Universidade do Minho
Instituto de Educação

Ricardo José Amaral Marques

As tarefas de modelação matemática no ensino e na aprendizagem das funções exponencial e logarítmica: um estudo com alunos do 12º ano de escolaridade

outubro de 2013

Ricardo José Amaral Marques **As tarefas de modelação matemática no ensino e na aprendizagem das funções exponencial e logarítmica: um estudo com alunos do 12º ano de escolaridade**

UMinho|2013

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Ricardo José Amaral Marques

As tarefas de modelação matemática no ensino e na aprendizagem das funções exponencial e logarítmica: um estudo com alunos do 12º ano de escolaridade

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho realizado sob orientação do
Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

outubro de 2013

DECLARAÇÃO

Nome: Ricardo José Amaral Marques

Endereço eletrónico: rm24788@sapo.pt

Telemóvel: 966461660

Número do Bilhete de Identidade: 10723809

Título do Relatório:

As tarefas de modelação matemática no ensino e na aprendizagem das funções exponencial e logarítmica: um estudo com alunos do 12º ano de escolaridade.

Supervisor:

Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

Ano de conclusão: 2013

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Universidade do Minho, ___ / ___ / ______

Assinatura: ____

DEDICATÓRIA

Aos meus filhos João Pedro e José Miguel, pela minha ausência nos períodos de maior trabalho e à minha esposa Diana, pelo reforço na atitude necessária nos momentos críticos.

AGRADECIMENTOS

De um modo geral, agradeço a todos os professores, colegas e amigos, que ajudaram direta ou indiretamente a realizar este percurso, de forma consistente e enriquecedora para a prática docente.

Em particular, agradeço:

Ao professor Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu, que me orientou neste trabalho, pelas sugestões dadas, pelas perspicácia e consistência na colaboração, que me permitiu manter uma orientação bem definida ao longo de toda a intervenção pedagógica.

À professora Mestre Maria do Carmo Cunha, pela disponibilidade em ajudar sempre que a solicitei e pela partilha da ampla experiência na prática docente.

À minha colega do núcleo de estágio, Ana Cecília Gonçalves pelo apoio ao longo da intervenção na preparação das aulas.

Aos alunos da turma onde realizei a intervenção pedagógica, pela recetividade que demonstraram ao longo das aulas.

Aos professores e funcionários da escola onde realizei o estágio pela facilidade com que me possibilitaram a integração na comunidade escolar.

À minha família, em particular à minha sogra Aurora, pelo imprescindível apoio à minha esposa e aos meus filhos, e à minha mãe Valentina, pelos momentos de apoio e incentivo.

AS TAREFAS DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 12º ANO DE ESCOLARIDADE

Ricardo José Amaral Marques

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino secundário

Universidade do Minho, 2013

RESUMO

Este trabalho consistiu em analisar o contributo das tarefas de modelação matemática na aprendizagem de alunos do 12.º ano de escolaridade, nos temas das funções exponencial e logarítmica. Orientei a minha prática pedagógica de modo a responder às seguintes questões: (i) Que atividades desenvolvem os alunos com tarefas de modelação no estudo das funções exponencial e logarítmica? (ii) Que dificuldades revelam os alunos nas atividades de modelação matemática no estudo das funções exponencial e logarítmica?; (iii) Que perspetivas têm os alunos sobre as tarefas de modelação na aprendizagem das funções exponencial e logarítmica?

Para dar resposta a estas questões recorri aos seguintes métodos de recolha de dados: produções dos alunos; questionários; entrevista; observações e análise documental.

A análise de dados permitiu concluir que no que se refere às atividades dos alunos nas tarefas de modelação em grupo, foi visível que apesar de estarem a trabalhar em grupo, parte dos alunos trabalhavam individualmente, e só depois de ter algumas atividades realizadas, tentavam envolver-se na discussão com os colegas. No entanto, foi evidente que nos momentos em que desenvolveram as suas produções para entregar ao professor, envolviam todos os elementos dos grupos. No que se refere ao desenvolvimento das várias fases previstas nas tarefas de modelação matemática, os alunos não tiveram constrangimentos de relevo.

As dificuldades dos alunos centraram-se ao nível da interpretação das situações reais estudadas. Apresentaram também dificuldades na manipulação dos dados nas fases de obtenção do modelo matemático

No que se refere às perspetivas evidenciadas pelos alunos, ao nível da aprendizagem dos temas envolvendo tarefas de modelação matemática, de uma forma geral, identificaram mais-valias na aprendizagem, afirmando que este tipo de tarefas ajudam a perceber melhor os conceitos. Descreveram também, de um modo geral, que a aprendizagem dos tópicos da função exponencial e da função logarítmica envolvendo tarefas de modelação, obrigam a pensar mais e a interpretar bem a situação real estudada. Houve ainda, uma parte significativa dos alunos a afirmar que se perdeu muito tempo com tarefas de modelação, uma vez que este tipo de tarefas não é proposto em exame.

MATHEMATICAL MODELLING TASKS IN TEACHING AND LEARNING EXPONENTIAL AND ALGORITHMIC FUNCTIONS: A STUDY IN THE 12TH GRADE

Ricardo José Amaral Marques

Master´s in Mathematics teaching in the third cycle of Basic Education and on the Secondary Education

Minho University, 2013

ABSTRACT

This work's purpose was to analyze the contribution of mathematical modeling tasks in the learning of exponential and logarithmic functions by 12th grade students. I focused my teaching practice upon answers for the following questions: (i) What activities involving modeling tasks can be developed by students in the study of exponential and logarithmic functions? (ii) What difficulties are revealed by the students in activities of mathematical modeling in the study of exponential and logarithmic functions? (iii) What expectations do students have towards task modeling when learning exponential and logarithmic functions? To answer these questions I used the following data collection methods: students' productions; questionnaires; interviews; observations and documental analysis.

With regard to the activities of students in group modeling tasks data analysis concluded that even though they are working in groups, students first work individually and only later do they try to engage in discussion with colleagues. However, when involved in the production of work to be given to the teacher, data shows a greater involvement from all members of the team. As regards the development of the various stages programmed in the tasks of mathematical modeling, the students showed no significant constraints.

Their difficulties were centered on the interpretation of real situations under study, as well as the manipulation of data phases for obtaining the mathematical model.

Regarding their outlook in what concerns the levels of learning of the topics involving mathematical modeling tasks, the students have globally identified clear gains, stating that such tasks help them to better understand the concepts. They also described that the modeling tasks require greater thinking processes than solving problems by directly applying what they learn; interpreting the real situation under study and understanding the usefulness of what they learn .

A significant part of the students considered that too much time was lost with modeling tasks, as this type of work is not expected or evaluated in the national exams.

Índice

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A escolha do tema para a realização da minha intervenção pedagógica supervisionada – As tarefas de modelação matemática no ensino e na aprendizagem das funções exponencial e logarítmica: um estudo com alunos do 12º ano de escolaridade – está relacionada com vários aspetos, dos quais identifico dois como sendo os principais. Em primeira instância deve-se à observação de contextos de sala de aula que realizei na primeira fase da minha intervenção, que incidiu sobre o primeiro período do ano escolar. Nessa altura, tinha a noção de que o tema que escolhesse teria que o considerar no desenvolvimento do trabalho numa turma do 12.º ano de escolaridade, que tinha pela frente um programa extenso e que estava no último ano de um ciclo escolar decisivo para o futuro dos alunos e que culminava com o exame no final do ano. Teria então que definir um tema que respeitasse esta preocupação e ao mesmo tempo que tivesse um sentido pedagógico para os alunos, assente nas suas características e nas orientações prescritas para o ensino secundário.

Durante a observação realizada, apercebi-me que os alunos, de uma forma geral, manifestavam uma atitude passiva em contexto de sala de aula, com pouco envolvimento na discussão dos conceitos. A maior parte dos alunos revelava falta de iniciativa perante as tarefas que lhes eram propostas, o que acabava por induzir ao professor o desenvolvimento de um modelo de aprendizagem mais centrado em si, em que os momentos de aprendizagem resultavam maioritariamente na sua capacidade em apresentar os conceitos, prever as dificuldades e antecipar possíveis conceções erróneas, reforçando as suas explicações sem que para tal tenha sido solicitado, na tentativa de colmatar a falta de iniciativa dos alunos no seu processo de ensino-aprendizagem.

A postura passiva por parte dos alunos despertou-me para o desafio de tentar desenvolver uma atitude ativa perante as atividades de aprendizagem, que contribuísse para uma maior compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos, contrariando a sua memorização sem os compreender. Em segunda instância, a escolha do tema está relacionada com a análise que efetuei ao programa do ensino secundário (Ministério da Educação, 2002), o que permitiu aperceber-me que uma das maiores dificuldades que eu tive no meu percurso escolar no ensino básico e secundário se prendia com a falta de aplicação dos conceitos matemáticos a situações da realidade, o que me levava a ver esta disciplina como um "mundo" abstrato com pouco significado para a realidade de um adolescente. Mais tarde, quando ingressei no Ensino Universitário, em particular, num curso de Engenharia Industrial, tive a oportunidade de realizar uma aprendizagem mais aplicada dos conceitos matemáticos, fazendo com que o meu interesse e atitude pelas disciplinas de Matemática se alterasse, ao ponto de passados sete anos, com alguma experiência em ensino durante esse período, decidir desenvolver as minhas competências pedagógicas no ensino de Matemática.

Foi com grande satisfação que na análise do programa, verifiquei que as orientações metodológicas atuais para o ensino básico e secundário vão ao encontro da metodologia de ensino com a qual me identifico, em que o tema que escolhi representa uma forma de eu desenvolver a intervenção pedagógica envolvendo a aplicação da Matemática à realidade, respeitando as orientações do programa do ensino secundário, onde está patente a importância da Modelação Matemática como tema transversal, propondo que todos os temas estudados envolvam atividades que recorram à modelação matemática, ao trabalho experimental e ao estudo de situações realistas (Ministério da Educação, 2002), potenciando assim, uma postura ativa dos alunos.

No programa são também dadas orientações para utilizar tarefas de modelação no estudo das funções exponenciais e logarítmicas, temas estes que orientaram a minha intervenção pedagógica numa turma do 12.º ano de escolaridade. A aplicação do que se aprende a situações de contexto de realidade tende a fazer com que os conceitos matemáticos adquiram outro valor concetual do que a mera aplicação a situações rotineiras (Ponte, 2005). As orientações metodológicas dos programas de Matemática para o ensino secundário defendem a criação de novas oportunidades para cada estudante obter uma maior compreensão dos conceitos matemáticos e das suas aplicações, bem como para conectar e relacionar os novos conhecimentos com os já adquiridos em anos anteriores (Ministério da Educação, 2002).

Na observação de contextos em que se inseriu a minha prática pedagógica apercebi-me que os alunos, quando lhes é proposta uma tarefa, tentam aplicar os conhecimentos de forma imediata. Quando isso não é possível, ficam à espera que seja o professor a resolver para posteriormente "passarem" a resolução do quadro para os seus cadernos. Em tais circunstâncias, denotam mais uma atitude de serem reprodutores da informação do que (co)construtores dessa informação. As recomendações atuais da educação matemática, como por exemplo as do (NCTM, 2007), apontam para que os alunos aprendam com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios.

Para o NCTM (2007), os alunos que memorizam factos ou procedimentos sem os compreenderem têm, muitas vezes, dúvidas sobre quando e como os usar. As tarefas de modelação, que adquirem especial destaque nas recomendações metodológicas dos programas de Matemática do ensino secundário (Ministério da Educação, 2002), proporcionam aos alunos situações em que passam a ter que recorrer a conceitos prévios, a recolher, tratar e a dar sentido aos dados sobre uma determinada situação, o que lhes permite criar o melhor modelo que se ajuste a essa situação. Trata-se de atividades sujeitas ao erro, à reformulação e à generalização, bem presentes na atividade de um matemático.

Tais pressupostos despertaram a minha curiosidade em desenvolver uma experiência de ensino que envolvesse o aluno na construção e discussão dos conceitos inerentes às funções exponenciais e logarítmicas, assim como à sua reflexão, através das tarefas de Modelação Matemática. Assim, o objetivo do meu projeto consistiu em analisar o contributo das tarefas de Modelação Matemática na aprendizagem de alunos do 12.º ano, nos temas das funções exponencial e logarítmica. Com este fim, pretendi orientar a minha prática pedagógica de modo a responder às seguintes questões:

- Que atividades desenvolvem os alunos com tarefas de modelação no estudo das funções exponencial e logarítmica?
- Que dificuldades revelam os alunos nas atividades de modelação matemática no estudo das funções exponencial e logarítmica?
- Que perspetivas têm os alunos sobre as tarefas de modelação na aprendizagem das funções exponencial e logarítmica?

Assim, no desenvolvimento da minha prática pedagógica pretendi implementar tarefas de Modelação Matemática, no estudo das funções exponencial e logarítmica, com base no modelo de ensino exploratório e no sentido de promover uma aprendizagem significativa através da compreensão dos conceitos aprendidos, resultante da identificação da sua ligação com as situações reais estudadas e da discussão entre os alunos, com formalização desses conceitos envolvendo toda a turma.

Foram apresentados aos alunos problemas com base em situações do dia-a-dia, dando-lhes a possibilidade de interagir com a matemática como forma de aprendizagem, desenvolvendo assim a exploração e identificação de um modelo matemático que dê resposta a uma determinada situação. As atividades dos alunos no processo de modelação nas tarefas foram consideradas desde a interpretação da situação problema, a recolha de dados, a discussão em grupo, os critérios utilizados para obter o modelo, o teste do modelo, a generalização e a utilização desse mesmo modelo.

Para incentivar o interesse dos alunos no estudo de situações da vida real, foram usados alguns recursos tecnológicos, tais como computadores com simuladores, calculadoras e sensores, que desafiam o aluno a envolver-se na interpretação e na resolução da situação ou fenómeno em estudo, potenciando a compreensão dos conteúdos matemáticos tratados.

No capítulo dois deste trabalho, na primeira parte, apresento uma contextualização da minha intervenção pedagógica, através de uma breve caracterização da escola onde fui recebido sem qualquer tipo de constrangimento, e faço também a caracterização da turma em que desenvolvi a intervenção.

Apresento depois uma análise do estudo das funções exponencial e logarítmica ao longo da história nos programas de ensino no nosso país. Numa fase seguinte, apresento algumas metodologias de trabalho com tarefas de Modelação Matemática, onde defini com a qual me orientei ao longo da intervenção pedagógica. Realço depois a importância das tarefas de Modelação Matemática em ambiente de ensino-aprendizagem, e por fim apresento os resultados de dois estudos empíricos sobre modelação no ensino de Matemática.

No terceiro capítulo deste trabalho, desenvolvo numa primeira fase a análise dos resultados da intervenção pedagógica, com destaque no manual adotado e tipologia de tarefas propostas. Depois apresento os resultados mais representativos, obtidos na implementação de tarefas de Modelação Matemática no ensino e aprendizagem das funções exponencial e logarítmica.

No quarto capítulo apresento as conclusões e sugestões para intervenções futuras resultantes da experiência e resultados obtidos na intervenção pedagógica.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO

Na análise contextual pretendo apresentar a caracterização do meio envolvente e as orientações teóricas que me serviram de base para desenvolver a intervenção pedagógica. Ao aprofundar a análise do estudo das funções exponencial e logarítmica ao longo da história nos programas de ensino no nosso país, tento apresentar uma visão abrangente da evolução e importância que tem sido dada no estudo destes temas. Na apresentação de algumas metodologias de trabalho com tarefas de Modelação Matemática, onde defini com a qual me orientei ao longo da intervenção pedagógica, tenho como objetivo contextualizar os procedimentos desenvolvidos nas tarefas de modelação propostas. Realço depois a importância das tarefas de Modelação Matemática em ambiente de ensino-aprendizagem, e por fim apresento os resultados de dois estudos empíricos sobre modelação no ensino de Matemática.

2.1. Enquadramento contextual

Na caracterização da escola e da turma onde desenvolvi a prática pedagógica, pretendo apresentar o contexto social e educativo que me foi proporcionado para desenvolver o meu projeto educativo.

2.1.1. Caracterização da escola

A escola onde desenvolvi o projeto educativo situa-se na zona urbana de uma cidade capital de distrito na região norte do país e tem a sua origem no ano de 1884. Desde a sua criação, esteve instalada em mais do que um local e com alterações de denominação. Encontra-se nas instalações atuais desde o ano de 1980, as quais foram submetidas a um profundo restauro, com respetiva inauguração em Outubro de 2010, após o desenvolvimento de um projeto de requalificação física e funcional, coordenado pela Parque Escolar. Atualmente, a escola está a passar por um processo de agrupamento bastante conturbado, que julgo ser pertinente expor neste trabalho de uma forma sucinta, como forma de caracterizar o ambiente da comunidade escolar em que me inseri no ano do estágio.

Através de entrevistas que realizei no âmbito de trabalhos universitários a encarregados de educação, professores e participação numa assembleia geral de pais, foi possível apurar que a escola desenvolve um projeto educativo com grande envolvimento dos alunos em atividades extra curriculares que potenciam a integração e desenvolvimento de competências sociais, que são muito valorizadas por toda a comunidade escolar. Destaco assim os clubes e oficinas na escola: atelier de artes, clube de arqueologia, clube do ambiente, desporto escolar, oficina de Latim e língua Portuguesa, oficina de robótica, oficina de teatro, rádio, televisão e uma revista.

A escola desenvolve um projeto educativo reconhecido por várias avaliações externas, com avaliação nos três domínios (resultados académicos, prestação de serviço educativo e liderança e gestão) de muito bom. Segundo a direção da escola, estes resultados justificam um contrato de autonomia, que vinha sendo reivindicado pela escola há alguns anos. No entanto, este pedido nunca foi atendido por parte do Ministério da Educação. Em Janeiro de 2013, a direção da escola foi informada, sem envolvimento no respetivo processo, que foi agregada a um agrupamento já existente na cidade.

O projeto educativo da escola rege-se por princípios que valorizam as TIC nas atividades de ensino e de aprendizagem, onde se destacam as seguintes referências: (i) utilização da Plataforma *Moodle*; (ii) site; (iii) colocação em todas as salas de aula de computador, para o registo de faltas dos alunos e dos sumários, com ligação ao videoprojector, estando algumas salas equipadas com quadro interativo (instalação incompleta); (iv) biblioteca equipada com computadores; (v) dois laboratórios multimédia, quatro laboratórios software, quatro laboratórios hardware; e (vi) sala de música com estúdio para rádio e televisão.

A oferta educativa da escola está distribuída entre cursos científico humanísticos e cursos profissionais, com turmas nos três anos do ensino secundário e uma turma do 7.º ano de escolaridade do ensino básico. O ensino é desenvolvido em regime diurno e noturno.

Na última avaliação externa divulgada no ano de 2011, realizada pela Inspeção Geral da Educação e Ciência, é possível ter acesso a informação detalhada sobre os recursos humanos e à caracterização socioeconómica da comunidade escolar, que entretanto poderá ter sofrido alguma evolução até à data. Assim, o corpo docente era constituído por 197 professores, dos quais 87% eram do quadro da escola, sendo 19 de Matemática. O pessoal não docente era constituído por 27 assistentes operacionais e 15 assistentes técnicos. Relativamente aos alunos, 79% não tinham qualquer auxílio económico e cerca de 72% tinham computador e Internet em casa. Ao nível da formação académica dos pais, 9% tinham formação superior e 16% tinham formação média. Em termos de ocupação profissional dos pais, 13% exercia atividades de nível superior e intermédio.

2.1.2. Caracterização da turma

A turma na qual realizei a intervenção pedagógica era do 12.º ano de escolaridade do Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias. Para caraterizar a turma recorri a um questionário individual (Ficha de caracterização dos alunos, Anexo1). Assim, a turma era composta por 28 alunos com idade média de 17 anos, mais oito alunos que tiveram a autorização para assistir às aulas de Matemática. Dos alunos da turma, sete tiveram uma retenção no seu percurso escolar, seis consideram a Matemática a sua disciplina preferida enquanto treze referem tratar-se da disciplina que sentem mais dificuldades. Por este facto, 21 alunos afirmam ter apoio ao estudo extra curricular na disciplina de matemática. Todos os alunos tencionavam ingressar no ensino superior. Todos tinham computador em casa e apenas um não tinha acesso à internet. Relativamente aos pais dos alunos, as mães apresentavam uma idade média de 47 anos e nove delas tinham formação superior, enquanto os pais tinham uma idade média de 48 anos e nove deles possuíam formação superior.

No que respeita aos resultados obtidos nas avaliações finais dos alunos, verificam-se algumas variações no final do 11.º ano, comparativamente com o 10.º ano, assim como nos resultados do 12.º ano.

Quadro 1: Resumo dos resultados das avaliações.

Indicadores	10.º ano	11.º ano	12.º ano
Desvio padrão	3,4	3,69	3,68
Média	12,43	12,07	13,13
Avaliação inferior a 8 valores	0	0	1
Avaliação negativa	5	8	4
Avaliação positiva	23	20	19
Avaliação superior a 15 valores	4	5	6

Através da análise do quadro, verifica-se que se trata de uma turma pouco homogénea ao nível dos resultados, pelo facto das avaliações apresentarem um valor do desvio padrão algo elevado. As diferenças nos resultados das avaliações acentuaram-se entre o 10.º e o 11.º ano de escolaridade. Entre o 11.º e o 12.º ano o valor do desvio padrão teve uma pequena redução, no entanto houve cinco alunos que anularam as matrículas ao longo do ano, todos com resultados negativos, que no caso de não o terem feito, contribuíam para o aumento desse desvio. Verifica-se ainda que o número de alunos com avaliação negativa foi aumentando ao longo dos três anos, se considerar os que anularam a matrícula no 12.º ano. Por outro lado, o número de alunos com resultados nas avaliações superiores a 15 valores também aumentou.

Ao nível do comportamento dos alunos, foi possível verificar, ao longo das aulas e realçado pelos professores das várias disciplinas nas reuniões de avaliação, que era uma turma com alunos que se distraem com alguma regularidade, mas que não colocavam problemas de relevo. Houve, no entanto, elementos que revelaram falta de motivação e interesse pela disciplina ao longo do ano, acabando por se refletir no seu desempenho. Por outro lado, houve alunos que demonstraram dificuldades, mas devido ao empenho que tiveram, acabaram por ultrapassar grande parte dessas dificuldades.

2.2. Enquadramento teórico

Neste subcapítulo pretendo contextualizar o tema em estudo no meu projeto, fazendo uma breve análise histórica sobre as abordagens de vários Matemáticos no estudo das funções exponencial e logarítmica, e depois, a evolução do estudo destes temas nos programas de ensino no nosso País. Desta forma, tento explorar também a importância dada à aplicação dos conteúdos matemáticos a situações da vida real nos vários programas que foram vigorando no nosso sistema de ensino. Numa fase seguinte, apresento diferentes perspetivas sobre as tarefas de Modelação Matemática, a contextualização deste tipo de tarefas em ambiente de ensino-aprendizagem, e apresento ainda uma breve análise a dois estudos empíricos com aplicação de tarefas de modelação com alunos do 9.º ano de escolaridade e do 12.º ano de escolaridade. Na última parte deste subcapítulo, apresento as estratégias de intervenção pedagógicas com que orientei as minhas práticas com os alunos.

2.2.1. Função exponencial e logarítmica no currículo escolar

Antes de fazer uma abordagem à evolução do estudo das funções exponencial e logarítmica no currículo escolar, torna-se pertinente fazer uma breve interpretação do surgimento do conceito de função. O conceito de função foi sendo estudado ao longo dos tempos, assim como o conceito de logaritmo, em que ao longo da história diversos matemáticos contribuíram significativamente para a evolução dos conceitos de função, logaritmo, funções logarítmicas e funções exponenciais, conforme veremos adiante.

A evolução que é percecionada em épocas que coincidem, estará relacionada com o facto de que em grande parte, a Matemática sempre se desenvolveu para dar resposta a problemas reais da sociedade, que implicavam o envolvimento destes conceitos em simultâneo. Segundo Ponte (1990), o conceito de função claramente individualizado e como objeto de estudo corrente surgiu em Matemática apenas no final do século XVII. O primeiro matemático a introduzir o conceito de função foi Leibniz, que definiu "em termos muito gerais, a dependência duma curva de quantidades geométricas como as subtangentes e subnormais. Introduziu igualmente a terminologia de 'constante', 'variável' e 'parâmetro'" (Ponte, 1990, p. 3). Realço que o conceito de logaritmo surgiu aproximadamente na mesma época, numa fase em que os desafios colocados aos matemáticos eram proeminentes. Para Carvalho (1999), o logaritmo de um número é um dos conceitos matemáticos que foi desenvolvido para a resolução de problemas bem definidos e concretos, como por exemplo a simplificação das operações de cálculo dos astrónomos.

Em meados do século XV, com a descoberta da imprensa, entrou-se numa fase da história com grande desenvolvimento dos conceitos matemáticos, impulsionada pela facilidade de divulgação dos livros, que passaram a circular de uma forma mais alargada e rápida. Este período coincidiu com o período da expansão marítima, que necessitava e exigia novos desafios de trigonometria na navegação. Assim, a conjugação destes dois fatores originou grande atividade intelectual no desenvolvimento de técnicas de cálculo que agilizaram a resolução de problemas de navegação e astronomia dessa época. O desenvolvimento matemático verificado nesta altura é acompanhado, a partir do século XVI, por um grande desenvolvimento científico nas mais diversas áreas, envolvendo muitas vezes a manipulação de grandes quantidades de dados numéricos, obrigando os cientistas a dispensar muito tempo em tarefas de cálculo. As dificuldades na manipulação de grandes números nos cálculos levaram os astrónomos do século XVI à utilização generalizada da prostaferese, cujo termo "deriva do grego prosthaphaeresis e significa adição e subtração. As regras de prostaferese, já do conhecimento dos árabes, eram um conjunto de fórmulas que permitiam transformar produtos de grandes números em somas ou diferenças" (Carvalho, 1999, p. 64). Assim, em 1614, Neper publicou as primeiras tábuas logarítmicas, explicando as vantagens da utilização de logaritmos, onde é claro o contexto de utilização fortemente associado à trigonometria e à astronomia: "Raramente na história da

Ciência um conceito matemático abstrato parece ter sido tão bem recebido pela comunidade científica quanto a invenção dos logaritmos" (Carvalho, 1999, p. 72). Esta afirmação realça a importância da aplicação dos logaritmos na resolução de problemas do contexto da vida real.

O conceito exponencial foi sendo estudado, tal como afirmei antes, em momentos coincidiram com a evolução do conceito de logaritmo. Leibniz e Bernoulli, no século XVII, ao trocarem correspondência sobre o tema, "parecem ter percebido o que estava em causa na função exponencial, ao associar a curva logarítmica com a equação $y = a^x$, através da construção de curvas exponenciais do tipo $y = x^x$, por meio da curva logarítmica" (Carvalho, 1999, p. 97). Ao longo da história, verificou-se o envolvimento de matemáticos conceituados no estudo e desenvolvimento deste tipo de funções, em que, por exemplo, os trabalhos desenvolvidos por Euler, século XVII, estiveram na origem da adoção em livros escolares do conceito de logaritmo associado aos expoentes (Carvalho, 1999).

