Universidade do Minho
Instituto de Educação

Paula Cristina Gonçalves Pinheiro Póvoa

O ensino e a aprendizagem de funções do 10.º ano de escolaridade através da conexão entre as diferentes representações

outubro de 2013

UMinho | 2013
Paula Cristina Gonçalves Pinheiro Póvoa **O ensino e a aprendizagem de funções do 10.º ano de escolaridade através da conexão entre as diferentes representações**

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Paula Cristina Gonçalves Pinheiro Póvoa

O ensino e a aprendizagem de funções do 10.º ano de escolaridade através da conexão entre as diferentes representações

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho realizado sob a orientação do
Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

outubro de 2013

DECLARAÇÃO

Nome: Paula Cristina Gonçalves Pinheiro Póvoa

Endereço Eletrónico: pcrispovoa@hotmail.com

Telemóvel: 96 270 06 67

Número do Bilhete de Identidade: 10168613

Título do Relatório:

O ensino e a aprendizagem de funções do 10.º ano de escolaridade através da conexão entre as diferentes representações

Supervisor:

Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

Ano de conclusão: 2013

Mestrado em ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Universidade do Minho ___/___/___

Assinatura: ____

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu, meu supervisor, pela forma disponível, rigorosa e interessada com que orientou este projeto, pelas suas sugestões e críticas pertinentes.

À Mestre Ana Paula de Seixas Mourão, minha orientadora, pelos seus conselhos relativos à intervenção pedagógica e pela partilha de experiências, em especial pelas sugestões e comentários tecidos ao longo das várias fases.

À Escola que possibilitou a elaboração e concretização deste projeto, aos alunos pela simpatia com que me receberam, e sobretudo pela sua colaboração e disponibilidade ao longo do ano.

À minha família, em especial à minha irmã Jacinta pela força e apoio prestados ao longo desta fase da minha formação, à minha mãe pelo carinho e ao meu cunhado Charles-Philippe pela ajuda preciosa na tradução do resumo deste relatório.

À minha sobrinha, Ana Elisa, pela alegria, força e inspiração que me deu para a concretização do estudo.

À minha amiga Juliana pelo olhar sempre crítico e pela revisão literária do relatório.

Ao Filipe por me ouvir e auxiliar nos momentos críticos deste ano.

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES DO 10.º ANO DE ESCOLARIDADE ATRAVÉS DA CONEXÃO ENTRE AS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES

Paula Cristina Gonçalves Pinheiro Póvoa

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Universidade do Minho, 2013

RESUMO

Este estudo baseia-se no ensino e aprendizagem de funções do 10.º ano de escolaridade através das conexões entre representações. As conexões matemáticas surgem no ensino em várias vertentes, umas intrínsecas à matemática, outras exploram as ligações com a realidade e com outras áreas do saber. A motivação para o estudo deste tema assentou na convicção de que as conexões entre representações facilitam a compreensão de conceitos, estimulam o raciocínio e apoiam o desenvolvimento dos alunos de uma visão da matemática mais vasta. Com esta investigação pretendeu-se compreender como lidam os alunos com as tarefas que envolvem conexões entre representações. As questões que orientaram o estudo foram as seguintes: Que representações recorrem os alunos nas suas atividades de aprendizagem do tema de funções do 10.º ano de escolaridade? Que conexões estabelecem os alunos entre as diferentes representações na aprendizagem de funções? Que dificuldades manifestam os alunos na conexão entre as diferentes representações de funções? Que perceções têm os alunos sobre a conexão entre as diferentes representações na aprendizagem de funções? Para dar resposta a estas questões recorreu-se aos seguintes métodos de recolha de dados: um teste diagnóstico, realizado antes da intervenção pedagógica; produções escritas pelos alunos; uma questão de aula; gravação em áudio de aulas; questionário e análise documental.

Os resultados evidenciam que os alunos recorrem mais à representação gráfica e à analítica do que a tabular, o que indicia dever-se à pouca utilização desta representação para além do fornecimento de dados. A conexão entre estas representações promoveu a compreensão de tópicos de funções, entre os quais se destacam as propriedades das famílias de funções. Entre as dificuldades expressas pelos alunos destaca-se a passagem da representação gráfica para a analítica, devido, sobretudo, a uma capacidade ainda pouco desenvolvida de modelos que se ajustem a situações gráficas. A representação utilizada pelos alunos dependeu, na maior parte das vezes, do tipo de tarefa proposta. Tarefas de estrutura aberta tornam-se mais adequadas para apelar à capacidade do aluno a estabelecer conexões entre as diferentes representações como forma de explicitar o seu raciocínio e os conhecimentos que adquirem dos tópicos estudados.

L´ENSEIGNEMENT ET L´APPRENTISSAGE DE FONCTION EN CLASSE DE SECONDE DE L´ENSEIGNEMENT SECONDAIRE À TRAVERS LES LIENS ENTRE DIFFÉRENTES REPRÉSENTATIONS

Paula Cristina Gonçalves Pinheiro Póvoa
Master en Enseignement de Mathématiques au Collége et en Enseignement Secondaire
Universidade do Minho, 2013

RÉSUMÉ

Cette étude a pour thème l´enseignement et l´apprentissage de fonction mathématique en classe de seconde de l´enseignement secondaire à travers les liens entre représentations. Les liens mathématiques apparaissent sous diverses formes dans l´enseignement, les unes intrinsèques, et d´autres explorant les liens avec la réalité et d´autres domaines du savoir.

Ma motivation pour cette étude repose sur la conviction de que les liens entre représentations facilitent la compréhension du concept, stimulant le raisonnement et aidant l´élève à se développer tout en ayant une vision mathématique plus vaste.

Je prétends, avec cette étude, comprendre comment les élèves agissent avec les tâches qu´englobent les liens entre représentations. Les questions directrices de l´étude sont: Quel types de représentations ont recours les élèves durant l´apprentissage des fonctions mathématiques de la seconde année de l´enseignement secondaire? Quels liens, les élèves établissent entre les différentes représentations durant l´apprentissage des fonctions?; Quelles sont les difficultés que les élèves manifestent pour établir des liens entre les différentes représentations des fonctions? et quelles perceptions ont les élèves du lien entre les différentes représentations durant l´apprentissage des fonctions? Diverses méthodologies de collecte de donnée furent utilisées pour répondre à ces questions, telles que: un teste de diagnostique, réalisé avant l´intervention pédagogique; travail écrit réalisé par les élèves; une question en salle de cours; enregistrement audio des classes, l'analyse du questionnaire et du document.

Les résultats démontrent que les élèves ont recours le plus souvent à la représentation graphique et analytique au lieu de la tabulaire, se qui est dû à une faible utilisation au niveau de l´enseignement du collège. Le lien entre ces représentations favorise la compréhension du sujet sur les fonctions, entre lesquelles se détachent les propriétés des familles de fonctions. Entre les difficultés exprimées par les élèves, se détache le passage de la représentation graphique vers l´analytique, dû à l´incapacité d´interprétation du graphique. La représentation utilisée par les élèves dépend, essentiellement, du type de tâche proposée. Les tâches de structure ouvertes sont plus adaptées à mobiliser les capacités de l´élève à établir les liens entres les différentes représentations comme forme à expliquer le raisonnement et les connaissances acquises durant les sujets étudiés.

Índice

Índice de figuras

Índice de tabelas

Índice de quadros

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Este capítulo, repartido em três secções, apresenta, na primeira secção, o tema, o objetivo e as questões de investigação que orientaram a minha prática pedagógica, evidencia, na segunda secção, a pertinência do tema que escolhi, e faz, na terceira secção, uma breve descrição da estrutura deste relatório.

1.1. Tema, objetivo e questões de investigação

O tema deste estudo incide sobre a conexão das diferentes representações no estudo de funções no 10.º ano de escolaridade. A escolha deste tema está relacionada com o facto de as funções ser um tema que tem expressão significativa no currículo, é transversal a todos os níveis de ensino, contribui para o desenvolvimento do pensamento abstrato do aluno e por ser um tema com conexão entre diferentes temas matemáticos e de outras disciplinas escolares. No ensino secundário, as recomendações metodológicas do programa do 10.º ano para o estudo de funções salientam o recurso à diversas conexões matemáticas como forma de os alunos poderem relacionar os distintos temas e desenvolver a sua capacidade de visualização (Ministério da Educação, 2001). Diversos autores consideram que o conceito de função constitui uma forma de desenvolver a capacidade algébrica dos alunos (Afonso, 2008; Ponte, 2005). Para esse desenvolvimento, Chazan e Yerushalmy (2003) sugerem que as funções sejam abordadas com tarefas que envolvam os alunos a relacionar as representações gráficas com as expressões algébricas. O recurso às diferentes representações no estudo das funções promove, segundo estes autores, uma melhor compreensão por parte dos alunos desta temática.

O estabelecimento de relações entre as várias representações de uma função é um aspeto importante a ter em conta no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos que estruturam este tema, o que resulta da promoção e do desenvolvimento das diferentes conexões e, consequentemente, da compreensão do conceito de função (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Duval, 2006; Gagatsis, Mousoulides & Elia, 2006). Torna-se, assim, fundamental incutir no aluno uma atividade matemática que desenvolva a sua capacidade de raciocínio envolvendo as funções e as suas múltiplas representações, de forma a colmatar as dificuldades que enfrentam em retirar significados e estabelecer relações entre as várias representações (D'Amore, 2006).

Na disciplina de Matemática, quando se fala em representações no ensino do tema de funções emergem, geralmente, as que são traduzidas na forma de gráfico, tabela, expressão analítica e diagrama sagital. De acordo com o National Council of Theachers of Mathematics (NCTM, 2007), o termo representação "refere-se tanto ao processo como ao resultado (…) à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e à forma, em si mesma" (p. 75). A importância da utilização das múltiplas representações no estudo de funções resulta por "os gráficos transmit[ir]em certos tipos de informação visual, enquanto as expressões simbólicas poderão ser facilmente manipuladas, analisadas e transformadas" (p. 422). As diferentes representações de conceitos matemáticos auxiliam e ajudam a desenvolver o pensamento e a manipulação de objetos matemáticos. Atendendo à importância que tais representações têm no processo de ensino e de aprendizagem na disciplina de Matemática, pretendo, com este estudo, compreender como lidam os alunos com as tarefas que envolvem conexões entre representações no ensino e na aprendizagem do tema de funções do 10.º ano. Para concretizar este objetivo pretendo responder às seguintes questões:

(1) Que representações recorrem os alunos nas suas atividades de aprendizagem do tema de funções do 10.º ano de escolaridade? Que conexões estabelecem os alunos entre as diferentes representações na aprendizagem de funções?
(2) Que dificuldades manifestam os alunos na conexão entre as diferentes representações de funções?
(3) Que perceções têm os alunos sobre a conexão entre as diferentes representações na aprendizagem de funções?

Considero que o 10.º ano de escolaridade é um ano por excelência para o desenvolvimento deste tema, visto ser neste nível de ensino que os alunos estudam com mais detalhe as funções.

1.2. Pertinência do Estudo

O tema de funções é um dos mais importantes em Matemática do ensino básico, os seus conhecimentos são "indispensáveis para a compreensão do mundo em que vivemos" (Ministério da Educação, 2001, p. 26).

Na transição do 3.º ciclo para o ensino secundário, o aluno encontra-se, segundo Piaget (1977), na fase de desenvolvimento das operações formais, revelando capacidade para formular hipóteses, retirar conclusões e testá-las. Nestas atividades, o concreto tende a dar lugar à abstração, à generalização do pensamento matemático, para o qual muito contribui o tema das funções. No desenvolvimento destas capacidades, o aluno chega ao 10.º ano com conhecimentos sobre funções consideradas indispensáveis para a compreensão de situações do quotidiano, tais como a noção de variável, função, funções afim e proporcionalidade inversa e as diferentes formas de representar funções (tais como, tabelas, gráficos, regras verbais e simbólicas). No estudo destas noções no 3.º ciclo, as sugestões metodológicas dos programas atuais de Matemática do ensino básico (Ministério da Educação, 2007) dão especial destaque à articulação entre as diferentes representações nas atividades de aprendizagem que os alunos desenvolvem. As conexões entre as diferentes representações de funções são consideradas relevantes no processo de desenvolvimento matemático do aluno, que resulta, numa primeira instância, da interpretação e da compreensão entre essas representações (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Domingos, 2003; Duval, 2006a; Gagatsis, Mousoulides & Elia, 2006; Pais & Saraiva, 2011). Mais importante que saber identificar uma função, é saber interpretar e relacionar as suas diferentes formas de representação (Ponte, 1984).

Em suma, o desenvolvimento deste projeto incidiu no ensino e aprendizagem de conceitos de funções tendo por base as conexões entre as múltiplas representações, mais concretamente a relação entre a representação gráfica e analítica, que permite evidenciar os significados desses conceitos e analisar as dificuldades dos alunos na forma como relacionam as múltiplas representações. Com esta estratégia procurei dar importância a tarefas que envolvessem a utilização de vários tipos de representações para perceber de que forma os alunos conferem utilidade os conceitos que foram desenvolvidos ao longo da minha intervenção pedagógica.

1.3. Estrutura do relatório

Este relatório está dividido em quatro capítulos. O primeiro capítulo – Introdução – faz um enquadramento do estudo realizado, onde se refere o tema, objetivo e questões de investigação; evidencia a pertinência do estudo mencionando as razões que estiveram na base da minha escolha à luz da literatura; e, por fim, apresenta a estrutura do relatório.

O segundo capítulo – Enquadramento Contextual e Teórico – caracteriza a escola e a turma onde foi desenvolvido o projeto, apresenta a fundamentação teórica que sustenta o desenvolvimento deste projeto, mencionando estudos realizados sobre a temática do mesmo, e explicita as metodologias de ensino e aprendizagem e as estratégias utilizadas para a avaliação do projeto de intervenção pedagógica.

O terceiro capítulo – Intervenção Pedagógica – procura ilustrar as três fases que enquadraram a minha intervenção (antes, durante e após a realização da unidade de ensino de funções). Na fase *antes* da minha intervenção pedagógica trato os dados que recolhi através da análise do manual do aluno, incidindo sobre as múltiplas representações evidenciadas no estudo de funções, e sobre os conhecimentos dos alunos relativos ao conceito de função e das conexões entre as múltiplas representações. Na fase *durante* a minha intervenção trato a informação que ilustra momentos da minha prática de ensino do tema das funções mediante a utilização das diferentes representações (tabelas, gráficos, regras verbais e simbólicas). Na fase *após* a minha intervenção pedagógica explicito a avaliação dos alunos sobre as estratégias desenvolvidas através da realização de um questionário, à turma.

O quarto capítulo – Conclusões, Limitações e Recomendações – apresenta os resultados obtidos através da resposta às questões de investigação que formulei e refere algumas limitações e recomendações a ter em conta em projetos futuros.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO

Este capítulo é dedicado à explicitação dos contextos inerentes ao desenvolvimento da minha intervenção pedagógica, fazendo referência à Escola e à turma onde lecionei, e à sustentação teórica das metodologias e estratégias utilizadas na realização deste projeto.

2.1. Enquadramento Contextual

Este subcapítulo destina-se à caracterização da Escola e da Turma onde concretizei o Projeto de Intervenção Pedagógico Supervisionada.

2.1.1. Caracterização da Escola

A escola onde se realizou a minha prática pedagógica é uma escola secundária com 3.º ciclo, que se localiza na cidade de Braga, inserida numa freguesia com características urbanas, que, atendendo à sua dimensão, integra espaços diferenciados, áreas habitacionais distintas, bairros de construção social destinada a pessoas economicamente mais carenciadas, alguns bairros tradicionais e outras destinadas à classe média. No ano letivo 2012/2013, a escola tinha como oferta educativa os cursos Científico-Humanísticos de Ciências e tecnologia, Artes Visuais e Línguas e Humanidades, Curso Tecnológico de Desporto e Cursos Profissionais. Trata-se de uma escola de referência para alunos com necessidades educativas especiais, ao nível da cegueira e surdez. É frequentada por alunos que necessitam deste tipo de apoio, quer no ensino diurno, quer no ensino noturno, sendo acompanhados por técnicos especializados na área do ensino especial, com professores de língua gestual portuguesa, professores de orientação e mobilidade, professores de Braille, entre outros técnicos especializados.

No seu projeto educativo, a escola apresenta um conjunto de princípios e valores, em que o princípio orientador é “desenvolver, segundo padrões de exigência e qualidade, a aptidão dos alunos para a aquisição e valorização de saberes e competências que lhes permitem enfrentar o mundo moderno nas vertentes natural, social e política, económica e cultural” (p. 10).

Na sua avaliação externa, a escola foi classificada com Muito Bom nas categorias de Resultados, Prestação de Serviços Educativos, Organização e Gestão Escolar e Liderança; e com classificação de Bom na Capacidade de Autorregulação e Melhoria da Escola.

A escola foi intervencionada no ano letivo 2011/2012, possuindo amplas e modernas instalações, estando equipada com centros de novas tecnologias, dispõe de infraestruturas modernas, tais como sala de dança, auditório e laboratórios. É uma escola virada para o futuro, desenvolvendo e promovendo protocolos com diversas entidades nacionais, tais como o Ministério da Educação e Ciência, Agência Nacional para a Qualificação, Câmara Municipal de Braga, Governo Civil, entre outra entidades.

O corpo docente é estável e com larga experiência educativa. Cerca de 70% do pessoal docente faz parte dos quadros da escola, apenas 15% é contratado. No que concerne ao departamento de Matemática e Ciências Experimentais é constituído por 106 docentes.

A cooperação e troca de experiências dos docentes, ao nível das fichas de trabalho e testes, ao longo de todo o ano letivo, é uma prática constante tendo como finalidade desenvolver o conhecimento dos alunos. A partilha de experiências é evidente levando a um enriquecimento da prática letiva.

2.1.2. Caracterização da Turma

A turma onde implementei o meu projeto é da área Científico-Tecnológico, que no ano letivo de 2012/2013 se encontrava pela primeira vez no 10.º ano de escolaridade, sendo constituída por 28 alunos, 19 raparigas e 9 rapazes, na faixa etária dos 15 anos. Durante o ano letivo, dois alunos pediram a transferência de turma. Em termos gerais, os alunos eram participativos e interessados e todos eles tinham aspirações de prosseguir os seus estudos após o ensino secundário, possuindo em alguns casos objetivos e metas bem definidos, como são exemplo dois alunos que pretendem ingressar no curso de medicina.

No início do ano letivo, os alunos da turma preencheram a ficha informativa adotada na escola, que solicitava dados biográficos, dados do encarregado de educação e informações sobre a composição do agregado familiar, e formulava questões gerais relativamente às disciplinas, às profissões pretendidas, à ocupação de tempos livres e ao percurso escolar. Da análise da informação registada nas fichas informativas constatei que onze alunos referem a disciplina de Matemática como sendo a disciplina preferida, enquanto oito indicam tratar-se da disciplina que têm mais dificuldades. Quanto à vida profissional futura, indicam como profissões desejadas a medicina, a medicina veterinária e a engenharia.

As habilitações dos pais dos alunos da turma situam-se entre o 4.º ano (antiga 4.ª classe) e o ensino superior. A maioria dos pais possui o 3.º ciclo do ensino básico e a maioria das mães tem o ensino secundário ou mais (Tabela 1).

Tabela 1. Habilitações académicas dos pais dos alunos da turma.

	Pai	**Mãe**
1.º Ciclo	1	–
2.º Ciclo	4	3
3.º Ciclo	9	9
Secundário	8	10
Bacharelato	–	–
Licenciatura ou grau superior	5	6

Uma elevada percentagem de encarregados de educação costumava participar nas reuniões convocadas pelo diretor de turma e, normalmente, os que eram convocados para a hora de atendimento também costumavam comparecer. Eram, portanto, encarregados de educação preocupados com aprendizagem dos seus educandos, procurando acompanhá-los no processo educativo.

