso por baixo na direcção da direita para a esquerda. Se, pelo contrário a direcção por baixo desse cruzamento for da esquerda para a direita, dizemos que o cruzamento é negativo. Vejamos alguns exemplos:

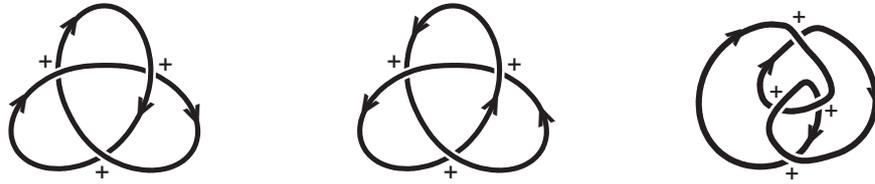


Figura 1.17: Sinal dos cruzamentos de três diagramas distintos do nó trevo

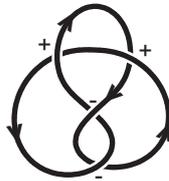


Figura 1.18: Sinal dos cruzamentos de um diagrama do nó figura oito

Definição 1.2.11 A contorção de um diagrama orientado é a soma dos sinais de todos os seus cruzamentos. Denota-se a contorção de um diagrama D por $W(D)$.

Note-se que trocando a orientação dos diagramas de um qualquer nó, o sinal dos seus cruzamentos não se altera.

Proposição 1.2.1 Seja D_K um diagrama do nó K e D_{-K} o diagrama de $-K$ obtido a partir de D_K trocando a orientação, então $W(D_K) = W(D_{-K})$.

Demonstração: Os cruzamentos representados



são os possíveis num diagrama de um nó orientado K . O primeiro cruzamento tem sinal positivo e o segundo negativo.

Quando trocamos a orientação do diagrama, obtemos um diagrama de $-K$. Neste diagrama, cada um dos possíveis tipos de cruzamentos passa então a:



Contudo, a troca da orientação mantém o sinal em qualquer um dos dois tipos de cruzamento (o primeiro tem sinal positivo e o segundo negativo).

Uma vez que a contorção do diagrama de um nó é, segundo a definição 1.2.11 a soma do sinal dos cruzamentos temos que $W(D_K) = W(D_{-K})$. \square

Por exemplo, para um dos diagrama do nó trevo com três cruzamentos (figura 1.15),

$$W(D_T) = 3 = W(D_{-T}).$$

Os movimentos de Reidemeister são igualmente aplicados a diagramas orientados, preservando o sentido de percurso de maneira óbvia. Consideremos os dois diagramas do nó trevo com orientações contrárias, ou seja D_T e D_{-T} . Realizando movimentos de Reidemeister sobre um destes diagramas conseguimos transformá-lo no diagrama do trevo com orientação contrária.

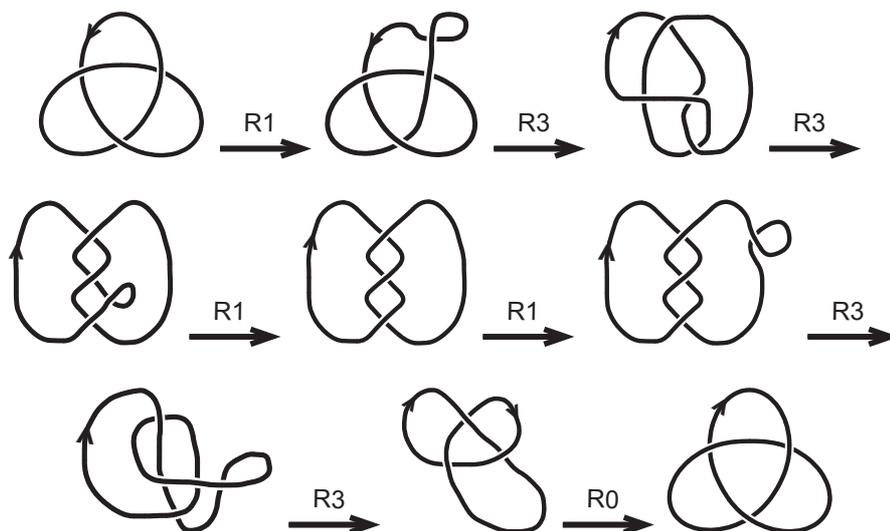


Figura 1.19: Movimentos de Reidemeister

Definição 1.2.12 *Um nó K é invertível se os nós K e $-K$ forem ambiente isotópicos.*

De acordo com a figura 1.19 podemos então concluir que o nó trevo é então um nó invertível. Apesar de até meados dos anos 60, não se conhecerem nenhuns nós não invertíveis, esta propriedade não se verifica para todos os nós. Em 1964 H. F. Trotter criou uma família infinita de nós não invertíveis [27]. O primeiro diagrama da figura 1.20 é exemplo de um desses nós e o segundo representa o nó Kawauchi, o nó não invertível com menor número de cruzamentos [11].

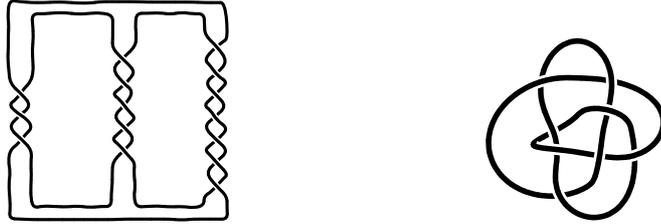


Figura 1.20: Nós não invertíveis

1.2.4 Nós reflexivos

Definição 1.2.13 *Dado um nó poligonal K define-se como imagem no espelho de K , o nó poligonal que se obtém de K por transformação do ponto (x, y, z) no ponto $(x, y, -z)$. Note-se que os pontos de cruzamento (x, y, z_1) e (x, y, z_2) transformam-se em $(x, y, -z_1)$ e $(x, y, -z_2)$, respectivamente. O nó poligonal imagem no espelho de K representa-se por $K^!$.*

Uma vez que todo o nó dócil é ambiente isotópico a um nó poligonal, de acordo com a definição anterior vamos considerar que a partir de qualquer nó K podemos obter o nó $K^!$ que difere de K apenas nos pontos de cruzamento. Observe-se que no caso de estarmos a considerar nós orientados a orientação de $K^!$ é induzida pela orientação do nó K .

A partir do diagrama de um nó K facilmente se obtém o diagrama de $K^!$ trocando todos os cruzamentos. Ou seja, os cruzamentos “por cima” num dos diagramas são os que cruzam “por baixo” no outro.



Figura 1.21: Diagrama do nó trevo e da respectiva imagem no espelho



Figura 1.22: Diagrama do nó figura oito e da respectiva imagem no espelho

Definição 1.2.14 *Se os nós orientados K e $K^!$ são ambiente isotópicos, o nó K diz-se reflexivo.*

Consideremos novamente o diagrama orientado do nó trevo T . A sua imagem no espelho é o diagrama que resulta do anterior por troca dos cruzamentos e cuja orientação é a induzida pelo diagrama de T . Não é possível através dos movimentos de Reidemeister, transformar o diagrama de T no de $T^!$, portanto o nó trevo é um nó não reflexivo. Por outro lado, tal como pudemos observar na figura 1.13, o nó figura oito, é invertível.

Note-se que as características “ser reflexivo” e “ser invertível” são independentes. Por exemplo, o nó figura oito é invertível e reflexivo, o nó trevo é invertível mas não é reflexivo e os exemplos que se seguem ilustram outras possibilidades [15]:

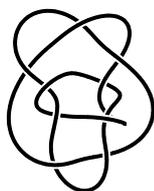


Figura 1.23: Diagrama de um nó não invertível e reflexivo

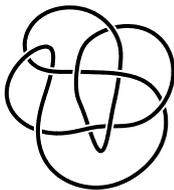


Figura 1.24: Diagrama de um nó não invertível e não reflexivo

Observando os exemplos anteriores, podemos concluir acerca da contorção de um diagrama, a seguinte propriedade, que se prova de modo análogo à proposição 1.2.1:

Proposição 1.2.2 *Seja D_K um diagrama do nó K e $D_{K^!}$ o diagrama de $K^!$ obtido a partir de D_K trocando os cruzamentos, então $W(D_K) = -W(D_{K^!})$.*

Por exemplo considerando um diagrama do nó trevo com três cruzamentos,

$$W(D_T) = 3 \text{ e } W(D_{T'}) = -3.$$

1.2.5 Nós primos e nós compostos

Dados dois diagramas de nós poligonais, é possível “construir” um novo diagrama de um nó de acordo com a definição que se segue.

Definição 1.2.15 *Sejam D_J e D_K os diagramas dos nós poligonais J e K definidos pelos conjuntos de vértices (p_1, p_2, \dots, p_n) e (q_1, q_2, \dots, q_m) , respectivamente. A soma conexa dos diagramas dos nós poligonais J e K , $D_{J\sharp K}$ resulta dos dois diagramas iniciais, procedendo-se da seguinte forma:*

Escolhem-se dois segmentos $[p_i, p_{i+1}]$ e $[q_j, q_{j+1}]$ tais que:

- (i) *não incluam nenhum cruzamento;*
- (ii) *se localizem na parte “exterior” do diagrama do nó;*
- (iii) *removendo um segmento; $[a, b] \subset [p_i, p_{i+1}]$ e um segmento $[c, d] \subset [q_j, q_{j+1}]$ seja possível construir os segmentos $[a, d]$ e $[b, c]$ sem incluir novos cruzamentos.*

O diagrama do nó poligonal $J\sharp K$ fica então definido pelo conjunto de vértices

$$(p_1, \dots, p_i, a, d, q_{j+1}, \dots, q_m, q_1, q_j, c, b, p_{i+1}, \dots, p_n).$$

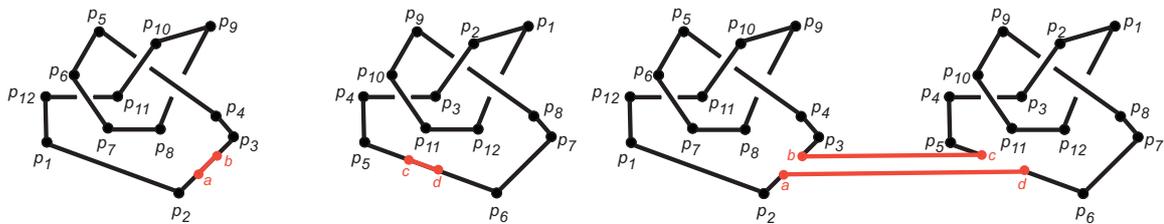


Figura 1.25: Soma conexa de dois diagramas de nós trevo poligonais

Podemos então, dados dois quaisquer nós dóceis orientados J e K , efectuar a sua soma conexa $J\sharp K$.

Considerando os diagramas orientados D_J e D_K e escolhendo adequadamente (com orientações concordantes) dois arcos exteriores destes diagramas construímos o diagrama $D_{J\sharp K}$, tal como mostra a seguinte figura:



Observe-se que a definição 1.2.15 garante que é sempre possível efectuar a soma conexa de dois diagramas orientados de um nó. Assim, no caso de serem seleccionados arcos que não tenham orientações concordantes, pode efectuar-se a soma conexa, procedendo do seguinte modo:

- efectuar sobre um dos diagramas um movimento R_0 (rotação de 180°);



- se um dos nós envolvidos for invertível, suponhamos K , podemos efectuar a soma conexa $J\sharp - K$.



Qualquer uma destas construções vai-nos permitir obter diagramas (nós) ambiente isotópicos.



Figura 1.26: Duas formas distintas de “compor” os nós trevo e figura oito.

Se um nó orientado K é distinto do seu inverso então, a soma conexa de K com ele próprio é distinta da soma conexa de K com $-K$. Considerando o nó não invertível de Kawauchi da figura 1.20, é possível obter os nós $R\sharp R$ e $R\sharp - R$ representados na figura que se segue.



Figura 1.27: Diagramas dos nós $R\sharp R$ e $R\sharp - R$

Definição 1.2.16 O nó resultante da soma conexa de dois ou mais nós não triviais designa-se por nó composto. Os nós que constituem o nó composto são designados por nós factor.



Figura 1.28: Nós compostos

Definição 1.2.17 Um nó é designado por nó primo se, para qualquer decomposição como soma conexa de dois nós, um dos nós factor é o nó trivial.

Efectuando a soma conexa de um nó K com o nó trivial obtém-se o nó K .

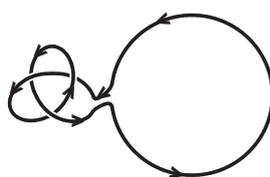


Figura 1.29: Soma conexa do nó trevo com o nó trivial

Se K não é trivial então não existe nenhum nó J tal que $J \sharp K$ seja trivial, logo o nó trivial é primo ([9], capítulo 5).

Saliente-se que, por definição, todo o nó composto pode ser factorizado em nós primos, sem que nenhum deles seja o nó trivial.

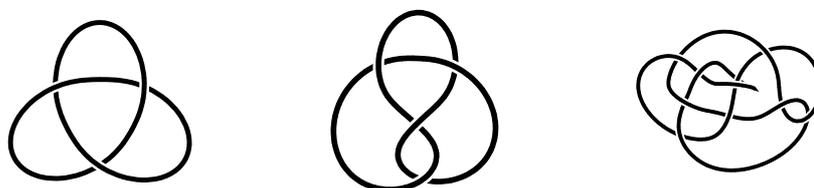


Figura 1.30: Nós primos

Não é uma tarefa fácil reconhecer se um dado nó é primo ou é composto. Quando olhamos para um nó, podemos sempre ser levados a pensar, se não existirão dois nós primos que pudessem dar origem a tal nó.

1.2.6 Enlaces

Qualquer nó pode ser construído entrelaçando um pedaço de uma corda. Contudo existem “nós” que são impossíveis de obter entrelaçando apenas uma corda. Vejamos alguns exemplos:

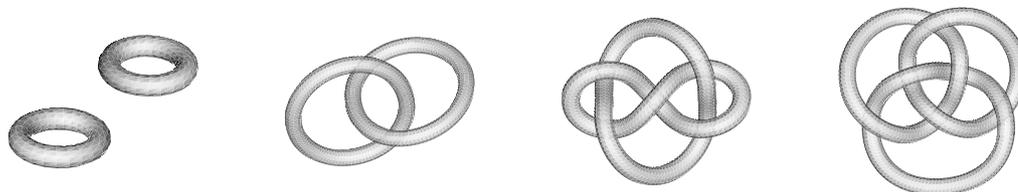


Figura 1.31: Enlaces: trivial com duas componentes; anéis de Hopf; Whitehead e anéis de Borromean

Definição 1.2.18 *Um enlace L é uma união finita de nós $K_i, i = 1, \dots, r$. Cada nó K_i diz-se uma componente do enlace.*

A definição 1.2.2 de nós ambiente isotópicos estende-se de maneira óbvia à noção de enlaces ambiente isotópicos.

Observe-se que em particular, um nó é um enlace apenas com uma componente. Por este motivo, ao longo deste trabalho usaremos o termo enlace sempre que nos estivermos a referir a nós e a enlaces. A designação de nó só será adoptada nas situações que digam respeito unicamente aos nós.

De modo análogo ao que fizemos para os nós, é possível definir a projecção de um enlace e o diagrama de um enlace. De seguida estão representados os diagramas de enlaces com duas e três componentes.

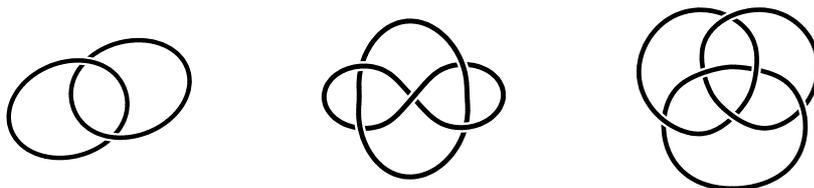


Figura 1.32: Diagramas de enlaces: anéis de Hopf; Whitehead e anéis de Borromean

Os movimentos de Reidemeister permitem também deformar o diagrama de um dado enlace noutro que pertença à mesma classe de isotopia. Assim, dois enlaces vão ser ambiente isotópicos se os seus diagramas forem isotópicos.

Se dois enlaces são ambiente isotópicos, então possuem o mesmo número de componentes (componentes conexas).

Definição 1.2.19 *Sejam L_1 e L_2 dois enlaces. Designamos por $L_1 \cup L_2$ o enlace que resulta da união dos enlaces L_1 e L_2 sem a introdução de novos cruzamentos. Se $L = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n$ com K_i um nó trivial, L diz-se um enlace trivial.*

Um enlace trivial com n componentes é então um enlace cuja projecção é a reunião disjunta de n circunferências (sem cruzamentos) e que designaremos por O^n .



Figura 1.33: Diagramas de enlaces triviais com 2 e 3 componentes

Um enlace diz-se orientado quando para cada uma das suas componentes estiver associada uma orientação.

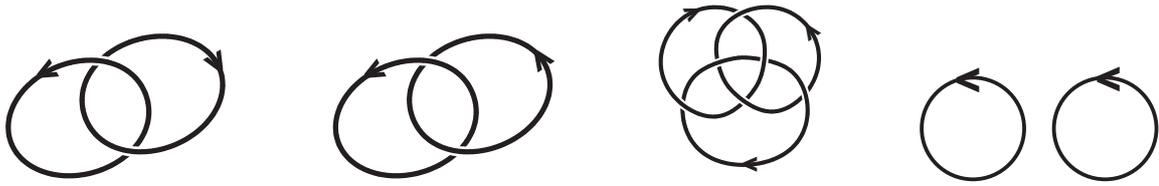


Figura 1.34: Diagramas de enlaces orientados

Tal como foi descrito para os nós, a atribuição do sinal aos cruzamentos e consequentemente, a contorção de um enlace é determinada de modo análogo.

No caso dos enlaces, devido às várias componentes que o constituem, mais importante do que conhecer a sua contorção, é determinar o número de ligação de cada par de componentes.

Definição 1.2.20 *Dado o diagrama de um enlace orientado L com m componentes ($m > 1$) C_1, \dots, C_m , o número de ligação de C_i com C_j , onde C_i e C_j são componentes distintas de L , é metade da soma dos sinais dos cruzamentos de C_i com C_j , que se denota por $lk(C_i, C_j)$. O número de ligação de L é então a soma dos números de ligação de todos os pares de componentes:*

$$lk(L) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} lk(C_i, C_j).$$

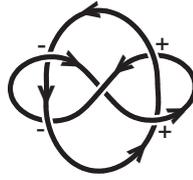


Figura 1.35: Enlace com número de ligação 0

Teorema 1.2.2 *Se dois enlaces L e L' são ambiente isotópicos então $lk(L) = lk(L')$.*

Demonstração: Os movimentos de Reidemeister que envolvem duas componentes de um diagrama de um enlace são apenas R_2 e R_3 .

[R_2] O movimento R_2 introduz no enlace dois cruzamentos de sinais contrários, logo o número de ligação das duas componentes envolvidas não vai ser alterado e consequentemente o do diagrama também não.

[R_3] O movimento R_3 não introduz nem altera nenhum dos cruzamentos presentes no diagrama e portanto não há qualquer alteração no número de ligação do diagrama. \square



Figura 1.36: Anéis de Hopf orientados (H_1) e O^2 são enlaces com o mesmo número de componentes mas diferente número de ligação

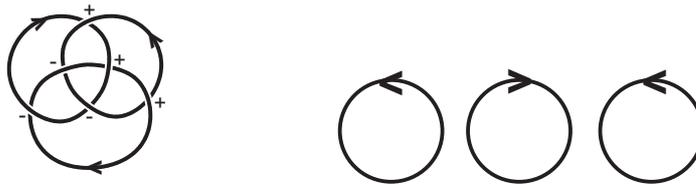


Figura 1.37: Anéis de Borromean orientados (B) e O^3 são enlaces com o mesmo número de componentes e de ligação

Observando estes exemplos, e uma vez que

$$lk(H_1) = 1 \neq lk(O^2) = 0 \text{ e } lk(B) = lk(O^3) = 0$$

podemos concluir que as componentes dos anéis de Hopf não são separáveis, mas o mesmo já não é possível concluir acerca dos anéis de Borromeu.

Voltando novamente ao exemplo dos anéis de Hopf, H_1 , já apresentado, verifiquemos o que acontece com o seu número de ligação se alterarmos a orientação de uma das suas componentes, H_2 .



Figura 1.38: Anéis de Hopf orientados, H_2

$$lk(H_1) = 1 \text{ e } lk(H_2) = -1.$$

Ou seja, $lk(H_1) = -lk(H_2)$ e pelo teorema 1.2.2 podemos concluir que H_1 e H_2 não são ambiente isotópicos. Este resultado pode ser generalizado a qualquer enlace com duas componentes.

Determinemos agora o número de ligação dos anéis de Hopf, H_1 se lhe trocarmos os cruzamentos, ou seja, $lk(H_1^!)$.

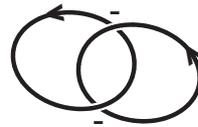


Figura 1.39: Imagem no espelho dos anéis de Hopf, $H_1^!$

$$lk(H_1^!) = -1 = -lk(H_1).$$

Proposição 1.2.3 *Seja $L^!$ a imagem no espelho do enlace orientado L e $-L$ o seu inverso. Então*

$$lk(L^!) = -lk(L) \text{ e } lk(-L) = lk(L).$$

Demonstração: Seja L um enlace orientado e $L^!$ o enlace que resulta de L por troca de todos os seus cruzamentos. Se o cruzamento tiver sinal positivo quando o invertemos ele passa a ter sinal negativo e, se for negativo, passa a positivo. Logo, o número de ligação deste par de enlaces é simétrico.

Seja $-L$ o inverso do enlace L . Estes dois enlaces têm apenas orientações inversas. Assim, todos os cruzamentos mantêm o seu sinal. Logo, o número de ligação deste par de enlaces é igual. \square

Com base nesta proposição podemos então afirmar que um enlace reflexivo tem número de ligação zero.

1.3 Invariantes clássicos dos nós e enlaces

Para que seja possível classificar as várias classes de enlaces podemos recorrer ao conceito de invariante da classe de isotopia do enlace. Suponhamos que a cada enlace L é atribuído um objecto matemático $\rho(L)$ de tal maneira que se dois enlaces L e L' são ambiente isotópicos então $\rho(L) = \rho(L')$. O objecto $\rho(L)$ diz-se então “invariante da classe de isotopia” ou simplesmente “invariante do enlace”. Note-se que se $\rho(L)$ for um invariante do enlace e $\rho(L) \neq \rho(L')$ então os enlaces L e L' não são ambiente isotópicos.

Nesta secção vamos estudar invariantes clássicos: tricolorabilidade; número de cruzamentos e número de desatamento.

Se os enlaces L e L' são ambiente isotópicos, é possível transformar o diagrama do enlace L , D_L em $D_{L'}$ por aplicação de um número finito de movimentos de Reidemeister. Assim, para que $\rho(L)$ seja um invariante da classe de isotopia do enlace, $\rho(L)$ não pode ser alterado por estes movimentos.

Os invariantes clássicos dos nós não permitem distinguir um nó da sua imagem no espelho; um par de nós com orientações contrárias, nem um nó primo de um nó composto. Na secção 1.2.6 definimos dois objectos matemáticos que são invariantes dos enlaces: o número de componentes e o número de ligação. Assim, enlaces com diferentes números de componentes ou com distintos números de ligação não são enlaces ambiente isotópicos. Para além disso, o número de ligação permite identificar, em alguns casos, quando é que dois enlaces não são reflexivos.

A importância dos invariantes clássicos está essencialmente associada ao facto de terem sido os primeiros a permitir a distinção entre enlaces.

1.3.1 Tricolorabilidade

A tricolorabilidade é um método criado por Ralph Fox (1913-1973) para distinguir enlaces baseado num processo de coloração dos seus diagramas.

Definição 1.3.1 *Um diagrama de um enlace diz-se tricolor se pudermos colorir os seus arcos de tal forma que:*

- (i) *a cada arco seja atribuída uma cor;*
- (ii) *sejam usadas pelo menos duas cores e no máximo três;*
- (iii) *para cada cruzamento ou todos os arcos têm a mesma cor ou num cruzamento cruzam-se arcos com três cores.*

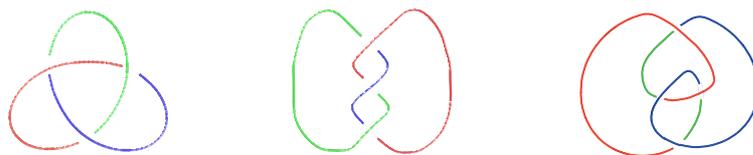


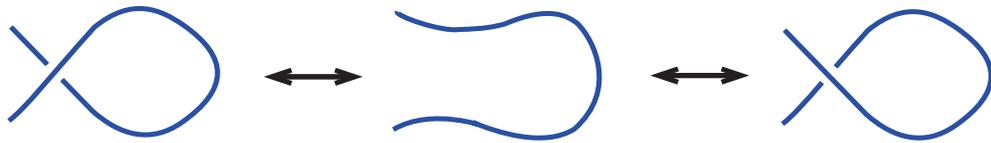
Figura 1.40: Diagramas tricolores do nó trevo

Teorema 1.3.1 *A tricolorabilidade é um invariante da classe de isotopia do enlace.*

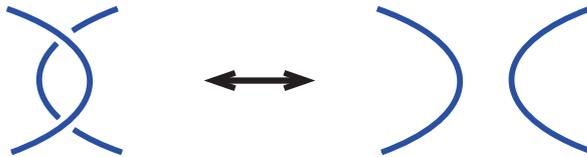
Demonstração: Uma deformação do tipo R_0 não altera os cruzamentos logo não traz qualquer alteração à tricolorabilidade do diagrama.

Para os movimentos R_1, R_2, R_3 , vamos mostrar que a coloração em qualquer cruzamento alterado por um desses movimentos pode, se necessário, ser modificada de forma a que o diagrama resultante seja também tricolor. Vejamos que modificações vão ter que ser efectuadas em cada um dos movimentos. As figuras que se seguem mostram apenas a parte do diagrama do enlace que é alterada pelos movimentos de Reidemeister.

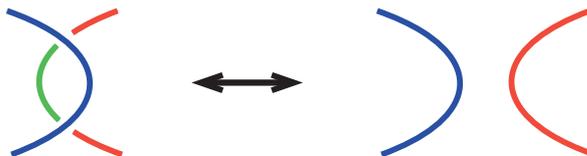
[R_1] Em cada cruzamento permanece sempre a mesma cor.



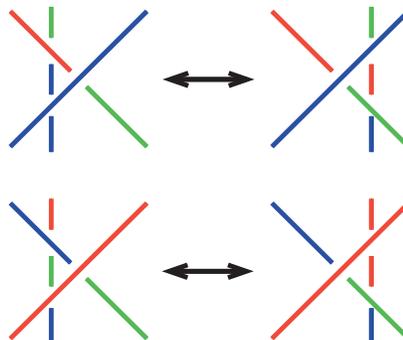
[R_2] Quando nos cruzamentos está a mesma cor, ao desfazer os cruzamentos, essa cor mantém-se nos dois arcos.

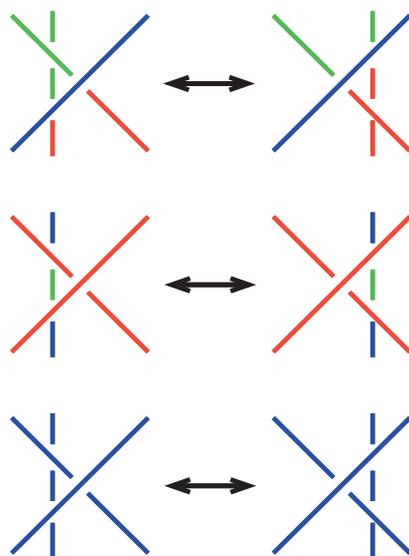


Quando nos cruzamentos se cruzam arcos de três cores distintas, desfazendo os cruzamentos atribuímos uma cor distinta a cada um dos arcos.