No ensino de Matemática em Portugal, as funções logarítmicas e exponenciais fazem parte do currículo do ensino secundário desde a implementação do ensino liceal. Em 1822 deu-se a revolta que ficou conhecida por «Revolução de Setembro», dando origem a um novo governo, no qual surge uma nova constituição. Pela mão de Passos Manuel, deputado nortenho, foi destacado José Alexandre de Campos para reformar o ensino em Portugal. Assim, no dia 17 de Novembro de 1836, surge a reforma do ensino secundário, que daria origem à criação dos liceus e ao ensino secundário, de onde as suas características fundamentais perduram até aos nossos dias (Sousa, 2002).

Apenas a 10 de Abril de 1860, pela autoria de Fontes Pereira de Melo, surge o primeiro regulamento para os Liceus, "o qual pretendia dar ao ensino secundário um valor específico, disciplinando para isso a vida interna dos Liceus" (Sousa, 2002, p. 89). Pela primeira vez, definiu-se um prazo de cinco anos para o Curso dos Liceus.

> É de salientar que a Matemática só era dada a partir do 2.º ano, tendo aí duas horas semanais, chamando-se à disciplina "Aritmética, as Quatro Operações em Números inteiros ou Fracionários"; nos 3.º e 4.º anos passava a ter seis horas semanais, passando então a denominar-se no 3.º ano por "Aritmética, Noções de Geometria plana e suas Aplicações Usuais", e no 4.º ano "Matemática Elementar" (Sousa, 2002, p. 90).

No programa de Matemática para os Institutos Secundário de 1880, que surgiu sob a responsabilidade de José Luciano de Castro, foi possível aceder ao programa de Matemática da época, que nessa altura comportava um período de cinco anos. Neste programa era indicado para o sexto ano do curso de Liceus, o estudo das “principais fórmulas de transformação. Uso destas fórmulas para tornar calculável por logaritmos uma soma ou diferença. Construção e uso das tábuas trigonométricas” (Sousa, 2002, p. 50).

No ano de 1895 surge um novo programa de ensino para os institutos secundários, onde ao nível da Matemática se reconhecia que o programa era muito extenso. Assim, em relação aos temas em estudo neste trabalho foram introduzidas algumas alterações, com maior incidência no estudo deste tipo de funções, onde no quarto ano do liceu, era proposto o estudo da “teoria geral dos logaritmos deduzida por comparação dos termos das duas espécies de progressões. Prática e uso dos logaritmos” (Sousa, 2002, p. 735). Neste mesmo programa, mas para o quinto eram dadas orientações para estudar a “teoria dos logaritmos considerados como expoentes. Aplicação à resolução da equação exponencial (Sousa, 2002, p. 735)”. Para o sexto ano eram dadas orientações para estudar a construção de tábuas trigonométricas.

Alguns anos mais tarde, no programa de matemática de 1918, já após a proclamação da República, que aconteceu em 5 de Outubro de 1910, surgiu um novo programa para o ensino liceal, com algumas alterações no estudo da Matemática, e em particular nos temas aqui abordados. Assim, o estudo das funções logarítmicas e exponencias, passando a ter maior relevo. Eram dadas indicações para que no 4.º ano se estudasse o “sistema de logaritmos; propriedades fundamentais e logaritmos vulgares” (Républica, 1918, p. 257). Para o 6.º ano havia orientações para a “prática de cálculos, usando quer logaritmos vulgares quer as tábuas de funções naturais, quer os logaritmos de Gauss. Estava também presente o estudo da “função $y = a^x$: suas propriedades. Teoria algébrica dos logaritmos” (Républica, 1918, p. 257). O programa de 1918 esteve em vigor até 1930, ano em surgiu no programa. No entanto, não houve alterações de relevo no estudo dos temas em questão. Logo no ano seguinte, em 1931 surge um novo plano de estudos, mas mais uma vez sem alterações nos temas aqui abordados, assim como nos programas que surgiram em 1935 e em 1936.

O programa de matemática de 1936 esteve em vigor durante vários anos, surgindo apenas em 1948 um novo programa, com nova organização, mas que ao nível do estudo das funções exponenciais e logarítmicas não houve alterações relevantes.

No programa de Matemática seguinte, em 1954, numa época em que o ensino liceal comportava sete anos, surgiram pequenas alterações, passando os temas funções exponencial e logarítmica a serem estudados apenas no 7.º ano, com os seguintes conteúdos: Função exponencial de base a ($a > 1$ e expoente real); função inversa; Logaritmos decimais; uso de tábuas (Républica, 1954).

O programa anterior perdurou até 1974, ano em que o programa de Matemática foi sujeito mais uma vez a alterações, mas aqui claramente profundas, tanto na organização dos temas, como nas suas designações ao longo dos anos escolares e nos conteúdos, passando também a ser apresentadas orientações metodológicas para os professores, ao contrário do que acontecia antes, onde se definiam apenas os temas a estudar.

Assim, os alunos passam a ter um ciclo de três anos designado como curso geral, onde no 3.º ano surgiam os seguintes conteúdos no estudo dos temas funções exponencial e logarítmica (Ministério da Ciência e Cultura, 1974):

> Aplicação $n \mapsto 2^n$ de domínio (função exponencial de base 2). Verificação, com exemplos, de que esta aplicação transforma a soma em produto, a diferença em quociente, o produto em potência e o quociente em raiz.
> Aplicação inversa da anterior (função logarítmica de base 2). Verificação de que, como aplicação inversa, transforma o produto em soma, o quociente em diferença e a potência em produto e a raiz em quociente.
> Introdução heurística da noção de potência de expoente fracionário de modo que se mantenham as propriedades das potencias. Breve noção intuitiva da potência de expoente irracional. Gráfico da função $y = 2^x$. Teorema da existência e unicidade do logaritmo de um número positivo, justificando intuitivamente a partir do gráfico. Logaritmos decimais; cálculo logarítmico (sem interpretação), usando tabuas de logaritmos de 100 a 1000.

Em 1977, surgiu um novo programa de Matemática, mas não implicou alterações no estudo das funções exponencial e logarítmica. Mas, em 1983 foram introduzidas alterações profundas no ensino destas funções, através do programa específico para o 12.º ano via ensino, onde no tema complementos sobre funções reais de variável real, estava indicado o estudo e os objetivos pretendidos (Ministério da Educação, 1983, p. 95):

> A função exponencial $x \mapsto \exp(x) = e^x$. Informação sobre a continuidade da função e sua representação gráfica; informação de que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ e $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty, p \in IR$.
> A função $x \mapsto \log_e x$ como função inversa de $x \mapsto e^x$.
> A função $x \mapsto a^x$, $a \in \mathbb{R}^+$.
> A função $x \mapsto \log_a x$, como função inversa de $x \mapsto a^x$, com $a \neq 1$.
> Propriedades operatórias da função logarítmica.
> Pretende-se que o alunos: ... d) Utilizem corretamente as propriedades dos logaritmos.

Mais tarde, em 1991, surge um novo programa de Matemática para o ensino secundário, estruturado de outra forma e com detalhe nas orientações, onde estava patente e de forma separada os objetivos ao nível de valores e atitudes, ao nível de capacidades e aptidões e ao nível dos conhecimentos. No que se refere a valores e atitudes estava patente o desenvolvimento de autonomia dos alunos e a solidariedade, entre outros aspetos (Ministério da Educação, 1991, p. 17).

> Exprimir e fundamentar as suas opiniões, respeitar as opiniões dos outros e aceitar as diferenças, revelar espírito crítico e de rigor e confiança nos seus raciocínios, reconhecer o contributo de matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo, ...

Ao nível das capacidades e aptidões, foi introduzida a importância de desenvolver a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção no real (Ministério da Educação, 1991, p. 17):

> Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução, selecionar estratégias de resolução de problemas, formular hipóteses e prever resultados, interpretar e criticar resultados no contexto do problema e resolver problemas nos domínios da Matemática, da Física, da Economia, das Ciências Humanas,...

Ao nível dos conteúdos programáticos, no que se refere ao estudo das funções exponencial e logarítmica, estavam presentes no tema VII do 12º ano (Ministério da Educação, 1991, p. 33):

> - O número e.
> - Função exponencial de base a > 1: estudo analítico e gráfico.
> - Noção de logaritmo; propriedades.
> - Função logarítmica: estudo analítico e gráfico.
> - Levantamento de indeterminações.
> - Primitivas imediatas: cálculo de áreas.

Neste mesmo programa, foram também introduzidas indicações para a utilização de materiais, onde se destaca o uso de calculadoras científicas programáveis, o computador e retroprojetor. Em 1997, surge um novo programa para o ensino secundário, mas sem alterações de relevo no estudo das funções em questão.

Numa análise à evolução do estudo das funções exponencial e logarítmica no ensino em Portugal é percetível que a sua importância aumenta nos últimos programas, com a introdução nas orientações para práticas pedagógicas para o estudo de situações da vida real, onde, por exemplo, no programa de 1991 é referenciada a sua importância na ligação da matemática à vida real (Ministério da Educação, p. 93):

> As funções exponencial e logarítmica intervêm no estudo matemático de fenómenos diversos como o crescimento de populações de seres vivos, a desintegração radioativa, a inflamação, a acidez duma solução... Estão na base do funcionamento de instrumentos de cálculo e têm enorme importância em Matemática superior quando a base é o número de Neper.

Em 2002, entra em vigor o atual programa do ensino secundário, que aprofunda a importância da ligação da matemática à vida real. As finalidades do ensino secundário apontam para o desenvolvimento da capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real (Ministério da Educação, 2002). Ao nível das orientações gerais, é salientada a importância da modelação matemática como tema transversal, com indicação que todos os temas têm de ser suportados com atividades que complementem a modelação matemática, o trabalho experimental e o estudo de situações realistas real (Ministério da Educação, 2002). Ao nível das orientações metodológicas prevê-se a exploração de várias tecnologias com o fim de permitir discussões sobre o processo de modelação. São também dadas orientações para utilizar tarefas de modelação com funções exponenciais e logarítmicas, o que vai ao encontro do tema deste trabalho. Tais orientações têm por finalidade contribuir para o desenvolvimento dos objetivos gerais delineados para este nível de escolaridade, com destaque para a importância da aprendizagem significativa, o desenvolvimento do espírito crítico e da capacidade de comunicação, através de tarefas com ligação à vida real.

Quadro 2: Objetivos gerais do programa de Matemática A do ensino secundário

Valores e atitudes:

- Experimentar e fundamentar as suas opiniões
- Revelar espírito crítico, de rigor e de confiança nos seus raciocínios
- Abordar situações novas com interesse, espírito de iniciativa e criatividade

Capacidades/Aptidões

- Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução
- Selecionar estratégias de resolução de problemas
- Formular hipóteses e prever resultados
- Resolver problemas nos domínios da Matemática, Física, Economia, das Ciências Humanas,...
- Formular generalizações a partir de experiências
- Validar conjeturas, fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados
- Comunicar conceitos, raciocínios, oralmente e por escrito, com clareza e progressivo rigor lógico.

Ao nível das orientações metodológicas gerais, emerge a importância que o professor deve dar ao envolvimento do aluno no seu processo de aprendizagem, na construção do seu conhecimento a partir das ideias prévias, ajudando a enquadrar esse conhecimento através da ligação dos conceitos aprendidos à realidade e reforçando a autonomia.

Quadro 3: Orientações metodológicas gerais para o ensino secundário.

O professor deve contemplar equilibradamente:

- Desenvolvimento de atitudes
- Desenvolvimento de capacidades
- Aquisição de conhecimentos e técnicas para a sua mobilização

Prossupondo o aluno como agente da sua aprendizagem, propõe-se uma metodologia que:

- Os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas
- Os conceitos são abordados de diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização
- Se estabeleça maior ligação da Matemática com a vida real, com a tecnologia e com as questões abordadas noutras disciplinas, ajudando a enquadrar o conhecimento numa perspetiva histórico-cultural
- As atividades deverão contribuir para o desenvolvimento científico, levando o aluno a intuir, conjeturar, provar avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação

No caso particular da modelação matemática, as orientações metodológicas defendem que o professor a deve trabalhar como tema transversal, sempre que possível, e discutir com os alunos a sua importância no mundo atual. No programa da disciplina está definido que, sempre que possível, o professor deve evidenciar aplicações da Matemática e deve estabelecer conexões entre os diversos temas matemáticos do currículo e com outras ciências. Deve ser discutido com os alunos o processo de modelação e a sua importância no mundo atual.

As orientações para o ensino e a aprendizagem dos temas funções exponencial e logarítmica dão relevo à importância no estudo destas novas famílias de funções, através da sua aplicação e ligação a conhecimentos já adquiridos, assim como desenvolver atividades de modelação matemática envolvendo este tipo de funções. No programa propõe que (Ministério da Educação, 2002):

> Com as novas famílias de funções surgem, também, novas oportunidades para cada estudante obter uma maior compreensão da matemática e suas aplicações, bem como conectar e relacionar os novos conhecimentos com os já adquiridos em anos anteriores.
> A modelação com funções exponenciais e logarítmicas pode ser feita tanto usando capacidades específicas da calculadora gráfica, como por análise algébrica da adequação de um modelo fornecido pelo professor. (p. 4)

Fazendo agora um paralelo da evolução da Matemática e respetiva aplicação na resolução de problemas da sociedade com o currículo de ensino da Matemática que foi implementado ao longo dos anos, verifica-se que a Matemática foi estando fortemente ligada às ciências físicas. Hoje em dia, as suas áreas de aplicação estão mais alargadas, tendo ligação a domínios das ciências da vida, das ciências humanas e sociais, da gestão, da comunicação, da engenharia e da tecnologia. Segundo Ponte (1990), constitui um meio de descrição, explicação, previsão e controlo, sendo esta ligação feita essencialmente através da noção de modelo.

Esta abertura aos mais variados domínios nos últimos anos, verificou-se também nas orientações do programa atual, onde está bem vincada a necessidade de envolver o aluno nas atividades de aprendizagem partindo do estudo de situações reias, por um lado, e aplicando os conceitos em problemas do contexto da vida real, por outro lado. Para Ponte (1990), o ensino das funções em Portugal nos anos 90 era particularmente pobre, pela dificuldade em dar um lugar de relevo à ligação da Matemática com a realidade, prevalecendo a ideia de que o que era preciso é que os alunos aprendessem as técnicas e os algoritmos.

A possibilidade de desenvolver o ensino da Matemática com forte ligação ao mundo real foi em grande parte possibilitada pela tecnologia, que teve uma enorme evolução nos últimos anos. Ponte já em 1990, numa altura em que o nível tecnológico disponível no ensino era quase “pré-histórico” em relação ao que temos, passados vinte anos, afirmava que:

> A tecnologia pode ser usada para realizar as manipulações ou determinar as soluções dentro dos modelos matemáticos, simplificando a parte rotineira do trabalho e proporcionando uma maior concentração naquilo que é verdadeiramente importante – a compreensão do significado dos conceitos, a elaboração e implementação de estratégias para a resolução dos problemas, e a sua análise crítica e discussão. (p. 9)

Esta visão consubstancia-se hoje com as metodologias prescritas nos programas de Matemática, em que o estudante desempenha um papel determinante nas atividades que desenvolve na aprendizagem de conteúdos matemáticos, construindo os conceitos a partir da experiência de cada um e de situações concretas, estabelecendo maior ligação da Matemática com a vida real, com a tecnologia e com as questões abordadas noutras disciplinas (Ministério da Educação, 2002).

2.2.2. Modelação matemática

As tarefas de modelação têm na sua essência um modelo matemático, que é obtido através do processo de modelação, que se desenvolve percorrendo a várias fases. Antes de estudar este processo, será pertinente definir o que se entende por modelo. Para Ponte (1990), um modelo matemático "constitui uma representação duma dada situação, através de objetos, relações e estruturas com que se procura descrever os elementos considerados fundamentais dessa situação, ao mesmo tempo que se ignoram deliberadamente os elementos tidos como secundários" (p. 5). A aplicação de conceitos matemáticos a situações problemáticas da realidade envolve a construção e a utilização de modelos matemáticos. Segundo Matos (1995), qualquer modelo pode ser encarado como uma forma simplificada de representar determinados aspetos de um sistema real.

Na análise dos programas de Matemática do ensino secundário, constatei que as orientações para o envolvimento dos alunos em tarefas de modelação são recentes, adquirindo atualmente relevo transversal no estudo de todos os temas do currículo desta disciplina. No entanto, apesar de antes não haver uma orientação direta e clara para o ensino deste tema, a procura de resposta a fenómenos do mundo real envolvendo conceitos matemáticos é muito antiga, o que foi proporcionando algum envolvimento da modelação matemática no ensino, mesmo sendo de uma forma implícita. Por exemplo, Oresme (1323-1382) foi um dos primeiros a esboçar um gráfico para representar a variação de duas grandezas, a velocidade e o tempo (Carvalho, 1999). Como o trabalho de Oresme é hoje conhecido, significa que foi sendo divulgado ao longo da história como um exemplo da aplicação de conceitos matemáticos a problemas de contexto da vida real, em que a sua divulgação não deixou de ser uma forma de ensino que envolvia modelação matemática, mesmo não sendo na altura reconhecido como tal, pelo facto de a designação não existir na época.

Penso que a evolução da sociedade verificada nos últimos anos, associada à evolução tecnológica, tornou a aplicação de conceitos matemáticos a situações do contexto da vida real mais visível e reconhecida pela própria sociedade em geral. O nosso quotidiano, em algumas situações, rege-se segundo modelos matemáticos que regulam as nossas vidas sem que a maior parte dos cidadãos se aperceba. Basta pensar em modelos de regulação de tráfego, em particular na instalação e temporização de semáforos. Estes modelos funcionam automaticamente e ao mesmo tempo cada vez mais como processos matematizados afastados do entendimento do cidadão comum. Segundo Keitel (cit. Matos, 1995), se aceitarmos o uso de objetos tecnológicos dos quais apenas conhecemos o input e o output e nada do que existe pelo meio, então temos de confiar numa 'caixa negra' (sob a forma de uma máquina, um especialista ou uma instituição). Como vivemos numa "sociedade cada vez mais matematizada, torna-se premente desenvolver nos alunos a competência crítica que lhes permitirá uma intervenção na sociedade como cidadãos ativos e esclarecidos" (Matos & Carreira, 1996, p. 18).

Outra forma de ajudar a entender o conceito de modelo, é conceber a noção de modelação. Richardson definiu modelação como "um sistema de estruturas concetuais utilizadas para construir, interpretar e matematicamente descrever uma situação" (cit. English & Watters, 2005, p. 59). Já Matos e Carreira (1996) consideram que a construção de modelos matemáticos de situações reais pode ser entendida como um processo dinâmico que envolve diversos passos:

1.º passo: consiste em identificar e compreender a situação real, levantando as questões associadas.
2.º passo: deve ser a tradução dos conteúdos e conceitos envolvidos na situação real para objetos, conceitos e relações matemáticas, relevantes para um modelo matemático. Deste processo pode resultar um primeiro modelo matemático.
3.º passo: é definido como a manipulação do modelo matemático com vista à obtenção de algum tipo de resultado (soluções duma equação, análise de um gráfico em pontos particulares, etc.)
4.º passo: tradução dos resultados para a situação real, avaliando a adequação do modelo à situação, testando os valores teóricos do modelo com os dados reais e se necessário proceder a melhorias (p. 15).

Realço que "aquilo que constitui o motor de desenvolvimento do modelo matemático é a necessidade de resolver as discrepâncias entre os resultados obtidos através desse modelo e a situação problemática real" (Matos & Carreira, 1996, p. 16). Ponte reforça ainda que o "processo de construção de um modelo matemático envolve diversas etapas, podendo ser necessários vários ciclos de aperfeiçoamento sucessivo até se obter uma descrição satisfatória da situação em causa" (1990, p. 5).

Tal como Matos e Carreira, também Niss afirma, de uma forma mais detalhada, que o processo de modelação deve ter várias atividades (cit. Ponte, 1990, pp. 5-6):

(a) identificar os elementos da situação que se pretende estudar;
(b) selecionar os objetos, relações, etc., relevantes para este fim;
(c) idealizá-los de forma apropriada para uma representação matemática;
(d) escolher um universo matemático para servir de base ao modelo;
(e) efetuar uma translação da situação para este universo;

(f) estabelecer relações matemáticas entre os objetos traduzidos, acompanhados por hipóteses e propriedades,
(g) usar métodos matemáticos para obter novos resultados e conclusões no quadro da situação original;
(h) interpretar estes resultados e conclusões no quadro da situação original;
(i) avaliar o modelo confrontando-o com a realidade;
(j) construindo, se necessário, um modelo novo ou modificado

A definição do processo de modelação pode ser ainda mais detalhado, conforme descrevem Edwards e Hamson (2001). Trata-se da transposição de um problema real para um universo matemático, constituído por várias fases, segundo o seguinte ciclo de modelação:

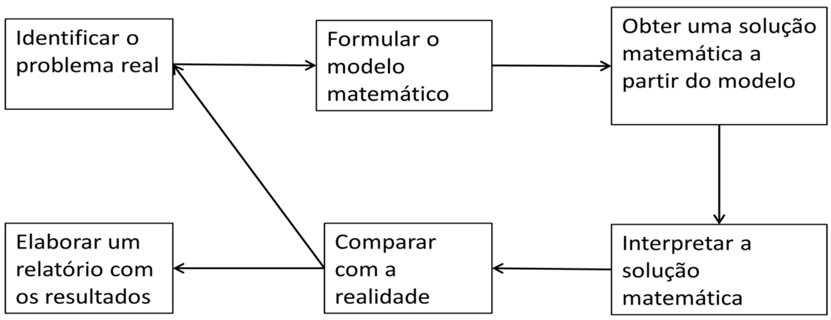


Figura 1: Ciclo da modelação matemática segundo Edwards e Hamson (2001, p. 74).

As fases do ciclo são caracterizadas com os seguintes procedimentos, citado por Carreira (1992, pp. 5-7):

Fase 1: Identificação do problema real. Nesta fase, é importante colocar um conjunto de questões. Destacam-se, entre outras:
- O que se pretende saber?
- Qual é o objetivo a atingir?
- Quais são as fontes de dados e os factos relevantes?
- Existe alguma questão específica a resolver?
- Será útil uma simulação do fenómeno?

Fase 2: Formulação do modelo matemático. Alguns procedimentos revelam-se apropriados nesta fase:
- Desenhar esquemas quando oportuno.
- Identificar e organizar as variáveis relevantes.
- Recolher dados e examiná-los para obter informações acerca do comportamento das variáveis.
- Denotar cada uma das variáveis por um símbolo.
- Especificar todos os pressupostos e hipóteses formuladas.
- Estabelecer relações matemáticas e equações que combinem as variáveis do problema, usando métodos matemáticos.

Fase 3: Obtenção de uma solução matemática a partir do modelo. São importantes, nesta fase, as seguintes estratégias:

- Usar métodos algébricos ou numéricos e representações gráficas.
- Construir um programa de computador ou usar programas existentes para a obtenção de resultados.
- Usar um programa de simulação se necessário.
- Extrair informações sobre os valores das variáveis que interessam estudar, quer a partir de tabelas ou gráficos.

Fase 4: Interpretação da solução matemática. Esta fase diz respeito à análise dos resultados matemáticos obtidos. Alguns aspetos devem ser observados:

- Os valores obtidos para as variáveis são razoáveis, no que se refere ao sinal e grandeza?
- A forma de variação das variáveis estudadas está de acordo com o que seria de esperar?
- Existem valores para os quais as variáveis apresentam um comportamento especial?
- Como é afetada a solução se forem alteradas as condições iniciais?

Fase 5: Comparação com realidade. Algumas questões são fundamentais nesta fase:

- Os resultados obtidos podem ser avaliados com base em dados reais?
- As soluções matemáticas fazem sentido?
- As previsões efetuadas confirmaram-se na realidade?
- O modelo matemático obtido cumpre os objetivos desejados?
- O modelo poderá ser significativamente melhorado mediante o tratamento matemático mais sofisticado? Se a resposta a esta pergunta for afirmativa, dever-se-á voltar à fase 1 e reiniciar o ciclo. Se não for o caso, será finalmente atingida a fase 6.

Fase 6: Elaboração de um relatório.

De um modo geral, todos os autores defendem que um processo de modelação matemático deve ser desenvolvido numa sequência lógica que engloba várias fases. Ao fazer um cruzamento entre os principais procedimentos dos vários processos apresentados, verifica-se que em comum, têm como ponto de partido a interpretação da situação real e identificação dos dados ou aspetos relevantes. Depois têm a fase de tratamento ou manipulação dos dados para obter o modelo matemático, o respetivo teste e validação, procedendo a melhoria se necessário, e por fim a generalização do modelo matemático.

Com base nos processos apresentados, implementei tarefas de modelação matemática em ambiente de sala de aula, seguindo as fases propostas por Matos e Carreira (1996), com pequenos ajustes ao nível da linguagem apresentada aos alunos, com o objetivo de facilitar a comunicação e interpretação:

1) Identificar e compreender a situação real.
2) Tradução das características da situação para objetos, conceitos e relações relevantes para o modelo matemático.
3) Manipular os dados com vista à obtenção do modelo matemático.
4) Avaliar a adequação do modelo à situação e se necessário proceder a melhorias.
5) Generalizar e simular: calcular resultados através do modelo para além dos valores reais registados.

2.2.3. Finalidade das tarefas de modelação matemática no ensino

Sebastião e Silva nos anos sessenta já defendia que os exercícios que envolvem situações reais em ambiente de sala de aula, figuram naqueles que podem ter mais interesse, salientando que o ensino "peca por ausência de contacto com o húmus da intuição e com a realidade concreta" (Silva J. S., 1977, p. 13). Já na época, nas reuniões promovidas pela O.C.D.E (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico) defendia-se que o professor de matemática deve ser, primeiro que tudo, "um professor matematizado, isto é, deve habituar o aluno a reduzir situações concretas a modelos matemáticos e, vice-versa, aplicar os esquemas lógicos da matemática a problemas concretos" (Silva J. S., 1977, p. 13). Também Griffiths e Howson (1974) defendiam a integração da modelação e aplicações da Matemática nas atividades curriculares, argumentando como razão principal a "preparação dos alunos para uma melhor inserção na sociedade, já que se argumentava que todos os cidadãos viriam a ser solicitados a resolver problemas, fazer estimativas, tomar decisões, etc." (cit. Matos & Carreira, 1996, p. 16). Esta orientação está em linha com as ideias prescritas no programa de ensino de matemática atual, que indicam que o ensino deve ser suportado em atividades que contemplem a modelação matemática, o trabalho experimental e o estudo de situações realistas sobre as quais se colocam questões significativas (Ministério da Educação, 2002).