Os alunos tiveram um aproveitamento razoável à disciplina de Matemática. A média da turma é de 10.08 Valores, havendo três alunos que se destacam dos demais ao concluírem o ano com 18 valores e com 17 valores.

2.2. Enquadramento teórico

Este subcapítulo tem como finalidade a fundamentação teórica do projeto de intervenção, com ênfase sobre a importância do estudo das múltiplas representações as suas conexões na aprendizagem de tópicos de funções.

As representações no ensino de funções

O ensino da Matemática em Portugal tem sofrido, ao longo dos anos, alterações curriculares. Entre essas alterações emergem as conexões entre as diferentes representações de conceitos matemáticos, que são consideradas fundamentais para que os alunos possam compreender e aplicar corretamente esses conceitos (Ministério da Educação, 2001). A utilização de representações desempenha um papel essencial para o estabelecimento de relações matemáticas, a explicitação de raciocínios e a identificação de conexões (NCTM, 2007). Cada vez mais o aluno é estimulado a "justificar o processo de resolução, a encadear o raciocínio, a confirmar conjeturas, a demonstrar fórmulas e alguns teoremas" (Ministério da Educação, 2001, p. 11).

As funções são um tema que tem expressão significativa no currículo, transversais a todos os níveis de ensino, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento abstrato dos alunos e da capacidade de resolução de problemas do quotidiano. O programa de Matemática do ensino secundário apela ao estudo deste tema numa perspetiva de trabalho intuitivo com "funções que relacionam variáveis da vida corrente, da Geometria, da Física, da Economia e de outras disciplinas" (Ministério da Educação, 2001, p. 26).

No ensino secundário, as recomendações metodológicas do programa do 10.º ano para o estudo de funções salientam o recurso às diferentes conexões matemáticas como forma de os alunos poderem relacionar os diferentes temas e desenvolver a sua capacidade de visualização (Ministério da Educação, 2001). Diversos autores consideram que o conceito de função constitui uma forma de desenvolver a capacidade algébrica dos alunos. Para esse desenvolvimento, Chazan e Yerushalmy (2003) sugerem que as funções sejam abordadas com tarefas que envolvam os alunos a relacionar as representações gráficas com as expressões algébricas. O recurso às diferentes representações no estudo das funções promove, segundo estes autores, uma melhor compreensão por parte dos alunos desta temática.

Os estudos desenvolvidos por Ainsworth (2006) e Arcavi (2003) revelam que os alunos são capazes de relacionar e aplicar adequadamente os diferentes modos de representar um conceito matemático, escolhendo os mais adequados para cada situação. Para Kaput (1999), a dificuldade dos alunos na aprendizagem das funções reside na dificuldade nos procedimentos com símbolos algébricos e na falta de ligação destes com as suas representações. Os alunos apresentam dificuldades na interligação entre as várias formas de representação de funções (Artigue, 1992; Elia et al., 2007), sendo mais notórias entre as representações gráficas e as algébricas (Kaldrimidou & Ikonomou, 1998). Ponte (1984) considera que estas dificuldades são comuns nos alunos do ensino secundário. Para Socas et al. (1996), as dificuldades manifestadas no estabelecimento de conexões estão relacionadas com o uso inadequado da simbologia e com a aplicação desajustada de regras e procedimentos, o que tende a levar os alunos à utilização inadequada das fórmulas, das regras e dos procedimentos a eles associados. Kieran (1992) aponta que tais dificuldades se devem à memorização de regras e de procedimentos matemáticos. Para ultrapassar essas dificuldades, a autora defende o envolvimento do aluno em atividades que o levem a estabelecer relações entre a representação gráfica e a representação algébrica de funções.

Hitt (1998) estabelece uma relação entre as funções e as suas várias representações, referindo que a "articulação de forma coerente durante a resolução de problemas, das diferentes representações que lhe estão associadas" (p. 123) é fundamental para a compreensão dessas representações. Como forma de potenciar esta compreensão, Dreyfus (1991) apresenta os seguintes procedimentos: (i) utilizar uma só representação; (ii) utilizar mais do que uma representação; (iii) estabelecer conexões entre essas representações; (iv) passar de uma representação para a outra com flexibilidade.

Segundo Duval (2006a), a ligação das diferentes representações de funções não é fácil de efetuar. Para este autor, as representações só são mobilizadas e desenvolvidas se forem transformadas noutras, realçando desta forma a importância das conexões entre as várias representações para a melhor compreensão por parte dos alunos dos conceitos matemáticos. Através das várias representações, os alunos podem compreender mais facilmente o que é matematicamente importante numa representação, efetuar a sua conversão para outra forma de representação e identificar a função a partir do conteúdo dessa mesma representação (Duval, 2006b).

Para Eisner (1997), Arcavi (1999) e Monk (2003), as representações têm um papel importante no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. As representações desempenham diferentes papéis. Eisner (1997) realça a influência das representações no pensamento dos sujeitos, considera que os produtos obtidos devem-se não só às aquisições mentais individuais, mas também às diversas representações disponíveis na cultura onde os sujeitos estão inseridos. Para o autor, a relação existente entre o pensamento e as representações centra-se em cinco ideias principais: (i) as representações que usamos para pensar limitam o nosso pensamento; (ii) cada representação, sendo mediada por "materiais" específicos, impõe as suas próprias exigências e limitações, conduzindo ao desenvolvimento de ferramentas cognitivas diferentes; (iii) a escolha da representação influencia não só o que se consegue representar, mas também aquilo a que se consegue aceder; (iv) a associação de representações aumenta a acessibilidade à informação e consequentemente à compreensão e aprendizagem; e (v) uma forma de representação pode ser utilizada de maneiras diferentes, cada uma delas apelando a formas de pensamento diferentes.

Arcavi (1999) defende a importância da aprendizagem através da visualização, referindo algumas vantagens da sua utilização: (i) ilustra resultados que são sobretudo simbólicos; (ii) contribui para a resolução de conflitos entre as soluções simbólicas e as ideias intuitivas; e (iii) desencadeia o recurso a conceitos básicos, facilmente manuseáveis a nível simbólico. Para este autor, a visualização não exclui a linguagem analítica ou a sua verbalização, que se complementam. A relevância que o representar e analisar situações empregando símbolos algébricos tem no desenvolvimento do pensamento algébrico, leva Arcavi (1994) a defender que se deve desenvolver o "sentido de símbolo" (*symbol sense*), tem o mesmo significado para a Álgebra que "sentido de número" representa para os Números e Operações. A capacidade de selecionar uma representação simbólica, está relacionada como sentido de símbolo, permite ao aluno a capacidade de decidir quando os símbolos são úteis e como podem ser utilizados para estabelecer conexões. Para levar o aluno a compreender os símbolos, o autor carateriza o sentido do símbolo: (i) simpatia com símbolos, compreensão de símbolos e critério estético de seu poder, indicando quando e como pode ser usado para estabelecer conexões; (ii) a capacidade de "manipular" e "ler" expressões simbólicas com aspetos complementares na resolução de problemas algébricos, separando os significados e, ter ao mesmo tempo, uma visão global das expressões simbólicas é importante para uma rápida e eficiente manipulação; (iii) A consciência de poder-se estabelecer conexões simbólicas com sucesso através da informação verbal ou gráfica; (iv) capacidade de escolher uma possível representação simbólica e escolher a variável a que atribui um símbolo; (v) a consciência da necessidade de rever os significados dos símbolos para a implementação de um procedimento para resolver um problema; e (vi) a consciência de que os símbolos podem desempenhar diferentes papéis em diferentes contextos e desenvolver um senso intuitivo dessas diferenças e a capacidade de trabalhar com eles.

Monk (2003), o papel da visualização está associado ao gráfico, o que faz com que torne a representação gráfica instrumento preponderante na atribuição de significados. Para o autor, a visualização é fonte de dificuldades, em que o aluno tende a cingir-se à informação visual obtida através do gráfico, esquecendo a informação quantitativa. A forma como os alunos interpretam um gráfico é influenciada pelos conhecimentos, experiências que possuem no momento em que observam a representação gráfica. Aos alunos deve ser dada a oportunidade de debaterem a utilização das representações gráficas, para desta forma poderem identificar as vantagens e desvantagens da sua utilização.

Investigações no âmbito da educação matemática defendem a utilização de múltiplas representações para uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos. Para Triphathy (2008), as diferentes representações de um mesmo conceito evidenciam diferentes aspetos, aumentando a sua compreensão, permitindo desenvolver diferentes capacidades cognitivas, enquanto "uma representação matemática frequentemente salienta apenas um aspeto de um conceito matemático. Limitarmo-nos a uma representação matemática é abordar o conceito de olhos vendados" (Triphathy, 2008, p. 438).

Friedlander e Tabach (2001) defendem que trabalhar com várias representações permite excluir as desvantagens de cada uma das representações, tornando, desta forma, "o processo de aprendizagem da álgebra significativo e efetivo" (p. 173). Para estes autores, existe quatro representações distintas fundamentais para o ensino da matemática: a representação verbal, a representação numérica, a representação gráfica e a representação algébrica. Na sua perspetiva, estas representações são primordiais para o ensino da Álgebra. Os autores apresentam vantagens para a utilização de algumas representações. A representação verbal, que normalmente se utiliza na colocação do problema e na interpretação dos resultados, evidencia a conexão entre a Matemática e outras áreas do saber, e entre a Matemática e situações do quotidiano. A representação numérica, familiar aos alunos quando iniciam o estudo da álgebra, é muito importante na compreensão inicial de um problema e na investigação de casos particulares. A representação gráfica é intuitiva e apelativa, devido ao seu carácter visual. A representação algébrica é precisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos, sendo muitas vezes a única forma de justificar afirmações gerais.

A par das vantagens, os autores apresentam também desvantagens para cada tipo de representação. A representação verbal não é universal e, dependo do estilo pessoal, pode tornar-se um obstáculo na comunicação matemática. A representação numérica não permite generalizações. A representação gráfica pode não fornecer a precisão necessária à resolução de um problema, é influenciada por fatores exteriores (por exemplo a escala) e apresenta frequentemente apenas uma parte do domínio do problema. A utilização exclusiva de símbolos algébricos pode ocultar o sentido matemático ou a natureza dos objetos representados, causando dificuldades na interpretação dos resultados.

Para além das representações referidas, Brown e Mehilos (2010) referem outra forma de representar uma função, a representação tabular. Para estes autores, a representação tabular facilita a passagem do concreto para o abstrato, dando significado às variáveis e às expressões algébricas, tendo como desvantagem ter um bom conhecimento das expressões algébricas.

Pelas razões apresentadas, orientei a minha prática pedagógica através da análise e compreensão de como os alunos interpretam as várias representações de funções, tendo em especial atenção à conexão entre a representação gráfica e a representação algébrica.

No programa atual de Matemática para o *ensino básico*, a *Álgebra* aparece como um dos grandes temas (Ponte et al., 2005). Inicia-se, assim, nos primeiros anos de escolaridade e, no 3.º ciclo, o uso da linguagem algébrica trabalha-se com equações, inequações, funções e expressões fomentando no aluno a capacidade de trabalhar com diversos tipos de relações matemáticas.

As representações têm assumido um papel de destaque nas orientações curriculares para o ensino da matemática. Para o NCTM (2007), a norma sobre as representações matemáticas apresenta objetivos para os alunos, desde a pré-escola até ao 12.º ano. Segundo o NCTM (2007),

> os programas de ensino do pré-escolar ao 12.º ano deverão habilitar todos os alunos para: criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas; selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas; usar as

representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos (p. 160).

O programa de matemática refere, ainda, que o aluno deve ser capaz de trabalhar com as diversas representações, devendo ser capaz de

> ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer destas formas de representação; traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural; elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas; usar representações para modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais (Ponte et al., 2007, pp. 4-5).

De acordo com o NCTM (2007), os alunos devem ser capazes de “reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas” e serem capazes de “compreender a forma como as ideias matemáticas interrelacionam e se constroem umas a partir das outras” (p. 416). De acordo com estudos realizados por Carreira (2010) refere que, num contexto escolar “a criação de conexões em matemática (…) corresponde a um traço da matemática, muito mais do que a um elemento do conhecimento matemático a ser adquirido” (p. 13). A autora evidencia também a importância do aluno compreender como as ideias matemáticas se relacionam entre si.

Nas indicações programáticas, referidas pelo Programa de Matemática do Ensino Básico e Secundária (2001), relativas a cada um dos ciclos de ensino, encontram-se referências a conexões. Os alunos são convidados desde o 1.º ciclo a estabelecerem conexões, começando por representar e interpretar dados e situações aleatórias através da leitura e interpretação de informação apresentada em tabelas e gráficos.

No 2.º ciclo do Ensino Básico devem interpretar a informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas e, estabelecer conexões da linguagem natural para linguagem matemática. Já no 3.º ciclo devem relacionar representações, algébrica e gráfica das funções estudadas; analisar função e estabelecer conexões a partir das suas representações. Quanto ao Ensino Secundário, os alunos estabelecem conexões entre representações, conceitos e propriedades de funções. Relacionando parâmetros das famílias de funções com a sua representação gráfica.

As conexões matemáticas têm como objetivo clarificar o significado e alcance das finalidades enunciadas, procuram tornar mais explícito a aprendizagem, valorizando as dimensões dessa aprendizagem relacionadas com a representação, comunicação e raciocínio em Matemática.

2.3. Estratégias de intervenção

As metodologias de investigação adotadas neste estudo, nas suas diferentes fases, e por, último os instrumentos de recolha de dados e os processos de análise.

2.3.1. Metodologia de ensino e de aprendizagem

Neste subcapítulo, apresentam-se as metodologias de ensino e de aprendizagem que guiaram a implementação deste projeto, referindo a dinâmica que pretendia que existisse na sala de aula. O papel do professor e do aluno, o tipo de tarefas o formato de ensino predominante na intervenção pedagógica foram preocupações constantes.

Na implementação deste projeto desempenhei diversos papéis de acordo com os momentos da aula, procurando envolver os alunos no momento de consolidação de conceito. Enquanto os alunos resolviam as tarefas circulei pelos lugares de forma a colmatar dúvidas, para que pudessem desenvolver a sua aprendizagem dependendo o menos possível da minha intervenção. Na discussão em turma procurei envolver os alunos colocando questões.

O aluno desempenha um papel central no dinamismo da aula, procurando relacionar os novos conhecimentos com as aprendizagens anteriores, considerando uma aprendizagem se utilizarem saberes anteriormente adquiridos. A compreensão de conceitos matemáticos poderá ser estruturada ao longo da escolaridade, onde o aluno tem um papel ativo na sala de aula (NCTM, 2007). O programa atual de Matemática menciona a importância de uma participação ativa e responsável de todos os intervenientes na gestão e no processo de ensino/aprendizagem (Ministério da Educação, 2002).

As tarefas que constavam no plano de aula eram importantes, para Ponte et al. (1997), tarefas distintas potenciam e propiciem ao aluno experiências diversificadas. O professor tem ao seu dispor no momento de planificação das aulas uma panóplia de tarefas que vai ao encontro dos objetivos definidos no programa de Matemática, o professor “deve propor ao aluno um conjunto de tarefas de extensão e estilo variáveis

(…) de modo que, no conjunto, reflitam equilibradamente as finalidades do currículo" (Ministério da Educação, 2002, p. 13).

Nas aulas que lecionei organizei as atividades, optando por dispor os alunos em díades, devido os alunos trabalharem neste formato de ensino ao longo do ano. Os alunos desenvolveram novas capacidades, através do trabalho em pares, aos melhores alunos permitir-lhes observar e explicar processos conhecidos e refletir. Para isso, é preciso que não se limitem a dar informações, mas envolvam o colega na explicação e discussão da tarefa. Cabe ao professor envolver a turma na discussão e síntese da aula.

2.3.2. Estratégias de avaliação

De forma a avaliar o impacto da minha intervenção pedagógica utilizei diferentes métodos de recolha de dados: (i) um teste diagnóstico no início da unidade de ensino de funções; (ii) registos escritos dos alunos nas aulas e em casa, (iii) questão de aula; (iv) gravação de áudio de aulas; (v) questionário; e (vi) análise documental.

Teste diagnóstico. O teste diagnóstico (Anexo 1) é um instrumento importante para diagnosticar as dificuldades apresentadas pelos alunos no tema de funções, de forma a verificar a aptidão dos alunos para representar relações funcionais de vários modos e passar de um tipo de representação para outra, tabelas, gráficos e expressões analíticas. O teste diagnóstico é constituído por cinco perguntas de resposta aberta e com objetivos distintos.

Registos escritos dos alunos. Os registos escritos pelos alunos das tarefas que lhes foram propostas são documentos essenciais para analisar quais as representações mais utilizadas pelos mesmos. Segundo Friedlander e Tabach (2001), o incentivo de trabalhar com as várias representações deve ser iniciado desde que se começa o estudo da álgebra. Para estes investigadores, a natureza das tarefas propostas influencia a utilização que os alunos fazem das múltiplas representações. O desenvolvimento da capacidade dos alunos na elaboração de estratégias de resolução de tarefas leva-os a explicar e a justificar o seu raciocínio. Deste modo, ao justificar o seu raciocínio, "o aluno torna-se também numa autoridade na sala de aula" (Ponte & Serrazina, 2009, p. 4). Os produtos escritos são importantes para identificar o que os alunos dizem e fazem na resolução de tarefas (Viseu, 2009). Na resolução das tarefas, os alunos recorriam à calculadora gráfica, cuja utilização pelos alunos não se limitou a transcrever o que visualizavam, mas sobretudo os incentivou a interpretar e a descrever o raciocínio utilizado. Os registos escritos dos alunos é analisado segundo as categorias de Dreyfus (1991): (i) utilizar uma só representação; (ii) utilizar mais que uma representação; e (iii) estabelecer conexões entre as representação.

Questão de aula. A questão de aula (Anexo 2) teve como finalidade inquirir os alunos sobre as dificuldades sentidas quanto às conexões entre a representação gráfica e a analítica. A questão de aula é constituída por três perguntas compostas por várias alíneas. Na resolução das questões os alunos podiam recorrer a uma só representação, a mais que uma representação e estabelecer conexões entre representações, segundo a classificação de Dreyfus (1991) e seguida por mim na intervenção pedagógica.

Gravação de aulas. Para a concretização do meu projeto foi gravado aulas. Para tal, efetuei um pedido de autorização à Diretora da Escola (Anexo 4), bem como aos encarregados de educação (Anexo 5), responsáveis pelos intervenientes neste estudo. Para o NCTM (2007), as gravações fazem parte das técnicas de avaliação utilizadas pelos professores, visto que a interação entre os vários intervenientes na sala de aula poderão orientar possíveis mudanças e, por outro lado, permitem ao professor refletir sobre decisões que foram tomadas na aula. As gravações das aulas permitiram descrever momentos de discussão sobre a resolução das tarefas propostas.

Questionário. O questionário (Anexo 3), realizado no final da intervenção pedagógica a toda a turma, teve o prepósito de conhecer as perceções dos mesmos sobre a estratégia desenvolvida, mais concretamente sobre as conexões entre as diferentes representações no estudo do tema de funções do 10.º ano. O questionário é formado por três grupos de questões: o primeiro é referente a dados pessoais dos alunos. O segundo grupo apresenta questões de resposta fechada. Nessas questões os alunos teriam de escolher uma das cinco opções segundo a tipologia da escala de Likert: **DT:** Discordo Totalmente; **D**: Discordo; **I**: Indiferente; **C**: Concordo; **CT**: Concordo Totalmente. O terceiro grupo apresenta cinco questões de resposta aberta, que instiga os alunos a indicar três vantagens e três desvantagens da utilização das diferentes formas de representar o conceito de uma função.