[R_3] Neste caso são cinco as situações possíveis:





□

Se dado um diagrama de um enlace ele é tricolor então qualquer outro diagrama do mesmo enlace verifica essa propriedade. Ou seja, a possibilidade de colorir um enlace com um mínimo de duas cores e um máximo três não depende do seu diagrama.

Definição 1.3.2 *Um enlace é tricolor se os seus diagramas são tricolores.*

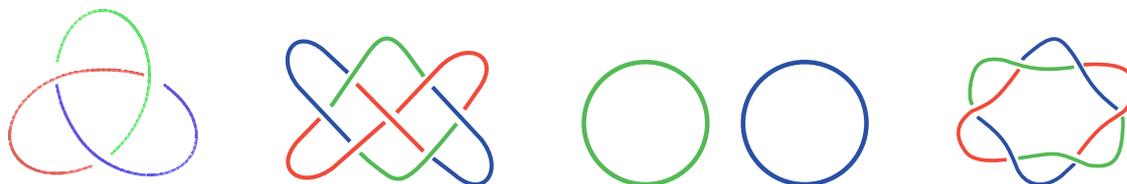


Figura 1.41: Nós e enlaces tricolores



Figura 1.42: Nós e enlaces que não são tricolores

Uma vez que o nó trevo é tricolor e o nó trivial não, a tricolorabilidade permite-nos concluir que estes dois nós não são ambiente isotópicos.

É possível estender a noção da tricolorabilidade à “*n-colorabilidade*”. Esta generalização vai naturalmente exigir que as condições da definição de tricolorabilidade sejam “traduzidas” por expressões numéricas.

Definição 1.3.3 *O diagrama de um enlace diz-se mod n ou n -colorível (com n inteiro maior ou igual a três) se:*

- (I) *a cada arco pode ser atribuído um inteiro entre 0 e $n - 1$;*
- (II) *a soma dos valores (y e z) atribuídos aos arcos que passam por baixo seja igual, em \mathbf{Z}_n ao dobro do valor (x) do arco que passa por cima, ou seja em cada cruzamento verifica-se a igualdade $2x - y - z = 0(\text{mod } n)$;*
- (III) *pelo menos dois elementos de \mathbf{Z}_n são atribuídos a um diagrama.*

Obviamente que o processo de colorir os arcos com pelo menos duas cores corresponde a enumerar esses mesmos arcos com pelos menos dois valores. Tendo em conta esta observação, mostremos que as definições 1.3.1 e 1.3.3 são equivalentes para o caso de $n = 3$, $\mathbf{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$.

Consideremos a definição 1.3.1.

Obviamente $(i) \Rightarrow (I)$ e $(ii) \Rightarrow (III)$.

Suponhamos agora que em cada cruzamento todos os arcos têm a mesma cor (valor) ou três cores (valores) distintas. Considerando que x é o arco que passa por cima e y, z são os arcos que passam por baixo, temos então que $x = y = z$ ou $\{x, y, z\} = \{0, 1, 2\}$. No caso em que $x = y = z$, $2x - x - x = 0(\text{mod } n)$. Mas para $\{x, y, z\} = \{0, 1, 2\}$ podemos ter:

- $x = 0$ e $\{y, z\} = \{1, 2\}$ para os quais $2 \times 0 - 1 - 2 = 0(\text{mod } 3)$;
- $x = 1$ e $\{y, z\} = \{0, 2\}$ para os quais $2 \times 1 - 0 - 2 = 0(\text{mod } 3)$;
- $x = 2$ e $\{y, z\} \in \{0, 1\}$ temos $2 \times 2 - 0 - 1 = 0(\text{mod } 3)$.

Ou seja, verifica-se que $2x - y - z = 0(\text{mod } n)$. A condição (iii) da definição 1.3.1 implica então a condição (II) da definição 1.3.3.

Consideremos agora a definição 1.3.3.

Obviamente $(I) \Rightarrow (i)$ e $[(III) \text{ e } (I)] \Rightarrow (ii)$ (note-se que $n = 3$).

Suponhamos que se em cada cruzamento, x é o arco que passa por cima e y, z os que passam por baixo, verifica-se a condição: $2x - y - z = 0(\text{mod } 3)$. Os possíveis valores a atribuir a cada um dos arcos, verificando esta condição são:

$$\begin{array}{lll} 0 + 0 = 0 = 2 \times 0; & 0 + 1 = 1 = 2 \times 2; & 1 + 2 = 0 = 2 \times 0; \\ 1 + 1 = 2 = 2 \times 1; & 0 + 2 = 2 = 2 \times 1; & 2 + 0 = 2 = 2 \times 1; \\ 2 + 2 = 1 = 2 \times 2; & 1 + 0 = 1 = 2 \times 2; & 2 + 1 = 0 = 2 \times 0. \end{array}$$

Observando os resultados obtidos pode constatar que em cada cruzamento ou temos três cores (valores) iguais, ou três cores (valores) distintas. A condição (II) da definição 1.3.3 implica então a condição (iii) da definição 1.3.1.

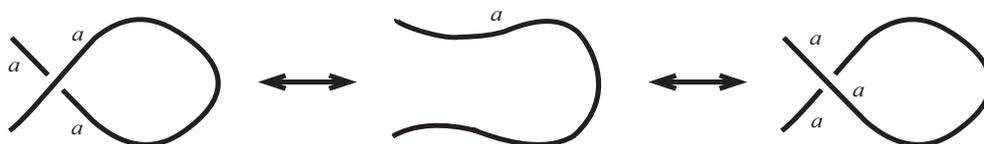
Está então provado que as definições de tricolorabilidade e a de diagrama *mod 3* são equivalentes.

Teorema 1.3.2 *A n-colorabilidade é um invariante da classe de isotopia do enlace.*

Demonstração:

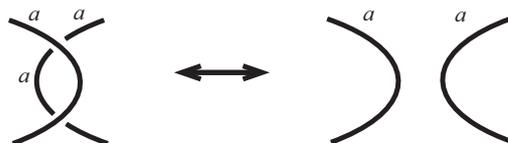
[R_0] Movimentos do tipo R_0 não alteram a n-colorabilidade porque os cruzamentos não são alterados.

[R_1] R_1 é um movimento que envolve apenas um arco ao qual é atribuído um número $a \in \mathbf{Z}_n$.

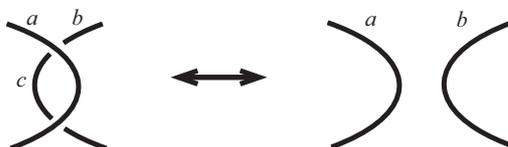


[R_2] Para que os diagramas verifiquem as condições da definição 1.3.3, os arcos envolvidos num movimento R_2 têm que verificar uma das seguintes condições:

- Se $a = b$ ou $a = c$ ou $b = c$, usando a condição $2a = b + c$ obtemos $a = b = c$. Neste caso, o segundo valor exigido pela condição (III) encontra-se num arco que não está envolvido nestes cruzamentos.

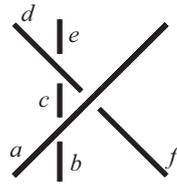


- Se a, b e c são distintos:



O diagrama da direita mostra a atribuição de valores possíveis. Esta atribuição contínua a verificar a condição (III), ($a \neq b$).

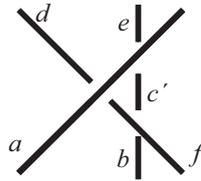
[R_3]



Nesta situação temos as seguintes condições S_1 :

$$S_1 = \begin{cases} 2a = b + c \\ 2d = c + e \\ 2a = f + d \end{cases}$$

Efectuando sobre o cruzamento anterior um movimento R_3 :



Precisamos então de determinar um valor c' que verifique as condições S_2 :

$$S_2 = \begin{cases} 2a = d + f \\ 2f = b + c' \\ 2a = e + c' \end{cases}$$

Dado que a, b, c, d, e, f verificam S_1 , basta considerar $c' = 2f - b = 2a - e$ e temos então que:

$$b + c' = b + 2f - b = 2f \text{ e } e + c' = e + 2a - e = 2a.$$

Logo a, b, c', d, e, f verificam S_2 .

Vejamos que a condição (III) da definição 1.3.3 continua a verificar-se. Podemos observar que num cruzamento do tipo:



ou está presente apenas um valor (e o(s) outro(s) encontram-se noutras partes do diagrama), ou se o diagrama envolve apenas dois valores, não podemos ter

$a = b = d = e = f \neq c$. Assim, quando se efectua um movimento R_3 e se atribuem os valores indicados (S_2), a condição (III) continua a verificar-se. (O único problema dar-se-ia no caso $a = b = d = e = f \neq c$ pois nesta situação as condições de S_2 levariam-nos a $a = b = d = e = c'$ e perder-se-ia um valor.)

Fica então provado que os movimentos R_3 não alteram a tricolorabilidade.

Portanto a n -colorabilidade é um invariante da classe de isotopia do enlace. \square

Vejamus que a pentacolorabilidade permite distinguir os nós trevo e figura oito.

Verifiquemos que o nó figura oito é pentacolor. Atribuindo a cada cor um elemento de \mathbf{Z}_5 , (vermelho =1; amarelo =2; azul =3; verde =4) de acordo com a figura:

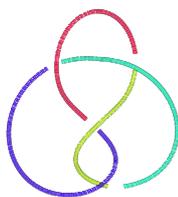


Figura 1.43: Nó pentacolor

podemos comprovar que se verifica a condição $2x = y + z \pmod{5}$:

$$2 \times 1 = 3 + 4; \quad 2 \times 2 = 1 + 3; \quad 2 \times 3 = 2 + 4; \quad 2 \times 4 = 1 + 2.$$

Mostremos que o nó trevo não é pentacolor. Atribuindo a cada arco um elemento de \mathbf{Z}_5 :

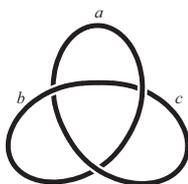


Figura 1.44: Nó que não é pentacolor

De acordo com a figura 1.44, temos então que:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2a = b + c \\ 2c = a + b \\ 2b = a + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = b + c \\ 4c = 2a + 2b \\ 2b = a + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = b + c \\ 2a = 4c - 2b \\ 2b = a + c \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 4c - 2b = b + c \\ 2a = 4c - 2b \\ 2b = a + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ 2a = 4c - 2b \\ 2b = a + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ a = c \\ 2b = a + c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c \end{aligned}$$

Logo, como não são atribuídos ao diagrama pelo menos dois valores de \mathbf{Z}_5 , podemos concluir que o nó trevo não é pentacolor. Portanto, o trevo e a figura oito são nós que pertencem a diferentes classes de isotopia, isto é, não são ambiente isotópicos.

1.3.2 Número de cruzamentos

Um diagrama D do enlace L , tem um número finito de cruzamentos $c(D)$, que não é um invariante da classe de isotopia do enlace. Isto porque, por exemplo, o nó trivial pode ser representado pelos diagramas D e D' , que têm um número de cruzamentos diferente.



Figura 1.45: Diagramas do nó trivial

Vejamos então como definir o número de cruzamentos de um enlace de modo a que este seja um invariante.

Definição 1.3.4 *Seja \mathcal{D} o conjunto de todos os diagramas que podem representar o enlace L . Então o número de cruzamentos de L , $c(L)$, é dado por:*

$$c(L) = \min_{\mathcal{D}} c(D).$$

Um diagrama de L com $c(L)$ cruzamentos diz-se o diagrama minimal do enlace L .

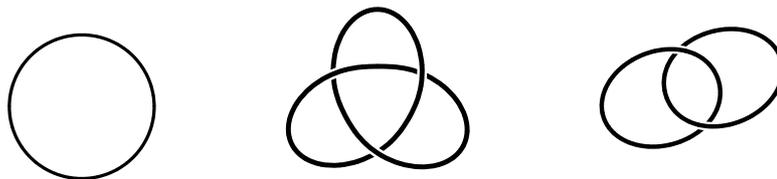


Figura 1.46: Diagramas minimais dos nós: trivial (O); trevo (T); anéis de Hopf (H)

Os números de cruzamento dos nós apresentados na figura 1.46 são respectivamente:

$$c(O) = 0; c(T) = 3 \text{ e } c(H) = 2.$$

Não é fácil determinar o número de cruzamentos de um enlace L , uma vez que L pode ser representado por vários diagramas e para determinar o seu número de cruzamentos, é necessário “reduzi-lo” ao diagrama minimal, processo este que se pode revelar bastante trabalhoso. Se temos o diagrama de um enlace L com n cruzamentos, como é que conseguimos garantir que L não admite uma representação com menos cruzamentos?

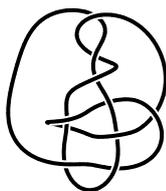


Figura 1.47: Diagrama minimal?

No que diz respeito a nós compostos, não podemos determinar o seu número de cruzamentos a partir dos nós factor que os compõem, no entanto, existe a seguinte conjectura [1]:

Conjectura: Sejam L_1 e L_2 dois enlacs então $c(L_1 \sharp L_2) = c(L_1) + c(L_2)$.

Este resultado foi verificado no caso em que L_1 e L_2 são representados por diagramas minimais alternados [1].

Apesar de não existir um método que permita determinar facilmente o diagrama minimal dos nós e enlacs, eles estão tabelados de acordo com essa representação planar. Utilizando métodos exaustivos Tait publicou, em 1885, a primeira tabela de nós primos alternados até 10 cruzamentos. Na sua listagem apresentou diagramas minimais de 166 nós. Apesar de ser a primeira, esta classificação foi quase perfeita na medida que usando novos métodos se comprovou a listagem de Tait, com apenas uma exceção. Em 1979 K. A. Perko provou que dois desses nós eram o mesmo [22].

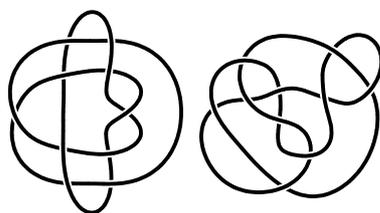


Figura 1.48: Nós de Perko

Só em 1927, com o desenvolvimento de um modelo de nó, como um objecto topológico tridimensional, é que Alexander e Briggs demonstraram rigorosamente, pela primeira, vez que nós tabelados por Tait não são ambiente isotópicos.

Em 1967 Conway publicou a tabela de todos os nós primos com menos de 12 cruzamentos e de todos os enlacs com menos de 10 cruzamentos. Actualmente, já estão classificados os nós até 14 cruzamentos.

A notação mais simples usada para identificar os nós e enlacs tabelados foi criada por Reidemeister. O seu sistema de numeração de nós consiste em associar a cada nó um “valor” n_i onde n representa o número de cruzamentos e o índice i indica a ordem desse nó na lista de nós com o mesmo número de cruzamentos. Apresentemos alguns exemplos:

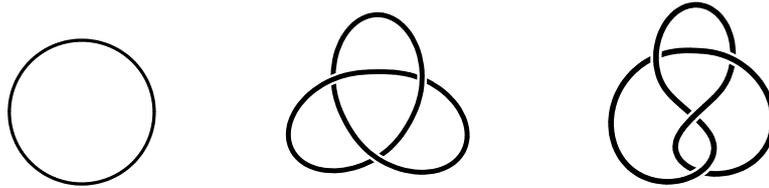


Figura 1.49: Notação para nós: nó trivial 0_1 ; nó trevo 3_1 ; nó figura oito 4_1

No caso dos enlacs é actualmente vulgar a notação n_i^j onde j representa o número de componentes que constituem o enlace.

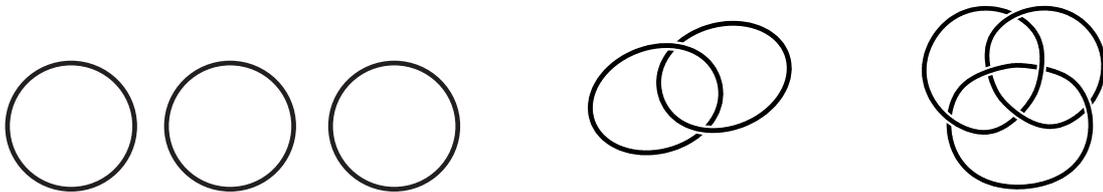


Figura 1.50: Notação para enlacs: enlace trivial com 3 componentes 0_1^3 ; anéis de Hopf 2_1^2 ; anéis de Borromean 6_2^3

1.3.3 Número de desatamento

Consideremos D o diagrama de um enlace L . Se trocarmos um dos cruzamentos no diagrama, uma vez que este tipo de alterações não está contemplada nos movimentos de Reidemeister obtemos, em geral, um diagrama que representa um outro enlace.

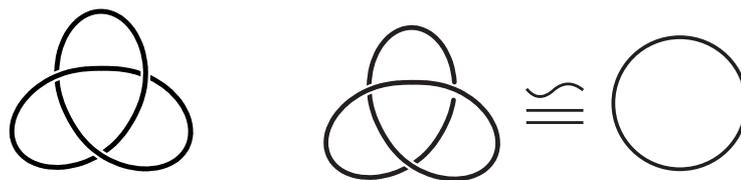


Figura 1.51: Troca de um cruzamento no diagrama do nó trevo

Proposição 1.3.1 *Seja D o diagrama de um enlace L com c cruzamentos. Então, é necessário trocar no máximo metade dos seus cruzamentos, para se obter um diagrama do enlace trivial.*

Demonstração: Consideremos o diagrama D de um enlace com c cruzamentos. Percorrendo o diagrama D a partir de um dado ponto, em cada primeiro encontro com um cruzamento, registamos se o arco está a cruzar por cima ou por baixo. Finalizado

o percurso, contamos o número de cruzamentos por cima e por baixo presentes no diagrama. Troquemos os cruzamentos que se encontram no diagrama em menor número. Ou seja, se tivermos um menor número de cruzamentos por cima, estes são trocados e passam a cruzar por baixo, se houver um maior número de cruzamentos por baixo, são estes que vão ser trocados e passar a cruzar por cima. Procedendo desta forma, o número de alterações nos cruzamentos será no máximo $\frac{c}{2}$. Após estas trocas de cruzamentos, se voltarmos a percorrer o nó, todos os primeiros encontros com os cruzamentos serão sempre por baixo ou sempre por cima. Estas alterações nos cruzamentos vão permitir desatar o enlace, isto é, obter um enlace trivial. \square



Figura 1.52: Nó com 8 cruzamentos que se desata trocando 1 cruzamento



Figura 1.53: Nó com 8 cruzamentos que se desata trocando 4 cruzamentos (o máximo)

De facto, o número de desatamento de D , diagrama de um enlace L , define-se como o número de operações de desatamento que são necessárias efectuar para transformar D num diagrama do nó trivial. Representa-se o número de desatamento de D por $\mu(D)$.

Note-se que consoante o diagrama do enlace que considerarmos o número de desatamento pode alterar-se [20].



Figura 1.54: Diagramas do mesmo nó mas com diferente número de desatamento

Tal como se verificava para o número de cruzamentos de um diagrama, $\mu(D)$ também não é um invariante da classe de isotopia do enlace L .

O número de desatamento é um invariante se o definirmos da seguinte forma:

Definição 1.3.5 *Seja \mathcal{D} o conjunto de todos os diagramas que podem representar o enlace L . Então o número de desatamento de L , $\mu(L)$, é dado por:*

$$\mu(L) = \min_{\mathcal{D}} \mu(D).$$

Para os nós e enlaces mais simples temos então que:

$$\mu(0_1) = 0; \mu(3_1) = 1 \text{ e } \mu(2_1^2) = 1.$$

Determinar o número de desatamento de um nó é um processo bastante complicado e que ficou ainda mais dificultado com a descoberta de Bleiler, em 1984 [4].

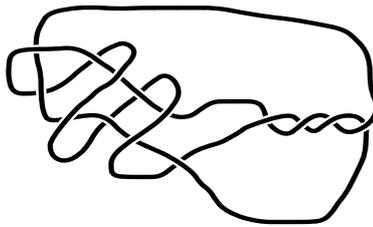


Figura 1.55: Diagrama do nó 10_8 com 14 cruzamentos

Efectuando sobre o diagrama da figura 1.55, uma sucessão de movimentos de Reidemeister é possível transformá-lo num diagrama com apenas 10 cruzamentos (diagrama minimal).

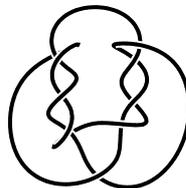


Figura 1.56: Diagrama minimal do nó 10_8

O diagrama minimal é desatado com 3 mudanças de cruzamento enquanto que o diagrama com 14 cruzamentos pode ser desatado apenas com duas mudanças de cruzamentos.

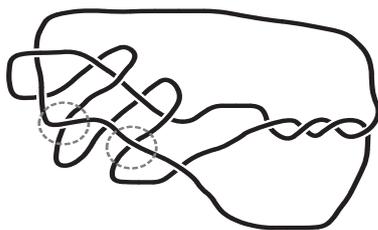


Figura 1.57: Diagrama do nó 10_8 desatado com a troca de 2 cruzamentos

O nó que estes dois diagramas representam tem então número de desatamento 2. Ao contrário do que intuitivamente pareceria lógico, este exemplo vem demonstrar que o número de desatamento de um nó, não corresponde ao número de cruzamentos que são necessários trocar no diagrama minimal que o representa.

Este resultado foi generalizado em 1994, por James Bernhard, que mostrou existir uma infinidade de enlaces para os quais o número de desatamento não é necessariamente o número de desatamento do diagrama minimal [3].

Não é por isso tarefa fácil determinar o número de desatamento de um nó. Quando encontramos um valor para o número de desatamento, seremos sempre levados a pensar se não existirá um diagrama desse nó para o qual o número de desatamento seja menor.

Para os nós compostos, o número de desatamento apresenta também particularidades bastante interessantes.

Proposição 1.3.2 *O número de desatamento de um nó composto $J\sharp K$ é no máximo a soma do número de desatamento dos nós factores que o constituem. Isto é,*

$$\mu(J\sharp K) \leq \mu(J) + \mu(K).$$

Demonstração: Sejam J e K dois nós com número de desatamento $\mu(J)$ e $\mu(K)$, respectivamente. Existem diagramas D_J e D_K de J e K respectivamente, tais que

$$\mu(J) = \mu(D_J) \text{ e } \mu(K) = \mu(D_K).$$

Seja D_L o diagrama da soma conexa $J\sharp K$ obtido a partir dos diagramas D_J e D_K .

Efectuando $\mu(J)$ trocas em D_J e $\mu(K)$ trocas em D_K , obtém-se o nó trivial.

Logo $\mu(J\sharp K) \leq \mu(J) + \mu(K)$. \square

Conjectura-se que esta desigualdade pode ser uma igualdade, no entanto não existe ainda nenhuma prova para tal afirmação, com uma excepção. Em 1985, Martin Scharlemann provou o seguinte resultado [25]:

Teorema 1.3.3 *Todo o nó com número de desatamento um é um nó primo.*

Por outras palavras, o número de desatamento de um nó composto é maior ou igual a 2. A partir deste teorema podemos provar que:

Corolário 1.3.1 *Se J e K dois nós tais que $\mu(J) = \mu(K) = 1$ então $\mu(J\sharp K) = 2$.*

Demonstração: Sejam J e K dois nós tais que $\mu(J) = \mu(K) = 1$.

Pela proposição 1.3.2,

$$\mu(J\sharp K) \leq \mu(J) + \mu(K) = 2$$

Como no caso do $\mu(J\sharp K) = 1$, pelo teorema 1.3.3 o nó $J\sharp K$ seria primo e portanto um dos nós factor seria o nó trivial, o que é absurdo porque $\mu(J) = \mu(K) = 1$ e $\mu(0_1) = 0$.

Se $\mu(J\sharp K) = 0$, o nó composto $J\sharp K$ seria o nó trivial, o que só poderia acontecer se J e K fossem nós triviais.

Portanto $\mu(J\sharp K) = 2$. \square

Capítulo 2

Polinómios de nós e enlaces

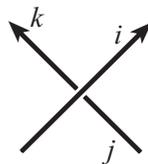
2.1 Polinómio de Alexander

Ao longo do século XX foram criados vários processos que permitiram classificar alguns nós. Em 1928, J. Alexander (1888-1971) associa a cada nó um polinómio de modo a que se um nó se puder transformar noutro, os seus respectivos polinómios são iguais. Contudo este polinómio não permite fazer uma total distinção entre os nós: dois nós podem estar associados ao mesmo polinómio e não serem ambiente isotópicos.

Durante 58 anos este foi o único polinómio que descreveu enlaces orientados. O polinómio de Alexander é baseado no simples cálculo do determinante de uma matriz associada a um diagrama de um enlace.

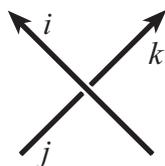
Para determinar o polinómio de Alexander [2] de um nó, temos inicialmente que identificar os vários cruzamentos e arcos do diagrama D que o representa. Por exemplo, podem identificar-se os cruzamentos com os números naturais, e os arcos com letras minúsculas. Estamos então em condições de definir uma matriz $n \times n$, onde n é o número de cruzamentos (que é sempre igual ao número de arcos) do diagrama D . Associando a cada linha da matriz um cruzamento e a cada coluna um arco, define-se a matriz de acordo com o seguinte processo:

- Se o cruzamento número $*$ é positivo, identificamos o arco que passa por cima com a letra i e os outros dois por j e k , de acordo com a figura:



coloca-se $1 - t$ na coluna i da linha $*$, -1 na coluna j e t na coluna k dessa mesma linha.

- Se o cruzamento número $*$ é negativo, identificamos o arco que passa por cima com a letra i e os outros dois por j e k , de acordo com a figura:



coloca-se $1 - t$ na coluna i da linha $*$, t na coluna j e -1 na coluna k dessa mesma linha.

- Se qualquer um dos arcos i , j ou k coincidem, coloca-se na respectiva coluna a soma das duas entradas que correspondem a esse arco.
- Nos diagramas com mais de 3 cruzamentos, sempre que os arcos não interfiram no cruzamento que está a ser classificado, coloca-se o valor 0 em todas as colunas dessa linha.

Após efectuar este processo, obtemos o polinómio de Alexander calculando o determinante de uma submatriz da matriz obtida.

Definição 2.1.1 A matriz $(n-1) \times (n-1)$ que se obtém por remoção da última linha e coluna da matriz $n \times n$ obtida pelo processo descrito anteriormente, é chamada matriz de Alexander de D . O determinante desta matriz é chamado polinómio de Alexander de D . Este polinómio do nó K representa-se $\Delta_{DK}(t)$.

Convencionou-se que o polinómio de Alexander resultante de uma matriz de ordem 0 é 1.

Note-se que o polinómio de Alexander depende, *a priori*, do diagrama do nó considerado e das designações atribuídas a cada cruzamento. Apresentemos os polinómios de Alexander de alguns nós.

Nó Trevo

Determinemos o polinómio de Alexander do nó trevo (T), considerando vários diagramas deste nó.