Como um dos objetivos do ensino da matemática é preparar os jovens para atuarem de forma conhecedora e consciente em situações problemáticas do mundo real, onde as tarefas de modelação matemática podem assumir um papel preponderante para aprofundar essa capacidade. Segundo Swetz (1992), "as situações de modelação matemática podem servir também como veículos para a introdução de novos conceitos: investigações sobre crescimento de populações e a diminuição de recursos naturais conduzem ao uso de funções exponenciais;..." (p. 48).

No envolvimento de modelação matemática no ensino, é frequente verificar-se que as tarefas colocadas aos alunos nas aulas são bem definidas e passíveis de uma resolução formal e rigorosa, enquanto na vida real isso não acontece, onde as coisas aparecem normalmente mal definidas e imprecisas (Ponte, 1992). Para tornar uma situação real interessante no ensino, suscitando a utilização dos conceitos previstos, tende-se a simplificar o modelo real. Assim, "construir modelos capazes de descrever situações complexas e com efetivo poder de previsão não constitui tarefa fácil" (Ponte, 1992, p. 101). Para minimizar a complexidade de modelação matemática com base em situações da vida real existem hoje recursos tecnológicos, como computadores ou sensores, que ajudam a procurar o melhor modelo que se ajusta à situação em estudo. Para Lesh (cit. Ponte, 1992), o computador pode desempenhar um papel de amplificador concetual. Assim, o professor deverá ter especial atenção na seleção dos modelos a trabalhar nas aulas, em função dos objetivos pretendidos. No entanto, este aspeto não impede que o professor recorra a este tipo de tarefas. A reforçar esta ideia, Barbosa (2001) defende que a educação matemática deve ter o envolvimento de todas as instâncias implicadas no conhecimento matemático, sendo a modelação uma delas.

Niss afirma que se as situações envolvendo aplicações e modelação que os alunos "encontram são não-autenticas, é muito natural que eles fiquem com a impressão que tais situações servem principalmente para disfarçar aquilo que essencialmente é matemática pura com uma roupagem pseudorrealista" (1992, p. 2). Esta situação pode potenciar a ideia que a matemática escolar não é suficiente para resolver situações e problemas concretos, fazendo com que os alunos criem o pensamento que esta é inútil. Este aspeto reforça a perceção do especial cuidado que o professor deve ter na seleção de tarefas deste tipo, para não colocar em causa os seus objetivos. Claro que nem todas as situações abordadas em sala de aula têm que ser autênticas, mas penso que se não o forem, devem pelo menos envolver interpretações lógicas.

Se pensarmos um pouco sobre exemplos de aplicação da matemática em situações da sociedade, rapidamente encontramos exemplos que tenhamos vivido ou que alguém nos tenha abordado sobre o assunto, tanto a nível pessoal como profissional. A título de alguns exemplos, destaco a análise e decisão sobre os depósitos que nos são propostos pelos bancos, a interpretação de gráficos que nos são apresentados na televisão sobre a evolução económica, a consulta e escolha dos horários dos comboios ou autocarros, a interpretação de sondagens, a interpretação geométrica das opções de construção de pontes ou calçadas, a interpretação também geométrica de movimentações observadas em determinados desportos, como futebol, basquetebol ou rugby, o entendimento sobre a previsão de alterações climáticas, ou o cálculo mental na análise de um mapa. Estes são alguns exemplos que justificam que a escola deve dar uma formação matemática alargada e multifacetada aos jovens, se queremos que a escola os prepare realmente para os desafios da sociedade moderna (Silva, 1992).

Se a matemática está mais presente na sociedade, importa que o seu ensino potencie essa ligação. Para além do aumento da interpretação dos conceitos matemáticos resultantes do estudo das situações reais, há outras razões que justificam o ensino da matemática com recurso a situações reais. Segundo Silva.:

> não é verdadeiramente possível ensinar matemática, de forma eficaz, ensinando apenas a teoria. A teoria não existe por acaso, existe por alguma razão profunda enraizada na realidade do mundo que nos rodeia, e um aluno que não se aperceba dessa razão não pode fazer mais do que repetir mecanicamente a teoria, acabando por a esquecer facilmente (1992, p. 4).

Sebastião e Silva tinha resumido esta ideia anteriormente, afirmando que "a cultura científica resulta precisamente da síntese dos dois termos complementares: a teoria e a prática" (1977, p. 14). Assim, o envolvimento dos alunos em tarefas de modelação para além dos aspetos descritos, "valorizam fatores decisivos como a cooperação, o trabalho autónomo dos alunos, a possibilidade de se fazerem consultas, a utilização de variados instrumentos e o tempo" (Abrantes, 1992, p. 29).

2.2.4. Estudos empíricos sobre a modelação no ensino de matemática

Alguns estudos sobre tarefas que envolvem modelação matemática "apresentam melhorias quantitativas e qualitativas na aprendizagem da Matemática e sugerem ser esta uma área a explorar" (Ponte, Matos, & Abrantes, 1998, p. 181). Oliveira (2009) considera que os alunos se mostram surpreendidos por se aperceberem que até situações vulgares, que já vivenciaram no seu quotidiano, podem ser estudadas na disciplina de Matemática. Estas constatações ajudam os alunos a motivarem-se para aprender Matemática, ao entenderem a sua utilidade para o quotidiano.

Na sua investigação envolvendo alunos do 12.º ano, Torres (2007) realizou um estudo sobre o impacto da exploração do tema Aplicações e Modelação Matemática com recurso à calculadora gráfica e a sensores, tendo sido utilizadas estas tecnologias para efetuar recolha e tratamento de dados.

Este estudo teve os seguintes objetivos: (i) desenvolver atividades experimentais e de investigação às aplicações e modelação matemática; (ii) identificar dificuldades reveladas pelos alunos em contextos de aplicações e modelação matemática; (iii) caracterizar comportamentos e atitudes dos alunos face à utilização da calculadora e de sensores na modelação matemática; e (iv) avaliar o impacto da implementação das atividades de aplicação e de modelação matemática na aprendizagem dos alunos e nas suas perceções em relação ao ensino da matemática. Nas conclusões apresentadas por Torres (2007) resultantes da sua investigação, destaco algumas:

- As atividades exploradas envolvendo os alunos na criação de um modelo matemático, permitiram os alunos desenvolverem aprendizagens significativas. Afirma ainda que o tempo gasto pelos alunos na interpretação das situações foi diminuindo ao longo do estudo e que os alunos reconheceram vantagens neste tipo de tarefas.
- A utilização da tecnologia, e em particular da calculadora gráfica e sensores, promoveu e facilitou a aprendizagem dos alunos. Verificou que os alunos reconheceram que a utlização das tecnologias promoveu e facilitou a aprendizagem dos alunos nas aulas de Matemática.
- As atividades desenvolvidas em grupo fizeram com que cada elemento do grupo se esforçasse mais, colaborando mais do que habitual e ajudando na compreensão e no cumprimento das tarefas.
- A auto-construção do conhecimento despertou nos alunos a vontade de saber mais, responsabilizando-os também pela sua aprendizagem e pela dos seus colegas.

Ao nível das recomendações para as práticas do ensino envolvendo atividades de Aplicações e Modelação Matemática, por se tratar de um tema transversal, Torres sugere que “seja abordada com a profundidade necessária, ao longo de todo o ciclo, nos vários conteúdos em que pode estar integrada” (2007, p. 151). Sugere ainda que se poderia pensar numa vertente interdisciplinar, envolvendo professores de outras disciplinas, através de atividades em conjunto.

O trabalho de investigação desenvolvido por Oliveira (2009), que teve como objetivo estudar a compreensão dos alunos no tema funções do 9.º ano de escolaridade, envolvendo-os no desenvolvimento de atividades com aplicação e modelação matemática, com recurso à calculadora gráfica e sensores, conclui que:

- Os alunos devem ser habituados desde bem cedo a pensar sobre as tarefas propostas, a discutir os seus processos e resultados com os seus colegas para que possam ser validados e não se habituem a ouvir o professor a dizer o que devem fazer.
- Os alunos consideraram que o trabalho com tarefas que descrevem situações que lhes são familiares e que ao poderem efetuar recolha de

dados, percebendo assim como é que os valores surgem, fez com que se sentissem mais participativos e interessados nas atividades desenvolvidas nas aulas.

- Para os alunos, a oportunidade que tiveram de trabalhar com a calculadora gráfica foi enriquecedora para o seguimento dos seus estudos.

Oliveira (2009) sugere que será pertinente que ao longo dos diferentes anos de escolaridade, os alunos tenham oportunidade de resolver tarefas de aplicação e modelação matemática com a finalidade de se aperceberem que a Matemática não está desfasada da realidade, e que na disciplina de Matemática é possível efetuar experiências e ainda para se habituarem a este tipo de tarefas o mais cedo possível.

2.3. Estratégias de intervenção

No planeamento de uma intervenção pedagógica importa definir o que se pretende de uma forma clara. No meu trabalho, esta definição assentou essencialmente nos objetivos a que me propus no projeto de intervenção. Assim, partindo dos objetivos, o desafio de iniciar a planificação das intervenções representou um obstáculo, na medida em que senti que não bastava eleger algumas tarefas enquadradas com os temas que os alunos iriam desenvolver ao longo do programa. Dada toda a envolvente da intervenção, por ter a responsabilidade de ser agente de ensino-aprendizagem durante algumas aulas numa turma do 12.º ano no papel de professor estagiário, procurei criar toda uma dinâmica consistente, assente na definição dos vários conceitos que sustentassem a minha prática pedagógica.

2.3.1. Metodologias de ensino e de aprendizagem

Na fase de planificação das intervenções, tinha bem presente que aspirava desenvolver a intervenção pedagógica, segundo as orientações atuais para o ensino de Matemática, que se focam num conjunto de estratégias de ensino com a preocupação de promover a atividade do aluno, tentando desenvolver uma atitude ativa perante a aprendizagem, potenciando assim uma aprendizagem mais significativa através da exploração e discussão de novos conceitos.

Relembro que um dos aspetos observados ao longo das aulas foi precisamente a passividade dos alunos. Uma das formas de tentar contrariar esta postura seria, previsivelmente, evitar um ensino expositivo, centrado no professor. Apesar de não ter dúvidas sobre a estratégia de ensino a desenvolver, tive grandes dúvidas sobre a forma de o incrementar. Então, tentei interpretar claramente o conceito de estratégia no âmbito do ensino. Segundo Pocinho e Canavarro (2009, p. 15), estratégia de aprendizagem centrada no aluno pode ser entendida como:

- um processo de pensamento assumido pelo sujeito como forma de facilitar o processamento de informação;
- um comportamento, procedimento ou ação a que o sujeito recorre no sentido de concretizar os objetivos que estão subjacentes à aprendizagem;
- uma planificação que para além de contemplar um conjunto de procedimentos, pressupõe a organização de meios com vista à consecução de determinados objetivos.

Entendi que a aprendizagem centrada no aluno assenta numa ação e pensamento individual com o propósito de facilitar a sua aprendizagem, ou seja, nos procedimentos adotados facilitadores da assimilação e acomodação da informação, e por conseguinte, à sua subsequente utilização. Como resultado desta abordagem de aprendizagem, "está a constatação de que os bons alunos demonstram grande facilidade em analisar, planificar, executar e avaliar as tarefas académicas" (Pocinho & Canavarro, 2009, p. 15). Esta realidade revela que os alunos poderão ser capazes de desenvolver um pensamento estratégico, que é determinante para a capacidade de resolução de tarefas de modelação matemática.

Por outro lado, teria que evitar a aprendizagem centrada no professor, por estar relacionada com estratégias pedagógicas expositivas, que, segundo Canavarro, correspondem "à organização das diversas formas pelas quais um professor gere materiais, meios audiovisuais, a sala de aula e os comportamentos com o objetivo de criar o tal ambiente propício à aprendizagem" (1997, p. 121). Esta estratégia assenta num desenrolar da aula focado essencialmente nos meios que o professor promove para concretizar os objetivos de aprendizagem desejados. Ainda segundo o Canavarro (1997), esta estratégia de aprendizagem pode ser caracterizada em quatro tipos:

- Estratégias diretivas: ajudam o aluno a adquirir e a reter factos, ideias, acontecimentos;
- Estratégias mediativas: ajudam o aluno a desenvolver o raciocínio, a definir conceitos e a resolver problemas;
- Estratégias elaborativas: ajudam o aluno a desenvolver novas soluções, insights e criatividade;
- Estratégias colaborativas: ajudam o aluno a relacionar-se com os outros e a trabalhar cooperativamente.

Na prática, verifica-se que o ensino expositivo tem sido a estratégia “dominante em todo o tipo de ensino e por todo o mundo” (Canavarro, 1997, p.123), contrariando as orientações mais recentes para o ensino. No entanto, este tipo de ensino “mantém vitalidade num quadro de ensino moderno, desde que o professor não recorra exclusivamente a ele, nem apele à recitação por si só” (Pocinho & Canavarro, 2009, p. 17). Sendo assim, é pertinente ter presente que a aprendizagem se deve centrar no aluno, envolvendo-o de uma forma ativa na exploração de novos conceitos, potenciando assim uma aprendizagem mais significativa. Não obstante, ao longo das aulas também há espaço para momentos expositivos, centrados no professor, desde que a prática pedagógica não se centre nesta estratégia.

Tendo ficado clarificado o conceito de estratégia, procurei perceber quais as técnicas a seguir ao longo das aulas e quais seriam os procedimentos que vinculassem a estratégia adotada para atingir os objetivos propostos. As técnicas podem ser vistas como o manancial de procedimentos que o professor terá que implementar e gerir ao longo das aulas. Nas minhas aulas, procurei orientar a minha intervenção pedagógica com as seguintes técnicas: evitei alongar diálogos individualizados de forma a manter toda a turma focada no desenrolar da aula; quando coloquei uma questão a um aluno ou à turma, esperei algum tempo para que os alunos pensassem e respondessem; quando algum aluno apresentou alguma dúvida ou desenvolveu um raciocínio tentei envolver os colegas na discussão para desenvolver a argumentação matemática; tentei expandir um ambiente na sala de aula cordial, onde os alunos se sentissem motivados a participar; sempre que foram propostas tarefas aos alunos, defini de forma clara quais eram as regras de trabalho.

Estas são algumas técnicas que tive presentes, que ajudaram a que as aulas se desenvolvessem como planeado e num ambiente de trabalho desejado. Mas, mais importante que o leque de técnicas que o professor é capaz de gerir ao longo das aulas, é a forma como o faz, onde uma atitude positiva e dinâmica, assim como a experiência que vai adquirindo, podem funcionar como potenciadores na implementação e gestão dos procedimentos, influenciando de forma determinante a efetivação dos objetivos pretendidos.

Através das tarefas de modelação que desenvolvi, tive oportunidade de trabalhar com os alunos em grupo, tanto em díades, como em grupos de três, quatro ou cinco elementos, em função do tipo de tarefas propostas e dos materiais didáticos disponíveis. Houve ainda tarefas em grupo propostas para desenvolver em momentos extra aula, que implicaram a recolha de dados fora da sala de aula, e até mesmo, fora da escola, nos quais me mantive em contacto com os alunos, para esclarecer algumas dúvidas ao longo da realização dos seus trabalhos.

As propostas de trabalho em grupo tiveram como principal objetivo desenvolver a capacidade de argumentação dos alunos nos seus grupos, onde manifestaram não ter constrangimentos para discutir os seus raciocínios, confrontando-os com os seus colegas numa linguagem acessível e informal. Por outro lado, apesar das discussões dentro dos grupos dispersarem em função dos raciocínios dos seus elementos, que exigiram acompanhamento do professor, de forma a manter os grupos focados nos objetivos pretendidos, perspetivei que teriam resultados positivos nas aprendizagens, resultantes das discussões, da argumentação e do desenvolvimento da comunicação matemática, tanto no seio dos grupos, como nos momentos em que foi possível envolver o grupo turma nas discussões.

Para incentivar o interesse dos alunos no estudo de situações da vida real, integrei nas atividades desenvolvidas alguns recursos tecnológicos, tais como computadores com simuladores, calculadoras e sensores, que desafiaram o aluno a envolver-se na interpretação e na resolução da situação ou fenómeno em estudo, com o intuito de potenciar a compreensão dos conteúdos matemáticos tratados.

2.3.2. Estratégias de avaliação da ação

A estratégia de ensino está ligada com a forma como planifiquei e realizei a minha intervenção pedagógica, correspondendo à vertente prática de toda a envolvente do estágio. No entanto, este trabalho abarcou também uma envolvente de trabalho mais individual, que me permitiu estender a uma análise crítica sobre o trabalho desenvolvido no terreno (escola), cruzando-o com o projeto proposto inicialmente. Assim, penso que é importante ter presente o tipo de investigação a desenvolver, em particular, se iria recorrer a uma abordagem quantitativa, qualitativa ou misto. Atendendo à natureza das questões de investigação, adotei a abordagem qualitativa, por, segundo Bogdan e Biklen (1994), apresentar as seguintes características: (i) os dados recolhidos são ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico; (ii) as questões a investigar não se estabelecem mediante a operacionalização de variáveis, sendo sim, formuladas com o objetivo de investigar os fenómenos em toda a sua complexidade em contexto natural; e (iii) privilegia-se a compreensão dos comportamentos a partir da perspetiva dos sujeitos da investigação.

Segundo Flick (2005), as ideias principais de uma investigação qualitativa assentam numa correta escolha de métodos e teorias apropriadas, no reconhecimento e análise de diferentes perspetivas dos participantes, na reflexão do investigador sobre a investigação, como parte do processo de produção do saber e na variedade dos métodos e perspetivas envolvidos na investigação qualitativa.

No que se refere às técnicas de recolha de dados, no âmbito da investigação qualitativa, recorri a vários tipos. Segundo Hérbert, Goyette e Boutin (1995), estas podem ser divididas em três grandes grupos:

> - O inquérito, que pode tomar uma forma oral (a entrevista) ou escrita (o questionário);
>
> - Observação, que pode assumir uma forma direta sistemática ou uma forma participante;
>
> - Análise documental, que é uma análise de conteúdo que incide sobre documentos relativos a um local ou uma situação, corresponde, do ponto de vista técnico, a uma observação de artefactos escritos.

Por questionário ou entrevista, segundo Bogdan e Biklen (1994), entende-se meios que colocam as mesmas questões a todos os participantes no estudo, o que permite obter informação sobre as perspetivas que estes têm relativamente ao fenómeno em estudo, com o objetivo de obter os dados desejados com a máxima eficácia e a mínima distorção. Na minha intervenção, recorri ao questionário em três momentos. Apliquei um questionário no início (Questionário 1, Anexo 2), antes da intervenção pedagógica, no qual procurei averiguar a experiência dos alunos com tarefas de modelação matemática, o tipo de tarefas que tinham sido propostas até então na sua aprendizagem e a relação da Matemática com a vida real. Ao fim de algumas aulas, com o envolvimento dos alunos em tarefas de Modelação Matemática, pedi para responderem a outro questionário, desta vez em díades. Funcionou como um questionário intermédio (Questionário 2, Anexo 3), sobre a minha intervenção pedagógica, que teve como objetivo verificar a evolução das perceções dos alunos sobre o seu envolvimento em tarefas com base na vida real e recorrendo à modelação matemática. A recolha das perspetivas dos alunos no final da intervenção, também foi realizada através de um questionário (Questionário 3, Anexo 4), no qual tentei perceber se reconheceram que o desenvolvimento de tarefas de Modelação Matemática no estudo das funções exponencial e logarítmica ajudou na sua aprendizagem, através da ligação da Matemática com a vida real. Tentei também verificar se a intervenção que realizei permitiu aos alunos adquirir conhecimentos sobre o conceito de Modelação Matemática e sobre as fases essenciais da sua implementação.

No final da intervenção, apliquei também um inquérito individual a nove alunos, em formato de entrevista (Guião da entrevista, Anexo 5), com o objetivo de aprofundar alguns aspetos abordados no questionário final. Estas entrevistas foram realizadas a três alunos com resultados negativos nas avaliações, três alunos com resultados positivos médios e três alunos com muito bons resultados nas avaliações, com o objetivo de tentar perceber se o tipo de respostas tinha relação com o aproveitamento dos alunos nas avaliações.

Ao nível da observação, Hérbert et al. (1995) consideram que se trata de um método de recolha de dados com ênfase no quê ou quem observar, como observar, quando, onde e por quem. Para Flick (2005), a observação integra não só a perceção visual, mas também a perceção auditiva, tátil e olfativa. Na intervenção pedagógica, recorri à observação através de gravações áudio e vídeo, para as quais foram efetuados pedidos de autorização aos encarregados de educação e à direção da escola (Pedido de autorização, Anexo 6). As gravações áudio foram cruciais na recolha de momentos de discussão aluno-aluno e aluno-professor, em ambiente de sala de aula, que permitiram mais tarde desenvolver uma análise detalhada da evolução das aulas, fazendo uma decomposição crítica das atividades desenvolvidas pelos alunos. As gravações vídeo permitiram-me, durante a intervenção pedagógica, analisar a minha postura e as formas como promovia a comunicação matemática na sala de aula, e reformular as minhas estratégias de ensino. Após a minha intervenção pedagógica, as gravações em áudio permitiram-me registar diálogos que aconteceram em alguns momentos das aulas que lecionei.

A análise documental tem como objeto os documentos desenvolvidos pelos alunos durante a minha intervenção pedagógica, em particular, os registos realizados pelos alunos na resolução de tarefas propostas; o programa de Matemática A do ensino secundário e o manual escolar adotado pela escola.

CAPÍTULO 3

INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Antes de iniciar a concretização do meu projeto, fiz uma análise detalhada a todo o programa de Matemática A do Ensino Secundário. Esta análise consistiu em interpretar as orientações prescritas para a aprendizagem dos temas função exponencial e função logarítmica com recurso às tarefas de modelação matemática. Esta análise, conjuntamente com a do manual escolar adotado, ajudou-me a definir em que momentos do ano letivo poderia realizar as intervenções, enquadradas pelos objetivos do projeto de intervenção e, em simultâneo, pelo programa da disciplina. Na minha prática pedagógica, tentei seguir as indicações do programa, segundo o percurso de aprendizagem proposto para os temas referidos e a sequência prevista na planificação das aulas proposta aos professores pelo conselho pedagógico da escola.

Foram apresentados desafios aos alunos com base em situações do dia-a-dia, dando a possibilidade de interagir com a matemática, no sentido de desenvolver a exploração e identificação de um modelo matemático que melhor se ajustasse a dar resposta a uma determinada situação. As atividades dos alunos desenvolvidas na realização das tarefas, envolvendo o processo de modelação, foram consideradas desde a interpretação da situação problema, a recolha de dados, a discussão em grupo, os critérios utilizados para obter o modelo, o teste, a validação e generalização do modelo. Realço que nem todas as tarefas propostas aos alunos tiveram desenvolvimento de todas as fases previstas. Houve tarefas, que em função dos objetivos, não foi necessário realizar todas as fases que defini no processo de modelação matemática.

Nas tarefas propostas pelo manual do aluno, o modelo matemático é sempre dado, não sendo necessário desenvolver as fases de interpretação dos dados e a sua ‘manipulação’ para se obter um modelo matemático, fazendo com que este tipo de tarefa represente um problema de aplicação de conceitos matemáticos a uma determinada situação real e não uma tarefa de modelação onde é preciso recorrer a conceitos matemáticos para se obter uma solução de um determinado problema da vida real.

Como a implementação do programa da disciplina assentava essencialmente no manual escolar adotado pela escola, considerei ser pertinente para a minha formação fazer uma análise ao tema “Introdução ao Cálculo Diferencial II”, onde os subtemas “Função Exponencial e Logarítmica” estão inseridos. Nesta análise procurei fazer um levantamento de todas as tarefas propostas de forma a caracterizá-las quanto à sua tipologia, obtendo assim uma relação das que iria implementar do manual na minha intervenção e, por outro lado, que tipo de tarefas teria que selecionar noutras fontes para viabilizar um conjunto de atividades a desenvolver com os alunos com a abrangência necessária ao estudo que me propus realizar. Assim, propus tarefas em que foi necessário fazer recolha de dados e tarefas em que os dados eram facultados. Desta forma, os alunos tiveram que interpretar as situações e desenvolver todas as fases, ou parte das fases do processo de modelação Matemática.

3.1. Manual escolar

A análise ao manual escolar teve especial interesse por permitir conhecer com detalhe o material didático mais importante e mais utilizado na sala de aula (APM, 1998). Este conhecimento permitiu classificar as tarefas propostas no tema “Introdução ao Cálculo Diferencial II” quanto à sua tipologia. Por ouro lado, penso que seria irresponsabilidade da minha parte, implementar tarefas de modelação matemática, sem conhecer o manancial de tarefas propostas no manual, em particular, que tarefas de modelação eram propostas e a forma como estas eram apresentadas aos alunos.

A análise que me propus realizar teve como objetivo explorar o manual adotado na escola para o 12.º ano de escolaridade de Matemática A, detalhando as metodologias propostas no âmbito dos objetivos de aprendizagem no ensino secundário. Esta exploração foi feita a nível geral, mas com incidência mais detalhada num dos temas transversais do programa, a modelação matemática, e nos subtemas funções exponencial e logarítmica. Pretendi com esta análise ficar com um suporte teórico para fundamentar as minhas opções, quanto às tarefas que apliquei na minha intervenção pedagógica.

Recorri ao manual sempre que foi pertinente e enquadrado nos objetivos da minha intervenção. Sempre que não tive no manual o tipo de tarefas pretendidas, mas respeitando as orientações do programa para o ensino secundário, propus à turma tarefas extra manual. Nesta análise, procurei analisar o manual para o contexto de sala de aula, tentando perceber a tipologia de aula implícita, na forma como os conteúdos são introduzidos e desenvolvidos, os tipos de tarefas propostos e a pedagogia envolvida.

3.1.1. Orientações metodológicas

Ao nível das orientações gerais presentes no Caderno do Professor (Costa & Rodrigues, 2012), o manual apresenta orientações com algum detalhe por tema. Relativamente ao tema que orientou a minha intervenção pedagógica, Introdução ao Cálculo Diferencial II, são apresentadas as seguintes orientações metodológicas:

- Solicitar, frequentemente, que os alunos descrevam com pormenor, oralmente e por escrito, os raciocínios efetuados;
- Recorrer à resolução de problemas para introduzir novos conceitos;
- Desenvolver a compreensão de procedimentos algébricos e utilizá-los a par da utilização da calculadora gráfica;
- Apresentar situações que permitam fazer experiências numéricas e gráficas no estudo dos limites;
- Diversificar as propostas de modo a integrar, de forma oportuna, a utilização de tecnologia;
- Estudar a influência da mudança de parâmetros na escrita da expressão que define a função com apoio gráfico.

Nas orientações gerais para o tema estudado, Introdução ao Cálculo Diferencial II, verifica-se que o manual apresenta com detalhe orientações metodológicas para cada um dos temas estudados, enquanto o programa apenas define estas orientações para todo o ensino secundário. Nestas diferenças, entendo que os autores do manual trabalharam na interpretação das orientações gerais para o ensino secundário de forma a definirem as orientações mais específicas para cada tema. Apesar de definirem vários aspetos comuns entre os três temas do 12.º ano, “Probabilidades e Combinatória”, “Introdução ao Cálculo Diferencial II” e “Trigonometria e Números Complexos”, este detalhe ajuda a identificar com mais precisão alguns aspetos de cada tema.