Análise documental. A análise de documentos é um complemento à informação recolhida com recurso a outros instrumentos mencionados e utilizados para o desenvolvimento deste projeto. Para este efeito, analisei os seguintes documentos: (i) planos de aula com ênfase na concretização deste projeto; (ii) pré e pós-reflexões elaboradas antes e depois de cada intervenção; (iii) questões colocadas no final das aulas, que tiveram a finalidade de questionar os alunos sobre a utilidade das representações na sua aprendizagem (Anexo 6); e (iv) o manual escolar do aluno, relativamente ao capítulo do tema de funções.

CAPÍTULO 3

INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Este capítulo faz referência às atividades que concretizei em diferentes momentos que enquadram a minha prática pedagógica: antes, durante e após a intervenção. Seguidamente apresentam-se os resultados das atividades desenvolvidas em cada um desses momentos.

3.1. Antes da intervenção pedagógica

Nos momentos que antecederam a minha intervenção pedagógica numa turma do 10.º ano de escolaridade, após a definição do tema que orientou essa intervenção, recolhi informação com o intuito de conhecer, por um lado, a forma como o manual escolar dos alunos integra as diferentes representações no estudo do tema de funções e, por outro lado, os conhecimentos prévios dos alunos sobre o tema de funções.

3.1.1. Análise do manual escolar

O manual escolar assume um papel fundamental no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Sendo um material escrito concebido para apoiar, principalmente, as atividades de aprendizagem do aluno, deve conter propostas metodológicas adequadas a uma exploração individual e em grupo de forma a permitir uma gestão sequenciada, flexível e diversificada dentro e/ou fora da sala de aula. Um dos objetivos do manual é a apresentação do currículo aos professores e alunos, exibindo uma organização sequencial dos conteúdos e atividades de aprendizagem que visam o desenvolvimento de competências, que permitem consolidar e avaliar as aquisições dos saberes (Ponte, 2005). Para Santos (2006), o manual escolar tem os seguintes propósitos: (i) transmitir conhecimentos; (ii) desenvolver competências; (iii) consolidar as aprendizagens; e (iv) avaliar as aprendizagens. O manual escolar é, assim, "dos principais eixos estruturantes do currículo vivenciado pelos alunos e um importante referencial simbólico na estruturação e regulação da ação pedagógica que se desenvolve na escola, em particular na sala de aula" (Viseu & Morgado, 2011, p. 995).

Ao traduzir as recomendações metodológicas prescritas pelo currículo nacional, importa analisar de que forma o manual escolar trata o tema de funções. O manual de Matemática A do 10.º ano adotado na escola onde desenvolvi a minha prática pedagógica apresenta uma estrutura clara, em todos os temas abordados, permitindo ao aluno uma consulta organizada. A informação é destacada recorrendo a imagens, algumas delas ilustram situações reais, despertando curiosidade sobre a matéria. Na parte central do manual escolar é apresentado os diversos conteúdos programáticos – neste caso o tema de funções – com recurso a tarefas que levam ao desenvolvimento das aprendizagens. Nas margens do manual são propostas tarefas, algumas com aplicação direta dos conteúdos teóricos explicitados na parte central sob a forma de exercícios e problemas. No final de cada tema é apresentada uma secção, designada *Para Praticar*, que integra propostas diversificadas sobre os conteúdos expostos. As tarefas propostas na parte central, nas margens e na secção *Para Praticar* têm o propósito de abordar diferentes tipos de tarefas com grau de dificuldade variável. As tarefas propostas nas margens do manual são basicamente destinadas à aplicação dos conhecimentos apreendidos, apresentando um nível de complexidade reduzido (Ponte, 2005).

É fundamental para a aprendizagem que o manual escolar estabeleça conexões matemáticas, que podem ser estabelecidas entre as representações, entre conceitos e processos matemáticos. Relativamente às representações expressas pelas tarefas do manual, prevalece a analítica, que tem uma maior expressão nas tarefas propostas na Parte Lateral (Tabela 2).

Tabela 2. Frequência absoluta das representações sugeridas nas tarefas no manual escolar.

Tarefas do manual	Analítica	Gráfica	Tabular	Diagrama	Total
Parte Central	11	2	2	1	16
Parte Lateral	48	16	2	1	67
Para Praticar	27	26	1	0	54
Total	86	44	5	2	137

A seguir à representação analítica segue-se a informação veiculada pela representação gráfica, com maior expressão na secção *Para Praticar*, as quais se destacam das representações tabular e diagrama, que adquirem no manual pouca expressividade nas tarefas propostas.

A forma como as conexões matemáticas aparece nos manuais podem difundir e estabelecer relações entre as várias conexões no ensino e na prática letiva. O manual adotado pela escola contém tarefas que apresentam relações entre conceitos “estabelecendo conexões entre conteúdos no desenvolvimento/exploração das diversas unidades” (Costa, 2010, p. 2).

Tabela 3. Frequência absoluta das conexões entre as representações nas tarefas propostas pelo manual escolar.

Tarefas do manual	Conexão entre a analítica e a gráfica	Conexão entre a gráfica e a analítica	Conexão entre a gráfica e a tabular	Conexão entre a tabular e a gráfica
Parte Central	25	0	2	3
Parte Lateral	8	6	0	2
Para Praticar	8	6	0	0
Total	41	12	2	5

Da análise das diferentes tarefas apresentadas no manual no tema ‘Generalidade de Funções’, contata-se que, maioritariamente suscitam ao aluno o estabelecer conexões entre a representação analítica e a gráfica e entre a gráfica e a analítica (Tabela 3). As conexões entre a representação gráfica e a tabular ou entre a tabular e a gráfica são pouco usadas no manual. A diferença de tratamento que o manual dá às conexões entre as diferentes representações dos tópicos de funções não permite, tal como defende Ponte (2005), que na resolução de tarefas os alunos não possam realçar procedimentos nos quais “diferentes representações dos mesmos objetos podem transmitir informações distintas, e que evidenciam a importância da seleção de representações adequadas as especificidades das tarefas matemáticas que têm em mãos” (NCTM, 2007, p. 425).

Como exemplo da conexão entre a representação analítica e a gráfica, no estudo da família de funções do tipo $f(x) = ax^2$ o aluno depara-se com tarefas em que tem que relacionar o valor do parâmetro a da expressão analítica com a abertura e o sentido da concavidade da representação gráfica (Figura 1).

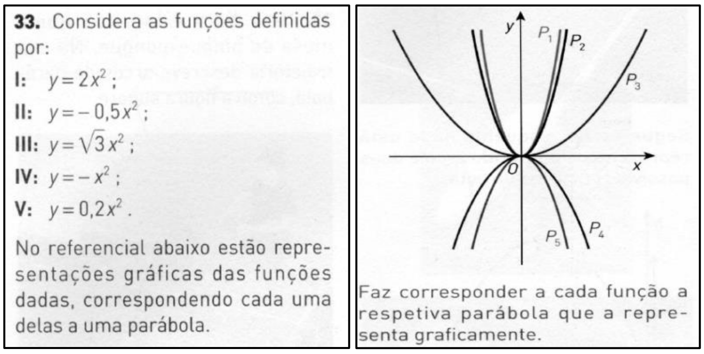


Figura 1. Exemplo de conexão entre a representação analítica e a gráfica no manual escolar.

Como exemplo da conexão entre a representação gráfica e a analítica, no estudo da família de funções do tipo $f(x) = a(x-h)^2$ existem tarefas em que o aluno tem que identificar no gráfico elementos que lhe permitam traduzir a expressão da função correspondente (Figura 2). Nesta atividade, o NCTM (2007) defende que os gráficos transmitem informação visual, o que permite manipular, analisar e transformar as expressões analíticas.

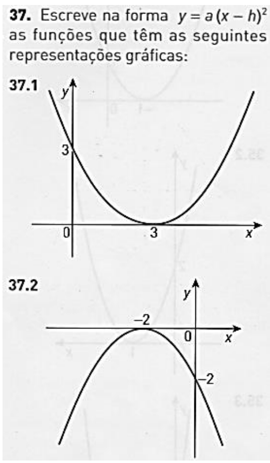
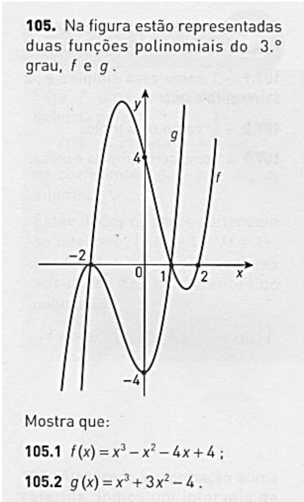


Figura 2. Exemplo de conexão entre a representação gráfica e a analítica no manual escolar.

Por vezes, as tarefas do manual solicitam o aluno a identificar as conexões existentes entre duas representações, em que ambas são facultadas, e a provar que as expressões analíticas correspondem aos gráficos apresentados como exemplifica a Figura 3:


105. Na figura estão representadas duas funções polinomiais do 3.º grau, f e g.

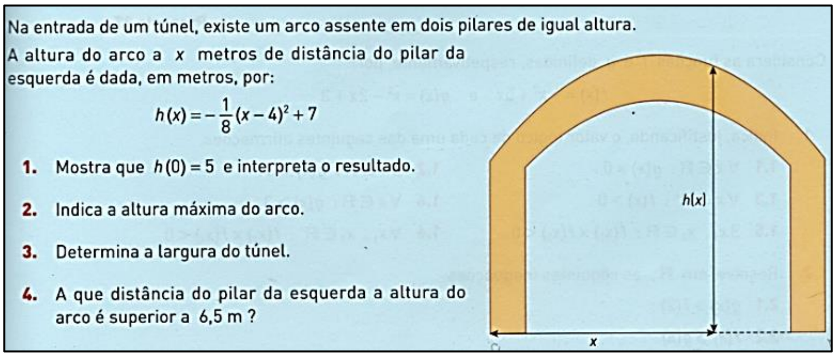
Mostra que:

105.1 $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$;

105.2 $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.

Figura 3. Exemplo de conexão entre a representação gráfica e a analítica no manual escolar.

O manual escolar é concebido para que os alunos o utilizem no estudo dos conteúdos matemáticos, em geral, e os das funções, em particular. Relativamente ao estudo deste tema, Dreyfus (1991) defende que as tarefas que proporcionam conexões entre as várias representações, passando de uma representação para outra com destreza, favorecem a compreensão dos tópicos estudados, como ilustra a tarefa apresentada na secção designada *Para Praticar* (Figura 4):


Na entrada de um túnel, existe um arco assente em dois pilares de igual altura.

A altura do arco a x metros de distância do pilar da esquerda é dada, em metros, por:

$$h(x) = -\frac{1}{8}(x-4)^2 + 7$$

1. Mostra que $h(0) = 5$ e interpreta o resultado.

2. Indica a altura máxima do arco.

3. Determina a largura do túnel.

4. A que distância do pilar da esquerda a altura do arco é superior a 6,5 m ?

Figura 4. Exemplo de conexão entre a representação analítica e a gráfica no manual escolar.

Na resolução da tarefa o aluno começa por utilizar apenas uma representação, que é a analítica. De seguida, recorre à calculadora gráfica para obter o gráfico da função que modela a situação dada. Finalmente, através da análise da informação contida no gráfico, recorrendo à capacidade gráfica da calculadora, o aluno estabelece conexões entre representações e o que é pretendido pelo enunciado.

3.1.2. Conhecimentos prévios dos alunos relativamente ao tema de funções

As repostas obtidas no teste de diagnóstico permitiu-me perceber os conhecimentos adquiridos pelos alunos nos anos de escolaridade anteriores no estudo que efetuaram sobre funções. Em especial, permitiu-me verificar a forma como utilizavam as várias representações e estabeleciam conexões entre elas. O teste diagnóstico era constituído por cinco questões, tendo cada uma delas objetivos distintos (Tabela 4):

Tabela 4. Objetivos do teste diagnóstico.

Questões	Objetivos
Q1.	Identificar correspondências que traduzem funções.
Q2.	Definir função.
Q3.	Representar uma função recorrendo a uma representação.
Q4.	Identificar as várias formas de representar uma função.
Q5.	Representar e identificar uma função.

A forma de organizar a informação presente na resolução do teste diagnóstico, vai ao encontro aos objetivos definidos para cada pergunta. Desta forma, obteve-se a seguinte distribuição de respostas, como ilustra a tabela seguinte:

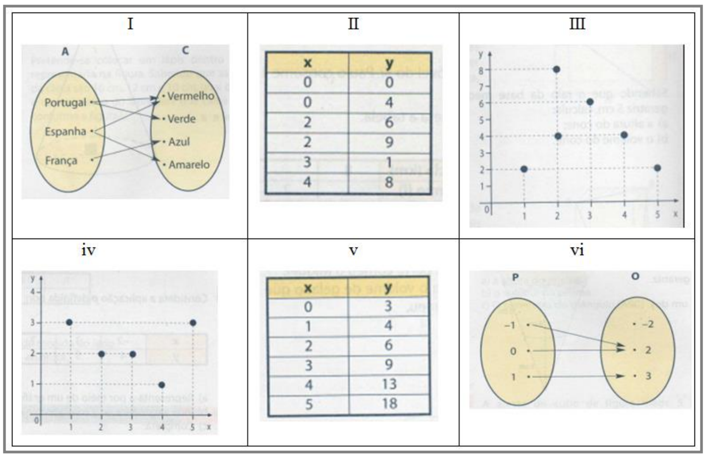
Tabela 5. Distribuição das respostas dos alunos no teste diagnóstico (n=26).

Tipo de resposta	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
Correta	6	4	23	4	25
Parcialmente correta	15	6	0	17	1
Incorreta	4	6	2	3	0
Não responde	1	10	1	2	0

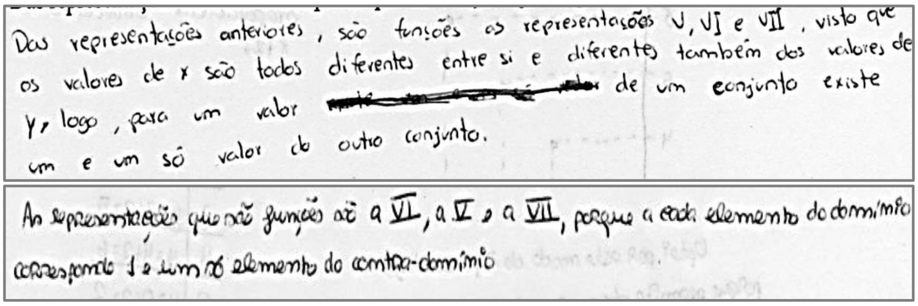
Da análise das respostas obtidas, a maioria dos alunos não consegue identificar função (Q1) ou mesmo defini-la (Q2), revelando dificuldades na justificação das suas respostas. Apresentam dificuldades para representar relações de vários modos e passar de um tipo de representação para outro, usando tabelas, gráficos e expressões analíticas. Não usam as equações como meio de representar uma determinada situação, com vista a resolvê-la, apresentando dificuldade em realizar procedimentos algébricos simples, tais como representar graficamente uma função.

Alguns alunos utilizam mais de duas representações em algumas questões, (Q3) e (Q5), e uma parte significativa conhece alguns tipos de representações de funções (Q4).

Questão 1. Para verificar se os alunos identificavam uma função através das várias representações, propus a seguinte questão:



A resposta a esta questão era considerada correta se indicasse que uma função é uma correspondência entre dois conjuntos em que a cada elemento do primeiro (domínio) se associa a um e só um elemento do segundo (conjunto de chegada), como exemplificam as seguintes respostas dos alunos A24 e A4:


Dos representações anteriores, são funções as representações V, VI e VII, visto que os valores de x são todos diferentes entre si e diferentes também dos valores de y, logo, para um valor de um conjunto existe um e um só valor do outro conjunto.

As representações que são funções são a VI, a V e a VII, porque a cada elemento do domínio corresponde 1 e um só elemento do contra-domínio

Figura 5. Resposta correta dos alunos A24 e A4 à questão 1.

As respostas eram consideradas parcialmente corretas se identificassem apenas uma correspondência que representasse uma função e/ou se identificassem apenas o domínio da função.

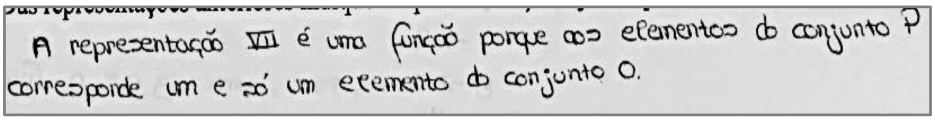

A representação VII é uma função porque aos elementos do conjunto P corresponde um e só um elemento do conjunto O.

Figura 6. Resposta parcialmente correta do aluno A14 à questão 1.

As repostas eram consideradas incorretas caso o aluno não identificasse corretamente as correspondências que representam uma função.

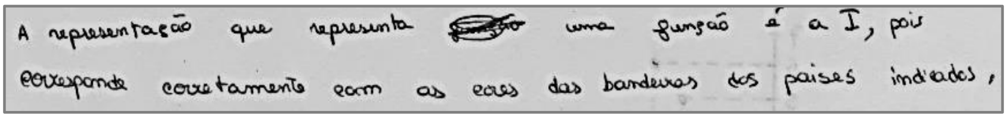

A representação que representa uma função é a I, pois corresponde corretamente com as cores das bandeiras dos países indicados,

Figura 7. Exemplo de uma resposta incorreta do aluno A6 à questão 1.

Apenas seis alunos (23.1%) identificaram de forma correta as representações que traduzem uma função. A maior parte deles não justificou a sua resposta, o que indicia a tendência de os alunos deste nível de escolaridade apresentarem respostas breves sem preocupação de expressar o seu pensamento (Ponte, 2005).

Questão 2. Nesta questão, os alunos tinham de definir o conceito de função, utilizando linguagem e simbologia associadas a este conceito. Para isso, tinham de responder à seguinte questão: “Defina por palavras suas o que é uma função”. A resposta era considerada correta se expressasse que uma correspondência entre duas variáveis é função se a cada valor da variável independente corresponde um e só um valor da variável dependente, como exemplifica a resposta dada pelo aluno A1:

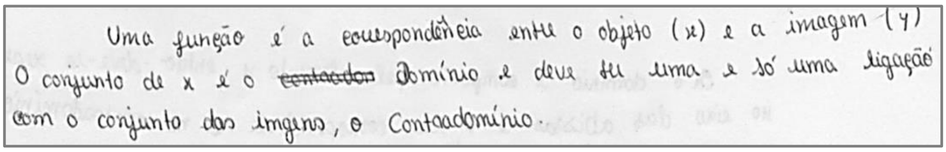

Uma função é a correspondência entre o objeto (x) e a imagem (y) O conjunto de x é o ~~contradom~~ domínio e deve ter uma e só uma ligação com o conjunto das imagens, o Contradomínio.

Figura 8. Exemplo de uma resposta correta dada pelo aluno A1 à questão 2.

A resposta era considerada parcialmente correta se indicasse, por exemplo, que existe uma relação entre os valores da variável independente e os valores da variável dependente através de correspondência.

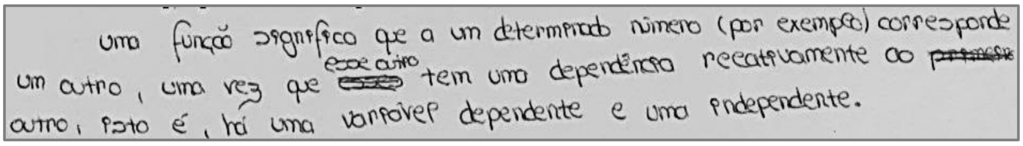

Uma função significa que a um determinado número (por exemplo) corresponde um outro, uma vez que esse outro tem uma dependência relativamente ao outro, isto é, há uma variável dependente e uma independente.