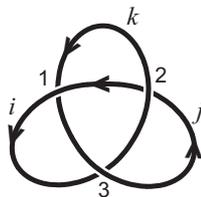
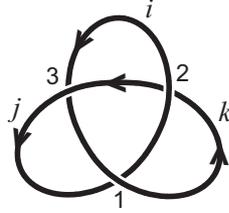


Figura 2.1: Diagrama minimal do nó trevo, D_T^1

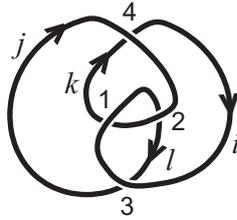
$$M(D_T^1) = \begin{matrix} & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1-t & t & -1 \\ t & -1 & 1-t \\ -1 & 1-t & t \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\Delta_{D_T^1}(t) = |M(D_T^1)| = \begin{vmatrix} 1-t & t \\ t & -1 \end{vmatrix} = -t^2 + t - 1$$

Figura 2.2: Diagrama minimal do nó trevo, D_T^2

$$M(D_T^2) = \begin{matrix} & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} t & -1 & 1-t \\ 1-t & t & -1 \\ -1 & 1-t & t \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\Delta_{D_T^2}(t) = |M(D_T^2)| = \begin{vmatrix} t & -1 \\ 1-t & t \end{vmatrix} = t^2 - t + 1 = -t^0 \cdot |M(D_T^1)|$$

Figura 2.3: Diagrama do nó trevo com 4 cruzamentos, D_T^3

$$M(D_T^3) = \begin{bmatrix} 1-t & -1 & t & 0 \\ -1 & 1-t & 0 & t \\ 1-t & t & 0 & -1 \\ t & 1-t & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{D_T^3}(t) = |M(D_T^3)| = \begin{vmatrix} 1-t & -1 & t \\ -1 & 1-t & 0 \\ 1-t & t & 0 \end{vmatrix} = -t^3 + t^2 - t = t|M(D_T^1)| = -t|M(D_T^2)|$$

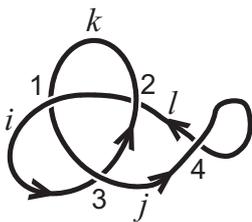


Figura 2.4: Diagrama do trevo com 4 cruzamentos, D_T^4

$$\Delta_{D_T^4}(t) = |M(D_T^4)| = t^3 - t^2 + t$$

$$|M(D_T^4)| = -t|M(D_T^1)| = t|M(D_T^2)| = -t^0|M(D_T^3)|$$

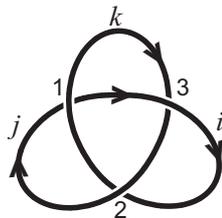


Figura 2.5: Diagrama da imagem no espelho do nó trevo, $D_{T'}$

$$\Delta_{D_{T'}}(t) = -t^2 + t - 1 = \Delta_{D_T^1}(t)$$

Nó trivial

Usando diferentes diagramas e diferentes designações para os cruzamentos podemos obter os seguintes polinómios associados ao nó trivial.



Figura 2.6: Diagrama minimal do nó trivial, D_O^1

$$\Delta_{D_O^1}(t) = 1.$$

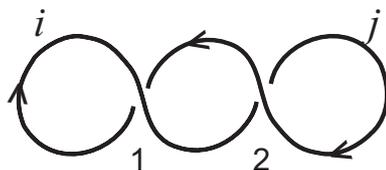


Figura 2.7: Diagrama do nó trivial com 2 cruzamentos, D_O^2

$$\Delta_{D_O^2}(t) = -t = -t|M(D_O^1)|$$

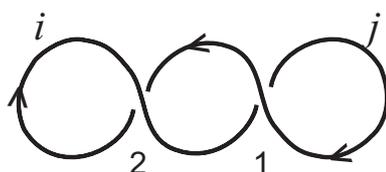


Figura 2.8: Diagrama do nó trivial com 2 cruzamentos, D_O^3

$$\Delta_{D_O^3}(t) = -1 = -t^0|M(D_O^2)| = t^{-1}|M(D_O^3)|.$$

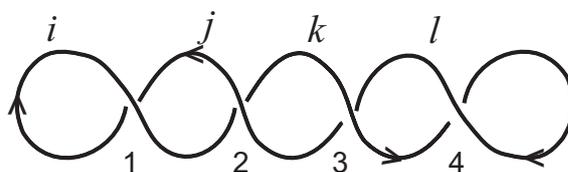


Figura 2.9: Diagrama do nó trivial com 4 cruzamentos, D_O^4

$$\Delta_{D_O^4}(t) = t^2 = t^2|M(D_O^1)| = -t|M(D_O^2)| = -t^2|M(D_O^3)|.$$

Polinómios de Alexander de outros nós

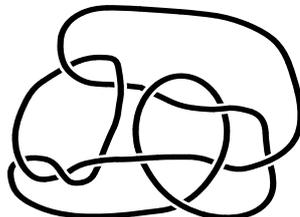


Figura 2.10: Diagrama do nó com 11 cruzamentos, D_K [17]

$$\Delta_{D_K}(t) = 1.$$

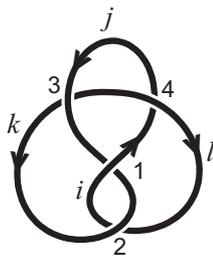


Figura 2.11: Diagrama minimal do nó figura oito, D_F

$$\Delta_{D_F}(t) = -t^2 + 3t - 1.$$

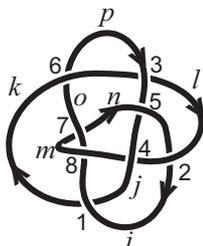


Figura 2.12: Diagrama do nó não invertível de Kawauchi, D_R

$$M(D_R) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1-t & -1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1-t & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t \\ 0 & 1-t & 0 & t & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & -1 & 1-t & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Um polinómio de Alexander do mais simples nó não invertível R , é então:

$$\Delta_{D_R}(t) = t^6 - 4t^5 + 8t^4 - 11t^3 + 8t^2 - 4t + 1.$$

Invertendo apenas a orientação do diagrama D_R , da figura 2.12, obtemos o diagrama D_{-R} , para o qual:

$$\begin{aligned} \Delta_{D_{-R}}(t) &= -t^7 + 4t^6 - 8t^5 + 11t^4 - 8t^3 + 4t^2 - t = \\ -t^{-1}(-t^7 + 4t^6 - 8t^5 + 11t^4 - 8t^3 + 4t^2 - t) &= t^6 - 4t^5 + 8t^4 - 11t^3 + 8t^2 - 4t + 1. \end{aligned}$$

Observando estes exemplos, podemos constatar que dependendo do diagrama que representa o nó e da identificação atribuída aos nós e cruzamentos, temos polinómios de Alexander iguais a menos do factor $\pm t^m$, para algum m inteiro.

De facto, é possível estender o polinómio de Alexander a enlaces e provar que um enlace é, a menos do factor $\pm t^m$, um invariante da classe de isotopia do enlace [2]. Assim, o polinómio de Alexander permite por exemplo, distinguir o nó trevo do nó trivial, mas apresenta algumas desvantagens salientadas nos exemplos anteriores:

- não permite distinguir um nó da sua imagem no espelho;
- não permite distinguir um nó do seu inverso;
- existem nós com polinómio de Alexander trivial que não são ambiente isotópicos ao nó trivial (figura 2.10).

2.2 Operações “skein” e polinómio de Conway

O polinómio de Alexander foi o único que descreveu nós e enlaces, durante cerca de 58 anos. Por volta dos anos 60, Conway introduz um polinómio, estritamente ligado ao polinómio de Alexander, mas baseado num método de computação recursivo, as chamadas operações “skein”.

2.2.1 Operações “skein”.

Dado um enlace orientado L , selecciona-se um ponto de cruzamento. Preservando a orientação do enlace e considerando que o ponto de cruzamento escolhido é positivo (negativo) identificamos o nó como L_+ (L_-), trocando esse cruzamento obtém-se L_- (L_+) e se o suprimirmos L_0 . Estas operações, que se designam de operações “skein”, permitem-nos obter diagramas que representam enlaces que diferem do inicial apenas num ponto de cruzamento. Assim, para um dado diagrama e cruzamento, existem três diagramas associados, diagramas “skein”: D_+ ; D_- ; D_0 , correspondentes aos enlaces denominados por L_+ ; L_- ; L_0 . Como é óbvio, os enlaces associados a L dependem da escolha do cruzamento. Na figura que se segue, estão representadas as modificações que se obtém no cruzamento seleccionado.

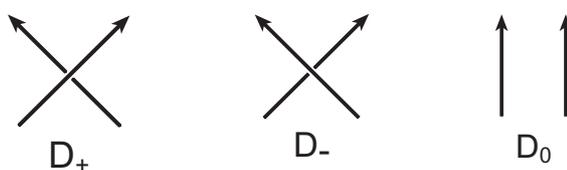


Figura 2.13: Diagramas “skein”.

Para facilitar a definição recursiva do polinómio que representa o enlace, torna-se muitas vezes útil o diagrama “skein” em árvore. Vejamos alguns exemplos.

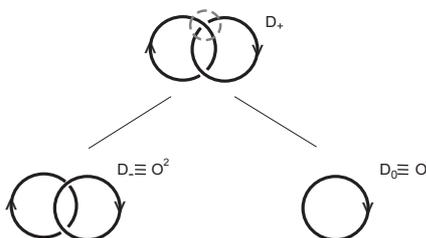


Figura 2.14: Diagrama “skein” em árvore dos anéis de Hopf (H_1)

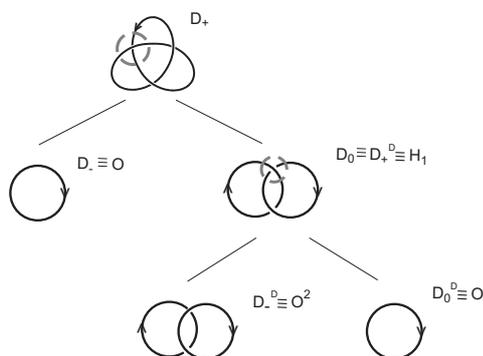


Figura 2.15: Diagrama “skein” em árvore do nó trevo (T)

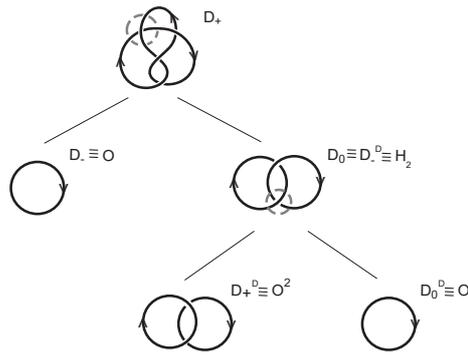


Figura 2.16: Diagrama “skein” em árvore do nó figura oito (F)

Observe-se que sempre que num dos ramos da árvore, de um dado nível, é obtido o nó trivial ou um enlace trivial com n componentes, o processo termina nessa ramificação, continuando nas outras até que esta decomposição em nós triviais ou enlaces triviais com n componentes termine em todas elas. No entanto, podemos considerar o diagrama em árvore suficiente, quando obtivermos em todos os ramos nós ou enlaces, já identificados, tal como é o caso do diagrama “skein” em árvore do nó de Kawauchi.

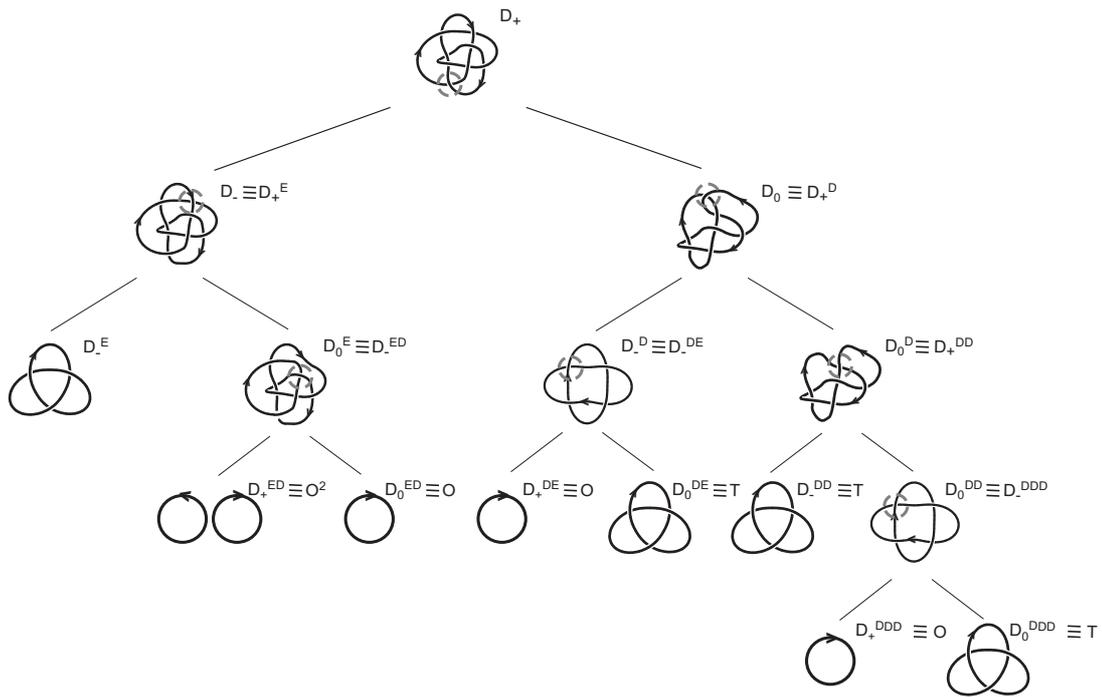
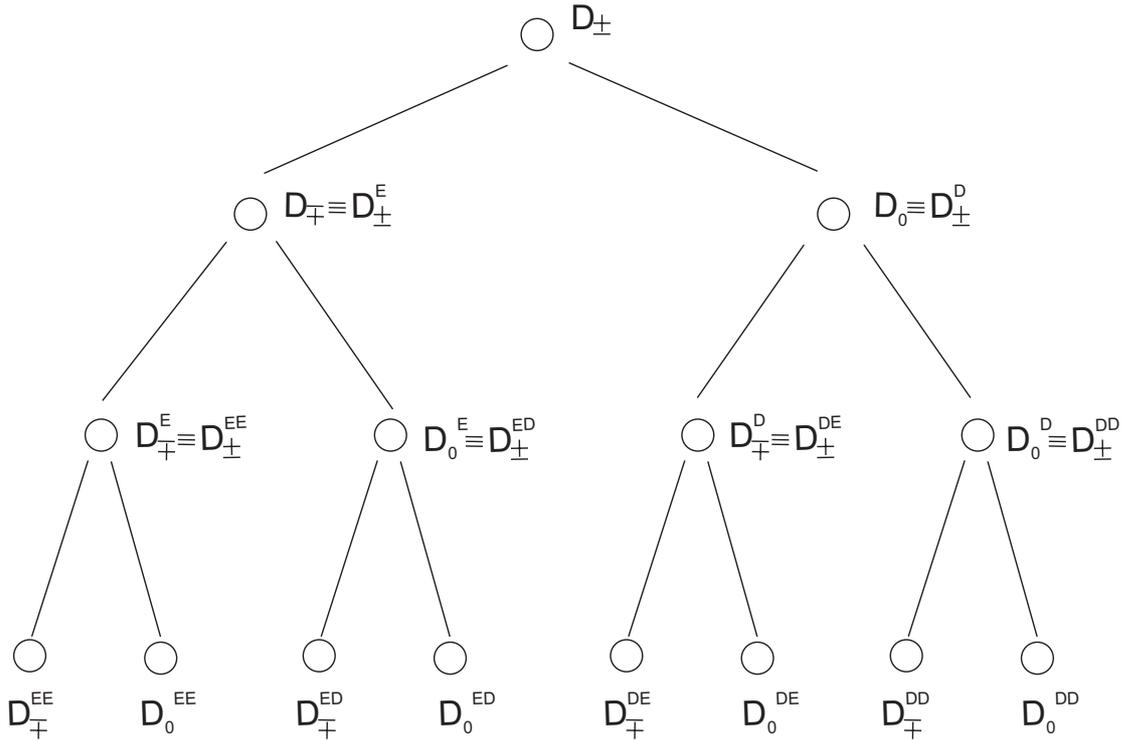


Figura 2.17: Diagrama “skein” em árvore do nó de Kawauchi (R)

Considerando que em cada nível, as circunferências da esquerda, central e da direita, representam os diagramas dos enlaces $L_+; L_-; L_0$ ou $L_-; L_+; L_0$, os diagramas “skein” em árvore podem ser generalizados pelo esquema que se segue:



2.2.2 Polinómio de Conway

Alexander provou [2] que se o seu algoritmo para determinar o polinómio associado a cada nó for aplicado apropriadamente aos três diagramas que representam K_+ ; K_- ; K_0 , os polinómios resultantes estão relacionados pela equação:

$$\Delta_{K_+}(t) - \Delta_{K_-}(t) = (1 - t) \Delta_{K_0}(t). \quad (2.1)$$

Para verificar esta relação Alexander escolhia os polinómios com termo independente e sem expoentes negativos. Conway observou que efectuando uma escolha diferente da de Alexander, era possível estabelecer entre estes polinómios associados aos nós, que vamos designar por $\Delta_K^*(t)$ [15], uma nova relação “skein”:

$$\Delta_{K_+}^*(t) - \Delta_{K_-}^*(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \Delta_{K_0}^*(t).$$

A ideia de Conway foi então generalizar a igualdade anterior para enlaces:

$$\Delta_{L_+}^*(t) - \Delta_{L_-}^*(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \Delta_{L_0}^*(t). \quad (2.2)$$

Efectuando a mudança de variável

$$z = t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$$

o polinómio obtido, que designamos por $\nabla_L(z)$, verifica a relação “skein”:

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z \nabla_{L_0}(z).$$

Conway [6] define então o seu polinómio recursivamente, do seguinte modo:

Definição 2.2.1 *Um polinómio que identifica um determinado enlace L , é um polinómio de Conway, se verifica as seguintes condições:*

C_0 : $\nabla_L(z)$ é um invariante da classe de isotopia de L ;

C_I : O polinómio associado ao nó trivial é 1, isto é,

$$\nabla_O(z) = 1;$$

C_{II} : Os enlaces $L_+; L_-; L_0$ estão relacionados pela relação “skein”:

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z \nabla_{L_0}(z).$$

A consistência destes axiomas está provada em [11].

Com base nos esquemas em árvore da secção 2.2, calculemos os polinómios de Conway de alguns nós e enlaces.

Enlace trivial com duas componentes

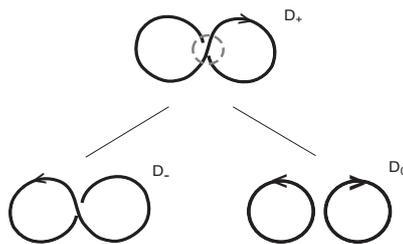


Figura 2.18: Diagrama “skein” em árvore

Como L_+ e L_- são ambos nós triviais, por C_I , têm polinómio associado $\nabla_O(z) = 1$ e portanto,

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z \nabla_{L_0}(z) \Leftrightarrow \nabla_{L_0}(z) = 0.$$

Logo

$$\nabla_{O^2}(z) = 0.$$

Anéis de Hopf (figura 2.14)

Como $L_- \equiv O^2$ e $L_0 \equiv O$, temos:

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z \nabla_{L_0}(z) \Leftrightarrow \nabla_{L_+}(z) = z \nabla_{L_0}(z) + \nabla_{L_-}(z) \Leftrightarrow \nabla_{L_+}(z) = z.$$

Logo

$$\nabla_{H_1}(z) = z.$$

Analogamente, temos que $\nabla_{H_2}(z) = -z$.

Trevo (figura 2.15)

Como $L_- \equiv O$ e $L_0 \equiv H_1$, temos:

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z \nabla_{L_0} \Leftrightarrow \nabla_{L_+} - 1 = z \cdot z \Leftrightarrow \nabla_{L_+} = z^2 + 1.$$

Logo

$$\nabla_T(z) = z^2 + 1.$$

Nó de Kawauchi (figura 2.17)

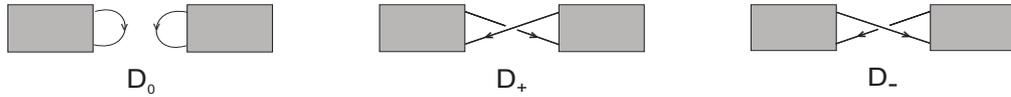
Procedendo de modo análogo, obtemos:

$$\nabla_R(z) = -z^6 - 2z^4 - z^2 + 1.$$

Verificamos anteriormente que $\Delta_{O^2}(z) = 0$, vejamos qual o polinómio de Conway para qualquer tipo de enlace formado por duas componentes soltas.

Teorema 2.2.1 *Sejam L e L' dois enlases. Então o polinómio de Conway associado ao enlace $L \cup L'$ é o polinómio nulo.*

Demonstração: Consideremos os enlases L e L' . Vamos construir com estes enlases os seguintes diagramas “skein”: D_+ e D_- que representam a união do enlace L com o L' através da introdução de um cruzamento positivo e um cruzamento negativo, respectivamente. O diagrama D_0 identifica o enlace $L \cup L'$.



Uma vez que os diagramas D_+ e D_- são isotópicos, por C_0 da definição 2.2.1 podemos concluir que $\nabla_{D_+}(z) = \nabla_{D_-}(z)$, e por C_{II} , que $\nabla_{D_+}(z) - \nabla_{D_-}(z) = z \nabla_{D_0}(z)$, o que nos permite concluir que $\nabla_{D_0}(z) = 0$. Ou seja $\nabla_{L \cup L'}(z) = 0$. \square

Corolário 2.2.1 *Seja O o nó trivial e O^n o enlace trivial com n componentes, sendo $n \geq 2$. Então o polinómio de Conway associado ao enlace O^n é:*

$$\nabla_{O^n}(z) = 0, n \geq 2.$$

O polinómio de Conway permite definir recursivamente os polinómios associados a cada enlace, contudo continua a não distinguir um nó não reflexivo da sua imagem no espelho, os pares de nós não invertíveis, nem o nó trivial [6].

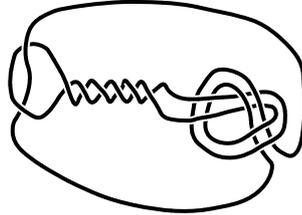


Figura 2.19: Diagrama de um nó não trivial com $\nabla_D(z) = 1$

2.3 Polinómio de Jones

2.3.1 Definição e exemplos

Em 1985, Vaughan Jones [10] descreve um novo polinómio para enlaces, que vem resolver alguns dos problemas associados ao polinómio de Conway. Este novo polinómio, à semelhança do que acontecia com o de Conway também é definido recursivamente.

Definição 2.3.1 *Um polinómio que identifica um determinado enlace L , é um polinómio de Jones, se verifica as seguintes condições:*

J_0 : $V(L; t)$ é um invariante da classe de isotopia de L ;

J_I : O polinómio associado ao nó trivial é 1, isto é,

$$V(O; t) = 1;$$

J_{II} : Os nós ou enlaces L_+ ; L_- ; L_0 estão relacionados pela relação “skein”:

$$t^{-1}V(L_+; t) - tV(L_-; t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L_0; t).$$

O algoritmo para calcular o polinómio de Jones é análogo ao usado para determinar o polinómio de Conway. Com base no diagrama em árvore de um qualquer enlace L e na relação “skein” da definição 2.3.1 podemos escrever o polinómio de Jones do enlace L como a soma de polinómios de enlaces triviais com n componentes, O^n ou seja,

$$V(L, t) = f_1(t)V(O, t) + f_2(t)V(O^2, t) + \dots + f_n(t)V(O^n, t).$$

A partir dos diagramas “skein” em árvore da secção 2.2, determinemos os polinómios de Jones de alguns nós e enlaces.

Enlace trivial com duas componentes (figura 2.18)

Como L_+ e L_- são nós triviais, por J_I , $V(O; t) = 1$ e portanto,

$$\begin{aligned} t^{-1}V(O; t) - tV(O; t) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L_0; t) \Leftrightarrow \\ t^{-1} - t &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(O^2; t) \Leftrightarrow \\ V(O^2; t) &= -t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Anéis de Hopf (figura 2.14)

Considerem-se os anéis de Hopf H_1

$$\begin{aligned} t^{-1}V(L_+; t) - tV(L_-; t) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L_0; t) \Leftrightarrow \\ t^{-1}V(H_1; t) - tV(O^2; t) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(O; t) \Leftrightarrow \\ t^{-1}V(H_1; t) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}).1 + t(-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$V(H_1; t) = -t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}}.$$

Trocando a orientação numa das componentes, temos:

$$V(H_2; t) = -t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}}.$$

Tal como já acontecia com o polinómio de Conway, o polinómio de Jones permite-nos distinguir os enlaces H_1 e H_2

Nó Trevo (figura 2.15)

$$\begin{aligned} t^{-1}V(K_+; t) - tV(K_-; t) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(K_0; t) \Leftrightarrow \\ t^{-1}V(T; t) - tV(O; t) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(H_1; t) \Leftrightarrow \\ t^{-1}V(T; t) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}).(-t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) + t.1 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$V(T; t) = -t^4 + t^3 + t.$$

Consideremos agora a imagem no espelho do nó trevo, $T^!$:

$$\begin{aligned} t^{-1}V(K_+; t) - tV(LK_-; t) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(K_0; t) \Leftrightarrow \\ t^{-1}V(O; t) - tV(T^!; t) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(H_2; t) \Leftrightarrow \\ -tV(T^!; t) &= t^{-1}.1 + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}).(-t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}}) \Leftrightarrow \\ V(T^!; t) &= t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}. \end{aligned}$$

Tal como já acontecia com o polinómio de Conway, o polinómio de Jones permite-nos distinguir os enlacs H_1 e H_2

Nó Figura Oito (figura 2.16)

$$\begin{aligned} t^{-1}V(K_+; t) - tV(K_-; t) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(K_0; t) \Leftrightarrow \\ t^{-1}V(F; t) - tV(O; t) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(H_2; t) \Leftrightarrow \\ t^{-1}V(F; t) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}).(-t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}}) + t.1 \Leftrightarrow \\ V(\tilde{F}; t) &= t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2. \end{aligned}$$

Nó de Kawauchi (figura 2.17)

$$V(R; t) = t^{-4} - 3t^{-3} + 5t^{-2} - 6t^{-1} + 7 - 6t + 5t^2 - 3t^3 + t^4.$$

Trocando apenas a orientação ao nó R ,

$$V(-R; t) = t^{-4} - 3t^{-3} + 5t^{-2} - 6t^{-1} + 7 - 6t + 5t^2 - 3t^3 + t^4.$$

No caso do nó não invertível de Kawauchi, o polinómio de Jones não o distingue do seu inverso.

Com base nestes exemplos, podemos constatar que o polinómio de Jones parece já resolver alguns dos problemas da diferenciação de enlacs, que apresentavam os polinómios de Alexander e Conway.

Note-se que existe uma relação para $t = -1$, entre o polinómio de Jones e o polinómio $\Delta_L^*(t)$.

Teorema 2.3.1 *Se L é um enlace com n componentes então*

$$V(L; -1) = (-1)^{n-1} \Delta_L^*(-1).$$

Demonstração: A partir da relação “skein” 2.2, temos:

$$\Delta_{L_+}^*(t) - \Delta_{L_-}^*(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \Delta_{L_0}^*(t).$$

Sustituindo $t = -1$,

$$\Delta_{L_+}^*(-1) - \Delta_{L_-}^*(-1) = ((-1)^{\frac{1}{2}} - (-1)^{-\frac{1}{2}}) \Delta_{L_0}^*(-1).$$

Multiplicando a expressão anterior pelo factor $-(-1)^{n_+ - 1}$, onde n_+ representa o número de componentes de L_+ , temos

$$-(-1)^{n_+ - 1} \Delta_{L_+}^*(-1) + (-1)^{n_+ - 1} \Delta_{L_-}^*(-1) = -(-1)^{n_+ - 1} ((-1)^{\frac{1}{2}} - (-1)^{-\frac{1}{2}}) \Delta_{L_0}^*(-1).$$

Uma vez que $n_- = n_+$ e $n_0 = n_+ + 1$ ou $n_0 = n_+ - 1$, onde n_- e n_0 representam o número de componentes de L_- e L_0 , respectivamente, temos

$$-(-1)^{n_+ - 1} \Delta_{L_0}^*(-1) = (-1)^{n_0 - 1} \Delta_{L_0}^*(-1)$$

e

$$-(-1)^{n_+ - 1} \Delta_{L_+}^*(-1) + (-1)^{n_- - 1} \Delta_{L_-}^*(-1) = (-1)^{n_0 - 1} ((-1)^{\frac{1}{2}} - (-1)^{-\frac{1}{2}}) \Delta_{L_0}^*(-1). \quad (2.3)$$

Definindo

$$\tilde{\Delta}_L^*(-1) := (-1)^{n-1} \Delta_L^*(-1)$$

sendo n o número de componentes de L .

