



Universidade do Minho
Instituto de Educação

Alberto Eduardo Araújo Rodrigues Dias

A natureza das tarefas matemáticas e o envolvimento dos alunos nas atividades da sala de aula: um estudo com alunos do 11º ano no tema derivada de uma função.



Universidade do Minho
Instituto de Educação

Alberto Eduardo Araújo Rodrigues Dias

**A natureza das tarefas matemáticas e o
envolvimento dos alunos nas atividades da
sala de aula: um estudo com alunos do
11^o ano no tema derivada de uma função.**

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3^o Ciclo do
Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho realizado sob orientação do
Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

janeiro de 2013

DECLARAÇÃO

Nome: Alberto Eduardo Araújo Rodrigues Dias

Endereço eletrónico: eduardo_lem@hotmail.com

Telefone: 00351/964730949

Número do Bilhete de Identidade: 11500410

Título Relatório:

A natureza das tarefas matemáticas e o envolvimento dos alunos nas atividades da sala de aula: um estudo com alunos do 11^º ano no tema derivada de uma função.

Supervisor:

Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

Ano de conclusão: 2013

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTEGRAL DESTES RELATÓRIOS APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE.

Universidade do Minho, ___/___/_____

Assinatura: _____

AGRADECIMENTOS

Dedico este espaço àqueles que de forma direta ou indireta contribuíram positivamente para a realização deste estudo. Com a especial atenção:

Ao Professor Doutor Floriano Viseu pela forma como orientou o meu trabalho, pela paciência, ajuda, disponibilidade e interesse demonstrado.

Ao Mestre e Professora Carmo Cunha pela paciência demonstradas, ideias, sugestões e experiência que me fez crescer como professor e reviver saudosos momentos do Ensino Secundário.

À Miriam pela ajuda, companhia e pelo debate de ideias.

À Sofia ao Fábio e finalmente à Fátima pela disponibilidade em rever o Abstract.

Aos alunos da turma e à direção da escola pela colaboração e pela disponibilidade.

À minha família, em especial aos meus pais Amália e António pelo apoio em todos os momentos e formação enquanto ser humano, ao meu irmão, à Carla pela serenidade que me transmitiu nos momentos mais difíceis e aos meus amigos que muitas vezes abdicaram da minha presença.

A NATUREZA DAS TAREFAS MATEMÁTICAS E O ENVOLVIMENTO DOS ALUNOS NAS ATIVIDADES DA SALA DE AULA: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 11.º ANO NO TEMA DERIVADA DE UMA FUNÇÃO.

Alberto Eduardo Araújo Rodrigues Dias

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Universidade do Minho, 2013

RESUMO

Este estudo teve como objetivo compreender a relação entre o tipo de tarefas apresentadas na sala de aula e a envolvimento dos alunos nas atividades desenvolvidas. Desse modo formularam-se as seguintes questões: (1) Que tipos de tarefas estão contemplados no manual escolar do aluno nos tópicos da derivada de uma função? (2) Como se envolvem os alunos nas atividades da aula com diferentes tipos de tarefas no estudo da derivada de uma função? (3) Que perspetivas têm os alunos sobre o contributo dos diferentes tipos de tarefas na sua aprendizagem dos tópicos da derivada de uma função? Para dar resposta a estas questões, recorreu-se a diferentes métodos de recolha de dados, tais como questionários, questões soltas, observação e análise documental (projeto educativo da escola, tarefas do manual escolar dos alunos, programa e produções dos alunos, planificações das aulas e as suas reflexões).

Da análise dos dados recolhidos, constatou-se que no manual adotado prevalecem tarefas de estrutura fechada, exercícios e problemas. No que respeita ao envolvimento dos alunos nas atividades da aula, constatou-se que nas tarefas de natureza fechada tendem a reproduzir hábitos de trabalho enraizados ao longo da sua escolarização e que conhecem a generalidade dos seus objetivos de aprendizagem. Relativamente às tarefas de natureza aberta (investigações e explorações), a maior parte dos alunos nem sempre reconhece o valor deste tipo de tarefas, devido à sua diferença de estrutura e à falta de hábitos de trabalho a que essa tipologia de tarefas exige. Apesar disso, alguns dos alunos que se envolveram mais neste tipo de tarefas foram os que anteriormente não se envolviam nas atividades das aulas. De um modo geral, os alunos compreenderam que as tarefas rotineiras (exercícios) estão mais associados à apreensão de conteúdos específicos, tais como a função derivada ou cálculos intermédios, ao passo que os problemas são mais utilizados na apreensão de conhecimentos mais abrangentes necessários para a resolução de problemas de otimização e de questões que envolvem a visualização de gráficos.

MATHEMATICAL TASKS NATURE AND STUDENTS ENGAGEMENT IN CLASSROOM ACTIVITIES: A
STUDY WITH 11TH YEAR PUPILS STUDYING THE “DERIVATIVES OF A FUNCTION” THEME

Alberto Eduardo Araújo Rodrigues Dias

Masters in Teaching Mathematics in the 3rd Cycle of Basic Education and Secondary Education

University of Minho, 2013

ABSTRACT

This study had as main goal to understand the relationship between the kind of tasks presented in the classroom and the engagement of the students in the carried out activities. Thereby, the following questions have been made: (1) What kind of tasks are contemplated on the student's handbook concerning derivatives of a function? (2) How do students engage in the classroom activities with different kinds of tasks while studying the derivative of a function theme? (3) Which perspectives have the students about the contribution of different kinds of tasks in their learning process concerning this theme? To answer all these questions, different data collection methods were adopted: questionnaires, open questions, observation and document analysis (school's educative project, tasks that were on the handbook's chapter concerning this issue, programme and learners production, lesson planning and their reflection).

Based on the collected data, we concluded that in the adopted handbook closed structure tasks, exercises and problems, prevail, which are also the tasks that teachers use more often in their practice. As far as the students' engagement in the classroom activities is concerned, we have seen that students tend to copy work habits that are deeply rooted throughout their academic process and they know in general their main learning goals. Concerning the open structure tasks (research and analysis), most students not always reckon the importance of these kind of tasks, due to the structures differences and the lack of work habits that usually those kind of tasks imply. Nevertheless, some students that were involved more in this kind of tasks were the ones who previously did not get involved in the classroom activities. Overall, students understand everyday tasks (exercises) that are more associated to acquisition of specific learning contents such as derivative function or rate of change while problems are more often used in the acquisition of more comprehensive knowledge, such as optimization problems, issues that involve graphic visualizations or use different programme contents.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	v
ABSTRACT	vii
ÍNDICE	ix
ÍNDICE DE FIGURAS.....	xi
ÍNDICE DE QUADROS.....	xiii
ÍNDICE DE TABELAS.....	xv
CAPÍTULO 1	1
INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Tema, objetivo e questões do estudo.....	1
1.2. Pertinência do estudo	3
1.3. Estrutura do relatório	4
CAPÍTULO 2	7
ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO	7
2.1.1. A escola.....	7
2.1.2. A turma	9
2.2. Os conteúdos programáticos lecionados.....	11
2.3. As tarefas	12
2.4. O manual escolar.....	20
2.5. Estratégias de Intervenção	22
2.7. Recolha de dados	25
CAPÍTULO 3	29
INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA.....	29
3.2. Conteúdos, tarefas e atividades desenvolvidos na intervenção pedagógica	33
3.3. O envolvimento dos alunos nos diferentes tipos de tarefas.....	34
3.4. Perspetivas dos alunos acerca do contributo dos diferentes tipos de tarefas.....	52
CAPÍTULO 4	59
CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES	59
4.1. Conclusões.....	59

4.1.1. Que tipos de tarefas estão contemplados no manual escolar do aluno nos tópicos da derivada de uma função?	59
4.1.2. Como se envolvem os alunos nas atividades da aula com diferentes tipos de tarefas no estudo da derivada de uma função?	60
4.1.3. Que perspectivas têm os alunos sobre o contributo dos diferentes tipos de tarefas na sua aprendizagem dos tópicos da derivada de uma função?.....	62
4.2. Limitações e Recomendações	63
Referências Bibliográficas	65
ANEXOS	71
ANEXO 1 – PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO AO DIRETOR DA ESCOLA.....	73
ANEXO 2 – PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO AOS ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO	75
ANEXO 3 – QUESTIONÁRIO AOS PROFESSORES	77
ANEXO 4 - QUESTIONÁRIO AOS ALUNOS DA TURMA.....	78
ANEXO 5 - FICHA DE TRABALHO	80
ANEXO 7 - FICHA DE TRABALHO AULA 9.....	83
ANEXO 9 – QUESTÕES SOLTAS FORMULADAS DURANTE A PRÁTICA.....	87

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Disposição dos alunos na sala de aula.....	11
Figura 2. Distribuição das tarefas quanto ao grau de desafio e de estrutura (Ponte, 2005).....	14
Figura 3. Abordagem cognitiva de Ferri.	18
Figura 4. Distribuição dos conteúdos programáticos no tópico das derivadas.....	29
Figura 5. Tipo de atividades propostas pelo manual nas 'Tarefas laterais'.....	30
Figura 6. Exemplo do manual escolar das 'Tarefas de aplicação do tópico'.....	31
Figura 7. Exemplo de 'tarefa de aplicação final' (escolha múltipla).....	32
Figura 8.Exemplo de 'Tarefa de aplicação final' (desenvolvimento).	33
Figura 9. Determinação das dimensões de um calheiro que maximize o fluxo da água da chuva.45	
Figura 10. Variação da área interior do calheiro.....	45
Figura 11. Atividade desenvolvida pelos alunos do grupo P1+P2.	48
Figura 12. Elaboração de questões pelo grupo P13+P14.....	48
Figura 14. Elaboração de questões pelos alunos do grupo P9+P10	49
Figura 13. Atividade dos alunos P11+P12.....	49

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1. Classificação das tarefas segundo Yeo (2007).....	20
Quadro 2. Elementos constitutivos do manual escolar	21
Quadro 3. Atividades do trabalho de pares na Aula 2.....	36
Quadro 4. Formação dos grupos.....	38
Quadro 5. Atividade de grupo da aula 3	38
Quadro 6. Atividade em grupo.....	42
Quadro 7. Distribuição dos pares de alunos pelos grupos.....	47
Quadro 8. Tópicos e tipologia de tarefas apresentados pelos alunos	50
Quadro 9. Respostas dos alunos à atividade acerca da atividade de grupo.....	52

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1. As tarefas mais utilizadas pelos professores.....	9
Tabela 2. Caracterização da turma.....	10
Tabela 3. Frequência (%) das tarefas propostas no manual escolar.....	30
Tabela 4. Frequência (%) dos objetivos, estrutura e contexto das tarefas do manual.....	33
Tabela 5. Conteúdos, tarefas e atividades.	34
Tabela 6. Consideração pelos alunos do objetivo a que se propõe as tarefas do manual (n=23).	53
Tabela 7. Perceções dos alunos acerca das tarefas do manual escolar.....	53
Tabela 8. Respostas dos alunos às questões soltas.....	55
Tabela 9. Tipos de tarefas pelos conteúdos programáticos.	56

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta o tema, o objetivo e as questões de investigação que orientaram a minha prática pedagógica, a pertinência do estudo e uma breve descrição da estrutura do relatório.

1.1. Tema, objetivo e questões do estudo

Da observação da prática pedagógica, no contexto de sala de aula, fui-me apercebendo que, por várias razões, nem todos os alunos participam nas atividades da aula. A sucessão de aulas leva a que a 'apatia' de alguns alunos seja aceite como um comportamento natural sem que, muitas das vezes, se procure problematizar as razões que levam ao seu alheamento do que acontece na sala de aula. Parte-se do princípio que cada aluno é responsável pela forma como gere a sua atividade na aula de Matemática. Santos (2002) assim o entende ao afirmar que o aluno terá necessariamente de desempenhar um papel crucial na regulação da sua aprendizagem:

Entendemos por regulação da aprendizagem todo o ato intencional que, agindo sobre os mecanismos de aprendizagem, contribua diretamente para a progressão e/ou redirecionamento dessa aprendizagem. Ao falarmos numa ação sobre os mecanismos de aprendizagem, estamos a considerar o papel central do sujeito, daquele que aprende. (Santos, 2002, p. 77)

Fatores como o avolumar e o aumento da complexidade dos conteúdos, a ausência de conhecimentos prévios e a falta de atenção de alguns alunos, que tende a aumentar ao longo da aula, conduzem a diferentes níveis de envolvimento dos alunos nas atividades da aula. Tais fatores fizeram com que questionasse o que o professor de Matemática pode fazer de modo a envolver o maior número de alunos nas atividades de aprendizagem. Como nas aulas de matemática tende a prevalecer a resolução de exercícios (APM, 1998), sobretudo para sistematizar os conhecimentos que os alunos adquirem em atividades rotineiras, ponderei o grau de estrutura e de desafio das tarefas que são propostas como elementos passíveis a envolvê-los mais nas atividades da aula. De modo a concretizar este 'pensamento', propus-me a orientar a minha prática pedagógica na leção do tópico das derivadas de uma função através de diferentes tipos de tarefas. O tópico das derivadas tem uma diversidade de aplicações na

Matemática e noutras áreas de conhecimento e prepara os alunos para a prossecução dos seus estudos superiores. Pela primeira vez, conceitos como limite, infinito e infinitésimo apresentam-se aos alunos. O grau de abstração e de complexidade destes conceitos são considerados por Vieira (1999) como fatores que dificultam a aprendizagem de alunos do ensino secundário. Para além desses fatores, o *National Joint Committee on Learning Disabilities* (NJCLD, 1988) apresenta outros que ajudam a explicar as dificuldades de aprendizagem de muitos alunos:

Dificuldade de Aprendizagem é um termo geral que se refere a um grupo heterogéneo de transtornos que se manifestam por dificuldades significativas na aquisição e uso da escuta, fala, leitura, escrita, raciocínio ou habilidades matemáticas. Esses transtornos são intrínsecos ao indivíduo, supondo-se devido à disfunção do sistema nervoso central, e podem ocorrer ao longo do ciclo vital. (...) Ainda que as dificuldades de aprendizagem possam ocorrer concomitantemente com outras condições incapacitantes (por exemplo, deficiência sensorial, retardamento mental, transtornos emocionais graves) ou com influências extrínsecas (tais como as diferenças culturais, instrução inapropriada ou insuficiente), não são o resultado dessas condições ou influências. (p. 11)

Pelas características de cada um, os alunos apresentam diferentes motivações, interesses ou capacidades, que conduzem a diferentes ritmos de aprendizagem, o que também se pode dever a fatores extrínsecos ao aluno, como por exemplo as metodologias utilizadas pelo professor e o elevado número de alunos por turma (passando este ano de 28 para 30 alunos). Estes aspetos podem ter implicações na forma como o aluno se envolve nas atividades da sala de aula. Assim, o objetivo deste trabalho consiste em analisar o contributo dos diferentes tipos de tarefas no envolvimento dos alunos de uma turma de 11.º ano nas atividades no estudo da derivada de uma função. Na concretização deste objetivo, delineei as seguintes questões de investigação:

- Que tipos de tarefas estão contemplados no manual escolar do aluno nos tópicos da derivada de uma função?
- Como se envolvem os alunos nas atividades da aula com diferentes tipos de tarefas no estudo da derivada de uma função?
- Que perspetivas têm os alunos sobre o contributo dos diferentes tipos de tarefas na sua aprendizagem dos tópicos da derivada de uma função?

O manual de matemática é um material didático concebido principalmente para apoiar a aprendizagem do aluno, mas também desempenha a função de apoiar o professor na

preparação e no desenvolvimento das suas aulas (Pinto, 2000). Dessa forma, considere ser relevante quer para a minha formação quer para o desenvolvimento deste estudo a análise da tipologia de tarefas do manual do aluno pela relação que estas têm com a dinâmica da sala de aula.

Por atividade entende-se o que, fisicamente ou cognitivamente, o aluno faz para concretizar uma dada tarefa. Christiansen e Walther (1986) defendem que os alunos devem envolver-se em atividades, individualmente ou em grupo, do tipo construir, explorar e resolver problemas.

1.2. Pertinência do estudo

Em Portugal, as derivadas são um dos conteúdos do tema das Funções que surgem contempladas nas sucessivas reformulações dos programas do ensino secundário para a disciplina de Matemática. Trata-se de um conteúdo com uma diversidade de aplicações na Matemática e noutras áreas de conhecimento em fenómenos que envolvem variação. Por exemplo, em Biologia é aplicável à taxa de crescimento de culturas ou bactérias; na Economia é utilizado na descrição da variação das receitas ou dos lucros das atividades financeiras, tais como as funções, custos e receitas marginais; na Física aplica-se nas fórmulas de cálculo de velocidades de partículas ao longo de trajetórias. O grau de mestria que cada aluno adquire no estudo das derivadas pode desempenhar um papel preponderante na escolha do curso superior a que pretenda aceder. Porém, nem todos os alunos manifestam o mesmo nível de aprendizagem dos tópicos que estruturam a derivada de uma função. Segundo Saraiva, Teixeira e Andrade (2010), algumas das dificuldades reveladas pelos alunos no estudo das derivadas de uma função no ensino secundário devem-se à diversidade de interpretações e representações gráficas e à falta de destreza na manipulação de letras. Tais dificuldades podem-se repercutir nos estudos universitários de ciências. Para Reis (2001), os índices de reprovação na disciplina de Cálculo no Ensino Superior advêm da falta de preparação sobre as derivadas. Ardenghi (2008) reforça esta perspetiva ao constatar que nas licenciaturas os alunos apresentam dificuldades semelhantes às que têm no ensino secundário, destacando uma acentuada falta de bases no cálculo de limites e de derivadas.

Kilpatrick, Swafford e Findell (2001) consideram que a aprendizagem de conceitos matemáticos resulta das conexões conceptuais, do entendimento das estratégias delineadas, da adaptação de raciocínios, da produção e da comunicação matemática. Estas capacidades são

adquiridas pela atividade que o aluno desenvolve na resolução das tarefas (Ponte, 2005), o que faz emergir a relevância de se conhecer o tipo de envolvimento dos alunos em cada uma delas.

Bispo, Ramalho e Henriques (2008), ao retratarem a tipologia de tarefas usuais na sala de aula, constataram que a maioria das tarefas propostas aos alunos tem como objetivo a reprodução de técnicas e de algoritmos básicos, aspetos que representam os exercícios. Devido às suas características, este tipo de tarefas “causam uma sobrevalorização dos produtos em detrimento dos processos na aprendizagem da Matemática” (Christiansen & Walther, p. 4, 1986), pelo que não se tornam ideais para desenvolver no aluno capacidades matemáticas de nível superior. Na urgência de desenvolver no aluno uma atitude crítica, capacidade de interpretação, exploração e comunicação matemática, procurei conhecer a atividade desenvolvida pelos alunos em tarefas que imponham outro nível de cognição.

A verdade é que a organização das atividades na sala de aula de matemática tende a fazer com que as tarefas de estrutura aberta, tais como as tarefas de investigação e as explorações, não fazem parte da prática habitual de alguns professores (APM, 1998). A extensão dos conteúdos programáticos e o dilema do tempo na gestão do currículo são razões que levam muitos professores a não recorrerem a tarefas dessa natureza. Considero que a resolução contínua de tarefas matematicamente ricas desenvolve nos alunos as capacidades de raciocínio, comunicação e de conexão entre os diferentes temas matemáticos, o que favorece a aquisição de conceitos matemáticos pelos próprios alunos (Ponte, 2005).

1.3. Estrutura do relatório

Este relatório está organizado em quatro capítulos. No primeiro capítulo – Introdução -- apresenta-se o tema, o objetivo e as questões que orientaram a minha prática, a pertinência deste estudo e a estrutura do relatório.

O segundo capítulo -- Enquadramento contextual e teórico -- está dividido em seis secções. Na primeira, descreve-se a escola e a turma onde realizei a minha prática pedagógica. Na segunda secção descrevem-se os conteúdos programáticos para o tópico das derivadas. Na terceira secção discute-se a tipologia de tarefas matemáticas, os seus objetivos para a aprendizagem do aluno e o tipo de atividade que delas se espera. Na quarta secção contextualiza-se o manual escolar como fonte de tarefas para a aprendizagem. As duas secções seguintes tratam das estratégias de intervenção pedagógica utilizadas e das estratégias de avaliação da ação dessa intervenção.

O terceiro capítulo – Intervenção pedagógica – está dividido em quatro secções. Na primeira analisa-se a tipologia de tarefas propostas pelo manual escolar do aluno. A secção seguinte corresponde a uma breve calendarização das atividades desenvolvidas em cada aula onde se descrevem os conteúdos e as tarefas aplicadas aos alunos. Seguidamente apresentam-se momentos de trabalho dos alunos com diferentes tipos de tarefas. Na última secção analisam-se as perspetivas dos alunos acerca do contributo da natureza das tarefas para a sua aprendizagem.

No quarto capítulo – Conclusões, Limitações e Recomendações – discutem-se os resultados do projeto face às questões de investigação formuladas e à luz do referencial teórico apresentado. Finalmente, referem-se as dificuldades e limitações na concretização deste estudo, e apresentam-se algumas recomendações para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO

Este capítulo está estruturado em seis secções. A primeira contextualiza a escola e a turma onde desenvolvi a minha intervenção pedagógica ao que se segue uma secção que trata da explanação dos conteúdos programáticos. Na secção seguinte, caracterizam-se as diferentes tarefas matemáticas quanto ao grau de estrutura e de desafio e o tipo de atividades que delas surgem. De seguida, enquadra-se o manual escolar como guia de atividades e fonte de tarefas para professores e alunos. Nas duas secções seguintes, justificam-se as estratégias de intervenção pedagógica e descrevem-se os métodos de recolha de dados utilizados.

2.1.1. A escola

A intervenção pedagógica decorreu numa turma do 11.º ano de uma Escola Secundária da cidade de Braga. A origem desta escola remonta ao ano de 1884 mas apenas em 1979 é que passou a ter a designação e alocação atual. A população estudantil pertence maioritariamente ao meio urbano, embora uma grande percentagem resida em freguesias circundantes à cidade. De um ponto de vista social, esta escola acolhe estudantes oriundos de famílias de nível social médio-alto, apesar de uma parcela significativa de alunos ser oriunda de famílias de nível social médio-baixo e baixo, algumas delas com pouco nível de instrução. A escola possui boas condições físico-espaciais bem como materiais didáticos recentes e adequados atendendo à remodelação a que foi sujeita ao abrigo do projeto de requalificação dos espaços escolares. Na avaliação externa realizada pela Inspeção Geral da Educação obteve classificação máxima nos seguintes domínios: resultados dos alunos, oferta educativa, organização, gestão, liderança e capacidade de autorregulação. Trata-se de uma escola com uma grande oferta educativa pelo que possui imensas turmas distribuídas tanto pelo ensino normal (científico-humanístico) como pelo profissional, que preenchem os horários diurno e noturno frequentados ao todo por mais de dois mil alunos. As salas são confortáveis, amplas e possuem luminosidade natural. Cada sala de aula dispõe de computador com ligação à Internet e ao quadro interativo. Existe ainda rede *Wireless* por todo o espaço escolar e vários computadores na biblioteca ao serviço dos alunos. Os professores dispõem de boas condições de trabalho: uma sala onde normalmente se reúnem nos intervalos e uma outra sala grande

equipada com secretárias de trabalho, computadores e respetiva máquina de impressão. Todas estas condições pareceram-me ser uma das razões da existência de um bom relacionamento entre os professores da escola, tanto ao nível afetivo como profissional.