Figura 9. Exemplo de uma resposta parcialmente correta do aluno A12 à questão 2.

As respostas consideradas incorretas, o aluno não identificam a relação que a cada valor do domínio corresponde a uma imagem no conjunto de chegada, como exemplifica a resposta dada pelo aluno A2, referindo que é um conceito importante mas depende dos axiomas e da família matemática descrevendo relações entre dois elementos (Figura 10).

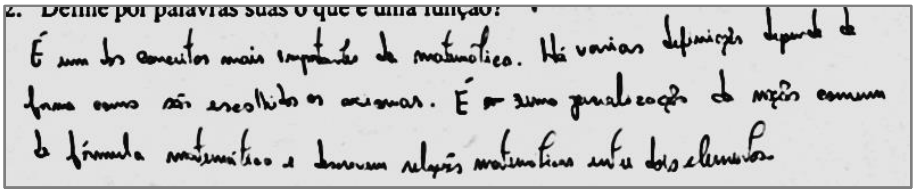
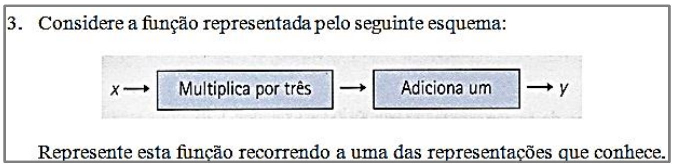

2. Defina por palavras suas o que é uma função?
É um dos conceitos mais importantes da matemática. Há várias definições dependendo da forma como são escolhidos os axiomas. É a sua generalização da noção comum da fórmula matemática e descreve relações matemáticas entre dois elementos.

Figura 10. Exemplo de uma resposta incorreta dada pelo aluno A2 à questão 2.

Da análise das respostas à questão 2, apenas quatro alunos (15.4%) manifestaram ter a noção correta do conceito de função. Dos restantes alunos, grande parte (38.5%) não respondeu a esta questão e seis (23.1%) apresentaram uma resposta incorreta. Segundo Saraiva e Teixeira (2009), as dificuldades que os alunos demonstram quando tentam compreender o conceito de função está relacionado com o uso de símbolos. Embora alguns alunos tenham a noção de objeto e de imagem, estes autores consideram que a definição de função resulta da memorização e que muitos deles não associam a relação "a um objeto corresponde uma e uma só imagem" com a representação de uma função, o que os leva a escolher representações que não representam uma função.

Questão 3. Com esta questão, os alunos foram solicitados a traduzir a informação apresentada numa das representações das funções. Para Goldin (1998), a capacidade de os alunos processarem a linguagem "natural" faz com que os significados atribuídos às palavras e as associações estabelecidas entre palavras tenham correspondência noutras representações.


3. Considere a função representada pelo seguinte esquema:

Represente esta função recorrendo a uma das representações que conhece.

A resposta era considerada correta caso os valores atribuídos à variável independente se transformassem em $3x + 1$ recorrendo a uma das múltiplas representações, como ilustra a Figura 11:

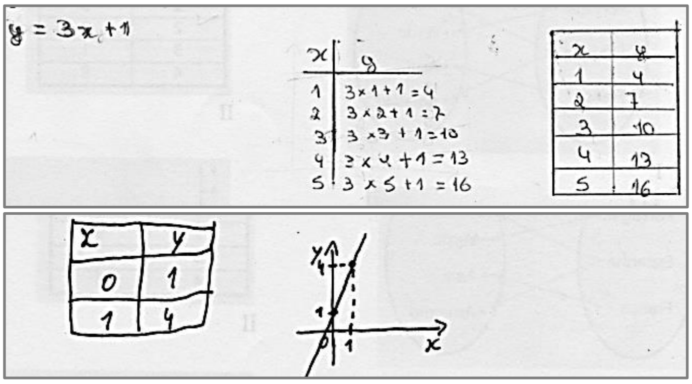


Figura 11. Exemplo de respostas corretas apresentadas pelos alunos A6 e A9 à questão 3.

Nestes exemplos, o aluno A6 traduziu a informação dada numa expressão analítica e numa tabela, enquanto o aluno A9 recorre às coordenadas de dois pontos que determina numa tabela, segundo a relação estabelecida, para esboçar o respetivo gráfico.

A resposta a esta questão era considerada incorreta se não traduzisse a informação dada, como exemplifica a resposta dada pelo aluno A7 (Figura 12).

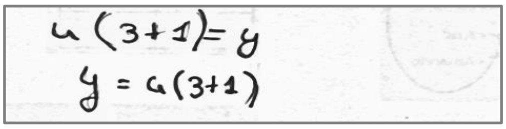

$4(3+1)= y$
$y = 4(3+1)$

Figura 12. Exemplo de uma resposta incorreta dada pelo aluno A7 à questão 3.

A resposta dada pelo aluno A7 demostra dificuldade em passar da linguagem escrita para a linguagem matemática, referindo $x(3+1)$ o que não traduz o que vem no enunciado da pergunta, que é a x multiplica por 3, $x \times 3$, e soma 1, $x \times 3 + 1$, o que é diferente do apresentando pelo aluno.

Das respostas dadas pelos alunos, oito (30.8%) apresentaram a resposta recorrendo a dois tipos de representação. Tendo em conta os estudos de Duval (2002) e a resolução dos alunos desta turma, uma das maiores dificuldades manifestadas deveu-se à passagem de informação de uma representação para outra, o que traduz a dificuldade de estabelecer conexões entre representações.

Questão 4. A questão 4 teve como objetivo averiguar se os alunos identificavam as múltiplas representações de uma função através da seguinte questão: “Que tipo de representações de funções conhece?”. A resposta a esta questão era considerada correta se o aluno identificasse as quatro formas de representar uma função, que são estudadas a partir do 7.º ano de escolaridade — expressão analítica, tabular, diagrama e gráfica —, como mostra a resposta dada pelo aluno A13.

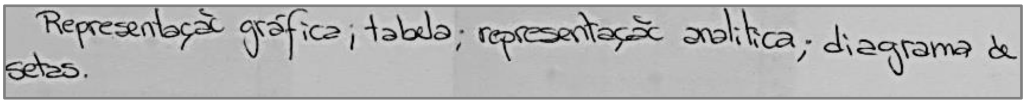

Representaçã gráfica; tabela; representaçã analitica; diagrama de setas.

Figura 13. Exemplo de uma resposta totalmente correta dada pelo aluno A13 à questão 4.

As respostas eram consideradas parcialmente corretas se explicitassem algumas das quatro representações de uma função, como mostra a resposta dada pelo aluno A6:

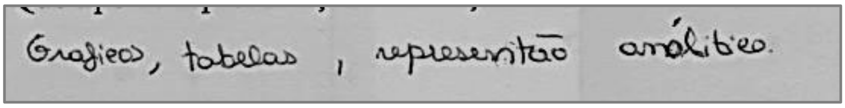

Graficos, tabelas, representão análitico.

Figura 14. Exemplo de uma resposta parcialmente correta dada pelo aluno A6 à questão 4.

A resposta era incorreta sempre que o aluno não respondesse nenhuma das representações esperadas, como exemplifica a resposta do aluno A15, que indicia confundir os tipos de representação de uma função com os tipos de função e com a sua classificação quanto à injetividade e sobrejetividade:

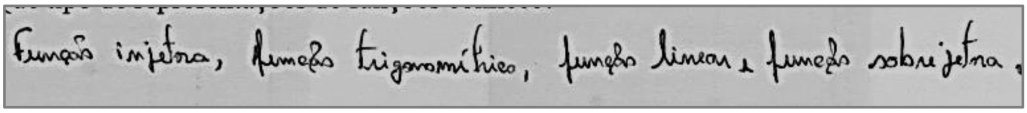

Função injetora, função trigonométrica, função linear e função sobrejetora.

Figura 15. Exemplo de uma resposta incorreta do aluno A15 à questão 4.

Apenas quatro alunos (15.4%) indicaram os quatro tipos de representação de uma função. A maioria dos alunos conseguiu identificar duas ou mais tipos de representações. Dois alunos (7.7%) não sabem o significado de representação de funções, enquanto três alunos (11.5%) identificaram tipos de funções em vez de tipos de representação de uma função.

Questão 5. A questão cinco teve como objetivo averiguar a conexão entre os dados representados através de uma correspondência e uma das representações de uma função.

5. Observe o exemplo:

$$1 \longrightarrow 3$$
$$2 \longrightarrow 4$$
$$3 \longrightarrow 5$$
$$4 \longrightarrow 6$$
$$\ldots$$
$$x \longrightarrow \cdots.$$

Represente os dados apresentados recorrendo a uma das representações de funções. Justifice a sua opção.

A resposta era considerada correta desde que representasse a correspondência indicada através de uma das representações de uma função e apresentasse uma justificação adequada da sua escolha. Grande parte dos alunos utilizou mais que uma representação para responder à questão, como ilustra a resposta do aluno A4:

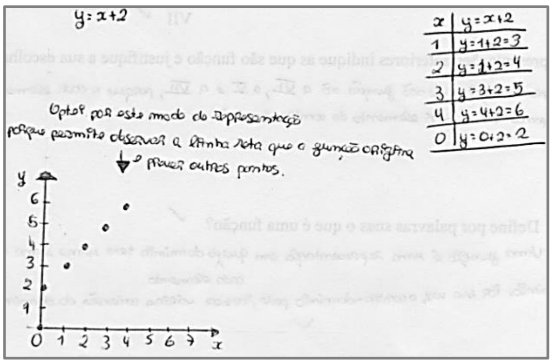


Figura 16. Exemplo de uma resposta correta do aluno A4 à questão 5.

No esboço da representação gráfica o aluno marcou os pontos mas não os uniu de forma a indicar que a função é contínua. Este tipo de representação denota que o aluno reconhece uma função quando é dada na representação analítica e tabular, mas não a identifica quando são apresentadas na forma gráfica (Goldin,1998).

Caso o aluno representasse a correspondência indicada através de uma das representações de uma função mas não justificasse a sua opção, a resposta era considerada parcialmente correta, como mostra a resposta do aluno A15:

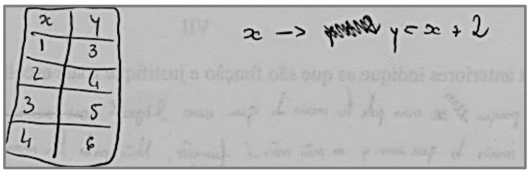


Figura 17. Exemplo de uma resposta parcialmente correta dada pelo aluno A15 à questão 5.

A maioria dos alunos (57.7%) utilizou duas ou mais representações. A representação analítica e a tabular foram as mais utilizadas. Apenas um aluno (3.8%) respondeu incorretamente, não conseguindo identificar quais os valores que correspondiam ao objeto e à imagem, trocando o objeto pela imagem.

3.2. Intervenção pedagógica

A recolha e análise de dados foram desenvolvidas em simultâneo durante a minha intervenção pedagógica. A estratégia usada envolveu a relação entre as múltiplas representações dos tópicos do tema de funções. Para isso, pretendo identificar e analisar que representações os alunos utilizam na resolução de tarefas e que conexões estabelecem.

3.2.1. Ensino e aprendizagem de funções através da conexão entre representações

A minha intervenção pedagógica decorreu durante 14 aulas, todas com duração de noventa minutos, onde lecionei os conteúdos do tema "Funções e Gráficos – Generalidades; Função Módulo; Função Polinomial" do 10.º ano, como ilustra a seguinte tabela:

Tabela 6. Síntese da intervenção pedagógica.

Aulas (A_j)	**Conteúdos do tema funções e gráficos**
$\mathbf{A_1}$	Conceito de função. Domínio, contradomínio e conjunto de chegada de uma

	função.
$\mathbf{A_2}$ e $\mathbf{A_3}$	Propriedades das funções.
$\mathbf{A_4}$ e $\mathbf{A_5}$	Gráficos de uma função. Utilização da calculadora no estudo de funções.
$\mathbf{A_6}$	Função afim.
$\mathbf{A_7}$ **e** $\mathbf{A_8}$	Função quadrática: Família de funções.
$\mathbf{A_9}$	Função quadrática: Propriedades da função quadrática.
$\mathbf{A_{10}}$	Função quadrática: Estudo quanto ao domínio, contradomínio, vértice e eixo de simetria da parábola.
$\mathbf{A_{11}}$	Função quadrática: Transformações do gráfico da função quadrática.
$\mathbf{A_{12}}$	Função módulo: Função definida por ramos.
$\mathbf{A_{13}}$	Estudo da função módulo: Propriedades; Equações e inequações com módulos.
$\mathbf{A_{14}}$	Função polinomial: Determinação das raízes de um polinómio; Decomposição em fatores.

Os conteúdos do estudo de funções foram tratados através de tarefas de natureza exploratória, recorrendo a informação vinculada em representações gráfica, analítica e tabular. No início de cada aula, distribuía as tarefas pelos alunos para que as trabalhassem em díades. Atribuía algum tempo para a resolução das mesmas, de seguida era apresentada a resolução, no quadro, por um dos alunos, e explicitada a sua resolução perante a turma. Na resolução das tarefas, os alunos utilizavam conhecimentos matemáticos anteriores para a aprendizagem dos novos conceitos. As tarefas existentes no manual escolar foram utilizadas para os alunos consolidarem os conhecimentos tratados e em alguns momentos serviram de tarefas adicionais para os alunos que terminavam as tarefas propostas antes dos seus colegas.

Para ilustrar a minha intervenção pedagógica, o trabalho e o empenho dos alunos durante a implementação das estratégias de ensino a que recorri, descrevo os momentos mais expressivos de algumas das aulas que lecionei. Serão, ainda, apresentadas e analisadas as apreciações dos alunos referentes às estratégias utilizadas. A metodologia utilizada para o tratamento dos resultados produzidos pelos alunos vai ao encontro do referencial defendido por Dreyfus (1991), que tem como função potenciar a utilização e compreensão das múltiplas representações na resolução de tarefas, que são: (i) utilizar uma só representação; (ii) utilizar mais que uma representação; e (iii) estabelecer conexões entre essas representações.

Utilizar uma só representação

A utilização de uma só representação por parte dos alunos no que diz respeito a tópicos do tema de funções está relacionada com o seu desenvolvimento matemático e com a sua capacidade de pensar sobre esses tópicos nas representações que utilizam. Nas tarefas que propus, o aluno podia recorrer à representação que lhe fosse mais adequada para explicitar o seu raciocínio. A natureza de algumas tarefas induzia o aluno a utilizar a representação que estava implícita no seu enunciado, como se verificou na determinação da expressão que representa a área de figuras:

1. **Determine a expressão que define a área do pátio?**
2. **Determine a expressão que representa a área das lavandarias?**
3. **Mostre que a área livre do pátio é dada, em função de x, pela expressão $A(x) = -5x^2 + 30x$.**
4. **Descreva as caracteristicas de cada uma das expressões**

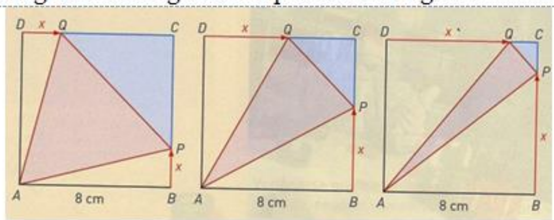
Da análise dos registos dos alunos verifica-se que a representação usada é a analítica, como exemplifica a resolução efetuada por um aluno:

Figura 18. Resposta usando a representação analítica do aluno A17

A maior parte dos alunos obteve a expressão analítica que define a área pretendida e identifica os polinómios quanto ao seu grau, definindo-os como função afim para polinómios de grau 1 e função quadrática para os polinómios de grau 2.

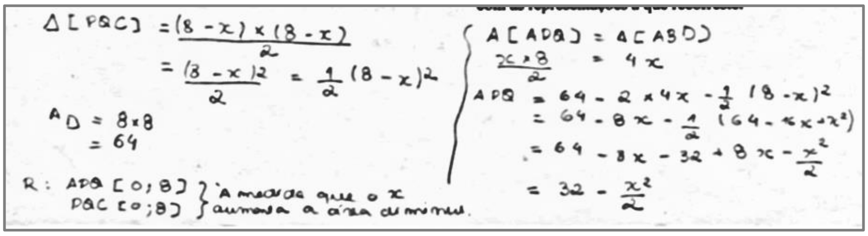
A utilização da representação analítica na resolução de problemas põe em relevo a capacidade que os alunos desenvolvem até ao 10.º ano de escolaridade de estabelecer relações mediante as condições que lhes são apresentadas no enunciado de problemas. Em problemas que os alunos poderiam recorrer a mais do que uma representação, para explicitarem o seu raciocínio, constata-se que recorrem preferencialmente à analítica, como se verificou na resolução do seguinte problema:

Considere o quadrado [ABCD], com 8 cm de lado. Dois pontos médios P e Q deslocam-se à mesma velocidade sobre os lados [BC] e [DC], respetivamente, de modo que $\overline{BP} = \overline{DQ} = x$, como é sugerido na seguinte sequências de figuras.



A cada posição dos pontos P e Q corresponde triângulos coloridos [APQ] e [PQC].
Numa composição, indique como varia a área dos triângulos coloridos com o valor de x. Justifique as suas conclusões a que chegou, expressando o seu raciocínio com as representações a que recorreu.

Alguns alunos obtêm a expressão que modela a situação dada, a área de triângulos inscritos num quadrado, mas não recorrem a esboços gráficos para explicitarem a variação dessa expressão, como exemplifica a resposta do aluno A27:



$\Delta[PQC] = \frac{(8-x)\times(8-x)}{2} = \frac{(8-x)^2}{2} = \frac{1}{2}(8-x)^2$

$A_D = 8\times 8 = 64$

$A[ADQ] = A[ABP]$
$\frac{x\times 8}{2} = 4x$

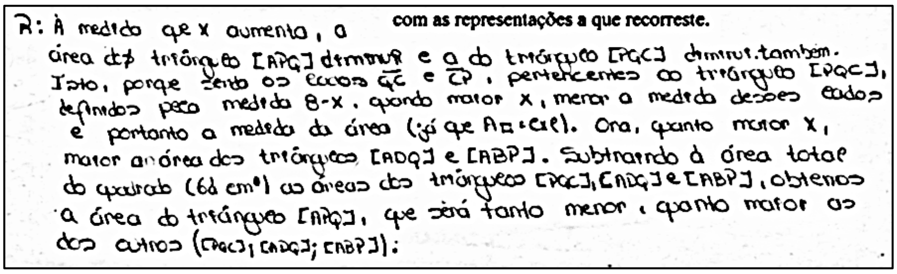
$APQ = 64 - 2\times 4x - \frac{1}{2}(8-x)^2$
$= 64 - 8x - \frac{1}{2}(64 - 16x + x^2)$
$= 64 - 8x - 32 + 8x - \frac{x^2}{2}$
$= 32 - \frac{x^2}{2}$

R: APQ [0; 8]
PQC [0; 8] } À medida que o x aumenta a área diminui.

Figura 19. Resposta utilizando a representação analítica do aluno A27.

O aluno definiu corretamente as expressões que representam as áreas de cada um dos triângulos inscritos no quadrado, mas na sua justificação não se distingue se recorreu à calculadora gráfica ou se idealizou o gráfico para obter a variação da área dos triângulos sombreados.