A partir da relação 2.3 temos então que

$$-\tilde{\Delta}_{L_+}^*(-1) + \tilde{\Delta}_{L_-}^*(-1) = ((-1)^{\frac{1}{2}} - (-1)^{-\frac{1}{2}}) \tilde{\Delta}_{L_0}^*(-1).$$

Note-se que substituindo $t = -1$ em J_{II} da definição de polinómio de Jones, temos

$$-V(L_+; -1) + V(L_-; -1) = ((-1)^{\frac{1}{2}} - (-1)^{-\frac{1}{2}}) V(L_0; -1) \quad (2.4)$$

Assim, $V(L; -1)$ e $\tilde{\Delta}_L^*(-1)$ estão definidos pela mesma relação “skein” e portanto:

$$V(L; -1) = \tilde{\Delta}_L^*(-1) := (-1)^{n-1} \Delta_L^*(-1). \square$$

2.3.2 Características do polinómio de Jones

Tal como vimos para o polinómio de Conway, o polinómio de Jones também apresenta propriedades que facilitam o processo recursivo de determinação do polinómio de um enlace. Contudo, a alguns enlaces estão agora associados a polinómios significativamente diferentes. Vimos que $\Delta_{O^2}(z) = 0$ enquanto que $V(O^2; t) = -t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$. Estudemos agora o que se passa com o polinómio do enlace trivial com n componentes.

Teorema 2.3.2 *Seja O^n o enlace trivial com n componentes. Então o polinómio de Jones associado ao enlace O^n é:*

$$V(O^n; t) = (-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^{n-1} = (-1)^{n-1}(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})^{n-1}.$$

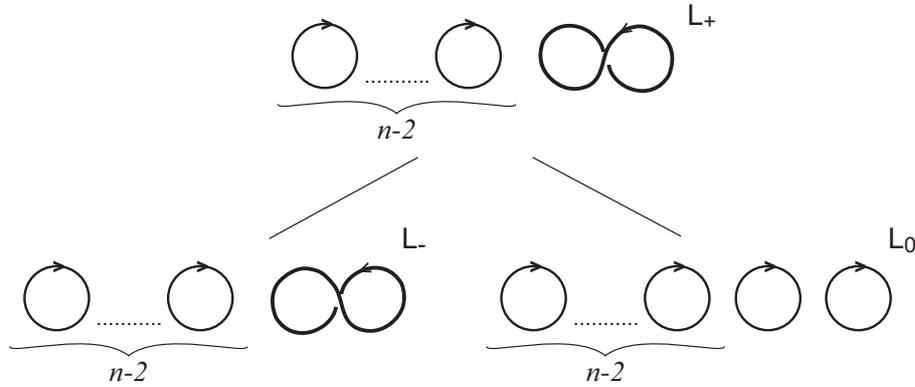
Demonstração: Provemos por indução matemática sobre n .

Para $n = 1$, estamos na condição J_I da definição do polinómio de Jones.

Consideremos agora como hipótese de indução que

$$V(O^{n-1}; t) = (-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^{n-2}.$$

Efectuando o nível 0 do diagrama em árvore correspondente a esta situação:



Podemos identificar $L_+ \equiv L_- \equiv O^{n-1}$ e $L_0 \equiv O^n$, assim

$$\begin{aligned} t^{-1}V(L_+, t) - tV(L_-, t) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L_0, t) \Leftrightarrow \\ V(O^{n-1}, t)(t^{-1} - t) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(O^n, t), \end{aligned}$$

usando a hipótese de indução,

$$V(O^n, t) = \frac{(t^{-1} - t)(-1)^{n-2}(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})^{(n-2)}}{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}} = (-1)^{n-1}(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})^{n-1}. \square$$

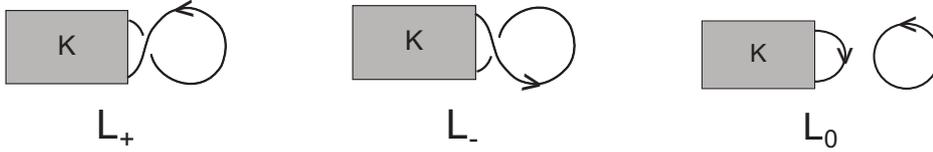
Verifiquemos como se comporta este novo invariante em relação à soma conexa de dois nós e aos enlaces constituídos por duas componentes soltas.

Teorema 2.3.3 *Seja L um enlace e O^n o enlace trivial com n componentes. Então, o polinómio de Jones associado ao enlace $L \cup O^n$ é dado por:*

$$V(L \cup O^n; t) = (-1)^n(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})V(L, t).$$

Demonstração: Provemos por indução sobre n .

Para $n = 1$ consideremos os diagramas “skein”



Identifiquemos $L \cup O$ com L_0 . Efectuando um movimento R_1 sobre os diagramas de L_+ e L_- , obtemos um diagrama do enlace L , logo $L_+ \equiv L_- \equiv L$.

Assim, por J_{II} da definição recursiva do polinómio de Jones:

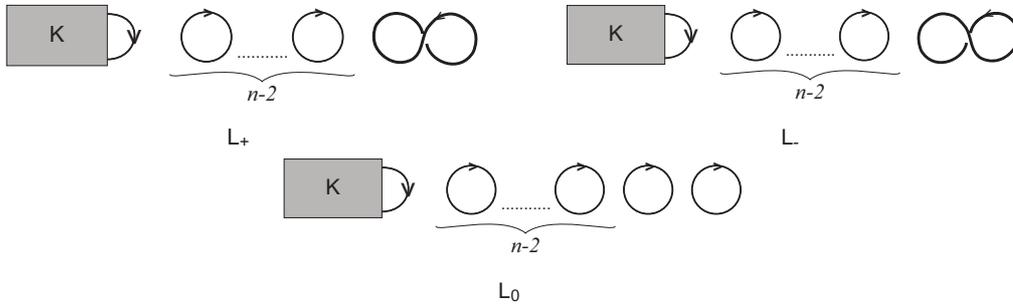
$$t^{-1}V(L, t) - tV(L, t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L_0, t) \Leftrightarrow$$

$$V(L_0, t) = \frac{(t^{-1} - t)V(L, t)}{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}} = -(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})V(L, t).$$

Consideremos a hipótese de indução:

$$V(L \cup O^{n-1}; t) = (-1)^{n-1}(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})^{n-1}$$

e os diagramas “skein”:



Note-se que $L_+ \equiv L_- \equiv L \cup O^{n-1}$, logo

$$t^{-1}V(L \cup O^{n-1}, t) - tV(L \cup O^{n-1}, t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L \cup O^n, t).$$

Usando a hipótese de indução

$$V(L \cup O^n, t) = \frac{(t^{-1} - t)(-1)^{n-1}(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})V(K, t)}{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}} = (-1)^n(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})V(L, t). \square$$

Teorema 2.3.4 *Seja $J\#K$ a soma conexa dos nós J e K então, o polinómio de Jones de $J\#K$ é:*

$$V(J\#K; t) = V(J, t)V(K, t).$$

Demonstração: Sejam D_J e D_K os diagramas que representam os nós J e K , respectivamente. Ignoremos temporariamente o diagrama D_K e representemos em árvore D_J . Com base neste diagrama, podemos escrever o polinómio de Jones de J :

$$V(J, t) = f_1(t)V(O, t) + f_2(t)V(O^2, t) + \dots + f_m(t)V(O^m, t)$$

Fazendo agora a soma conexa do diagrama D_K com os diagramas obtidos em cada um dos ramos da árvore que decompõe D_J , temos

$$V(J\#K, t) = f_1(t)V(O, t) + f_2(t)V(K \cup O, t) + f_3(t)V(K \cup O^2) \dots + f_m(t)V(K \cup O^{m-1}, t).$$

Aplicando o teorema 2.3.3,

$$V(K \cup O^\alpha, t) = (-1)^\alpha (t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})^\alpha V(K, t) = V(O^{\alpha+1}, t)V(K, t).$$

Assim,

$$\begin{aligned} V(J\#K, t) &= f_1(t)V(O, t)V(K, t) + f_2(t)V(O^2, t)V(K, t) + \dots + f_m(t)V(O^m, t)V(K, t) = \\ &= (f_1(t)V(O, t) + f_2(t)V(K \cup O, t) + f_3(t)V(K \cup O^2) \dots + f_m(t)V(K \cup O^{m-1}, t))V(K, t) = \\ &= V(J, t)V(K, t). \square \end{aligned}$$

O diagrama em árvore que se segue, ilustra como chegar a este resultado no caso particular da soma conexa do nó trevo com o nó figura oito.

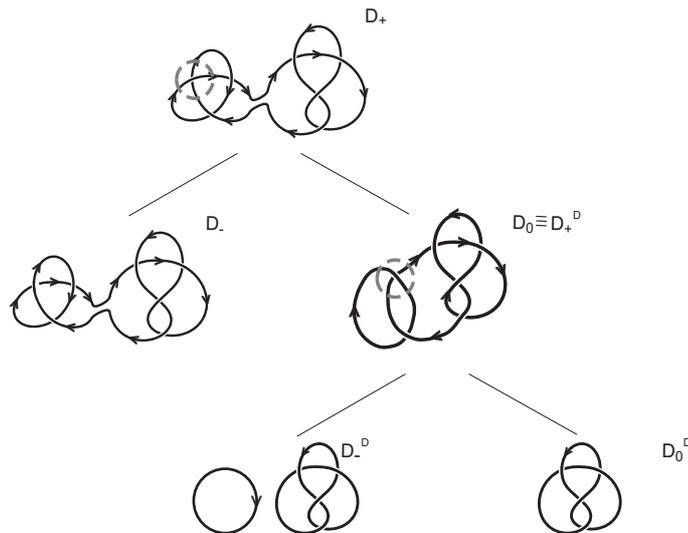


Figura 2.20: Digrama em árvore do nó $T\#F$

Teorema 2.3.5 *Sejam L e L' dois enlaces então*

$$V(L \cup L'; t) = -(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})V(L, t)V(L', t).$$

Demonstração: Sejam D_L e $D_{L'}$ os diagramas que representam os enlaces L e L' , respectivamente. Tal como na demonstração do teorema anterior, ignoremos inicialmente o diagrama D_L e representemos em árvore $D_{L'}$. Com base neste diagrama, podemos escrever o polinómio de Jones de L :

$$V(L, t) = f_1(t)V(O, t) + f_2(t)V(O^2, t) + \cdots + f_m(t)V(O^m, t).$$

Acrescentando em cada ramo do diagrama em árvore de D_L o diagrama de L' , $D_{L'}$, sem que seja introduzido qualquer cruzamento entre estes dois nós, temos

$$V(L \cup L', t) = f_1(t)V(L' \cup O, t) + f_2(t)V(L' \cup O^2, t) + \cdots + f_m(t)V(L' \cup O^m, t).$$

Aplicando o teorema 2.3.3,

$$V(L' \cup O^\alpha, t) = V(O^{\alpha+1}, t)V(L', t).$$

Assim,

$$\begin{aligned} V(L \cup L', t) &= f_1(t)V(O^2, t)V(L', t) + f_2(t)V(O^3, t)V(L', t) + \cdots + f_m(t)V(O^{m+1}, t)V(L', t) = \\ &= (f_1(t)V(O^2, t)V(L', t) + f_2(t)V(O^2, t)V(O^2, t)V(L', t) + \cdots + f_m(t)V(O^m, t)V(O^2, t)V(L', t)) = \\ &= (f_1(t)V(O, t) + f_2(t)V(O^2, t) + \cdots + f_m(t)V(O^m, t))V(L', t)V(O^2, t) = \\ &= V(L, t)V(L', t)(- (t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})). \end{aligned}$$

□

O diagrama em árvore da figura 2.21 ilustra a demonstração do teorema anterior, no caso particular do nó $T \cup F$.

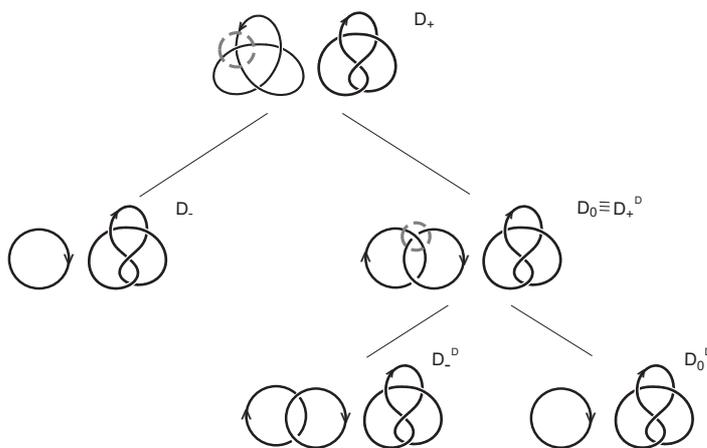


Figura 2.21: Diagrama em árvore do enlace $T \cup F$

Um dos problemas do polinómio de Conway era o de não distinguir um nó da sua imagem no espelho. Vimos na secção anterior que os polinómios de Jones associados ao nó trevo e à sua imagem no espelho são distintos. O teorema que se segue permite generalizar este resultado.

Teorema 2.3.6 *Seja $L^!$ a imagem no espelho do enlace L então*

$$V(L^!; t) = V(L, t^{-1}).$$

Demonstração: Suponhamos que D_L é um diagrama do enlace L e que $D_{L^!}$ representa a sua imagem no espelho. Em cada um dos ramos, os diagramas “skein” de L e $L^!$, diferem apenas nos cruzamentos. Para um dado cruzamento i em D_L a relação “skein” é:

$$\begin{aligned} t^{-1}V(L_+; t) - tV(L_-; t) &= \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right) V(L_0, t) \Leftrightarrow \\ V(L_+; t) &= t^2V(L_-; t) - t \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right) V(L_0, t). \end{aligned}$$

Para o cruzamento equivalente $-i$ em $D_L^!$ a relação “skein” difere apenas no expoente de t :

$$t^{-1}V(L_+^!; t) - tV(L_-^!; t) = \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right) V(L_0^!, t) \Leftrightarrow \quad (2.5)$$

$$V(L_-^!; t) = t^{-2}V(L_+^!; t) - t^{-1} \left(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) V(L_0^!, t). \quad (2.6)$$

Definindo

$$\tilde{V}(L^!; t^{-1}) := V(L^!; t)$$

podemos reescrever a relação 2.5

$$\tilde{V}(L_-^!; t^{-1}) = t^{-2}\tilde{V}(L_+^!; t^{-1}) - t^{-1} \left(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) \tilde{V}(L_0^!, t^{-1}).$$

Logo

$$V(L; t^{-1}) = \tilde{V}(L^!; t^{-1}) := V(L^!, t).$$

□

Corolário 2.3.1 *Se o enlace L é reflexivo então*

$$V(L, t) = V(L, t^{-1}).$$

Sendo o nó figura oito F um nó reflexivo, o seu polinómio de Jones

$$V(F; t) = t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2$$

é simétrico relativamente às potências de t .

Contudo, dado um polinómio de Jones simétrico, não podemos concluir nada quanto à sua reflexividade. Por exemplo, o nó não reflexivo

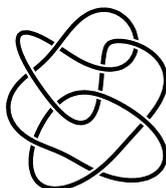


Figura 2.22: Nó 9_{42}

é representado pelo polinómio:

$$V(9_{42}; t) = t^{-3} - t^{-2} + t^{-1} - 1 + t - t^2 + t^3 = V(9_{42}^!; t).$$

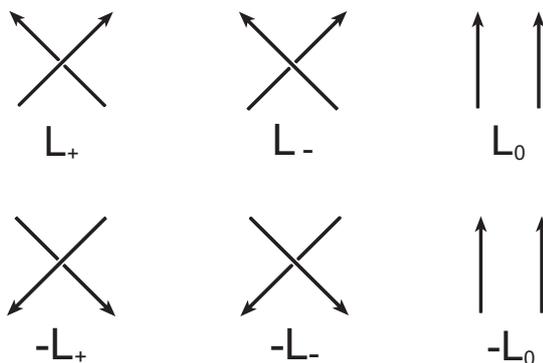
O corolário 2.3.1 é apenas útil para concluir a não reflexividade de um enlace. Por exemplo, $V(T; t) = -t^4 + t^3 + t$ e como não há simetria nas potências de t , deste polinómio podemos concluir que o nó trevo não é reflexivo.

Um outro problema clássico na identificação de enlaces, prende-se com a distinção de um enlace do seu inverso. Vimos anteriormente que este polinómio não distingue o par de enlaces não invertíveis R e $-R$. Podemos generalizar:

Teorema 2.3.7 *Seja $-L$ o enlace que se obtém de L considerando a orientação contrária, então*

$$V(-L; t) = V(L, t).$$

Demonstração: Consideremos o diagrama em árvore do enlace L . Para obter o diagrama em árvore de $-L$, basta trocar a orientação dos diagramas “skein” de L . Note-se que ao fazer esta troca na orientação alteramos a orientação de todos os cruzamentos e tal como podemos constatar pela figura que se segue, os diagramas “skein” de $-L$ coincidem com os de L .



Logo

$$V(-L; t) = V(L, t).$$

□

Em relação aos enlaces com mais do que uma componente, o polinómio de Jones vai permitir distinguir enlaces que diferem apenas na orientação de uma das suas componentes, tal como vimos para os anéis de Hopf. Mas mais do que distinguir, existe uma relação entre estes dois tipos de enlaces.

Lickokish e Millet provaram o seguinte teorema [18]:

Teorema 2.3.8 *Sejam $L = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ um enlace orientado com n componentes ($n > 1$) e $\hat{L} = \{K_1, K_2, \dots, K_{n-1}, -K_n\}$ um enlace com a mesma orientação em todas as suas componentes, com excepção da componente K_n , que tem orientação contrária. Então*

$$V(\hat{L}; t) = t^{-3l} V(L, t),$$

onde l é o número de ligação entre K_n e K_i , $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, isto é, $l = \sum_{i=1}^{n-1} lk(K_n, K_i)$.

No caso dos anéis de Hopf (H_1), $l = 1$ e portanto

$$V(H_2, t) = t^{(-3) \times 1} \cdot V(H_1, t) = t^{-3} (-t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) = -t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}}.$$

Com base neste resultado, podemos concluir que se o número de ligação entre a componente com orientação contrária, K_n e $L - K_n$ for zero, $V(\hat{L}, t) = V(L, t)$.

Uma outra vantagem do polinómio de Jones, no que diz respeito aos enlaces, é a de nos permitir saber o número de componentes de um enlace a partir da expressão do polinómio.

Proposição 2.3.1 *Seja L é um enlace orientado com n componentes ($n > 1$), então*

$$V(L, 1) = (-2)^{n-1}.$$

Demonstração: Considerando J_{II} da definição de polinómio de Jones e substituindo t por 1, temos

$$1.V(L_+, 1) - 1.V(L_-, 1) = 0 \Leftrightarrow V(L_+, 1) = V(L_-, 1).$$

Assim, se efectuarmos uma troca dos cruzamentos, o valor de $V(L, 1)$ mantém-se inalterado. Na medida em que se efectuarmos adequadas trocas nos cruzamentos (proposição 1.3.1), transformamos L num enlace trivial com n componentes, logo

$$V(L, 1) = V(O^n, 1).$$

Sendo

$$V(O^n, t) = (-1)^{n-1} (t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})^{n-1}$$

temos que

$$V(L, 1) = V(O^n, 1) = (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1} = (-2)^{n-1}.$$

□

Consideremos mais uma vez os anéis de Hopf H_1 :

$$V(H_1, t) = -(t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{1}{2}}).$$

Fazendo $t = 1$, temos $V(H_1, 1) = -2$.

Logo,

$$V(H_1, 1) = (-2)^{n-1} \Leftrightarrow -2 = (-2)^{n-1} \Leftrightarrow n = 2$$

ou seja, tal como já sabíamos, H_1 é um enlace com duas componentes.

Da mesma forma, a proposição anterior permite distinguir se um dado polinómio representa um nó ou um enlace, na medida em que para todos os nós $V(L, 1) = (-2)^0 = 1$. Uma outra consequência da proposição 2.3.1 é a de que, o polinómio de Jones nunca pode ser zero.

Vimos para os polinómios anteriores, que ao mesmo polinómio estão associados enlaces que não são ambiente isotópicos. Por exemplo, o polinómio de Alexander 1 e o polinómio de Conway 1, identificam nós não triviais (figuras 2.10 e 2.19, respectivamente). No caso do polinómio de Jones, não se conhece ainda nenhum nó não trivial ao qual esteja associado o polinómio igual a 1. Contudo, duas questões continuam ainda em aberto:

- Existirá algum nó não trivial K cujo polinómio de Jones seja igual a 1?
- Existirá um enlace L não trivial com n componentes ($n > 1$), tal que

$$V(L, t) = (-1)^{n-1} (t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})^{n-1}?$$

Existe no entanto, uma infinidade de enlaces que não eram distinguíveis pelos polinómios de Alexander e de Conway, mas que já o são pelo polinómio de Jones. Conhecem-se também nós, que apesar de não serem ambiente isotópicos têm associado o mesmo polinómio de Jones, o que nos leva a concluir que este polinómio não permite ainda classificar todos os enlaces.

De seguida vamos apresentar um exemplo de um par de nós que não são ambiente isotópicos e que não são distinguíveis pelo polinómio de Jones mas que o eram pelo polinómio de Alexander, e outro, em que estes dois tipos de polinómios não permitem a sua identificação [20].



Figura 2.23: Nós K_1 e K_2 não distinguíveis pelo polinómio de Jones

$$V(K_1, t) = V(K_2, t) = (t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2)^2$$

enquanto

$$\Delta(K_1, t) = (1 - 3t + t^2)^2$$

$$\Delta(K_2, t) = -1 + 3t - 5t^2 + 7t^3 - 5t^4 + 3t^5 - t^6.$$



Figura 2.24: Nós J_1 e J_2 não distinguíveis pelos polinômios de Jones e Alexander

$$\Delta(J_1, t) = \Delta(J_2, t) = 2 - 6t + 9t^2 - 6t^3 + 2t^4$$

e

$$V(J_1, t) = V(J_2, t) = 2t^{-2} - 6t^{-1} + 9 - 6t + 2t^2.$$

2.4 Polinômio Homfly

Contrariamente ao que aconteceu com o polinômio de Alexander, que se manteve inalterável cerca de 40 anos, bastaram 4 meses para que surgisse um sucessor do polinômio de Jones. As semelhanças entre as relações “skein” C_{II} e J_{II} indicam que os polinômios de Conway e de Jones são casos particulares de uma relação mais geral. Este novo polinômio de duas variáveis, foi baseado no trabalho simultâneo e independente de quatro grupos de matemáticos [8]: Freyd e Yetter; Hoste; Lickorish; Millett e Ocneanu, ficando o polinômio conhecido por H.O.M.F.L.Y..

Tal como os polinômios anteriores, também este novo polinômio é definido recursivamente e as suas expressões determinadas com base nos diagramas “skein” dos respectivos enlaces.

Definição 2.4.1 *Um polinômio que identifica um determinado enlace L , é um polinômio Homfly nas variáveis l e m , $P(L; l, m)$, ou abreviadamente $P(L)$, se verifica as seguintes condições:*

H_0 : $P(L; l, m)$ é um invariante da classe de isotopia de L ;

H_I : O polinômio associado ao nó trivial é 1, isto é,

$$P(O; l, m) = 1;$$

H_{II} : Os enlaces $L_+; L_-; L_0$ estão relacionados pela relação “skein”:

$$lP(L_+; l, m) + l^{-1}P(L_-; l, m) + mP(L_0; l, m) = 0.$$

Tal como já foi referido, este polinómio apresenta-se como uma generalização dos dois polinómios anteriores. Considerando $l = i$ e $m = -iz$ estamos perante a relação “skein” do polinómio de Conway $\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z \nabla_{L_0}(z)$. E no caso de $l = it^{-1}$ e $m = i(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$ verificamos que é obtida a relação “skein” do polinómio de Jones, $t^{-1}V(L_+; t) - tV(L_-; t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L_0, t)$, ou seja:

$$\nabla_L(z) = P(L; i, -iz)$$

$$V(L, t) = P(L; it^{-1}, (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})i).$$

Para os mesmos nós e enlaces que já determinámos os polinómios antecessores, passaremos a apresentar os respectivos polinómios de Homfly.

Enlace trivial com duas componentes: $P(O^2; l, m) = -m^{-1}(l + l^{-1})$;

Enlace trivial com n componentes: $P(O^n; l, m) = [-m^{-1}(l + l^{-1})]^{n-1}$;

Nó trevo: $P(T; l, m) = l^{-2}m^{-2} - l^{-4} - 2l^{-2}$;

Nó figura oito: $P(F; l, m) = (-l^{-2} - 1 - l^2) + m^2$;

Nó de Kawauchi:

$P(R; l, m) = m^6 - m^4l^2 - 4m^4 - m^4l^{-2} + 2m^2l^2 + 5m^2 + 2m^2l^{-2} - l^2 - 1 - l^{-2}$;

Anéis de Hopf H_1 : $P(H_1; l, m) = (l^{-3} + l^{-1})m^{-1} - l^{-1}m$;

Anéis de Hopf H_2 : $P(H_2; l, m) = (l + l^3)m^{-1} - lm$.

Este polinómio apresenta interessantes propriedades, muitas delas semelhantes às verificadas para o polinómio de Jones e que se provam de modo análogo.

Teorema 2.4.1 *Sejam L e L' dois enlaces. Então*

$$P(L \cup L'; l, m) = -(l^{-1} + l)m^{-1}P(L; l, m)P(L'; l, m).$$

Teorema 2.4.2 *Sejam J e K dois nós. Então*

$$P(J\#K; l, m) = P(J; l, m)P(K; l, m).$$

Assim, à união e à soma conexa dos nós trevo (T) e figura oito (F) estão associados os polinómios de Homfly:

$$P(T \cup L) = (l^{-5} + 2l^{-3} + 2l^{-1} + l)m^{-3} + (l^{-7} - 4l^{-5} - 7l^{-3} - 6l^{-1} - 2l)m^{-1} + (l^{-5} + l^{-3} + 2l^{-1})m$$

$$P(T \# L) = (l^{-6} - 3l^{-4} + 3l^{-2} + 2) - (2l^{-4} - 3l^{-2} + 1)m^2 + l^{-2}m^4$$

Relativamente à distinção entre um nó e o seu inverso, um dos principais problemas da classificação de nós que o polinómio de Jones não conseguiu responder, continua a não ser solucionado pelo polinómio Homfly. Em relação à distinção entre um nó e a sua imagem no espelho e tal como o polinómio anterior, também o polinómio Homfly permite estabelecer uma relação entre ambos.