Ao nível das orientações metodológicas para o estudo do tema transversal, modelação matemática, a situação inverte-se, passando apenas a estar presente no programa de ensino, das quais destaco as seguintes:

- Usar a modelação com funções exponenciais e logarítmicas, usando as capacidades da calculadora gráfica e a análise algébrica da adequação de um modelo fornecido;
- Discutir o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo real a partir da resolução de problemas de otimização.

Assim, nas orientações metodológicas para os subtemas funções exponencial e logarítmica, o programa é preciso, enquanto no manual não é feita qualquer referência para os subtemas. De qualquer forma, penso que a ideia de recorrer ao programa deve fazer parte da prática de qualquer professor, uma vez que este deve ser sempre o ponto de partida de qualquer instrumento pedagógico, quer se trabalhe ou não com um manual que tenha sido desenvolvido seguindo rigorosamente todo o programa.

Na análise destas orientações, apresentadas no programa, fica patente a importância atribuída à Modelação Matemática, onde o professor deve ter presente no estudo de todos os temas, que, sempre que for possível, deve implementá-las, proporcionando aos alunos momentos de aplicação da Matemática à realidade, com ligação a outras ciências e com elevado grau de interpretação dos conceitos, resultante do desenvolvimento do processo de modelação.

Ao nível dos conteúdos abordados pelo manual, este segue inteiramente o que está prescrito no programa. No que respeita à utilização da tecnologia, que é indicada no Programa do Ensino Secundário como sendo de utilização obrigatória, "que, além de ferramenta, é fonte de atividade, de investigação e de aprendizagem" (Ministério da Educação, 2002, p. 10). O manual dá ênfase à utilização da calculadora, considerando assim as orientações prescritas. A este nível, o papel do professor é determinante para proporcionar momentos de aula que vão ao encontro dos objetivos de utilização da tecnologia, que "não deverá ser utilizada como uma substituição para a compreensão e intuição elementar, pelo contrário, poderá e deverá ser usada para estimular essa compreensão e intuição" (NCTM, 2007, p. 26).

Na resolução das tarefas é suposto que o manual faça referência à utilização de materiais didáticos. De facto, o manual propõe a articulação com materiais didáticos ao longo do tema, mas limita-se à calculadora, sendo propostos vários exercícios com sugestão da sua utilização. Para reforçar esta utilização, são também apresentadas no manual resoluções de tarefas com recurso à calculadora (Costa & Rodrigues, 2012). No entanto, não é feita referência à utilização de outros materiais, tais como, computadores ou sensores.

3.1.2. Análise do manual escolar no tema cálculo diferencial

No tema em análise, o manual apresenta uma página com uma contextualização histórica, destacando alguns matemáticos que contribuíram para o seu desenvolvimento. Note-se que esta contextualização teórica apenas é apresentada no início do tema, não voltando a repetir-se em qualquer subtema, como, por exemplo, poderia ser feito especificamente na introdução da função exponencial. Estes aspetos também se verificam nos restantes temas. Realço, no entanto, que ao longo do tema são apresentadas caixas de texto com curiosidades históricas sobre os conteúdos, que acabam por ajudar a contextualizá-los, embora de uma forma muito sintética. Verifica-se que no tema de probabilidades e combinatória estas caixas são mais frequentes que no tema cálculo diferencial.

Na introdução de novos conceitos, o manual tem por regra propor uma tarefa exploratória, onde se entende que o professor deverá envolver o aluno na construção do conhecimento matemático, atendendo aos seus conhecimentos prévios. No seguimento desta exploração, são introduzidos os novos conceitos, com breves explicações e respetivas formalizações e generalizações. Ao longo deste processo, em muitas situações são convocados conhecimentos já aprendidos (em formato de caixa de texto com título "Recorda"), com o objetivo de destacar o que é novo para o aluno. Depois da formalização dos novos conceitos são apresentadas tarefas exemplo resolvidas com breves explicações.

Na análise da tipologia de tarefas propostas, considerei, tal como refere Ponte (2005), que "as tarefas podem ser de muitos tipos, umas mais desafiantes, outras mais acessíveis, umas mais abertas e outras mais fechadas" (p. 1). Segundo estas características, fiz uma análise dos tipos de tarefas que o manual sugere, relacionando-as com as que são destacadas por este autor:

— *Exercício*: pressupõe uma atividade curta (desafio fechado), de treino, com aplicação imediata com baixo grau de dificuldade dos conhecimentos aprendidos na sua resolução. Fazendo a ligação desta interpretação com o manual, identifico tarefas com estas características com as seguintes designações: "exercícios", "para praticar" e "para avaliar". Realço no entanto que no manual as tarefas "para avaliar" estão divididas em "questões de escolha múltipla" e "questões de desenvolvimento", nas quais eu entendo que as primeiras devem ser vistas como exercícios e as segundas como tarefas de exploração.

— *Problema*: deverá representar uma atividade de curta duração (desafio fechado) com um grau de exigência em que o aluno não seja capaz de o resolver imediatamente, implicando uma interpretação cuidada do que é pedido, representando um desafio. Ao longo do tema no manual, este tipo de tarefa surge com a designação de "tarefa".

— *Exploração*: deverá ser uma atividade de longa duração (desafio aberto), mas com baixo grau de dificuldade, devendo o aluno "começar a trabalhar desde logo, sem muito planeamento" (Ponte, 2005, p. 8). No manual estas surgem designadas como "desafios".

— *Investigação*: atividade de longa duração (desafio aberto) com elevado grau de dificuldade, podendo ser também designado por projeto, envolvendo elevado "risco de os alunos dispersarem pelo caminho" (Ponte, 2005, p. 9). Não identifico correspondência deste tipo de tarefa com as que são propostas ao longo do tema.

Realço que uma tarefa de modelação matemática tanto pode representar uma tarefa do tipo problema, como de exploração ou até de investigação, em função da forma como é apresentada ao aluno, o grau de dificuldade envolvido, as fases do processo de modelação necessárias e o tempo de execução.

Apresentadas as tipologias de tarefas com as quais me identifico para implementar com os alunos no processo ensino-aprendizagem e fazendo a respetiva correspondência com as tarefas propostas pelo manual, o seguinte quadro é elucidativo da forma como estão distribuídas ao longo do tema, com indicação do número de tarefas de cada tipo.

Quadro 4: Tarefas propostas pelo manual no tema Introdução ao Cálculo Diferencial II

Tipo de tarefa	Designação no manual	Frequência	Total
Exercício	Exercício	56	
	Para praticar	41	
	Para avaliar (questões de escolha múltipla)	5	102
Problema	Tarefas	12	12
Exploração	Desafios	1	
	Para avaliar (questões de desenvolvimento)	4	5
Investigação	-	0	0
Modelação	-	0	0

Na análise do quadro verifica-se que o manual apresenta um grande número de exercícios comparativamente com os restantes tipos de tarefas, ficando a ideia que o professor deverá complementar as suas aulas com outros tipo de tarefas, uma vez que o manual é bastante restritivo na proposta de problemas e tarefas de exploração. Fica ainda ao critério do professor desenvolver tarefas de investigação e de modelação, uma vez que, segundo a minha interpretação sobre as tipologias de tarefas, o manual não as propõe.

Ao nível da tipologia de ensino implícito no manual, com base na análise da forma como está implementado o tema, ao nível da introdução e exploração dos conceitos, o manual tem alguns aspetos que poderiam ser melhorados. As introduções poderiam ser mais frequentes dando ao aluno a oportunidade de contextualizar a importância dos temas ao longo da história. A perceção da evolução histórica dos temas estudados daria mais sentido e significado, com maior ligação à atividade matemática.

Na introdução de conceitos, as explicações podiam ser mais alongadas e amplas, no sentido de apelar à interpretação autónoma do aluno. Desta forma, trabalha-se pouco a comunicação matemática, porque as explicações são muito breves, fazendo com que o aluno fique mais dependente do papel do professor (como explicador). Estamos perante aspetos que potenciam o ensino direto ou expositivo, “onde o professor assume um papel fundamental como elemento que fornece informação de modo tanto quanto possível claro, sistematizado e atrativo” (Ponte, 2005, p. 12).

Por outro lado, a maior quantidade de tarefas do tipo exercícios de aplicação e resolução imediata faz com que o manual aponte para a reprodução e não para a construção do conhecimento do aluno. Segundo Ponte, “as tarefas de cunho mais aberto são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas” (Ponte, 2005, p. 17). Mais uma vez, é importante o papel do professor, onde a capacidade de fazer adaptações das tarefas propostas e integração de outros tipos de tarefas é crucial para desenvolver momentos de aprendizagem centrados no aluno, no sentido de desenvolver estratégias de ensino-aprendizagem exploratórias, onde o “professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem” (Ponte, 2005, p. 13). Com este apoio ao ensino proporcionado pelo professor, as práticas pedagógicas vão ao encontro das sugestões do programa do ensino secundário, onde se destaca a “importância das atividades a selecionar, as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico,...,e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação” (Ministério da Educação, 2002, p. 12). Assim, a necessidade do professor efetuar a “escolha sensata dos problemas e a utilização e adaptação de problemas, a partir dos materiais didáticos, revelam-se tarefas complexas no ensino da matemática” (NCTM, 2007, p. 58).

Em suma, após a análise do manual penso que o papel do professor é fundamental, uma vez que me parece que a maioria dos alunos não será capaz de desenvolver a sua aprendizagem exclusivamente através do manual, dado que este apela pouca à autonomia. No entanto, o facto de isso não acontecer não deverá significar uma limitação para o professor, bem pelo contrário, fica bem clara a necessidade de complementar o ensino com outros tipos de recursos, conforme está previsto no programa. Num estudo sobre o manual escolar na prática docente, Viseu et al (2009), concluem que no desenvolvimento profissional do professor “o manual tende a assumir um papel de formação complementar, servindo de instrumento de autoformação científica e pedagógica” (p. 12). Segundo esta perspetiva, há a possibilidade do professor se limitar e desenvolver apenas a tipologia de ensino implícito no manual, correndo o risco de não ter uma visão abrangente e crítica sobre as suas práticas, assim como sobre os objetivos gerais do ensino-aprendizagem. Para contrariar esta conceção de ensino, o professor deve ter presente ao longo da sua prática a necessidade de proporcionar momentos com diferentes tipos de tarefas e envolvendo os alunos, respeitando as orientações do programa de ensino.

3.2. As tarefas de modelação no ensino e na aprendizagem das funções exponencial e logarítmica

Neste subcapítulo apresento resultados que ilustram a minha intervenção com detalhe sobre as atividades desenvolvidas pelos alunos, assim como sobre as dificuldades que revelaram no desenvolvimento das fases de modelação nas tarefas propostas no âmbito do ensino-aprendizagem das funções exponencial e logarítmica.

Na fase inicial deste estudo propus algumas tarefas que envolviam conceitos dos anos anteriores, tais como polinómios de primeiro grau, para que os alunos se familiarizassem com o conceito de modelação matemática e com as fases previstas na modelação, uma vez que tinha verificado no questionário inicial aos alunos, que estes não tinham experiência neste tipo de tarefas.

Na minha intervenção propus tarefas com diferentes vertentes pedagógicas. Tive a oportunidade de implementar uma tarefa na introdução da função exponencial e outra na introdução do modelo logístico. No entanto, todas as outras tarefas implementadas incidiram no aprofundamento do estudo das funções exponencial e logarítmica. Isto deveu-se ao facto dos alunos não estarem familiarizados com este tipo de tarefas, que juntamente com o grau de dificuldade inerente ao estudo das funções poderia tornar a aprendizagem inalcançável para a maioria deles. Assim, ao propor tarefas de modelação para aprofundar a aprendizagem, os alunos deveriam sentir mais segurança na sua exploração, dado que já tinham aprendido os conceitos matemáticos em momentos anteriores. Por outro lado, o tipo de tarefas que consegui reunir que permitiam desenvolver atividades de Modelação Matemática representavam desafios para os quais os alunos necessitavam ter aprendido antes os conceitos envolvidos, podendo assim aprofundar o seu estudo com ligação à vida real.

As tarefas que propus foram trabalhadas em grupo tanto na sala de aula como fora da sala, que envolveram os alunos nos processos de recolha de dados para depois ser possível desenvolver o processo de modelação matemática. No quadro seguinte apresento as tarefas de modelação matemática propostas ao durante e intervenção pedagógica:

Quadro 5: Atividades de modelação matemática desenvolvidas com os alunos.

Tópico	Tarefa	Objetivos
Introduzir as fases do processo de modelação	A aprendizagem e o problema do presidente	Estudo de uma situação real na introdução das fases do processo de modelação matemática
Regressão linear	Travagem simples	Desenvolver o processo de modelação com uma situação real simples
Regressão não linear	Travagem em asfalto seco e molhado	Esgotar o conceito de regressão linear
Introdução do estudo da função exponencial	Travagem em gelo	Introdução da função exponencial envolvendo modelação matemática
Aprofundar o estudo função logarítmica	Censos nos EUA	Aprofundar a aprendizagem da função logarítmica envolvendo modelação matemática
Aprofundar o estudo da função exponencial	Modelo geral de arrefecimento de Newton	Aprofundar a aprendizagem da função exponencial envolvendo modelação matemática
Aprofundar o estudo das funções exponencial e logarítmica	Esperança de vida	Manipular os dados para obter modelos matemáticos com base em diferentes tipos de funções
Aprofundar o estudo do modelo logístico	Clube de matemática	Estudo analítico de funções envolvendo modelação matemática
Aprofundar o estudo do modelo logístico	A inteligência do rato	Estudo analítico de funções envolvendo modelação matemática
Modelação matemática	Planos de poupança	Desenvolver todo o processo de modelação, desde a recolha de dados fora da sala de aula
Modelação matemática	Escola amiga – distribuição de calças	Desenvolver todo o processo de modelação, desde a recolha de dados fora da sala de aula
Modelação matemática	Escola amiga – distribuição de calçado	Desenvolver todo o processo de modelação, desde a recolha de dados fora da sala de aula

Durante a minha intervenção pedagógica, que decorreu em 14 aulas, conforme previsto, não desenvolvi tarefas de modelação matemática em todas elas.

Penso ser pertinente desenvolver a análise de parte das tarefas implementadas, incidindo sobre as que julgo ser as mais elucidativas das práticas desenvolvidas e resultados obtidos, tanto pelos alunos como pelo professor, no estudo das funções exponencial e logarítmica envolvendo tarefas de modelação matemática. Apresento a análise de tarefas que desenvolvi em momentos de introdução e em momentos para aprofundar o estudo dos temas.

3.2.1. Introdução do conceito de função exponencial

A introdução do conceito de função exponencial através da modelação de uma situação real que traduz a travagem de um automóvel em gelo (Anexo 10). A tarefa consistia em simular a distância de travagem de um automóvel, em função da velocidade em piso com gelo, e identificar que o crescimento se acentuava à medida que os valores aumentavam. Recorrendo a um simulador de travagem automóvel, disponível num *site* sobre circulação rodoviária (www.velocidade.prp.pt), foi possível simular distâncias de reação dos condutores e distâncias de travagem dos automóveis em função da velocidade de circulação e em função das condições do piso (piso seco e molhado em alcatrão, terra, gelo e neve). Os alunos foram organizados em grupos de três e de quatro elementos por cada computador e iniciaram as respetivas atividades.

1) Considera que a estrada se encontra com gelo. Com recurso ao simulador e à calculadora, modela esta situação.
Simula e regista na tabela diferentes distâncias de travagem em função da velocidade e calcula a razão entre as distâncias de travagem e as velocidades. Que conclusões se podem tirar?

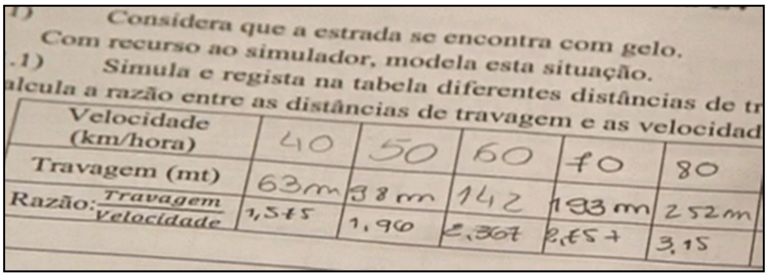
Como os alunos já tinham desenvolvido uma tarefa antes desta, que recorria ao mesmo simulador, mas com piso noutras condições, não apresentaram dificuldades na utilização do software para realizar as simulações e obter os dados pedidos. A figura seguinte ilustra a interface do software para realizar as simulações.

Figura 2: Interface do software de simulação de travagem rodoviária

Na interpretação da informação presente no simulador, os alunos tinham que perceber que a barra número um corresponde à distância e respetivo tempo que o condutor demora a reagir até começar a travar; a barra número dois é referente à travagem do automóvel; e a barra a número três representa o tempo e a distância total percorrida desde que o condutor avista o obstáculo até parar. A janela que é visível no meio da imagem diz respeito ao resumo de informação que o software apresenta no final de cada simulação.

Professor: Então para 40 km/h a distância de travagem é de 63 metros. Simulem agora para 60 km/h.
Aluno A1G1: São 142 metros.
Professor: E para 80 km/h?
Aluno A2G2: São 252 metros.
Professor: Para 100 alguém tem?
Aluno A2G2: Temos nós, são 393 metros.
Professor: Vão calculando a razão entre a travagem e a velocidade. O que está a acontecer à razão?
Aluno A2G2: Aumenta.
Professor: Como é que vamos modelar esta situação?
Aluno A3G3: Temos que meter na máquina.
Professor: Simulem só uma distância superior a 100 km/h.
Alunos: Não dá.
Professor: Então como é que conseguimos simular valores acima de 100 km/h?
Aluno A3G3: Se conseguirmos encontrar um modelo.

Nesta fase da tarefa, os alunos mostraram perceber que para obter distâncias percorridas com velocidades superiores a 100 km/h teriam que desenvolver um modelo para estimar os valores. Na figura seguinte, temos um exemplo reproduzido por um grupo onde é possível verificar que a razão entre a travagem e a velocidade aumenta à medida que aumenta a velocidade.



Considera que a estrada se encontra com gelo.
Com recurso ao simulador, modela esta situação.
.1) Simula e regista na tabela diferentes distâncias de tr
alcula a razão entre as distâncias de travagem e as velocidad

Velocidade (km/hora)	40	50	60	70	80
Travagem (mt)	63m	98 m	142	183 m	252m
Razão: $\frac{\text{Travagem}}{\text{Velocidade}}$	1,575	1,96	2,367	2,657	3,15

Figura 3: Recolha de dados pelos alunos

Com os dados recolhidos, os alunos introduziram-nos na tabela de estatística da calculadora para obter o modelo matemático que melhor se ajustasse a esses dados.

Define um modelo matemático que traduz a distância de travagem em função da velocidade. Identifica o tipo de função associada, fundamentando a escolha do modelo?

Depois dos dados introduzidos na calculadora, os alunos visualizaram a representação gráfica da distância de travagem em função da velocidade:

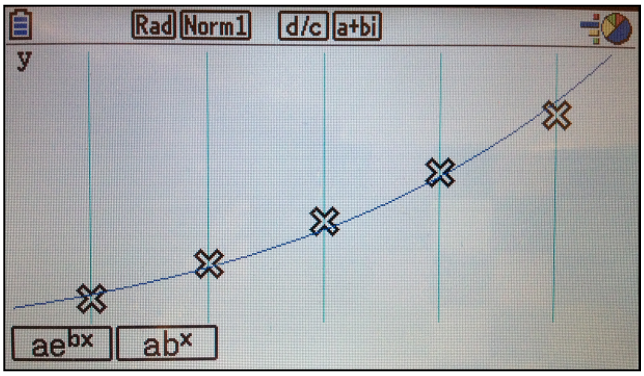


Figura 4: Representação gráfica dos dados da tarefa travagem no gelo

A exploração dos diferentes modelos contemplados na calculadora gráfica levou os alunos a concluir qual, ou quais seriam os tipos de funções mais ajustados na obtenção de um modelo matemático que representasse corretamente a situação em estudo.

Professor: Então qual é o modelo mais ajustado?
Aluno A2G2: É uma exponencial.
Professor: O que é que está a acontecer a estes valores, em relação aos anteriores, à medida que os aumentamos?
Aluno A4G4: Crescem mais.
Professor: Como o crescimento se acentua, a função exponencial tornou-se mais adequada na representação da situação?

Em conjunto com os alunos, percorri os vários tipos de funções disponíveis na calculadora para efetuar a regressão, avaliando qual apresentava os melhores parâmetros de validação do modelo. Com base na representação gráfica e nos dados, o modelo matemático mais ajustado correspondeu a uma função potência. A função exponencial, apesar de também apresentar parâmetros de validação aceitáveis (r=0,99485 e MSE=0,0041175), estes eram inferiores aos da função potência (r=0,99999 e MSE=0,0000066109). O modelo obtido representado pela função exponencial foi y = 16,861 × $e^{0,0345x}$, sendo x a velocidade em km/h e y a distância de travagem em metros.

O envolvimento da turma ajudou os grupos mais atrasados a perceber como se chegou à função exponencial. Este envolvimento permitiu identificar e distinguir algumas características da função exponencial, que iriam ser aprofundadas e estudadas nas aulas seguintes. A principal característica identificada, resultante deste processo, foi o tipo de crescimento que temos numa função exponencial, ou seja, cresce pouco para valores pequenos e depois tende a ser cada vez mais acentuado. Esta característica foi sendo identificada comparativamente com os outros tipos de funções que foram surgindo ao longo das atividades desenvolvidas. No final da tarefa, formalizei no quadro a definição de função exponencial.

Esta foi a primeira aula da minha intervenção pedagógica na qual implementei tarefas de modelação matemática no estudo dos temas no âmbito do meu projeto de intervenção, revelando-se crucial para a minha experiência e para as aulas seguintes. As aulas nas quais tinha participado até aqui foram realizadas na sala onde normalmente a turma tem aulas e envolvendo tarefas de duração mais curta.

Para esta aula foi necessário mudar para uma sala de computadores, que tem configuração diferente, estando as mesas dos alunos distribuídas em forma de "u", o que fez com que os alunos ficassem de costas para o quadro e virados para os computadores. Na gestão das atividades, o papel do professor foi fundamental pelo facto dos alunos ainda não estarem familiarizados com a utilização na calculadora gráfica de tabelas e de curvas de regressão para obter modelos matemáticos. Como esta tarefa foi longa, os grupos revelaram diferentes ritmos de trabalho, o que fez com que poucos grupos chegassem ao comportamento da uma função exponencial.

Nesta aula fiquei aquém do que tinha planeado devido à mudança de sala e à acomodação dos alunos, que implicou um atraso de cerca de 20 minutos no seu início. O facto de os alunos estarem de costas para o quadro enquanto trabalhavam nos computadores, limitou a comunicação entre alunos-professor e alunos-alunos. Por todos estes imprevistos, ponderei, logo no início da tarefa, se tentava implementar todo o plano previsto ou se abdicava e seguia até onde fosse possível. Optei por implementar o plano, uma vez que tinha previsto a introdução do conceito da função exponencial para o final da aula.

Se não chegasse ao final da tarefa ficaria apenas pela fase de exploração, não apresentando a formalização dos conceitos novos. Ao impor um ritmo elevado para cumprir o plano, apercebi-me que alguns alunos não acompanharam a exploração de forma efetiva, perdendo-se assim parte do seu propósito. Como consequência, no momento da formalização do conceito de função exponencial alguns alunos tiveram dificuldade em interpretar o que a distingue dos outros tipos de funções.

Com a experiência desta aula retirei ilações para aulas futuras: (i) quando se desenvolve tarefas com os alunos fora do ambiente habitual deve-se prever algum tempo para a adaptação e acomodação ao novo espaço e equipamentos; (ii) se durante a planificação da aula se identificar que esta estará sujeita a condições que podem alterar o desenvolvimento previsto, será preferível diminuir à fase de exploração, fazendo com que a introdução e formalização de novos conceitos ocorram bastante antes do final da aula, deixando a parte final para momentos de prática dos alunos. Desta forma, salvaguarda-se que o momento principal de aprendizagem não corra o risco de ser excluído da aula, ou, como aconteceu, o professor opte por liderar a aula sem envolver os alunos em discussão e reflexão por falta de tempo.

No final da aula, pedi aos alunos que realizassem um pequeno relatório para entregar na aula seguinte, onde os questionava sobre as atividades que desenvolveram no processo de modelação, o que aprenderam na aula e que dificuldades sentiram.

Após a análise das suas respostas, dos dezasseis alunos que entregaram, de uma forma geral descreveram que sentiram dificuldades em acompanhar a aula devido ao ritmo imposto, como exemplifica a resposta de um dos alunos:

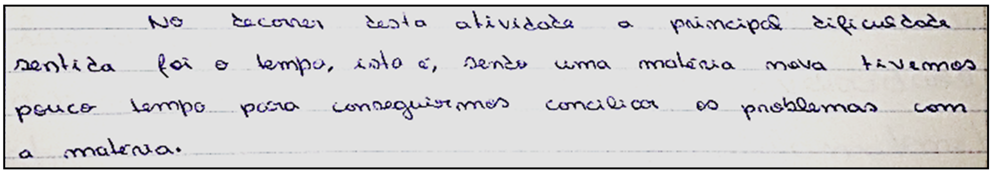

No decorrer desta atividade a principal dificuldade sentida foi o tempo, isto é, sendo uma matéria nova tivemos pouco tempo para conseguirmos conciliar os problemas com a matéria.

Figura 5: Dificuldades sentidas pelos alunos numa tarefa com modelação matemática.

Em termos pessoais senti algum constrangimento ao ver-me impor um ritmo de aula acelerado para cumprir o plano, verificando que alguns dos alunos não estavam a acompanhar, não sendo desta forma possível envolver a turma em mais momentos de discussão durante a fase de exploração. No entanto, ao levar os alunos para uma sala com simulador informático, pretendia precisamente o contrário, que era colocá-los perante o desafio de estudar uma situação que está presente nas suas vidas, para depois importar para a matemática através da sua interpretação e discussão, com recurso ao processo de modelação matemática, que culminaria na introdução do conceito da função exponencial.

3.2.2. Aprofundar o estudo da função logarítmica

No desenvolvimento da função logarítmica propus aos alunos, organizados em díades, a resolução da seguinte tarefa (Anexo 11):

Os censos nos EUA revelaram os seguintes dados sobre as taxas de casa própria.

Ano	% casa própria
1940	43.6
1950	55.0
1960	61.9
1970	62.9
1980	64.4
1990	64.2
2000	67.4

Considera t=0 o ano de 1900.
Define um modelo para prever a taxa de aquisição da casa própria em 2010.