Esta escola possui um projeto educativo onde estão contemplados alguns princípios e valores a desenvolver nas atividades letivas, dos quais destaco a “Defesa e promoção da democratização da educação e da igualdade de oportunidades no sucesso educativo”, “A promoção da qualidade das aprendizagens” e a “Defesa e apoio da inovação enquanto processo de garantir a melhoria das aprendizagens”. Com estes princípios pretende-se “Promover uma cultura de liberdade, participação, qualidade e avaliação” e “Proceder a uma sistemática avaliação das práticas, recorrendo a metodologias participativas, no sentido de garantir a identificação dos problemas e investir na sua resolução”. Da análise dos valores e objetivos da educação emanados pelo projeto educativo da escola depreende-se a valorização que se dá ao desenvolvimento de uma pedagogia diferenciada. Com esta finalidade, propus-me a orientar a minha prática pedagógica com diferentes tipos de tarefas, a organizar as atividades dos alunos em grupo e com a criar de regras de trabalho que fomentassem uma metodologia participativa e motivadora.

Para além do conhecimento das diretrizes que emanam do projeto educativo da escola, considerei ser relevante conhecer, através de um questionário, a tipologia de tarefas que os professores da escola integram nas suas aulas, o grau da utilização das tarefas do manual e a frequência com que recorrem à organização das atividades dos alunos em grupo. Esta minha intenção só foi correspondida por sete professores que lecionavam na escola os anos de escolaridade do ensino secundário. Embora o número de professores seja diminuto, ponderei analisar as suas respostas por se tratar de professores com experiência de ensino o que me poderia ajudar a conhecer melhor os contextos em que se inseriu a minha prática. A experiência desses professores revela-se pelo tempo de serviço que têm, em média, de 26 anos. Desses professores, dois lecionavam em turmas do 10.º ano, três em turmas do 11.º ano e dois em turmas do 12.º ano.

Dos diferentes tipos de tarefas que o professor de Matemática pode integrar nas suas estratégias de ensino, os professores inquiridos indicam, praticamente, a mesma ordem com que as costumam propor aos seus alunos (Tabela 1).

Tabela 1. As tarefas mais utilizadas pelos professores.

Ano lecionado	Tipologia de tarefas					
10.º Ano	Professor 1	Problema	Exercício	Exploração	Modelação	Investigação
	Professor 2	Exercício	Problema	Modelação	Exploração	Investigação
11.º Ano	Professor 3	Exercício	Problema	Exploração	Modelação	Investigação
	Professor 4	Exercício	Problema	Exploração	Modelação	Investigação
	Professor 5	Exercício	Problema	Investigação	Modelação	Exploração
12.º Ano	Professor 6	Exercício	Problema	Exploração	Modelação	Investigação
	Professor 7	Exercício	Investigação	Exploração	Problema	Modelação

Os professores revelam uma maior utilização de tarefas de grau de estrutura fechada, o que indicia dever-se à tipologia de tarefas que predomina no manual escolar adotado na escola. Na verdade, o manual de cada um dos anos do ensino secundário não apresentava nenhuma tarefa de investigação, o que faz emergir a prevalência deste artefacto didático nas atividades de ensino e de aprendizagem. Christiansen e Walther (1986) consideram que a maior utilização de exercícios e de problemas na sala de aula de matemática se deve à exigência dos pais e dos alunos para se resolverem tarefas similares às que saem nos testes e nos exames nacionais. Apesar da diferença de estrutura, a resolução de algumas das tarefas do manual, principalmente alguns dos problemas propostos, fomenta atividades com características semelhantes às desenvolvidas na realização de tarefas abertas tais como a exploração, a descoberta ou o questionamento.

Quanto à utilização do trabalho de grupo, no 10.º e no 11.º ano quase não é utilizada por parte dos professores inquiridos, o que pode ter a ver com a tipologia de tarefas que são preferidas por cada professor. Os professores do 12.º ano proporcionam o trabalho de pares, destacando-se o Professor 7 que indica que propõe regularmente tarefas de investigação para proporcionar o trabalho cooperativo dentro e fora da sala de aula.

2.1.2. A turma

A turma onde desenvolvi a minha prática pedagógica é composta por 29 alunos, sendo a turma com mais elementos da escola. Tratava-se de uma turma em que predominava o género feminino (58,6%) e com uma idade média aproximadamente de 16 anos (Tabela 2).

Tabela 2. Caracterização da turma.

	Frequência	Média de idades
Raparigas	17	15,9
Rapazes	12	16,0

A turma sofreu algumas mudanças durante o ano letivo com a saída de duas alunas no final do primeiro período e a entrada de dois alunos, do sexo masculino, durante do 2º período. Estas mudanças não vieram alterar as características estruturais nem comportamentais do grupo visto que os dois alunos novos já faziam parte da escola e conheciam alguns dos colegas de turma.

Quando inquiridos acerca da disciplina favorita, constou-se que, dos 29 alunos da turma, apenas quatro (13,8%) consideravam a Matemática em primeiro lugar. Entre as restantes preferências estavam a Educação Física, com dez alunos (34,5%), seguida da Biologia e do Inglês, com cinco alunos cada (17,2%). Acerca da perceção dos alunos sobre a dificuldade que têm nas diferentes disciplinas, 22 alunos (75,9%) consideraram que a Matemática era a mais complicada. Entre as principais justificações apontadas obtiveram-se a complexidade da matemática, a exigência ao nível do raciocínio e do trabalho a realizar, a necessidade de estudo diário e a falta de bases.

O histórico escolar dos alunos no Ensino Básico não revela reprovações, mas a verdade é que, após a entrada no ensino secundário, à disciplina de Matemática, as classificações apresentadas não refletiram esse panorama. A média que a turma obteve na disciplina de Matemática no ano transato foi de 11,89 numa amplitude de notas entre os 8 e os 19 valores com 27,6% de negativas. Sabendo-se que algumas das classificações negativas poderão ter sido inflacionadas de modo a possibilitar a recuperação desses alunos no 11.º ano, supõe-se que a média real da turma poderá ter sido ainda mais baixa. As oito negativas pertencem maioritariamente a alunos com dificuldades gerais a Matemática, como por exemplo ao nível do cálculo e do raciocínio matemático, e de outros com dificuldades específicas de aprendizagem devido à desatenção e a um comportamento inadequado que apresentam na maioria das aulas. A turma também é constituída por alunos excelentes, muito trabalhadores que tiram normalmente muito boas notas a todas a disciplinas, inclusive a matemática. Podemos afirmar assim que a turma era formada por alunos com um aproveitamento heterógeno.

Em termos organizacionais, a turma era dividida por grupos de alunos segundo as suas relações de amizade. A disposição das salas era constante e os alunos ficavam regularmente distribuídos aos pares, o que tendia a condicionar um pouco a dinâmica das aulas (Figura 1).

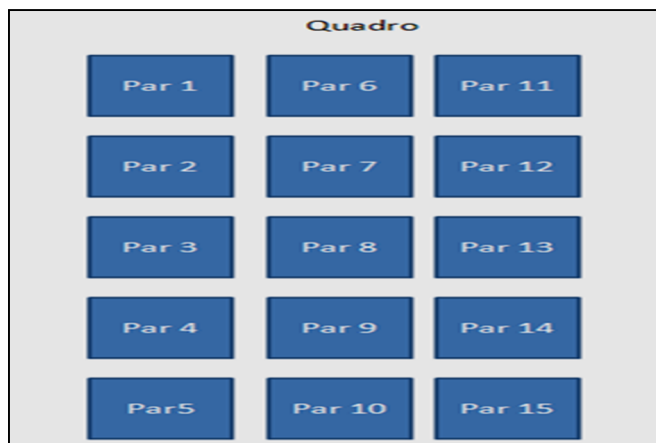


Figura 1. Disposição dos alunos na sala de aula.

A forma como os alunos se dedicavam ao estudo de conteúdos matemáticos era diversa. Alguns dos elementos da turma estudavam em casa sozinhos, enquanto outros estudavam com os seus amigos ou em conjunto com o colega de carteira. A generalidade dos alunos menos interessados ou com mais dificuldades apenas passavam o que aparece no quadro ou no caderno do aluno mais trabalhador, não constituindo parte ativa do desenvolvimento das atividades da aula. Alguns dos alunos da turma possuíam aulas complementares particulares de apoio, embora, uma vez por semana, todos os alunos pudessem tirar dúvidas com o professor titular da turma na hora do apoio ao estudo. A afluência a essa hora de apoio era fraca excetuando nos dias que antecediam os testes de avaliação das suas aprendizagens.

Pelas suas características, considero que a turma reuniu as condições ideais para averiguar a relação entre a diversidade de tipologia de tarefas e o envolvimento dos alunos nas atividades de aprendizagem na sala de aula.

2.2. Os conteúdos programáticos lecionados

Os conteúdos programáticos que lecionei na minha prática pedagógica foram a taxa média de variação e a taxa de variação/derivada através da noção informal de limite integrados no tema das funções do 11.º ano de escolaridade. As derivadas fazem parte do programa do Ensino Secundário em Portugal desde 1905, introduzidas pelo Ministro e Secretário de Estado dos Negócios do Reino Eduardo José Coelho, na 7.ª classe do curso complementar de Ciências

no capítulo destinado à Álgebra. No entanto, as aplicações das derivadas, como são exemplo as tarefas de otimização, apenas começaram a fazer parte do currículo escolar a partir da reforma de 1954, como exemplifica o manual escolar de Sebastião e Silva e Silva Paulo (1968), mantendo-se a sua presença constante no programa de matemática do Ensino Secundário até aos dias de hoje.

No que diz respeito ao 11.º ano, o tema das funções ocupa sensivelmente metade do ano escolar e tem como um dos objetivos introduzir o cálculo diferencial. Para o estudo da taxa de variação/derivadas, objeto deste trabalho, o programa de Matemática A do 11.º ano sugere que se inicie com a noção de taxa média de variação e a sua interpretação geométrica num intervalo, passando seguidamente para o ensino da taxa de variação instantânea. Na fase seguinte aponta que se leccione a função derivada e os algoritmos de cálculo da derivada de algumas funções simples. Para finalizar o tópico, o programa sugere o estudo do sinal da função derivada, do sentido de variação da função correspondente e dos seus extremos relativos, o que prepara os alunos para a resolução de problemas de otimização. É indicado ainda pelo programa que o professor deverá articular os conteúdos com outras disciplinas afins de modo a utilizar exemplos concretos dessas disciplinas, ou ainda a realização de atividades comuns ou a leção de algum aspeto numa dessas disciplinas. Como exemplo dessas atividades, o programa de Matemática do ensino secundário sugere a realização de atividades com as seguintes propostas de trabalho: “O jogador de Ténis ou A bola no plano inclinado (...) Problemas como: O volume constante, O comprimento de um vinco, Triângulo inscrito ou Intensidade da luz” (p. 5). Tripathi (2008) defende que as atividades de aprendizagem da Matemática devem incidir sobre problemas que levem os alunos a pensar visualmente. A esta abordagem está associada a “interpretação geométrica para taxa média de variação e para a derivada (declives de secantes e tangentes às curvas das funções)” (Ministério da educação, 2002, p. 6).

Tendo então em consideração o que o programa informa acerca das metodologias para o estudo das derivadas desafiei-me a elaborar tarefas que permitissem envolver o maior número de alunos nas atividades da sala de aula.

2.3. As tarefas

As recomendações atuais para o ensino de Matemática apontam para uma escola que deve ser para todos e que a todos deve ser dada a oportunidade de aprender

independentemente da motivação de cada aluno (NCTM, 2008). A par desta perspectiva de conceber o processo educativo, a motivação do aluno para aprender é entendida por Bilhim (2001) como a vontade de exercer elevados níveis de esforço no alcance de certos objetivos. Com esta finalidade, compete ao professor implementar métodos que captem a atenção, criem motivação fomentando desse modo o envolvimento de todos os alunos. O envolvimento dos alunos nas atividades de aprendizagem é regido ainda por outros fatores, tais como a falta de familiaridade com os processos de aula (Deplit, 1988), a persistência individual (Dweck, 2000), o grupo social e os fatores culturais (Zevenbergen, 2000).

A participação e o empenho dos alunos no processo de ensino e aprendizagem, independentemente do histórico e das motivações individuais de cada um, podem elevar-se através da integração de estratégias motivadoras. Nesse sentido, a aplicação de diferentes tarefas é apontada como uma das estratégias que pode incrementar o envolvimento dos alunos nas atividades da aula (Ponte, 2005). Doyle (1988) considera que a resolução de tarefas constitui a base da aprendizagem dos alunos ao envolvê-los no desenvolvimento do pensamento matemático. Já Silver (1996) vê nas tarefas o meio de exploração da criatividade e da flexibilidade do aluno, enquanto Vergnaud (1993) afirma que a aprendizagem matemática emerge da resolução dos problemas propostos.

Dos tipos de tarefas, Polya (1973) considera que os problemas são potenciadores da realização de uma experiência matemática que permite aos alunos a ampliação dos seus conhecimentos e o desenvolvimento de capacidades e atitudes. Essa ideia é corroborada por Dante (1989), quando afirma que um dos principais objetivos do ensino de matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que apresentar-lhe situações, problemas que o envolvam, o desafiem e o motivem a querer resolvê-las. O desenvolvimento do conhecimento matemático nos alunos surge portanto da execução de uma diversidade de tipos de tarefas. Visto que se pretende compreender a função e objetivo de aprendizagem inerentes a cada uma das tarefas utilizadas na sala de aula serão explanadas seguidamente os tipos de tarefas.

As tarefas na sala de aula surgem como consequência das atividades de ensino. Ponte (2005) considera que as tarefas determinam em grande medida as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos, pois através da sua formulação o professor materializa em conhecimento os conteúdos que pretende lecionar. Dessa forma, as tarefas estão intimamente ligadas ao processo de construção desse conhecimento, o que leva a distinguir tarefa de

atividade. Ponte (2005) define a atividade como aquilo que um aluno desenvolve em determinado contexto, desde o que faz até à maneira como se envolve nas situações de aula, e define a tarefa como o objetivo de cada uma das ações desenvolvidas pelo aluno, o que é apresentado ao aluno para que ele resolva num período de tempo. O NCTM (2008) indica que na elaboração de uma determinada tarefa teremos que ter em conta o nível de dificuldade, se tem ou não procedimentos rotineiros, a complexidade do desafio e o grau de abertura. Desse modo, Ponte (2005) classificou as diferentes tarefas usais colocando-as em quadrantes que avaliam o seu grau de desafio face ao nível de abertura de resultados do seguinte modo (Figura 2):



Figura 2. Distribuição das tarefas quanto ao grau de desafio e de estrutura (Ponte, 2005).

Os exercícios. Os exercícios, das tarefas matemáticas são aquelas em que o que se pretende é proposto de uma forma mais clara. Na sua resolução o aluno aplica diretamente os conhecimentos e técnicas conhecidas pelo que as principais dificuldades passam pela falta de conhecimento. Pelas suas características específicas dos tipos de tarefas mencionados, são os de utilização mais comum por grande parte dos professores. Lester (1980), Ponte (2005) e Schoenfeld (1988) afirmam que o seu propósito é a prática de estratégias de procedimentos e de conhecimentos adquiridos. Um exercício é normalmente fácil de identificar ao apresentar um grau de estrutura fechado pelo que utiliza na sua conjugação as palavras “calcula”, “faz” ou “determina”, tendo um objetivo de ensino específico e está normalmente desligado da atividade seguinte (Christiansen & Walther, 1986). Um estudo desenvolvido pela Associação Portuguesa de Matemática (APM, 1998), inquiriu os professores sobre as situações de trabalho que usam com mais frequência nas suas aulas. Nesse estudo o exercício surge como a tarefa mais usada nas aulas pelos professores do 2.º ciclo e do 3.º ciclo do básico, como também pelos professores do ensino secundário.

Embora os exercícios tenham uma função importantíssima na aprendizagem matemática, Burton (1984) e Lampert (1990) consideram que o seu uso excessivo na sala de aula tende a limitar a aquisição e a aplicação de conhecimentos de conteúdos matemáticos. Do mesmo modo, Sebastião e Silva, citado por Silva (s. d.), afirma:

É preciso combater o excesso de exercícios que, como um cancro, acaba por destruir o que pode haver de nobre e vital no ensino. É preciso evitar certos exercícios artificiosos ou complicados, especialmente em assuntos simples. (...) É mais importante refletir sobre o mesmo exercício que tenha interesse, do que resolver vários exercícios diferentes, que não tenham interesse nenhum.

Ponte (2005) também indica que reduzir a aprendizagem matemática à resolução de exercícios leva ao empobrecimento do nível de desafio na aula o que pode conduzir à desmotivação dos alunos, ao defender que “para a maioria dos alunos, fazer exercícios em série não é uma atividade muito interessante” (p. 4). No que diz respeito ao ensino das derivadas, Pimentel (1995) alega que há uma valorização do aspeto técnico dos conteúdos em detrimento do cultivo da capacidade de imaginação e intuição. Ora essa valorização técnica pode advir do uso excessivo de exercícios com o objetivo de treinar procedimentos. Para Stein e Smith (1998) o ensino de tópicos matemáticos, em geral, e de derivada de uma função, em particular, poderá ganhar mais sentido se for baseado em tarefas associadas a níveis de exigência cognitiva elevados em detrimento da memorização ou de processos mecânicos.

Os problemas. No dicionário da língua portuguesa, um problema é entendido como sendo uma “questão que se propõe para ser resolvida, coisa difícil de compreender, explicar ou fazer” (p. 1314), pelo que se pode assumir que um problema matemático implicará pelo menos algum esforço criativo e pensamento abstrato. Henderson e Pingrin (1953) definem problema através de três condições iniciais: (i) o conhecimento claro dos objetivos a atingir e o desejo de o conseguir; (ii) a existência de uma dificuldade que os mecanismos normais não conseguem dar resposta; e (iii) o processo na tomada de consciência do problema, definição clara das diversas hipóteses de solução possíveis e o teste da sua veracidade. Ponte (2005) e Yeo (2007) classificam os problemas como tarefas de estrutura fechada mas com grau de desafio elevado, o que faz com que o aluno não saiba diretamente a solução ou o algoritmo de resolução e que envolva o raciocínio abstrato na sua resolução. Num problema o caminho de resolução a seguir nem sempre é claro, pelo que o aluno tem que interpretar o enunciado e elaborar uma estratégia de resolução o que exige reflexão e persistência. Estas atividades fazem com que Krulik e Rudnik (1993) considerem que a resolução de um problema exige capacidade de

raciocínio e de síntese sobre o que já foi aprendido. Abrantes Serrazina e Oliveira (1999) consideram que um bom problema deverá ser: (1) desafiante e interessante de uma perspectiva matemática; (2) adequado de modo a permitir aos alunos a formalização de capacidades; e (3) problemático ou seja não ter solução imediata. Para Ponte (2005), os problemas permitem ao discente pensar por si próprio, possibilitando o desenvolvimento da capacidade de raciocínio lógico e não apenas o uso padronizado de regras.

Na discussão do que é um problema importa distinguir o tipo de tarefa, o problema, da atividade que lhe está subjacente 'a resolução de problemas'. Pólya (1973) é apologista de que um professor deve propor problemas aos seus alunos de modo que estes se sintam desafiados a utilizar capacidades matemáticas durante as quatro fases consideradas essenciais para a resolução de um problema: (i) Compreensão; (ii) Estabelecimento de um plano; (iii) Execução do plano; e (iv) Reflexão sobre o trabalho realizado.

Ao contrário dos exercícios, nos problemas o tempo de resolução não é previsível pelo que é necessário uma maior preparação da aula por parte do professor de modo a responder às solicitações que derivam da atividade cognitiva do aluno.

Tarefas de Investigação e Exploração. A diferença entre as tarefas de investigação e as exploratórias é o grau de dificuldade exigido na sua resolução (Ponte, 2005). Segundo este autor é suposto que uma tarefa de exploração tenha um grau de dificuldade menor que uma investigação. Ponte (2005) considera ainda que essa diferença reside muitas vezes na facilidade/dificuldade do planeamento da tarefa. Apesar de apresentarem diferentes graus de exigência ambas as tarefas são caracterizadas pelo grau de abertura de estratégias e dos resultados. Bastow Hughes, Kissane e Mortlock citados por Yeo (2008) veem as tarefas de investigação matemática como a exploração sistemática de situações que podem ser resolvidas através de conhecimentos matemáticos. A possibilidade dada aos alunos de formular os seus problemas e, assim, definir os seus objetivos, é um dos aspetos mais inovadores e caraterísticos da atividade investigativa e exploratória. A riqueza destas atividades passa pela maneira como os alunos se envolvem nas atividades da aula. Após considerarem as indicações iniciais da tarefa, espera-se que formulem partes do próprio problema, conjeturem e explorem as hipóteses e testem os resultados obtidos. Goldenberg (1999) afirma que fazer algo é muito mais divertido do que ficar a escutar. Este autor aponta ainda as funções da investigação matemática na sala de aula que são: (i) a exploração, que dá a oportunidade aos alunos de experienciar "dar gosto ao dedo, pôr a mão na massa e ter visão do terreno" (p. 3); (ii) a ajuda ao aluno a estabelecer

intuições e a desenvolver um sentido exploratório; (iii) a descoberta, que foca a criação de ideias ou factos matemáticos específicos; e (iv) o questionamento, que nasce da discussão das ideias matemáticas. Em todo este processo espera-se que os alunos desenvolvam diferentes capacidades tais como a de raciocínio e de comunicação matemática.

Silva, Veloso, Porfirio e Abrantes (1999) apontam que as investigações deveriam merecer um lugar destacado na atividade matemática por permitirem a formulação de conjecturas, a avaliação da sua plausibilidade e a escolha dos testes adequados para a avaliação da sua veracidade tornando-se desse modo momentos genuínos de atividade matemática.