Teorema 2.4.3 *Seja $L^!$ a imagem no espelho do enlace L e $-L$ o enlace que resulta de L por troca da orientação. Então*

$$P(L^!; l, m) = P(L, l^{-1}, m)$$

e

$$P(-L; l, m) = P(L, l, m).$$

Tal como acontecia com o polinómio de Jones, se os expoentes da variável l forem simétricos não podemos concluir nada a cerca da reflexividade desse nó. O polinómio do nó 9_{42} (figura 2.22), $P(9_{42}; l, m) = (-2l^{-2} - 3 - 2l^2) + (l^{-2} + 4 + l^2)m^2 - m^4$ e efectivamente $P(9_{42}; l, m) = P(9_{42}^!; l, m)$, não sendo no entanto este, um nó reflexivo.

Uma outra questão não solucionada pelos polinómios anteriores diz respeito ao facto de existirem nós que não são ambiente isotópicos e aos quais está associado o mesmo polinómio de Homfly. Os pares de nós como os representados na figura 2.25 têm o mesmo polinómio de Homfly e obviamente, apresentam também o mesmo polinómio de Jones [1].



Figura 2.25: Nós distintos mas que possuem o mesmo polinómio de Homfly

Após esta análise podemos concluir que o polinómio Homfly apesar de generalizar a relação “skein” verificada para os dois polinómios anteriores, não resolveu nenhum dos problemas que o polinómio de Jones ainda apresentava.

2.5 Polinómio de Kauffman

Em 1986, Kauffman [13] introduz um novo polinómio baseado numa ideia totalmente diferente das que vigoravam até então. Este polinómio já não era construído recursivamente com base na relação “skein”, mas a partir do conceito de estados de um diagrama não orientado, que passaremos a definir na secção 2.5.1. A partir dos estados

de um diagrama não orientado vai ser possível construir um polinómio designado por polinómio suporte o qual mostraremos que é apenas um invariante da classe de isotopia regular. Contudo, se considerarmos a orientação do enlace, já obtemos um invariante da classe de isotopia do enlace.

2.5.1 Polinómio suporte

Seja D um diagrama não orientado de um enlace. Cada cruzamento de D pode ser eliminado de duas formas distintas. Em cada cruzamento de D atribuem-se às quatro regiões adjacentes as letras A e B da seguinte forma: às duas regiões que se localizam entre o cruzamento por cima e o cruzamento por baixo, por esta ordem, seguindo a direcção contrária à dos ponteiros do relógio, atribui-se A e às restantes B . Consoante se unem as regiões A ou B , obtêm-se as duas diferentes formas de eliminar o cruzamento. No caso de se juntarem as regiões A , obtém-se um cruzamento de *valor* A , por outro lado, se juntarmos as regiões B , o cruzamento toma o *valor* B .

Tal como já aconteceu anteriormente, nesta secção usaremos a convenção de desenhar apenas a parte do diagrama que é alterada na manipulação do enlace. Observem-se as partes dos diagramas obtidos do diagrama D por união das regiões A ou B .



Figura 2.26: Regiões A e B ; cruzamento de valor A ; cruzamento de valor B

Definição 2.5.1 Um estado S de D é o diagrama obtido de D quando cada um dos seus cruzamentos é eliminado por união das regiões A ou B . $\langle D/S \rangle$ representa o produto de todos os valores A (ou B) para um estado S .

Assim, um diagrama com n cruzamentos tem um total de 2^n estados possíveis. Cada estado de um diagrama D é um enlace trivial com um número de componentes variável, dependente do estado.

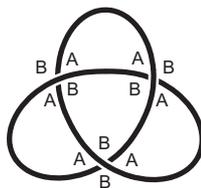


Figura 2.27: Regiões A e B no diagrama minimal do nó trevo, D_T

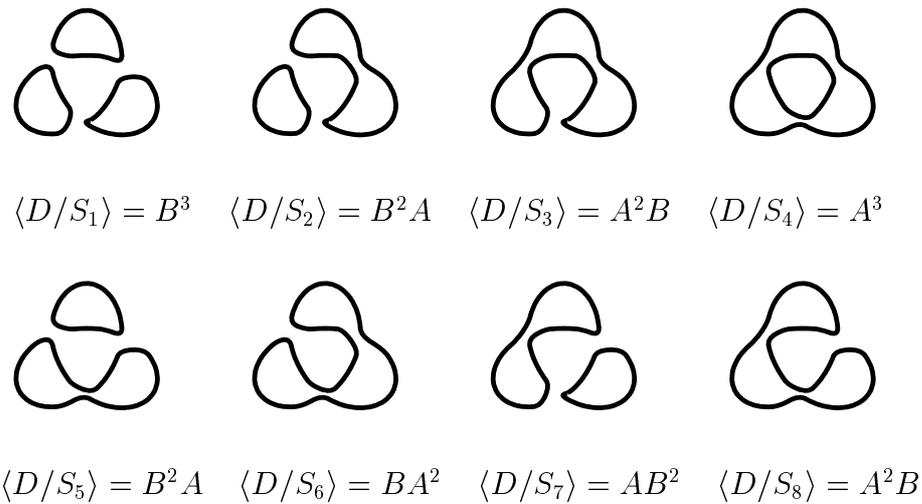


Figura 2.28: Estados do diagrama minimal do nó trevo

Definição 2.5.2 *Sejam D um diagrama de um enlace, S um seu estado e $|S|$ o número de componentes de S . O polinómio suporte de D é dado por:*

$$\langle D \rangle = \sum_S \langle D/S \rangle \delta^{|S|}$$

em que $\langle D/S \rangle$ representa o produto de todos os valores para um estado S e δ é uma variável independente de A e de B .

O polinómio suporte do diagrama do nó trevo D_T , determinado com base nos seus estados (figura 2.28) é então dado por:

$$\langle D_T \rangle = B^3 \delta^3 + (3B^2A + A^3) \delta^2 + (3A^2B) \delta.$$

O polinómio suporte não é um invariante da classe de isotopia, isto é, se transformarmos por movimentos de Reidemeister o diagrama D_T num diagrama D'_T , verificamos que os polinómios suporte são distintos.

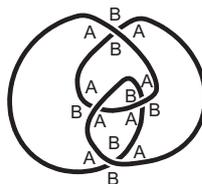


Figura 2.29: Regiões A e B no diagrama D'_T do nó trevo

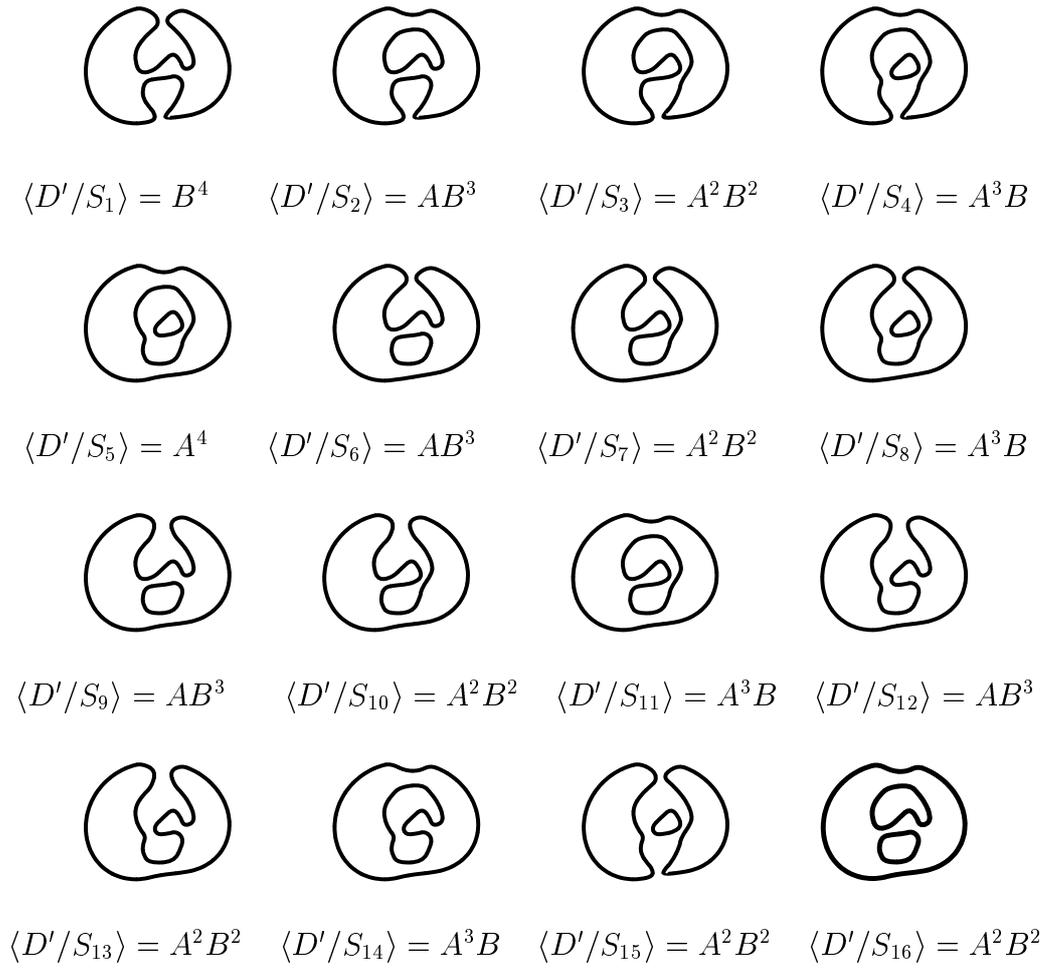


Figura 2.30: Estados do diagrama D'_T do nó trevo

Para o diagrama D'_T do nó trevo, o polinómio suporte é:

$$\langle D'_T \rangle = (A^4 + 2A^2B^2) \delta^3 + 4(A^3B + AB^3) \delta^2 + (B^4 + 4A^2B^2) \delta$$

Contudo, podemos alterar o polinómio suporte para que este passe a ser um invariante da classe de isotopia. Note-se que o polinómio suporte obedece às seguintes regras:

Regra 1: Seja O^n o diagrama de um enlace trivial sem cruzamentos e com n componentes, para o qual $\sum_S \langle O^n/S \rangle = 1$ e portanto, $\langle O^n \rangle = \delta^n$;

Regra 2: $\langle \begin{array}{c} \text{A} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{B} \quad \text{A} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{A} \quad \text{B} \end{array} \rangle = A \langle \text{A} \rangle + B \langle \text{B} \rangle$;

Regra 3: $\langle \begin{array}{c} \text{B} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{A} \quad \text{B} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{B} \quad \text{A} \end{array} \rangle = B \langle \text{A} \rangle + A \langle \text{B} \rangle$.

Se unirmos dois diagramas sem que haja introdução de cruzamentos, o seu polinómio suporte é dado pelo produto dos polinómios suporte de cada um deles, tal como é demonstrado na proposição seguinte:

Proposição 2.5.1 *O polinómio suporte do diagrama de um enlace obtido pela união disjunta (isto é, que não introduz nenhum cruzamento extra) de dois diagramas D e D' , $D \cup D'$ é o produto dos polinómios suporte de D e D' . Ou seja,*

$$\langle D \cup D' \rangle = \langle D \rangle \langle D' \rangle.$$

Demonstração: Sejam D e D' diagramas de dois enlaces,

$$\begin{aligned} \langle D \rangle \cdot \langle D' \rangle &= \sum_S \langle D/S \rangle \delta^{|S|} \cdot \sum_{S'} \langle D'/S' \rangle \delta^{|S'|} \\ &= \sum_S \langle D/S \rangle \sum_{S'} \langle D'/S' \rangle \delta^{|S|+|S'|} \\ &= \sum_S \sum_{S'} \langle D/S \rangle \langle D'/S' \rangle \delta^{|S|+|S'|}. \end{aligned}$$

Como $D \cup D'$ é um enlace obtido pela união disjunta de dois diagramas de enlaces D e D' , os seus estados são dados por todas as combinações dos estados de D com os de D' e o número de componentes de cada estado de $D \cup D'$ é a soma do número de componentes dos estados de D e D' .

Logo,

$$\langle D \cup D' \rangle = \langle D \rangle \langle D' \rangle. \quad \square$$

Investiguemos como é que o polinómio suporte se comporta em relação aos movimentos de Reidemeister.

Lema 2.5.1

- (i) $\langle \textcircled{\times} \rangle = (A + B\delta) \langle \curvearrowright \rangle$;
- (ii) $\langle \textcircled{\times} \rangle = (B + A\delta) \langle \curvearrowright \rangle$;

Demonstração:

(i) Aplicando a regra 2,

$$\left\langle \begin{array}{c} \times \\ \circ \end{array} \right\rangle = A \langle \curvearrowright \rangle + B \langle \textcircled{\times} \rangle.$$

Por aplicação da proposição 2.5.1 seguida da regra 1, temos que

$$\langle \textcircled{\times} \rangle = \langle \curvearrowright \rangle \langle \circ \rangle = \delta \langle \curvearrowright \rangle.$$

Assim,

$$\langle \textcircled{\times} \rangle = A \langle \curvearrowright \rangle + B (\delta \langle \curvearrowright \rangle) = (A + B\delta) \langle \curvearrowright \rangle.$$

De modo análogo prova-se (ii). \square

Lema 2.5.2

$$\langle \mathfrak{X} \rangle = AB \langle \mathfrak{Y} \rangle + (A^2 + AB\delta + B^2) \langle \mathfrak{Z} \rangle.$$

Demonstração: Usando as regras para a obtenção do polinómio suporte de um diagrama de um enlace e pelos resultados anteriores proposição 2.5.1 e lema 2.5.1, temos

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{X} \rangle &= A \langle \mathfrak{Y} \rangle + B \langle \mathfrak{Z} \rangle \\ &= A (B \langle \mathfrak{Y} \rangle + A \langle \mathfrak{Z} \rangle) + B \langle \mathfrak{X} \rangle \\ &= AB \langle \mathfrak{Y} \rangle + A^2 \langle \mathfrak{Z} \rangle + (B^2 + BA\delta) \langle \mathfrak{Z} \rangle \\ &= AB \langle \mathfrak{Y} \rangle + (A^2 + AB\delta + B^2) \langle \mathfrak{Z} \rangle \end{aligned}$$

□

A partir destes dois lemas, vejamos em que condições obtemos um polinómio suporte que seja um invariante da classe de isotopia.

Com base no lema 2.5.1, podemos constatar que o polinómio suporte só se torna invariante para o movimento R_1 se $A + B\delta = B + A\delta = 1$, pois só nestas condições $\langle \mathfrak{X} \rangle = \langle \mathfrak{Y} \rangle = \langle \mathfrak{Z} \rangle$. Assim,

$$\begin{aligned} \begin{cases} A + B\delta = 1 \\ B + A\delta = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 - B\delta \\ B + \delta - B\delta^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \delta = \frac{-1 \pm \sqrt{(2B-1)^2}}{-2B} \wedge 2B - 1 \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \delta = \frac{-1+2B-1}{-2B} \end{cases} \vee \begin{cases} \text{---} \\ \delta = \frac{-1-2B+1}{-2B} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 - 1 + B \\ \delta = \frac{1-B}{B} \end{cases} \vee \begin{cases} A = 1 - B \\ \delta = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \delta = \frac{1-B}{B} \end{cases} \vee \begin{cases} A = 1 - B \\ \delta = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

o que nos permite concluir então que o polinómio suporte só se torna invariante para o movimento R_1 se $A = B$ ou $\delta = 1$.

- Se $A = B$ temos que $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, o que faria com que o polinómio suporte desse apenas informação acerca do número de cruzamentos e não permitisse identificar o tipo de cruzamentos num diagrama.
- Se $\delta = 1$ então $\langle O^n \rangle = 1$, o que nos permite concluir que todos os enlaces triviais com números distintos de componentes têm polinómios suporte iguais. Se $n = 1$ podemos definir $\langle O \rangle = 1$, sem qualquer inconveniente, logo o movimento R_1 só é invariante para diagramas de enlaces apenas com uma componente e sem cruzamentos, isto para o nó trivial.

Sujeito a estas condições o polinómio suporte não nos daria informações suficientemente relevantes. Vejamos como se comporta em relação aos movimentos R_2 e R_3 .

Com base no lema 2.5.2, verificamos que o polinómio suporte se torna invariante para o movimento R_2 , isto é, $\langle \mathfrak{X} \rangle = \langle \mathfrak{Y} \rangle$ se $AB = 1$ e $A^2 + AB\delta + B^2 = 0$. Ou seja,

$$\begin{cases} AB = 1 \\ A^2 + AB\delta + B^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = A^{-1} \\ A^2 + AA^{-1}\delta + A^{-2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = A^{-1} \\ \delta = -(A^2 + A^{-2}) \end{cases}$$

Considerando então $B = A^{-1}$ e $\delta = -(A^2 + A^{-2})$ tornamos o polinómio suporte invariante ao movimento R_2 e consequentemente invariante ao movimento R_3 . A partir do lema 2.5.2 que estabelece a invariância para o movimento R_2 , podemos provar a invariância ao movimento R_3 .

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \text{B} \\ \diagdown \\ \text{A} \end{array} \right\rangle &= A \langle \mathfrak{X} \rangle + B \langle \mathfrak{Y} \rangle \\ &= A \langle \mathfrak{X} \rangle + B \langle \mathfrak{X} \rangle \langle \neg \rangle \\ &= A \langle \mathfrak{X} \rangle + B \langle \mathfrak{Z} \rangle \langle \neg \rangle \\ &= A \langle \mathfrak{X} \rangle + B \langle \mathfrak{X} \rangle \\ &= A \langle \mathfrak{X} \rangle + B \langle \mathfrak{W} \rangle \\ &= \langle \mathfrak{X} \rangle \end{aligned}$$

Para $B = A^{-1}$ e $\delta = -(A^2 + A^{-2})$ o polinómio suporte é então um invariante da classe de isotopia regular.

Com base nestas conclusões e nas regras exigidas para a obtenção do polinómio suporte de um enlace, Kauffman definiu as condições em que o polinómio suporte é um invariante da classe de isotopia regular.

Teorema 2.5.1 *Sejam D o diagrama de um enlace não orientado e $\langle D \rangle$ o polinómio suporte em A definido pelas seguintes condições:*

$$K_1 : \langle O^n \rangle = (- (A^2 + A^{-2}))^n ;$$

$$K_2 : \left\langle \begin{array}{c} \text{A} \\ \diagdown \\ \text{B} \end{array} \right\rangle = A \langle \mathfrak{Y} \rangle + A^{-1} \langle \mathfrak{Z} \rangle ;$$

$$K_3 : \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \text{B} \\ \diagdown \\ \text{A} \end{array} \right\rangle = A^{-1} \langle \mathfrak{Y} \rangle + A \langle \mathfrak{Z} \rangle .$$

Então $\langle D \rangle$ é um invariante da classe de isotopia regular.

Demonstração:

Para o movimento R_2 ,

$$\left\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \text{B} \\ \diagup \\ \text{A} \end{array} \right\rangle = A \left\langle \begin{array}{c} \text{B} \\ \diagdown \\ \text{A} \end{array} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \text{A} \\ \diagup \\ \text{B} \end{array} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= A(A^{-1}\langle \textcircled{\circ} \rangle + A\langle \textcircled{\smile} \rangle) + A^{-1}(\langle \textcircled{\circ}^{\otimes 2} \rangle \langle \textcircled{\smile} \rangle) \\
&= AA^{-1}\langle \textcircled{\circ} \rangle + A^2\langle \textcircled{\smile} \rangle + A^{-1}(A^{-1}\langle \textcircled{\smile} \rangle + A\langle \textcircled{\textcircled{\smile}} \rangle) \langle \textcircled{\smile} \rangle \\
&= \langle \textcircled{\circ} \rangle + A^2\langle \textcircled{\smile} \rangle + A^{-2}\langle \textcircled{\smile} \rangle + A^{-1}A\langle \textcircled{\smile} \rangle \langle \textcircled{\circ} \rangle \langle \textcircled{\smile} \rangle \\
&= \langle \textcircled{\circ} \rangle + A^2\langle \textcircled{\smile} \rangle + A^{-2}\langle \textcircled{\smile} \rangle + \langle \textcircled{\smile} \rangle (- (A^2 + A^{-2})) \\
&= \langle \textcircled{\circ} \rangle + A^2\langle \textcircled{\smile} \rangle + A^{-2}\langle \textcircled{\smile} \rangle - A^2\langle \textcircled{\smile} \rangle - A^{-2}\langle \textcircled{\smile} \rangle = \langle \textcircled{\circ} \rangle
\end{aligned}$$

Para o movimento R_3

$$\begin{aligned}
\langle \textcircled{\textcircled{\smile}} \rangle &= A\langle \textcircled{\textcircled{\smile}} \rangle + A^{-1}\langle \textcircled{\textcircled{\smile}} \rangle \\
&= A\langle \textcircled{\textcircled{\smile}} \rangle + A^{-1}\langle \textcircled{\textcircled{\smile}} \rangle \langle \textcircled{\smile} \rangle \\
&= A\langle \textcircled{\textcircled{\smile}} \rangle + A^{-1}\langle \textcircled{\textcircled{\smile}} \rangle \langle \textcircled{\smile} \rangle \\
&= A\langle \textcircled{\textcircled{\smile}} \rangle + A^{-1}\langle \textcircled{\textcircled{\smile}} \rangle \\
&= A\langle \textcircled{\textcircled{\smile}} \rangle + A^{-1}\langle \textcircled{\textcircled{\smile}} \rangle \\
&= \langle \textcircled{\textcircled{\smile}} \rangle
\end{aligned}$$

Portanto $\langle D \rangle$ é um invariante da classe de isotopia regular. \square

Sendo o polinómio suporte apenas um invariante da classe de isotopia regular, a proposição que se segue, define o movimento R_1 como um polinómio na variável A .

Proposição 2.5.2

(i) $\langle \textcircled{\textcircled{\smile}} \rangle = -A^{-3}\langle \textcircled{\smile} \rangle$

(ii) $\langle \textcircled{\textcircled{\smile}} \rangle = -A^3\langle \textcircled{\smile} \rangle$

Demonstração:

(i)

$$\begin{aligned}
\langle \textcircled{\textcircled{\smile}} \rangle &= A\langle \textcircled{\smile} \rangle + A^{-1}\langle \textcircled{\textcircled{\smile}} \rangle \\
&= A\langle \textcircled{\smile} \rangle + A^{-1}\langle \textcircled{\smile} \rangle \langle \textcircled{\circ} \rangle \\
&= A\langle \textcircled{\smile} \rangle + A^{-1}\langle \textcircled{\smile} \rangle (- (A^2 + A^{-2})) \\
&= A\langle \textcircled{\smile} \rangle - A^{-1}(A^2 + A^{-2})\langle \textcircled{\smile} \rangle \\
&= A\langle \textcircled{\smile} \rangle - A\langle \textcircled{\smile} \rangle - A^{-3}\langle \textcircled{\smile} \rangle \\
&= -A^{-3}\langle \textcircled{\smile} \rangle
\end{aligned}$$

De modo análogo se prova (ii). \square

Determinemos os polinómios suporte de alguns nós e enlaces.

Anéis de Hopf

$$\begin{aligned}
\langle \text{Diagram 1} \rangle &= A \langle \text{Diagram 2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
&= A (-A^3 \langle \text{Diagram 4} \rangle) + A^{-1} (-A^{-3} \langle \text{Diagram 4} \rangle) \\
&= (-A^4 - A^{-4}) \langle \text{Diagram 4} \rangle \\
&= (-A^4 - A^{-4}) (-A^2 - A^{-2}) \\
&= A^6 + A^2 + A^{-2} + A^{-6}
\end{aligned}$$

Nó trevo

$$\begin{aligned}
\langle \text{Diagram 1} \rangle &= A \langle \text{Diagram 2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
&= A (A^6 + A^2 + A^{-2} + A^{-6}) + A^{-1} (-A^{-3} \langle \text{Diagram 4} \rangle) \\
&= A^7 + A^3 + A^{-1} + A^{-5} - A^{-4} \langle \text{Diagram 4} \rangle \\
&= A^7 + A^3 + A^{-1} + A^{-5} - A^{-4} (-A^{-3} \langle \text{Diagram 4} \rangle) \\
&= A^7 + A^3 + A^{-1} + A^{-5} + A^{-7} \langle \text{Diagram 4} \rangle \\
&= A^7 + A^3 + A^{-1} + A^{-5} + A^{-7} (-A^2 - A^{-2}) \\
&= A^7 + A^3 + A^{-1} + A^{-5} - A^{-5} - A^{-9} \\
&= A^7 + A^3 + A^{-1} - A^{-9}
\end{aligned}$$

Imagem no espelho do nó trevo

$$\begin{aligned}
\langle \text{Diagram 1} \rangle &= A \langle \text{Diagram 2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
&= A (-A^3 \langle \text{Diagram 4} \rangle) + A^{-1} (A^6 + A^2 + A^{-2} + A^{-6}) \\
&= -A^4 (-A^3 \langle \text{Diagram 4} \rangle) + A^5 + A + A^{-3} + A^{-7} \\
&= A^7 (-A^2 - A^{-2}) + A^5 + A + A^{-3} + A^{-7} \\
&= -A^9 - A^5 + A^5 + A + A^{-3} + A^{-7} \\
&= -A^9 + A + A^{-3} + A^{-7}
\end{aligned}$$

Nó figura oito

$$\begin{aligned}
\langle \text{Diagram 1} \rangle &= A \langle \text{Diagram 2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
&= A (-A^9 + A + A^{-3} + A^{-7}) + A^{-1} (-A^{-3} \langle \text{Diagram 4} \rangle) \\
&= -A^{10} + A^2 + A^{-2} + A^{-6} - A^{-4} (A^6 + A^2 + A^{-2} + A^{-6}) \\
&= -A^{10} + A^2 + A^{-2} + A^{-6} - A^2 - A^{-2} - A^{-6} - A^{-10} \\
&= -A^{10} - A^{-10}
\end{aligned}$$

Nó de Kawauchi

$$\langle D_K \rangle = -A^{18} + 2A^{14} - 2A^{10} + A^6 - A^2 - A^{-2} + A^{-6} - 2A^{-10} + 2A^{-14} + A^{-18}$$

Em alternativa ao processo usado nos exemplos anteriores, podemos a partir da definição 2.5.2 reescrever a forma geral do polinómio suporte de um diagrama D da seguinte forma:

Definição 2.5.3 *O polinómio suporte de um diagrama D é dado por*

$$\langle D \rangle = \sum_S A^{a(S)-b(S)} (- (A^2 + A^{-2}))^{|S|}$$

sendo S o estado do diagrama D para o qual $a(S)$ e $b(S)$ são respectivamente o número de cruzamentos extintos com o valor A e com o valor B .

Usando a definição de polinómio suporte apresentada anteriormente, podemos reescrever o polinómio suporte do diagrama da figura 2.27 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle D_T \rangle &= A^{-1} (- (A^2 + A^{-2}))^2 + A^{-3} (- (A^2 + A^{-2}))^3 + A^1 (- (A^2 + A^{-2})) + \\ &+ A^{-1} (- (A^2 + A^{-2}))^2 + A^{-1} (- (A^2 + A^{-2}))^2 + A^3 (- (A^2 + A^{-2}))^2 + \\ &+ A^1 (- (A^2 + A^{-2})) + A^1 (- (A^2 + A^{-2})) = \\ &= A^7 + A^3 + A^{-1} - A^{-9}. \end{aligned}$$

Pelo facto do polinómio suporte não ser um invariante da classe de isotopia, mas apenas da classe de isotopia regular, o polinómio do diagrama do nó trevo apresentado na figura 2.29 não vai coincidir com o obtido anteriormente, visto que a transformação de um destes diagramas um no outro envolve o movimento de Reidemeister R_1 . No caso do diagrama D'_T do nó trevo, o polinómio suporte na variável A é:

$$\langle D'_T \rangle = -A^{10} - A^6 - A^2 + A^{-6}.$$

Alguns autores consideram outras regras para definir o polinómio suporte de um diagrama D .