Na primeira fase de resolução não dei qualquer orientação e permiti algum tempo para desenvolverem as suas interpretações. Ao percorrer os grupos, verifiquei que a maior parte dos alunos não teve dificuldades em introduzir os dados na calculadora e obter a seguinte representação gráfica:

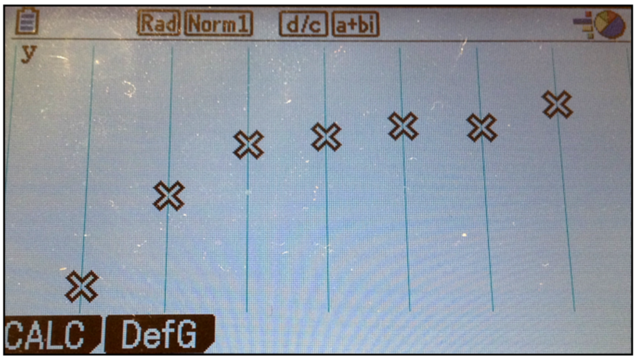


Figura 6: Representação gráfica dos dados da tarefa Censos nos EUA.

Houve um par de alunos que teve dificuldades em obter o modelo. Os restantes pares recorreram à calculadora, mas alguns deles manifestaram dificuldades na fase de manipulação dos dados para obter o modelo matemático:

A1P1: Como é que vamos fazer o modelo?
Prof: Acho que não vais conseguir por processos analíticos. Como é que estás a pensar fazer?
A1P1: Vou pôr os valores todos na tabela da calculadora.
Prof: Antes de percorrer os tipos de funções para obter o modelo, o que é que podes fazer?
A1P1: A representação gráfica.
Prof: Então consegues ter noção que tipo de função será um bom modelo para a situação? Pelo gráfico, que tipo de função temos?
A2P1: Exponencial.
Prof: Desenha no caderno o gráfico de uma função exponencial. Então?
A1P1: É uma logarítmica.
Prof: Então, para fazer a regressão na máquina carregas em "CALC" e como estão à espera que seja uma função logarítmica, podem começar por escolher "Log" e avaliar.

Outro par de alunos estava inseguro quanto aos procedimentos a seguir:

A1P2: Professor, como é que obtemos o modelo?
Prof: O que é que já fizeram?
A1P2: Fomos ao menu de estatística, às tabelas, colocamos os valores. Depois "CALC"...
Prof: Espera. Porque estás a pôr na tabela 0.64?
A1P2: Porque é a percentagem.
Prof: Repara, nesta situação estás à procura de um modelo que relacione a variável independente com a dependente. Podes obter essa relação das duas formas, mas como os dados são apresentados em percentagem, podes trabalhar com os valores da tabela.
A1P2: Então ponho 43.6?
Prof: Sim. E em 1940 qual é valor de t?
A1P2: É 40.
Prof: Agora vamos escolher o tipo de função mais ajustado. Como é que podemos prever o tipo de função sem ter que percorrer todas as opções da máquina para ver qual é a mais ajustada?
A1P2: Vemos o gráfico. Ah, parece uma cúbica, não?
A2P2: Uma exponencial!
A1P2: Não, não é exponencial!
Prof: O crescimento é acelerado no início e depois tende a estabilizar.
A1P2: É uma logarítmica. Pois esta é ao contrário da exponencial.
Prof: Pronto, então carregam em "CALC", escolhem "Log" e confirmam se é um bom modelo.

Verifiquei também que um dos pares chegou ao modelo sozinho:

Prof: Qual foi o modelo que obtido?

A1P1: Uma logarítmica.

Prof: Qual foi o raciocínio que fizeram para concluir que se trata de uma logarítmica?

A1P1: Pela observação do gráfico. E quando é uma exponencial, como é que sabemos qual é a base que devemos escolher?

Prof: É indiferente. O coeficiente de correlação que a máquina dá é o mesmo?

A1P1: Sim.

Prof: A máquina tem a capacidade de ajustar o modelo em função da base escolhida, mantendo o rigor do modelo. Podes trabalhar com a base que preferires.

Este par de alunos mostrou-se surpreendido ao aperceberem-se que na escolha de bases diferentes na função exponencial se obtém modelos diferentes mas mantém-se os valores dos parâmetros de validação (coeficiente de correlação e valor do método dos mínimos quadrados). Na definição do modelo matemático para prever a taxa de aquisição da casa própria em 2010, um dos pares, com base no modelo obtido na calculadora, calculou o valor de $t(110)$, que deu 71.31%, percentagem de famílias que terão casa própria no ano de 2010 nos EUA.

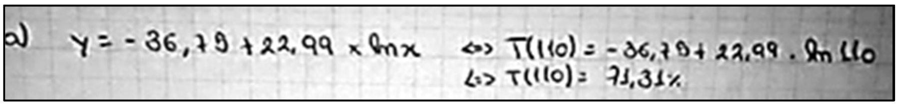


Figura 7: Estimativa de percentagem de famílias com casa própria em 2010 nos EUA.

Na comparação da "taxa de posse de casa real em 1950 para a taxa dada pelo modelo, o que se pode concluir?", não surgiram dúvidas por parte dos alunos:

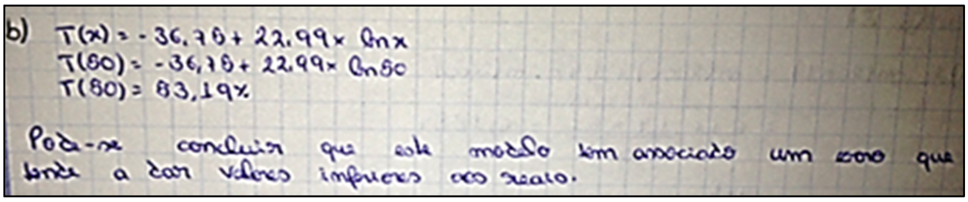


Figura 8: Comparação dos valores reais com os estimados pelo modelo matemático.

Os alunos estimaram que deveria haver 53.19 % de famílias com casa própria no ano de 1950. O par da resolução apresentada na Figura 8 concluiu que o modelo tende a dar valores inferiores aos reais.

Esta tarefa representou um desafio para os alunos ao nível dos procedimentos a seguir na procura do modelo matemático que representava a situação. Foi também um desafio ao nível da utilização da calculadora, onde era necessário percorrer vários menus relativos aos tipos de funções disponíveis na calculadora para realizar a regressão e avaliar os modelos matemáticos apresentados nos vários tipos de funções. A manipulação da calculadora permitiu aos alunos interpretar os conceitos matemáticos envolvidos. De um modo geral, na resolução desta tarefa os alunos mostraram-se interessados e motivados em desenvolver as suas atividades.

3.2.3. Aprofundar o estudo da função exponencial

No final do estudo da função exponencial selecionei uma tarefa que permitisse aprofundar os tópicos estudados, que foi resolvida pelos alunos em grupos de quatro elementos. A tarefa consistiu em testar o modelo geral de arrefecimento de Newton, que recorre a uma função exponencial para estimar a temperatura de um líquido ao longo do tempo no seu arrefecimento, quando existe diferença entre a sua temperatura e a temperatura ambiente.

A experiência consistiu em colocar água quente numa vasilha e através de um analisador de dados, com sensor de temperatura, efetuar a leitura desta durante cinco minutos. O analisador de dados estava ligado a uma calculadora gráfica, conforme é visível na figura seguinte. Desta forma, foi possível visualizar na calculadora a evolução do gráfico da temperatura em graus Celsius em função do tempo em segundos.

Figura 9: Material utlizado na tarefa do modelo de arrefecimento de Newton.

Por forma a garantir que todos os grupos obtinham os dados corretamente e também pelo facto de não ter analisadores suficientes para todos os grupos, optei por efetuar medições apenas com um sensor. Assim, expliquei os procedimentos aos alunos, informando que íamos efetuar as medições da temperatura durante cinco minutos, que foram registadas no quadro até completar cinco minutos. Como a explicação inicial foi bastante detalhada, os alunos perceberam o que se pretendia com a tarefa. Essa explicação foi reforçada durante os cinco minutos em que os dados foram recolhidos, nos quais os grupos foram discutindo no seu seio qual seria o caminho a seguir.

Para esta tarefa, não dei orientações aos alunos sobre o caminho que deveriam seguir, ou seja, se tentavam obter o modelo “manualmente” por manipulação analítica dos dados, ou se recorriam à calculadora para obter um modelo e, de alguma forma, compará-lo com o modelo geral de Newton. O desafio colocado foi o seguinte:

Testa a veracidade do modelo geral de arrefecimento de Newton para a situação apresentada. O que concluis?

Terminados os cinco minutos de recolha de dados, percorri os grupos para verificar as atividades dos alunos. O primeiro grupo com quem interagi foi o grupo G1:

Prof: Como é que estão a fazer?
A1G1: Primeiro pegamos na fórmula. Agora vamos experimentar todas as temperaturas com todos os tempos para ver se o k dá sempre igual. Se o k der sempre igual, quer dizer que a fórmula está certa.

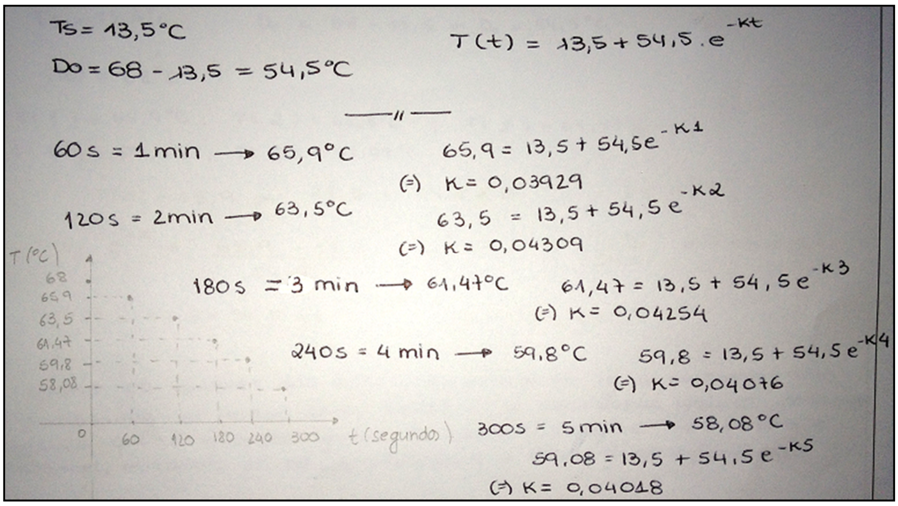
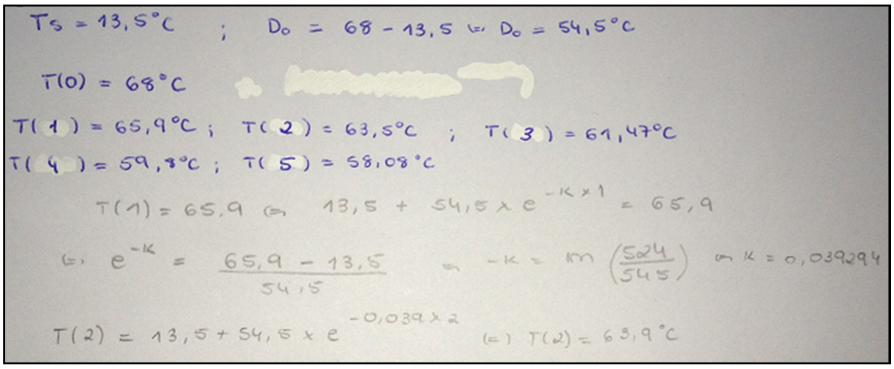


Figura 10: Atividades do grupo 1 na tarefa modelo de arrefecimento de Newton.

Os alunos do grupo G1 optaram por manipular o modelo geral de arrefecimento de Newton, calculando o valor de k nos vários instantes da experiência e verificaram que o valor se mantinha aproximadamente constante ($k \cong 0{,}04$). Assim, concluíram que o modelo geral de arrefecimento de Newton, apesar de não ser rigoroso, é adequado à situação.

Continuando a percorrer a sala procurei perceber o que os alunos do grupo G2 estavam a fazer:

Prof: Como estão a fazer?
A1G2: Primeiro calculamos o k para o tempo igual a um minuto e obtemos o modelo. Depois substituímos os valores dos tempos e vamos ver se as temperaturas batem certo com as medidas.



$T_s = 13,5°C$; $D_0 = 68 - 13,5 \Leftrightarrow D_0 = 54,5°C$

$T(0) = 68°C$

$T(1) = 65,9°C$; $T(2) = 63,5°C$; $T(3) = 61,47°C$

$T(4) = 59,8°C$; $T(5) = 58,08°C$

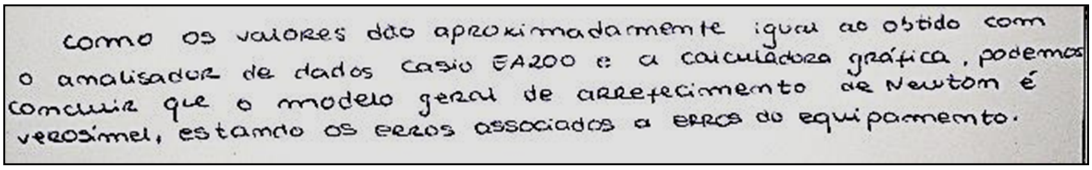
$T(1) = 65,9 \Leftrightarrow 13,5 + 54,5 \times e^{-k \times 1} = 65,9$

$\Leftrightarrow e^{-k} = \frac{65,9 - 13,5}{54,5} \Leftrightarrow -k = \ln\left(\frac{524}{545}\right) \Leftrightarrow k = 0,039294$

$T(2) = 13,5 + 54,5 \times e^{-0,039 \times 2} \Leftrightarrow T(2) = 63,9°C$

Figura 11: Atividades do grupo 2 na tarefa modelo de arrefecimento de Newton.

Este grupo desenvolveu um raciocínio diferente, calculou o valor da constante k apenas uma vez ($k = 0{,}039294$), obtendo um modelo em função do tempo ($T(t) = 13{,}5 + 54{,}5e^{-0{,}039294t}$, com t em minutos). Depois, testaram o modelo para os vários instantes em que se mediu a temperatura e compararam os valores estimados pelo modelo com os valores medidos na experiência.



como os valores dão aproximadamente igual ao obtido com o analisador de dados Casio EA200 e a calculadora gráfica, podemos concluir que o modelo geral de arrefecimento de Newton é verosímel, estando os erros associados a erros do equipamento.

Figura 12: Conclusões do grupo 2 na tarefa modelo de arrefecimento de Newton.

Este grupo, tal como o grupo anterior, também concluiu que o modelo geral de arrefecimento de Newton estima valores aproximados aos medidos, mas com pequenos erros. Estes alunos foram um pouco mais longe nas suas conclusões, ao indicarem que o erro pode estar associado à precisão do equipamento nas medições efetuadas.

O último grupo com quem interagi foi o grupo G3:

Prof: Então, que estratégia estão a adotar?

A1G3: Uma tabela. Estamos a inserir na máquina para determinar uma função.

A2G3: Estávamos a pensar substituir para arranjar um k.

Prof: Mas nesse caso, estão a falar de duas estratégias. Experimentem para ver qual é a melhor.

(...)

Prof: Então fizeram a regressão na máquina? O modelo é igual ao de Newton?

A2G3: Não. Está mal.

Prof: Não. Reparem, o modelo geral de Newton é uma função exponencial. O modelo que vos dá na máquina também é uma função exponencial, mas não é a mesma. Significa que não há só um modelo que funcione bem nesta situação. Desta forma não conseguem verificar se o modelo geral de Newton está certo.

A2G3: Então, temos que substituir para encontrar o k e testar para vários valores.

Este grupo introduziu os dados medidos na calculadora, obtendo como modelo mais adequado uma função exponencial. No entanto, o modelo não era igual ao modelo geral de arrefecimento de Newton, o que não permitia testá-lo. Depois de perceberem que este não era a melhor estratégia, compreenderam que poderiam desenvolver as suas atividades de forma a obter o valor da constante k, definindo assim o modelo, e estimar as temperaturas para os restantes instantes medidos e comparar os valores com os medidos na experiência, tal como fez o grupo G2.

Esta tarefa teve especial interesse para os alunos, pelo facto de ter sido desenvolvida com base numa recolha de dados, tornando assim a ligação da Matemática à vida real mais visível. Como era uma tarefa que podia ser desenvolvida seguindo várias estratégias, a discussão nos grupos envolveu os alunos em explicações de raciocínios individuais que foram analisados em conjunto, para depois dar seguimento ao desenvolvimento das atividades em grupo.

Foi percetível para os alunos que uma dada situação real pode ser representada matematicamente por diferentes modelos matemáticos com uma boa aproximação. A estratégia adotada pela maior parte dos grupos, assente no cálculo do valor da constante k, e depois na substituição dos valores para testar o modelo geral de arrefecimento de Newton, implicava a transformação de uma função exponencial numa função logarítmica, na qual os alunos não apresentaram dificuldades, conforme seria de esperar numa fase em que já estavam a terminar o estudo destes dois subtemas.

Ao nível das conclusões, a maior parte dos concluiu que o modelo geral testado estima valores próximos dos observados na experiência, tratando-se assim de um modelo ajustado à situação real.

A nível pessoal, esta tarefa representou um desafio acrescido por envolver recolha de dados na sala de aula, em que tive que levar água a ferver para a sala num recipiente, explicar os procedimentos de uma forma breve, para conseguir desenvolver as medições em tempo útil. Foi ainda necessário explicar a tecnologia envolvida, analisador de dados e sensor de temperatura, de forma que o circuito de informação ficasse claro para os alunos. Como o material foi emprestado pela empresa representante da marca da calculadora usada pelos alunos e por só ter disponíveis apenas quatro analisadores de dados, não foi possível envolver os alunos de forma ativa na fase inicial da experiência. Penso que a experiência teria sido mais interessante se tivessem sido os alunos a manipular o equipamento.

3.2.4. Aprofundar o estudo do modelo logístico

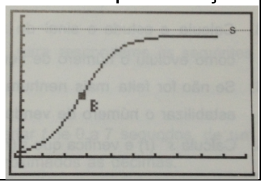
O estudo do modelo logístico tem grande utilidade na sociedade por permitir modelar diferentes situações que apresentam um crescimento acentuado numa fase inicial, aproximando-se de um crescimento exponencial e depois alteram o comportamento, tendendo a estabilizar. Como exemplo, temos a divulgação de uma notícia, a evolução da população, ou a propagação de uma bactéria. Para evidenciar as características deste tipo de modelos e analisar alguns aspetos do estudo analítico de funções, propus aos alunos, organizados em grupos de quatro elementos, a resolução da seguinte tarefa:

Numa experiência para medir a inteligência dos ratos, um cientista colocou um rato numa caixa de Skinner. Privado de água durante 24 horas, o rato viu-se assim motivado para empurrar uma alavanca que permitia obter uma gota de água de cada vez que a empurrasse. Admitindo-se que quantas mais vezes o fizesse, maior seria a sua inteligência. O cientista foi recolhendo os dados da tabela sobre o número de vezes que o rato empurrava a alavanca por minuto. Fê-lo durante uma hora e sempre que o número de vezes por minuto se alterava, fazia o registo.

t (minutos)	r (alavanca/min)
3	1
6	2
8	3
10	4
12	5
13	6
14	7
15	8
17	9
19	10
21	11
24	12
30	12.5
40	12.5
50	12.5

Com base nos dados da tabela, responde às seguintes questões, recorrendo exclusivamente à calculadora (sem processos analíticos):

1. Representa graficamente os dados na calculadora. Descreve o comportamento da representação gráfica dos dados.
2. Define um modelo matemático que estime o número de vezes que o rato empurra a alavanca por minuto ao longo do tempo.
3. Indica as coordenadas do retângulo de visualização para o qual obtiveste um gráfico como este:



Entreguei acetatos aos grupos e pedi-lhes que escrevessem as suas produções nos acetatos. Disponibilizei 30 minutos para realizar as atividades e durante esse período não dei apoio aos grupos. Durante este tempo, percorri a sala para verificar se estavam a interpretar corretamente a situação. De facto, uma das maiores dificuldades consistiu na interpretação da situação, como mostram os alunos do grupo G1:

A1G1: O número de vezes que o rato carrega vai aumentando? E depois mantém-se constante.
A2G1: A partir do minuto 24 carrega de 12 em 12 minutos.
Prof: Não, durante o minuto 24 carregou 12 vezes! Então o que acontece ao fim de algum tempo?
A1G1: O número de vezes tende a estabilizar.

Tal como esperado, apesar de alguns grupos terem algumas dúvidas numa fase inicial, os alunos representaram a situação graficamente, obtiveram o modelo matemático e a janela de visualização na calculadora.

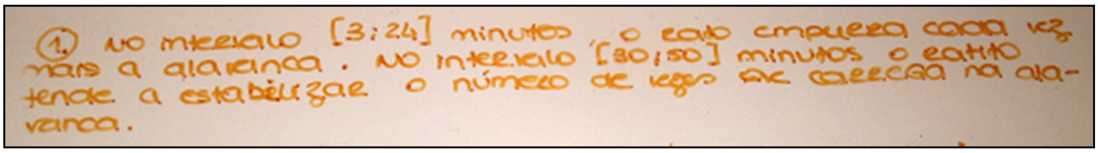


Figura 13: Explicação do comportamento do gráfico do grupo 1 na tarefa a inteligência do rato.

A maior parte dos alunos descreveu que na fase inicial da experiência o número de vezes que o rato empurra a alavanca por minuto tem um crescimento acentuado. À medida que o tempo foi passando, o aumento do número de vezes que o rato empurra a alavanca por minuto foi diminuindo, até que se verifica uma estabilização. Este raciocínio foi sustentado pelos alunos com um modelo logístico, como ilustra o que foi obtido pelos alunos grupo G4:

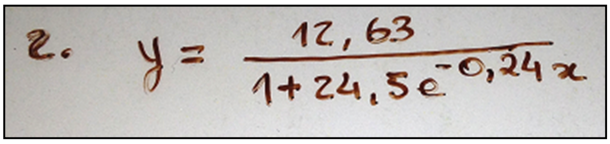


Figura 14: Modelo logístico obtido pelo grupo 4 na tarefa a inteligência do rato.

A elaboração de um texto que descreva como varia a velocidade de aprendizagem do rato e explica o significado do ponto B representou um desafio para os alunos, o que foi explícito na apresentação dos raciocínios à turma quando pedi a elementos de alguns grupos que apresentassem as suas produções.

Prof: O que é o ponto B?
A1G1: É o ponto de inflexão.
Prof: Como o obténs?
A1G1: Igualo a segunda derivada a zero.
Prof: Então e se igualares a primeira derivada a zero, o que é que te dá?
A2G1: Dá os máximos.
Prof: O que representa a primeira derivada?
A2G1: A velocidade.

Prof: Então, o que acontece à velocidade até ao ponto B?
A2G1: Aumenta até atingir o seu valor máximo no ponto B.
Prof: E do ponto B para a frente?
A1G1: Começa a diminuir.
Prof: O que pedia na alínea quatro?
A1G3: É para dizer que primeiro aumenta a velocidade e depois diminui.
Prof: O gráfico da função representa a velocidade?
A1G3: Não, os declives é que representam a velocidade.
Prof: Então o que têm que fazer para obter o gráfico da velocidade?
A2G3: A primeira derivada.
Prof: E o ponto B o que é?
A1G3: É o ponto de inflexão, que é obtido pela segunda derivada. Que é o máximo da velocidade.
Prof: Exatamente, o ponto de B é o ponto de inflexão da função, mas é também o máximo da primeira derivada, e a primeira derivada é a velocidade. Reparem, vocês estão habituados a relacionar a primeira derivada com a função e a segunda derivada com a função. Aqui, estou a pedir para relacionar a segunda derivada com a primeira derivada.

O grupo G2, que já tinha apresentado a sua resolução, voltou ao quadro para apresentar as suas conclusões finais:

A1G2: Nós vemos a velocidade pelos declives da função que nos foi dada. Portanto, a velocidade é a primeira derivada da função. Pelos declives, vemos que a velocidade de aprendizagem vai aumentando até ao ponto B. O ponto B, que é o ponto de inflexão, e partir daí vai diminuindo sempre, até ser praticamente nula.

Na determinação das coordenadas do ponto B, usando apenas a calculadora, só um grupo foi capaz de relacionar o raciocínio da alínea anterior e aplicá-lo. No entanto, apenas conseguiu obter a abcissa do ponto B, não conseguindo chegar ao valor da ordenada. O grupo fez uma abordagem conjunta das alíneas quatro e cinco da tarefa, fundamentando a sua explicação nas coordenadas do ponto em que a primeira derivada atinge o seu valor máximo:

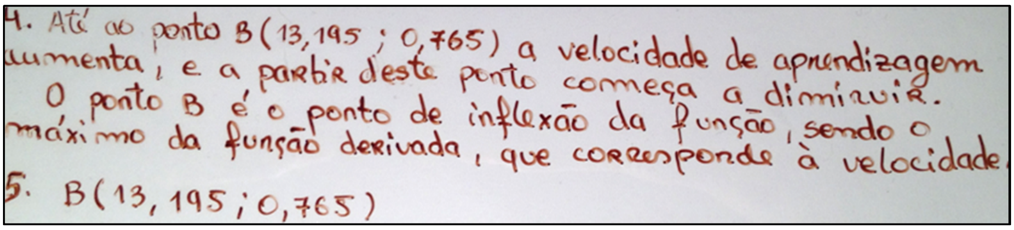


Figura 15: Atividades do grupo 4 na tarefa a inteligência do rato.

Para fundamentar este raciocínio, o grupo recorreu à representação gráfica da primeira derivada e, com recurso às funcionalidades da calculadora, obteve o respetivo máximo da função, como mostra o seguinte gráfico:

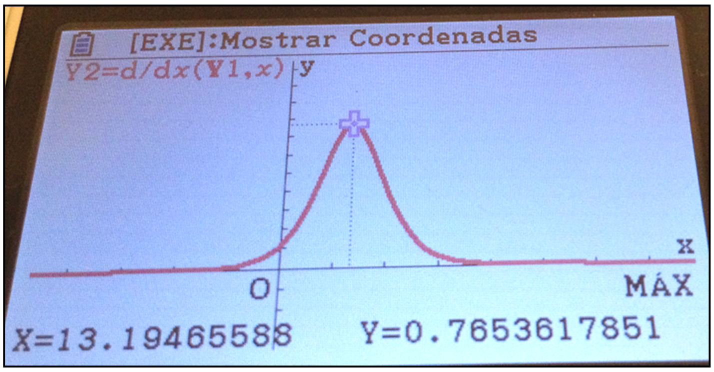


Figura 16: Representação gráfica da 1.ª derivada e seu máximo na tarefa a inteligência do rato.

O valor da variável x corresponde ao valor da abcissa do ponto B. No entanto, a variável y neste gráfico representa o valor máximo da velocidade de aprendizagem e não o instante da experiência em que a aprendizagem é maior. Para encontrar o valor da ordenada do ponto B, na discussão com a turma, substituiu-se no modelo calculando: $y(13{,}19) = \frac{12{,}63}{1+24{,}5e^{-0{,}24\times13{,}19}} = 6{,}3\, minutos$. Assim, as coordenadas do ponto B são (13,19; 6,3).