Apenas um aluno apresentou o seu raciocínio sobre a forma de composição, tal como foi solicitado, o que indicia a falta de hábito dos alunos de apresentarem respostas mais desenvolvidas do que as que dão na resolução de tarefas de natureza mais fechada:



R: À medida que x aumenta, a área do triângulo [APQ] diminui e a do triângulo [PQC] diminui também. Isto, porque sendo os lados $\overline{QC}$ e $\overline{CP}$, pertencentes ao triângulo [PQC], definidos pela medida 8-x, quanto maior x, menor a medida desses lados e portanto a medida da área (já que A = c×l). Ora, quanto maior x, maior a área dos triângulos [ADQ] e [ABP]. Subtraindo à área total do quadrado (64 cm²) as áreas dos triângulos [PQC], [ADQ] e [ABP], obtemos a área do triângulo [APQ], que será tanto menor, quanto maior as dos outros ([PQC]; [ADQ]; [ABP]):

com as representações a que recorreste.

Figura 20. Resposta usando a composição matemática do aluno A14.

A variação da área dos triângulos está relacionada com o aumento ou diminuição das medidas dos lados, como faz referência o aluno, sendo a variação proporcional. Uma parte substancial dos alunos apresentou dificuldades em trabalhar com expressões analíticas, e em definir as expressões que representam medidas dos lados do triângulo.

Os alunos não associaram a representação mental por eles elaborada com o desenho representado. Segundo Dreyfus (1991), a representação mental é fundamental para o pensamento matemático onde a visualização é uma componente inerente ao processo de representação.

Tarefas que apresentem mais que uma representação, onde o aluno usa na sua resolução apenas uma, ilustra a sua importância para o entendimento da matemática.

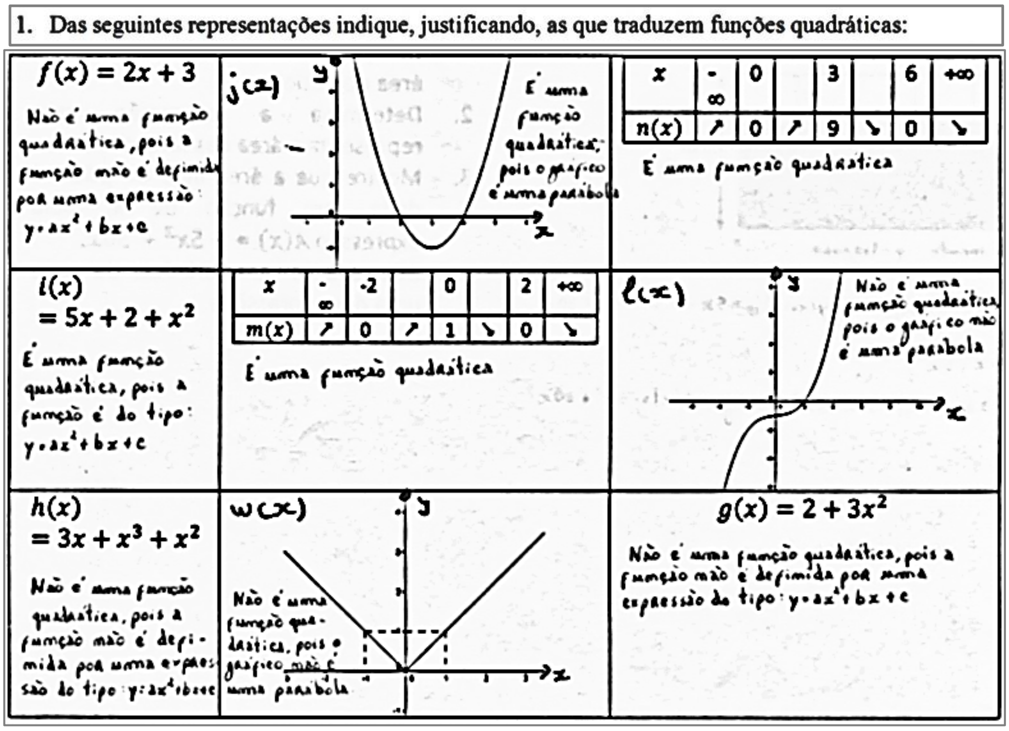


Figura 21. Resposta usando uma representação do aluno A6.

Para o aluno A6, a função quadrática é representada analítica por uma equação de 2.º grau, a representação gráfica corresponde a uma parábola e a representação tabular apresenta uma variação da monotonia. No caso da resposta do aluno A6, associa a função quadrática à expressão $y = ax^2 + bx + c$, mas quando a expressão não se encontra na forma canónica o aluno não a identifica como sendo uma função do 2.º grau. Na representação gráfica, associa a representação a uma parábola, que é característica deste tipo de funções. Quanto à representação tabular, indica apenas que é quadrática não justificando ou referindo, por exemplo, que a função quadrática tem dois zeros.

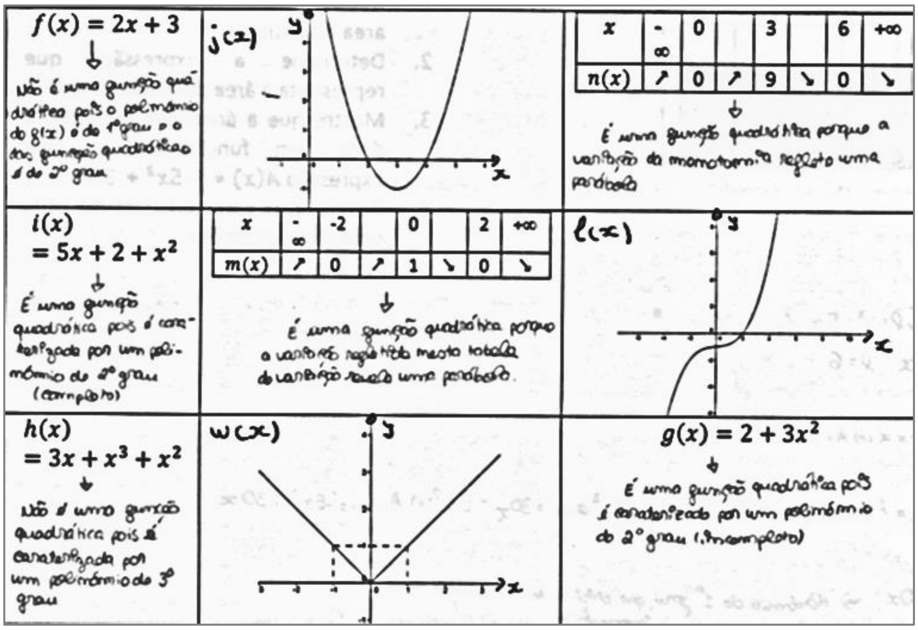


Figura 22. Resposta usando uma representação do aluno A21.

Prof. Existe mais alguma representação de uma função quadrática?
Aluna. Sim, a função j(x).
Prof. E porquê?
Aluna. É uma função quadrática já que a função é caraterizada por uma parábola.
Aluna. E quando representada em expressão analítica apresentam o x elevado ao quadrado.
Prof. E quais das representações não é uma função quadrática? Porquê?
Aluna. As funções e e w.

Na justificação das suas respostas, os alunos revelam que ainda não distinguem o papel das letras na representação analítica de funções, como exemplifica a designação do aluno à função j, não distinguindo o processo de transformação dos elementos que são por si transformados. Na representação tabular, o aluno estuda a função quanto à sua monotonia, indicando que no caso da função quadrática existe uma variação de monotonia característica dos polinómios de 2.º grau.

A noção que os alunos têm de função quadrática é pouco consistente. Embora associem a palavra função quadrática à expressão $ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ a uma parábola na representação gráfica e a uma equação do 2.º grau na expressão analítica, a maioria dos alunos associa a expressão analítica a um polinómio de grau 2. Para o aluno o grau do polinómio indica o número de zeros que a função pode ter. Na representação tabular, os alunos recorrem à monotonia, indicado onde a função é crescente e decrescente, para determinarem se é uma função quadrática. De certa forma, alguns alunos estabeleceram relações estre a função quadrática e a expressão que a define.

Dreyfus (1991) considera que na resolução deste tipo de tarefas, com mais que uma representação, são necessárias para aumentar o nível de abstração em relação a uma representação, passando de uma para outra e identificando qual as características presentes na representação indicada.

Utilizar mais que uma representação

A utilização em simultâneo mais do que uma representação, por parte dos alunos, promove a capacidade de raciocínio e a destreza de trabalhar com as várias representações (Dreyfus, 1991), podendo passar de um nível de detalhe para outro e desta forma tirar relações e significados associados a diferentes representações. Foi o que se verificou na identificação de funções quadráticas entre diferentes funções, mediante as características presentes em cada uma das representações seja ela analítica, gráfica ou tabular.

Na resolução da questão "*área do pátio*", para caracterizarem cada um desses polinómios, alguns alunos recorreram à representação analítica e à gráfica, como ilustram as seguintes respostas do aluno A7:

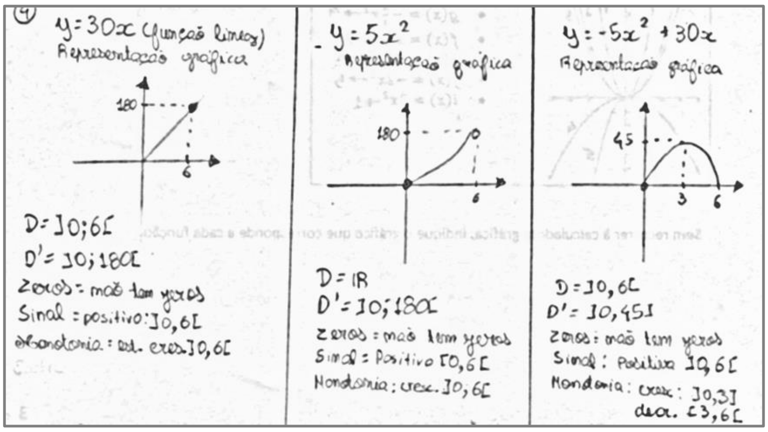


Figura 23. Resposta recorrendo à mais que uma representação do aluno A7.

O aluno começa por representar as expressões que definem analiticamente as funções e tendo em conta a representação gráfica determina o domínio, contradomínio, zeros, sinal e monotonia. Os alunos que apresentaram respostas similares às deste aluno revelam facilidade em 'manusear' as expressões analíticas e de identificar o tipo de polinómio que representa cada expressão, como revela a aluno A8.

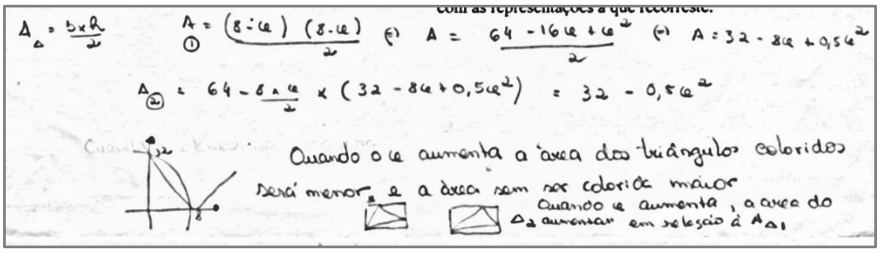
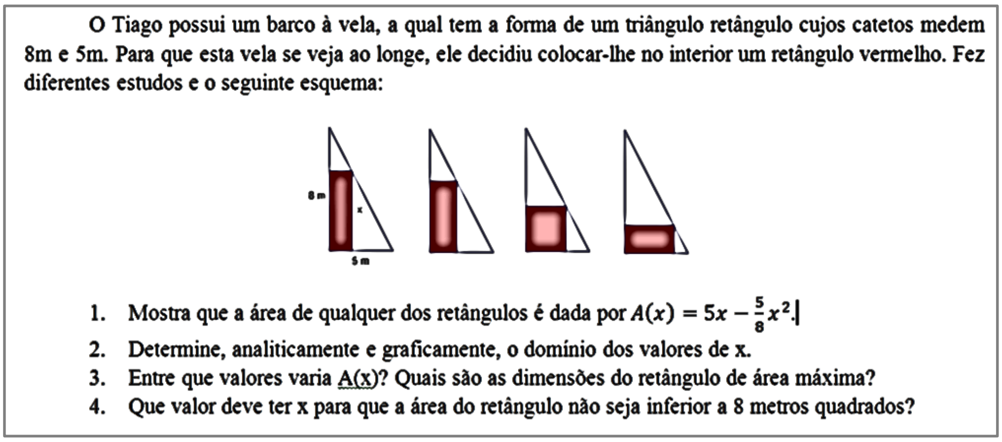


Figura 24. Resposta recorrendo à mais que uma representação do aluno A8.

No cálculo da área do triângulo ao desembaraçar de parenteses, o aluno aplica mal a propriedade distributiva, determinam incorretamente a expressão que define a área. As conclusões são obtidas recorrendo a esquemas (desenhos), através da análise das expressões que definem a área.

Na resolução de algumas tarefas, como é exemplo a tarefa “*barco à vela*”, os alunos foram solicitados a recorrer a mais do que uma representação. No estudo de funções, a representação analítica resulta, por vezes, da conexão com noções abordadas na Geometria, como por exemplo na determinação de expressões de áreas de figuras em função da variabilidade das suas dimensões.



O Tiago possui um barco à vela, a qual tem a forma de um triângulo retângulo cujos catetos medem 8m e 5m. Para que esta vela se veja ao longe, ele decidiu colocar-lhe no interior um retângulo vermelho. Fez diferentes estudos e o seguinte esquema:

1. Mostra que a área de qualquer dos retângulos é dada por $A(x) = 5x - \frac{5}{8}x^2$.
2. Determine, analiticamente e graficamente, o domínio dos valores de x.
3. Entre que valores varia A(x)? Quais são as dimensões do retângulo de área máxima?
4. Que valor deve ter x para que a área do retângulo não seja inferior a 8 metros quadrados?

As questões que referem implicitamente a representação a utilizar condicionam a atividade do aluno a usar somente essa representação, como são exemplo as questões que interpelam os alunos a determinar expressões analíticas ou gráficos dessas expressões. Em situações em que se pretende que estabeleçam relações, mediante os dados que lhes são fornecidos, os alunos revelam destreza na aplicação de fórmulas que aprenderam no seu percurso escolar, utilizando esquemas que auxiliam a dedução da expressão, como ilustra a resposta do aluno A2:

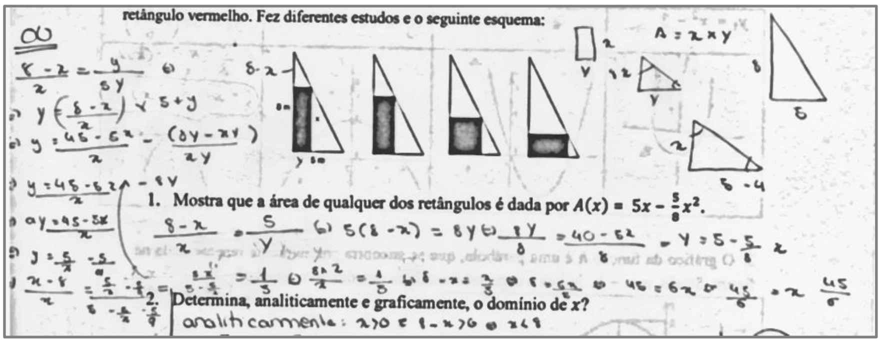


Figura 25. Exemplo de resposta recorrendo a mais que uma representação analítica A2.

Prof. De que forma vão determinar o outro lado do triângulo?

Aluno: Usando a semelhança de triângulos. E como a área do retângulo é o comprimento vezes a largura, basta encontrar a largura do retângulo e substituir na expressão da área.

Prof. Qual é a variável dependente e independente da expressão?

Aluno: A variável dependente é o x e a independente é o y, (…) determinada através da semelhança de triângulos.

Prof. A área do triângulo é dada pelo comprimento vezes a largura, $A = x \times y$. De que forma vamos obter o valor de y?

Aluno: Determinando y em função da variável x, assim só temos de substituir o valor de y na expressão que define a área do retângulo.

A maioria dos alunos obteve a expressão pretendida, que define a área do retângulo, através da aplicação de critérios de semelhança de triângulos. Os cálculos usados na determinação dessa expressão revelam destreza, por parte dos alunos, no manuseamento de expressões analíticas (Dreyfus, 1991).

Em situações que solicitam os alunos a recorrer às representações analítica e gráfica, esta representação resulta em esboços efetuados a partir do que retiram da calculadora gráfica. Perante o esboço gráfico de uma função, a maior parte dos alunos manifesta capacidade de interpretar a informação que contextualiza a situação dada, como mostra a resposta do aluno A3:

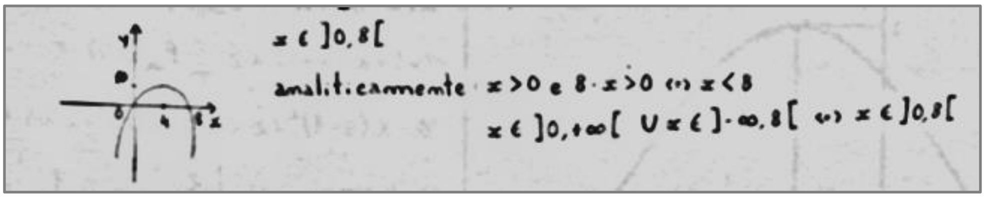


Figura 26. Exemplo de resposta recorrendo a mais que uma representação do aluno A3.

Prof. Como vais determinar o domínio de x?

Aluno: Vou pôr a expressão na calculadora e ver que valores x pode tomar.

Prof. E analiticamente como vais determinar o domínio?

Aluno: Tenho de ter em conta o problema, que é um problema real, logo o valor de x só toma valores positivos, $x > 0$ e $8 - x > 0$.
Prof. Porquê essas condições?
Aluno: Porque senão não existe retângulo.

Na resposta apresentada, verifica-se que o aluno utiliza as duas representações, tendo em conta o contexto do problema. A estratégia utilizada pela maioria dos alunos consistiu em converter a representação analítica da área do retângulo numa representação gráfica, utilizando para esse fim as capacidades gráficas da calculadora.

A representação gráfica é uma estratégia que a maioria dos alunos recorreu, com recurso à calculadora gráfica, para indicar características de uma função, como é exemplo a determinação dos valores de variação da área do retângulo, o valor do retângulo de área máxima e o intervalo de valores para os quais a área é superior a 8, como exemplifica a resposta do aluno A3.

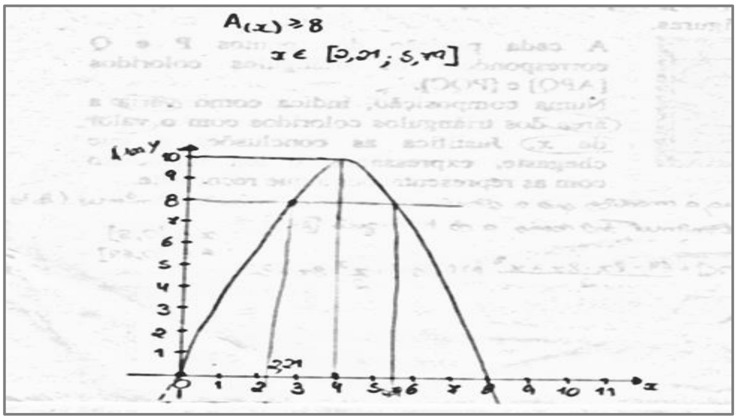
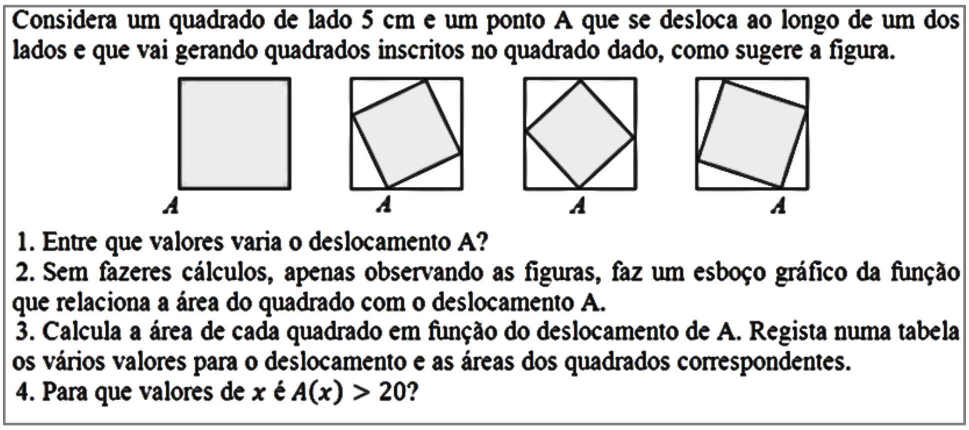


Figura 27. Exemplo de resposta recorrendo à mais que uma representação do aluno A3.