Definição 2.5.4 *O polinómio suporte de um diagrama D é definido pelas seguintes condições:*

$$K'_1 : \langle O \rangle = 1;$$

$$K'_2 : \langle D \cup O \rangle = - (A^2 + A^{-2}) \langle D \rangle;$$

$$K'_3 : \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle = A \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle + A^{-1} \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle.$$

em que O representa um diagrama de um nó trivial sem cruzamentos; D um diagrama de um enlace e $D \cup O$ um diagrama com a componente adicional de um nó trivial que não introduz novos cruzamentos.

Nestas condições,

Definição 2.5.5 *O polinómio suporte de um diagrama D é:*

$$\langle D \rangle = \sum_S A^{a(S)-b(S)} \left(-(A^2 + A^{-2}) \right)^{|S|-1}.$$

Os polinómios suporte dos diagramas construídos segundo as regras do teorema 2.5.1 são iguais aos definidos em 2.5.5, a menos do factor $-(A^2 + A^{-2})$.

2.5.2 Polinómio suporte em nós e enlaced orientados

O polinómio suporte, por não ser invariante ao movimento R_1 , traz alguns entraves quando é usado no estudo de enlaced. Vimos na secção anterior que a dois diagramas distintos do nó trevo, D_T e D'_T que se obtinham um do outro através de movimentos de Reidemeister, incluindo R_1 , se associavam dois polinómios suporte diferentes. O facto do polinómio suporte não ser invariante para o único movimento de Reidemeister que permite fazer ou desfazer uma torção, impede que diagramas distintos do mesmo enlace sejam definidos pelo mesmo polinómio. Contudo, este problema fica solucionado quando são usados diagramas de enlaced orientados.

Teorema 2.5.2 *O polinómio de Kauffman $f(D; A)$ (em A) definido pela identidade*

$$f(D; A) = \frac{(-A^3)^{-W(D)} \langle D \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]}$$

para um diagrama orientado D de um enlace L (onde $W(D)$ representa a contorção do diagrama orientado) é um invariante da classe de isotopia de L .

Nota: Na definição apresentada do polinómio de Kauffman, a divisão por $[-(A^2 + A^{-2})]$ deve-se apenas ao facto de se pretender que $f(O; A) = 1$. Note-se no entanto, que no caso de se usar a definição 2.5.4 esta divisão deixa de ser necessária.

Demonstração:

R_1 : Como para qualquer orientação $W(\text{⌘}) = W(\text{↘}) - 1$ e $W(\text{⌘}) = W(\text{↘}) + 1$,

$$\begin{aligned} f(\text{⌘}; A) &= \frac{(-A^3)^{-W(\text{⌘})} \langle \text{⌘} \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= \frac{(-A^3)^{-(W(\text{↘})-1)} (-A^{-3}) \langle \text{↘} \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= \frac{(-A^3)^{-W(\text{↘})} (-A^3) (-A^{-3}) \langle \text{↘} \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= \frac{(-A^3)^{-W(\text{↘})} \langle \text{↘} \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= f(\text{↘}; A) \end{aligned}$$

R_2 : Uma vez que já foi demonstrado que $\langle \mathfrak{X} \rangle = \langle \mathfrak{X} \rangle$ e que independentemente da orientação, $W(\mathfrak{X}) = 1 - 1 = 0 = W(\mathfrak{X})$,

$$\begin{aligned} f(\mathfrak{X}; A) &= \frac{(-A^3)^{-W(\mathfrak{X})} \langle \mathfrak{X} \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= \frac{(-A^3)^0 \langle \mathfrak{X} \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= \frac{(-A^3)^{-W(\mathfrak{X})} \langle \mathfrak{X} \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= f(\mathfrak{X}; A) \end{aligned}$$

R_3 : Tendo-se já provado que, $\langle \mathfrak{Y} \rangle = \langle \mathfrak{A} \rangle$ e que independentemente da orientação, $W(\mathfrak{Y}) = W(\mathfrak{A})$

$$\begin{aligned} f(\mathfrak{Y}; A) &= \frac{(-A^3)^{-W(\mathfrak{Y})} \langle \mathfrak{Y} \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= \frac{(-A^3)^{-W(\mathfrak{A})} \langle \mathfrak{A} \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= f(\mathfrak{A}; A) \end{aligned}$$

Podemos então concluir que $f(D; A)$ é um invariante da classe de isotopia. \square

Sendo $f(D; A)$ um invariante da classe de isotopia, podemos afirmar que o polinómio de Kauffman é independente do diagrama, isto é, diagramas distintos do mesmo enlace ficam definidos pelo mesmo polinómio de Kauffman. Assim, em vez de $f(D; A)$ podemos escrever $f(L; A)$ e a este polinómio que depende apenas do enlace podemos chamar *polinómio de Kauffman de L*.

No seguimento do estudo que estavamos a efectuar, relativamente aos polinómios associados aos diferentes diagramas do nó trevo apresentados nas figuras 2.27 e 2.29, vamos agora verificar que os seus polinómios de Kauffman coincidem.

No caso do diagrama D_T do nó trevo para o qual $W(D_T) = 3$ e $\langle D_T \rangle = A^7 + A^3 + A^{-1} - A^{-9}$, temos

$$\begin{aligned} f(T; A) &= \frac{(-A^3)^{-3} (A^7 + A^3 + A^{-1} - A^{-9})}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= \frac{-A^{-9} (A^7 + A^3 + A^{-1} - A^{-9})}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= \frac{-A^{-2} - A^{-6} - A^{-10} + A^{-18}}{[-(A^2 + A^{-2})]} \end{aligned}$$

No caso do diagrama D'_T do mesmo nó, $W(D'_T) = 4$ e $\langle D'_T \rangle = -A^{10} - A^6 - A^2 + A^{-6}$, logo

$$\begin{aligned} f(T; A) &= \frac{(-A^3)^{-4} (-A^{10} - A^6 - A^2 + A^{-6})}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= \frac{A^{-12} (-A^{10} - A^6 - A^2 + A^{-6})}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= \frac{(-A^{-2} - A^{-6} - A^{-10} + A^{-18})}{[-(A^2 + A^{-2})]} \end{aligned}$$

Desta forma torna-se então possível associar a cada classe de isotopia de um nó ou enlace um polinómio univocamente determinado.

Apesar da distinta definição deste polinómio comparativamente com os anteriores, é possível a partir do polinómio de Kauffman obter o polinómio de Jones.

Proposição 2.5.3 *Os diagramas “skein” dos enlaces L_+ ; L_- ; L_0 verificam a seguinte relação “skein”:*

$$A^4 f(L_+; A) - A^{-4} f(L_-; A) = (A^{-2} - A^2) f(L_0; A).$$

Demonstração: Independentemente da orientação, obtém-se por aplicação de K_2 e K_3 do teorema 2.5.1 a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} A \langle \text{X} \rangle - A^{-1} \langle \text{Y} \rangle &= A (A \langle \text{Z} \rangle + A^{-1} \langle \text{W} \rangle) - A^{-1} (A^{-1} \langle \text{Z} \rangle + A \langle \text{W} \rangle) = \\ &= A^2 \langle \text{Z} \rangle + \langle \text{W} \rangle - A^{-2} \langle \text{Z} \rangle - \langle \text{W} \rangle = \\ &= (A^2 - A^{-2}) \langle \text{Z} \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, quando falamos em contorção já temos que considerar a orientação. Sabendo que

$$W(L_+) = W(L_0) + 1 \quad \text{e} \quad W(L_-) = W(L_0) - 1,$$

temos então:

$$\begin{aligned} A^4 f(L_+; A) - A^{-4} f(L_-; A) &= A^4 \frac{(-A^3)^{-W(L_+)} \langle L_+ \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} - A^{-4} \frac{(-A^3)^{-W(L_-)} \langle L_- \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= A^4 \frac{(-A^3)^{-W(L_0)-1} \langle L_+ \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} - A^{-4} \frac{(-A^3)^{-W(L_0)+1} \langle L_- \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= (-A^3)^{-W(L_0)} \cdot \frac{A^4 (-A^3)^{-1} \langle L_+ \rangle - A^{-4} (-A^3) \langle L_- \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= (-A^3)^{-W(L_0)} \cdot \frac{-A \langle L_+ \rangle + A^{-1} \langle L_- \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= (-A^3)^{-W(L_0)} \cdot \frac{A^{-1} \langle L_- \rangle - A \langle L_+ \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-A^3)^{-W(L_0)} (A^{-2} - A^2) \langle L_0 \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\
&= \frac{(-A^3)^{-W(L_0)} \langle L_0 \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} \cdot (A^{-2} - A^2) = \\
&f(L_0; A) \cdot (A^{-2} - A^2)
\end{aligned}$$

□

Observe-se que atendendo à proposição 2.5.3, à convenção que tínhamos feito anteriormente de que $f(O; A) = 1$; e efectuando a mudança de variável da A para t , de tal modo que $A = t^{-\frac{1}{4}}$, obtemos a relação “skein” relativa ao polinómio de Jones.

Consequentemente podemos estabelecer a relação:

$$V(L, t) = f(L, t^{-\frac{1}{4}}). \quad (2.7)$$

2.5.3 Características do polinómio de Kauffman

A importância do polinómio de Kauffman deve-se essencialmente ao carácter inovador do “processo de construção” do polinómio associado a um dado enlace. As propriedades que lhe podemos atribuir são, na sua maioria, as mesmas que estudámos para o polinómio de Jones na medida que se verifica a relação 2.7. A partir desta relação facilmente se conclui que apesar deste polinómio ser um invariante da classe de isotopia, *continuam a existir enlaces que não são ambiente isotópicos e aos quais está associado o mesmo polinómio de Kauffman*. Para os nós distintos K_1 e K_2 apresentados na figura 2.22 (nós distintos com o mesmo polinómio de Jones) temos que:

$$f(K_1, A) = f(K_2, A) = (A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8})^2.$$

Devido ao facto de, para qualquer enlace L , $W(D_L) = W(-D_L)$ e $\langle D_L \rangle = \langle -D_L \rangle$ temos que $f(L, A) = f(-L, A)$. Ou seja, dois enlaces com orientação contrária têm sempre associado o mesmo polinómio de Kauffman. *Mantêm-se então o problema da classificação de enlaces com orientações contrárias*.

No entanto, no caso dos enlaces com mais do que uma componente, a troca de orientação de uma das suas componentes pode ser identificada pelo polinómio de Kauffman. Uma vez que o polinómio suporte não é influenciado pela orientação dos diagramas, apenas a contorção e o número de ligação das componentes vão interferir nessa alteração. A relação 2.7 e o teorema 2.3.8 permitem demonstrar directamente a proposição que se segue:

Proposição 2.5.4 *Sejam $L = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ ($n > 1$) um enlace orientado com n componentes e $\hat{L} = \{K_1, K_2, \dots, K_{n-1}, -K_n\}$ um enlace com a mesma orientação em todas as suas componentes, com exceção da componente K_n , que tem orientação contrária. Então*

$$f(\hat{L}; A) = A^{12l} f(L, A),$$

onde l é o número de ligação entre K_n e K_i , $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, isto é, $l = \sum_{i=1}^{n-1} lk(K_i, K_n)$.

Consideremos os anéis de Hopf, H_1 sendo $W(H_1) = 2$ e $\langle D_{H_1} \rangle = A^6 + A^2 + A^{-2} + A^{-6}$,

$$\begin{aligned} f(H_1; A) &= \frac{(-A^3)^{-2} (A^6 + A^2 + A^{-2} + A^{-6})}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= \frac{A^{-6} (A^6 + A^2 + A^{-2} + A^{-6})}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= \frac{1 + A^{-4} + A^{-8} + A^{-12}}{[-(A^2 + A^{-2})]} \end{aligned}$$

Trocando a orientação de uma das componentes, obtemos o enlace H_2 para o qual $W(H_2) = -2$ e portanto

$$\begin{aligned} f(H_2; A) &= \frac{(-A^3)^2 (A^6 + A^2 + A^{-2} + A^{-6})}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= \frac{A^6 (A^6 + A^2 + A^{-2} + A^{-6})}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= \frac{A^{12} + A^8 + A^4 + 1}{[-(A^2 + A^{-2})]} \end{aligned}$$

De acordo com a proposição 2.5.4, uma vez que os anéis de Hopf H_2 diferem de H_1 apenas na orientação de uma das suas componentes, e que para os anéis de Hopf H_1 , $l = 1$ temos que:

$$\begin{aligned} f(H_2; A) &= A^{12} f(H_1; A) = \\ &= A^{12} \frac{1 + A^{-4} + A^{-8} + A^{-12}}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= \frac{A^{12} + A^8 + A^4 + 1}{[-(A^2 + A^{-2})]} \end{aligned}$$

No que se refere a distinguir um enlace da sua imagem no espelho, esta é também uma das características deste polinômio, a partir da qual vamos poder concluir novas propriedades.

Teorema 2.5.3 *Seja L um enlace e $L^!$ a sua imagem no espelho. Então $f(L^!; A)$ é obtido de $f(L; A)$ por troca de A por A^{-1} .*

Demonstração: Sabe-se já que o diagrama de $L^!$ é obtido a partir do diagrama de L por inversão de todos os seus cruzamentos, o que faz com que a determinação dos diagramas $\langle D_{L^!} \rangle$ e $\langle D_L \rangle$ se processe praticamente da mesma forma. A única excepção deve-se apenas ao facto de a um deles ser aplicada K_2 e para outro K_3 do teorema 2.5.1, o que leva a que os diagramas de $L^!$ e L difiram no sinal do expoente de A .

Uma vez que $L^!$ é obtido de L por inversão de todos os cruzamentos, $W(D_{L^!}) = -W(D_L)$. Assim, o polinómio de Kauffman do enlace $L^!$ é,

$$\begin{aligned} f(L^!; A) &= \frac{(-A^3)^{-W(D_{L^!})} \langle D_{L^!} \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= \frac{(-A^3)^{W(D_L)} \langle D_{L^!} \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} \end{aligned}$$

e o polinómio de Kauffman do enlace L é,

$$f(L; A) = \frac{(-A^3)^{-W(D_L)} \langle D_L \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]}$$

Ou seja, como $\langle D_{L^!} \rangle$ é obtido a partir de $\langle D_L \rangle$ por substituição de A por A^{-1} , podemos concluir que $f(L^!; A)$ pode também ser obtido a partir de $f(L; A)$. \square

Seja $T^!$ a imagem no espelho do trevo T representado pelo diagrama $D_{T^!}$, para o qual $W(D_{T^!}) = -3$ e $\langle D_{T^!} \rangle = -A^9 + A + A^{-3} + A^{-7}$, logo

$$\begin{aligned} f(T^!; A) &= \frac{(-A^3)^3 (-A^9 + A + A^{-3} + A^{-7})}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= \frac{-A^9 (-A^9 + A + A^{-3} + A^{-7})}{[-(A^2 + A^{-2})]} = \\ &= \frac{A^{18} - A^{10} - A^6 - A^2}{[-(A^2 + A^{-2})]} \end{aligned}$$

Vimos anteriormente que $f(T; A) = \frac{-A^{-2} - A^{-6} - A^{-10} + A^{-18}}{[-(A^2 + A^{-2})]}$.

Ou seja,

$$f(T^!; A) = f(T; A^{-1}).$$

Uma vez que os polinómios associados a T e $T^!$ são diferentes podemos concluir que estes dois nós não são reflexivos.

Tal como já vimos, os nós figura oito e a sua imagem no espelho pertencem à mesma classe de isotopia. De facto, por serem nós de contorção nula, pertencem à mesma classe de isotopia regular. Segundo Kauffman [11], pode então provar-se que:

Teorema 2.5.4 *Seja D_K o diagrama de um nó K tal que $W(D_K) = 0$. Então K e $K^!$ pertencerem à mesma classe de isotopia se e só se pertencem à mesma classe de isotopia regular.*

Através da contorção podemos de uma forma bastante simples identificar os nós e enlases que não são regularmente reflexivos.

Proposição 2.5.5 *Seja L um enlace regularmente reflexivo e D_L um diagrama desse enlace. Então $W(D_L) = 0$.*

Demonstração: Seja L um enlace regularmente reflexivo, ou seja os enlases L e $L^!$ pertencem à mesma classe de isotopia regular. Como o polinómio de Kauffman é um invariante temos:

$$f(L; A) = f(L^!; A)$$

e pelo teorema 2.5.3,

$$f(L^!; A) = f(L; A^{-1}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(L; A) = f(L; A^{-1}) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(-A^3)^{-W(D_L)} \langle D_L \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]} &= \frac{(-A^{-3})^{-W(D_L)} \langle D_L \rangle}{[-(A^2 + A^{-2})]}. \end{aligned}$$

E portanto,

$$-W(D_L) = W(D_L)$$

ou seja,

$$W(D_L) = 0.$$

□

Por aplicação desta proposição facilmente se verifica que o nó trevo e os anéis de Hopf não são regularmente reflexivos.

A criação de novos polinómios que permitam uma classificação completa dos enlases, continua a ser um dos trabalhos desenvolvidos por matemáticos que se dedicam ao estudo da Teoria de Nós.

Capítulo 3

Nós Toroidais

Neste capítulo será feita uma abordagem da Teoria de Nós no âmbito da topologia algébrica. Assim, serão ao longo deste capítulo assumidos alguns resultados básicos desta área tais como a definição e as propriedades básicas do grupo fundamental.

3.1 Construção geométrica dos nós toroidais

Tal como já vimos, não é ainda conhecido nenhum invariante que permita classificar todos os nós e enlacs. Contudo, existem grupos de nós com propriedades particulares que possibilitam a sua classificação. Um destes grupos é designado por nós toroidais, curvas simples e fechadas que se “enrolam” num toro de \mathbf{R}^3 .

Designaremos por toro o subconjunto de \mathbf{R}^3 definido por

$$\mathbf{T} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

Note-se que esta superfície de revolução é obtida por rotação da circunferência $(x - 1)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ do plano XOZ , em torno do eixo dos zz .

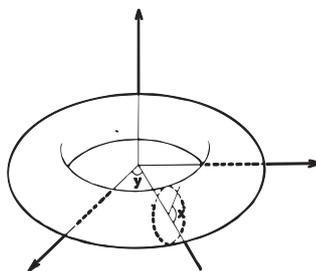
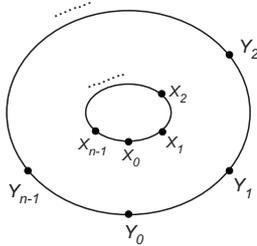
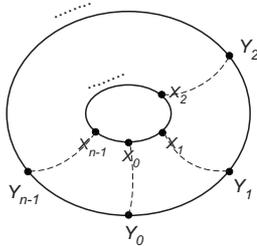


Figura 3.1: Toro

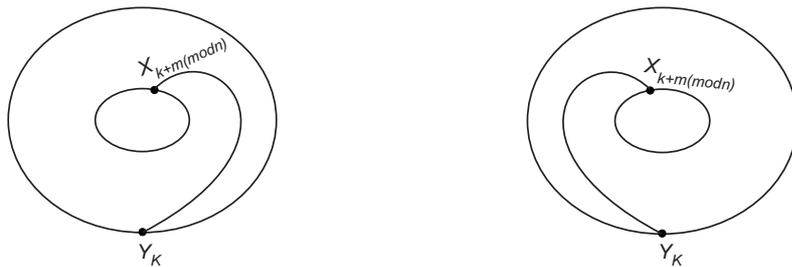
O processo que passaremos a descrever permite-nos obter um tipo particular de nós e enlacs. Começemos por marcar no equador interior do toro (r), n pontos $X_k : X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ distando entre si $\frac{2\pi}{n}r$ e n pontos Y_k no equador exterior (R) : Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1} , também distanciados $\frac{2\pi}{n}R$, tal como mostra a figura.



De seguida unimos pela parte inferior do toro cada um dos pontos X_k ao ponto Y_k , correspondente.



Para unir, pela parte superior do toro, os pontos situados no equador exterior com que se encontram no equador interior, unimos cada um dos pontos Y_k ao ponto $X_{k'} = X_{k+m(\text{mod } n)}$, ou seja ao ponto do equador interior que se obtém efectuando uma rotação de $\frac{2\pi m}{n}$ a partir de X_k , sendo $|m|$ um número inteiro superior a 1 e n um inteiro não nulo. No caso de $\frac{2\pi m}{n}$ ser positivo, esta rotação é efectuada no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e no sentido inverso se $\frac{2\pi m}{n}$ for negativo.



Para obtermos nós toroidais orientados, basta escolher uma orientação para os segmentos que unem, pela parte inferior do toro, cada ponto X_k ao ponto Y_k , com $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Obviamente, a escolha da orientação nestes segmentos vai induzir a orientação do nó. O sentido de percurso destes nós é determinado pelo sinal de n . Assim se n for um inteiro positivo, a orientação é de de X_k para Y_k , isto é, o sentido de percurso é de dentro para fora do toro e no caso de n ser negativo, considera-se a orientação contrária.



Assim, se $|m|$ e $|n|$ forem números inteiros não nulos primos entre si, esta construção permite-nos obter um tipo particular de nós designados por nós toroidais- (n, m) e que são representados por $K_{n,m}$.

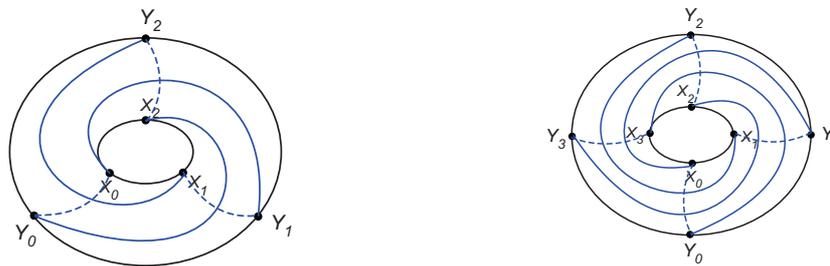


Figura 3.2: Nós toroidais: $K_{3,2}$ e $K_{4,3}$

Podemos definir quatro tipos de nós toroidais: $K_{n,m}; K_{n,-m}; K_{-n,m}; K_{-n,-m}$. Note-se que os pares de nós $K_{n,m}; K_{-n,-m}$ e $K_{n,-m}; K_{-n,m}$ diferem apenas na orientação, uma vez que a rotação que tem que ser efectuada para a união dos pontos pela parte superior do toro é a mesma, isto é de $\frac{2\pi m}{n}$ no caso do primeiro par e de $-\frac{2\pi m}{n}$ para o segundo par. Por outro lado, se dois nós $K_{n,m}$ têm a mesma orientação e valor de m simétrico diferem na rotação efectuada para unir os pontos pela parte superior do toro.

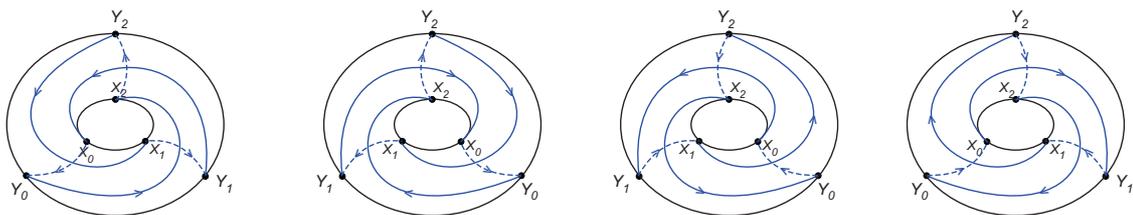


Figura 3.3: Nós toroidais: $K_{3,2}; K_{3,-2}; K_{-3,2};$ e $K_{-3,-2}$

No caso do $m.d.c(|n|, |m|) = p, p \neq 1$ o processo descrito anteriormente, define um enlace toroidal- (n, m) com p componentes. Supondo que $|n| > |m|$, cada uma das componentes do enlace é um nó toroidal - (α, β) , com $\alpha \times p = n$ e $\beta \times p = m$.

Temos então que $K_{3,2}; K_{4,3}$ são nós, enquanto que $K_{6,4}$ e $K_{6,3}$ são enlaces com duas e três componentes, respectivamente.

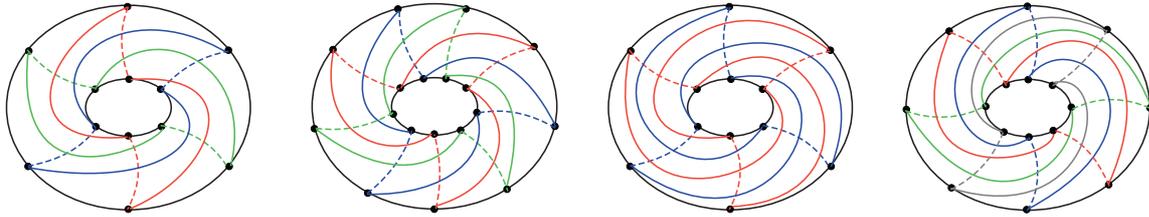


Figura 3.4: Enlaces toroidais: $K_{6,3}$; $K_{9,3}$; $K_{6,4}$; e $K_{8,4}$

Note-se que alguns destes nós já foram apresentados anteriormente. De seguida demonstraremos que os nós toroidais $K_{3,2}$ e $K_{4,3}$ são ambiente isotópicos aos nós 3_1 e 8_{19} , respectivamente.

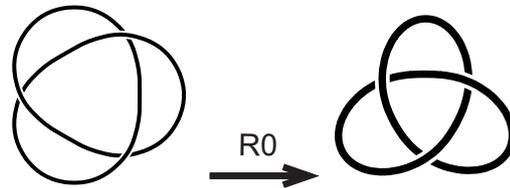


Figura 3.5: $K_{3,2}$ e o nó trevo são ambiente isotópicos

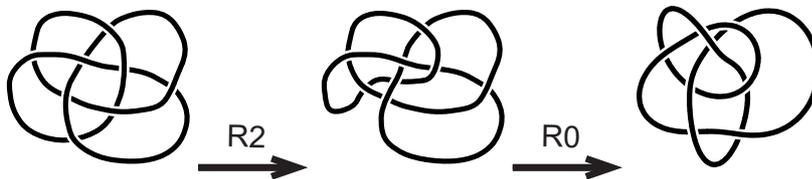


Figura 3.6: $K_{4,3}$ e o nó 8_{19} são ambiente isotópicos

Qualquer nó ou enlace toroidal admite um diagrama com uma propriedade particular.

Proposição 3.1.1 *Um nó ou enlace toroidal- (n, m) admite sempre um diagrama com $|n|(|m| - 1)$ cruzamentos.*

Demonstração: Consideremos o nó toroidal $K_{n,m}$, com $|n|, |m| > 1$. O número de pontos de cruzamento do nó $K_{n,m}$ corresponde ao número de vezes que os segmentos $Y_{k_i} X_{k_i+m(\text{mod } n)}$ que passam pela parte superior do toro cruzam os segmentos $Y_k X_k$, $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$.