Havia outra forma de obter a abcissa do ponto B, que apresentei à turma. Representei a segunda derivada através da calculadora e obtive o ponto de inflexão do gráfico da função ($y'' = 0$), o que me permitiu obter o valor da abcissa do ponto B.

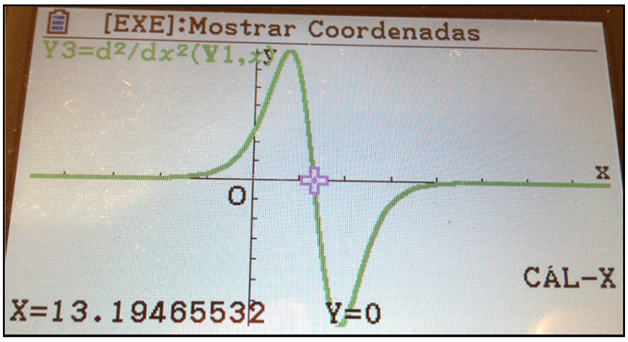


Figura 17: Representação gráfica da 2.ª derivada e seus zeros na tarefa a inteligência do rato.

Os alunos tiveram dificuldades em perceber que os zeros de f'' dão os pontos de inflexão do gráfico de f, mas que por sua vez em relação a f' dão-nos os seus máximos e mínimos. Logo, o ponto em estudo (B) é o ponto de inflexão do gráfico de f, mas é também o ponto em que f' é máximo, ou seja, o instante em que a velocidade de aprendizagem é maior.

No momento da aula em que foi pedido aos grupos para apresentar as suas resoluções através da projeção dos seus acetatos, foi enriquecedor verificar a motivação com que cada grupo apresentou o seu raciocínio à turma e ainda o envolvimento dos restantes grupos na discussão dos resultados e processos. Tive o cuidado em formalizar os raciocínios para evitar que os alunos finalizassem a tarefa com perceções erradas. Apercebi-me que, por vezes, alguns alunos percebem melhor os conceitos explicados por outros colegas, de uma forma mais informal e numa linguagem mais próxima, do que pelo professor.

A nível pessoal, este tipo de aula que envolve os alunos de forma ativa e em que o desenrolar da aula não é só gerido pela intervenção do professor representa um desafio à capacidade de acompanhamento e interpretação das dificuldades dos alunos que vão surgindo de formas e abordagens distintas, mas, por outo lado, é enriquecedor para o professor ver os alunos envolvidos no estudo dos conceitos propostos.

3.2.5. Tarefas de modelação matemática com recolha de dados autónoma

Estas tarefas foram realizadas em trabalhos de grupo, propostas cerca de um mês antes do final do segundo período, e foram apresentados por cada grupo a toda a turma na última semana do período. Os alunos desenvolveram as suas atividades em momentos extra aula, com apoio dos professores estagiários. Foram propostos seis temas, três deles por mim ligados à modelação matemática e os outros três temas foram propostos pela minha colega do núcleo de estágio no âmbito do seu projeto de intervenção.

Os três temas que propus tiveram como objetivo aprofundar o estudo do processo de modelação matemática, em que os grupos tiveram que desenvolver todas as fases do processo de modelação. Para realizar estes trabalhos, os grupos tiveram que efetuar inquéritos aos colegas de três turmas da escola para obter os dados necessários em dois dos temas, e consultas nos balcões de alguns bancos num dos temas.

Apresento apenas a análise dos temas quatro (Planos de poupança, Anexo 16) e tema cinco (Escola amiga – calças, Anexo 17). Não apresenta a análise do tema seis (Escola amiga – calçado, Anexo 18), por ter envolvido os alunos num processo semelhante ao do tema cinco, alterando apenas as variáveis com que trabalharam.

Em termos de resultados obtidos nestas tarefas, não tenho registos dos momentos de exploração, uma vez que não foi possível realizar registos das atividades, por não terem sido realizadas nas aulas. Assim, a pertinência em analisar estas tarefas no relatório, prende-se com os resultados observados nas apresentações à turma e nas conclusões dos grupos.

No tema quatro foi pedido que os alunos calculassem o valor em euros que tinha que ser depositado num banco este ano, por forma a ter 5000,00€ daqui a dez anos, colocando ainda o desafio de criar um modelo geral e estudar alterações na capitalização dos juros.

O grupo que trabalhou este tema teve algumas dúvidas na interpretação do problema, provocadas essencialmente pela forma como o desafio era apresentado. Como tiveram que consultar alguns bancos para saber qual seria a taxa de juro praticada para este tipo de depósito, a fase inicial foi confusa. O facto de nos bancos apenas terem os cálculos com base num determinado valor inicial e calcular o valor futuro em função do tempo e respetiva taxa de juro, acabou por ser difícil obter a taxas de juro para esta situação.

Depois de alguma ajuda do professor, optaram por consultar as taxas de juro aplicáveis em depósitos a dez anos, percebendo que a forma de obter o valor a depositar teria que ser totalmente desenvolvida pelo grupo, sem a ajuda dos cálculos dos bancos disponham. Depois de realizar consulta a vários bancos, o grupo trabalhou com uma taxa de juro anual de 3,875%, sendo a resposta à alínea a) da tarefa.

Na fase de exploração, começaram por desenvolver o raciocínio segundo uma progressão geométrica, no qual obtiveram um valor para a razão de 1,03875. À medida que foram percorrendo os anos, o valor da razão foi se mantendo entre anos consecutivos. Como era pedido na alínea b) um modelo que permitisse obter o valor inicial em função do valor final pretendido, tiveram que manipular analiticamente as fórmulas até obterem o modelo: $V_0 = \frac{V_{10}}{1{,}03875^{10}}$, em que V_0 representa o valor a depositar, V_{10} o valor no final dos 10 anos e 1,03875 a taxa de juro anual. Com base neste modelo, teria que ser depositado um valor de 3417,69€.

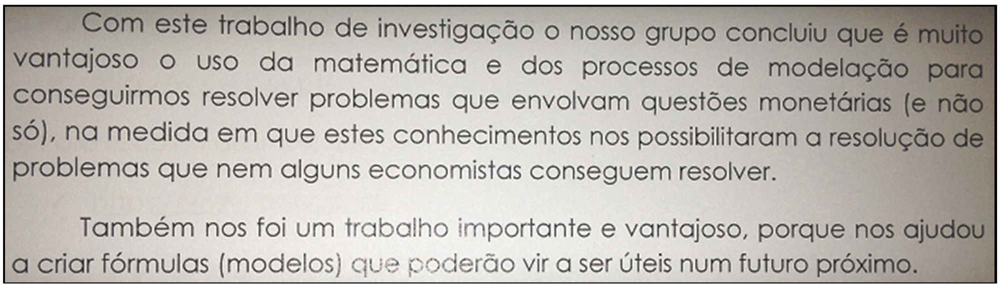
Na alínea c) e no seguimento do raciocínio, o grupo generalizou e obteve: $V_0 = \frac{V_{10}}{(1+t)^{10}}$, em que V_0 representa o valor a depositar, V_{10} o valor no final dos 10 anos e t a taxa de juro anual.

Na resposta à alínea d), segundo nova consulta ao banco que lhes tinha dado a melhor taxa de juro anual, informou-os que numa situação de capitalização mensal, a taxa de juro anual seria de 3%. O grupo seguiu o raciocínio esperado, que consistia em dividir a taxa anual em vários períodos, no caso, dividiram por doze meses e aplicaram nos mesmos doze vezes o modelo de capitalização obtido na alínea anterior. Assim, o grupo desenvolveu os cálculos conforme esperado e concluiu que não teria interesse negociar mais do que uma capitalização por ano.

Apesar do grupo ter desenvolvido corretamente as suas atividades e ter concluído corretamente em função dos dados reais com que trabalhou, não obteve a conclusão esperada para esta alínea, onde estava previsto que o grupo devia concluir que mais do que uma capitalização anual é vantajosa, mas isso apenas tinha sido possível se a taxa de juro anual se mantivesse.

O trabalho desenvolvido pelo grupo foi positivo e um exemplo claro para os alunos que o nível de conhecimentos matemáticos com que trabalham no 12.º ano pode ser uma mais-valia numa situação com alguma complexidade nas suas vidas, em que os bancos consultados não estavam preparados para dar a devida resposta, pelo menos imediatamente.

As conclusões apresentadas no trabalho pelo grupo são elucidativas da ligação que identificaram entre a Matemática e a vida real:



Com este trabalho de investigação o nosso grupo concluiu que é muito vantajoso o uso da matemática e dos processos de modelação para conseguirmos resolver problemas que envolvam questões monetárias (e não só), na medida em que estes conhecimentos nos possibilitaram a resolução de problemas que nem alguns economistas conseguem resolver.

Também nos foi um trabalho importante e vantajoso, porque nos ajudou a criar fórmulas (modelos) que poderão vir a ser úteis num futuro próximo.

Figura 18: Conclusões dos alunos: a importância da Matemática na vida real.

Foi ainda enriquecedor o interesse verificado nos colegas da turma pelo tema, quando o grupo efetuou a apresentação final do trabalho, assim como constatar que o grupo foi capaz de desenvolver um modelo, de uma situação que à partida surgia como sendo complexa, apenas por manipulação analítica, ou seja, sem recorrer à calculadora.

A nível pessoal, foi enriquecedor trabalhar com os alunos em momentos extra aula e verificar o seu envolvimento nas atividades com motivação e de uma forma ativa, que muitas vezes não o demonstraram na sala de aula.

O outro tema que me proponho analisar, tinha como objetivo que os alunos desenvolvessem modelos matemáticos que permitissem estimar as medidas das calças, em função das alturas e dos pesos para jovens da mesma faixa etária. O envolvimento criado consistia num programa de apoio para enviar calças para jovens desfavorecidos de outros países, em que apenas se conhecia as suas alturas e os seus pesos. Seria então necessário desenvolver uma forma de estimar as medidas das calças, numa escala numérica, a partir dos dados disponíveis.

Segundo a apresentação que o grupo realizou à turma no dia 13 de março de 2013, o envolvimento foi o seguinte:

A1G5: Para desenvolver o projeto, realizamos três inquéritos, um a uma turma do 10º.ano, a uma do 11º.ano e a uma do 12º.ano.

> Desenvolvemos paralelamente a relação que se estabelece entre o peso e o tamanho das calças, e no outro caso, a relação entre a altura e o tamanho das calças.
> Vamos mostrar os resultados que obtivemos e depois vamos fazer uma pequena experiência com vocês e no fim falar das conclusões.

O grupo apresentou vários modelos matemáticos, considerando os dados obtidos nos inquéritos realizados a três turmas da escola, e com recurso às suas calculadoras, onde introduziram os dados para obter os modelos mais ajustados para cada uma das situações.

Para estimar as medidas das calças em função da altura e em função do peso, sem considerar os géneros, nos quais verificaram os melhores parâmetros de validação de modelos matemáticos, o grupo apresentou os seguintes modelos globais, respetivamente:

Função exponencial: $f(x) = 19{,}11 \times e^{0{,}3995x}$, sendo x a altura em metros.

Função potência: $f(x) = 10{,}728 \times x^{0{,}306}$, sendo x o peso em quilogramas.

Na segunda parte da apresentação, o grupo pediu a colaboração dos colegas da turma para testar os modelos, tendo levado uma balança e uma fita métrica para esse efeito:

> A2G5: Vamos realizar alguns testes para testar a veracidade do modelo global em função do peso e da altura. Peço que alguém venha aqui.

Começaram por testar o modelo global para estimar a medida das calças em função da altura numa colega que se disponibilizou:

> A2G5: Mede 1,57 metros e a partir do modelo para a altura,..., temos que a medida das calças é aproximadamente o 35,78. Mas ela veste o 36, logo a função não nos deu exatamente aquilo que pretendíamos.

Depois, pediram a outra colega para testar o modelo com base no peso:

> Aluna Voluntária: Eu peso 73,1 kg.
> ...
> A2G5: Logo a medida das calças devia ser aproximadamente o 40.
> Aluna Voluntária: Olha, acertou!

As conclusões que o grupo apresentou no trabalho revelam que houve uma dinâmica muito boa por parte do grupo em tentar perceber os resultados obtidos.

Na parte inicial da conclusão, o grupo afirmou:

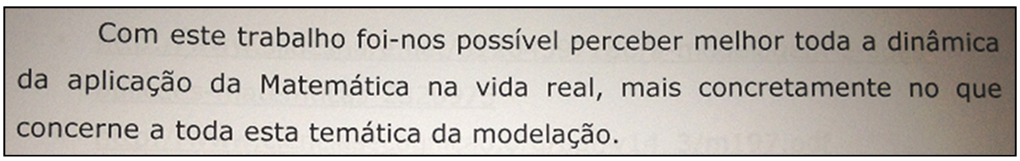

Com este trabalho foi-nos possível perceber melhor toda a dinâmica da aplicação da Matemática na vida real, mais concretamente no que concerne a toda esta temática da modelação.

Figura 19: Conclusões dos alunos: modelação matemática na aprendizagem.

É percetível a importância em envolver os alunos de forma ativa no seu processo de aprendizagem. No entanto, na segunda parte das conclusões, o grupo apresenta um raciocínio que revela a dificuldade de trabalhar com tarefas de modelação matemática, partindo de situações reais. Perceberam que na análise dos dados, a veracidade poderia estar comprometida em função das informações dadas pelos colegas nos inquéritos. Por outro lado, havia muitos alunos com a mesma medida de calças e que tinham alturas e pesos diferentes, o que podia colocar em causa a relação entre as variáveis estudadas. O grupo refere também que talvez fosse necessário considerar mais variáveis na investigação, para obter modelos mais aproximados, como por exemplo, a largura das coxas ou da anca.

A nível pessoal, foi enriquecedor verificar o envolvimento dos alunos, quando se identificam com o problema. Foi ainda evidente, para ter em consideração em experiências futuras, que é necessário ter muito cuidado no tipo de tarefas que se propõe, no sentido de evitar situações em que os resultados esperados não são alcançáveis, por falta de relação entre as variáveis estudadas. Neste trabalho, isso não aconteceu, mas foi claro que os parâmetros de validação dos modelos foram inferiores aos que os alunos estavam familiarizados das tarefas anteriores, realizadas na sala de aula.

3.3. Avaliação da estratégia desenvolvida

Durante a minha intervenção pedagógica recolhi as perspetivas dos alunos sobre as estratégias que desenvolvi em três momentos: antes de iniciar, num momento intermédio e no final.

Na análise às respostas ao questionário inicial (Questionário 1, Anexo 2), os alunos da turma mostraram que distinguem exercícios de problemas, como exemplifica a resposta de um aluno: “o exercício é mais mecânico, é só aplicar fórmulas, enquanto o problema tem de ser interpretar o texto, pensar e procurar respostas”. Foi surpreendente verificar que nenhum aluno respondeu ter já realizado tarefas de modelação matemática. Porém, 14 alunos responderam que não sabiam se tinham realizado, dando a entender que não sabiam o que são tarefas de modelação matemática. Esta situação poderá estar relacionada com o tipo de tarefas que normalmente são propostas, que quando envolvem situações de contexto da vida real, costumam ser de aplicação de conceitos matemáticos, onde o modelo matemático é dado, não sendo necessário obter o modelo a partir da interpretação de uma situação da vida real.

Os alunos consideram que realizaram tarefas de aplicação de conceitos matemáticos na vida real e atribuem alguma importância ao uso da matemática no dia-a-dia. No entanto, esse uso é limitado a situações simples, como cálculo de descontos em lojas e contagens. Existe ainda a ideia de que há um desfasamento temporal entre os conceitos aprendidos e a sua aplicação, ou seja, os conceitos abordados no 12.º ano de escolaridade só serão aplicáveis num estudo mais avançado ao nível da Matemática no ensino superior.

Ao fim de algumas aulas, com o envolvimento dos alunos em tarefas de Modelação Matemática, pedi para responderem ao questionário intermédio (Questionário 2, Anexo 3). Na análise às produções dos alunos verifiquei que estes identificaram alguma mais-valia na aprendizagem através da resolução de tarefas com funções exponencial e logarítmica com base na vida real. Alguns alunos afirmam ainda que este tipo de tarefas ajudam a perceber melhor os conceitos, conforme se verifica na seguinte resposta:

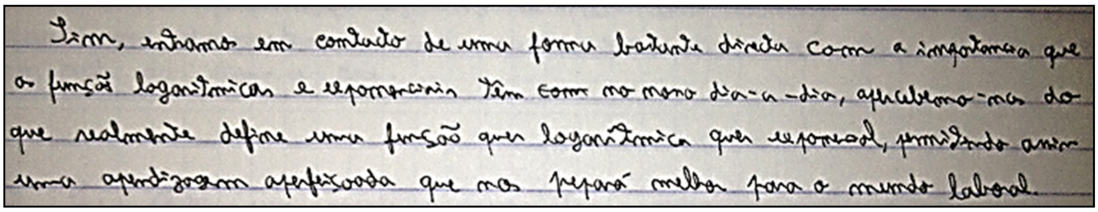

Sim, entramos em contacto de uma forma bastante directa com a importancia que a função logaritmica e exponencial têm com no nosso dia-a-dia, apercebemo-nos do que realmente define uma função quer logaritmica quer exponecial, permitindo assim uma aprendizagem aperfeiçoada que nos prepará melhor para o mundo laboral.

Figura 20: Perspetivas intermédias dos alunos – tarefas que envolvem situações da vida real.

Na análise à questão, onde pedia aos alunos para comentar que diferenças encontram entre as tarefas em que o modelo é dado, sendo apenas utilizado para estimar valores, e as tarefas em que é pedido para obter o modelo matemático. Os alunos afirmaram que quando é necessário obter o modelo Matemático, é exigida melhor compreensão dos conceitos e trata-se de um processo de resolução mais indireto. Destaco a seguinte a resposta de um dos grupos:

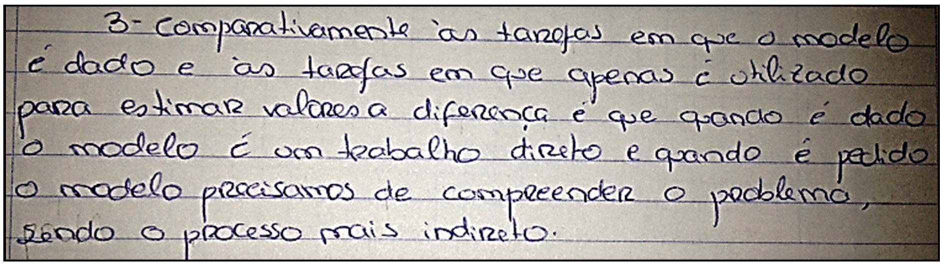

3- comparativamente às tarefas em que o modelo é dado e às tarefas em que apenas é utilizado para estimar valores a diferença é que quando é dado o modelo é um trabalho direto e quando é pedido o modelo precisamos de compreender o problema, sendo o processo mais indireto.

Figura 21: Perspetiva intermédias dos alunos – tarefas em que é necessário obter o modelo.

Na recolha das perspetivas dos alunos no final da intervenção, recorri ao questionário final (Questionário 3, Anexo 4). Para analisar as respostas dos alunos que foram efetuadas segundo uma escala de opinião tipo Likert (que vai de discordo totalmente até concordo totalmente), atribuí o valor de um a discordo totalmente e a discordo, dois a indiferente e três a concordo e concordo totalmente.

No quadro seguinte verifica-se que os alunos classificaram o estudo dos temas funções exponencial e logarítmica entre indiferente e terem gostado. Quanto a terem evidenciado mais dificuldades no seu estudo que nos outros temas, verifica-se que no global é indiferente, levando a entender que as dificuldades se mantiveram. Por último, verificou-se que a maior parte dos alunos não gostaria de desenvolver tarefas de modelação matemática noutros temas, o que parece dever-se ao trabalho que este tipo de tarefas exige.

Quadro 6: Estudo das funções exponencial e logarítmica.

Afirmação	$\bar{x}$	s
Função exponencial foi um tema da matemática que gostei de estudar.	2,44	0,8
Função logarítmica foi um tema da matemática que gostei de estudar.	2,56	0,5
No estudo das funções exponenciais e logarítmicas evidenciei mais dificuldades do que noutros temas de matemática.	1,93	0,8
Gostava de trabalhar com tarefas de modelação matemática noutros temas do programa.	1,48	1

Quanto ao contributo da calculadora na aprendizagem, verifica-se que a maioria dos alunos concorda que as atividades desenvolvidas ajudaram a melhorar a capacidade de trabalho com esta e que a interpretação das situações reais com recurso à calculadora constitui um desafio.

Quadro 7: Estudo envolvendo a calculadora.

Afirmação	$\bar{x}$	s
As tarefas que envolveram situações da vida real ajudaram a melhorar a minha capacidade de trabalhar com a calculadora gráfica.	2,67	0,9
A interpretação da informação gerada pela calculadora gráfica foi um desafio no estudo dos temas funções exponencias e logarítmicas.	2,52	1,1

Quanto a aspetos relacionados com o trabalho em grupo, os alunos mostram-se indiferentes quanto ao aumento da interpretação dos temas. No entanto, a maior parte dos alunos gostava de trabalhar mais vezes em grupo.

Quadro 8: Trabalho em grupo.

Afirmação	$\bar{x}$	s
A realização de tarefas em grupo aumenta a interpretação dos temas, ao discutirmos as nossas ideias com os colegas.	1,96	0,89
Gostava de ter mais oportunidades para trabalhar em grupo.	3,815	1,055

Ao nível das tarefas de modelação matemática, na maior parte das afirmações os alunos apresentam um reconhecimento pouco positivo, ficando mesmo no global, mais presente uma perspetiva de indiferença em relação a este tipo de tarefas na aprendizagem dos temas. As exceções a esta posição centram-se no reconhecimento que este tipo de tarefas é mais exigente ao nível dos conhecimentos matemáticos e que permitem aplicar os conceitos a outras áreas científicas.

Quadro 9: Tarefas de Modelação Matemática.

Afirmação	$\bar{x}$	s
As tarefas de modelação propostas contribuíram para aumentar o meu interesse na aprendizagem das funções exponencial e logarítmica.	1,96	1
As tarefas de modelação propostas ajudaram a perceber melhor a ligação da matemática com problemas da vida real.	2,41	1,2
As tarefas de modelação favoreceram o desenvolvimento dos tópicos das funções exponencial e logarítmica.	2,30	1,1
As tarefas em que foi necessário definir o modelo matemático são mais difíceis que aquelas em que o modelo é dado.	2,41	1,1
As tarefas em que foi necessário definir o modelo permitem uma melhor interpretação da ligação dos conceitos matemáticos com a realidade.	2,44	0,9
As tarefas de modelação exigem melhor conhecimento dos conceitos matemáticos.	2,7	0,5
As tarefas de modelação permitem trabalhar conceitos matemáticos aplicados a outras áreas científicas	2,74	0,7
As tarefas de modelação favoreceram a introdução dos tópicos das funções exponencial e logarítmica.	2,22	1

Ainda neste questionário, foram colocadas outros tipos de questões. Numa delas, estavam apresentadas as várias fases das tarefas de modelação matemática de forma desordenada, onde os alunos tiveram que as ordenar. Houve 10 alunos que ordenaram corretamente as cinco fases propostas. Os 17 alunos que não ordenaram corretamente na totalidade, a grande maioria trocou a quarta e quinta fases, que dizem espeito à melhoria do modelo e à sua generalização, respetivamente. A este nível, não ficaram dúvidas que os alunos no final da intervenção assimilaram noções claras sobre o processo de modelação matemática.

Foram também colocadas algumas questões de desenvolvimento, com o objetivo de reforçar alguns aspetos verificados antes. Tentei verificar se os alunos identificaram diferenças quanto à interpretação da situação real em estudo e quanto à aplicação dos conceitos matemáticos estudados, quando o modelo é dado em relação às situações em que o modelo não é dado. De uma forma geral, as diferenças descritas consistem na dificuldade, onde os alunos afirmaram, por exemplo, que "nas situações em que o modelo é dado torna a tarefa mais simples”. Alguns alunos afirmaram que quando é pedido o modelo a tarefa torna-se mais difícil, como por exemplo, “quando é necessário definir o modelo matemático, tem que haver uma melhor interpretação da situação real”. Quanto à aplicação dos conceitos, há uma maior dispersão das respostas. Houve muitos alunos que afirmaram uma ideia semelhante à deste aluno: “nas tarefas em que o modelo foi dado, trabalhou-se e aplicou-se mais os conceitos”. Houve igualmente muitos alunos a afirmar em conformidade com este aluno: “quando o modelo não foi dado, a sua interpretação e definição, implica mais envolvimento de conhecimentos matemáticos”. Relativamente à tipologia de tarefas, alguns indicaram que as tarefas de modelação exigem uma melhor interpretação e representam maior dificuldade que os problemas.

Na parte final deste questionário, pedi aos alunos para apresentar três aspetos positivos e três negativos das tarefas de modelação matemática na aprendizagem das funções exponenciais e logarítmica. Nos quadros seguintes enumero todos os aspetos apresentados e respetivas ocorrências. Note-se que alguns alunos não apresentaram três aspetos positivos e três aspetos negativos, ficando-se por dois, um ou mesmo nenhum. Houve quatro alunos que não identificaram qualquer aspeto positivo. No que se refere aos aspetos positivos, destacam-se os seguintes:

Quadro 10: Aspetos positivos nas tarefas de Modelação Matemática.

Aspetos positivos	Ocorrências dos alunos
Melhor aprendizagem, interpretação e raciocínio dos conceitos	15
Perceber melhor a ligação da Matemática à vida real	11
Aumento da capacidade de trabalho com a calculadora	9
Permite conhecer melhor o comportamento e distinguir as funções	4
Cria independência na resolução	3
Trabalhar conceitos matemáticos aplicados a outras áreas científicas	1

Nos aspetos negativos das tarefas de modelação matemática para a aprendizagem das funções exponencial e logarítmica, os alunos indicaram os seguintes aspetos:

Quadro 11: Aspetos negativos nas tarefas de Modelação Matemática

Aspetos negativos	Ocorrências dos alunos
Perdemos muito tempo com um tema que não sai no exame. Devíamos ter dedicado mais tempo a fazer exercícios que saem no exame.	9
Algumas tarefas demoram muito tempo	3
Por vezes este tipo de tarefas confunde-nos	2
Obriga a dar muita matéria em pouco tempo	1
Não achei a matéria interessante	1

Nove alunos não identificaram aspetos negativos, dos quais três afirmaram que “não há qualquer desvantagem neste tipo de tarefas”.

As perspetivas verificadas no quadro anterior levaram-me a realizar uma entrevista a alguns alunos. Ao longo das aulas foi sendo percetível um bom envolvimento por parte dos alunos nas tarefas propostas. No entanto, a maioria dos alunos não reconhece de forma clara que as tarefas de modelação os ajudaram na aprendizagem dos temas. Era assim necessário tentar perceber se isso se deveu às dificuldades que tiveram, que limitou o contributo na aprendizagem, ou tiveram à partida uma postura passiva perante os temas que não se conseguiu alterar com este tipo de tarefas, ou se houve outra razão que condicionou as perspetivas dos alunos.