A resolução e representação gráfica de inequações dadas analiticamente, revela por parte do aluno um bom desempenho nos cálculos necessários, no trabalho com a expressão analítica e na utilização da calculadora gráfica. Mostra, ainda, sere capaz de traduzir significados da representação gráfica obtida de forma a obter o resultado pretendido.

A tarefa "*quadrado inscrito*" teve como objetivo esboçar o gráfico da função que relaciona a área do quadrado com o deslocamento; identificar a representação analítica da função que relaciona a área do quadrado com o deslocamento e determinar a expressão algébrica da função que relaciona a área do quadrado por processos analíticos. Desta tarefa vou apenas analisar as questões onde os alunos utilizaram mais que uma representação, que são a questão 3 e 4.



Considera um quadrado de lado 5 cm e um ponto A que se desloca ao longo de um dos lados e que vai gerando quadrados inscritos no quadrado dado, como sugere a figura.

1. Entre que valores varia o deslocamento A?
2. Sem fazeres cálculos, apenas observando as figuras, faz um esboço gráfico da função que relaciona a área do quadrado com o deslocamento A.
3. Calcula a área de cada quadrado em função do deslocamento de A. Regista numa tabela os vários valores para o deslocamento e as áreas dos quadrados correspondentes.
4. Para que valores de x é $A(x) > 20$?

Na questão 3 os alunos deveriam representar numa tabela a variação da área com o deslocamento, para isso os alunos deviam calcular a expressão analítica que define a área do quadrado inscrito.

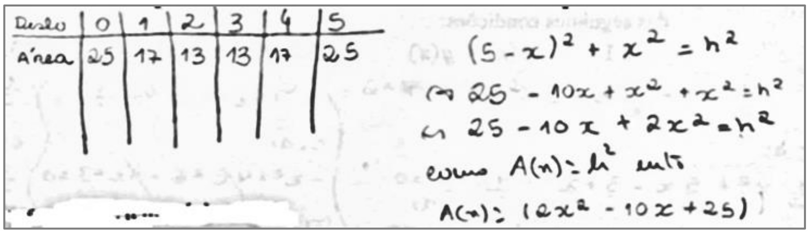


Figura 28. Exemplo de resposta recorrendo à mais que uma representação aluno A4.

Para a aprendizagem dos alunos é importante o recurso à representação tabular, neste caso para encontrar as imagens correspondentes dos objetos definidos e deduzir a expressão analítica. A representação tabular dá ao aluno um conhecimento mais amplo, em que as variáveis são números que se alteram e em que o valor das expressões varia com o resultado (Brown & Mehilos, 2010). Para estes autores, a tabela é um suporte que os alunos usam quando procuram ficar confortáveis com as expressões analíticas, e ajudar a dar significado a variáveis.

Na resolução seguinte, o aluno, utiliza a representação gráfica e a analítica para responder à questão 4. A representação gráfica dá uma imagem clara e parcial de funções, sendo uma mais-valia quando se pede ao aluno que identifique valores em que a função assume um determinado valor.

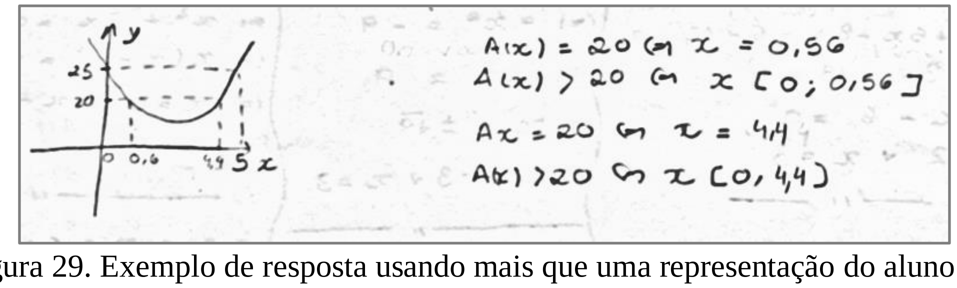


Figura 29. Exemplo de resposta usando mais que uma representação do aluno A8.

A maioria dos alunos utilizou a resolução gráfica de inequações. A utilização de mais que uma representação fornece uma caracterização mais elaborada, facilitando o raciocínio. As diferentes representações sustentam várias formas de pensar e manipular os objetos matemáticos auxiliando a compreensão dos conceitos. O recurso à calculadora gráfica exige que o aluno aprenda a introduzir e interpretar os dados obtidos na calculadora. Uma das dificuldades apresentadas consiste em identificar a janela adequada para a visualização dos gráficos.

A representação gráfica de uma função pode ser obtida recorrendo à calculadora gráfica ou utilizando processos analíticos, para determinar as propriedades de uma função e seguidamente desenhá-la.

1. Represente graficamente a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{15}{4}$$

A forma como os alunos trabalham com mais que uma representação, como estabelecem relações entre elas, está relacionada com o processo de ensino/aprendizagem desenvolvido. Estabelecer significados entre expressões analíticas desenvolve ginástica mental possibilitando passar os significados de uma representação para outra e dar sentido aos mesmos (Kieran, 1992).

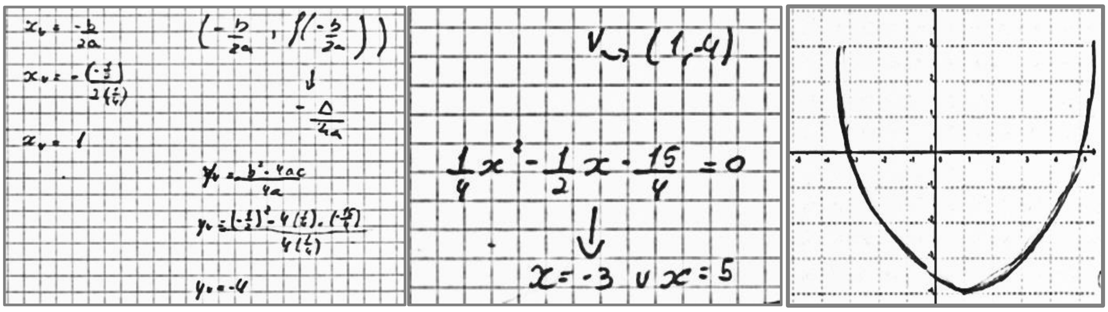


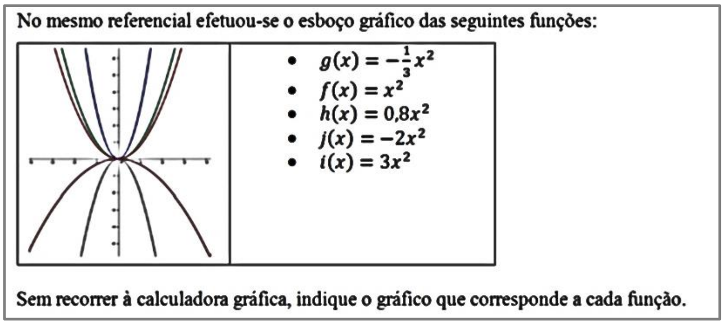
Figura 30. Exemplo de resposta com mais que uma representação do par de alunos A6 e A21.

A representação gráfica, quando definida pela sua representação analítica, leva geralmente os alunos a recorrerem A capacidade gráfica da calculadora. Constatei que grande parte dos alunos começou por determinar as características da expressão utilizando a família de funções polinomiais e seguidamente desenhar o gráfico. Para os alunos, algumas representações têm mais significado que outras. A utilização de mais que uma representação permite compreender a importância dos parâmetros da família de funções (Kieran, 1992).

Estabelecer conexões entre as representações

Dreyfus (1991) refere que o aluno ao estabelecessem conexões entre representações passando de uma representação para outra com flexibilidade aumento o seu poder de abstração.

Na questão seguinte, era pedido ao aluno que estabeleça conexão entre a representação analítica de uma função e a representação gráfica de família de funções polinomiais utilizando os parâmetros das expressões analíticas a elas associados, $f(x) = ax^2$, relacionando a abertura da concavidade da parábola com o parâmetro a.


No mesmo referencial efetuou-se o esboço gráfico das seguintes funções:

- $g(x) = -\frac{1}{3}x^2$
- $f(x) = x^2$
- $h(x) = 0{,}8x^2$
- $j(x) = -2x^2$
- $i(x) = 3x^2$

Sem recorrer à calculadora gráfica, indique o gráfico que corresponde a cada função.

O objetivo desta questão é estabelecer conexões entre a representação gráfica e a analítica, ou seja, passar de uma representação para outra.

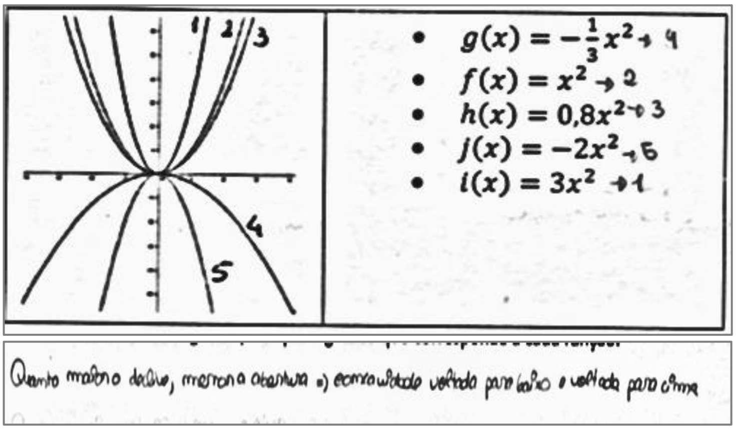


Figura 31. Exemplo de conexões entre representações do aluno A15.

Prof. Que tipo de função está representado nestes gráficos?

Aluno. As funções $\mathrm{j, i, m, g}$ e n representam funções quadráticas, pois o gráfico é uma curva denominada parábola e segue a lei $\mathrm{ax^2 + bx + c}$, em que $\mathrm{a, b, c}$ são constante e $\mathrm{a} \neq 0$.

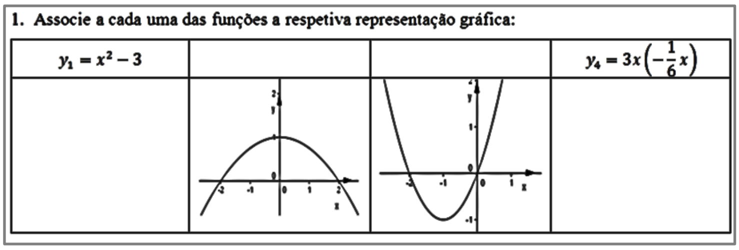
Prof. Que parâmetro utilizaram para estabelecerem as conexões entre a representação gráfica e a representação analítica?

Aluno. O parâmetro a, pois quanto maior for o valor de a mais fechada é a parábola.

Aluno. Quanto maior o valor de a mais perto do eixo do y. E quando $a > 0$ a concavidade é voltada para cima, mas quando $a < 0$ tem a concavidade voltada para baixo.

Os alunos identificaram os valores do parâmetro a, estabelecendo relações entre o valor do parâmetro e o sentido da concavidade, e do valor do parâmetro a com a abertura da concavidade da parábola. Alguns alunos relacionaram corretamente o parâmetro a com a representação gráfica da família de funções, indicando corretamente o papel do parâmetro, embora um aluno se tivesse referindo ao parâmetro a como "o declive", o declive é uma característica do gráfico da função afim, $f(x) = mx + b$.

A resolução de algumas das tarefas propostas promoveu o desenvolvimento da flexibilidade de passar de uma representação para outra através do estabelecimento de conexões. Dreyfus (1991) considera que o processo de mudar de representação está estreitamente relacionada com a forma de representar, como se verifica com a seguinte tarefa:


1. Associe a cada uma das funções a respetiva representação gráfica:

$y_1 = x^2 - 3$			$y_4 = 3x\left(-\frac{1}{6}x\right)$

A tarefa envolve mais que uma representação e tem como finalidade avaliar a flexibilidade que os alunos têm ao estabelecerem conexões entre as representações. A passagem de uma representação para outra através do estabelecimento de conexões entre representações é de grande dificuldade para os alunos (Dreyfus, 1991).

Na sua atividade, os alunos, estabelecem conexões entre a representação analítica e a gráfica e, entre a gráfica e a analítica, como demonstra a resolução do aluno A21:

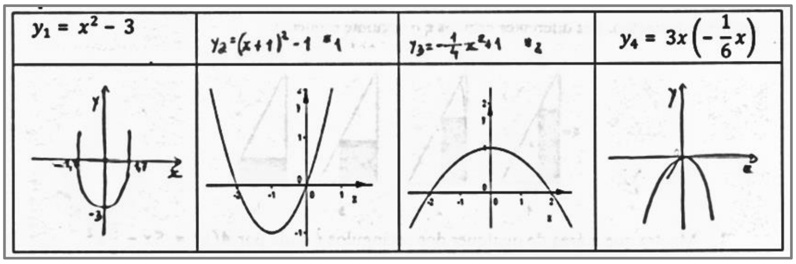
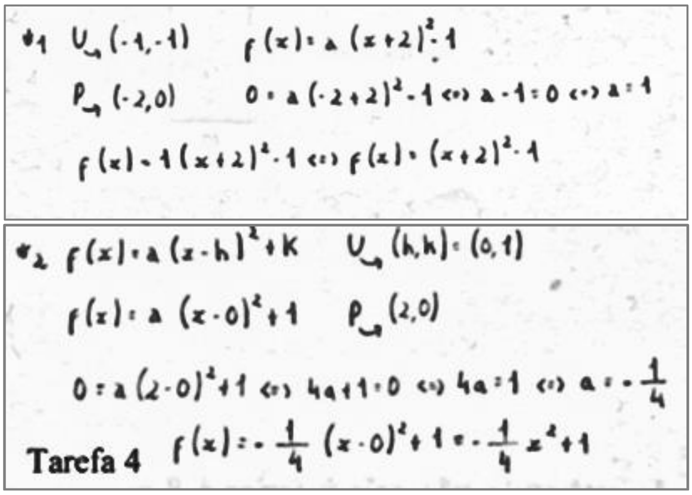


Figura 32. Exemplo de conexões entre representações do aluno A21.

O aluno justificou a sua resolução através das seguintes conexões:



\#1 $V \to (-1,-1)$ $f(x)=a(x+2)^2-1$

$P \to (-2,0)$ $0=a(-2+2)^2-1 \Leftrightarrow a-1=0 \Leftrightarrow a=1$

$f(x)=1(x+2)^2-1 \Leftrightarrow f(x)=(x+2)^2-1$

\#2 $f(x)=a(x-h)^2+k$ $V(h,k)=(0,1)$

$f(x)=a(x-0)^2+1$ $P(2,0)$

$0=a(2-0)^2+1 \Leftrightarrow 4a+1=0 \Leftrightarrow 4a=1 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{4}$

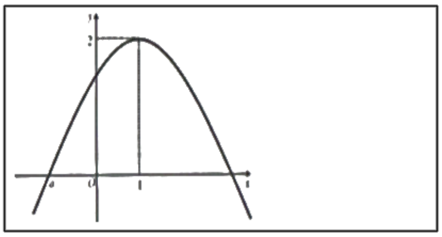
Tarefa 4 $f(x)=-\frac{1}{4}(x-0)^2+1=-\frac{1}{4}x^2+1$

Figura 33. Justificação da resposta do aluno A21

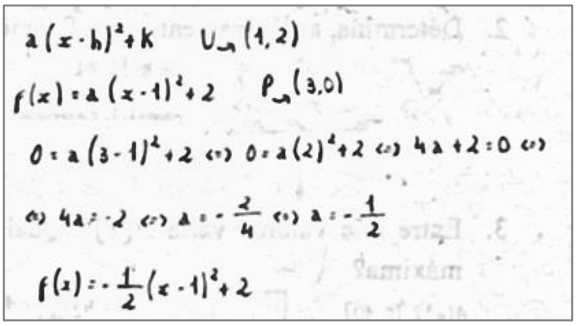
A questão apresenta dois tipos de representações, a representação analítica e a gráfica. Solicita uma expressão que defina analiticamente a representação gráfica dada e, uma representação gráfica que a define analiticamente. Para a resolução da passagem da expressão gráfica para a analítica, os alunos recorrem à estratégia de usar a família de funções. Nas duas representações dadas é possível identificar graficamente os zeros da função e as coordenadas do vértice da parábola. Os alunos identificam-nos e aplicam as expressões que definem as famílias de funções. Na resolução da passagem da expressão analítica para a gráfica, a maioria dos alunos recorre à calculadora gráfica. Recorrendo à expressão da família da função polinomial, $f(x)=a(x-h)^2+k$ e estabelecendo conexões entre os parâmetros a, h e k, foi possível chegarem à expressão que define analiticamente a representação gráfica.

Os alunos utilizam expressões das famílias de funções através da informação contida no gráfico para escrever a sua expressão analítica, como foi o caso da seguinte questão:

2. O gráfico da função h é uma parábola, que se encontra parcialmente representada na figura. Considerando que $a=-1$, indica a expressão analítica de h?



Novamente os alunos recorrem a estratégia de usar a famílias de funções. Identificam os zeros da função e as coordenadas do vértice.



$a(x-h)^2+k \quad V_{\to}(1,2)$

$f(x)=a(x-1)^2+2 \quad P_{\to}(3,0)$

$0=a(3-1)^2+2 \Leftrightarrow 0=a(2)^2+2 \Leftrightarrow 4a+2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a=-2 \Leftrightarrow a=-\frac{2}{4} \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$

$f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$

Figura 34. Exemplo de conexões entre representações do aluno A21.

> Aluno. $x = 1$ é o eixo de simetria da função, e os pontos a e b têm ambos a mesma ordenada (zero). Assim os pontos encontram-se à mesma distância do eixo de simetria $x = 1$, logo se do eixo até ao ponto a são unidades então o ponto b está a duas unidades do outro também. Portanto a abcissa de b é 3.

Na resolução desta questão os alunos atribuem valores aos parâmetros a, h e k, da equação $f(x) = a(x - h) + k^2$, aos valores das coordenadas do vértice. Determinam o valor do parâmetro a através da utilização de um ponto possível do gráfico. Mostra, portanto, que não têm dificuldade em usarem a informação acessível no gráfico.

3.3. Avaliação da estratégia delineada

No final de algumas aulas que lecionei, os alunos puderam exprimir a sua opinião sobre o tipo de representações utilizadas na resolução de tarefas, indicando quais as finalidades da sua utilização e qual o contributo na aprendizagem de tópicos de funções (Tabela 7).

No final da minha intervenção obtive 92 respostas dos alunos.

Tabela 7. Percentagem do tipo de representações usadas pelos alunos na resolução de tarefas.