Apesar das vantagens educacionais mencionadas, a utilização das investigações na aprendizagem coloca um desafio adicional ao professor pois “podem conduzir a um território matemático impreparado e levá-los a processos que não são a norma” (Goldenberg, p. 3, 1999). Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira (1999) investigaram as dificuldades e os desafios que os professores de matemática de todos os níveis de ensino experienciam quando tentam integrar as tarefas investigativas nas atividades que pretendem desenvolver. Constataram a existência de quatro constrangimentos principais:

- (1) a relação que o professor tem com a matemática, pois tem que compreender e apreciar o valor da experiência que vai realizar. A integração de tarefas de investigação depende ainda da maneira ativa como elabora o currículo e interpreta os programas de ensino.
- (2) a dificuldade de construção, seleção e adaptação do tipo de tarefas, pois é necessário que o professor seja capaz de reconhecer quais os processos e recursos a utilizar bem como realizar a adaptação ao contexto escolar e à turma.
- (3) a consideração de diversos aspetos imprevisíveis, tais como a o tempo da atividade, o envolvimento dos alunos ou a discussão dos resultados, principalmente quando os alunos ainda não estão habituados a este tipo de atividade.
- (4) a ambiguidade e a dificuldade no processo de avaliação dos alunos pois existem demasiados fatores, alguns deles humanos a ter em conta.

Tarefas de modelação. Para a OCDE (2003), cada indivíduo deve desenvolver a capacidade de identificar e compreender o papel da Matemática nas situações de vida real, bem com fundamentar através dela as necessidades da sua vida. Do mesmo modo, Niss (citado por Lagarto, Andrade & Longle, 2006) considera que um aluno terá que desenvolver competências que permitam matematizar situações reais, o que nem todos os alunos revelam serem capazes. Vergnaud (1993) considera que uma das causas dos problemas de aprendizagem é que a escola valoriza demasiado os símbolos e pouco a realidade. As tarefas de modelação advêm de

dados recolhidos de um contexto de realidade (Ponte 2005). Pelas suas características as tarefas de modelação podem promover aproximação do aluno à matemática e desse modo criar motivação para a aprendizagem pois apresentam-se aos alunos num contexto de realidade revestindo-se, de um modo geral, de uma natureza problemática e desafiante. As tarefas de modelação podem resultar de explorações, problemas ou investigações, conforme o grau de estruturação da tarefa. Para Oliveira e Oliveira (2008), a resolução de tarefas de modelação traduz uma correspondência entre a realidade (“resto do mundo” fora da Matemática) e a Matemática.

Ferri (2006), através de uma abordagem cognitiva da modelação, revela a ocorrência da representação mental da situação durante a resolução de tarefas de modelação (Figura 3).

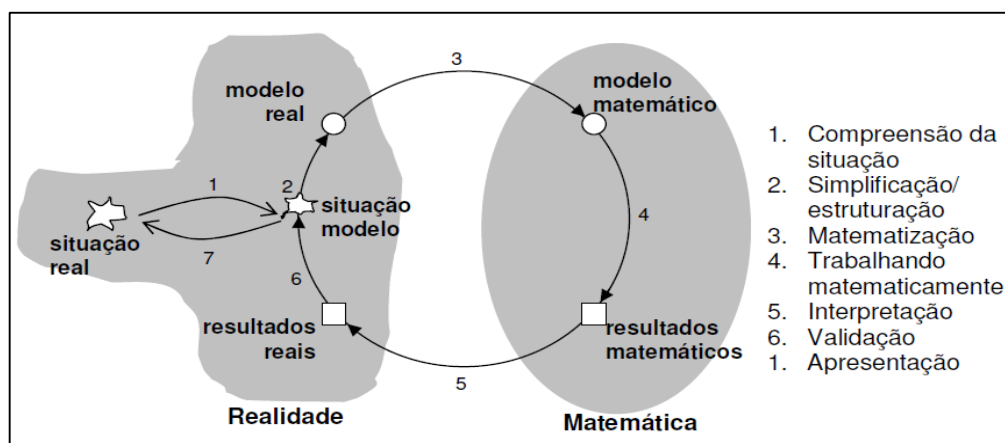


Figura 3. Abordagem cognitiva de Ferri.

Por serem tarefas que correspondem à avaliação de situações da vida real, algumas delas com importância para os alunos, Barbosa (2001) conclui que alguns professores acreditam que as tarefas de modelação dão um maior significado às atividades escolares, propiciando o desenvolvimento dos alunos e influenciando positivamente o sucesso escolar.

Ainda sobre a tipologia das tarefas, Sullivan, Mousley e Zevenbergen (2005) afirmam que para envolver todos os alunos nas atividades da aula de matemática, principalmente porque se leciona normalmente a turmas heterogêneas, um professor, na fase da planificação das aulas, deve adaptar tarefas com os seguintes propósitos: (1) tarefas facilitadoras, que se adaptem a todos os alunos; (2) tarefas desafiadoras, que respondam aos interesses dos alunos que terminem as tarefas facilitadoras mais rapidamente. Como consequência, o professor estará a contribuir para a aprendizagem global da turma segundo três itens específicos: (i) tarefas sequenciadas; (ii) subtarefas que ajudem os alunos com mais dificuldades; e (iii) subtarefas de carácter global que apresentem um desafio aos que já terminaram e sirvam de algum modo

objetivo da aula. Deste modo cria uma experiência matemática comum onde todos podem contribuir e discutir. Essa experiência pode aproximar os alunos ao conhecimento dos conteúdos matemáticos.

Vários autores debatem o objetivo a que as tarefas matemáticas se propõem. Doyle (1988) afirma que as tarefas que são usadas na sala de aula são a base para a aprendizagem dos alunos. Stein e Smith (1988), após uma experiência com alunos do 2.º e 3.º ciclo realizada em seis escolas urbanas, reconheceram que a aplicação de tarefas, num ambiente de sala de aula incentivador, traduz-se em ganhos substanciais de aprendizagem. Para estas autoras, “o efeito cumulativo, dia após dia, de exploração, na sala de aula, de diferentes tipos de tarefas, conduz ao desenvolvimento de ideias implícitas nos alunos sobre a natureza da Matemática” (p. 2). Vigotski (2003) defende a ideia de que as funções intelectuais – tais como a atenção deliberada, a capacidade de comparar e diferenciar, a memória lógica, a abstração e a generalização – se desenvolvem no processo de formação dos conceitos e que “esses processos psicológicos complexos não podem ser dominados apenas através da aprendizagem inicial” (p. 104), o que leva a pensar que o uso continuado das tarefas onde se propõe novas situações de aprendizagem conduz ao conhecimento matemático.

Para Gimeno (1998), as tarefas podem ser classificadas tendo em atenção os processos cognitivos que promovem: memória, compreensão, opinião e descoberta. Integrando estes processos, a OCDE (2004) organizou as tarefas em três tipos de acordo com os diferentes objetivos que se pretenda promover: (1) reprodução, (2) descoberta de conexões e (3) reflexão:

- (1) Tarefas de rotina que envolvem a aplicação de conhecimentos anteriores, com baixo nível de complexidade matemática e que não requerem diferentes tipos de interpretação;
- (2) Tarefas que requerem o estabelecimento de cadeias de raciocínio e elevado grau de interpretação. Podem necessitar de justificações e/ou explicações. Estrutura fechada e apresentadas num contexto conhecido;
- (3) São mais complexas e requerem altos níveis de interpretação e raciocínio, envolvem a coordenação de diversos passos de aplicação e exigem argumentação na resposta. Têm estrutura semiaberta e são apresentadas em contexto pouco familiar.

A verdade é que as características específicas de algumas das tarefas se inserem nas outras sendo por vezes difíceis de classificar (Yeo, 2007). Conclui que as terminologias utilizadas pelos professores para as diferentes tarefas podem variar conforme o país. Numa tentativa de clarificar o significado epistemológico das diferentes tarefas, considerou-as como

matematicamente ricas e não matematicamente ricas de acordo com o quadro seguinte (Quadro 1):

Quadro 1. Classificação das tarefas segundo Yeo (2007).

Tarefas matematicamente ricas	Tarefas analíticas	Investigações Problemas Explorações/Descoberta
	Tarefas de síntese	Propostas pelos alunos.
Tarefas não matematicamente ricas	Procedimentos e regras	Cálculos e tarefas rotineiras

As tarefas matematicamente pobres têm então como objetivo a prática de conhecimentos, tais como a aplicação de algoritmos de cálculo. As tarefas matematicamente ricas estão separadas por tarefas analíticas e por tarefas de síntese. Nas tarefas analíticas, o autor colocou as investigações, os problemas e as explorações, enquanto nas de síntese colocou as questões que os alunos colocam. Estas tarefas, "*problema posing*", que revelam um elevado índice cognitivo e de raciocínio surgem durante a resolução de problemas ou de tarefas investigativas pelo aluno. Para Silver (1994), podem mesmo ser propostas pelo professor, como exemplifica Lin (2004): "Desenha uma figura e formula um problema cuja solução seja $5/6$ " (p. 3).

Conhecendo agora as diferentes tarefas que se aplicam na sala de aula achou-se necessário enquadrar o manual escolar pois é uma das fontes de tarefas mais utilizada pelos professores e pelos alunos.

2.4. O manual escolar

Sendo o manual escolar um material didático que em tempos passados era de difícil acesso, a massificação do ensino transformou-o, progressivamente, num objeto comum, de acesso mais fácil e de utilização individual (Castro, 1999). Hoje em dia assume uma função quase obrigatória no currículo escolar tanto para a generalidade dos professores como para os alunos um guia das atividades pois, como afirma Vidigal (1994), nele estão patentes o tipo aprendizagens e as metodologias a promover nos alunos. Zabalza (1992) afirma ainda que os professores, quando planificam as unidades, não trabalham diretamente com os programas para o ensino mas sim com os manuais. Botas (2008) corrobora esta ideia quando diz que apesar do

manual destinar-se ao aluno, é com base neste que os professores organizam as atividades letivas, substituindo em larga medida o próprio programa.

Deste modo o manual possui um estatuto de suporte das práticas letivas, condicionando, entre outros aspetos as tarefas, os conteúdos a adquirir e as metodologias de transmissão utilizadas sendo portanto valioso recurso para preparação, condução e implementação da atividade letiva (Janeiro, 2005).

Lourenço e Neves (1997) organizaram os elementos constitutivos do manual escolar em quatro dimensões: objetivos, desenvolvimento temático, atividades de aprendizagem e atividades de avaliação (Quadro 2).

Quadro 2. Elementos constitutivos do manual escolar

	Objetivos	Listagem de objetivos.
	Desenvolvimento temático	Diagramas, desenhos, gráficos esquemas e quadros mapas e texto.
Manual escolar	Atividades de aprendizagem	Atividades de campo, construção de modelos de trabalho e de pesquisa.
	Atividades de avaliação	Atividades de autoavaliação e atividades de controlo de conhecimento.

Reportando-nos às atividades propostas, segundo o artigo 161.º, lei 47/2006 do Diário da República, o manual escolar deverá conter “ de atividades didáticas e de avaliação das aprendizagens, podendo incluir orientações de trabalho para o professor...”. Desse modo o manual escolar ‘seleciona’ o tipo de tarefas através das quais os alunos desenvolvem a atividade. Nunes e Ponte (2011) confirmam-no quando dizem: “ Os materiais curriculares, em particular, o manual escolar e as tarefas são elementos centrais na gestão do currículo, e caracterizam a natureza das propostas de trabalho que são desenvolvidas pelos alunos e, (...) podem determinar a qualidade da aprendizagem” (p. 2). Podemos então concluir que o manual escolar condiciona a tipologia das tarefas que ocorrem nas aulas.

Um estudo comparativo realizado com manuais escolares por Ponte e Marques (2008) pretendeu informar acerca da tipologia de tarefas quanto à estrutura, contexto e grau de desafio de um dos manuais de matemática utilizados em Portugal. Concluíram, que das tarefas apresentadas por esse manual, 99% eram de estrutura fechada e (35%) das tarefas se apresentava em contexto de realidade. Quanto ao nível de cognição, 34% das tarefas apelava à

reprodução de conhecimento, 62% para o estabelecimento de conexões entre os tópicos temáticos e 4% exigia níveis acentuados de reflexão. Este assunto foi também estudado por Silva (2004), que concluiu que nos manuais a tipologia de tarefas pretende evidenciar sobretudo uma função de reprodução de conhecimentos. Para Martins (2010) as tarefas que os professores mais utilizam na aula são as que os manuais sugerem, tais como a resolução de exercícios e alguns problemas relacionados com o dia-a-dia. Este autor concluiu que os professores preferem normalmente as práticas que o manual mais valoriza.

Para a maioria dos alunos, o manual escolar, é também um dos materiais didáticos mais utilizados no processo de aprendizagem (APM, 1998). Acerca da sua utilização nas atividades por parte do aluno, Moreira, Ponte, Pires e Teixeira (s. d.) afirmam: “os professores parecem indicar o manual escolar aos alunos sobretudo como fonte de tarefas, para realizar na aula e como trabalho de casa” (p. 9). Viseu, Fernandes e Gonçalves (2009) também concluem que as atividades sugeridas pelos professores aos alunos com base no manual resultam, sobretudo, da resolução de tarefas quer na sala de aula quer no trabalho de casa, com o objetivo de consolidar os conteúdos lecionados e, elaborar resumos dos conteúdos da aula seguinte. Num estudo similar Sousa (2011) concluiu que os alunos utilizam o manual de formas substancialmente diferentes: para ler a explicação dos conteúdos, observar exemplos resolvidos para resolver tarefas, exercícios e problemas, estudar previamente os conceitos, ler o resumo da secção, consultar quadros, resumos e verificar as soluções.

Avaliando estes conhecimentos pareceu pertinente integrar neste trabalho uma análise das tarefas do manual da minha escola de modo a conhecer o tipo de tarefas que propõe.

2.5. Estratégias de Intervenção

À luz dos pressupostos teóricos apresentados e atendendo ao objetivo de envolver o maior número de alunos na aprendizagem no tópico das derivadas foram adotadas as seguintes estratégias durante a intervenção: (i) A criação de normas orientadoras das atividades); (ii) Trabalho de grupo; e discussão das atividades dos alunos.

A criação de normas orientadoras das atividades. É do conhecimento geral que em tempos passados os alunos executavam as tarefas prescritas pelo professor sob pena dos mais variados castigos. Hoje em dia, com a massificação do ensino, é muito comum verificarem-se atitudes comportamentais menos corretas dentro da sala de aula talvez condicionada pela falta

de motivação de alguns (Silva & Neves, 2002), pelo que se impõe novos parâmetros de criação das regras que irão condicionar as atividades dentro da sala de aula.

O NCTM (2001) defende que independentemente do tipo de tarefa que o professor propõe aos seus alunos a aproximação destes às regras de conduta e à pedagogia instituída na sala de aula tende a aumentar a motivação para a aprendizagem. Pode-se então afirmar que as normas de conduta têm um papel importante na aprendizagem pois condicionam a forma como as atividades se desenrolam e a disciplina comportamental.

Nessa perspetiva, Caria (2002) sugere que a criação de regras seja alvo de negociação entre os alunos e o professor de modo a diminuir as desigualdades de poder dentro da sala de aula. Sullivan Mousley e Zevenberger (2005) indicam também que a criação de regras serve de suporte à atividade do aluno nos contextos de um dado problema ou questão de investigação. Consideram ainda que as normas na sala de aula que regem a organização de rotinas e os modos de comunicação utilizados fazem parte do currículo e servem como ferramentas à disposição do professor para o ensino. Por exemplo, relativamente à utilização de tarefas em grupo, Ponte et al. (1999) afirmam que é necessário a negociação com os alunos e o estabelecimento de um conjunto de normas de relacionamento que definam, com clareza, o que se espera do professor e de cada aluno. É natural pois que na realização deste tipo de atividades se espere a entreajuda, a responsabilidade pelo comportamento do grupo e pela discussão das aprendizagens.

Sullivan et al (2005) asseguram que para lidar com os diferentes percursos, interesses e motivações dos alunos um dos elementos chave é o uso das pedagogias explícitas. Tais pedagogias são reguladas pelas normas que são discutidas com todos os intervenientes no processo de ensino e aprendizagem de modo a melhorar a aprendizagem dos alunos. Schonenfeld (1989) afirma que a criação de uma cultura matemática na sala de aula depende da criação de uma estrutura de negociação de significados onde deve ser criada a oportunidade para a criação dessas regras. Em alguns momentos deste estudo foram aplicadas e discutidas as regras e formas de trabalho, principalmente nas situações em que os alunos não estavam no seu 'meio natural' ou seja nos trabalhos de grupo e nas tarefas de índole aberto.

Trabalho de grupo e discussão das atividades. Uma das funções da escola é formar indivíduos participantes na sociedade, que interajam com as demais pessoas, trabalhem em grupo e respeitem as regras da comunidade onde se inserem. O trabalho de grupo é uma metodologia de organizar as atividades de ensino e de aprendizagem sendo apontada como uma

das formas de aprender. Ganhou nos últimos anos algum destaque nas metodologias utilizadas na sala de aula (Guerreiro & Portugal, s. a.). O próprio programa de Matemática para o ensino secundário (Ministério da Educação, 2002) indica que devem ser propostas aos alunos pequenas investigações de modo a promover a entreajuda. Acerca dos benefícios desta metodologia, Vygotsky (2003) considera que as interações sociais são impulsionadoras do conhecimento, o que significa que a aprendizagem é um processo que resulta da intermediação entre pares. Também na perspectiva de Brophy (1983) e Wood (2002), a experiência de ensino deve ser partilhada em comunidade e ser dada oportunidade a todos os alunos de interagirem de modo a ganharem experiência matemática significativa. Através da discussão dos resultados, Silvestre e Ponte (2008) apontam também que o grupo desenvolve flexibilidade na abordagem às tarefas, desenvolvendo o raciocínio e o espírito de colaboração.

Valorizando a interação grupal no processo de aprendizagem, Batelaan (1998) considera que o professor deve definir com os seus alunos algumas regras sobre o trabalho de grupo na sala de aula, tais como: (1) todos os alunos são responsáveis pelo desempenho das diferentes tarefas no grupo, o que implica a distribuição das tarefas; (2) ninguém pode considerar o seu trabalho acabado até que todos os elementos do grupo estejam prontos, o que depreende que todos os elementos deverão estar cientes do trabalho que devem desenvolver; (3) todos têm o direito de pedir ajuda e todos ajudam; e (4) cada aluno deve completar um relatório individual do trabalho de grupo. Na definição deste tipo de regras, há que ter em conta as características de cada grupo. O Alto Comissariado para a Imigração e Minorias Étnicas (ACIME, 2004) formalizou algumas das características principais do estudo cooperativo, considerando três fatores específicos para a criação de grupos de aprendizagem:

- (1) A dimensão do grupo deverá respeitar dois fatores que são o nível de cooperação atingido em trabalhos anteriores e o tipo de atividade que se pretende ver desenvolvida. As características da tarefa influenciam as formas de trabalho e as metodologias de ensino pelo que não deverá ser indicada um exercício de aplicação rápida a um grupo com muitos elementos. Uma investigação de recolha de dados onde é possível distribuir subtarefas é aconselhável um grupo com 5 ou 6 elementos. Por outro lado, se o clima de sala de aula é individualista e competitivo será um erro começar com grupos alargados para qualquer tarefa. Começar por projetos mais simples de modo os alunos interiorizarem os procedimentos e a sua função do grupo e o professor poder adaptar as tarefas a desenvolver e as metodologias ideais.

- (2) Quanto á composição deverá ter em conta a heterogeneidade e não deve ser deixado o critério da escolha aos alunos de modo a evitar o isolamento de alguns. Poder-se-á usar critérios como o sexo, inteligência, inteligência social ou nível de instrução/habilidade matemática. Neste campo, deveremos usar o poder de professor de modo a orientar o melhor possível a heterogeneidade dos grupos e convém criar regras de trabalho e mesmo de formação de grupos explícitas.
- (3) Quanto à duração, visto que a ideia é criar uma aprendizagem em comunidade educativa, será aconselhável não fechar os grupos durante muito tempo e verificar a cada passo o seu funcionamento através da recolha de informação.

Mas, tal como refere Cohen (1994), nem todas as tarefas se adequam a trabalho de grupo, pois pelas sua características exigem por vezes o trabalho individual. Podemos considerar nesse grupo os exercícios rotineiros que exigem rapidez ou as tarefas não matematicamente ricas.

2.7. Recolha de dados

Para concretizar o objetivo e as questões de investigação que orientaram a minha prática pedagógica, procurei recolher informação através de vários métodos: Questionários, 'Questões soltas', Observação de aulas e Análise documental.

Questionários. É uma técnica de recolha de dados que tem uma vantagem pois impede a influência do investigador no sujeito no momento da recolha. É também uma forma eficaz e rápida de recolha de dados que permite a realização de comparações entre grupos (Tuckman, 2002). Neste estudo foram realizados dois questionários, um deles para ser respondido pelos alunos da turma e o outro pelos professores de Matemática da escola (Anexos 3 e 4). O questionário dos alunos teve como objetivos recolher informação acerca da sua relação com a disciplina, do tipo de tarefas que gostavam de realizar na sala de aula e conhecer a forma como utilizavam as tarefas do manual escolar. Quanto ao questionário dos professores teve como objetivos conhecer as suas perceções acerca dos hábitos de trabalho dos alunos e saber o tipo de tarefas matemáticas que propunham aos alunos e qual o grau de utilização do manual.

Questões soltas. As questões soltas (Anexo 9) foram sendo colocadas aos alunos durante as aulas que corresponderam à intervenção pedagógica. A formulação destas questões era delineada na planificação de aula de modo a inquirir os alunos acerca de algum aspeto considerado relevante para responder às questões de investigação. Desse modo, era solicitado

aos alunos, umas vezes por grupo outras individualmente, para, numa folha de papel dar a opinião acerca de algum episódio de aula. A estrutura destas questões não era rígida chegando mesmo a ser reformuladas durante a prática em função da atividade desenvolvida pelos alunos. Algumas delas foram colocadas em situações de aula estratégicas de modo a poder reavaliar a evolução da perspetiva do aluno acerca de alguma das questões iniciais.

Análise documental. Foi analisado para este estudo o projeto educativo da escola de modo a sintonizar o objetivo de investigação aos princípios e valores que a escola define como sendo a sua missão. Foi ainda analisado o capítulo das derivadas do manual escolar adotado pela escola de modo a conhecer a tipologia de tarefas que propõe, o programa de Matemática A do 11º, as produções resultantes da atividade dos alunos e as planificações das aulas. De modo a ponderar e refletir acerca dos acontecimentos e dificuldades que foram sentidas na prática foram elaboradas reflexões das aulas que lecionei. Da análise dessas reflexões retirei informação relevante para a elaboração das conclusões deste estudo. Foi também considerada a informação proveniente da análise de grelhas de recolha de dados preenchidas durante a aplicação de diferentes tarefas aos alunos.