Disponhamos ordenadamente os pontos Y_k com $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, de acordo com o sentido de rotação efectuado, ou seja:

- Se $\frac{2\pi m}{n} > 0$;

$$Y_0 \quad Y_1 \quad \dots \quad Y_{n-1}$$

- Se $\frac{2\pi m}{n} < 0$;

$$Y_1 \quad \dots \quad Y_{n-1} \quad Y_0$$

De seguida, numa linha paralela e distinta dispõem-se os pontos X_k , com $k = k' + m(\text{mod } n)$ ordenados por k' , com k' sequenciado de acordo com os índices de Y , tal como mostra a figura:

$$\begin{array}{ccccccc} Y_0 & & Y_1 & & \dots & & Y_{n-1} \\ & & X_{0+m(\text{mod } n)} & & X_{1+m(\text{mod } n)} & & \dots & & X_{n-1+m(\text{mod } n)}. \end{array}$$

De acordo com o processo descrito no início desta secção, vamos unir cada ponto $Y_{k'}$ ao ponto $X_{k'+m(\text{mod } n)}$. De seguida, unimos o ponto Y_k ao ponto X_k correspondente com um segmento que cruza por baixo todos os outros segmentos $Y_k X_{k'+m(\text{mod } n)}$ ou seja, vamos cruzar por baixo $|m| - 1$ desses segmento. Repetindo este processo tantas vezes quantas o número de pontos, ou seja n , obtemos um diagrama tipo destes nós com $|n|(|m| - 1)$ cruzamentos como o representado na figura:

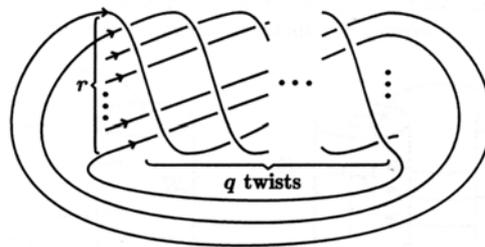


Figura 3.7: Diagrama tipo de um nó toroidal $K_{q,r}$

□

Se pretendermos obter diagramas orientados, basta atribuir ao diagrama um sentido de percurso determinado pela orientação definida para os segmentos $X_k Y_k$, com $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Apresentemos alguns exemplos de diagramas de nós toroidais.

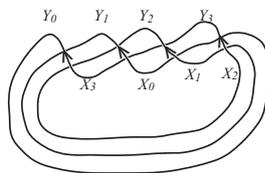


Figura 3.8: Diagrama do nó $K_{4,3}$

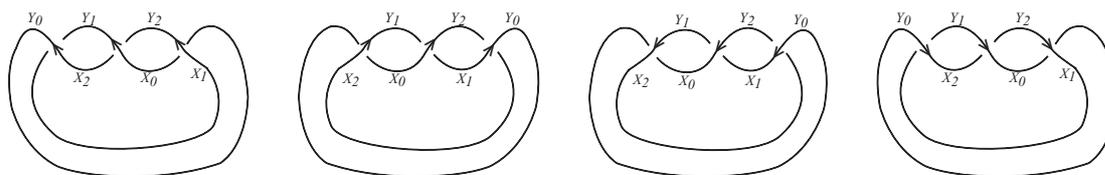


Figura 3.9: Diagramas dos nós: $K_{3,2}$; $K_{3,-2}$; $K_{-3,2}$; $K_{-3,-2}$

Observe-se que o nó $K_{-3,-2}$ é o nó inverso do nó $K_{3,2}$ e o nó $K_{-3,2}$ a sua imagem no espelho. A partir deste tipo particular de diagramas que representam os nós toroidais, imediatamente se prova a proposição que se segue:

Proposição 3.1.2 *Se $m.d.c(n, m) = 1$ e $|n|, |m| > 1$, então*

- (i) $K_{-n,m}$ é a imagem no espelho de $K_{n,m}$;
- (ii) $K_{-n,-m}$ é o nó inverso do nó $K_{n,m}$.

Vejamos agora a relação que existe entre os nós $K_{n,m}$ e $K_{m,n}$.

Proposição 3.1.3 *$K_{n,m}$ é ambiente isotópico a $K_{m,n}$.*

A demonstração desta proposição baseia-se numa sequência de movimentos em \mathbf{R}^3 , realizados com o nó (retirado do toro). A figura 3.10 ilustra esta demonstração para o caso particular do nó toroidal-(3,2). A demonstração formal deste teorema pode ser consultada em [20].

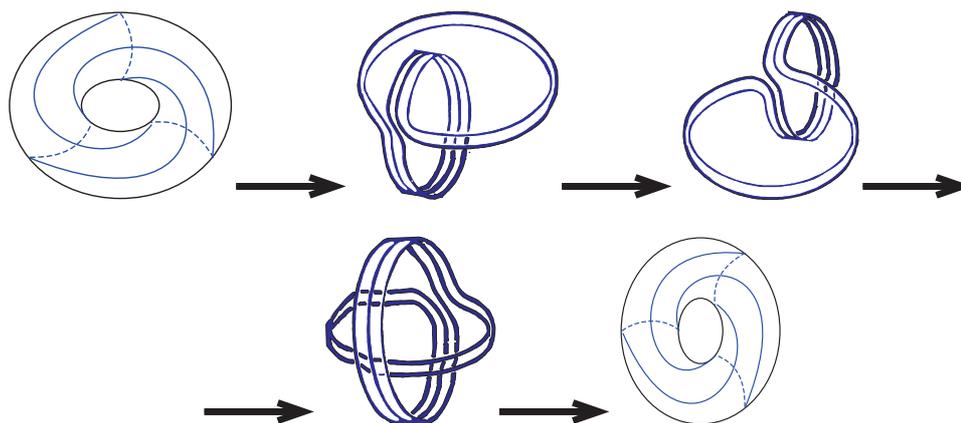


Figura 3.10: $K_{3,2}$ é ambiente isotópico a $K_{2,3}$

Proposição 3.1.4 *Qualquer nó toroidal- (n, m) é invertível.*

Demonstração: Consideremos o nó $K_{n,m}$. Pela proposição 3.1.2 $K_{-n,m}$ é o nó imagem no espelho de $K_{n,m}$ e $K_{-n,-m}$ o seu inverso.

Sabemos que $K_{-n,-m}$ é ambiente isotópico a $K_{-m,-n}$, que tem como imagem no espelho do nó $K_{m,-n}$ que por sua vez é ambiente isotópico a $K_{-n,m}$. Ou seja $K_{n,m}$ e $K_{-n,-m}$ têm a mesma imagem no espelho, logo são ambiente isotópicos e portanto $K_{n,m}$ é invertível. □

A partir do diagrama definido na proposição 3.1.1, facilmente se verifica que considerando o diagrama orientado, o sinal em cada um dos cruzamentos é sempre $+1$ ou sempre -1 . Esta particularidade vai permitir-nos provar as seguintes proposições.

Proposição 3.1.5 *Um nó toroidal- (n, m) nunca é regularmente reflexivo.*

Demonstração: Consideremos o nó $K_{n,m}$. Pela proposição 3.1.1 sabemos que este nó admite um diagrama com $|n|(|m| - 1)$ cruzamentos e uma vez que o sinal de cada um destes cruzamentos é ± 1 temos que $W(K_{n,m}) = \pm |n|(|m| - 1) \neq 0$.

Assim, como $W(K_{n,m}) \neq 0$, pela proposição 2.5.5 podemos concluir que nenhum nó toroidal é regularmente reflexivo. □

É possível provar que os nós toroidais nunca são reflexivos [19].

Para os enlacedos toroidais orientados é possível definir uma fórmula geral que permite determinar o seu número de ligação.

Proposição 3.1.6 *Seja $K_{n,m}$ um enlace toroidal com p componentes, sendo cada uma delas um nó toroidal $K_{\alpha,\beta}$ com $n = \alpha \times p$ e $m = \beta \times p$. O número de ligação do enlace $K_{n,m}$ é dado pela expressão:*

$$lk(K_{n,m}) = \binom{p}{2} \cdot |\alpha\beta|.$$

Demonstração: Sendo $K_{n,m}$ um enlace toroidal com p componentes do tipo $K_{\alpha,\beta}$ e com $n = \alpha \times p$ e $m = \beta \times p$, temos que

$$lk(K_{n,m}) = \binom{p}{2} \cdot lk(C_i; C_j),$$

sendo C_i, C_j duas componentes de $K_{n,m}$. Uma vez que cada componente de C_i cruza a componente C_j $2\alpha\beta$ vezes e como todas as componentes do enlace têm a mesma orientação, o sinal em cada um dos cruzamentos é ± 1 . Logo,

$$lk(C_i; C_j) = \frac{\pm 2\alpha\beta}{2}$$

e portanto

$$lk(K_{n,m}) = \binom{p}{2} \cdot |\alpha\beta|.$$

□

Usando esta fórmula facilmente determinamos os números de ligação dos enlacs representados na figura 3.4:

$$lk(K_{6,3}) = 6; lk(K_{9,3}) = 9; lk(K_{6,4}) = 6; lk(K_{8,4}) = 12.$$

A expressão que nos dá o número de ligação de um enlace toroidal também nos vai permitir dizer quando é que um enlace não é toroidal. Consideremos, por exemplo o enlace de duas componentes:

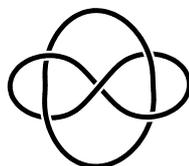


Figura 3.11: Enlace Whitehead

Sabemos que este enlace de duas componentes tem número de ligação zero,

$$\begin{aligned} \binom{p}{2} \cdot |\alpha\beta| = 0 &\Leftrightarrow \frac{p(p-1)}{2} \cdot \alpha\beta = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0. \end{aligned}$$

Logo o enlace Whitehead não é um enlace toroidal, visto que para tal $|\alpha|$ e $|\beta|$ teriam que ser inteiros superiores a 1. Podemos então concluir que se um enlace L não trivial tiver número de ligação zero, não é um enlace do tipo $K_{n,m}$.

3.2 Definição analítica de nós toroidais

Sendo um nó toroidal uma curva simples e fechada que se “enrola” no toro \mathbf{T} de \mathbf{R}^3 , vamos começar por analisar o diagrama plano que permite representar esta superfície em \mathbf{R}^2 .

Consideramos em \mathbf{R}^2 o quadrado unitário $I \times I$ com a topologia induzida e definimos a relação de equivalência \sim_I por:

$$(x, y) \sim_I (x', y') \Leftrightarrow [x = x' \wedge (y = 0 \wedge y' = 1)] \vee [y = y' \wedge (x = 0 \wedge x' = 1)].$$

$I \times I / \sim_I$ fica então representado tal como mostra a figura, onde as setas indicam os pontos que estão identificados.

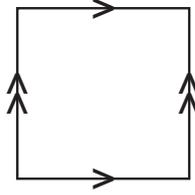


Figura 3.12: Diagrama planar do toro

Intuitivamente, se realizarmos as identificações indicadas, obtemos a tradicional representação do toro como um subespaço de \mathbf{R}^3 . Analiticamente podemos considerar os homeomorfismos:

$$h : I \times I / \sim_I \longrightarrow S^1 \times S^1$$

$$[(x, y)] \longmapsto (e^{2\pi xi}, e^{2\pi yi})$$

$$f : S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathbf{T}$$

$$(e^{2\pi xi}, e^{2\pi yi}) \longmapsto (\cos(2\pi y)(1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi x)), \sin(2\pi y)(1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi x)), \frac{1}{2}\sin(2\pi x))$$

O homeomorfismo composto

$$f \circ h : I \times I / \sim_I \longrightarrow \mathbf{T}$$

assegura a representação planar de \mathbf{T} .

Uma vez que um toro pode ser representado pelo diagrama planar da figura 3.12, vejamos como podemos “enrolar” neste diagrama um nó $K_{n,m}$, sendo $m.d.c.(n, m) = 1$.

Consideremos a aplicação contínua:

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

$$t \longmapsto (nt, mt)$$

onde $\gamma(I) \subset \mathbf{R}^2$ representa um segmento de recta com declive $\frac{m}{n}$, que passa na origem.

Definindo a relação de equivalência em \mathbf{R}^2 ,

$$(x, y) \sim_{R^2} (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + k_1 \\ y = y' + k_2 \end{cases}, k_1, k_2 \in Z$$

podemos obter que \mathbf{R}^2 / \sim é homeomorfo a $I \times I / \sim_I$.

A composição de aplicações

$$\psi = g \circ \Pi \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 / \sim_{R^2} \longrightarrow I \times I / \sim_I$$

onde Π é a projecção de \mathbf{R}^2 em $\mathbf{R}^2 / \sim_{R^2}$, permite que o segmento de recta $\gamma(I)$ seja colocado no diagrama planar do toro. Assim, $f \circ h \circ \psi$ permite definir analiticamente o subconjunto $K_{n,m}$.

Definição 3.2.1 *Sejam n e m um par de inteiros não nulos tais que $|n|, |m| > 1$. O subconjunto $K_{n,m}$ do toro de \mathbf{R}^3 , é definido por:*

$$K_{n,m} = \{f(\exp(2\pi nti), \exp(2\pi mt i)) : t \in I\}.$$

Para que se possa compreender melhor a expressão analítica que define $K_{n,m}$, vamos estudar o caso particular de $K_{3,2}$. Temos então:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : I &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ t &\longmapsto (3t, 2t) \end{aligned}$$

Neste caso estamos a considerar o segmento de recta $y = \frac{2}{3}x$ que pode ser identificado no diagrama planar do toro e conseqüentemente no toro definido por $S^1 \times S^1$, de acordo com as identificações representadas na figura:

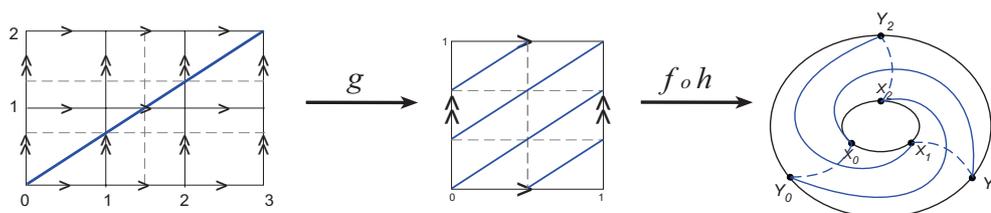


Figura 3.13: Da identificação planar do nó $K_{3,2}$ à sua representação em \mathbf{T}

Designemos a circunferência que define a espessura do toro por circunferência meridional e a circunferência que descreve o maior percurso em torno do toro por circunferência longitudinal.

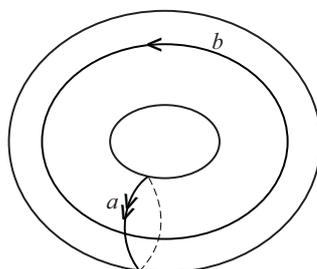


Figura 3.14: Circunferência meridional (a) e circunferência longitudinal (b)

Estas circunferências correspondem no diagrama planar do toro aos segmentos a e b , respectivamente. Observando a representação de um nó no diagrama planar do toro,

facilmente se constata que um nó $K_{n,m}$ intersecta n vezes a circunferência meridional e m vezes a longitudinal, ou seja, “enrola-se” no toro n vezes na direcção longitudinal e m vezes na direcção meridional. O diagrama planar do subconjunto do toro $K_{3,2}$ (figura 3.15), permite observar claramente esta afirmação neste caso particular.

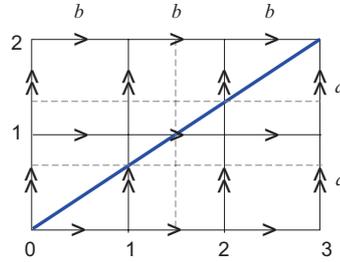


Figura 3.15: Diagrama planar do nó $K_{3,2}$

Note-se que descrevemos um processo de “construção” de nós toroidais e definimos analiticamente o subconjunto $K_{n,m}$ mas nunca provamos que $K_{n,m}$ é de facto um nó, de acordo com a definição 1.2.1. A proposição que se segue garantir-nos-á que o subconjunto de \mathbf{R}^3 , $K_{n,m}$, define um nó.

Proposição 3.2.1 *Se m e n são primos entre si, o subconjunto do toro $K_{n,m}$ é um nó.*

Demonstração: Para mostrar que $K_{n,m}$ é um nó, vamos provar que existe um homeomorfismo de S^1 em $K_{n,m}$.

Consideremos a aplicação contínua:

$$h : S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$$

$$\exp(2\pi ti) \longmapsto (\exp(2\pi nti), \exp(2\pi mt i))$$

Provemos que h é injectiva.

$$h(\exp(2\pi ti)) = h(\exp(2\pi t' i)) \Rightarrow (\exp(2\pi nti), \exp(2\pi mt i)) = (\exp(2\pi nt' i), \exp(2\pi mt' i)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2\pi nt) + i \sin(2\pi nt) = \cos(2\pi nt') + i \sin(2\pi nt') \\ \cos(2\pi mt) + i \sin(2\pi mt) = \cos(2\pi mt') + i \sin(2\pi mt') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2\pi nt) = \cos(2\pi nt') \\ \sin(2\pi nt) = \sin(2\pi nt') \\ \cos(2\pi mt) = \cos(2\pi mt') \\ \sin(2\pi mt) = \sin(2\pi mt') \end{cases}$$

Temos então

$$\begin{cases} \cos(2\pi nt) = \cos(2\pi nt') \\ \sin(2\pi nt) = \sin(2\pi nt') \end{cases} \Rightarrow 2\pi nt = 2\pi nt' + 2k\pi = 2\pi(nt' + k)$$

e analogamente

$$2\pi mt = 2\pi mt' + 2k'\pi = 2\pi(mt' + k')$$

ou seja

$$nt = nt' + k \Leftrightarrow n(t - t') = k \quad \text{e} \quad mt = mt' + k' \Leftrightarrow m(t - t') = k'.$$

Por Bezout, sendo $m.d.c(m, n) = 1$, $\exists a, b \in \mathbf{Z} : 1 = an + bm$ de onde

$$(t - t') = an(t - t') + bm(t - t')$$

e então

$$t - t' = ak + bk' \in \mathbf{Z} \Rightarrow t - t' = k'' \text{ com } k'' \in \mathbf{Z}.$$

Logo $2\pi t = 2\pi t' + 2\pi k''$.

Portanto

$$\exp(2\pi ti) = \exp(2\pi t'i).$$

Consideremos o homeomorfismo $f : S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbf{T}$ definido anteriormente, no qual $f(\exp(\varphi i), \exp(\theta i)) = (\cos(2\theta\pi)(1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi\varphi)), \sin(2\pi\theta)(1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi\varphi)), \frac{1}{2}\sin(2\pi\varphi))$.

Assim, considerando $g = foh$ e sendo g é contínua e injectiva (composta de duas aplicações contínuas e injectivas), tem-se que $Im g = K_{n,m}$.

Como S^1 é um conjunto compacto (fechado e limitado) e $K_{n,m} \subset \mathbf{R}^3$ um espaço de Hausdorff (todo o subconjunto de \mathbf{R}^n é Hausdorff), g é um homeomorfismo. \square

Definição 3.2.2 O nó $K_{n,m}$ com n e m primos entre si e $(|n|, |m| > 1)$ designa-se por nó toroidal- (n, m) .

3.3 Estudo topológico dos nós

Vimos no capítulo 1 que se dois nós K e K' são ambiente isotópicos, existe em particular um homeomorfismo $h_1 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tal que $h_1(K) = K'$. Assim, $h_1(\mathbf{R}^3 - K) = \mathbf{R}^3 - K'$ e portanto $\mathbf{R}^3 - K$ e $\mathbf{R}^3 - K'$ são homeomorfos. Logo $\mathbf{R}^3 - K$ e $\mathbf{R}^3 - K'$ têm grupos fundamentais isomorfos. Assim, dados dois nós K e K' em \mathbf{R}^3 , se provarmos que os grupos fundamentais $\pi(\mathbf{R}^3 - K)$ e $\pi(\mathbf{R}^3 - K')$ não são isomorfos, então K e K' não são ambiente isotópicos. Este é o processo mais comum utilizado para distinguir nós. Considerando $x_0 \in \mathbf{R}^3 - K$, o grupo $\pi(\mathbf{R}^3 - K, x_0)$ chama-se *grupo do nó K* .

Os grupos dos nós tornaram-se uma importante “ferramenta” na Teoria de Nós. Este conceito desenvolveu-se com base no trabalho de W. Dyck que em 1882 apresentou, pela primeira vez, o método de representar grupos a partir de geradores e relações estabelecidas entre eles. A classificação do grupo $\langle \{a, b\} : a^m b^n = 1 \rangle$ por Schreier em 1924 permitiu definir a classe dos nós toroidais. É a definição deste grupo que vai então permitir a classificação dos nós toroidais.

Passemos então a determinar o grupo do nó trivial e dos nós toroidais- (n, m) .

Teorema 3.3.1 *O grupo do nó trivial é isomorfo a \mathbf{Z} .*

Demonstração: Consideremos a circunferência de \mathbf{R}^3 ,

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \wedge z = 0\}.$$

Seja $\varepsilon > 0$ número real arbitrariamente pequeno e definamos os subespaços (não vazios, abertos e conexos por arcos) X e Y de $\mathbf{R}^3 - K$ por:

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x < \varepsilon\} \cap \mathbf{R}^3 - K;$$

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > -\varepsilon\} \cap \mathbf{R}^3 - K.$$

Note-se que $X \cup Y = \mathbf{R}^3 - K$.

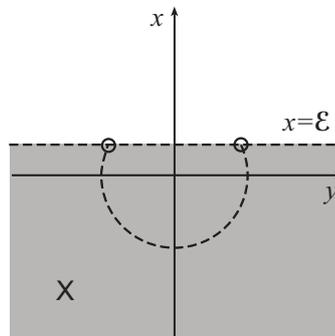


Figura 3.16: Representação planar do subespaço X

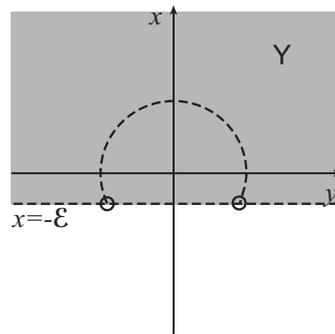


Figura 3.17: Representação planar do subespaço Y

Sabendo que $0 := (0, 0, 0) \in X \cap Y = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : -\varepsilon < x < \varepsilon\} \cap \mathbf{R}^3 - K$, estamos em condições de aplicar o teorema de Van-Kampen, que permite determinar $\pi(\mathbf{R}^3 - K, 0)$ a partir de $\pi(X, 0)$, $\pi(Y, 0)$ e $\pi(X \cap Y, 0)$.

Determinemos os grupos fundamentais: $\pi(X \cap Y, 0)$; $\pi(X, 0)$; $\pi(Y, 0)$ e os homomorfismos entre eles induzidos pelas inclusões.

Para calcular $\pi(X, 0)$ e $\pi(Y, 0)$ consideremos o conjunto:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = 0 \wedge y \geq 0\} \cap (\mathbf{R}^3 - \{(0, 1, 0)\}).$$

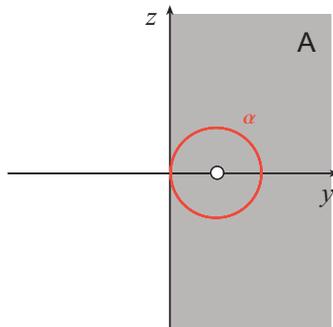


Figura 3.18: Conjunto A e lacete α

A é um retracto de deformação forte de X e Y , logo $\pi(A, 0) \cong \pi(X, 0)$ e $\pi(A, 0) \cong \pi(Y, 0)$.

Considere-se:

$$\alpha : I \longrightarrow A; \quad \alpha_X : I \longrightarrow X \quad \text{e} \quad \alpha_Y : I \longrightarrow Y$$

com

$$\alpha_X(t) = \alpha_Y(t) = \alpha(t) = (0, 1 - \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

Como α é um lacete em A e $[\alpha]$ gera $\pi(A, 0)$, ou seja, $\pi(A, 0) = \langle [\alpha] \rangle$ e sendo A um retracto de deformação forte de X e Y , temos que $\pi(X, 0) = \langle [\alpha_X] \rangle$ e $\pi(Y, 0) = \langle [\alpha_Y] \rangle$.

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = 0\} - \{(0, 1, 0), (0, -1, 0)\}$$

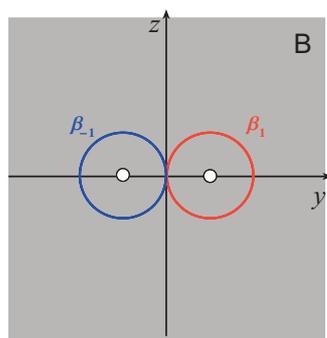


Figura 3.19: Conjunto B e lacetes β_1, β_{-1}

B é um retracto de deformação forte de $X \cap Y$ logo $\pi(B, 0) \cong \pi(X \cap Y, 0)$. Como $\pi(B, 0)$ é um grupo livre gerado por dois elementos, $\pi(X \cap Y, 0) = \langle [\beta_1]; [\beta_{-1}] \rangle$, sendo

$$\begin{aligned} \beta_1 : I &\longrightarrow X \cap Y \\ t &\longmapsto (0, 1 - \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \\ \beta_{-1} : I &\longrightarrow X \cap Y \\ t &\longmapsto (0, -1 + \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned} .$$

Passemos agora a definir os homomorfismos entre os grupos.

Consideremos a inclusões:

$$\begin{aligned} \varphi_X : X \cap Y &\longrightarrow X; & \varphi_Y : X \cap Y &\longrightarrow Y \\ \psi_X : X &\longrightarrow X \cup Y; & \psi_Y : Y &\longrightarrow X \cup Y \end{aligned} .$$

A partir das quais podemos definir os homomorfismos induzidos:

$$\begin{aligned} \varphi_X^* : \pi(X \cap Y, 0) &\longrightarrow \pi(X, 0); & \varphi_Y^* : \pi(X \cap Y, 0) &\longrightarrow \pi(Y, 0) \\ \psi_X^* : \pi(X, 0) &\longrightarrow \pi(X \cup Y, 0); & \psi_Y^* : \pi(Y, 0) &\longrightarrow \pi(X \cup Y, 0) \end{aligned} .$$

Pelo teorema de Van-Kampen, $\pi(X \cup Y, 0)$ obtém-se a partir de $\pi(X, 0)$ e $\pi(Y, 0)$ identificando os elementos provenientes de $\pi(X \cap Y, 0)$.

$$\begin{array}{ccc} \pi(X \cap Y, 0) = \langle [\beta_1]; [\beta_{-1}] \rangle & \longrightarrow & \pi(X, 0) = \langle [\alpha_X] \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi(Y, 0) = \langle [\alpha_Y] \rangle & \longrightarrow & \pi(X \cup Y, 0) \end{array}$$

Considerando β_1 e β_{-1} em X , ao deformar X em A temos que $\beta_1 \sim \alpha_X$ e $\beta_{-1} \sim \alpha_X$. Analogamente $\beta_1 \sim \alpha_Y$ e $\beta_{-1} \sim \alpha_Y$ e como $\alpha \sim \alpha_X \sim \alpha_Y$ temos então que

$$\pi(X \cup Y, 0) = \langle [\alpha] \rangle.$$

Logo $\pi(X \cup Y, 0) \cong \mathbf{Z}$. \square

Teorema 3.3.2 *O grupo do nó $K_{n,m}$ é um grupo com dois geradores: $a; b$ e uma relação $a^m = b^n$. Ou seja, o grupo do nó $K_{n,m}$ é $\langle \{a, b\} : a^m = b^n \rangle$.*

Demonstração: Identificando \mathbf{R}^3 com $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$ e usando coordenadas polares, consideremos a aplicação contínua

$$\begin{aligned} F : \mathbf{C} \times S^1 &\longrightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{R} \\ (r \exp(\varphi i), \exp(\theta i)) &\longmapsto \left(1 + \frac{1}{2}r \cos \varphi, \theta, \frac{1}{2}r \sin \varphi\right) \end{aligned} .$$

Note-se que a restrição de F a $S^1 \times S^1$ é o homomorfismo f da secção 3.2. As expressões $1 + \frac{1}{2}r \cos \varphi$ e $\frac{1}{2}r \sin \varphi$ definem respectivamente, a largura e altura do toro a partir da circunferência S^1 em \mathbf{R}^3 .