Tipo de resposta	% de respostas
Uma representação	7.6
Duas representações	29.3
Mais que duas representações	63.1

A maioria dos alunos refere que utilizou diferentes representações na resolução sobre tópicos de funções (63.1%). Das 92 respostas recolhidas no fim das aulas, uma pequena parte dos alunos (7.6%) utiliza na resolução de tarefas de funções apenas uma representação (Tabela 7).

Das representações usadas pelos alunos nas tarefas destaca-se a representação analítica (37%) e a gráfica (35.5%), como mostra a tabela seguinte:

Tabela 8. Representações usadas na resolução de tarefas

Tipo de resposta	% de respostas
Representação analítica	37.0
Representação gráfica	35.5
Representação tabular	27.5

Alguns alunos utilizavam mais a gráfica por gostarem de trabalhar com a calculadora o que os ajudava a determinar as características de uma função como, por exemplo as coordenadas do vértice da parábola e os zeros da função.

Para os alunos, as representações serviram para elevar a compreensão dos tópicos estudados (39.1%) e resolver as tarefas propostas (31.5%), sendo essenciais para a interpretação dos resultados pretendidos (16.3%).

Tabela 9. Tipo de respostas dos alunos sobre a finalidade das representações usadas.

Tipo de resposta	% de resposta
Resolver	31.5
Interpretar	16.3
Compreender	39.1
Definir	3.3
Não responde	9.8

Para os alunos, o papel das representações na sua aprendizagem relaciona-se com a consolidação das aprendizagens (59.8%), e com a conexão (15.2%) entre representação e conceitos (tabela 10).

Tabela 10. Tipo de respostas dos alunos sobre o papel das representações na aprendizagem.

Tipo de resposta	% de respostas
Raciocínio	11.9
Consolidar	59.8
Melhor visualização	8.7
Estabelecer conexões	15.2
Não responde	4.4

Os alunos indiciam, durante as aulas, reconhecer o contributo das múltiplas representações na aprendizagem de tópicos de funções. Para conhecer melhor as suas opiniões sobre este contributo, após a minha intervenção pedagógica os alunos responderam a um questionário estruturado com afirmações relativas às seguintes dimensões: (i) importância das conexões entre representações; (ii) forma de utilização das diferentes representações; (iii) dificuldades nas conexões entre representações; e (iv) estabelecer conexões entre representações. Relativamente à importância das conexões entre as múltiplas representações, a maioria dos alunos destaca o seu papel na aprendizagem. A importância das conexões entre representações é referida na tabela seguinte:

Quadro 1. Importância das conexões entre representações.

	D/DT	I	C/CT
Consolidar	-	6.7%	93.3%
Estabelecer conceitos	6.7%	13.3%	80.0%
Compreender	-	53.3%	46.7%
Resolver	-	53.3%	46.7%

Quase a totalidade dos alunos (93.3%) salienta que as conexões entre representações contribuíram para a consolidação dos saberes, facilitando a aprendizagem. Por outro lado, os alunos afirmam que estabelecer conceitos (80.0%) nem sempre é fácil, pois, por vezes, não conseguiram estabelecer ligação entre os parâmetros da função analítica com as características presentes na representação gráfica.

Nas suas atividades, a maioria dos alunos recorreu a mais do que um tipo de representação, o que é corroborado pelo grau de discordância que manifestam sobre a utilização de apenas uma das representações nas aulas que lecionei (Quadro 2).

Quadro 2. Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativo à forma de utilização das diferentes representações.

	D/DT	I	C/CT
Apenas analítica	86.7%	13.3%	—
Apenas tabular	80.0%	20.0%	—
Apenas gráfica	80.0%	20.0%	—
Iniciei com a analítica e de seguida com a gráfica	—	46.7%	53.3%
Iniciei com a tabular e de seguida com a analítica	26.7%	60.0%	13.3%
Iniciei com a tabular e de seguida com a gráfica	26.7%	53.3%	20.0%

Recorri a tabular, gráfica e analítica	—	13.3%	86.7%

Uma parte significativa dos alunos recorre a três representações a analítica, tabular e gráfica (86.7%), para os alunos não é importante qual a representação que iniciam na resolução das tarefas propostas desde que consigam chegar ao resultado final.

Relativamente à forma como integraram as representações nas suas atividades, a maioria dos alunos (53.3%) indica que iniciou com a representação analítica e de seguida recorreu à representação gráfica. As conexões que estabeleceram entre as múltiplas representações são preponderantes para uma melhor compreensão das atividades e para relacionar os dados existentes com o resultado final pretendido. Porém, a conexão entre a representação tabular e a representação analítica ou gráfica indicia que foi a que teve menor expressão, o que parece significar a prevalência das respostas dos alunos na opção indiferente.

Quadro 3. Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativo às dificuldades na conexão entre as múltiplas representações.

	D/DT	I	C/CT
Na passagem da tabular para outra representação	46.7%	26.6%	26.7%
Na passagem da gráfica para outra representação	66.7%	20.0%	13.3%
Na passagem da analítica para outra representação	66.7%	20.0%	13.3%

Quando às dificuldades sentidas na utilização das representações de tópicos de funções, a maioria dos alunos (66.7%) não sentiu dificuldade em estabelecer conexões entre a representação gráfica e outra representação, nem na passagem da analítica para outro tipo de representação. O mesmo já não se verificou na passagem da representação tabular para outro tipo de representação (Quadro 3).

Segundo Dreyfus (1991) estabelecer conexões entre representações e as suas propriedades é importante para o desenvolvimento do raciocínio tornando mais ágil a utilização das representações. O quadro seguinte refere a importância de estabelecer conexões.

Quadro 4. Percentagem de alunos que referem a importância de estabelecer conexões.

	D/DT	I	C/CT
Representação gráfica e as propriedades de funções	—	6.7%	93.3%
Representação analítica e as propriedades de funções	6.7%	40.0%	53.3%

Representação tabular e as propriedades de funções	—	40.0%	60.0%
Interpretação e passagem de uma representação para outra	—	26.7%	73.3%

Para a maior parte dos alunos, as conexões entre as diferentes representações são um fator importante para a compreensão de tópicos de funções, com destaque para as representações gráfica (93.3%), tabular (60%) e analítica (53.3%) na identificação de propriedades das funções.

Vantagens e desvantagens da utilização de diferentes representações. O questionário era constituído por questões abertas. Neste tipo de questões os alunos foram instigados a enunciar as vantagens e as desvantagens da utilização de cada uma das representações que foram utilizadas no estudo de tópicos de funções.

Quadro 5. Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativo às vantagens da representação gráfica na aprendizagem de funções.

Vantagens	**% de resposta**
Compreender	44.0
Melhor estudo da função	28.0
Visualizar	8.0
Interpretar	16.0
Mais completa	4.0

No que concerne às vantagens da utilização da *representação gráfica* na aprendizagem de tópicos de funções, os alunos salientaram a compreensão dos tópicos estudados (44.0%), o estudo mais completo das características de uma função (28.0%) e a interpretação da informação veiculada pelos gráficos (16.0%).

Como qualquer representação, também a representação gráfica apresenta desvantagens na sua utilização (Quadro 6),

Quadro 6. Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativo as desvantagens da representação gráfica na aprendizagem de funções.

Desvantagens	**% de respostas**
Mais difícil que a representação analítica	6.7
Necessita da representação analítica	6.7
Passar da representação analítica para a gráfica	53.3

Interpretação	13.3
Precisão na representação	13.3
Não responde	6.7

Quanto às desvantagens da utilização da *representação gráfica*, os alunos destacam a passagem da representação analítica, caso ela exista, para a representação gráfica (53.3%), a dificuldade em interpretar (13.3%) e o rigor na elaboração de gráficos (13.3%). A necessidade de mudar de uma representação para outra torna-se evidente sempre que esta seja mais eficiente para a interpretação que se pretende obter. O processo de "saltar" entre representações está intimamente relacionado com as aprendizagens (Dreyfus, 1991).

A representação analítica, mais utilizada pelos alunos, apresenta inúmeras vantagens na sua utilização. Kaput (1999) refere que o manuseamento de símbolos algébricos permite desenvolver a capacidade de trabalhar representações. Apresentam-se as vantagens no seguinte quadro:

Quadro 7. Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativo às vantagens das representações analítica na aprendizagem de funções.

Vantagens	**% de reposta**
Sintetizar	53.3
Interpretar	33.3
Explicitar	6.7
Não responde	6.7

A *representação analítica* é de todas as representações a mais usada pelos alunos. Para eles, este tipo de representação é a que sintetiza melhor a informação (53.3%), é de fácil interpretação (33.3%) e é a mais precisa (6.7%).

Como qualquer representação, a analítica também apresenta desvantagens na sua utilização (Quadro 8).

Quadro 8. Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativo às desvantagens das representações analítica na aprendizagem de funções.

Desvantagens	**% de reposta**
Interpretar	62.4
Contém menos informação	12.5
Demora na obtenção dos resultados	12.6
Não responde	12.5

A *representação analítica* surge conciliada à resolução de problemas, à identificação do domínio de uma função e à melhor forma de sintetizar a informação. Atendendo à sua natureza de abstração, muitos alunos têm dificuldades em trabalhar com expressões com letras, o que se traduz na sua dificuldade de as interpretar (62.4%), atividade que para alguns alunos (12.5%) se deve por apresentarem menos informação.

As opiniões dos alunos sobre as desvantagens da representação analítica indiciam deverem-se ao nível cognitivo que exigem, o que reflete a perceção de pouca atratividade que os alunos têm sobre esta representação e a dificuldade de interpretação.

A representação tabular, apresenta algumas vantagens na sua utilização, tais como refere a quadro seguinte:

Quadro 9. Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativo às vantagens da representações tabular na aprendizagem de funções.

Vantagens	**% de resposta**
Visualizar	20.8
Organizar	33.3
Sintetizar/interpretar	16.7
Rápida passagem para a representação gráfica	12.5
Estabelecer correspondências	4.2
Não responde	12.5

A *representação tabular*, pouco presenta na resolução dos alunos do 10.º ano de escolaridade, evidencia algumas vantagens na sua utilização, tais como a organização (33.3%), a ajuda na visualização (20.8%) dos dados, o que torna, por vezes, melhor a interpretação por parte dos alunos (16.7%).

Sendo mais fácil de organizar os dados, a interpretação mais clara e sucinta e a possibilidade de converter esta representação noutra, são as vantagens que os alunos encontram na utilização da representação tabular. Para Dreyfus (1991), esta representação pode fazer parte do conceito de imagem do aluno. As desvantagens apresentadas pelos alunos a esta representação são as seguintes:

Quadro 10. Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativo às desvantagens da representações tabular na aprendizagem de funções.

Desvantagens	**% de resposta**
Depender de outra representação	40.9
Não conter todas a informação	36.5

Confusa	4.5
Impossível obter a representação analítica	4.5
Requer tempo	4.5
Não responde	9.1

A *representação tabular* tem para os alunos algumas desvantagens quanto à sua utilização, tais como não conter toda a informação (36.5%) relativa a uma dada função, depender de outra representação (40.9%) para a sua construção. Esta distinção parece dever-se à perceção que os alunos têm sobre a construção de uma tabela a partir da informação que retiram de outra representação ou da elaboração de gráficos ou de modelos a partir dos dados presentes na tabela. A representação tabular é vista como sendo incompleta por ilustrar, muitas vezes, apenas uma parte do domínio da função.

Dreyfus (1991) refere que o processo de mudar de representação e estabelecer conexões entre representações envolve a relação entre os vários significados expressos nas diferentes representações.

Para os alunos as vantagens da utilização de *mais que uma representação* traduzem-se numa melhor compreensão dos conceitos (44.0%), levando a uma melhor interpretação da informação veiculada pelas diferentes representações, permitir um estudo mais completo das funções (40.0%) e favorecem a resolução das tarefas propostas (12.0%).

Quadro 11. Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativo às vantagens de utilizar mais que uma representação na aprendizagem de funções.

Vantagens	**% de resposta**
Compreender os conceitos	44.0
Resolver	12.0
Completa	40.0
Não responde	4.0

Segundo a perceção dos alunos, a utilização das múltiplas representações na aprendizagem de funções tem como vantagens as conexões que se podem estabelecer entre elas, o que traduz um estudo das funções mais completo, melhor compreensão da informação e interpretação da mesma.

Para Dreyfus (1991), o recurso a diferentes representações promove conexões entre significados, o que pode ter implicações na aprendizagem, mas a mudança de representação traz, por vezes, desvantagens. O quadro seguinte exemplifica as desvantagens de utilizar mais que uma representação.

Quadro 12. Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativo às desvantagens de utilizar mais que uma representação na aprendizagem de funções.

Desvantagens	**% de resposta**
Demora na resolução	22.2
Trabalhosa	33.3
Possibilidade de erro	11.1
Confusa	5.6
Não tem desvantagens	11.1
Não responde	16.6

As desvantagens salientadas pelos alunos na utilização de *mais que uma representação* relacionam-se com o trabalho (33.3%) e a morosidade (22.2%) na obtenção de resultados. Alguns alunos salientam que utilizar várias representações pode levar a erros de interpretação (11.1%). Por outro lado, referem que a utilização em simultâneo não é por si só uma desvantagem (11.1%).

A maioria dos alunos refere que diferentes representações contribuíram de forma significativa para a aprendizagem dos tópicos estudados no tema de funções, destacando que o seu uso possibilita a compreensão do comportamento e análise de funções. A representação mais usada pelos alunos na resolução de tarefas foi a representação gráfica, devido à sua fácil obtenção através da calculadora gráfica. As conexões estabelecidas entre as múltiplas representações foram essenciais para o desenvolvimento matemático dos alunos e para o desenvolvimento de destrezas para passar de uma representação para outra. Dreyfus (1991) salienta qua a evolução do pensamento matemático está intimamente relacionado com a utilização de mais que uma representação.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo apresentam-se as conclusões mais relevantes deste estudo, tendo em conta as questões de investigação e as referências teóricas apresentadas e, em seguida, apresentam-se limitações encontradas e recomendações para o ensino do tema funções através das múltiplas representações.

4.1. Conclusões

Nesta secção referem-se as conclusões obtidas que respondem às questões de investigação que orientaram a minha prática pedagógica, tendo como suporte os dados adquiridos e as referências teóricas consultadas.

4.1.1. Que representações recorrem os alunos nas suas atividades de aprendizagem do tema de funções do 10.º ano de escolaridade?

A análise da informação contida nas produções escritas dos alunos permite compreender qual as representações mais utilizadas na resolução das tarefas propostas. A maioria dos alunos recorre a mais que uma representação, usando-as, por vezes, em simultâneo de forma a complementarem-se. As representações que recorrem mais frequentemente são a representação gráfica e analítica. Entre estas duas representações, os alunos consideram que a representação gráfica é a mais intuitiva, o que indicia dever-se ao impacto visual da informação que veicula e a utilização da calculadora gráfica, que os ajudou a visualizar, a interpretar dados e a identificar a generalidade das propriedades das funções estudadas (Dreyfus,1991). Embora manifestem preferência pela representação gráfica, constata-se que a maior parte deles não apresenta rigor na transcrição da informação advinda da representação gráfica para a analítica. No trabalho que realizaram com a calculadora gráfica, os alunos revelaram que são capazes de definir a janela de visualização adequada para obterem o esboço gráfico das funções.

Na passagem da representação gráfica para a analítica os alunos recorrem à transformação das famílias de funções polinomiais. No entanto, quando confrontados com a conversão da representação gráfica a analítica nem sempre conseguem fazê-lo devido a não identificarem os parâmetros da família de funções polinomiais.

A maioria dos alunos trabalha com a representação analítica e gráfica, usam procedimentos analíticos na resolução de tarefas matemáticas e recorrem, também, a processos gráficos com a ajuda da calculadora. Na resolução das tarefas propostas, quando é considerada a representação analítica, usam processos algébricos ou processos gráficos com a ajuda da calculadora (Goldin, 1998). Recorrem, igualmente, a processos gráficos na transformação de funções quando os dados da tarefa são o gráfico.

De entre as representações matemáticas, constata-se que a presença da representação analítica e gráfica não é igual em todas as resoluções de tarefas, nem a sua utilização é feita de igual modo pelos alunos. Na resolução das tarefas propostas, alguns alunos utilizam principalmente representações analíticas e usam representações gráficas quando a natureza da tarefa proporciona. A natureza da tarefa tende a influenciar os processos que os alunos elegem para a resolução da atividade (Ponte, 2005).

Os alunos não recorrem à representação tabular, a que recorreram sobretudo para estudar o sinal e a monotonia de funções polinomiais. A representação tabular não é um recurso muito usado pelos alunos, embora seja de fácil organização (Monk, 2003). Este facto poderá dever-se à tendência de se explorar mais nas atividades da sala de aula as representação gráfica e a analítica de funções.

4.1.2. Que conexões estabelecem os alunos entre as diferentes representações na aprendizagem de funções?

A informação recolhida permite compreender as diferentes conexões estabelecidas pelos alunos entre representações. Os resultados evidenciam que os alunos estabelecem conexões entre processos, entre conceitos e entre representações (Goldin, 1998). Na passagem da representação analítica para a gráfica, as conexões estabelecidas relacionam-se com a utilização e identificação dos parâmetros da família de funções. A sua utilização, por parte dos alunos, tem como finalidade a construção do respetivo gráfico. No que concerne a passagem da representação gráfica para a analítica estabelecem conexões entre a informação contida no gráfico, como por exemplo determinar as coordenadas do vértice e definir a expressão analítica que ilustra a representação dada. As conexões estabelecidas entre a informação contida no gráfico e as propriedades da função contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico, o que traduz as atividades desenvolvidas pelos alunos em “descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem generalizações e também previsões" (Canavarro, Fonseca, Pimentel, Santos & Vale, 2006, p. 197).

Algumas representações têm mais significado que outras, visto que a utilização de diferentes formas de representar permite que os alunos compreendam que conexões se estabelece e qual a mais adequada a cada tipo de tarefa. Abranger várias representações na mesma resolução indiciou que ajuda os alunos a identificar conexões e a moverem-se de modo flexível entre diferentes representações. A capacidade de representar e identificar o mesmo conceito em diferentes representações e a estabelecer conexões, permite aos alunos criar importantes analogias, desenvolver e compreender as relações/conexões entre representações (Saraiva, 2010).

4.1.3 Que dificuldades manifestam os alunos na conexão entre as diferentes representações de funções?

Os alunos revelam maiores dificuldades de aprendizagem na álgebra, em compreender os diferentes significados atribuídos às múltiplas representações, não compreendendo por vezes qual o significado da simbologia numa dada representação e a sua conversão para outra (Ponte, 2005). O estabelecimento de significados nas representações de funções e o estabelecimento de conexões entre representações é de grande complexidade para os alunos. Teixeira e Saraiva (2009) consideram que algumas das dificuldades que os alunos enfrentam quando estudam conceitos do tema funções estão relacionadas com o uso de símbolos e consequente interpretação das conexões entre as múltiplas representações. Para Gray e Tall (1994), os alunos têm dificuldades em aprenderem novos conceitos, na compreensão do conceito de função que por vezes está associado à forma como é simbolizada. Neste estudo, uma das dificuldades manifestadas pelos alunos nas conexões entre representações relaciona-se com as manipulações algébricas e na capacidade de usar fórmulas para determinar valores, o que vai ao encontro do que é defendido por Sfard (1991).