Observação de aulas. Postic e Ketele (1988) definem a observação como um processo voluntário reflexivo e orientado por um propósito de forma a recolher informação. A observação faz ainda parte do método científico pois permite validar a verificação empírica de fenómenos. Desta forma a observação foi o método mais utilizado para a recolha de dados neste estudo sendo fulcral para a elaboração deste estudo em dois momentos distintos. No momento anterior à intervenção pedagógica, através da observação apercebi-me das características da turma, do modo como os alunos se envolvem nas atividades e da forma como reagem às diferentes tarefas. Refletindo sobre essas observações delineei as estratégias de intervenção sobre as quais se iria desenrolar a ação, entre as quais a construção de tarefas adequadas, a criação dos grupos, que se adequassem à turma e aos seus mecanismos.

Num segundo momento, pós intervenção destacou-se como método de recolha de dados pois procedeu-se à gravação das aulas que constituíram a minha prática pedagógica em vídeo. Essa gravação das aulas em vídeo foi proposta inicialmente aos alunos e aceite pela turma. Seguidamente foi requerida e aprovada a autorização por parte dos órgãos de gestão da Escola e dos encarregados de educação (Anexo 1 e Anexo 2). Estas gravações audiovisuais foram um elemento de avaliação da prática imprescindível pois através da observação das gravações foi possível reviver alguns momentos da interação aluno-aluno e professor-aluno nos

momentos da resolução das tarefas individuais, em pares e em grupo. Através deste método de recolha de dados foi-me também possível transcrever os diálogos mais relevantes das aulas que apresento para ilustrar a minha prática pedagógica.

CAPÍTULO 3

INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Este capítulo está dividido em quatro secções. A primeira trata da análise do manual do aluno tendo em consideração o tipo de tarefas que apresenta no tópico das derivadas. Na segunda secção apresentam-se sucintamente os conteúdos, as tarefas e as atividades desenvolvidos durante a intervenção pedagógica. A terceira secção aborda o envolvimento dos alunos nos diferentes tipos de tarefas. A secção final corresponde à análise das respostas dos alunos ao questionário, à análise de acontecimentos ocorridos durante a prática e está acompanhada de informações que foram recolhidas durante a prática pedagógica através de 'questões soltas'.

3.1. As tarefas do manual no tópico das derivadas

Nesta secção, analiso as tarefas do manual de Matemática do aluno adotado pela escola onde realizei a minha intervenção pedagógica no que diz respeito ao tópico das derivadas. Sendo o manual uma fonte de tarefas, esta análise deveu-se à relevância que a tipologia de tarefas propostas pelo tem nas atividades de aprendizagem e de ensino e no envolvimento dos alunos nessas atividades.

O manual escolar segue a mesma sequência do programa oficial na explanação dos conteúdos. Os tópicos tratados neste estudo – taxa média de variação, taxa de variação e derivada – inserem-se no tema da Introdução ao Cálculo Diferencial I, que se encontram distribuídos no manual conforme mostra a Figura 4:

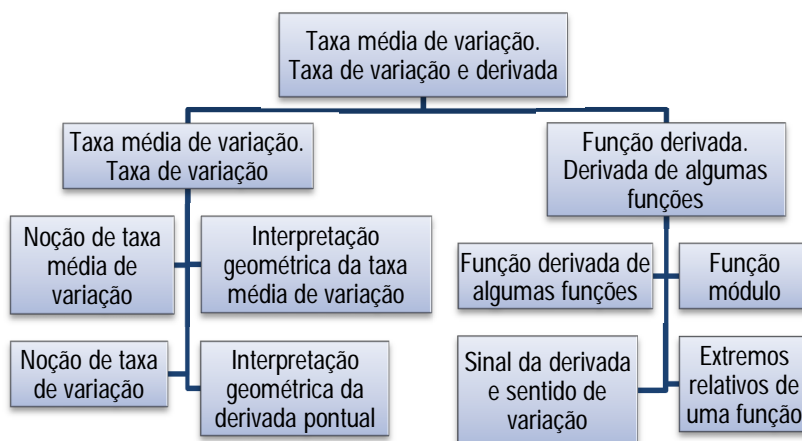


Figura 4. Distribuição dos conteúdos programáticos no tópico das derivadas.

No desenvolvimento destes tópicos, o manual apresenta tarefas nas margens laterais, designadas por 'Tarefas laterais', no final de cada tópico, designadas por 'Tarefas de aplicação do tópico' e no final do capítulo, designadas por 'Tarefas de aplicação final (Tabela 3).

Tabela 3. Frequência (%) das tarefas propostas no manual escolar.

	Frequência	%	Nº médio de alíneas
Tarefas laterais	41	42	2,9
Tarefas de aplicação do tópico	12	13	5,8
Tarefas de aplicação final (Escolha múltipla)	14	12	1,0
Tarefas de aplicação final (Desenvolvimento)	31	33	2,4

As 'Tarefas laterais' ocupam as margens de todas as páginas. Possuem normalmente uma linguagem muito simples onde predominam as terminologia "faz", "determina", "calcula", conforme ilustra a seguinte tarefa (Figura. 5).

36. Faz uma representação gráfica de uma função f de domínio $[1, 4]$, sabendo que:

36.1 f é monótona e t.m.v. $_{[1, 4]} = 2$;

36.2 f é não monótona e t.m.v. $_{[1, 4]} = 2$;

36.3 f é não monótona e t.m.v. $_{[1, 4]} = -2$.

46. Considera as funções f e g tais que:

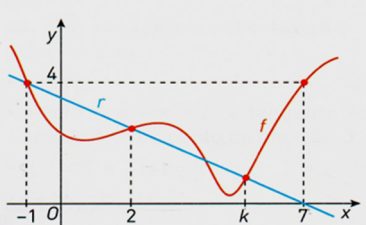
- $f(x) = -x^2 + 2x$
- $g(x) = 3x^2 + 1$

46.1 Calcula a derivada de f em:

46.1.1 -1

46.1.2 3

38. No referencial da figura está representada uma função f . A reta r passa pelos pontos de coordenadas $(-1, 4)$; $(2, f(2))$; $(k, f(k))$ e $(7, 0)$.



Determina:

38.1 $f(2)$

38.2 t.m.v. $_{[-1, 2]}$

38.3 t.m.v. $_{[2, k]}$

Figura 5. Tipo de atividades propostas pelo manual nas 'Tarefas laterais'.


Pelo seu grau de desafio e de estrutura, as tarefas apresentadas nas margens laterais do manual são maioritariamente exercícios, normalmente descontextualizadas de qualquer situação da vida real e divididas em alíneas. Envolvem aplicação imediata e simples dos conceitos apreendidos pelo que também podem ser categorizadas nas tarefas não matematicamente ricas

(Yeo, 2007). Analisando ainda de acordo com os objetivos de ensino, propostos pela OCDE, verifica-se que têm como objetivo a reprodução de conhecimentos. Pode-se concluir que estas tarefas pretendem alicerçar os conteúdos programáticos tratados na página em que se inserem, não recorrendo a mais conhecimentos anteriores nem tendo um grau de dificuldade muito elevado.

As 'Tarefas de aplicação do tópico' ocupam uma página inteira do manual e a maior parte delas contextualizam problemas da vida real, como exemplificam as seguintes designações: "Latas cilíndricas", "Reservatório cónico", "Prova de esqui", "Custo e lucro". Este tipo de tarefas tem maior destaque do que as anteriores através do número de questões que colocam, da cor e da imagem que ilustra o seu contexto, como se verifica na tarefa da Figura 6:

TAREFA 22 Custos e lucro

Uma fábrica dedica-se à produção de componentes eletrónicos para eletrodomésticos.



O custo de produção diário, em euros, de x peças produzidas por uma máquina é dado pela função C definida por:

$$C(x) = 0,25x^2 + 2x + 100$$

Considera que o preço de venda de cada peça é 25 euros.

- Determina o lucro/prejuízo se forem produzidas e vendidas:
 - 40 peças;
 - 100 peças.
- Admite que toda a produção foi vendida. Representa por L a função que ao número de peças produzidas faz corresponder o lucro/prejuízo obtido.

Nota: O lucro/prejuízo é a diferença entre o valor da venda e o custo de produção.

 Determina, por processos analíticos, o número de peças que devem ser produzidas para se obter o máximo lucro.
- Para uma produção diária de x peças, representa por P o custo de produção, em euros, de cada peça, sendo:

$$P(x) = \frac{C(x)}{x}$$
 - Sabe-se que, num determinado dia, o custo de produção de cada peça foi de 16,50 €. Determina o lucro realizado na venda da produção desse dia.
 - Mostra que $P'(x) = \frac{x^2 - 400}{4x^2}$.
 - Determina o número de peças que devem ser produzidas para que o custo unitário seja mínimo.

Figura 6. Exemplo do manual escolar das 'Tarefas de aplicação do tópico'.

Quanto às 'Tarefas de aplicação do tópico', pelas suas características, a maior parte surgem com o formato de problemas (Ponte, 2005), ao apresentarem estrutura fechada quanto à sua resolução e um nível de desafio consideravelmente maior do que o dos exercícios. No entanto, algumas dessas tarefas, o nível de desafio desvanece à medida que as diferentes alíneas são resolvidas, por procurarem focar os conteúdos programáticos dados anteriormente. As questões colocadas na maioria das alíneas têm um grau de desafio elevado e necessitam de

conhecimentos estudados noutros temas programáticos. Porém, existem algumas alíneas cujas questões possuem um grau de desafio similar aos exercícios, algumas delas trabalhadas nas 'Tarefas laterais'. Esta opção por parte dos autores do manual é defendida por Sullivan et al. (2005), para quem as tarefas devem ser um misto de tarefas facilitadoras, de modo a permitir a envolvimento de alunos com dificuldades (os exercícios), e tarefas desafiadoras, com carácter mais global de modo a desafiar os alunos que já terminaram (alíneas mais complicadas que envolvem mais raciocínio). Quanto aos objetivos de aprendizagem, perante o quadro da OCDE (2004), as 'Tarefas de aplicação do tópico' requerem o estabelecimento de cadeias de raciocínio e elevado grau de interpretação, necessitam de justificações e possuem estrutura de solução fechada. Já para Yeo (2007), estas tarefas são distinguidas como tarefas analíticas que exigem algum grau de raciocínio.

Após a conclusão de cada capítulo, o manual possui 'Tarefas de aplicação final' sobre todos os conteúdos abordados anteriormente. Nesta parte do capítulo distinguem-se dois tipos de tarefas que envolvem temática das derivadas: (1) as questões de escolha múltipla ($n=14$), do género das que surgem nos exames nacionais; e (2) as de desenvolvimento ($n=31$).

Quanto às 'questões de escolha múltipla', a maior parte delas não apresenta um grau de desafio muito elevado e na sua generalidade evidenciam um grau de estrutura fechada. Nestas tarefas dá-se importância à representação gráfica da função derivada, que de acordo com Almeida e Viseu (2002) ajuda a compreender as relações que existem entre uma função e a sua derivada (Figura 7).

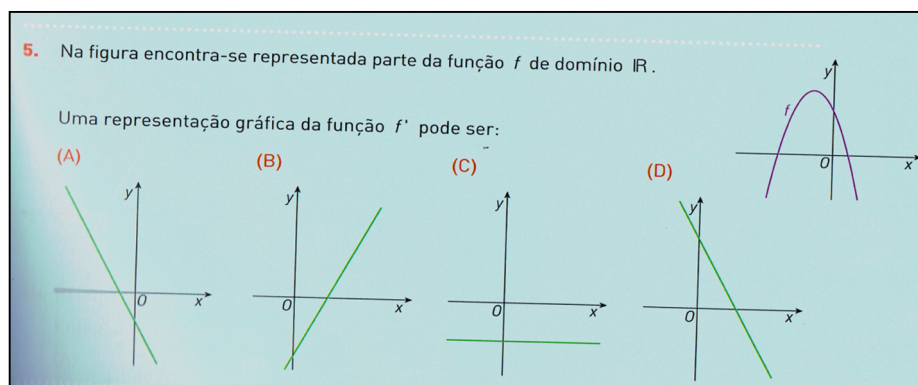


Figura 7. Exemplo de 'tarefa de aplicação final' (escolha múltipla).

As tarefas de 'desenvolvimento' apresentam um crescente grau de desafio, pelo que exigem do aluno empenho e um estudo continuado para a sua resolução. As primeiras 17 tarefas desta secção são tipicamente exercícios e as seguintes têm a estrutura de problema. (Figura 8).

Pretende-se construir um cilindro a partir de um cone de madeira com 10 cm de altura e 8 cm de diâmetro de base. Designa por x o raio do cilindro e por h a sua altura.

1. Mostra que:
 - 1.1 $h = \frac{40 - 10x}{4}$
 - 1.2 $V = -\frac{5}{2}\pi x^3 + 10\pi x^2$, em que V representa o volume do cilindro.
2. Determina as dimensões do cilindro para as quais o volume é máximo.

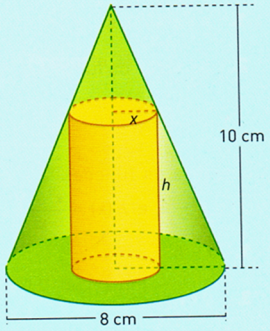


Figura 8. Exemplo de 'Tarefa de aplicação final' (desenvolvimento).

As últimas quatro tarefas revestem-se de um grau de desafio acentuado e para a sua resolução são necessários conhecimentos de diversos tópicos matemáticos (maioritariamente de geometria) e, pelo seu grau de estrutura, podem suscitar no aluno "problema posing" (Yeo, 2007) sendo consideradas ideais para a resolução em pequenos grupos.

Agrupando as diferentes tarefas do manual dos alunos de acordo com os objetivos, estrutura e contexto obteve-se: (Tabela 4).

Tabela 4. Frequência (%) dos objetivos, estrutura e contexto das tarefas do manual.

		Frequência	%
Objetivos	Reprodução	69	70,4%
	Estabelecimento de conexões	29	29,6%
	Reflexão	5	5,1%
Estrutura	Aberta	—	—
	Fechada	98	100,0%
Contexto	Matemático	66	67,3%
	Realidade	32	32,7%

O manual escolar privilegia as tarefas de estrutura fechada em detrimento das tarefas de natureza aberta (investigações/explorações), embora algumas das tarefas que apresenta propiciem atividades de exploração, reflexão e "problem posing". Em suma, o manual escolar analisado tende a fomentar um ensino expositivo ao valorizar as tarefas de natureza fechada. Compete ao professor propor aos alunos tarefas de natureza aberta que os desafiem a desenvolver capacidades como a exploração, a descoberta e o questionamento.

3.2. Conteúdos, tarefas e atividades desenvolvidos na intervenção pedagógica

Atendendo à calendarização das atividades escolares, a minha intervenção pedagógica decorreu na lecionação de 10 aulas no tópico derivado de uma função (Tabela 2).

Tabela 5. Conteúdos, tarefas e atividades.

Aula		Data
Aula 1	Taxa média de variação; Taxa de variação e interpretação geométrica	28-2-12
Aula 2	Tarefas de aplicação (exercícios e problemas)	29-2-12
Aula 3	Taxa de variação e derivada num ponto e interpretação geométrica	02-3-12
Aula 4	Função derivada	06-3-12
Aula 5	Função derivada	13-3-12
Aula 6	Problemas (Trabalho de grupo)	14-3-12
Aula 7	Sinal da função derivada; Sentido e sinais; Extremos relativos	16-3-12
Aula 8	Otimização e tarefas de aplicação (Resolução de problemas em grupo)	20-3-12
Aula 9	Atividade de investigação (Atividade da calha)	21-3-12
Aula 10	Atividade de investigação (Trabalho de grupo)	23-3-12

Destas aulas, atendendo ao objetivo e às questões delineadas analiso a informação mais pertinente das Aulas 2, 3, 4, 8, 9 e 10.

3.3. O envolvimento dos alunos nos diferentes tipos de tarefas

Esta secção debruça-se sobre a informação recolhida essencialmente na minha prática pedagógica, registada através de grelhas de observação, reflexões sobre a minha prática e gravações audiovisuais. Das aulas que lecionei, a Aula 2 tratou os tópicos 'taxa de variação, taxa média de variação e a sua interpretação geométrica num intervalo de \mathbb{R} '. Após uma tarefa introdutória destes tópicos, que possuía um grau de dificuldade reduzido, propus tarefas aos alunos. Na resolução dessas tarefas sugeri que partilhassem e discutissem as suas ideias com o colega de carteira. Uma das tarefas foi a seguinte:

Um paraquedista salta de um avião, a uma grande altura, e deixa-se cair em queda livre, retardando a abertura do paraquedas. Efetuou-se o seguinte registo:

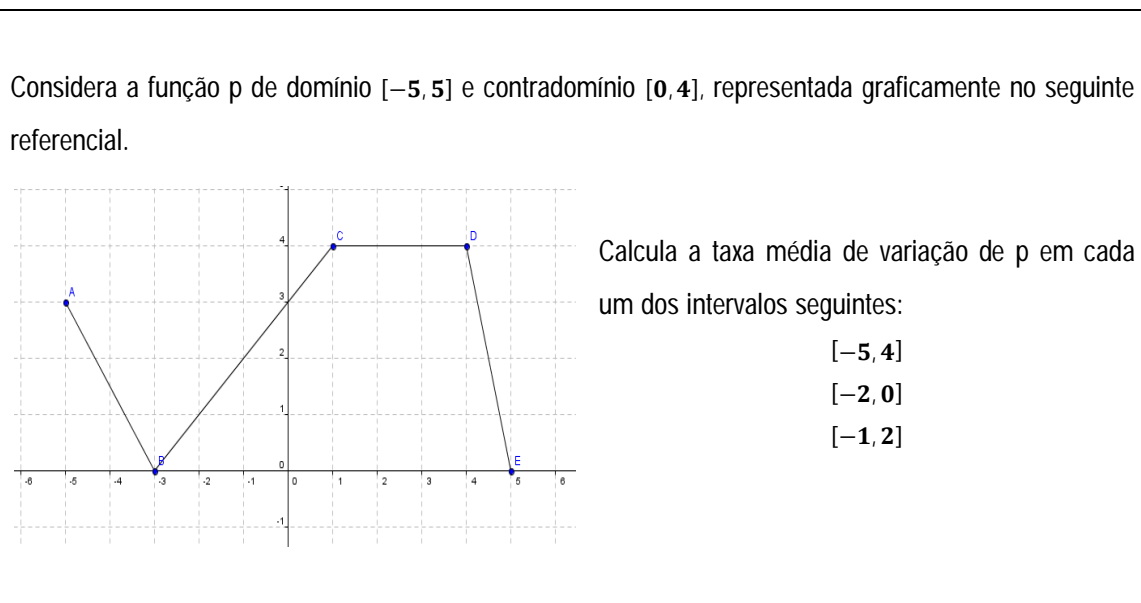
t - duração da queda (em segundos)	0	2	4	6	8	10
s(t)- altura da queda (em minutos)	0	18	72	162	288	450

- 1.1. Calcula a velocidade média da queda para cada $2s$.
- 1.2. Sabendo que $s(t)$ é uma função quadrática encontra a sua expressão.
- 1.3. Servindo-se da expressão encontrada para $s(t)$, calcula a taxa média de variação nos intervalos

Esta tarefa apresenta duas questões com características idênticas às dos exercícios (1.1 e 1.3), ao solicitarem a aplicação de procedimentos lecionados até a este momento, aplicação direta da fórmula de velocidade e da fórmula que determina a t. m. $v_{[a,b]} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Alguns alunos trocaram impressões com os colegas mas a maioria resolveu-as individualmente. Este acontecimento sugere que os alunos da turma têm hábitos de trabalho para a resolução de exercícios

A questão (1.2) apresentou um maior índice de dificuldade do que as outras duas por estar desconectada do conteúdo lecionado na aula e por envolver conhecimentos adquiridos anteriormente já esquecidos pela maioria dos alunos, tais como a construção do termo de uma sequência e a leitura de uma tabela. O primeiro par de alunos que resolvesse a tarefa teria que explicar à turma o seu método de resolução. Apenas quatro dos pares da turma conseguiram resolver esta alínea.

A questão seguinte, que foi adaptada de um manual, envolvia de novo o cálculo da taxa média de variação através da leitura dos pontos de um gráfico, adquirindo de novo traços de um exercício.



Tendo como base de comparação as observações anteriores considerei o comportamento dos alunos como “normal” (a distribuição física e a tipologia das tarefas, maioritariamente exercícios, eram bem conhecidas pelos alunos), o que resulta na avaliação que fiz das seguintes dimensões por cada par de alunos (Quadro 3):

Quadro 3. Atividades do trabalho de pares na Aula 2.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14
a) Nível de resolução	5	1	4	2	3	5	5	5	4	2	4	4	4	3
b) Frequência de alunos com dificuldades	1	2	0	2	1	0	0	0	1	1	2	0	0	1
c) Desinteresse	1	2	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0
d) Distribuição de tarefas	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
e) Discussão das atividades	2	2	4	2	3	1	2	1	3	2	3	3	3	3
f) Individualismo	x	—	—	—	—	x	x	x	—	—	—	—	—	—

Nota: a) e e) Na escala crescente de 1 a 5; b) e c) Nas possibilidades de {0,1,2}; d) e f) x=ocorrência, —=não ocorrência.

A leitura deste quadro revela sobretudo uma relação direta entre o trabalho desenvolvido e as capacidades matemáticas, dificuldades e motivação dos alunos. Os pares P1, P6, P7 e P8 eram constituídos por alguns dos elementos da turma com mais facilidade de aprendizagem, manifestando tendência para serem individualistas no desenvolvimento das atividades da aula. Na resolução destas tarefas não tiveram dificuldades e foram mais ‘rápidos’ e menos conversadores. Por outro lado os pares P2 e P10 era formado por elementos com dificuldades matemáticas e com piores ‘índices’ de motivação para a disciplina o que se traduziu num baixo nível de resolução. A verdade é que não se esforçaram minimamente e apenas tendiam a olhar para o caderno quando lhes perguntava por dificuldades. Analisando P11 verifica-se que apesar possuir dois elementos com dificuldades a matemática atingiu um nível 4 de resolução o que indicia que estavam motivados para aprender. Este aspeto revela também que o grau de desafio da tarefa era pouco elevado. Apesar de alguns grupos trocarem impressões durante a atividade constatei que apenas o fizeram confirmar as suas soluções. Não observei em nenhum par a distribuição de tarefas ou um aumento do ruído na sala de aula que adviesse da realização da tarefa. A maior parte dos pares finalizou e apresentou as suas atividades, o que revela uma envolvimento tipificada perante a resolução de exercícios.

