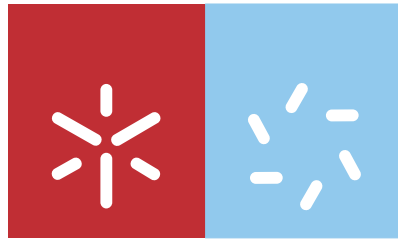


Universidade do Minho
Escola de Ciências

Helena Isabel Ribeiro Lages Costa Teixeira

**Estudo de Propriedades de
Curvas Rectificáveis**



Universidade do Minho
Escola de Ciências

Helena Isabel Ribeiro Lages Costa Teixeira

Estudo de Propriedades de Curvas Rectificáveis

Mestrado em Matemática - Formação Contínua de Professores

Trabalho efectuado sob a orientação da
Professora Doutora Lisa Santos

DECLARAÇÃO

Nome: Helena Isabel Teixeira

Endereço electrónico: helenaisabelteixeira@gmail.com

Número do Bilhete de Identidade: 9822158

Título da dissertação/tese - Estudo de Propriedades de Curvas Rectificáveis

Orientadora: Professora Doutora Lisa Santos

Ano de conclusão: 2011

Designação do Mestrado: Mestrado em Matemática - Formação Contínua de Professores

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTEGRAL DESTA TESE/TRABALHO APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE.

Universidade do Minho, 28/01/2011

Assinatura: _____

Agradecimentos

Esta nota é dedicada a todos aqueles que, de alguma forma deram a sua contribuição para que esta dissertação fosse realizada. A todos eles deixo aqui o meu agradecimento sincero.

Em primeiro lugar, agradeço à Prof. Dra. Lisa Santos a forma como orientou o projecto. Obrigada pelo apoio tanto científico como técnico, pela paciência e pelas sugestões sempre oportunas.

À minha família e amigos, pelo incentivo, apoio e amizade. Foram fundamentais para ultrapassar os obstáculos que foram surgindo ao longo do caminho.

Finalmente, ao meu marido e filhos, por estarem sempre presentes e pela tranquilidade com que me transmitiram incentivo e apoio incondicional. Apesar de insistentemente, me lembrarem que a vida não é só trabalho, sempre mostraram paciência, carinho e compreensão!

Resumo

Esta dissertação tem como objectivo fazer um estudo de propriedades de curvas contínuas, sendo este restrito a curvas simples e rectificáveis.

Os conhecimentos necessários para o desenvolvimento do trabalho são alguns conceitos em espaços métricos, noções sobre convexos em \mathbb{R}^2 , a definição e alguns resultados sobre medida zero.

O primeiro capítulo introduz algumas noções preliminares necessárias aos capítulos subsequentes. No segundo capítulo aparece a noção de curva simples no plano. Com o intuito de definir o comprimento de curvas rectificáveis, apresenta-se a definição de distância de Hausdorff. Introduzem-se também as noções de parametrização pelo comprimento de arco e por velocidade instantânea. O terceiro capítulo é dedicado ao conjunto de Cantor e estabelecem-se algumas propriedades deste. São ainda abordadas a função Escada do Diabo e a Curva de Peano, um exemplo célebre duma curva que preenche o quadrado. No capítulo quatro estuda-se a geometria local das curvas rectificáveis estabelecendo relações entre propriedades. No último capítulo estabelece-se uma relação entre o comprimento duma curva e a área da salsicha- ε de Minkowski da curva, quando ε tende para zero.

Em anexo apresentam-se breves notas biográficas relativas a Cantor, Hausdorff, Lebesgue, Minkowski, Peano e Weierstrass assim como uma actividade de investigação dirigida a alunos de 12º ano com o intuito de realizarem um desafio no contexto da aplicação das propriedades que estudámos para curvas rectificáveis.

Abstract

The purpose of this dissertation is to present a study of properties of continuous curves. This study is restricted to simple and rectifiable curves.

The necessary knowledge to develop this work are some concepts about metric spaces, notions about convex sets of \mathbb{R}^2 , the definition and some results about zero measure sets.

The first chapter introduces some preliminary notions necessary to the subsequent chapters. The second chapter presents the notion of a simple curve in the plane. In order to define the length of rectifiable curves, it is introduced the Hausdorff distance's definition. The ideas of arc length's parametrization and parametrization by instantaneous velocity are also presented. The third chapter is dedicated to the Cantor set and some properties of this set are established. It is also defined the Devil's Staircase and the Peano Curve, a famous example of a curve that fills a square. In chapter four we study the local geometry of rectifiable curves establishing relationships among properties. In the last chapter it is proved a relation between the length of a curve and the area of the Minkowski's ε -sausage of a curve, when ε tends to zero.