No que concerne ao estudo de propriedades de funções em diversas representações, os alunos têm algumas dificuldades em estabelecer conexões entre a representação gráfica de uma função e a sua representação analítica. Alguns alunos evidenciam dificuldades na conversão da representação gráfica de uma função quadrática numa expressão analítica, uma vez que não estabelecem conexões entre os parâmetros da família de funções de uma expressão analítica e a informação relevante contida no gráfico. As dificuldades na manipulação dos parâmetros da família de funções são expressas por Kieran (2006) e por Rojano (2002). Foram diagnosticadas dificuldades, nos alunos, em relacionar diferentes representações de funções, nomeadamente ao que se refere ao papel dos parâmetros de família de funções polinomiais, incluindo famílias de funções conhecidas, como é o caso da função quadrática (Even, 1998).

A passagem de informação de uma representação para outra, também é uma das dificuldades manifestada pelos alunos. Para Duval (2002), esta dificuldade é consequência do ensino-aprendizagem que deve dar ênfase ao estudo das conexões entre representações, permitindo a simplificação dos conceitos levando os alunos à compreensão dos conceitos.

4.1.4 Que perceções têm os alunos sobre a conexão entre as diferentes representações na aprendizagem de funções?

Durante a intervenção pedagógica, os alunos, no final de cada aula, apresentaram as suas apreciações sobre as estratégias por mim delineadas. Dessas apreciações surge a importância que os alunos dão às múltiplas representações e às conexões que estabelecem entre elas. Na resolução de tarefas a maioria utiliza mais que duas representações, sendo a representação analítica e a gráfica as mais usadas.

Após a intervenção pedagógica, independentemente do desempenho à disciplina de Matemática, os alunos mencionaram que a conexão entre representações contribui para o desenvolvimento do raciocínio matemático, a compreensão (39.1%) de conceitos, a resolução de tarefas e a interpretação dos dados. Os alunos salientam o contributo das conexões na consolidação dos conhecimentos aprendidos (Kaput, 1999), uma vez que as tarefas desenvolvidas durante apelavam a passagem de uma representação para outra, por exemplo, recorrendo à famílias de funções polinomiais para estabelecerem conexões (Kieran, 2006). Na resolução de tarefas, com recurso a mais que uma representação, os alunos iniciam a sua resolução recorrendo à representação analítica passando em seguida para a gráfica.

A representação tabular foi a menos utilizada pelos alunos na resolução das tarefas propostas, salientando como desvantagens da sua utilização a interpretação dos dados presentes na tabela, o facto de não apresentar a informação necessária para estudar o comportamento de uma função. A representação analítica é referida pelos alunos como sendo importante para a interpretação dos parâmetros das famílias de funções. A representação gráfica foi referenciada como a mais utilizada para compreender e estudar o comportamento de uma função, devido a ser mais acessível interpretar os dados obtidos através do gráfico.

4.2. Limitações e Recomendações

Assinala-se com este estudo que os alunos detêm conhecimentos sobre funções, conhecem algumas das representações, revelando um conhecimento compartimentado não conseguindo, por vezes, estabelecer conexões entre as múltiplas representações. Alguns alunos não possuem o conceito de função completamente desenvolvido, pois deveriam ter mostrado, na resolução das tarefas propostas, flexibilidade na passagem de um sistema de representação para outro. É fundamental que o ensino seja pensado de modo a proporcionar aos alunos uma variedade de situações e tarefas, que incluam o recurso a diversas estratégias, como o uso da calculadora gráfica de forma a desenvolver conexões entre representações.

A passagem de uma representação para outra é essencial para que os alunos tenham conhecimento da existência de várias representações que podem ser utilizadas na resolução de tarefas propostas. Aos alunos compete escolher qual a representação mais eficaz na resolução das atividades e, caso seja necessário, devem ter a flexibilidade de estabelecer conexões entre representações.

Um estudo desta natureza apresenta algumas limitações que se prende com as circunstâncias em que foi desenvolvido. Por um lado, a intervenção pedagógica que decorreu próximo do final do ano letivo, reduzindo a possibilidade de poder entrevistar alunos de diferentes níveis de desenvolvimento, que me possibilitasse conhecer com mais profundidade as perceções dos alunos sobre a estratégia desenvolvida e o impacto das diferentes representações na aprendizagem dos tópicos estudados. Por outro lado, o facto de a turma não estar acostumada a estabelecer conexões entre representações fez com que a participação dos alunos nas discussões geradas em sala de aula não fosse tão pertinente como se pretendia.

Como recomendações para estudos futuros surge a utilização de situações do quotidiano que contemplem as diferentes representações de conceitos de funções, como por exemplo através de notícias dos media. Como alguns dos tópicos do tema de funções são trabalhados noutras disciplinas, como por exemplo Físico-Química, importa averiguar o contributo de um estudo interdisciplinar no desenvolvimento da capacidade dos alunos de estabelecerem conexões entre as diferentes representações.

Bibliografia

Abrantes, A., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa: Ministério da Educação departamento de Educação Básica.

Afonso, P. (2008). *O mundo mágico das conexões matemáticas.* Castelo Branco: Instituto Politénico de Castelo Branco.

Ainsworth, S. (2006). A conceptual framewok for learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*, 183-198.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

Artigue, M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view: Cognitive difficulties and teaching practices. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 109-132). Washington, DC: MAA.

Bodgan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto: Porto Editora.

Brown, A. S., & Mehilos, M. (2010). Using tables to bridge arithmetic and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15(9)*, 532-538.

Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da matemática nos primeiros anos. *Quadrante 16*, 81-118.

Carreira, S. (2010). Conexões matemáticas: ligar o que foi desligado. *Educação Matemática, 100*, 13-18.

Chazan, D., & Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: research on algebra learning and directions of curricular change. In J. Kilpatrick, W. Martin, & D. Schifter, *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 123-135). Reston VA: NCTM.

Costa, B. R. (2010). *Novo Espaço, 7.º ano.* Porto: Porto Editora.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latioamericana de Investigacion en Matemática Educativa, 9 (Extra 1)*, 177-196.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados: a matemática no inicio do superior.* Lisboa: FCTUNL.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1(2), 1-16.

Duval, R. (2006a). Quelle Sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathé matiques? *Revista Latinoamericana de Investigacion em Matemática Educativa*, 45-85.

Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Eisner, E. W. (1997). Cognition and representation: A way to pursue the American dream? *Phi Delta Kappan, 78(5),* 348-353.

Elia, I. (2007). Relations between secondary pupils conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education,5*, 533-556.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior, 17(1),* 105-121.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. C. (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston : VA: NCTM.

Gagatsis, A., Mousoulides, N., & Elia, I. (2006). Are registers of representations and problem solving processes thinking? *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educatica, 9 (Extra 1),* 197-224.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematics Behavior, 17 (2),* 137-165.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25(2),* 116-140.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representantions linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior, 17,* 123-137.

Kaldrimidou, M., & Ikonomou, A. (1998). Epistemological and metacognitive factors involved in the learning of mathematics: The case of graphic representations of functions. In H. Stenbring, M. B. Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 217-278). Reston:VA: NCTM.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics Classroms that Promote Understanding* (pp. 133-155). Mahwah: Erlbaum.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2006). Reserch on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources os meaning. In G. A., & B. P. (Ed.s), *Handbook of research on the psycology of mathematics education* (pp. 11-50). Rotterdan: Sense.

Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 255–286.

Ministério da Educação (2001). *Matemática A - 10.º ano. Cursos Gerais de Ciências Naturais, Ciências e Tecnologia, Ciências Sócio-Económicas.* Lisboa: DES.

Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: DES.

Monk, S. (2003). Representation in school mathematics: Learning to graph and graphing to learn. In J. Kilpatrick, W. Martin, & D. Schifter (Eds.), *The research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 250-262). Reston: VA: NCTM.

NCTM. (2007). *Principios e Normas para a Matemática* . Lisboa: APM.

Pais, S., & Saraiva, M. (2011). O significado das representações da função afim para alunos do 8.º ano. *Quadrante, 20(2)*, 17-55.

Piaget, J. (1977). *Recherches sur l’abstraction réfléchissante.* Paris: P.u.F.

Ponte, J. P. (1984). *Functional reasoning and the interpretation of cartesian grafhs.* Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI. (Org.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de trabalho de Investigação (GTI), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa : APM.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2009). O novo programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança. *Educação e Matemática, 105*, 2-6.

Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: Student´s access to significant mathematical ideas. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 143-163). Mahwah, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Saraiva, M., & Teixeira, A. M. (2009). *Secondary school studants understanding of function via exploratory and investigative tasks.* Itália: Palermo : ISSN.

Serrazina, A. A., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa: Ministerio da Educação, Departamento da Educação Básica.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Socas, M., Machado, M., Palarea, M., & Hernandez, J. (1996). *Iniciacion al àlgebra.* Madrid: Síntesis.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Funções-10.º ano de escolaridade.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in Middle School, 13(8)*, 438-353.

Viseu, F. (2009). *A formação do professor de matemática, apoiada por um dispositivo de interação virtual no estágio pedagógico.* Braga: Universidade do Minho.

Viseu, F., & Morgado, J. C. (2011). Manuais escolares e desprofissionalização docente: um estudo de caso com professores de Matemática. In *Atas do XI Congreso Internacional Galego-Português de Psicopedagogía* (pp. 991-1002). Coruña: Universidade da Coruña.

Zazkin, R., & Hazzan, O. (1998). Interviewing in mathematics education research: Choosing the question. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(4), 429-439.

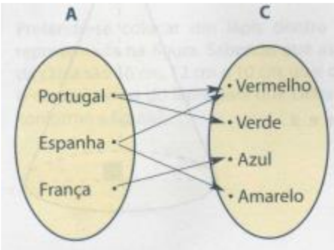
ANEXOS

Anexo 1

Teste de Diagnóstico

1. Considere as correspondências seguintes:

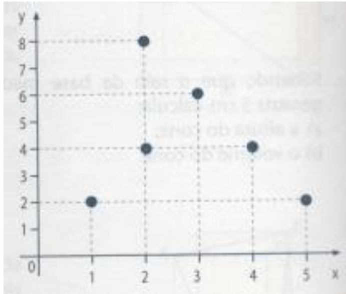
I



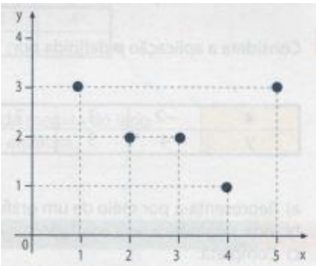
II

x	y
0	0
0	4
2	6
2	9
3	1
4	8

III



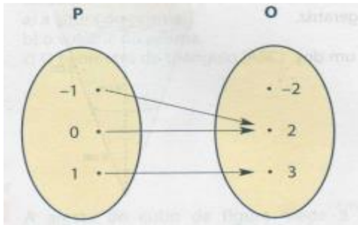
iv



v

x	y
0	3
1	4
2	6
3	9
4	13
5	18

vi



Das representações anteriores indique as que são função e justifique a sua escolha.

2. Define por palavras suas o que é uma função?
3. Considere a função representada pelo seguinte esquema:

$x \longrightarrow$ Multiplica por três $\longrightarrow$ Adiciona um $\longrightarrow y$

Represente esta função recorrendo a uma das representações que conhece.

4. Que tipo de representações de funções conhece?
5. Observe o exemplo:

$$1 \longrightarrow 3$$
$$2 \longrightarrow 4$$
$$3 \longrightarrow 5$$
$$4 \longrightarrow 6$$
$$....$$
$$x \longrightarrow \cdots.$$

Represente os dados apresentados recorrendo a uma das representações de funções. Justifique a sua opção.

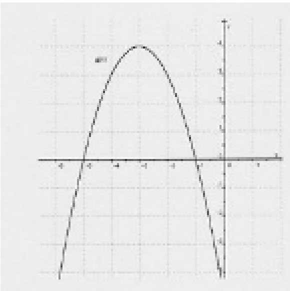
Anexo 2

Questão de aula

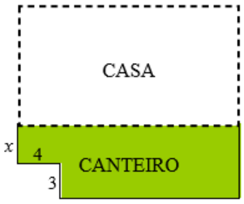
1. Represente graficamente a função real de variável real definida por:

$f(x) = -\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{12}{5}$

2. Considere a função real de variável real abaixo representada. Defina-a por uma expressão algébrica.



3. Para vedar um canteiro de relva encostado a uma casa, como mostra a figura, são necessários 40 metros de rede.



3.1. Mostra que a área A, em m^2, do canteiro de relva é dada por:

$A(x) = -2x^2 + 28x + 90$

Sendo x a medida, de um lado do canteiro.

3.2. Determina a valor de x para o qual é máxima a área do canteiro e determina essa área máxima. Justifica a tua resposta.

Anexo 3

Questionário

Caro(a) aluno(a),

No âmbito da unidade curricular Estágio Profissional, do 2.º ano do Mestrado em Ensino da Matemática, pretendo averiguar, através deste questionário, as perceções que os alunos do 10.º ano de escolaridade têm sobre a utilização das diferentes representações na aprendizagem de conceitos de funções. A informação recolhida será usada somente para fins académicos, comprometendo-me a assegurar o anonimato da mesma.

I. Dados pessoais

1. Idade: _____
2. Sexo: ☐ Masculino ☐ Feminino
3. Que classificação final obtiveste na disciplina de Matemática no final do 1.º período e do 2.º período deste ano letivo? 1.º período _______ 2.º período ________

II. Qual o contributo das diferentes representações na aprendizagem do tema de funções?

Nas afirmações seguintes, assinala com uma cruz **(x)** o quadrado que mais se adequa ao teu grau de concordância tendo em consideração a seguinte escala:
DT: Discordo Totalmente; **D**: Discordo; **I**: Indiferente; **C**: Concordo; **CT**: Concordo Totalmente.

Afirmações	**DT**	**D**	**I**	**C**	**CT**
1. Funções foi um tema da matemática que gostei de estudar.					
2. No tema de funções tive menos dificuldades do que noutros temas de matemática do 10.º ano.					
3. No tema de funções foi a professora que estabeleceu as definições e as propriedades estudadas.					
4. As tarefas propostas sobre o tema de funções despertaram o meu interesse pela matemática.					
5. O tema de funções é importante para a minha formação.					
6. No tema de funções os alunos estabeleceram as definições e as propriedades estudadas.					
7. O tema de funções é importante para a compreensão de situações da realidade.					
8. O tema de funções é importante para a resolução de problemas da realidade.					
9. Trabalhar com diferentes representações ajudou-me a estabelecer as definições e as propriedades que estudei no tema de funções.					
10. Trabalhar com diferentes representações ajudou-me a compreender as definições e as propriedades que estudei no tema de funções.					
11. Na resolução de tarefas sobre funções utilizei apenas a representação analítica.					
12. Na resolução de tarefas sobre funções utilizei apenas a representação tabular.					
13. Na resolução de tarefas sobre funções utilizei apenas a representação gráfica.					
14. Na resolução de tarefas sobre funções iniciei com a representação analítica e de seguida recorri à representação gráfica.					
15. Na resolução de tarefas sobre funções iniciei com a representação					

tabular e de seguida recorri à representação analítica.					
16. Na resolução de tarefas sobre funções iniciei com a representação tabular e de seguida recorri à representação gráfica.					
17. Na resolução de tarefas sobre funções recorri às representações analítica, tabelar e gráfica.					
18. A representação gráfica foi essencial no estudo de uma função (zeros, sinal, monotonia, extremos, contradomínio, injetividade, continuidade…).					
19. A representação analítica foi essencial no estudo de uma função (zeros, sinal, monotonia, extremos, contradomínio, injetividade, continuidade…).					
20. A representação tabelar foi essencial no estudo de uma função (zeros, sinal, monotonia, extremos, contradomínio, injetividade, continuidade…).					
21. Senti dificuldades na utilização na passagem da representação tabular para outra representação					
22. Senti dificuldades na utilização na passagem da representação gráfica para outra representação.					
23. Senti dificuldades na utilização na passagem da representação analítica para outra representação.					
24. A interpretação simultânea da informação obtida através das diferentes representações ajudou na compreensão do conceito sobre função.					

III. Indique **três vantagens e três desvantagens** da **representação gráfica** na aprendizagem do tema funções.

três vantagens…	**três desvantagens…**

IV. Indique **três desvantagens e três desvantagens** da **representação analítica** na aprendizagem do tema funções.

três vantagens…	**três desvantagens…**

V. Indique **três vantagens e três desvantagens** da **representação tabular** na aprendizagem do tema de funções.

três vantagens…	**três desvantagens…**

VI. Indique **três vantagens e três desvantagens** de utilizar **mais que uma representação** na aprendizagem do tema de funções.

três vantagens…	**três desvantagens…**

VII. De que forma as diferentes representações contribuíram para a tua aprendizagem? Qual a representação que mais recorreste?

____

____

Anexo 4

Pedido de autorização ao Conselho Executivo

Exma. Sra. Presidente do Conselho Executivo
da Escola Secundária xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Eu, Paula Cristina Gonçalves Pinheiro Póvoa, Profª estagiária de matemática, pretendia desenvolver com os alunos do 10.º ano, turma J, nas aulas de Matemática, uma investigação para analisar o contributo da conexão entre as diferentes representações no ensino e na aprendizagem do tema de funções do 10.º ano. Neste sentido, solicito autorização de V. Exa. para entrevistar alguns alunos desta turma (gravando o som da entrevista) e recolher alguns dados de outros alunos da turma, no âmbito da resolução de tarefas matemáticas, de modo a poder perceber a forma como eles viveram as aulas e o modo como pensam e aprendem sobre as funções quadráticas, nas suas diferentes representações. Informo que esta investigação não interfere no normal funcionamento das atividades letivas e os dados recolhidos não servirão para avaliar os alunos. Informo também que vai ser pedida autorização dos encarregados de educação para a recolha dos dados e posteriormente para a realização das entrevistas. Note-se que, para divulgar esta experiência e, assim, contribuir para uma melhoria do ensino da Matemática é fundamental analisar a forma como os alunos pensam e aprendem.

Com os melhores cumprimentos.

________________, 03 de Abril de 2013

____

(Paula Póvoa, a professora estagiária de Matemática)

Anexo 5

Pedido de autorização aos encarregados de educação

Exmo. Encarregado de Educação

do(a) aluno(a):___________________________________, nº __ do 10.º ano, turma: ___

Vai ser desenvolvido com os alunos desta turma, nas aulas de Matemática, uma investigação para analisar o contributo da conexão entre as diferentes representações no ensino e na aprendizagem do tema de funções do 10.º ano,

Para tal, solicito a sua autorização para recolher alguns dados do seu educando, no âmbito da resolução de tarefas matemáticas, que permitem perceber a forma como ele viveu as aulas e o modo como pensa e aprende sobre as funções quadráticas, nas suas diferentes representações. Informa-se que os dados recolhidos para a investigação não servirão para avaliar o seu educando, mas sim para tentar compreender a perceção que tive das aulas lecionadas e será preservado o anonimato do aluno.

Note-se que analisar o que os alunos têm a dizer sobre este tipo de aulas é fundamental para divulgar esta experiência e, assim, contribuir para uma melhoria do ensino da Matemática.

Com os melhores cumprimentos,

______________, 03 de Abril de 2013

____

(Paula Póvoa, a professora estagiária de Matemática)

.---

Declaro que autorizo a recolha de dados, referente às tarefas realizadas pelo meu educando ____, nas aulas de Matemática, com a professora Paula Póvoa, no âmbito de uma investigação para analisar o contributo da conexão entre as diferentes representações no ensino e na aprendizagem do tema de funções do 10.º ano.

___ / ___ / 2013

____

(Encarregado de Educação)

Anexo 6

Questionário colocado no final das aulas

Nome:___________________________________n.º__________Turma:________

1. Na estratégia de resolução de tarefas da aula de hoje usastes:

Uma representação____ Duas representações____. Mais que duas representações____

2. Que tipo de repressentação(ões) usastes e porquê?

3. De que forma a(s) diferentes representações te ajudaram na tua a aprendizagem?

4. Que dificuldades sentistes nesta aula.