Na Aula 3, propus a seguinte tarefa:

Considera a função $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$. Completa a tabela considerando diferentes intervalos contidos nos intervalos apresentados abaixo. Em seguida calcula o sinal da taxa média de variação.

x] -∞, -1[] -1, 1[] 1, +∞[
Intervalos							
Sinal $T. m. v[a, b]$							

Determina o gráfico de f e copia-o para uma folha de papel. Com a ajuda de uma régua traça as retas tangentes ao gráfico nos pontos $\{-7; -3; -1; -0,5; 0; 0,5; 1,2; 7\}$. Em seguida compara os declives dessas retas com os valores da $t. m. v$ obtidos nesse intervalo. O que concluis?

A concretização desta tarefa envolvia algumas regras, que estabeleci com os alunos no início das atividades: (1) Resolver em grupos de 4 elementos; (2) Todas as resoluções devem ser consideradas e exploradas; (3) As dúvidas serão esclarecidas apenas no final da aula. Propus estas regras com o objetivo de deixar que os alunos desenvolvessem a sua atividade apenas com a ajuda dos colegas. Ponderei que a estrutura desta tarefa poderia conduzir a distribuição de subtarefas pelos elementos dos grupos (seria escusado cada um dos elementos de cada grupo efetuar os cálculos pedidos), o que por si só envolvia a discussão grupal de modo a desenvolver e distribuir as atividades. A questão que envolvia o gráfico na folha de papel bem como a conclusão teria que ser discutida por todos.

Esta tarefa foi pensada de modo a proporcionar aos alunos com mais dificuldades de cada grupo a oportunidade de acompanharem o processo de resolução, seguindo o referencial teórico apresentado anteriormente. As características desta tarefa enquadram-na nos problemas ao envolver algum raciocínio e pensamento abstrato e por possuir uma estrutura fechada. No entanto, na pergunta final "O que concluis?" esperava um tipo de atividade menos fechada e algum debate intergrupar.

Os grupos de trabalho foram formados com quatro elementos e dada a disposição da sala considerei a distribuição fisicamente mais fácil: cada par de alunos virou as cadeiras e formaram grupo com os colegas da mesa mais próxima, resultando os seguintes grupos (Quadro 4):

Quadro 4. Formação dos grupos

P1+P2	P3+P4	P5+P8	P6+P7	P9+P10	P11+P12	P13+P14
-------	-------	-------	-------	--------	---------	---------

Desde logo notei que os hábitos de trabalho desta turma não passam por este tipo de atividade. Existiu algum ruído inicial e alguns elementos tentaram imediatamente formar grupos com os companheiros habituais de convívio extra sala de aula. Formaram-se ainda grupos desequilibrados ao juntar, por exemplo, no P1+P2, três dos alunos menos trabalhadores da turma, ou dois com melhor desempenho, como foi o caso de P6+P7. No desenvolvimento das atividades registaram-se os seguintes acontecimentos (Quadro 5):

Quadro 5. Atividade de grupo da aula 3

	P1+P2	P3+P4	P5+P8	P6+P7	P9+P10 (C1)	P11+P12 (C2)	P13+P14
a) Trabalho desenvolvido	5	5	4	5	3	2	4
b) Frequência de alunos com dificuldades /desinteresse	3	2	1	0	1	0	1
c) Distribuição das tarefas	1	1	3 (C4)	2	1	1	1
d) Discussão das atividades	1 (C3)	3	4	5 (C5)	2	2	3

Nota: a), c), e) Na escala crescente de 1 a 5; b) Nas possibilidades de {0,1, 2, 3 ou 4}. Os casos de interesse estão marcados a colorido.

Da leitura deste quadro, constata-se que esta turma não tem hábitos de trabalho de grupo, realçando-se os cinco casos (C1,C2,C3,C4,C5) que merecem especial atenção:

- (1) (C1) Grupo constituído apenas por rapazes que conversam imenso em todas as aulas apesar de estarem fisicamente em pares nas carteiras. O trabalho desenvolvido ressentiu-se principalmente no início das atividades;
- (2) (C2) Grupo heterogéneo com um elemento com facilidades de aprendizagem mas pouco trabalhador. Este aluno é um líder natural, muito conversador e ao 'dirigir' as atividades comprometeu o trabalho dos colegas;
- (3) (C3) Grupo constituído por três dos elementos menos trabalhadores da turma e por um aluno excelente que resolveu as atividades sem a ajuda dos colegas;
- (4) (C4) Outro grupo de rapazes que normalmente trabalha o mais rapidamente possível para poderem conversar. Apesar disso existiu interação na resolução da tarefa e discussão na colocação das retas no gráfico;
- (5) (C5) Grupo só de raparigas, com dois elementos muito trabalhadores que iam tirando dúvidas um ao outro mas fazendo cada um "à sua maneira", obtendo a cada passo a concordância das outras duas. Muito desequilíbrio nos conhecimentos.

Esta experiência realçou que o desenrolar das atividades ressentiu-se de fatores como a heterogeneidade dos grupos em relação ao género (casos (C1), (C4) e (C5)) e ao grau de instrução matemática (casos (C2), (C3) e (C5)), tal como é referido no relatório da ACIME (2004); às diferentes motivações (casos (C1) e (C4)), como salienta Bilhim (2001); e ao tipo de inteligência social (caso (C4)), indicada por Zevenbergen (2000).

No final da atividade, solicitei a todos os elementos da turma que escrevessem numa folha se tinham apreciado mais a atividade em pares da aula anterior ou a desta aula (trabalho em grupo) e a devida justificação. As respostas foram unânimes, quase uma reprodução umas das outras. Os 28 alunos da turma preferiram o trabalho de grupo, como exemplificam as seguintes respostas:

Eu gostei mais da segunda parte da aula porque tínhamos mais pessoas para ajudar e podemos discutir ideias (Aluno de P9+P10);

Gostei mais da segunda parte pois pode proporcionar uma maior cooperação e compreensão coletiva (Aluno de P13+P14);

Gostei da segunda parte porque como estávamos a resolver exercícios em conjunto havia mais gente para discutir os assuntos e assim esclarecer, melhorar as dúvidas, apesar dos exercícios serem mais complicados (Aluno mais trabalhador do grupo P1+P2).

Quanto ao objetivo de compreender o envolvimento dos alunos na realização de dois tipos de tarefas (exercícios e problemas), considero que não existiram grandes diferenças. Como são tarefas fechadas, a que eles estão mais habituados, sentiram apenas a dificuldade inerente à passagem duma tarefa mais fácil para uma que possuía um grau de desafio mais elevado. Quanto ao envolvimento grupal, constatei que os hábitos de trabalho de grupo não estão instituídos nos alunos pelo que o tipo de envolvimento foi muito similar ao revelado no trabalho de pares/individual. O tipo de respostas obtidas na 'Questão solta' não informou completamente os acontecimentos: alunos apesar de conhecerem os benefícios que advêm da atividade desenvolvida em trabalho de grupo (discutir, esclarecer, cooperar) não a demonstraram, como ilustra a resposta do aluno que desenvolveu toda a atividade sem a ajuda dos colegas (aluno de P1+P2).

Na Aula 4, pretendi que os alunos definissem a função derivada através de uma atividade individual/pares.

Considera as funções $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = -2x$. Utilizando a calculadora gráfica para f_1 e a definição da derivada num ponto para f_2 , completa o quadro:

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$						
$f_2(x)$						

Parte desta tarefa tem uma estrutura fechada: os alunos já eram conhecedores da definição de derivada de função. A outra parte tinha como objetivo introduzir o conhecimento do procedimento que permite, através da calculadora gráfica, conhecer a derivada de uma função num ponto do seu domínio. Apesar de ser uma tarefa de estrutura fechada e com algum grau de dificuldade relativamente reduzido, gerou-se uma discussão que envolveu a maior parte da turma. As calculadoras gráficas mais recentes apresentam um formato visual diferente das mais antigas. A argumentação do que resultava da calculadora promoveu a discussão e despertou o interesse dos alunos a participar e a querer experimentar. A análise desta situação levou-me a conjecturar que a envolvência nas atividades poderá ter em conta as oportunidades de ensino criadas (Ponte, 2005).

De seguida, propus como trabalho de casa uma tarefa que consistia na pesquisa e na construção de uma pequena composição acerca da disputa entre Newton e Leibniz sobre a descoberta do cálculo diferencial, na tentativa de incluir aspetos da história da matemática e de criar uma tarefa de índole exploratória pois como informa o programa de matemática para o ensino secundário, "O trabalho com aspetos da História da Matemática e fundamental e deve ser realizado com os mais diversos pretextos", p. 19. No desenvolvimento desta atividade sugeri aos alunos que formassem grupos à sua escolha de modo a poderem cruzar a informação obtida de diferentes fontes de pesquisa. A maioria dos alunos manifestou uma antipatia imediata perante a tarefa e problematizou as dificuldades que tinham de fazer grupos e o tempo que iam perder na sua execução. Por outro lado o grau de abertura da tarefa não foi o mais adequado conforme me apercebi posteriormente:

Os alunos estavam já a entrar numa fase de alguma distração. Considero que os hábitos de trabalho instituídos na turma passam pelo treino dos conteúdos imediatamente após a sua exposição. Visto que passei algum tempo depois a

falar sobre aspetos históricos e a utilização prática da função derivada, alguns alunos entraram pressionaram-me para não lhes propor a tarefa. (Reflexão da Aula 4)

Apercebi-me que os alunos não se envolveram como esperava por considerarem que a tarefa proposta era uma perda de tempo e trabalhosa. Este tipo de atitudes não ajuda a criar um ambiente de aprendizagem que integre as tarefas investigativas ou exploratórias. A verdade é que a tarefa carecia de falta de estrutura apropriada para os alunos que não têm experiência com tarefas desta natureza.

Numa outra experiência, realizada na Aula 8, propus a resolução de um problema com o objetivo de trabalhar as regras de derivação para funções polinomiais:

1. Na figura seguinte o quadrilátero [ABCD] é um losango em que:

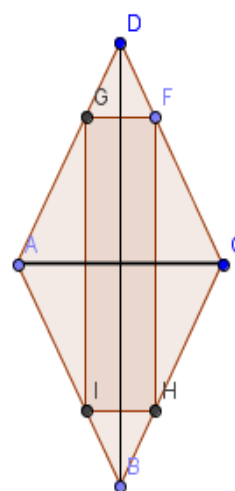
- $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$
- $\overline{AC} = 18$
- [GFIH] é um retângulo
- Imagine que o ponto I se move ao longo de [A, B] e seja $2x$ a distância entre G e I.

1.1. Entre que valores pode variar o x ?

1.2. Exprima a área do retângulo [GFIH] em função de x .

1.3. Mostre que a área exterior ao retângulo é dada pela expressão: $3x^2 - 32x + 216$.

1.4. Utilizando as capacidades da tua calculadora determina o valor de x para o qual se obtém uma área sombreada mínima.



Esta tarefa possui um grau de dificuldade elevado devido à capacidade de visualização da infinidade de retângulos que se podem construir atendendo às condições dadas. Para ajudar os alunos a perceber a existência desses retângulos, recorri a uma aplicação num programa de geometria dinâmica que permitiu visualizar a variação do valor da área do retângulo GFHI em função do deslocamento do ponto I ao longo do segmento AB. Formei novamente grupos de quatro elementos, mas, atendendo às ilações que retirei noutros momentos, estabeleci as seguintes regras: (1) Como a tarefa é um desafio para vocês, todas as ideias de resolução deverão ser anotadas e exploradas; (2) As resoluções serão corrigidas no quadro por um dos elementos do grupo designado pelo professor.

Devido à dificuldade do problema, referi algumas dicas com a finalidade de ajudar os alunos a resolvê-lo, das quais destaco (i) Considerar o teorema de Pitágoras; (ii) A fórmula da área do losango; (iii) Triângulos semelhantes; e (iv) Considerar o ponto K que resulta da intersecção entre AC e GI e idealizar a resolução da tarefa através do triângulo GKA. Este tipo de estratégia é indicado por Sullivan et al. (2005) para utilizar caso alguns dos grupos estejam com dificuldade. Provavelmente devido à dificuldade inerente à tarefa, os alunos revelaram uma maior interação entre os elementos de cada grupo em relação à última experiência (Quadro 6).

Quadro 6. Atividade em grupo

	P1+P2	P3+P4	P5+P8	P6+P7	P9+P10	P11+P12	P13+P14
(a) Discussão da tarefa (C1)	2	3	5	3 (C4)	5	5 (C6)	4
(b) Interesse na atividade n de alunos	1 (C2)	3	4 (C3)	2	4	3	3
(c) Interação com outros grupos [1, 5]	1	2	1	2	1	4	1
(d) Questionamento ao professor	1	3	3	5	4 (C5)	5	3

Nota: As atividades/caraterísticas (a), (c) e (d) avaliadas nesta tabela são avaliadas de ordem crescente na escala de [1,5]. Os casos de interesse foram assinalados a colorido (C1,C2,C3,C4,C5,C6).

- (1) C1 - Notou-se uma maior interação na grande maioria dos grupos em relação á tarefa da Aula 4 (em (P9+P10), (P11+12), (P13+P14)), o que pode dever-se a diversos fatores (dificuldade, motivação/disposição geral, trabalho de grupo antecedente);
- (2) C2 - Foi o grupo com pior comportamento/envolvência, formado com 3 alunos com dificuldades a vários níveis e desmotivados que nem sequer leram a tarefa assumindo que colega resolvia a questão. É um assunto a que se deve ter particular atenção, pois a criação de hábitos de trabalho de grupo pode resultar em maus hábitos de trabalho de grupo criando por um lado o desconforto de quem trabalha sempre sozinho e a falta de conhecimentos de quem está distraído;
- (3) C3 - Foi o grupo de rapazes que tendencialmente resolve rapidamente as tarefas para depois conversar. Neste caso a tarefa era mais complicada o que levou a um maior empenho e discussão. Estiveram empenhados o tempo todo a discutir ideias;
- (4) C4 - Foi o grupo a que pertencem os dois melhores alunos da turma. Sempre com muitas questões e falando à vez. Não discutiram abertamente, só apresentaram duas resoluções um pouco diferentes. Estas alunas têm hábitos de trabalho enraizados pois são estudiosas. A partir do momento em que entraram em desacordo quanto ao caminho a seguir preferiram trabalhar sozinhas, excluindo-se do grupo pois sentem-se mais confortáveis com o método conhecido;
- (5) C5 - É outro grupo de rapazes. São alunos que não apresentam dificuldades de aprendizagem mas que trabalham sempre o mínimo. Mal ouviram falar em desafio

propuseram-se a vencer criando desse modo motivação e envolvimento na resolução da tarefa;

- (6) C6 - O grupo que possui o líder natural sem dificuldades de aprendizagem mas que normalmente trabalha muito pouco. Também motivado pelo desafio organizou as atividades do grupo e a discussão sendo ele a apontar os caminhos a seguir. Sentindo-se um pouco sozinho num grupo com alguns alunos pouco empenhados fazia muitas perguntas ao professor e tentava motivar os colegas. Sempre que podia tentava comparar o trabalho do seu grupo com o dos grupos mais próximos.

Com esta experiência notei que a alteração das regras de trabalho criadas, fruto de reflexão e reavaliação acerca das atividades desenvolvidas pelos alunos, melhorou os índices de envolvimento demonstrada nos diálogos sobre o que se discute na sala de aula, como exemplifica a seguinte interação entre os alunos e o professor:

- Aluno de P5+P6: Então...Sabemos que esta medida era 18 portanto metade vai ser nove. E aqui esta medida era $2x$ e portanto metade vai ser x . Usando a área do retângulo. Comparando este triângulo com este: 12 esta para 9 e $12-x$ está para y"
- Professor: Estão a ver uma resolução diferente da minha e da de alguns grupos! (...) E vocês resolveram da mesma maneira?
- Aluno de P9+P10: Não, eu nem sequer usei esses triângulos e nem fiz por proporção, eu usei a regra três simples.
- Professor: Resolveram chamar antes a esta medida y e a esta nove menos y .
- Aluno de P3+P4: Não pode ser assim nessa altura. Se a minha está certa o doze está no sítio errado.
- Aluno de P11+P12: Porque ela usou triângulos diferentes dos vossos (virados para o outro grupo), mas o resultado final é igual.

Quase todos os grupos participaram nesta discussão, o que me pareceu que o grau de estrutura desta tarefa incentivou os alunos a envolverem-se na sua resolução. Por outro lado, a utilização de um programa de geometria dinâmica também poderá explicar o maior empenho dos alunos. Mas nem todos os alunos se esforçaram para fazerem parte da dinâmica de trabalho da turma, como foi o caso dos alunos de P1+P2. Da reflexão que realizei após a aula apercebi-me de outras regras a estabelecer com os alunos:

Criar duas novas regras: (1) um aluno à minha escolha do último grupo a terminar terá que ir ao quadro apresentar o resultado do grupo; (2) esse aluno terá a ajuda de qualquer elemento dos outros grupos que eu escolha. Espero

ganhar assim algum tempo e verificar o contributo e a participação de todos os alunos na resolução da atividade. (Reflexão da Aula 8)

Nas últimas experiências de ensino foram aplicadas tarefas com estrutura aberta. Tendo como conteúdo programático a desenvolver os problemas de otimização, adaptei uma tarefa de um manual de modo a criar abertura na resolução. Considerei também a introdução de materiais manipuláveis como uma forma possível de envolver os alunos nas atividades de aprendizagem. Solicitei à turma a elaboração de um caleiro através de dobragens numa folha de papel que os alunos considerassem ótimo para a canalização das águas das chuvas. Essa tarefa, da Aula 9, foi introduzida do seguinte modo:

Certo dia, um comerciante verificou que a água da chuva que caía dos telhados era responsável por molhar as pessoas que passeavam pela rua. Na sua loja, vendia folhas metálicas retangulares de 30 cm de largura e deduziu que uma boa forma de resolver o problema seria utilizar essas folhas metálicas para construir calhas com formato de um U para recolher as águas vindas os telhados.

1. Constrói através de uma folha de papel um esquema representativo do caleiro que aches que recolhe o máximo de água possível.

A turma foi distribuída desta vez em grupos de cinco elementos para averiguar se a introdução de mais um elemento nos grupos proporcionaria mais interação entre os alunos. Tive a preocupação de 'equilibrar' os grupos do melhor modo possível, tendo em conta a capacidade e o desempenho matemático dos seus elementos. O desafio incidia na perceção do que era para os alunos o melhor caleiro, entendido como aquele que maximizasse o fluxo da água. Alguns dos grupos (2) idealizaram que o caleiro ótimo teria a forma quadrangular mas não determinaram a área máxima. Outros grupos (3) construíram um caleiro dividindo a folha sem critério. Casualmente, alguns alunos até acabaram por obter o caleiro com área máxima. Nesta construção, enquanto alguns alunos obtiveram o caleiro através de dobragens do papel sem qualquer estratégia definida, outros indicaram preocupações a ter nas dobragens: "A melhor área é dada por um quadrado..."; "Vamos dobrar assim para ficar certinho..."; "Dividir a folha em 3 partes iguais...". Este tipo de justificações mostra que os alunos não têm por hábito definir estratégias de resolução das tarefas de natureza exploratória.

As restantes alíneas da tarefa tinham uma estrutura similar à dos problemas, com algum grau de dificuldade e os resultados das observações foram congruentes com os do quadro da tarefa Aula 4.

2. Através de uma régua mede as dimensões laterais e descobre a sua área interior.
3. Indica uma expressão $A(x)$ que determina a área interior do caleiro. De seguida representa-a graficamente.
4. Calcula a função derivada $A'(x)$ e os pontos onde se anula.
5. Utilizando as capacidades da tua calculadora constrói uma tabela de sinais para $A'(x)$ e uma tabela de monotonia para $A(x)$. Compara as duas tabelas. O que concluis?

Na resolução da tarefa utilizei uma folha de cálculo como estratégia para envolver um maior número de alunos e para elevar a compreensão do que pretendia que eles fizessem.

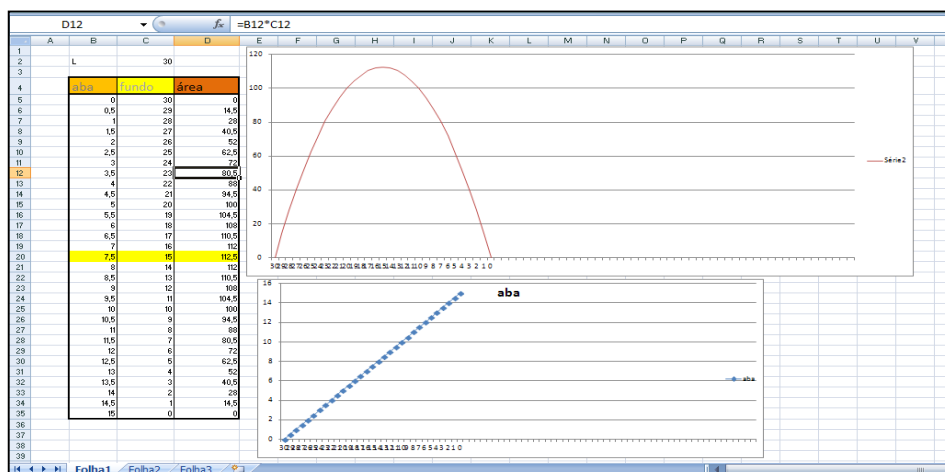


Figura 9. Determinação das dimensões de um caleiro que maximize o fluxo da água da chuva.

Foi a seguinte construção, no GeoGebra, que permitiu visualizar a variação da área interior do caleiro $[M'N'N''M'']$ em função do deslocamento do ponto F no segmento de reta OE :

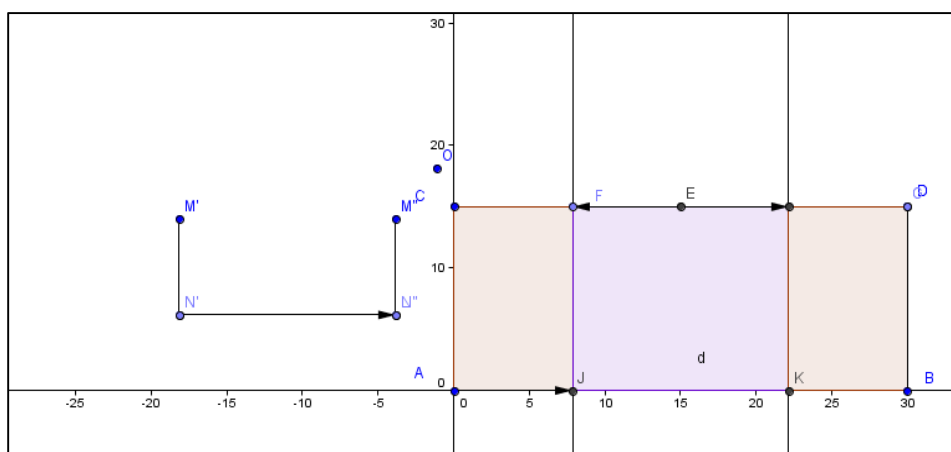


Figura 10. Variação da área interior do caleiro.