Nas entrevistas, as questões colocadas aos nove alunos tiveram como principal objetivo aprofundar alguns aspetos que foram abordados no questionário anterior, do qual surgiu a necessidade de interpretar melhor a forma como os alunos encararam as tarefas de modelação matemática e o seu contributo na aprendizagem dos temas estudados, assim como as suas vantagens e desvantagens em ambiente de ensino-aprendizagem.

No seguimento de uma análise detalhada às respostas dos alunos, verifiquei que em relação à disciplina de Matemática ao longo do percurso escolar, seis alunos gostam de Matemática, dois não gostam e um gosta dependendo da matéria estudada. Os alunos que não gostam são aqueles que apresentam piores resultados nas avaliações finais. Ao nível da importância da Matemática para o dia-a-dia, tiveram muitas dificuldades em destacar, ficando-se apenas com a referência a situações simples de cálculos financeiros.

Ao nível das atividades que tinham realizado na disciplina de Matemática ao longo da escolarização que incidiram sobre situações do quotidiano, resumiram-se a “regra de três simples, de probabilidades, de trigonometria e na condução”. Um aluno destacou que quando tem que fazer trabalhos de construção em casa, “para conseguir obter as medidas que não consigo obter por medição direta, recorro a cálculos Matemáticos”. Um aluno referiu que “este foi o primeiro ano que trabalhei com tarefas com situações reais na disciplina de Matemática”.

Quando foram questionados sobre se na resolução das tarefas propostas na aula de Matemática importa mais o resultado ou o processo, dos nove alunos, oito responderam que é mais importante o processo, justificando por exemplo, que “o processo viabiliza a interpretação e aprendizagem” dos conceitos. Um aluno afirmou que “importa mais o resultado, dado que atualmente só interessam os resultados”.

Ao nível da discussão dos processos e resultados com os colegas e qual a sua importância na aprendizagem, todos os alunos responderam que, como ilustra a afirmação de um deles, a “discussão com os colegas permite aprender melhor os conceitos, uma vez que a linguagem é mais acessível que com o professor e aprendemos mais se ouvirmos diferentes raciocínios”.

Quanto à caracterização das aulas de matemática, se entendem que deve ser somente o professor a fazer e a dizer o que acontece na aula de matemática, ou se os alunos também devem contribuir, todos referiram que os alunos devem ter contributo nas aulas. No entanto, dois alunos afirmaram, e um em particular, que “esse contributo deve sempre surgir depois da explicação do professor, em momentos de esclarecimento de dúvidas”. Um dos alunos afirmou que “a turma é muito passiva na sala de aula”.

Na tipologia de tarefas nas atividades de aprendizagem de conteúdos matemáticos, foram questionados se preferem resolver exercícios ou problemas. Cinco dos nove alunos preferem tarefas do tipo exercícios por serem mais fáceis de resolver e de aplicação direta dos conceitos. Reforçaram ainda que não gostam muito de desafios em Matemática porque são difíceis. Os quatro alunos que indicaram que gostam mais de problemas, referiram-no conforme esta ideia: “gosto de desafios e este tipo de tarefas permite ligar a Matemática à vida real”. Não identifiquei relação entre o nível de resultados nas avaliações dos alunos e a preferência com o tipo de tarefas.

Na aprendizagem de tópicos da função exponencial e da função logarítmica trabalhados com tarefas de modelação, de um modo geral, os alunos indicaram que as tarefas de modelação obrigam a pensar mais e a interpretar bem a situação real estudada. Um aluno referiu que “foi interessante aprender a criar a função”.

Ao nível da aprendizagem envolvendo tarefas de modelação, os alunos reforçaram alguns dos aspetos que já tinham indicado no questionário. No entanto, através das entrevistas, foi possível perceber melhor quais foram as preocupações, ao afirmarem que se dedicou tempo demais, como por exemplo: “as aulas com as tarefas de modelação ocuparam muito tempo nas aulas e não saem no exame” e que se “devia ter aproveitado mais o tempo a estudar conteúdos que saem no exame”. Os alunos percecionam que este tipo de tarefas não sai no exame de avaliação final de uma forma explícita e preferiam que durante as aulas se praticasse sempre o tipo de tarefas que surgem no exame final. Foi possível verificar que esta preocupação foi aumentando à medida que o final do ano se aproximava.

De certa forma, o tipo de avaliação a que os alunos estão sujeitos condiciona a sua abertura a desenvolver os seus horizontes na aprendizagem da disciplina, o que até se compreende, uma vez que estavam no 12.º ano, que é decisivo para os seus futuros académicos. Penso que a avaliação da disciplina não abarca todas as vertentes das orientações pedagógicas e de aprendizagem do programa de ensino da Matemática. Desta forma, os alunos tendem em "jogar" com as regras impostas.

No entanto, houve três alunos que indicaram que são importantes, afirmando por exemplo: "não são uma perda de tempo, porque acabam por sair em exame de uma forma indireta e deverão ajudar em aprendizagens futuras". Realço que dois dos três alunos que defenderam esta ideia têm resultados muito bons na avaliação da aprendizagem na disciplina. Os alunos tendem a afirmar que os testes não avaliam todas as competências da aprendizagem, e alguns reforçaram que, por exemplo: "podem ser injustos, com os alunos que acusam mais a pressão". Realçaram ainda que a evolução e o esforço também deviam ser reconhecidas, e não apenas a aprendizagem final avaliadas em testes sumativos. No que se refere a inclusão de problemas da vida real nos exames, dos nove alunos apenas dois indicaram que não gostam. Afirmaram que os alunos que não gostam, deverá ser por não conseguir interpretar bem o problema e têm medo de errar sem ter noção disso.

Ao nível do trabalho em grupo, oito dos nove alunos gostaram de realizar este tipo de tarefas, por representar uma forma diferente de aprender, demonstrando a ligação da Matemática à realidade e ajudaram a compreender melhor a matéria.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Este capítulo apresenta as conclusões referentes às questões de investigação que orientou este estudo e algumas recomendações para futuras intervenções. As conclusões e recomendações apresentadas resultam da análise da informação recolhida, que ilustra a dinâmica da intervenção pedagógica, que traduzem as produções e perspetivas dos alunos sobre essa intervenção e a realização das tarefas de modelação propostas. Estas tarefas foram implementadas em momentos de introdução de tópicos das funções exponencial e logarítmica, e principalmente, em momentos de consolidação dos tópicos estudados, com o intuito de proporcionar uma aprendizagem mais significativa através da ligação entre as situações trabalhadas e a linguagem matemática.

4.1. Conclusões

O objetivo do projeto consistiu em analisar o contributo das tarefas de modelação matemática na aprendizagem de alunos do 12.º ano de escolaridade, no estudo dos temas funções exponencial e logarítmica. A concretização deste objetivo leva a responder às questões de investigação delineadas, que orientaram a experiência pedagógica.

4.1.1. Que atividades desenvolvem os alunos com tarefas de modelação no estudo das funções exponencial e logarítmica?

A implementação das tarefas de modelação matemática baseou-se nas fases definidas por Matos e Carreira (1996), sendo consideradas total ou parcialmente, desde a interpretação da situação problema, a recolha de dados, a discussão em grupo, os critérios utilizados para obter o modelo, a validação e a generalização do modelo. Na fase inicial, verificou-se que os alunos não tinham experiência de realização de tarefas de modelação matemática. A maioria dos alunos expressou o seu desconhecimento sobre a existência de tarefas deste tipo. Sendo uma turma que estava a terminar o ensino secundário, seria de esperar que tal realidade não se verificasse. As orientações prescritas no programa atual de ensino de matemática indicam que o ensino deve incidir em atividades que contemplem a modelação matemática, o trabalho experimental e o estudo de situações realistas sobre as quais se colocam questões significativas (Ministério da Educação, 2002).

Apesar de os alunos não terem realizado tarefas de modelação no seu percurso escolar, tinham bastante experiência na realização de tarefas com aplicação de conceitos matemáticos à realidade. A implementação de tarefas de modelação simples, que envolvesse conceitos matemáticos estudados em anos anteriores, no caso modelos representados por equações do 1.º grau, permitiu que os alunos entendessem que, tal como definiram Edwards e Hamson (2001), estas tarefas permitem a transposição de um problema real para um universo matemático.

Durante a intervenção pedagógica, constatou-se que, apesar de os alunos serem organizados de modo a trabalharem em grupo, parte deles têm hábitos bem enraizados de trabalhar individualmente e só depois é que tentam envolver-se na discussão com os colegas de grupo. Os alunos com mais dificuldades tendem a ficar à espera que os colegas trabalhem e lhes digam o que fizeram. Nas tarefas em que foi pedido aos alunos para entregar as produções por grupo, independentemente de numa primeira fase trabalharem individualmente e só depois se envolverem com o grupo, o envolvimento dos elementos de cada grupo nesta atividade aumentava. Estes resultados também foram verificados no estudo que Oliveira (2009) realizou com alunos do 9.º ano de escolaridade com tarefas de modelação. A organização das atividades dos alunos em grupo implica a promoção de uma cultura de saber trabalhar em cooperação, partilhar e clarificar as dúvidas e as dificuldades, como também discutir em conjunto os processos e resultados.

Ao nível das atividades desenvolvidas nas fases das tarefas de modelação, a primeira fase incidia na interpretação e recolha de dados da situação real estudada, representando um desafio para os alunos, onde na interpretação normalmente era preciso alguma ajuda do professor. Nas tarefas implementadas em que foi necessário recolher dados, os alunos mostraram-se motivados, não manifestando constrangimentos em recolher dados fora do ambiente de sala de aula. Em algumas das tarefas trabalhadas, verificou-se que o contexto próximo dos alunos é determinante no seu envolvimento e no reconhecimento das mais-valias dessas tarefas na aprendizagem que daí advêm.

Na fase de manipulação dos dados para obter o modelo matemático, foram propostas tarefas em que os alunos tiveram que desenvolver manipulação ‘manual’ (sem recurso à calculadora), o que revelou falta de destreza nesta atividade, essencialmente quando foi necessário transformar uma função exponencial numa função logarítmica e vice-versa. Estas dificuldades foram sendo ultrapassadas com a prática neste tipo de manipulações ao longo das aulas.

Na manipulação dos dados para obter o modelo matemático com recurso à calculadora, como os alunos não tinham realizado tarefas de modelação, não conheciam os menus onde é possível trabalhar a regressão com diversos tipos de funções na obtenção dos respetivos modelos matemáticos. Nas primeiras tarefas, foi necessário apresentar à turma os procedimentos necessários e a partir daí o cerne do trabalho passou a estar na fase seguinte, ou seja, na validação dos modelos segundo os parâmetros apresentados na calculadora. Relativamente ao contributo da calculadora na aprendizagem, a maioria dos alunos concorda que as atividades desenvolvidas ajudaram a melhorar a capacidade de trabalho com este recurso e que a interpretação das situações reais com recurso à calculadora constitui um desafio.

Ao nível da validação dos modelos matemáticos obtidos nas tarefas, os alunos fizeram-no através de comparação dos valores teóricos com os valores reais e através da análise dos parâmetros apresentados na calculadora (coeficiente de correlação - R e valor do método dos mínimos quadrados – MSE). Na fase de generalização, os alunos aperceberam-se que para estimar valores para além dos reais de que dispunham teriam que recorrer aos modelos matemáticos.

As atividades desenvolvidas pelos alunos nas tarefas propostas permitiram verificar que ao nível do 12.º ano, os alunos não têm qualquer tipo de constrangimento em desenvolver as atividades previstas nas várias fases das tarefas de modelação matemática. Este tipo de tarefas proporciona momentos de sustentam uma aprendizagem centrada na atividade do aluno, envolvendo-os na construção do conhecimento matemático, conforme é sugerido nas orientações do programa de ensino secundário (Ministério da Educação, 2002).

4.1.2. Que dificuldades revelam os alunos nas atividades de modelação matemática no estudo das funções exponencial e logarítmica?

As dificuldades dos alunos centraram-se na interpretação das situações reais estudadas, onde normalmente tinham dúvidas sobre os aspetos relevantes a importar para a linguagem matemática. Estas dificuldades eram normalmente ultrapassadas com breves explicações do professor ou com a discussão entre os alunos sobre o enunciado das tarefas.

Quando a fase de obtenção dos modelos era realizada através da calculadora, os alunos apresentaram falta de prática na utilização dos recursos disponíveis na calculadora para efetuar a regressão nos vários tipos de modelos. Esta dificuldade foi diminuindo ao longo da intervenção. No final desta, quando foram interpelados a apresentar três aspetos positivos nas tarefas de modelação matemática, um número significativo de alunos defendeu que este tipo de tarefas aumenta a capacidade de trabalho com a calculadora e permite conhecer melhor o comportamento e a distinção das funções. Um dos aspetos que os alunos realçaram foi a capacidade de trabalhar com a calculadora que desenvolveram através destas tarefas. Estas interpretações reforçam a importância da utilização de tecnologia na aprendizagem, permitindo minimizar a complexidade de modelação matemática com base em situações da vida real, como a calculadora, computadores ou sensores. Para Lesh (cit. Ponte, 1992), os recursos tecnológicos desempenham um papel de amplificador conceptual.

4.1.3. Que perspetivas têm os alunos sobre as tarefas de modelação na aprendizagem das funções exponencial e logarítmica?

Ao nível das perspetivas que os alunos têm sobre as tarefas de modelação na aprendizagem das funções exponencial e logarítmica, torna-se pertinente fazer a interpretação em duas fases da intervenção. A primeira situa-se no início do segundo período, onde os alunos ainda não estavam preocupados com o exame do final do ano, estando mais centrados em aprender os conceitos em si, independentemente se a tipologia de tarefas propostas coincidia ou não com as do exame. Nesta fase, as perspetivas dos alunos eram bastante favoráveis à aprendizagem dos temas envolvendo tarefas de modelação matemática, em que de uma forma geral identificaram mais-valias na aprendizagem, afirmando que este tipo de tarefas ajudam a perceber melhor os conceitos. Esta perceção vai ao encontro das orientações do NCTM (2007), que apontam que os alunos aprendem com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos, a partir da experiência que realizam e dos seus conhecimentos prévios.

No final do segundo período, quando os alunos já estavam preocupados e a prepararem-se para o exame final, muitos deles alteraram as suas perspetivas. Verificou-se que para uma parte significativa de alunos se perdeu muito tempo com tarefas de modelação, uma vez que não é o tipo de tarefas que é proposto em exame. No entanto, de uma forma geral, continuaram a reconhecer que as tarefas de modelação permitem um estudo mais aprofundado dos temas, apesar das suas preocupações passarem a estar mais focadas no exame. Esta perspetiva dos alunos é perfeitamente válida e está associada ao tipo de avaliação que lhes é imposta. Porém, para alguns alunos de melhor desempenho da turma as tarefas de modelação acabam por sair no exame de uma forma indireta, ao promoverem um estudo aprofundado dos temas, e promovem a sua formação para situações que encontram no seu quotidiano.

Ao nível da aprendizagem de tópicos da função exponencial e da função logarítmica trabalhados com tarefas de modelação, de um modo geral, os alunos indicaram que as tarefas de modelação obrigam a pensar mais, a interpretar bem a situação real estudada e a aprender a 'criar' a função.

4.2. Limitações

Esta experiência permitiu desenvolver vários aspetos do conhecimento didático que são relevantes para a prática docente. Houve no entanto aspetos que poderão ter condicionado as práticas pedagógicas na intervenção. Destaco a pressão que senti ao desenvolver a intervenção numa turma do 12.º ano, em que todos os alunos pretendiam ingressar no ensino superior. Esta realidade esteve sempre presente num sentimento constante de avaliação por parte dos alunos nas práticas que desenvolvi, no sentido de lhes proporcionar a aprendizagem esperada. Não obstante, penso que este aspeto acabou por ser positivo, na medida em que o esforço e trabalho desenvolvidos ao longo do ano acabaram por ser enriquecedores e demonstrativos que, mesmo com pouca experiência na prática docente, é possível desenvolver um trabalho a este nível com bons resultados.

Um dos objetivos da intervenção centrava-se em tentar contrariar a atitude passiva que os alunos mostravam na sala de aula. Para tal, ficou claro que através das tarefas de modelação matemática é possível desenvolver nos alunos uma atitude ativa nas atividades de aprendizagem, se lhes for proporcionada uma variedade de tarefas que os envolva em atividades de discussão e ligação da matemática à vida real, através de situações reais com as quais eles se identificam e se preocupam.

No entanto, é uma contenda para o professor conseguir reunir um lote de tarefas de modelação que representem, ao mesmo tempo, um desafio interessante para os alunos, e que estejam associadas a situações reais significativas. Esta ligação a situações reais pode tornar a tradução dos conteúdos e conceitos envolvidos na situação real para objetos, conceitos e relações matemáticas muito complexas, e ao mesmo tempo, difícil de se enquadrar com os objetivos de aprendizagem dos temas em estudo. Conforme afirma Ponte, "construir modelos capazes de descrever situações complexas e com efetivo poder de previsão não constitui tarefa fácil" (Ponte, 1992, p. 101). Claro que o professor não se deve resignar a esta dificuldade, pelo que, para reforçar esta ideia, Barbosa (2001) defende que a educação matemática deve ter o envolvimento de todas as instâncias implicadas no conhecimento matemático, sendo a modelação uma delas. Ponte (1992) descreve que é frequente verificar-se que as tarefas de modelação colocadas aos alunos nas aulas são bem definidas e passíveis de uma resolução formal e rigorosa, enquanto na vida real isso não acontece, onde as coisas aparecem normalmente mal definidas e imprecisas. Nas tarefas de modelação matemática que implementei ao longo da intervenção, estas dificuldades foram uma realidade. Foi um grande desafio reunir tarefas que envolvessem situações efetivamente reais, mas que ao mesmo tempo fossem passíveis de implementar em ambiente de ensino aprendizagem na sala de aula, e ainda que estivessem em consonância com os objetivos de aprendizagem dos temas abordados.

4.3. Recomendações

Ao nível de sugestões para intervenções futuras, destaco que este trabalho permitiu clarificar que as tarefas de modelação matemática vão ao encontro das finalidades do ensino secundário, que apontam para o desenvolvimento da capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real (Ministério da Educação, 2002). Ajudam os alunos a desenvolver a capacidade de ver a Matemática como uma ciência que lhes disponibiliza um manancial de instrumentos que permitem resolver problemas concretos das suas vidas. As tarefas de modelação matemática são mais exequíveis se forem aplicadas essencialmente como questões de aula, com objetivos específicos, tanto para introduzir temas, como para aprofundar o estudo. Esta ideia é reforçada nas orientações gerais do programa de ensino, onde é salientada a importância da modelação matemática como tema transversal, com indicação que todos os temas têm de ser suportados com atividades que complementem a modelação matemática, o trabalho experimental e o estudo de situações realistas (Ministério da Educação, 2002). Por outro lado, será muito difícil desenvolver o estudo dos temas envolvendo tarefas de modelação de uma forma regular, pela dificuldade acrescida que representam para além dos temas estudados e pelo tempo que necessitam na sua implementação.

Na análise das perspetivas, resultantes da realização das tarefas de modelação matemática, os alunos reconhecem que permitem uma compreensão mais aprofundada dos conceitos matemáticos e perceber melhor a ligação com a vida real. Este reforço da compreensão é crucial na aprendizagem, na medida que para o NCTM (2007) os alunos que memorizam factos ou procedimentos sem os compreenderem têm, muitas vezes, dúvidas sobre quando e como os usar. No programa de ensino são dadas indicações para a criação de novas oportunidades para que cada estudante possa obter uma maior compreensão dos conceitos matemáticos e das suas aplicações, bem como para conectar e relacionar os novos conhecimentos com os já adquiridos em anos anteriores (Ministério da Educação, 2002).

Numa perspetiva mais abrangente, as tarefas de modelação são um tipo de tarefas que pode envolver trabalhos em grupo interdisciplinares, dado o grande potencial que têm em abarcar desafios de diferentes áreas científicas. Esta ideia é reforçada por Torres (2007), ao sugerir que as tarefas de modelação matemática podem ser implementadas seguindo uma vertente interdisciplinar, envolvendo professores de outras disciplinas, através de atividades em conjunto. Para colocar na prática esta abrangência, seria viável que na planificação anual das aulas, ao nível da área disciplinar, se pode definir uma proposta de temas para trabalhos em grupo a realizar em fases específicas do ano, tanto intra como interdisciplinares, envolvendo o estudo de situações reais.

As situações reais propostas nas tarefas de modelação devem ser o mais significativas possível para os alunos. Desta forma, aumenta-se o interesse no estudo dos alunos e consequentemente o nível de aprendizagem e capacidade de ligação dos conceitos matemáticos à realidade. Por exemplo, em vez de uma situação de crescimento da população nos EUA, conforme propus numa tarefa, pode ser estudada a divulgação de um convite para uma festa através de uma rede social. Para Niss (1992), se as situações que envolvem aplicações e modelação se os alunos se aperceberem que “não-autenticas, é muito natural que eles fiquem com a impressão que tais situações servem principalmente para disfarçar aquilo que essencialmente é matemática pura com uma roupagem pseudorrealista” (p. 2).

Bibliografia

APM (1998). *Matemática 2001: diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática: relatório preliminar.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática..

Abrantes, P. (1992). Pode-se aprender na escola a usar a Matemática em problemas da vida real? *Educação e Matemática*, 23, 25-29.

Barbosa, J. C. (2001). *Modelagem na Educação Matemática: Contribuições para o Debate Teórico.* Caxambu: ANPED.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

Canavarro, J. M. (1997). *Ciência , escola e sociedade: Conceções de Ciência de estudantes portugueses.* Coimbra: Universidade de Coimbra.

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Carvalho, J. L. (1999). *Ensino do tema função logarítmica e função exponencial com recurso às tecnologias de informação e comunicação.* Braga: Universidade do Minho.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2012). *Novo Espaço Parte 1 Matemática A 12.º Ano - Caderno do Professor.* Porto: Porto Editora.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2012). *Novo Espaço Parte 2 Matemática A 12.º Ano.* Porto: Porto Editora.

Edwards, D., & Hamson, M. (2001). *Guide to mathematical modelling*. New York: Palgrave MacMillan.

English, L. D., & Watters, J. J. (2005). Mathematical Modelling in the Early School Years. *Mathematics Education Research Journal, 16*, 58-79.

Flick, U. (2005). *Métodos qualitativos na investigação científica.* Lisboa: Monitor.

Hérbert, M. L., Goyette, G., & Boutin, G. (1995). *Investigação Qualitativa - Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Matos, J. F. (1995). *Modelação Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

Matos, J. F., & Carreira, S. P. (1996). *Modelação e Aplicações no Ensino da Matemática.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ministério da Educação (2002). Programa de Matemática A do Ensino Secundário. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Ministério da Ciência e da Cultura (1974). *Matemática - Programa para o ano lectivo 1974-1975 - Ensino Liceal.*

Ministério da Educação (1991). *Ensino Secundário - Programa de Matemática (10.º - 12.º anos).* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Ministério da Educação (1983). *Programa de ensino de Matemática do 12.ºano 1983/84 - Via Ensino,Área de Ciências.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para o Matemática Escolar.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Niss, M. (1992). O papel das aplicações e da modelação na Matemática escolar. *Educação e Matemática, 23*, 1-2.

Oliveira, I. B. (2009). *Aplicações e modelação matemática com recurso à calculadora gráfica e aso sensores, no estudo de funões com alunos do 9º ano de escolaridade.* Braga: Universidade do Minho, Instituto de Educação e Psicologia.

Pocinho, M. D., & Canavarro, J. M. (2009). *Compreender melhor as matérias e as aulas?* Mangualde: Edições Pedago.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação e Matemática, 15, 3*-9.

Ponte, J. P. (1992). Problemas de Matemática e Situações da Vida Real. *Revista de Educação,* Vol. II(2), 95-107.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Républica (1954). *Programa de Matemática (Decreto n.º39:807 de 7 de Setembro de 1954).*

Républica (1918). *Programa de Matemática (Decreto n.º5:002 de 28 de Novembro de 1918).*

Silva, J. C. (1992). As aplicações da matemática: a vida quotidiana na sala de aula. *Educação e Matemática, 23*. 3-9.

Silva, J. S. (1977). *Guia para a utilização do compêndio matemático (2º e 3º volumes) .* Lisboa: Ministério da Educação .

Sousa, C. L. (2002). *Um estudo sobre as origens e as influências do currículo da matemática do ensino secundário em Portugal.* Braga: Universidade do Minho.

Swetz, F. (1992). Quando e como podemos usar modelação? *Educação e Matemática*, 23, 45-48.

Torres, T. A. (2007). *Aplicações e modelação matemática com recurso à calculadora gráfica e sensores: um estudo com alunos do 12º ano de escolaridade.* Universidade do Minho, Instituto de Educação e Psicologia, Braga.

Viseu, F., Fernades, Â., & Gonçalves, I. (2009). O manual escolar na prática docente do professor de matemática. In B. D. Silva, L. S. Almeida, A. Barca, & M. Peralbo (Orgs.), *Actas do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia* (pp. 3178-3190). Braga: Universidade do Minho.

www.velocidade.prp.pt. (s.d.).

ANEXOS

Anexo 1 – Ficha de caracterização dos aluno

Ano letivo 2012/2013 Data: / /

Informação Pessoal

Nome completo: ______________________ Nº ________

Ano: __________ Turma: ________ Idade: ________

Sexo: Masculino ☐ Feminino ☐

Naturalidade (Freguesia): ______________ Concelho: ______________

Tem computador em casa: Sim ☐ Não ☐

Tem internet em casa: Sim ☐ Não ☐

Agregado Familiar

Dados da Mãe:

Idade da Mãe: ________

Profissão: ______________

Situação de emprego: ______________

Naturalidade (Concelho): ______________

Formação académica:

1º ciclo Ensino Básico			Bacharelato	
2º ciclo Ensino Básico			Licenciatura	
3º ciclo Ensino Básico			Mestrado	
Secundário			Doutoramento	

Dados da Pai:

Idade do Pai: ________

Profissão: ______________

Situação de emprego: ______________

Naturalidade (Concelho): ______________

Formação académica:

1º ciclo Ensino Básico			Bacharelato	
2º ciclo Ensino Básico			Licenciatura	
3º ciclo Ensino Básico			Mestrado	
Secundário			Doutoramento	

Dados encarregado de Educação:

Idade Enc.Educ: ________

Profissão: ______________

Situação de emprego: ______________

Naturalidade (Concelho): ______________

Formação académica:

1º ciclo Ensino Básico			Bacharelato	
2º ciclo Ensino Básico			Licenciatura	
3º ciclo Ensino Básico			Mestrado	
Secundário			Doutoramento	

Parentesco	**Idade**	**Habilitação escolar**	**Profissão**	**Situação Profissional**

	Sim	**Não**				
Repetiste algum ano?			Qual?		Quais?	
Estudas todos os dias?			Tempo aproximado?			
Frequentaste esta escola no ano anterior?			Qual?			
Tens alguém que te ajuda no estudo?			Quem?			
Tomas pequeno almoço?			Onde?			
Recebes algum apoio (subsídio) do Estado para estudar?						
Disciplinas preferidas?						
Disciplinas com mais dificuldades?						
Quantas horas costumas dormir por dia?						
Qual o período do dia em que consegues estar com mais atenção nas aulas?	1º bloco da manhã:			1º bloco da tarde:		
	2º bloco da manhã:			2º bloco da tarde:		
Onde costumas almoçar?						
A que distância (km) vives da escola?			Quanto tempo demora a			
Que transporte utilizas na deslocação para a escola?						
Que profissão desejas para o futuro?						