Consideremos também

$$K_{2\varepsilon} = \left\{ \left(x + 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi mt), 2\pi nt, y + \frac{1}{2} \sin(2\pi mt) \right) : 0 \leq t \leq 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 4\varepsilon^2 \right\}$$

que define um nó com uma pequena espessura.

Definamos os subespaços

$$X = \{f(r \exp(\varphi i), \exp(\theta i)) : 0 \leq \varphi \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \varepsilon + 1\} - K_{2\varepsilon}$$

e

$$Y = \mathbf{R}^3 - Y' - K_{2\varepsilon}$$

com $Y' = \{f(r \exp(\varphi i), \exp(\theta i)) : 0 \leq \varphi \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1 - \varepsilon\}$.

X representa um “donuts” (toro sólido) de raio $1 + \varepsilon$ no qual é “escavado um túnel” com a forma de $K_{2\varepsilon}$.

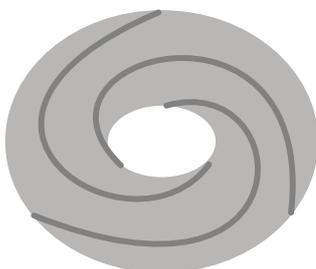


Figura 3.20: Representação geométrica do conjunto X considerando $K_{2\varepsilon} = K_{3,2}$

Y' representa um “toro” de raio $1 - \varepsilon$ e portanto Y é o espaço \mathbf{R}^3 ao qual é retirado o toro sólido Y' e o “túnel” $K_{2\varepsilon}$.

Assim, $X \cup Y = \mathbf{R}^3 - K_{2\varepsilon} \cong \mathbf{R}^3 - K_{n,m}$.

Seja $X \cap Y = \{f(r \exp(\varphi i), \exp(\theta i)) : 0 \leq \varphi, \theta \leq 2\pi, 1 - \varepsilon < r < 1 + \varepsilon\} - K_{2\varepsilon}$.

Este subconjunto de \mathbf{R}^3 representa o “toro de espessura 2ε no qual se “escavou o túnel” $K_{2\varepsilon}$.



Figura 3.21: Representação do conjunto $X \cap Y$ considerando $K_{2\varepsilon} = K_{3,2}$

Se pensarmos na representação planar do toro, temos, no caso particular do nó toroidal $K_{3,2}$

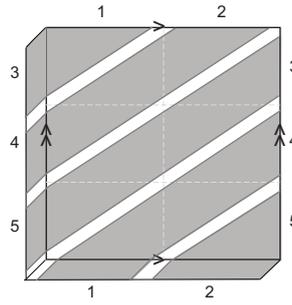


Figura 3.22: Representação planar do conjunto $X \cap Y$ no caso particular do nó K_{32}

Observando a representação anterior, facilmente se verifica que procedendo às identificações, $X \cap Y$ é um cilindro de espessura 2ε .

Seja $x_0 \in X \cap Y$. Determinemos então os grupos fundamentais dos espaços X, Y e $X \cap Y$.

$$Z = \{f(0, \exp(\theta i)) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \cong S^1$$

é um retracto de deformação forte de X e $\mathbf{R}^3 - Z \cong \mathbf{R}^3 - S^1$ um retracto de deformação forte de Y .

$$\pi(X, x_0) \cong \pi(Z, x_0) \text{ e } \pi(Y, x_0) \cong \pi(\mathbf{R}^3 - Z, x_0).$$

Sendo $a = [\alpha]$ em que α representa um caminho fechado em X que vai de x_0 a um ponto x_1 próximo de Z através de um arco u_x , dá uma volta a Z , v_x e volta de novo a x_0 pelo arco u_x . Isto é, $\alpha : I \rightarrow X$ tal que $\alpha = u_x * v_x * u_x^{-1}$ (a notação $*$ representa a concatenação de caminhos). Definindo também $b = [\beta]$ sendo β um caminho fechado em Y que vai de x_0 a um ponto y_1 próximo da circunferência $Z' = \{(1 + \frac{3}{4} \cos(2\pi t), 0, \frac{3}{4} \sin(2\pi t)) : t \in I\}$ (circunferência meridional) através de um arco u_y , dá uma volta a Z' , v_y e volta a percorrer u_y . Isto é, $\beta : I \rightarrow X$ é tal que $b = u_y * v_y * u_y^{-1}$.

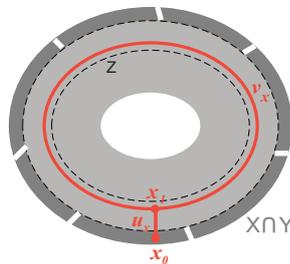
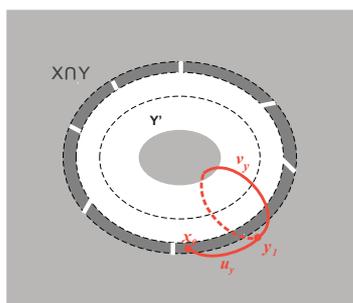


Figura 3.23: Secção de X

Figura 3.24: Secção de Y

Temos então que

$$\pi(X, x_0) = \langle a \rangle$$

e

$$\pi(Y, x_0) = \langle b \rangle.$$

No caso de $X \cap Y$ que já identificamos com um cilindro de espessura 2ε , consideremos $W = \{f(\exp(2\pi i(mt + \delta)), \exp(2\pi int)); 0 \leq t \leq 1\}$ um nó que acompanha o comportamento de $K_{2\varepsilon}$ em $X \cap Y$ e portanto define uma circunferência à volta do cilindro. Assim, $\pi(X \cap Y, x_0)$ é gerado por $c = [\theta]$ em que θ é um caminho fechado que circula $X \cap Y$. Supondo $x_0 \in W$, temos:

$$\pi(X \cap Y, x_0) = \langle c \rangle.$$

Aplicando o Teorema de Van-Kampen,

$$\begin{array}{ccc} \pi(X \cap Y, x_0) = \langle c \rangle & \longrightarrow & \pi(X, x_0) = \langle a \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi(Y, x_0) = \langle b \rangle & \longrightarrow & \pi(X \cup Y, x_0) \end{array} .$$

Vejamos como se comporta θ em X e Y .

Uma vez que o nó toroidal- (n, m) dá m voltas à circunferência longitudinal e n voltas à circunferência meridional, isto é, dá m voltas à circunferência $f(1, \exp(2\pi it))$ e n voltas à circunferência $f(\exp(2\pi it), 1)$. Considerando θ em X , ao deformar X na circunferência $f(1, \exp(2\pi it))$, o nó θ vai ficar deformado nas voltas que dá a esta circunferência, logo

$$\theta \sim \alpha^m.$$

No caso do comportamento de θ em Y , ao deformar Y na circunferência $f(\exp(2\pi it), 1)$, o nó θ vai ficar deformado nas voltas que dá à circunferência vertical, logo

$$\theta \sim \beta^n.$$

Portanto, considerando-se uma direcção previamente fixada, a relação entre a e b em $\pi(X \cup Y)$ é $a^m = b^n$.

Assim,

$$\pi(X \cup Y) = \langle \{a, b\} : a^m = b^n \rangle.$$

□

A partir do grupo que define a classe dos nós toroidais-(n,m) podemos novamente provar que o nó trevo ou nó toroidal-(3, 2) não é ambiente isotópico ao nó trivial. (A distinção entre estes dois nós, já foi demonstrada na secção 1.3.1.)

Consideremos o grupo do nó $K_{3,2} = \langle \{a, b\} : \{a^2 = b^3\} \rangle$. Definamos um grupo G' com os mesmos geradores e mais duas relações:

$$G' = \langle \{a, b\} : \{a^2 = b^3; a^2 = 1; ab = b^{-1}a\} \rangle = \langle \{a, b\} : \{a^2 = 1; b^3 = 1; ab = b^{-1}a\} \rangle.$$

Existe um epimorfismo entre $K_{2,3}$ e G' que aplica a em a e b em b .

Devido às relações definidas no grupo G' qualquer elemento de G' pode escrever-se na forma $a^i b^j$ com $i \in \{0, 1\}$ e $j \in \{0, 1, 2\}$. Assim, os elementos de G' são $1; a; b; b^2; ab; ab^2$ e o grupo G' pode ser definido pela tabela:

	1	a	b	b^2	ab	ab^2
1	1	a	b	b^2	ab	ab^2
a	a	1	ab	ab^2	b	b^2
b	b	ab^2	b^2	1	a	ab
b^2	b^2	ab	1	b	ab^2	a
ab	ab	b^2	ab^2	a	1	b
ab^2	ab^2	b	a	ab	b^2	1

Observando a tabela constatamos que, por exemplo

$$b(ab) = a \neq (ab)b = ab^2.$$

Logo o grupo G' não é abeliano.

Como a imagem de um grupo abeliano por um epimorfismo é sempre um grupo abeliano, uma vez que G' não é abeliano, podemos concluir que $K_{3,2}$ também não é um grupo abeliano. Assim, o nó toroidal-(3, 2) não pode ser isomorfo ao grupo abeliano \mathbf{Z} , o que prova que o nó trevo não é trivial.

De modo análogo podíamos provar se outros nós toroidais são não triviais.

3.4 Classificação dos nós toroidais

Na secção 3.1 concluímos que qualquer nó $K_{n,m}$ é ambiente isotópico a $K_{m,n}$ e ainda que todos os nós toroidais são invertíveis e não reflexivos. Assim, para que a classificação deste tipo de nós seja total torna-se apenas necessário conhecer a relação existente entre os conjuntos $\{n, m\}$ e $\{n', m'\}$, com $n, m, n', m' > 1$, para que dois quaisquer nós toroidais $K_{n,m}$ e $K_{n',m'}$ sejam ambiente isotópicos.

Teorema 3.4.1 *Se dois nós $K_{n,m}$ e $K_{n',m'}$ com $n, m, n', m' > 1$ são ambiente isotópicos então $\{m, n\} = \{n', m'\}$, isto é, $n = n'$ e $m = m'$ ou $n = m'$ e $m = n'$.*

Para demonstrar este teorema, torna-se necessário demonstrar os lemas que se seguem, nos quais consideremos $G = \langle \{a, b\}; \{a^m = b^n\} \rangle$ e $N = \langle a^m \rangle$.

Lema 3.4.1 *O subgrupo N do grupo G é um subgrupo normal.*

Demonstração: Mostremos que o subgrupo N é um subgrupo normal de G , ou seja, que

$$\forall x \in G \quad xN = Nx.$$

Como G é gerado por a e b , se a^m comutar com os geradores a e b , comuta com qualquer elemento de G uma vez que se $g \in G$, $g = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_k} b^{\beta_k}$.

$$a \cdot a^m = a^{m+1} = a^m a$$

$$b a^m = b b^n = b^{n+1} = b^n b = a^m b.$$

Logo a^m comuta com qualquer elemento de G .

Assim,

$$\begin{aligned} xN &= \{xn : n \in N\} = \{xn : n \in \langle a^m \rangle\} = \{x(a^m)^l : l \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{x(a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m) : l \in \mathbb{Z}\} = \{a^m \cdot x \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m : l \in \mathbb{Z}\} = \{(a^m)^l x : l \in \mathbb{Z}\} = Nx. \end{aligned}$$

□

Lema 3.4.2 *O grupo quociente G/N admite a seguinte representação:*

$$G/N = \langle \{c, d\} : c^m = 1, d^n = 1 \rangle.$$

Demonstração: Sendo N um subgrupo normal de G (lema 3.4.1), o grupo quociente G/N está bem definido para a operação interna:

$$(xN) \cdot (yN) = (xy)N, \forall x, y \in G. \quad (3.1)$$

Seja $g \in G$, $g = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_k} b^{\beta_k}$ logo,

$$\begin{aligned} gN &= (a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_k} b^{\beta_k})N = a^{\alpha_1} N \cdot b^{\beta_1} N \dots a^{\alpha_k} N \cdot b^{\beta_k} N \\ &= \underbrace{(aN \cdot \dots \cdot aN)}_{\alpha_1} \underbrace{(bN \cdot \dots \cdot bN)}_{\beta_1} \dots \underbrace{(aN \cdot \dots \cdot aN)}_{\alpha_k} \underbrace{(bN \cdot \dots \cdot bN)}_{\beta_k} = \\ &= (aN)^{\alpha_1} (bN)^{\beta_1} \dots (aN)^{\alpha_k} (bN)^{\beta_k} \end{aligned} \quad (3.2)$$

gN é então gerado por aN e bN , isto é, aN e bN são geradores de G/N .

Procuremos a relação para G/N ou seja, identifiquemos os elementos de G/N que representam a identidade de G/N . Assim, vamos determinar gN tal que $gN = N$.

Temos,

$$gN = N \Rightarrow g \in N$$

e portanto

$$g = (a^m)^l = (b^n)^l$$

logo

$$(aN)^m = N \quad \text{e} \quad (bN)^n = N.$$

Assim,

$$G/N = \langle \{aN, bN\} : \{(aN)^m = N; (bN)^n = N\} \rangle.$$

Simplificando a notação:

$$G/N = \langle \{c, d\} : c^m = 1, d^n = 1 \rangle.$$

□

Lema 3.4.3 *O centro do grupo $\langle \{c, d\} : c^m = 1, d^n = 1 \rangle$ é trivial, ou seja, $Z(G/N) = \{N\}$.*

Demonstração: Considere-se o grupo $G/N = \langle \{c, d\} : c^m = 1, d^n = 1 \rangle$. Neste grupo, todo o elemento pode ser escrito de maneira única na forma indicada de seguida, chamada “forma reduzida” (Teorema 1.4 - [19]):

$$x = c^{\alpha_1} d^{\beta_1} \dots c^{\alpha_k} d^{\beta_k}$$

com $0 < \alpha_i < m, i = 2, \dots, k; 0 \leq \alpha_1 < m; 0 \leq \beta_k < n; 0 < \beta_j < n, j = 1, 2, \dots, k-1$.

Seja $x \in G/N$ tal que $xc = cx$. Assim, temos

$$c^{\alpha_1} d^{\beta_1} \dots c^{\alpha_k} d^{\beta_k} c = c^{\alpha_1+1} d^{\beta_1} \dots c^{\alpha_k} d^{\beta_k}.$$

Suponhamos que $k \geq 2$.

- Se $\beta_k \neq 0$, o elemento da esquerda está na forma reduzida e então, pela unicidade dessa forma, o elemento da direita não pode estar, logo $\alpha_1 + 1 = m$ e portanto $c^{\alpha_1+1} = 1$. Mas,

$$c^{\alpha_1} d^{\beta_1} \dots c^{\alpha_k} d^{\beta_k} c = d^{\beta_1} \dots c^{\alpha_k} d^{\beta_k}$$

também é absurdo pela unicidade da forma reduzida.

- Se $\beta_k = 0$ tem-se $c^{\alpha_1} d^{\beta_1} \dots d^{\beta_{k-1}} c^{\alpha_k+1} = c^{\alpha_1+1} d^{\beta_1} \dots d^{\beta_{k-1}} c^{\alpha_k}$ logo

$$d^{\beta_1} c^{\alpha_2} \dots d^{\beta_{k-1}} = c(d^{\beta_1} \dots d^{\beta_{k-1}})c^{-1} \Leftrightarrow d^{\beta_1} c^{\alpha_2} \dots d^{\beta_{k-1}} = c(d^{\beta_1} \dots d^{\beta_{k-1}})c^{n-k},$$

o que é de novo absurdo pela unicidade da forma reduzida.

Para $k \leq 1$, $x = c^{\alpha_1} d^{\beta_1}$. Assim, $cx = xc$ implica

$$c^{\alpha_1+1} d^{\beta_1} = c^{\alpha_1} d^{\beta_1} c.$$

Pela unicidade da forma reduzida temos:

$$\beta_1 = 0 \text{ ou } \alpha_1 + 1 = m.$$

Como $\alpha_1 + 1 = m$ então

$$d^{\beta_1} = c^{\alpha_1} d^{\beta_1} c \Rightarrow \beta_1 = 0.$$

Logo,

$$x = c^{\alpha_1}.$$

De modo análogo, se $x \in G/N$ verificar-se-ia que se $xd = dx$ então $x = d^\beta$.

Assim, se $x \in Z(G/N)$ tem-se $d^\beta = c^\alpha$. Logo,

$$\beta = \alpha = 0 \Rightarrow d^0 = c^0 = 1 = x.$$

Portanto, o centro de $Z(G/N)$ é trivial. \square

Lema 3.4.4 *O centro do grupo G é N .*

Demonstração: Mostremos que $Z(G) = \{g \in G : gh = hg, \forall h \in G\} = N$.

- $N \subset Z(G)$

Seja $(a^m)^r \in N$. Como a^m comuta com qualquer elemento de G ,

$$\begin{aligned} a^{mr} . h &= a^{mr} (a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_k} b^{\beta_k}) = (a^m)^{r-1} (a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_k} b^{\beta_k} a^m) = \\ &= \dots = (a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_k} b^{\beta_k}) (a^m)^r = h a^{mr}. \end{aligned}$$

Logo $a^{mr} \in Z(G)$ e portanto $N \subset Z(G)$.

- $Z(G) \subset N$.

Consideremos o epimorfismo canônico:

$$\begin{array}{ccc} \theta : G & \longrightarrow & G/N \\ g & \longmapsto & gN \end{array} .$$

Provemos que $\theta(Z(G)) \subset Z(G/N)$.

$$x \in \theta(Z(G)) \Leftrightarrow \exists g \in Z(G) : x = gN.$$

Seja $hN \in G/N$. Por aplicação de 3.1 $(gN)(hN) = (gh)N$ e como $g \in Z(G)$,

$$(gh)N = (hg)N = (hN)(gN).$$

Assim, $gN \in Z(G/N)$.

Se $\theta(Z(G)) \subset Z(G/N) = \{N\}$ então $\theta(Z(G)) = \{N\}$.

Logo, para qualquer $g \in Z(G)$

$$\theta(g) = N \Rightarrow gN = N$$

ou seja $g \in N$.

Portanto $Z(G) \subset N$. \square

Com base nestes lemas vamos então demonstrar o teorema 3.4.1.

Demonstração do teorema 3.4.1: Seja

$$G = \langle \{a, b\}; \{a^m = b^n\} \rangle$$

o grupo do nó toroidal $K_{n,m}$.

A partir dos lemas anteriores,

$$G/Z(G) = G/N = \langle \{c, d\}; \{c^m = 1; d^n = 1\} \rangle.$$

Consideremos os nós toroidais ambiente isotópicos $K_{n,m}$ e $K_{n',m'}$. Logo os seus grupos G e G' são isomorfos e consequentemente $G/Z(G)$ e $G'/Z(G')$ são também isomorfos.

Provemos que $\{n, m\} = \{n', m'\}$.

Sendo

$$G/Z(G) = \langle \{c, d\}; \{c^m = 1; d^n = 1\} \rangle$$

e

$$G'/Z(G') = \langle \{c', d'\}; \{(c')^{m'} = 1; (d')^{n'} = 1\} \rangle,$$

consideremos o isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} f : G/Z(G) & \longrightarrow & G'/Z(G') \\ c & \longmapsto & f(c) \\ d & \longmapsto & f(d) \end{array} .$$

Seja $k \in Z$,

$$(f(c))^k = f(c) \dots f(c) = f(c \dots c) = f(c^k).$$

Assim, como c tem ordem m e d tem ordem n ,

$$(f(c))^m = f(c^m) = f(1) = 1$$

$$(f(d))^n = f(d^n) = f(1) = 1.$$

Suponhamos que $\alpha < m$ tal que $(f(c))^\alpha = 1 \Rightarrow f(c^\alpha) = 1 \Rightarrow c^\alpha = 1$ o que é impossível porque a ordem de c é m . Logo, a ordem de $f(c)$ é também m . De modo análogo prova-se que a ordem de $f(d)$ é n .

Como c tem ordem m , os elementos c^{-1} e $xcx^{-1}, \forall x \in G/Z(G)$ também têm ordem m . Como d tem ordem n , os elementos d^{-1} e $xdx^{-1}, \forall x \in G/Z(G)$ também têm ordem n .

Tem-se que, no grupo $G'/Z(G')$ os únicos elementos de ordem finita são conjugados de potências de c' e d' (corolário 1.4 - [19]).

Uma vez que o nosso objectivo é provar que $\{n, m\} = \{n', m'\}$, comecemos por mostrar que $m = m'$.

a) Provemos que $m|m'$.

Uma vez que um isomorfismo transforma sempre um elemento de ordem finita num elemento de ordem finita, vamos supôr, sem perda de generalidade, que

$$f(c) = x(c')^\alpha x^{-1}, \forall \alpha \in Z \forall x \in G'/Z(G').$$

Como c tem ordem m , já vimos que $f(c)$ também tem ordem m .

Sendo $f(c) = x(c')^\alpha x^{-1}$ temos

$$(f(c))^m = (x(c')^\alpha x^{-1})^m = x(c')^{m\alpha} x^{-1} = 1$$

Como a ordem de $xc'x^{-1}$ é m' temos então que

$$m'|m\alpha \Leftrightarrow m'k = m\alpha \Leftrightarrow m|m'k.$$

Provemos que m e k são primos entre si. Suponhamos que $m.d.c(m, k) = p$ logo $m = pv$ e $k = pw$.

$$m'k = m\alpha \Leftrightarrow m'pw = pv\alpha \Leftrightarrow m'w = v\alpha.$$

$$(f(c))^v = (x(c')^\alpha x^{-1})^v = x(c')^{\alpha v} x^{-1} = x(c')^{m'w} x^{-1} = x((c')^{m'})^w x^{-1} = 1.$$

Logo como $m|m'k$ e m e k são primos entre si, temos que $m|m'$.

b) Provemos que $m'|m$.

Sendo f um isomorfismo, f^{-1} também o é, logo como c' tem ordem finita, $f^{-1}(c')$ também tem ordem finita.

Suponhamos que

$$f^{-1}(c') = yd^\beta y^{-1} \Rightarrow c' = f(y)f(d^\beta)f(y^{-1}) \Rightarrow f(d^\beta) = (f(y))^{-1}c'f(y).$$

Assim, $f(d^{\alpha\beta}) = (f(y))^{-1}(c')^\alpha f(y)$. Como $f(c) = x(c')^\alpha x^{-1} \Rightarrow (c')^\alpha = x^{-1}f(c)x$. Sendo $z = f^{-1}(x)y$ e $z^{-1} = y^{-1}(f^{-1}(x))^{-1}$ temos

$$z^{-1}cz = y^{-1}(f^{-1}(x))^{-1}cf^{-1}(x)y \Rightarrow f(z^{-1}cz) = f(y^{-1}.x^{-1}f(c)xf(y))$$

e portanto

$$f(d^{\alpha\beta}) = (f(y))^{-1}(x^{-1}f(c)x)f(y) = f(y^{-1})(x^{-1}f(c)x)f(y) = f(z^{-1}cz).$$

Como f é injectiva, $d^{\alpha\beta} = z^{-1}cz$. Logo, a ordem de $d^{\alpha\beta}$ é divisor de n e $z^{-1}cz$ tem ordem m . Mas como $d^{\alpha\beta} = z^{-1}cz$ os elementos $d^{\alpha\beta}$ e $z^{-1}cz$ têm a mesma ordem, o que é impossível porque m e n são primos entre si. Logo $f^{-1}(c') = yc^\beta y^{-1}$.

Seguindo o mesmo processo que em **a)** concluí-se que $m'|m$ e fica então demonstrado que $m = m'$.

Considerando $f(d) = x(d')^\alpha x^{-1}$ prova-se analogamente que $n = n'$.

Assim, se $K_{n,m}$ e $K_{n',m'}$ são ambiente isotópicos, $n = n'$ e $m = m'$.

Supondo que $f(c) = x(d')^\alpha x^{-1}$; $f(d) = x(c')^\alpha x^{-1}$ e procedendo de uma forma similar, mostramos que $n = m'$ e $m = n'$. \square

Em conclusão, este teorema para além de permitir classificar os nós toroidais garante também a existência de uma infinidade de nós distintos, uma vez que existe uma infinidade de pares de inteiros primos n e m , com $|n|, |m| > 1$.

Bibliografia

- [1] Adams, C., *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, W. H. Freeman and Company, New York, 2001.
- [2] Alexander, J. W., *Topological invariants of knots and links*, Translations of Mathematical Monographs, American Math. Soc. **30** (1928), no. 2, 275-306.
- [3] Bernhard, James A., *Unknotting numbers and minimal knot diagrams*, J. Knot Theory Ramifications **3** (1994), no. 1, 1-5.
- [4] Bleiler, Steven A, *A note on unknotting number*, Math. Proc. Cambridge Soc., Contemp. Math **29** (1984), 161-164.
- [5] Burde, G. and Zieschang, H., *Knots*, Walter de Gruyter, Berlin, 1985.
- [6] Conway, H., *And enumerations of knots and links, and some of their properties*, Comput. Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, New York (1970), 329-358.
- [7] Crowell, Richard H., *Nonalternating links*, Illinois J. Math. **3** (1959), 101-120.
- [8] Freyd, P, Yetter D., Hoste J., Lickorish, W., Millett, K. and Ocneanu, A., *A new polynomial invariant for knots and links*, Bull. Americ. Math. Soc. **12** (1985), 239-246.
- [9] Gilbert, N.D. and Porter, T., *Knots and Surfaces*, Oxford University Press, New York, 1997.
- [10] Jones, Vaughan F.R., *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, Bull. Americ. Math. Soc. **12** (1985), 103-111.
- [11] Kauffman, Louis H., *On Knots*, Princeton University Press, New Jersey, 1987.
- [12] Kauffman, Louis H., *Knots and Physics*, Series on Knots and Everything - vol.1, World Scientific, Singapore, 1991.
- [13] Kauffman, Louis H., *State Models and the Jones polynomial*, Topology **26** (1987), 395-407.

- [14] Kauffman, Louis H., *The Conway polynomial*, Advanced Series in Mathematical Physics **11** (1989), 497-504.
- [15] Kawauchi, Akio, *A Survey of Knot Theory*, Birkhauser, Basel, 1996.
- [16] Kosniowski, C. *Topología Algebraica*, Editorial Reverté, Barcelona, 1989.
- [17] Livingston, C., *Knot Theory*, The Carus Mathematical Monographs - vol.24, The Mathematical Association of America, Washington, 1993.
- [18] Lickorish, W. B. R. and Millet K. C., *The reversing result for the Jones polynomial*, Pacific J. Math. **124**, no. 1, 173-176.
- [19] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D., *Combinatorial Group Theory*, Ed. Dover, 1976.
- [20] Murasugi, K., *Knot Theory and Its Applications*, Birkhauser, Boston, 1996.
- [21] Massey, W. S., *Indroducción a la topología algebraica*, Editorial Reverté, Barcelona, 1982.
- [22] Perko, Kenneth A. Jr., *On the classification of knots*, Proc. American Math. Soc. **45** (1974), 262-266.
- [23] Prasolov, V. V. and Sossinsky, A. B., *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds: An Introduction to the New Invariants in Low-Dimensional Topology*, Translations of Mathematical Monographs - vol.154, American Mathematical Society, United States of America, 1997.
- [24] Reidemeister, K., *Knotentheory*, Ergebnisse der Mathematica 1, Springer-Verlaf, Berlin, 1932.
- [25] Scharlemann, Martin G., *Unknotting number one knots are primes*, Invent. Math. **82** (1985), no. 1, 37-55.
- [26] Turner, J. C. and Griend, P. van de, *History and Science of Knots*, Series on Knots and Everything - vol.11, World Scientific, Singapore, 1996.
- [27] Trotter, Hale F., *Non invertible knots exist*, Topology **2** (1963), 275-280.

Bibliografia