Percebi que alguns alunos não deram a devida atenção a esta atividade pois 'desconfiavam da sua utilidade', como é possível constatar neste excerto da aula:

- Professor: Como estão a ver quem teve 7,5 teve melhor área. Quem teve 7,5 cm para os lados da calha?
- Alunos de P1+P2: Nós (em coro).
- Aluno de P11+P12: Nós também.
- Professor: Queria que alguém do vosso grupo e do grupo (P11+P12) me explicasse porque é que obtiveram este valor.
- Aluno de P1+P2: Nós, é fácil, foi só dobrar ao meio.
- Professor: E vocês (P11+P12) também dobraram ao meio, experimentaram alguma estratégia para funcionar?
- Aluno de P11+P12: Primeiro dobramos ao meio mas depois fizemos tentativas com menos.

Na interpretação que efetuei dos resultados após a aula identifiquei que alguns alunos valorizam mais os resultados do que o processo:

Estavam à espera das contas e números dando pouca importância à atividade inicial constituída por umas simples dobragens numa folha que segundo o que me pareceu foi considerado por eles como desperdício de tempo. (...) A atividade não dava a entender aos alunos qual o objetivo face aos conteúdos que eles estavam à espera. (...) A aplicação de uma tarefa de exploração constituiu um desafio para o qual estava pouco preparado. Devido ao seu caráter aberto divergiu tanto em termos de empenho esperado dos alunos como na sequência exetável. (Reflexão da Aula 9)

Mais uma vez constatei que os alunos trabalham 'melhor' nos parâmetros que conhecem (exercícios e problemas) e qualquer mudança demora a ser assimilada. A integração de tarefas de índole investigativa nas planificações de aula pode criar um ambiente que não favorece a aprendizagem. Os motivos são a falta de preparação e motivação dos alunos, o grau de estrutura da tarefa, a preparação do professor e a falta de mecanismos de trabalho de grupo nos alunos. A distribuição dos alunos em grupos de cinco elementos nesta turma criou um problema acrescido. Apesar de levar em conta a homogeneidade, em relação ao conhecimento/capacidade matemática em cada grupo, dois elementos menos motivados de cada grupo rejeitaram a interação na atividade.

Na Aula 10 finalizei a minha prática pedagógica e desse modo esperava perceber se os alunos atingiram os conhecimentos esperados para todo o tópico das derivadas. Apesar dos resultados desanimadores obtidos nas incursões pelas tarefas abertas foi altura de arriscar uma tarefa de investigação/"*problem posing*" com elevado grau de abertura.

Tarefa de grupo

1. Numa folha de papel quadriculado elabora um gráfico cartesiano. Em seguida recorta um quadrilátero de uma folha de papel com tamanho aceitável de modo a que seja possível inferir valores aproximados para os seus vértices (4) quando colocado em cima do seu gráfico cartesiano construído anteriormente. Através da calculadora gráfica obtém uma expressão de grau 3 usando os pontos determinados pelos vértices do quadrilátero.
2. Elabora 5 questões que consideres possíveis de resolver para a expressão encontrada.

A tarefa foi realizada novamente em grupos de quatro elementos e foi solicitada a envolvimento por parte de todos. De modo a não criar muitas perguntas iniciais que poderiam comprometer o desenvolvimento da atividade através do alvoroço inicial, expliquei à turma as regras sobre as quais o trabalho deveria ser regido:

- (1) As questões têm que contemplar os tópicos abordados nas últimas aulas. O manual e o caderno poderão ser uma grande ajuda.
- (2) Todos os elementos do grupo têm que saber resolver as questões formuladas e participar na sua construção.
- (3) Elaborar questões com algum grau de dificuldade pois o desafio seguinte será propor aos restantes grupos a resolução das vossas questões.
- (4) Nem todas as questões serão corrigidas mas o grupo ou grupos com as questões mais interessantes terão a oportunidade de explicar à turma como elaborou e pensou nas questões.

Numa tentativa de aproveitar alguns dos hábitos de trabalho criados nas aulas anteriores permiti que os alunos se agrupassem com os colegas mais próximos das suas carteiras:

Quadro 7. Distribuição dos pares de alunos pelos grupos.

P1+P2	P3+P4	P5+P8	P6+P7	P9+P10	P11+P12	P13+P14
-------	-------	-------	-------	--------	---------	---------

Solicitei a alguns elementos do grupo P1+P2 que participassem nas atividades, pois eram o grupo que tinha piores índices de envolvimento nos trabalhos anteriores. Esta conversa pareceu-me que teve algum resultado ao vê-los a ajudar a colega mais trabalhadora, principalmente no início da atividade.

Os restantes grupos acharam interessante a ideia de construir questões para os colegas. Após o recorte do quadrilátero, alguns dos grupos, sem interação do professor, resolveram adaptar a figura criada de forma a poderem estabelecer as questões com números naturais conforme se ilustra seguidamente (Figura 11).

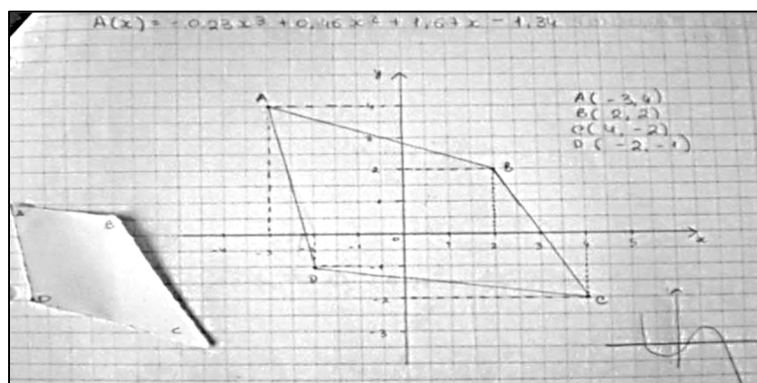


Figura 11. Atividade desenvolvida pelos alunos do grupo P1+P2.

Entre as questões criadas pelos alunos distingo dois tipos de tarefas: exercícios e problemas. As questões envolviam os mais variados tópicos das derivadas (t.m.v, função derivada, derivada de uma função num ponto, estudo da monotonia, máximos e mínimos e problemas de otimização).

Apesar de ser uma tarefa aberta, o empenho da turma, em geral, foi consideravelmente superior ao revelado na tarefa anterior. Alguns grupos elaboraram tarefas desafiantes, problemas, resultado da pesquisa que efetuaram no manual e no caderno sobre qual a melhor maneira de elevar o grau de desafio das questões através da figura inicial. Houve grupos que integraram nas suas questões contextos de realidade, como se nota na questão 1 do grupo P13+P14 (Figura12).

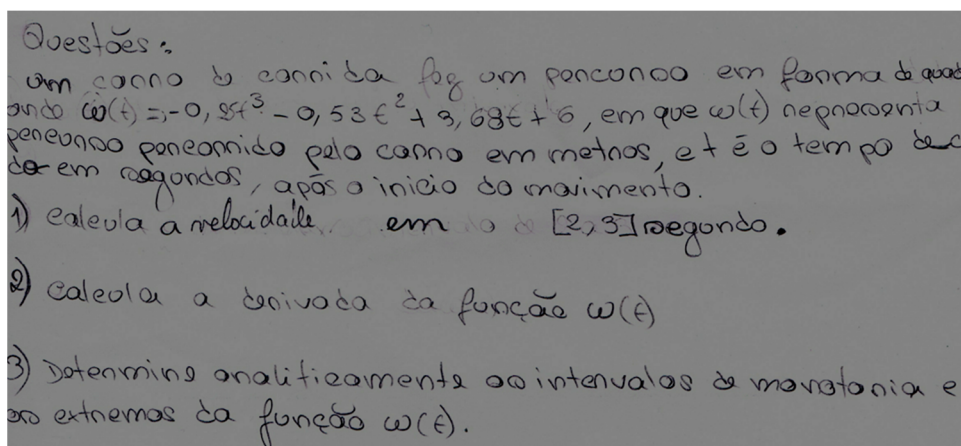


Figura 12. Elaboração de questões pelo grupo P13+P14

Verifiquei ainda que alguns grupos adaptaram os esquemas iniciais de modo a alcançar valores do vértice suscetíveis de criar equações de terceiro grau. Quase todos os grupos acharam importante criar uma questão que envolvesse apenas o cálculo da taxa média de variação num intervalo dado. A Figura 13 ilustra dois rascunhos eliminados pelos alunos de P11+P12 que dá conta da adaptação realizada aquando da colocação do quadrilátero.

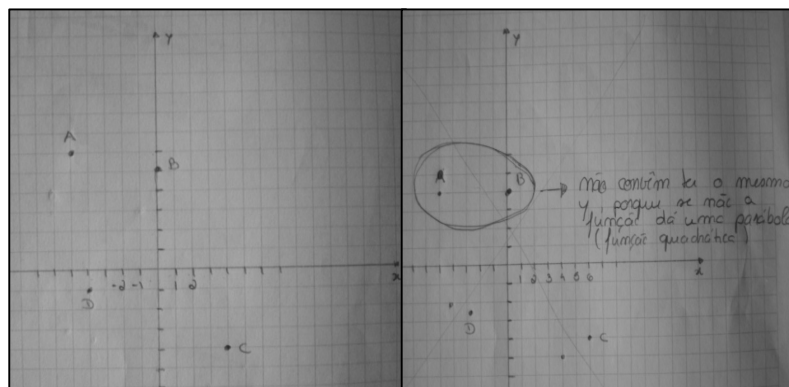


Figura 13. Atividade dos alunos P11+P12

O nível de esforço conjunto e de partilha elevou-se em relação a algumas das atividades anteriores. Consideremos o seguinte excerto de aulas que revela a atividade desenvolvida por P9+P10, pelos alunos A1,A2,A3,A4 (Figura 14):

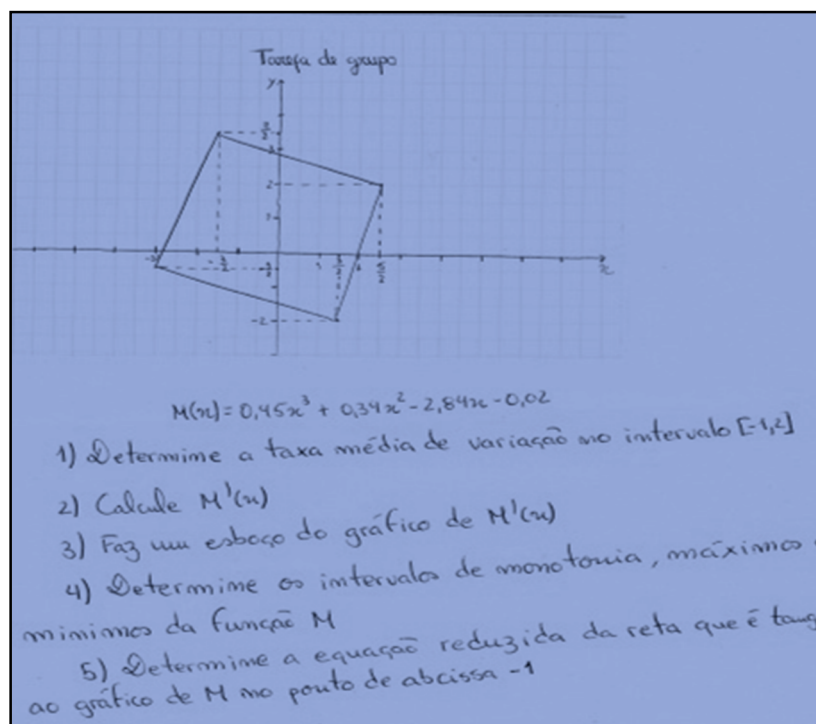


Figura 14. Elaboração de questões pelos alunos do grupo P9+P10

- A1: Temos aqui umas porreiras...eu punha antes esta.
A2: Do domínio? (...) entre menos 4 e quatro (...) podíamos usar outros valores.
A3: Mas olha que já fizemos essas da derivada.
A1: Então fazemos antes esta do... (interrompido pelo colega A2).
A2: Mas assim fica igual ao que eles já têm....(interrompido por A3).
A3: E depois para resolver fica um bocado 'chato'.
A4: Fazemos antes daquelas e depois se não der podíamos fazer aquelas dos gráficos.
(...)

A1: Não era suposto estarmos a fazer cada um a sua para depois comparar?

A2: E depois tirar as dúvidas não dá...ou alterar o gráfico, tem que ser assim.

A4: Vamos mas é fazer a derivada de dois pontos...é mais fácil.

A2: Ou então podemos dar os valores disto e pedir a reta.

Do grupo P9+P10, o designado aluno (A1) é um líder 'líder social' que não costuma deixar que seja imposta qualquer outra vontade que não seja a sua. Nesta atividade esteve mais calmo com os colegas o que propiciou um maior envolvimento de todos. Este facto pode dever-se ao estabelecimento de algum tipo de cooperação no trabalho de grupo como é apontado pela ACIME (2004), por outra perspetiva o grau de desafio terá criado uma maior envolvimento de alunos que normalmente não participam nas atividades propostas.

Os tópicos abordados nesta tarefa foram distribuídos pelos grupos através de diferentes tipos de tarefas, como se pode verificar no Quadro 8:

Quadro 8. Tópicos e tipologia de tarefas apresentados pelos alunos

	Questão	Tópico abordado	Tipologia da tarefa
P1+P2	1	Taxa média de variação	Exercício
	2	Função derivada	Exercício
	3	Derivada pontual	Exercício
	4	Extremos relativos da função	Exercício
	5	Domínio da função	Problema
P3+P4	1 (distribuída por 3 alíneas)	Interpretação geométrica da função derivada	Exercício
	2	Equação da reta tangente	Problema
	3	Intervalos de monotonia	Exercício
	4	Tarefa de otimização	*
	*A questão 4 não apresentou resolução possível.		
P5+P8	1	Taxa média de variação	Exercício
	2	Função derivada	Exercício
	3	Intervalos de monotonia	Exercício
	4	Derivada pontual	Exercício
P6+P7	1	Interpretação geométrica da função derivada	Problema
	2	Função derivada/equação da reta tangente	Problema
	3	Intervalos de monotonia	Exercício
P9+P10	1	Taxa média de variação	Exercício
	2	Esboço da função	Exercício
	3	Monotonia	Exercício
	4	Máximos e mínimos	Exercício
	5	Equação da reta tangente	Problema
P11+P12	1	Taxa média de variação	Exercício
	2 (dividida em 2 alíneas)	Otimização	Problema

		Monotonia	Exercício
	3	Áreas	Problema *
	4	Função derivada	Exercício
* Não utiliza os conceitos de pedidos			
P13+P14	1	Taxa média de variação	Exercício
	2	Função derivada	Exercício
	3	Intervalos de monotonia	Exercício
	4	Otimização	Problema*
	*Não apresentava nenhuma ligação à tarefa inicialmente pedida ou foi mal construída.		

Nota: Esta tabela segue a classificação de tarefas indicada por Ponte (2005).

Quanto ao tipo de tarefas, das 29 apresentadas pelos alunos, obtiveram-se 9 problemas (31%) e 20 exercícios (69%). Em termos de percentagem, estes resultados aproximam-se dos que traduzem a presença de cada um destes tipos de tarefas no manual dos alunos. A prevalência dos exercícios no manual escolar e nas atividades da sala de aula, em detrimento de outro tipo de tarefas, parece explicar a preferência manifestada pelos alunos, provavelmente por exigir menos esforço cognitivo quer na sua elaboração quer na sua resolução. O aluno tende a reproduzir aquilo a que está mais habituado.

Resta falar da inesperada reação dos alunos a esta tarefa. O seu envolvimento superou as expectativas criadas anteriormente. Esperava comentários dos alunos como "mexer com papel outra vez" (recordando a tarefa da Aula 11), que não sucederam. Após a análise das respostas dos discentes, identifiquei os seguintes motivos para que tal reação não se verificasse:

1. Apesar da estrutura aberta da tarefa, os procedimentos a seguir na sua aplicação eram regrados o que pode ter causado a sensação de conforto nos alunos;
2. Voltaram a ser utilizados os grupos de quatro elementos, que tinham sido habituais no 'passado';
3. O desafio criado pela expectativa de ver os colegas a resolver as suas questões;
4. A leitura e explicitação das regras a aplicar durante a atividade e o conhecimento do objetivo final da tarefa.

Para finalizar a atividade, cada um dos grupos foi questionado através de uma 'Questão solta' acerca da utilidade da tarefa. As respostas foram as seguintes:

Quadro 9. Respostas dos alunos à atividade acerca da atividade de grupo

P1+P2	Gostamos bastante de realizar este trabalho visto que tivemos de analisar os nossos conhecimentos e com isso ver quais as nossas maiores dificuldades e facilidades.
P3+P4	Este exercício foi bastante interessante porque permitiu desenvolver a capacidade de elaborar exercícios aplicando a matéria. A opinião do grupo é que todas gostamos de fazer.
P5+P8	Gostamos da atividade, deu para ver os conhecimentos e como é difícil criar questões.
P6+P7	Tivemos muitas dificuldades para a elaboração da tangente, mas gostamos porque nos ajudou a raciocinar e a ter outra perspetiva.
P9+P10	(Não respondeu)
P11+P12	Com esta atividade, o nosso grupo chegou à conclusão que este tipo de atividades é benéfico para trocar impressões e para compreendermos melhor a matéria com a ajuda dos colegas.
P13+P14	Este exercício foi bastante formativo, porque nos fez pensar e discuti sobre como resolver e se conseguíamos. A ideia com que ficamos é que só conseguimos fazer as perguntas se percebermos a matéria. Foi um desafio difícil.

Apesar de existir uma notória intenção por parte de alguns grupos para ‘embelezar’ as respostas, de acordo com o objetivo que achavam que o professor pretendia avaliar, retirei algumas ilações acerca da perceção dos alunos acerca deste tipo de atividade. Os grupos P1+P2, P3+P4, P11+P12 e P13+P14 evidenciam a importância de visitar os conteúdos dados o que revela a preocupação na construção que desenvolveram, no equilíbrio que as questões deveriam ter e nos tópicos abordados. Os grupos P3+P4, P6+P7 e P13+P14 falam da visão e do conhecimento do criador das questões o que pode, no futuro, promover uma maior motivação para a resolução de tarefas pois aproximam-se do que o professor faz. Por outro lado, os grupos P3+P4, P5+P8 e P13+P14 falam das dificuldades sentidas na criação das questões.

3.4. Perspetivas dos alunos acerca do contributo dos diferentes tipos de tarefas

No questionário pedi aos alunos da turma, que identificassem o tipo de tarefas que o manual propõe. Apenas cinco alunos (17.2%) não encontram diferenças significativas nas tarefas. Os restantes dividiram-se em explicações múltiplas acerca da identificação, dos objetivos de aprendizagem de cada uma delas, da dificuldade ou do aspeto visual, como ilustra o Tabela 6.

Tabela 6. Consideração pelos alunos do objetivo a que se propõe as tarefas do manual (n=23).

Tipo de resposta dos alunos	Frequência
(1) contas e gráficos	6
(2) escolha múltipla e resolução	2
(3) exercícios, propostas, tarefas e resumos	8
(4) exercícios, de raciocínio, de contas e outros mais globais	3
(5) fáceis e mais difíceis	2
(6) mini tarefas nas margens, tarefas mais globais	2

Na sua generalidade, os alunos possuem algum conhecimento acerca dos objetivos inerentes às diferentes tarefas do manual. Por exemplo, através das respostas do tipo (6) e (3) constata-se que alguns alunos especificam as mini tarefas das margens que têm um caráter de 'treino', tal como apontam Gimeno (1998), OCDE (2004), Ponte (2005) e Yeo (2007). Do mesmo modo podemos ainda associar as "contas e gráficos" aos exercícios de margem, o que parecem traduzir procedimentos de cálculo. Os alunos falam ainda nas tarefas de "raciocínio" e "mais globais" que traduzem as tarefas matematicamente ricas (Yeo, 2007) e os problemas (Ponte, 2005).

Numa tentativa de saber mais sobre a perspetiva dos alunos acerca do contributo das diferentes tarefas do manual para a sua aprendizagem matemática, questionei-os sobre as diferenças específicas entre as 'tarefas laterais' e as 'tarefas de aplicação do tópico'. Constatou-se que 19 alunos (66%) preferem a "tarefa de aplicação do tópico", sete alunos (24%) destacam as "tarefas laterais" e três alunos (10%) não veem diferenças de assinalar. As respostas apresentadas foram variadas. Relacionando os gostos pessoais de cada aluno com as características apontadas percebe-se que os alunos reconhecem as diferenças de estrutura e o objetivo educacional de cada tipo de tarefa que costumam resolver (Tabela 7.).

Tabela 7. Perceções dos alunos acerca das tarefas do manual escolar.

'Tarefas laterais' (Maioritariamente exercícios)	'Tarefas de aplicação do tópico' (Maioritariamente problemas)
"perceber a matéria";	"relacionadas com o dia-dia";
"mais rápidas";	"mais complexas e elaboradas";
"não são tão básicas";	"necessitam de mais tempo porque têm outros tipos de matéria e dificuldade";
"preparam melhor os exercícios mais fáceis do teste";	"têm mais ajuda do professor e podem ser feitas de forma coletiva";
"é o que está a ser lecionado no momento";	"são a evolução das da margem";
"as margens ajuda a perceber a matéria";	"estas misturam a matéria";
"são mais específicas";	"são de grupo enquanto que as outras são individuais"
"maior precisão";	
"servem para introdução e treino da matéria"	

Nas suas respostas, os alunos consideram as características de forma, caráter temporal, grau de desafio, estrutura e as formas de trabalho na sala de aula. Acerca das formas de trabalho, os alunos foram questionados sobre a relação entre as tarefas e a tipologia de trabalho utilizada na aula. Numa das aulas iniciais da minha prática pedagógica, após a tarefa introdutória propus tarefas de aplicação imediata, exercícios, para a sua resolução individual e propus problemas para serem resolvidos em grupo. Os grupos foram formados espontaneamente com os colegas das carteiras mais próximas, não foram criadas normas de trabalho em conjunto, apresentação de resultados, nem de avaliação formativa do trabalho. A 'Questão solta' que coloquei foi a seguinte: "Porque acham que na primeira tarefa o trabalho foi individual e na seguinte foi em grupo?" A questão foi respondida individualmente numa fase em que os grupos já tinham sido divididos. Desse modo, pude conhecer a perspetiva do aluno acerca da influência da tarefa no trabalho de grupo. As respostas foram variadas com alguns elementos comuns. Acerca da primeira tarefa, a explicação dos alunos rondou as seguintes frases como "treinar os cálculos", "adquirir conhecimentos e aprender a fazer os exercícios", "aprender as contas da matéria nova", "mais fáceis". Com tais respostas depreendo que os alunos, na sua generalidade, têm algum conhecimento da relação entre a tarefa exercício e o modo de estruturação da sala de aula e do tipo de conteúdos trabalhados. Na segunda parte da questão, a maioria dos alunos respondeu que a segunda tarefa foi resolvida em grupo pois desse modo podiam trocar ideias de resolução e apoiarem-se mutuamente. Apenas dois alunos indicaram que segundo o grau de dificuldade que a tarefa exigia, seria benéfico trabalhar em conjunto pois assim avaliariam mais ideias. Com estas respostas constato que os alunos compreendem melhor o que são exercícios e sabem quais os seus benefícios para o ensino, reconhecendo a sua forma e o formato habitual de trabalho. Por outro lado, não me parecem que estão habituados ao trabalho de grupo nem a trabalhar com tarefas que fomentem o raciocínio e a comunicação matemática, como é defendido pelos programas de Matemática do Ensino Secundário (Ministério da Educação, 2002).