Anexo 2 - Questionário 1

1) Nas atividades que desenvolveste durante a tua escolaridade trabalhaste com exercícios, problemas e outro tipo de tarefas. Que diferenças há para ti entre exercício e problema.
2) Um tipo de tarefas com que podes trabalhar são as tarefas de modelação. Já tiveste alguma experiência na aula de matemática com tarefas de modelação?
   Sim ☐ Não ☐
3) As tarefas que costumas resolver na aula de matemática são de aplicação do que aprendes na resolução de situações do dia-a-dia? Que importância atribuis à aplicação da matemática de situações reais?
4) Nas aulas de matemática costumas trabalhar em grupo? Que vantagens e desvantagens têm o trabalho de grupo para a tua aprendizagem de conceitos matemáticos?
5) No estudo das funções exponencial e logarítmica vais trabalhar com tarefas de modelação, que consistem na identificação de um problema, recolha de dados, procuro do modelo que melhor se ajusta a esses dados e na discussão da resposta ao problema dado. Qual a importância destas atividades na tua aprendizagem e na tua formação para lidar com problemas do dia-a-dia?

Anexo 3 - Questionário 2

1) Identificam alguma mais-valia para a aprendizagem a resolução de tarefas das funções exponencias e logarítmicas com base na vida real?
2) Consideram que realizar tarefas deste tipo a aprendizagem restringe-se à área disciplinar da matemática? Porquê?
3) Realizamos tarefas com base na vida real. Comparativamente às tarefas em que o modelo é dado e apenas utilizado para estimar valores, que diferenças encontram na aprendizagem, quando é pedido para obter o modelo matemático?

Anexo 4 – Questionário 3

Questionário sobre intervenção pedagógica

Caro(a) aluno(a),
No âmbito da unidade curricular Estágio Profissional, do Mestrado em Ensino da Matemática, este questionário tem por finalidade recolher as perceções de alunos do 12.º ano sobre o contributo das tarefas de modelação na aprendizagem de tópicos das funções exponencial e logarítmica.
A informação recolhida será usada exclusivamente para fins académicos, comprometendo-me a assegurar o anonimato da mesma.

I. Dados pessoais

1. Idade: _____
2. Sexo: ☐ Masculino ☐ Feminino
3. Número de retenções durante o teu percurso escolar:

____

4. Que anos escolares repetiste?

____

6. Que classificação final obtiveste na disciplina de Matemática no 10.ºano?____________________
7. Que classificação final obtiveste na disciplina de Matemática no 11.ºano? ______________
8. Que classificação final obtiveste na disciplina de Matemática no 12.ºano? 1º período___/2ºperíodo___

II. Modelação matemática na aprendizagem das funções exponencial e logarítmica

Nas afirmações seguintes, assinala com uma cruz **(x)** o quadrado que mais se adequa ao teu grau de concordância tendo em consideração a seguinte escala:

DT: Discordo Totalmente; **D**: Discordo; **I**: Indiferente; **C**: Concordo; **CT**: Concordo Totalmente.

Afirmações	**DT**	**D**	**I**	**C**	**CT**
1. Função exponencial foi um tema da matemática que gostei de estudar.					
2. Função logarítmica foi um tema da matemática que gostei de estudar.					
3. No estudo das funções exponenciais e logarítmicas evidenciei mais dificuldades do que noutros temas de matemática.					
4. As tarefas de modelação propostas contribuíram para aumentar o meu interesse na aprendizagem das funções exponencial e logarítmica.					
5. As tarefas de modelação propostas ajudaram a perceber melhor a ligação da matemática com problemas da vida real.					
6. As tarefas que envolveram situações da vida real ajudaram a melhorar a minha capacidade de trabalhar com a calculadora gráfica.					
7. A interpretação da informação gerada pela calculadora gráfica foi um desafio no estudo dos temas funções exponencias e logarítmicas.					
8. A realização de tarefas em grupo aumenta a interpretação dos temas, ao discutirmos as nossas ideias com os colegas.					
9. As tarefas de modelação favoreceram o desenvolvimento dos tópicos das funções exponencial e logarítmica.					
10. As tarefas em que foi necessário definir o modelo matemático são mais difíceis que aquelas em que o modelo é dado.					
11. As tarefas em que foi necessário definir o modelo permitem uma melhor interpretação da ligação dos conceitos matemáticos com a realidade.					
12. As tarefas de modelação exigem melhor conhecimento dos conceitos matemáticos.					

13. As tarefas de modelação permitem trabalhar conceitos matemáticos aplicados a outras áreas científicas					
14. Gostava de ter mais oportunidades para trabalhar em grupo.					
15. As tarefas de modelação favoreceram a introdução dos tópicos das funções exponencial e logarítmica.					
16. Gostava de trabalhar com tarefas de modelação matemática noutros temas do programa.					

III. Implementação das fases do processo de modelação

Nas tarefas de modelação propostas ao longo das aulas, foi necessário realizar as fases previstas no processo de modelação matemática segundo uma ordem natural. Ordena essas fases de 1 a 5:

Fases das tarefas de modelação	Ordem
Avaliar a adequação do modelo à situação e se necessário proceder a melhorias.	
Tradução da situação através de conceitos e relações relevantes para o modelo matemático.	
Identificar e compreender a situação real	
Generalizar e simular: calcular resultados através do modelo para além dos valores reais	
Manipular os dados com vista à obtenção do modelo matemático.	

IV. Aspetos gerais das tarefas de modelação no estudo das funções exponencial e logarítmica

1. Nas tarefas de modelação que desenvolveste ao longo das aulas, houve algumas em que o modelo matemático foi dado e outras em que foi necessário defini-lo.

   1.1. Que diferenças encontras entre as duas situações em termos de interpretação da situação real em estudo?

   ____
   ____
   ____

   1.2. Qual das situações permite identificar melhor a aplicação dos conceitos matemáticos estudados? Justifica a tua resposta.

   ____
   ____
   ____

2. Para a tua aprendizagem, quais as diferenças que identificas entre resolução de exercícios, problemas e tarefas de modelação?

   ____
   ____
   ____
   ____

3. Indica três aspetos positivos das tarefas de modelação para a tua aprendizagem de tópicos de funções exponencial e logarítmica:

   ____
   ____
   ____

4. Indica três aspetos negativos das tarefas de modelação para a tua aprendizagem de tópicos de funções exponencial e logarítmica:

   ____

Anexo 5 – Guião da entrevista

1. Como caracterizas a tua relação com a disciplina de Matemática ao longo do teu percurso escolar? Qual a importância da Matemática para o teu dia-a-dia?
2. As atividades que realizaste na disciplina de matemática ao longo da tua escolarização incidiram sobre situações do quotidiano? Porque sim ou porque não?
3. Na resolução das tarefas propostas na aula de matemática importa mais o resultado ou o processo? Porquê?
4. Nas tuas aulas de matemática foste incentivado(a) a discutir processos e resultados com os teus colegas? Que importância tem essas atividades para a tua aprendizagem?
5. Comenta a seguinte afirmação: “se colocássemos um post-it amarelo em tudo o que tem matemática, o mundo ficada todo marcado de amarelo”.
6. Que curso queres seguir na Universidade? Que relação teve a escolha desse curso com a Matemática? Identificas alguma importância na aplicação da matemática nessa área?
7. Como caracterizas as aulas de matemática? Deve ser somente o professor a fazer e a dizer o que acontece na aula de matemática? Ou os alunos também devem contribuir?
8. Nas tuas atividades de aprendizagem de conteúdos matemáticos preferes resolver exercícios ou problemas? Porquê?
9. Nas tuas atividades de aprendizagem de tópicos da função exponencial e da função logarítmica trabalhaste com tarefas de modelação. Que distinção fazes deste tipo de tarefas dos exercícios e dos problemas que costumas resolver?
10. Que relações tiveram as tarefas de modelação na aprendizagem dos tópicos da função exponencial e da função logarítmica? Identifica aspetos positivos e negativos para a tua aprendizagem.
11. Na análise das respostas que os alunos da tua turma deram ao questionário sobre a intervenção pedagógica, vários afirmam que as tarefas de modelação são uma perda de tempo porque não saem no exame. Que comentário te merece esta posição?
12. Consideras que os testes devem ser o único método de avaliar as aprendizagens dos alunos? Porquê? Como avaliar a capacidade dos alunos de aplicar o que aprendem à realidade, argumentar e trabalhar em grupo?
13. Houve alguns alunos que aumentaram 2 valores a avaliação final do 2º período através dos trabalhos de grupo, que incluíram temas de modelação matemática. Qual a tua opinião sobre direcionar os 15% da avaliação de valores, atitudes e trabalhos de casa para trabalhos em grupo com aplicação de conceitos matemáticos à realidade?
14. Alguns alunos não gostam de problemas da vida real nos exames. Concordas, porquê? Será que não gostam pela dificuldade que representam e têm receio de errar, ou não gostam de aplicar os conceitos matemáticos à realidade?
15. Gostaste de realizar tarefas em grupo que envolveram situações da vida real com modelação matemática? Justifica a tua resposta.

Anexo 6 – Pedido de autorização

Exma. Sra.

Diretora da Escola Secundária ...

Ricardo José Amaral Marques e Ana Cecília Morais Gonçalves, alunos de Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade do Minho, encontram-se a realizar o seu estágio pedagógico na Escola Secundária ..... No âmbito das atividades de estágio faz parte o desenvolvimento de um Relatório sobre a nossa prática pedagógica, com características investigativas. O tema que orientará a nossa ação pedagógica intitula-se "*As tarefas de modelação matemática no ensino e na aprendizagem das funções exponencial e logarítmica: um estudo com alunos do 12º ano de escolaridade*" e "*O ensino e aprendizagem das funções trigonométricas através de tarefas exploratórias e investigativas: um estudo com alunos do 12º ano de escolaridade"*. Para poder desenvolver o nosso relatório precisamos recolher dados recorrendo a diferentes métodos. Gostaríamos de recolher dados através de gravações áudio e vídeo em algumas aulas, por serem métodos com grande eficácia de registo. Nesse sentido, pedimos autorização da vossa V. Ex.ª para esta recolha, comprometendo-nos a usar os dados só para fins académicos, assim como a não divulgar o nome da escola e dos alunos. Todos os dados serão confidenciais e só serão usados para evidenciar a experiência de ensino que pretendemos realizar, assim como problematizar as estratégias de ensino que forem delineadas. Em causa está, sobretudo, a aprendizagem dos alunos e a nossa formação a partir da nossa própria prática.

Os Encarregados de Educação da turma em causa (12.º ...) já assinaram as autorizações para a recolha de registos audiovisuais durante as aulas, onde foram informados do objetivo do nosso estudo e do nosso compromisso em manter anonimato dos alunos e da escola.

Agradecemos a atenção dispensada.

Com os mais respeitosos cumprimentos.

______________________________ ______________________________

(Ricardo José Amaral Marques) e (Ana Cecília Morais Gonçalves)

Braga, Novembro de 2012

Anexo 7 - A aprendizagem e o problema do Presidente

Lê os textos com atenção e responde às questões:

Aprendemos melhor quando vivenciamos, experimentamos, sentimos. Aprendemos quando relacionamos, estabelecemos vínculos, laços entre o que estava solto, caótico, disperso, integrando-o em um novo contexto, dando-lhe significado, encontrando um novo sentido.

Aprendemos quando descobrimos novas dimensões de significação que antes se nos escapavam, quando vamos ampliando o círculo de compreensão do que nos rodeia, quando como numa cebola, vamos descascando novas camadas que antes permaneciam ocultas à nossa perceção, o que nos faz perceber de uma outra forma. Aprendemos mais quando estabelecemos pontes entre a reflexão e a ação, entre a experiência e a conceituação, entre a teoria e a prática; quando ambas se alimentam mutuamente.

Aprendemos quando interagimos com os outros e o mundo e depois, quando interiorizamos, quando nos voltamos para dentro, fazendo nossa própria síntese, nosso reencontro do mundo exterior com a nossa reelaboração pessoal.

José Manuel Moran

Especialista em projetos inovadores na educação presencial e à distância

Texto publicado no livro Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica, SP: Papirus, pp.22-24

1. Na tua aprendizagem de conceitos matemáticos, que diferenças há entre reprodução de conhecimentos e (co)construção desses conhecimentos? Qual destas atividades te permite uma aprendizagem mais duradoura e com maior compreensão?

O presidente da camara de uma cidade pretende definir as rotas dos carros do lixo. Ele pretende percorrer as ruas fazendo a recolha entre as 23h00 e 5h00 para evitar as horas com mais trânsito. Ele conhece todas a ruas da cidade e respetivas dimensões. Não consegue saber quantos carros do lixo terá que comprar e quais as rotas a percorrer, de modo a não repetir trajetos e cumprir o horário. Tem ainda que ter em consideração o número de habitantes das ruas que lhe permite calcular a capacidade de carga dos carros, com base na quantidade de lixo que cada pessoa faz em média por dia.

2. Há algum aspeto ou variável que o presidente se está a esquecer que pode colocar em causa o resultado?
3. Apresenta outra situação da vida real que para a resolver é necessário recorrer à matemática.
4. Indica os aspetos ou variáveis que dificultam ou simplificam a procura da resolução do problema?
5. Se o presidente encontrar uma solução que lhe pareça viável, o que deverá fazer antes de investir nos carros de recolha?

Anexo 8 – Travagem simples

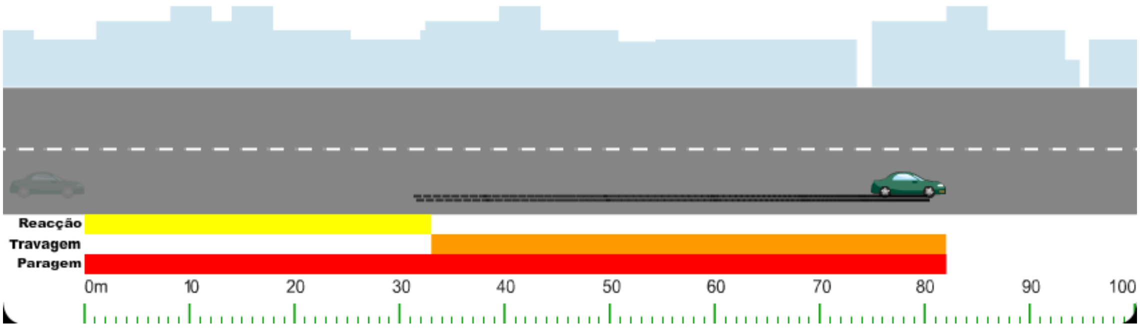
Um automóvel circula numa estrada a uma determinada velocidade (km/hora) e aparece um obstáculo. Ocorrem três momentos até parar.

1º Momento: distância de reação. Metros que o automóvel percorre desde que o condutor vê o obstáculo até carregar com o pé no travão.

2º Momento: distância de travagem. Metros que automóvel percorre durante a travagem.

3º Momento: distância paragem. Corresponde à soma das duas distâncias anteriores.

A imagem seguinte ajuda a interpretar a situação, onde está indicada a amarelo a distância de reação, a laranja a distância de travagem e a vermelho a distância de paragem.



Os dados apresentados na tabela seguinte foram obtidos num simulador de travagem, onde estão registadas distâncias de reação para diferentes velocidades de circulação. Nota que os dados são referentes a uma simulação em estrada de alcatrão com piso seco.

Tipo de piso: alcatrão seco

Velocidade (km/hora)	40	60	80	100	120	140	160
Distância de reação	13	20	26	33	40	46	53

1) Indica a distância de reação que o carro percorre se circular a 80 km/hora?
2) Qual a distância de reação se o carro circular a 50 km/hora?
3) Sabendo que o simulador só funciona até à velocidade de 200 km/hora, se o carro circular a 250 km/hora, qual será a distância de reação? Explica o raciocínio.
4) Investiga e define um modelo matemático que permita obter qualquer distância de reação em função da velocidade.
5) Justifica a validade do modelo obtido da situação apresentada.

Anexo 9 – Travagem em asfalto seco e molhado

Um automóvel circula numa estrada a uma determinada velocidade (km/hora) e aparece um obstáculo. Ocorrem três momentos até parar.

1º Momento: distância de reação. Metros que o automóvel percorre desde que o condutor vê o obstáculo até carregar com o pé no travão.

2º Momento: distância de travagem. Metros que automóvel percorre durante a travagem.

3º Momento: distância paragem. Corresponde à soma das duas distâncias anteriores.

Recorrendo ao simulador, responde às seguintes questões:

1) Simula a paragem para seis velocidades diferentes e regista as distâncias de reação na tabela para estrada em asfalto seco e asfalto molhado. Calcula a razão entre a reação e a velocidade.

Velocidade (km/hora)						
Reação (mt)						
Razão: $\frac{Travagem}{Velocidade}$						

2) Simula a paragem para seis velocidades diferentes e regista as distâncias de travagem na tabela para estrada em asfalto seco e asfalto molhado. Calcula a razão entre a travagem e a velocidade.

Velocidade (km/hora)						
Travagem (mt)						
Razão: $\frac{Travagem}{Velocidade}$						

Velocidade (km/hora)						
Travagem (mt)						
Razão: $\frac{Travagem}{Velocidade}$						

3) Averigua se as situações das alíneas anteriores traduzem relações proporcionais entre as distâncias e as velocidades? Justifica.
4) Representa graficamente as situações. O que se pode concluir?

Anexo 10 – Travagem em gelo

1) Considera que a estrada se encontra com gelo. Com recurso ao simulador, modela esta situação.

   1.1) Simula e regista na tabela diferentes distâncias de travagem em função da velocidade e calcula a razão entre as distâncias de travagem e as velocidades. Que conclusões se podem tirar?

Velocidade (km/hora)									
Travagem (mt)									
Razão: $\frac{Travagem}{Velocidade}$									

   1.2) Define um modelo matemático que traduz a distância de travagem em função da velocidade. Identifica o tipo de função associada, fundamentando a escolha do modelo?

   1.3) Calcula a distância de travagem a 90 km/hora e compara com o simulador. Justificar a diferença?

   1.4) Calcula a distância de travagem para 200 km/hora e compara com o simulador. O que concluis?

   1.5) Calcula o erro relativo do modelo obtido. Apresenta o valor da média do erro relativo considerando quatro velocidades diferentes.

Velocidade (km/hora)				
Travagem simulador(mt)				
Travagem modelo (mt)				
Erro relativo				

Fórmula: $Erro\ relativo = \left|\frac{Val.teórico - Val.real}{Valor\ real}\right| \times 100 = \left|\frac{Trav.modelo - Trav.simulador}{Trav.simulador}\right| \times 100$

   1.6) Calcula o intervalo de travagem previsto se o automóvel circular a 200 km/hora? Recorre ao modelo obtido e ao valor médio do erro relativo.

2) Considera uma nova situação de travagem: foram efetuadas simulações de travagem numa pista de testes com inclinação e em descida. Os dados apresentados na tabela correspondem aos resultados dos testes.

Velocidade (km/hora)	40	60	80	100	180	200	220
Travagem (mt)	71	167	280	455	1590	2350	3750
Razão: $\frac{Travagem}{Velocidade}$							

2.1) Completa a tabela com os valores das razões. Compara e comenta os resultados desta tabela com os da tabela da questão 1)?

2.2) Define um modelo matemático que traduz a distância de travagem em função da velocidade. Identifica o tipo de função associada, fundamentando a escolha do modelo?

2.3) Calcula a distância de travagem a 220 km/hora recorrendo ao modelo obtido. Qual a diferença entre o valor teórico e valor real? Comenta os valores.

Anexo 11 – Censos nos EUA

Os censos nos EUA revelaram os seguintes dados sobre as taxas de casa própria.

Ano	% casa própria
1940	43.6
1950	55.0
1960	61.9
1970	62.9
1980	64.4
1990	64.2
2000	67.4

Considera t=0 o ano de 1900.

a) Define um o modelo para prever a taxa de aquisição da casa própria em 2010.

b) Compare a taxa de posse de casa real em 1950 para a taxa dada pelo modelo. O que se pode concluir?

Anexo 12 - Modelo geral de arrefecimento de Newton

Realizar uma experiência com recolha de dados para testar o modelo geral de arrefecimento de Newton: $T(t) = T_s + D_0e^{-kt}$, em que Ts é a temperatura ambiente e Do é a diferença inicial de temperatura entre a água e o ambiente (temperatura na sala).

Experiência: colocar água quente numa vasilha e efetuar algumas medições de temperatura ao longo do arrefecimento da água, utilizando o analisador de dados Casio EA200 e a calculadora gráfica.

Testa a veracidade do modelo geral de arrefecimento de Newton para a situação apresentada. O que concluis?

Anexo 13 - Esperança de vida

A Tabela mostra a expectativa de vida (em anos) no momento do nascimento para residentes dos Estados Unidos de 1970 a 2000. Use o modelo de regressão indicada para estimar a expectativa de vida para um residente dos EUA que nasceu em 2010.

	Ano	Expectativa vida
1.	1970	70.8
2.	1975	72.6
3.	1980	73.7
4.	1985	74.7
5.	1990	75.4
6.	1995	75.9
7.	2000	77.0

Considera t=0 o ano de 1900.

a) Regressão linear

b) Regressão quadrática

c) Regressão cúbica

d) Regressão exponencial

Anexo 14 - Clube de matemática

Num determinado dia, um grupo de professores decidiu formar um clube de matemática. Admitamos que, t dias após a constituição do clube, o número de membros é dado pela seguinte tabela:

t (dias)	n (número de membros)
0	10
100	27
200	72
300	183
400	431
500	854
600	1339
700	1693
800	1875
900	1952
1000	1982
1100	1993
1200	1998
1300	1999
1400	1999
1500	1999

1. Define o modelo matemático que melhor represente a situação. Aproxima os valores do modelo às centésimas.
2. Comenta a afirmação: "o presidente só deixará o cargo quando o clube ultrapassar os 2000 sócios." Responde a esta questão, exclusivamente através de processos analíticos (recorre à calculadora apenas para efetuar cálculos).
3. Define a expressão que modela a velocidade de entrada de novos sócios para o clube. Recorrendo a este modelo, calcula o instante em que a taxa de crescimento é máxima (sem calcular a segunda derivada).

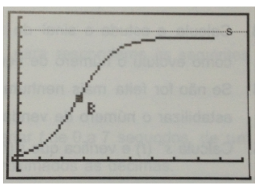
Anexo 15 – A inteligência do rato

Numa experiência para medir a inteligência dos ratos, um cientista colocou um rato numa caixa de Skinner. Privado de água durante 24 horas, o rato viu-se assim motivado para empurrar uma alavanca que permitia obter uma gota de água de cada vez que a empurrasse. Admitindo-se que, quantas mais vezes o fizesse, maior seria a sua inteligência. O cientista foi recolhendo os dados da tabela sobre o número de vezes que o rato empurrava a alavanca por minuto durante uma hora.

t (minutos)	r (alavanca/min)
3	1
6	2
8	3
10	4
12	5
13	6
14	7
15	8
17	9
19	10
21	11
24	12
30	12,5
40	12,5
50	12,5

Com base nos dados da tabela, responde às seguintes questões, recorrendo exclusivamente à calculadora (sem processos analíticos):

1. Representa graficamente os dados na calculadora. Descreve o comportamento da representação gráfica dos dados.
2. Define um modelo matemático que estime o número de vezes que o rato empurra a alavanca por minuto ao longo do tempo.
3. Indica as coordenadas do retângulo de visualização para o qual obtiveste um gráfico como este.



4. Elabora um texto que descreva como varia a velocidade de aprendizagem do rato e explica o significado do ponto B.
5. Determina as coordenadas do ponto B, usando apenas a calculadora.

Anexo 16 – Planos de poupança (tema 4)

O Sr. António tem um filho que faz oito anos no verão de 2013 e gostava de ter 5000€ disponíveis para ajudar nas despesas universitárias, quando o seu filho completar 18 anos ou, se entender, ajudá-lo noutra situação.

O Sr. António sabe que os bancos pagam os juros mais altos, quando se coloca o dinheiro a render durante 10 anos, com capitalização anual e sem qualquer movimento sobre o dinheiro.

a) Consulta alguns bancos para saber qual a melhor taxa de juro que o mercado oferece para este tipo de depósito.

b) Qual deverá ser o valor que o Sr. António terá de depositar até ao verão, de forma a ter exatamente 5000€ disponíveis no banco daqui a 10 anos (em 2023)?

c) Define um modelo geral que permita saber o montante a depositar no banco, para qualquer valor pretendido e para qualquer taxa de juro, mantendo capitalização anual com depósito a 10 anos.

d) O Sr. António ouviu dizer que há bancos que permitem capitalizar os juros mais que uma vez ao ano. Encontra um modelo que permita ao Sr. António efetuar os cálculos e decidir se vale a pena tentar negociar com os bancos mais uma capitalização ao ano.

Anexo 17 – A escola amiga – calças (tema 5)

A Escola Amiga faz parte de um programa de apoio a jovens de países desfavorecidos economicamente. Um dos apoios prestados consiste em enviar calças para os alunos de turmas que frequentam o ensino secundário. Apenas têm informação da altura dos alunos e do seu peso. Sabem, também, que a escala de tamanhos que utilizam no país é numérica (36, 38, 40, 42,...).

Recorrendo aos dados (a altura, o peso e a medida das calças) de uma turma do 10º ano, uma do 11º e uma do 12º ano, define um modelo que permite estimar a medida das calças para os alunos que as irão receber.

Define um modelo ou modelos que mais se ajuste, considerando os dados disponíveis (altura e peso).

Investiga a possibilidade de um modelo por ano escolar, por género ou global.

Testa o modelo nos elementos do grupo e comenta a sua viabilidade.

Anexo 18 – A escola amiga - calçado (tema 6)

A Escola Amiga faz parte de um programa de apoio a jovens de países desfavorecidos economicamente. Um dos apoios prestados consiste em enviar calçado para os alunos de turmas que frequentam o ensino secundário. Apenas têm informação da altura dos alunos e da sua idade. Sabem, também, que a escala de tamanhos que utilizam no país é numérica (36, 38, 40, 42,...).

Recorrendo aos dados (a altura, a idade e a medida do calçado) de uma turma do 10º ano, uma do 11º e uma do 12º ano, define um modelo que permite estimar a medida do calçado para os alunos que o irão receber.

Define um modelo ou modelos que mais se ajuste, considerando os dados disponíveis (altura e idade).

Investiga a possibilidade de um modelo por ano escolar, por género ou global.

Testa o modelo nos elementos do grupo e comenta a sua viabilidade.