Na minha prática pedagógica, e em duas aulas distintas, os alunos foram questionados através de duas 'Questões soltas' para se pronunciarem acerca da utilidade real dos conteúdos ministrados em cada uma dessas aulas. Na primeira aula foi ministrado o ensino das noções de taxa média de variação/taxa de variação, enquanto na segunda aula foram resolvidos problemas de otimização. Em ambos os casos foi decidido que seria dada uma resposta por grupo de trabalho. As respostas foram as seguintes (Tabela 8):

Tabela 8. Respostas dos alunos às questões soltas.

Primeira aula	Segunda aula
“A t.m.v representa a variação entre dois pontos que definem um intervalo e em termos práticos serve para ver a inclinação”	“Com este exercício poderíamos calcular a melhor velocidade de crescimento de um tipo de cultura vegetal”
“A taxa média de variação tem a ver com a inclinação da reta ...e pode ser utilizada na vida real para calcular a velocidade”	“Esta matéria para otimizar os lucros de venda do cultivo de batatas através da sua otimização”
“A t.m.v é a divisão entre a diferença das imagens e a diferença dos objetos correspondentes...e usa-se para ver inclinações”	“Calcular o melhor formato de um canteiro de jardim de maneira a ocupar melhor área ou para reduzir o consumo de água”
“É uma forma de descobrir o declive de uma função num dado intervalo... e dá para saber se uma função é crescente, decrescente ou constante”	“Suponhamos que queríamos colocar uma vedação e saber a quantidade de rede a utilizar para vedar uma plantação. Através do estudo da função derivada podíamos calcular a quantidade mínima de rede a utilizar e assim poupar dinheiro”
“A taxa média de variação de uma função num dado intervalo serve para ver o declive de uma reta definida por dois pontos...nos automóveis pode-nos dar a velocidade do automóvel por variação de tempo”	“Esta matéria podia ser utilizada em exercícios que dessem para calcular o número adequado de plantas de numa determinada área”
“A taxa média de variação serve para ver o declive e é o quociente entre a variação das imagens e a variação dos objetos. Geometricamente representa o declive”	“No nosso jardim fazíamos um lago artificial. Teríamos de achar o melhor formato do lago para reaproveitar a maior quantidade de água possível. Desse modo através da função derivada calcularíamos a melhor forma sabendo qual é o seu zero, que é um máximo da função inicial”
“Nós entendemos a taxa média de variação como sendo a inclinação de uma reta e pode ser aplicada na vida real para saber a velocidade a que um automóvel se desloca num dado intervalo de tempo”	

Os alunos tendem a dar uma relevância diferente aos conteúdos adquiridos conforme a tipologia de tarefas que é trabalhada em cada uma das aulas. A verdade é que a primeira aula mencionada foi mais teórica, centrada mais na atividade do professor, e foram propostos alguns exercícios de aplicação o que levou os alunos a considerar mais o conteúdo programático nas suas respostas do que a sua aplicação na vida real. Pelo contrário, na segunda aula, onde foram resolvidas tarefas de otimização (problemas) que suscitavam outro tipo de atividade, os

conteúdos ficaram à margem das respostas e os alunos pensaram mais na importância da sua aplicação a situações do dia-dia. Estes episódios sugerem que os alunos consideram que as tarefas de aplicação imediata (exercícios) estão relacionadas com tópicos de aprendizagem, ao passo que as tarefas mais desafiantes (problemas) podem ser aplicadas nouro tipo de contextos mais abrangentes.

Analisando as tarefas formuladas pelos alunos da Aula 10 (Quadro 8) de uma nova perspectiva, constato que as questões acerca dos conteúdos 'taxa média de variação, da função derivada e de derivada pontual' são exclusivamente exercícios (tarefas matematicamente pobres), ao passo que as questões que envolviam os conceitos de interpretação geométrica da função derivada ou de otimização de superfícies eram problemas (tarefas matematicamente ricas) (Tabela 9):

Tabela 9. Tipos de tarefas pelos conteúdos programáticos.

Conteúdo	Exercício/tarefa matematicamente pobre	Problema/tarefa matematicamente rica
Taxa média de variação	5	0
Função derivada	4	0
Derivada pontual	2	0
Domínio	1	0
Interpretação geométrica da função derivada	1	1
Equação da reta tangente	0	3
Otimização	0	3
Monotonia e extremos	5	1
Esboço da derivada	0	1
Áreas	0	1

Estes dados sugerem que os alunos compreendem qual é a função de cada tipo de tarefa face aos conteúdos programáticos. Nesta tabela não se obtiveram tarefas abertas (explorações ou investigações). Analisando o tipo de atividade que delas resulta, alguns dos problemas apresentados pelos alunos, mais propriamente as tarefas de otimização ou as questões que envolviam a análise de visualizações gráficas, instigavam na sua resolução a uma atividade investigativa e exploratória, o que demonstra que os alunos apesar de não reconhecerem normalmente tarefas abertas estão familiarizados com o tipo de atividade.

Na fase final da minha intervenção pedagógica, após a elaboração de diversos trabalhos de grupo na sala de aula, questionei novamente os alunos, através de uma 'Questão solta' sobre os benefícios da resolução das tarefas em grupo para a sua aprendizagem. Em termos de gostos pessoais, a turma encontra-se dividida. Dos 28 alunos presentes nesta aula, 10 preferiram o trabalho individual enquanto 14 preferiram o trabalho de grupo. Quase todos os alunos falaram do benefício da partilha e da entajuda, valores falados anteriormente pois nascem da resolução de problemas em conjunto, tal como defende Polya (1973). Obtiveram-se algumas respostas interessantes ao nível da perspectiva dos alunos sobre o contributo das diferentes tarefas, tais como: "...o professor não está presente pelo que se pode dar mais ideias sem medo..."; "...pode-se fazer tarefas mais difíceis porque são mais a ajudar..."; "...podemos resolver mais complicadas porque melhora o raciocínio com o debate...".

Os alunos apontaram também as desvantagens/inconvenientes do trabalho de grupo, entre as quais indicam o barulho e a distração criada pelo debate de ideias, os diferentes ritmos de cada aluno, a não cooperação de alguns e a dificuldade em se sentirem integrados dentro do grupo. No entanto, as respostas de alguns alunos revelam consciencialização da pertinência do trabalho de grupo em função da tarefa ou do seu conteúdo, tal como exemplificam as seguintes afirmações: "Depende da ficha de trabalho, se for rápido prefiro fazer individualmente ou na altura do teste"; "Em grupo porque sozinha tenho mais dificuldades naquelas tarefas"; "Depende (...) precisamos primeiro de ganhar autonomia até porque no teste ninguém vai pensar por nós..."; "Em grupo conseguimos analisar melhor as questões mais difíceis e apresentar..."; "Não prefiro nenhuma das maneiras pois as duas maneiras de trabalhar são importantes".

Os alunos relacionam as tarefas com os seus objetivos e de como cada uma delas se relaciona com os conteúdos programáticos. Esta questão foi difícil de trabalhar pois normalmente a tipologia de tarefas está previamente aplicada aos conteúdos a ensinar sendo normalmente imposta pelo professor ou pelo manual. Como foi dito atrás, os alunos compreendem a estrutura das tarefas e sabem à partida o seu objetivo de ensino. Apesar de chamarem normalmente exercício a cada tarefa sabem que os problemas são mais difíceis, pois possuem um nível superior de exigência.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo, dividido em duas secções, apresentam-se as principais conclusões deste estudo e referem-se algumas limitações ao seu desenvolvimento bem como recomendações para trabalhos futuros.

4.1. Conclusões

4.1.1. Que tipos de tarefas estão contemplados no manual escolar do aluno nos tópicos da derivada de uma função?

Da análise do capítulo do manual escolar do aluno que integra o tópico derivada de uma função verifica-se que as tarefas são propostas em quatro formatos: tarefas laterais, tarefas de aplicação do tópico, tarefas de aplicação final, sob o formato de escolha múltipla e as tarefas de aplicação final de desenvolvimento. Relativamente às 'tarefas laterais', que se situam nas margens do manual, são quase exclusivamente exercícios. A maioria delas são tarefas rotineiras de cálculo sem qualquer tipo de contextualização e com um enunciado direto, como ilustram as designações "Calcula", "Determina", "Faz", "Indica".

As 'tarefas de aplicação do tópico' são acompanhadas de imagens explicativas, bem destacadas dos conteúdos programáticos, situando-se normalmente depois da explanação desses conteúdos. Algumas questões destas tarefas possuem um grau de dificuldade acentuado e estabelecem conexões com outros temas matemáticos. Pelas características que apresentam, tais como grau de complexidade, estrutura fechada, forma como relacionam diferentes conteúdos programáticos, exigência da leitura atenta e compreensão do enunciado e das sugestões visuais, a maior parte delas são problemas (Ponte, 2005).

Quanto às 'tarefas de aplicação final (escolha múltipla)', que se encontram no final do capítulo, apresentam características similares às dos exercícios e problemas conforme o grau de desafio que apresentam (Ponte, 2005). Trata-se de tarefas que, na sua maioria, questionam os conhecimentos do aluno acerca da interpretação gráfica da função derivada. Procura-se através delas relacionar significados de conceitos da função derivada através das representações analítica e gráfica, o que tende a desenvolver a compreensão do aluno dos conceitos de

monotonia de uma função, extremos locais, declive da reta tangente ao gráfico de uma função num dado ponto do seu domínio (Almeida & Viseu, 2002; Tripathi, 2008).

As 'tarefas de aplicação final (desenvolvimento) ', também contempladas no final do capítulo, são evolutivas quanto ao grau de desafio, sendo as primeiras exercícios, de grau de desafio reduzido, e as últimas problemas, de grau de desafio mais elevado (Ponte, 2005).

As tarefas que estruturam o capítulo do manual relativo ao tópico das derivadas não possuem características que definem completamente as tarefas abertas (de exploração, ou investigação) nem invocam a recolha de dados de natureza real. Mas, o programa do ensino secundário afirma que deve ser encontrado um equilíbrio entre o desenvolvimento de capacidades e aptidões e o domínio do cálculo (Ministério de Educação, 2002), equilíbrio esse que se encontra através da resolução de problemas abrangentes ou mediante propostas de investigação matemática. O programa indica ainda que os estudantes deverão participar em atividades de natureza investigativa. A tipologia de tarefas contempladas no manual não corresponde completamente às orientações programáticas, o que sugere que compete ao professor ser um produtor de tarefas que integra na sua prática e não um mero reproduzidor do que o manual lhe apresenta.

4.1.2. Como se envolvem os alunos nas atividades da aula com diferentes tipos de tarefas no estudo da derivada de uma função?

O envolvimento dos alunos nas atividades da aula tende a depender da natureza das tarefas, tal como é indicado por Abrantes, Ponte, Fonseca e Brunheira (1999). Dos resultados observados nas atividades realizadas, quando as tarefas propostas na aula são fechadas (exercícios ou problemas), ambas resolvidas individualmente e/ou em pares, os alunos manifestam atitudes que parecem deverem-se a três fatores principais: (i) a motivação; (ii) a capacidade matemática individual de cada elemento da turma; e (iii) fatores externos às atividades, tais como a turma e o tipo de práticas anteriores.

Quanto às tarefas de investigação/exploração, como não existia termo de comparação depreendi que, pelas características e metodologias de aplicação que mais as definem (trabalho de grupo, abertura dos resultados, discussão das atividades, grau de estrutura, estabelecimento de novas regras de trabalho e conduta) dariam a oportunidade aos alunos de atenuar algumas das dificuldades inerentes à aprendizagem, tal como defendem Abrantes et al. (1999). Estas

características indiciam condicionar diferentes níveis de envolvimento nas atividades desenvolvidas.

Reportando às experiências de ensino que envolviam tarefas de estrutura aberta, ou nas atividades em grupo existiram algumas diferenças no envolvimento dos alunos. A atividade realizada em grupo na Aula 3 envolveu os alunos na resolução de uma tarefa em grupo. A maioria dos alunos resolveu individualmente o problema proposto, enquanto outros aproveitaram a oportunidade para conversar com os colegas. Conclui-se que os alunos não têm hábitos de trabalhar em grupo, o que traduz as indicações da ACIME (2004). Desse modo, o envolvimento demonstrado ressentiu-se das mesmas atitudes demonstradas no trabalho individual (motivação, capacidades individuais, turma e tipo de práticas).

Na tarefa da Aula 8, através da resolução de um problema de grau de desafio elevado, o envolvimento grupal na maioria dos casos melhorou principalmente o de alguns alunos habitualmente menos motivados para a participação nas atividades da aula o que corrobora os estudos de Ponte (2005). Este aspeto poderá dever-se, por um lado, a uma maior confiança na utilização de conhecimentos matemáticos em grupo, e, por outro lado, às características de aplicação da tarefa. A própria forma como a resolução da tarefa foi sugerida a cada grupo, como um desafio matemático, indicia que incutiu alguns grupos a juntarem esforços entre os seus elementos. Por outro lado, os grupos com os 'melhores' alunos da turma revelaram menos envolvimento intergrupalo por tenderem a resolver a tarefa individualmente.

Estabelecidas algumas normas de trabalho em grupo foi altura de propor tarefas de exploração e investigação. Os resultados observados relativamente à envolvimento foram pouco animadores. A pesquisa teórica proposta na Aula 4, uma exploração traduziu-se por uma falta de envolvimento generalizada. Considero que carecia de falta de estrutura apropriada para os alunos que não têm experiência com tarefas desta natureza. O grau de envolvimento nas atividades da Aula 9 ressentiu-se da falta de hábitos dos alunos em relação ao tipo de atividade desenvolvida (criação do caleiro numa folha de papel) e do grau de abertura da tarefa, que não permitia aos alunos visualizar os resultados finais e da indefinição na concretização das normas que regem o desenvolvimento da atividade tal como afirmam e Goldenberg (1999) e de ACIME (2004). Na última tarefa de investigação, proposta na Aula 12, o envolvimento revelado pela maior parte dos alunos foi superior. As características da tarefa adaptaram-se mais aos alunos da turma e às suas formas de trabalho, envolvendo-os em atividades com recurso à calculadora gráfica.

Os resultados deste estudo informam que as diferentes tipologias de tarefas criam distintos graus de envolvimento dos alunos. As tarefas de estrutura fechada (exercícios, problemas) são propícias para um maior envolvimento de alunos com mais capacidades, normalmente mais individualistas ou mais motivados. As tarefas de estrutura aberta sugerem que, quando aplicadas nas condições ideais, podem promover a envolvimento de alunos mais desmotivados ou com problemas de aprendizagem, tal como se verificou na última experiência de ensino. Estes resultados confirmam os que foram obtidos por Oliveira, Segurado, Ponte e Cunha (1999) numa experiência que realizaram com atividades investigativas e com trabalho de grupo. Para os autores, as tarefas de estrutura aberta “são apropriadas para todos os alunos e não apenas para os melhores” (p. 128). Esse envolvimento advém da junção de tarefas de estrutura aberta com o trabalho de grupo, que proporciona o recurso a diferentes estratégias de aprendizagem, tais como a formulação e a discussão de ideias em conjunto, a tomada de decisões e a escolha de trajetórias. Aprender com cooperação com os pares implica um maior desenvolvimento de competências de comunicação, discussão e argumentação matemática, o que tem repercussões no grau de envolvimento dos alunos nas atividades da sala de aula.

4.1.3. Que perspetivas têm os alunos sobre o contributo dos diferentes tipos de tarefas na sua aprendizagem dos tópicos da derivada de uma função?

Os alunos reconhecem dois tipos distintos de tarefas, os exercícios e os problemas. Para os exercícios, entre as suas características apontaram a rapidez, o baixo grau de dificuldade, o treino, a precisão e a função de introdução da matéria ou sejam as mesmas características indicadas por OCDE (2004), Ponte (2005), Yeo (2007). Através destas respostas verifica-se que os alunos da turma distinguem exercícios através do formato com que se apresentam e compreendem o objetivo a que se propõem na aprendizagem, pois na situação de aula são aplicados no ‘final da matéria’.

Quanto aos problemas, as respostas dos alunos indicam que estes são mais complexos, necessitam de mais tempo para a resolução e englobam mais conteúdos, Ponte (2005), Yeo (2007). Compreende-se que os alunos possuem conhecimento dos objetivos a que se propõem os problemas e da sua utilidade, relacionando-os com a aplicação do que aprendiam de derivadas em situações da realidade, o que indicia dever-se ao formato apresentado pelo manual.

Quanto às tarefas de exploração e de investigação, os alunos revelaram, numa primeira fase, falta de prática na sua atividade com este tipo de tarefas, o que muito se deve à fraca existência deste tipo de tarefas no manual, pois nele prevalecem as tarefas fechadas, tal como referem os estudos realizados por APM (1998), OCDE (2004) e Saraiva, Teixeira e Andrade (2010). Numa fase posterior, os alunos aperceberam-se que as tarefas de exploração e de investigação os desafiavam a envolverem-se nas atividades de aprendizagem de conceitos da derivada de uma função. Através delas, tiveram a oportunidade de partilhar e confrontar as suas ideias com os seus colegas.

Quanto à perspetiva dos alunos sobre o contributo dos diferentes tipos de tarefas na sua aprendizagem dos conceitos inerentes à derivada de uma função, tendem a considerar os exercícios adequados para adquirir conhecimentos mais específicos de aprendizagem (função derivada, t.m.v ou taxa de variação) e as tarefas mais ricas matematicamente (problemas, investigações) para conteúdos mais abrangentes (otimização, ou representações gráficas das funções).

4.2. Limitações e Recomendações

Este estudo pretendia averiguar se o tipo de tarefas realizadas pelos alunos poderia promover o seu envolvimento das atividades desenvolvidas na sala de aula. Para além das características das tarefas, ressaltou como fator determinante desse envolvimento os índices de motivação de cada aluno para aprender. Envolver alunos desmotivados ou com dificuldades de aprendizagem é uma tarefa que requer tempo. Nem todas as metodologias se adaptam a todos os alunos ao mesmo tempo. Essa foi uma das principais dificuldades sentidas na prática pedagógica que se juntou à minha inexperiência na condução de aulas. A construção de tarefas adequadas que servissem ao mesmo tempo os objetivos da aula e os objetivos do estudo foi outro dos problemas que senti, principalmente em encontrar e adaptar tarefas investigativas. Como afirmam Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira (1999), "é um trabalho criativo para o qual não há receitas" (p. 100). Este estudo ficou ainda limitado pela falta de aplicação de uma tarefa de modelação, através da qual poderia obter dados mais concretos relativamente ao envolvimento dos alunos nas diferentes tarefas.

Como o tempo foi um fator de limitação deste estudo, ganha relevância averiguar se a relação entre o envolvimento dos alunos e a natureza das tarefas se verifica com um maior número de aulas do que aconteceu neste estudo. Para além do tempo, importa também analisar

o envolvimento dos alunos com tarefas que tratem outros conteúdos programáticos de diferentes anos de escolaridade. Na aplicação do diferente tipo de tarefas emergem as capacidades transversais do currículo, tais como a comunicação matemática e o raciocínio, que podem ser consideradas em futuros estudos relacionados com a tipologia de tarefas. Em relação à capacidade de comunicação matemática, importa estudar o contributo da utilização de materiais tecnológicos ou manipuláveis no envolvimento dos alunos nas atividades de aprendizagem com recurso aos diferentes tipos de tarefas: o que escrevem os alunos em cada um dos tipos de tarefas? Que estratégias utilizam na resolução de tarefas de estrutura aberta? Como argumentam os seus processos e os resultados que obtêm? Que relação há entre a tipologia das tarefas e as interações que se promovem na sala de aula?

Referências Bibliográficas

- Abrantes, P., Ponte, J., Fonseca, H., & Brunheira, L. (Orgs.) (1999) *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Almeida, C., & Viseu, F. (2002). Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, 1(15), 193-219.
- Alto comissariado para a Imigração e Minorias Étnicas (2004). *Cooperação e Aprendizagem*. Acedido a 30 de Agosto de 2012, de <https://infoeuropa.euroid.pt/files/database/000040001-000041000/000040616.pdf>
- APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM.
- Ardenghi, M. (2008). *Enino aprendizagem do conceito de função: Pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil*. Tese de Mestrado, Universidade Católica de São Paulo, Brasil.
- Barbosa, J. (2001) Modelagem na educação e os professores: a questão da formação. *Boletim de Educação Matemática*, 15, 5-23.
- Batelaan, P. (1998). *Towards an equitable classroom: cooperative learning in intercultural education in Europe*. Hilversum: IAIE.
- Bilhim, J. (2001). *Teoria Organizacional – Estruturas e Pessoas*. Lisboa: Instituto Superior de Ciências Sociais e Políticas.
- Bispo, R., Ramalho, G., & Henriques, N. (2008). Tarefas matemáticas e desenvolvimento do conhecimento matemático no 5.º ano de escolaridade. *Análise Psicológica*, 26 (1), 3-14.
- Botas, D. (2008). *A utilização dos materiais didáticos nas aulas de matemática: Um estudo no primeiro ciclo*. Tese de Mestrado, Universidade do Minho.
- Brophy, E. (1983). Reserch on the self-fulfilling prophey and teacher expectations. *Journal of educacional Psychology*, 75 (5), 631-661.
- Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 1, 35-49.
- Caria, T. (1992). Perspetiva sociológica sobre o conceito de educação e a diversidade das pedagogias. *Sociologia problemas e práticas*, 12, 171-184.

- Castro, R. (1999). Já agora, não se pode exterminá-los? Sobre a representação dos professores em manuais escolares. In R. V. Castro et al. (Orgs.), *Manuais escolares, estatuto, funções, história. Atas do I Encontro Internacional sobre Manuais Escolares*. Braga: Instituto de Educação e Psicologia, Universidade do Minho.
- Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.
- Cohen, E. (1994). *Le travail de groupe. Stratégies d'enseignement pour la classe hétérogène*. Montréal: Les Ed. de la Chenelière.
- Dante, L.. (1994). *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. São Paulo: Editora Ática.
- Deplit, L. (1988). The Silenced dialog: Power and pedagogy in educating other people ´s children. *Harvard Educational Review*, 58 (3), 280-298.
- Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist*, 23, 167–80.
- Dweck, C. (2000). *Self-theories: Their role in motivation, personality, and development*. Philadelphia: Psychology Press.
- Ferri, B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86-95.
- Gimeno, J. (1989). *El Curriculum: Una Reflexión sobre la Prática*. Morata, Madrid.
- Goldenberg, E. P. (1999). Quatro Funções da Investigação na Aula de Matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-49). Lisboa: Projeto MPT e APM.
- Guerreiro, M., & Portugal, M. (s. d.). O trabalho cooperativo nas aulas de matemática, numa turma do 5.º ano: uma experiência curricular. Acedido em 29 de outubro, 2012, de <http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas10SEIEM/Com11GuerreiroSalinas.pdf>.
- Henderson, K. B., & Pingry, R. E. (1953). Problem solving in mathematics. In H. F. Fehr (Ed.), *The learning of mathematics: Its theory and practice* (pp. 228-270). Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.
- Janeiro, J (2005). Os manuais de Matemática: o que deles dizem os professores. In *Atas ProfMat 2005* (pp. 1-18).Lisboa: APM.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

- Krulik, S., & Rudnik, J. (1993). *Reasoning and Problem Solving – A Handbook for Elementary School Teachers*. Massachusetts: Allyn and Bacon.
- Lagarto, M., Andrade, M., & Longle, N. (2006). *O desempenho dos alunos em álgebra no Pisa 2003*. Acedido em 29 de outubro, 2012, de <http://www.eselx.ipl.pt/eselx/downloads/SIEM/C06.pdf>.
- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal* (27), 29-63.
- Lester, F. K. (1980). Research in mathematical problem solving. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 286-323). Reston, VA: NCTM.
- Lin, P. (2004). Supporting teachers on designing problem-posing tasks as a tool of assessment to understand students' mathematical learning. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 257–264).
- Lourenço, A., & Neves, I. (1997). *Modelo de análise de manuais escolares*. Acedido em 30 de setembro, 2012, de http://essa.ie.ul.pt/ficheiros/instrumentos/portugues/2_analise_sociologica_textos_pedagogicos/2.3.caracterizacaodamensagensociologicadelivrosdetexto/2.3.1.pdf.
- Middleton, A. (1995). A study of intrinsic motivation in the mathematics classroom. *Journal for Research in mathematics Education*, 26 (3), 254-279.
- Ministério da Educação (2002). *Programa de Matemática A (10.º, 11.º e 12.º anos)*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.
- National Joint Committee on Learning Disabilities (1998). *Operationalizing the NJCLD definition of learning disabilities for on-going assessment in schools*. Acedido em 2 de dezembro, 2011, de <http://www.ldonline.org/about/partners/njclld/archives>.
- NCTM (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM .
- Nunes, C. C., & Ponte, J. P. (2008). Os projectos de escola e a sua liderança. In GTI (Ed.) *O professor de Matemática e os projectos de escola* . (pp. 11-37). Lisboa: APM.
- OCDE (2003). *The PISA 2003 assessment framework*. Paris: OECD.
- OCDE (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. Paris: OCDE.
- Oliveira, C., & Oliveira, H. (2008). Processos de modelação no ensino profissional: uma tarefa envolvendo funções. In *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 1-16). Lisboa: APM.
- Oliveira, H., Ponte, J., Santos, L., & Brunheira, L. (1999). Os professores e as atividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 97-110), Lisboa: Projecto MPT e APM.

- Oliveira, H., Segurado, I., Ponte, J., & Cunha, M. (1999). Investigações na sala de aula: Um projeto Colaborativo. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 121-132). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Pimentel, T. (1995). *O papel da calculadora gráfica na aprendizagem de conceitos de análise matemática: estudo de uma turma do 11º ano com dificuldades*. Lisboa: APM.
- Polya, G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University.
- Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H., & Varandas, J. M. (1999). Investigando as Aulas de Investigações Matemáticas. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 133-151). Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P., & Marques, S. (2011). Proportion in school mathematics textbooks: A comparative study. *RIPEM*, 1(1), 36-53
- Postic, M., & Ketele, J. (1998). *Observar la situaciones educativas*. Madrid. Narcea
- REIS, F. (2001). Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: *A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos*. Tese de Doutorado em Educação. Campinas: UNICAMP, Brasil.
- Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes, & F. Araújo (Orgs.), *Reorganização Curricular do Ensino Básico. Avaliação das aprendizagens das concepções às práticas* (pp.75-84). Lisboa: Departamento da Educação Básica, Ministério da Educação.
- Saraiva, M., Teixeira, A., & Andrade, J. (2010). *Estudo das funções no programa de Matemática com problemas e tarefas de exploração*. Acedido em 15 de outubro, 2012, de www.apm.pt/files/178672_Segment_001_4d3de4ed6e285.pdf
- Schoenfeld, A. (1989). Ideas in the air: Speculations on small group learning, environmental and cultural influences on cognition, and epistemology. *Internacional Journal of Educational Research*, 13(1), 71-88.

- Silva, A., Veloso, E., Porfírio, J., & Abrantes, P. (1999). O currículo de matemática e as actividades de Investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 69-85) Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Silva, J. C. (s. d.). *O pensamento pedagógico de José Sebastião e Silva – uma primeira abordagem*. Acedido em 28 de agosto, 2012, de <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/sebsilva.html>.
- Silva, J., & Paulo, S. (1968) *Compêndio de Álgebra, 6º e 7º Ano, 3ºCiclo –Ensino Liceal*. Braga: Livraria Cruz.
- Silva, M., & Neves, I. (2006). Compreender a (in)disciplina da sala de aula: uma análise das relações de controlo e de poder. *Revista Portuguesa de Educação*, 19(1), 5-41.
- Silver, E. (1996). Acerca da formulação de problemas de Matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 139-162). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Silvestre, A. & Ponte, J. P. (2008). Tarefas de investigação e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade. *Educação e Cultura Contemporânea*, 5 (10), 61-89.
- Stein, M., & Smith, M. (198). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275.
- Sullivan, P., Mousley, J., & Zevenberg, R. (2005). Teacher actions to maximize mathematics learning opportunities in heterogeneous classrooms. In H. Chik, & L. Vincent (Eds.) *Proceedings of 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp. 117-143). Melbourne: PME.
- Tripathi, P. (2008). Developing Mathematical understanding through multiple representation. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 438-445.
- Tuckman, B. (2000). *Manual de investigação em educação: como conhecer e realizar o processo de investigação em educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Vergnaud G. (1993). Theoretical frameworks and empirical facts in the psychology of mathematics education. In *Proceedings of the International Congress on Mathematical Education* (pp. 39-41). Budapest: ICME.
- Vidigal, L. (1994). *Leitura e manuais escolares em Portugal na 1ª metade do século XX*. Santarém: Escola Superior de Educação.
- Vieira, J. (1999). Ensino Aprendizagem do Conceito de Limite. *Millenium*, 16.

- Viseu, F., Fernandes, A., & Gonçalves, M. (2009). O manual escolar na prática docente do professor de Matemática. In B. D. Silva, I. S. Almeida, A. Barca, & M. Peralbo (Orgs.). *Actas do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia*. Braga: Universidade do Minho, p. (3178-3190).
- Vygotsky, L. S. (2003). A Formação Social da Mente. Acedido em 15 de agosto, 2012, de <http://www.medidacerta.adm.br/p/p13.txt>.
- Wood, T. (2002). What does it mean each mathematics differently? In B. Barton, K. C. Irvin, K. M. Pfannkuch, & M. Thomas (Eds.), *Mathematics Education in the South Pacific. Proc. 25th Conference of the Mathematics Educational Research Group of Australasia* (pp. 61-71). Auckland: MERGA.
- Yeo, J. (2007). *Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment*. Singapore: National Institute of Education, Nanyang Technological University.
- Yeo, J. (2008). Secondary School Students Investigating Mathematics. In M. Goos, R. Brown, & K. Makar (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* MERGA.
- Zabalza, M. (1992). *Planificação e desenvolvimento curricular na escola*. Rio Tinto: Edições Asa.
- Zevenbergen, R. (2000). Cracking the code of mathematics: School success as a function of linguistic, social and cultural background. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 201-223). New York: JAI/ Ablex.

ANEXOS

ANEXO 1 – PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO AO DIRETOR DA ESCOLA

Exma. Sra.

Diretora da Escola Secundária.....

Alberto Eduardo Araújo rodrigues dias, aluno de Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade do Minho, encontro-me a realizar o estágio pedagógico na Escola..... No âmbito das atividades de estágio faz parte o desenvolvimento de um Relatório sobre a minha prática pedagógica, com características investigativas. O tema que orientará a minha ação pedagógica intitula-se “A natureza das tarefas matemáticas e o envolvimento dos alunos nas atividades da sala de aula: um estudo com alunos do 11º ano no tema derivada de uma função”. Para poder desenvolver o meu relatório preciso de recolher dados através de diferentes métodos. Para usar um desses métodos, gravação de aulas em vídeo, preciso da autorização da V. Ex.^a. Comprometo-me a usar os dados só para fins académicos, assim como me comprometo a não divulgar o nome da escola ou dos alunos. Todos os dados serão confidenciais e só serão usados para evidenciar a experiência de ensino que pretendo realizar, assim como problematizar as estratégias de ensino que forem delineadas. Em causa está, sobretudo, a aprendizagem dos alunos e a minha formação a partir da minha própria prática.

Depois de obter a autorização de V. Ex.^a pretendo pedir aos Encarregados de Educação autorização para a recolha de registos audiovisuais durante as aulas, informando-os do objetivo de meu estudo e do meu compromisso em manter o anonimato dos alunos e da escola.

Agradeço a Atenção dispensada.

Com os meus cumprimentos:

(Alberto Eduardo Araújo Rodrigues Dias)

ANEXO 2 – PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO AOS ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO

Exmo (a). Sr (a) Encarregado (a) de Educação

Alberto Eduardo Araújo rodrigues dias, aluno de Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade do Minho, encontro-me a realizar o estágio pedagógico na Escola..... No âmbito das atividades de estágio faz parte o desenvolvimento de um Relatório sobre a minha prática pedagógica, com características investigativas. O tema que orientará a minha ação pedagógica intitula-se "*A natureza das tarefas matemáticas e o envolvimento dos alunos nas atividades da sala de aula: um estudo com alunos do 11º ano no tema derivada de uma função*". Para poder desenvolver o meu relatório preciso de recolher dados através de diferentes métodos. Para usar um desses métodos, gravação de aulas em vídeo, preciso da autorização da V. Exª. Comprometo-me a usar os dados só para fins académicos, assim como me comprometo a não divulgar o nome da escola ou dos alunos. Todos os dados serão confidenciais e só serão usados para evidenciar a experiência de ensino que pretendo realizar, assim como problematizar as estratégias de ensino que forem delineadas. Em causa está, sobretudo, a aprendizagem dos alunos e a minha formação a partir da minha própria prática.

Agradeço a Atenção dispensada. O responsável pelo trabalho de projeto,

Alberto Eduardo Araújo Rodrigues Dias

Autorização

Eu, _____,

Encarregado do(a) aluno(a), _____

Autorizo a sua participação no estudo de investigação na área de Matemática com o tema "*A natureza das tarefas matemáticas e o envolvimento dos alunos nas atividades da sala de aula: um estudo com alunos do 11º ano no tema derivada de uma função*".

O Encarregado(a) de Educação

ANEXO 3 – QUESTIONÁRIO AOS PROFESSORES

O presente questionário integra-se num estudo académico. Solicito-lhe que responda consoante a sua opinião e prática pedagógica. O anonimato será garantido e toda a informação recolhida é estritamente confidencial. O seu objetivo é obter dados que permitam conhecer as percepções sobre a aplicação de diferentes tarefas na aula de Matemática.

Tempo de Serviço docente (em anos): _____ Anos que leciona atualmente: _____

Tarefas e Métodos:

Quais os tipos de tarefas matemáticas costumam de realizar nas aulas?

Coloque por ordem de utilização de 1 a 5: 1 para o que usa menos até 5 para o que usa mais.

Exercício ___

Tarefa de Modelação ___

Problema ___

Investigação ___

Explorações matemáticas ___

Costuma aplicar tarefas para introduzir um tema/ tópico de ensino, ou costuma partir da teoria para a prática?

Sim ___

Não ___

Indique três características que considerem essenciais numa tarefa que se propõe aos alunos?

Costuma utilizar o trabalho de grupo com os alunos? _____

Indique o nível de utilização sendo 1 nunca ou quase nunca e 5 sempre ou quase sempre. _____

Grupos de quantos elementos? _____

Se respondeu 1 ou 2 indique o motivo _____

Manual

Qual o seu grau de utilização do manual na sua prática letiva. Em que situações e qual o papel que lhe atribui? Indique o nível de utilização sendo 1 nunca ou quase nunca e 5 sempre ou quase sempre _____

Tendo em conta a sua prática considera que o/s livro/s adotado/s por esta escola seriam a sua primeira escolha? _____

Considera que os exercícios do manual são adequados para a preparação para os exames nacionais?

Explique porquê.

ANEXO 4 - QUESTIONÁRIO AOS ALUNOS DA TURMA

O presente questionário integra-se num estudo académico. Solicito que respondas conforme a tua opinião acerca da disciplina e dos métodos que utilizas. O anonimato será garantido e toda a informação recolhida é restritamente confidencial.

SEXO: _____

Disciplina e hábitos de trabalho

Qual a tua disciplina preferida? Porquê?

Achas que a matemática é necessária? Para que serve a matemática?

Quando comparada com outras disciplinas, consideras que a dificuldade que tens nesta disciplina é **menor, igual** ou **maior**? Explica porquê.

Indica o que gostas mais de realizar nas aulas de Matemática. Dá dois exemplos.

Indica o que gostas menos de realizar nas aulas de Matemática. Dá dois exemplos.

Como seria para ti uma boa aula de Matemática?

Manual

Consegues identificar diferentes tipos de tarefas no teu manual? Quais?

Costumas estudar por outros manuais? Encontras alguma diferença que aches importante?

Em relação ao teu livro quais são as tarefas que gostas mais de resolver: as que aparecem na margem ou as centrais. Explica porquê.

Achas que as tarefas da margem do livro e as tarefas centrais são resolvidas da mesma maneira?

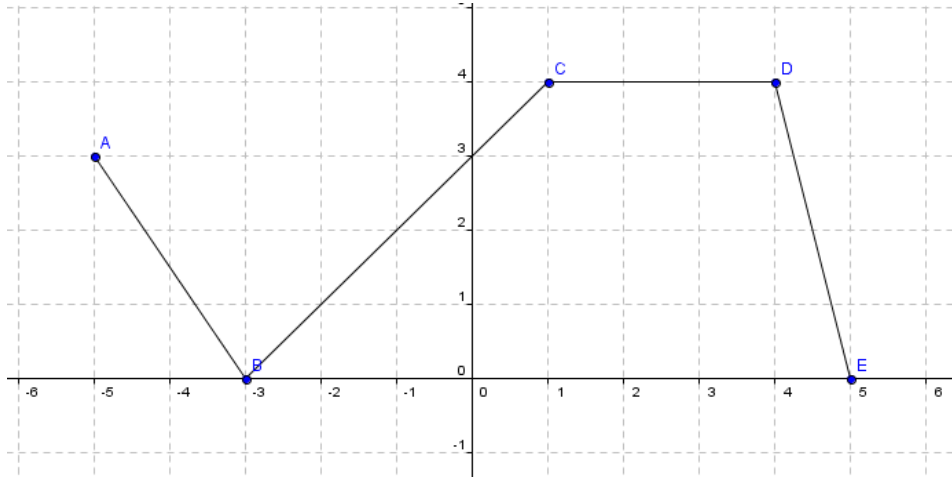
Gostas mais de trabalhar em grupo ou individualmente? Porquê?

Se não porquê?

(Indica vantagens ou desvantagens que consideres importantes)

ANEXO 5 - FICHA DE TRABALHO

1. Considera a função p de domínio $[-5, 5]$ e contradomínio $[0, 4]$, representada graficamente no seguinte referencial.



1.1. Calcula a taxa média de variação de p em cada um dos intervalos seguintes:

$$[-5, 4]$$

$$[-2, 0]$$

$$[-1, 2]$$

1.2. Indica um intervalo do domínio de p , em que:

A taxa média de variação seja nula,

A taxa média de variação seja nula e a variação da função p não seja constante.

A taxa de variação média seja positiva e p não seja crescente.

1.3. Indica, caso exista, um intervalo em que:

A **t. m. v** seja 1.

A **t. m. v** seja -5.

A **t. m. v** seja -1.

Transcreve o teu raciocínio em cada um dos 3 casos.

2. Sejam f e g as funções reais definidas por:

$$f(x) = \frac{1-x}{2x} \qquad g(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

2.1. Indica o domínio de cada uma das funções.

2.2. Estuda as funções quanto aos zeros e existência de assintotas, sinal e variação.

2.3. Calcula a taxa média de variação para ambas as funções num intervalo de extremos negativos e noutro intervalo de extremos positivos. Que relação existe entre a taxa média de variação e a monotonia da função.

3. Considera a função $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$.

Completa a tabela considerando diferentes intervalos contidos nos intervalos apresentados abaixo. Em seguida calcula o sinal da taxa média de variação.

x] -∞, -1[] -1, 1[] 1, +∞[
Intervalos							
Sinal <i>T. m. v[a, b]</i>							

Determina o gráfico de f e copia-o para uma folha de papel. Com a ajuda de uma régua traça as retas tangentes ao gráfico nos pontos $\{-7; -3; -1; -0,5; 0; 0,5; 1; 2; 7\}$. Em seguida compara os declives dessas retas com os valores da $t. m. v$ que se obtêm nesse intervalo. Que podes concluir?

ANEXO 6 – TAREFA DA AULA 8

Resolva as alíneas propostas na ficha em grupos de 4 elementos.
Todas as ideias de resolução deverão ser anotadas e exploradas.
Os exercícios serão corrigidos no quadro por um dos elementos do grupo

1. Na figura seguinte o quadrilátero $[ABCD]$ é um losango em que:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$$

$$\overline{AC} = 18$$

$[GFIH]$ é um rectângulo

Imagine que o ponto I se move ao longo de $[A, D]$ e seja $2x$ a distância entre G e I .

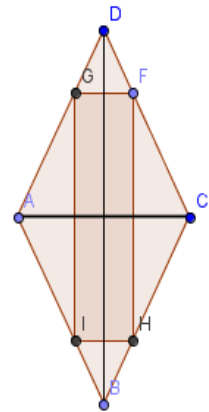
1.1. Entre que valores pode variar o x ?

1.2. Exprima a área do retângulo $[GFIH]$ em função de x .

1.3. Mostre que a área exterior ao retângulo é dada pela expressão

$$3x^2 - 32x + 216.$$

1.4. Utilizando as capacidades da tua calculadora determina o valor de x para o qual se obtém uma área sombreada mínima.



Bom trabalho!

ANEXO 7 - FICHA DE TRABALHO AULA 9

Tarefa de Grupo:

Certo dia, um comerciante verificou que a água da chuva que caía dos telhados era responsável por molhar as pessoas que passeavam pela rua. Na sua loja, vendia folhas metálicas retangulares de 30 cm de largura e deduziu que uma boa forma de resolver o problema seria utilizar essas folhas metálicas para construir calhas de formato de um U para recolher as águas vindas dos telhados.

- 1 - Constrói através de uma folha de papel um esquema representativo do caleiro que aches que recolha o máximo de água possível.
- 2 - Através de uma régua mede as dimensões laterais grupo e descobre a sua área interior.
- 3 - Indica uma expressão, $A(x)$ que determina a área interior do caleiro. De seguida representa-a graficamente.
- 4 - Calcula a função derivada $A'(x)$ e os pontos onde se anula.
- 5 - Utilizando as capacidades da tua calculadora uma tabela de sinais para $A'(x)$ e uma tabela de monotonia para $A(x)$. Compara as duas tabelas. O que concluis?

Trabalho de casa

- 1 - Determina analiticamente os intervalos de monotonia e os extremos das seguintes funções:

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$g(x) = |x + 1|$$

- 2 - A rapidez com que um boato se espalha numa comunidade é proporcional ao produto do número de pessoas que já ouviram o boato pelo número de pessoas que ainda não o ouviram. Mostre que a rapidez é máxima no instante em que metade das pessoas ainda não ouviu o boato.

Bom trabalho!

ANEXO 8 - FICHA DE TRABALHO AULA 10

Tarefa de grupo

Numa folha de papel quadriculado elabora um gráfico cartesiano. Em seguida recorta um quadrilátero de uma folha de papel com tamanho aceitável de modo a que seja possível inferir, após ser colocado num ponto à tua escolha do gráfico desenhado anteriormente, valores aproximados para os seus vértices. Recorre à tua calculadora gráfica obtém uma expressão analítica de uma função cúbica que passa nos pontos encontrados.

Elaborem 5 questões de aplicação para a expressão encontrada.

Regras para as questões:

1. Terão que contemplar os tópicos abordados nas últimas aulas: t.m.v, função derivada, derivada de uma função num ponto, estudo da monotonia, máximos e mínimos etc. (O manual e o caderno poderão ser uma grande ajuda.)
2. Todos os elementos do grupo têm que saber resolver as questões formuladas e participar na sua construção.
3. O interesse passa por conseguir elaborar questões com algum grau de dificuldade pois o desafio seguinte será propor aos restantes grupos a resolução das vossas questões.
4. Obviamente que nem todas as questões serão corrigidas mas o grupo ou grupos com as questões mais interessantes terão a oportunidade de explicar à turma como elaborou e pensou nas questões.

Bom trabalho

ANEXO 9 – QUESTÕES SOLTAS FORMULADAS DURANTE A PRÁTICA

Aula	'Questão solta'
Aula 2	Para que servem os conhecimentos aprendidos na aula de hoje? Indica uma aplicação para a vida real desses conhecimentos.
Aula 3	Gostaram mais da atividade em pares da aula anterior ou desta aula? Porquê?
Aula 4	Porque acham uma das tarefas foi feita em grupo e a outra não? Justifiquem a vossa resposta.
Aula 8	Para que servem os conhecimentos aprendidos na aula de hoje? Indica uma aplicação para a vida real desses conhecimentos.
Aula 10	Quais são os benefícios da resolução das tarefas em grupo para a tua aprendizagem? E inconvenientes?