In the annex we present biographical notes on Cantor, Hausdorff, Minkowski, Lebesgue Peano and Weierstrass and also a mathematical task applied to high school students who aim to work with challenges. This activity appears in a context where they can test the properties that we studied for rectifiable curves.

Conteúdo

1	Preliminares	1
1.1	Algumas noções métricas	1
1.2	Breve referência a subconjuntos convexos de \mathbb{R}^2	6
2	Curvas no plano	11
2.1	Definição de curva	12
2.2	Rectificabilidade	15
2.3	Distância de Hausdorff	16
2.4	Aproximações por curvas poligonais	21
2.5	Comprimento de uma curva rectificável	23
2.6	Dois exemplos	28
2.7	Parametrização pelo comprimento de arco	30
2.8	Medida da imagem	31
2.9	Comprimento por velocidade instantânea	32
3	Conjunto de Cantor	35
3.1	Construção do conjunto ternário	36
3.2	Propriedades do Conjunto de Cantor	37
3.3	A Função de Cantor e a Escada do Diabo	40
3.4	A Curva de Peano	45

4 Geometria local de curvas rectificáveis	49
4.1 Tangente, cone, comprimento de arco e envolvente convexa	49
4.2 Relações entre as propriedades locais	53
5 Comprimento através da área de bolas centradas	63
5.1 Salsicha de Minkowski	63
5.2 Comprimento através da área da salsicha	65
Anexo I	75
Biografia de Cantor	75
Biografia de Hausdorff	81
Biografia de Lebesgue	85
Biografia de Minkowski	89
Biografia de Peano	93
Biografia de Weierstrass	97
Anexo II	103
Actividade de investigação	103
Conclusão	113
Bibliografia	115

Lista de Figuras

1.1	Discos de centro em zero e raio r , em \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, 3$, para a distância usual.	2
1.2	Um conjunto A não convexo.	6
1.3	Envolvente convexa de A	7
1.4	Largura perpendicular a um diâmetro de K	8
1.5	K inscrito num paralelogramo.	8
1.6	Envolvente convexa duma curva Γ	9
2.1	Parametrização γ de um arco \widehat{AB}	13
2.2	O gráfico da função de Weierstrass é um exemplo de um fractal. . .	15
2.3	Distância usual e de Hausdorff entre dois conjuntos.	17
2.4	Distância de Hausdorff usando a salsicha de Minkowski.	18
2.5	O comprimento $L(S)$ é maior que $L(S_1) + L(S_2) - 2\rho_N$	25
2.6	O comprimento de $L(S)$ é maior que $L(S_1) + L(S_2) + L(S_3) - 4\rho_N$	25
2.7	Substituição do segmento S pela aproximação poligonal Q_S	26
2.8	Curva de comprimento local finito (excepto no 0), cujo comprimento total é infinito.	27
2.9	$L(S_k)$ é maior que o perímetro da circunferência de centro em $(0, 0)$ e raio $\frac{1}{k+1}$	28
2.10	Construção da sucessão das curvas poligonais $P_1 = ACB$, $P_2 = ADEFB, \dots$, todas de comprimento 2.	29

3.1	Primeiros passos na construção do Conjunto de Cantor.	36
3.2	Gráfico da Escada do Diabo.	41
3.3	A Escada do Diabo como limite duma sucessão de aproximações poligonais.	44
3.4	Primeira iteração duma curva de Peano.	46
4.1	Limite de uma corda $T(x_0, x)$	50
4.2	Numa vizinhança de x_0 , a curva está incluída num cone de vértice x_0 e ângulo θ_ε	51
4.3	Secantes a tender para a tangente em x_0	52
4.4	Envolvente convexa de um arco $\widehat{x_0x}$	52
4.5	A corda $T(x_0, x)$ está contida num cone à direita de vértice x_0	53
4.6	A corda $T(x_0, x)$ tende para a tangente no ponto x_0	54
4.7	O gráfico da função $z(t) = t^{\frac{3}{4}} + t^{\frac{1}{4}}(1 + \cos \frac{1}{t})$ está enquadrado entre os gráficos de $t^{\frac{3}{4}}$ e $t^{\frac{3}{4}} + 2t^{\frac{1}{4}}$	55
4.8	Gráfico de $z(t) = t^2 \cos \frac{1}{t^2}$	58
4.9	$z(t) = t \cos(\log(\log(\frac{2}{t})))$	59
5.1	A área da ε -salsicha de Minkowski da curva Γ que passa pelos pontos A e B é maior que $2\varepsilon d(A, B) + \pi\varepsilon^2$	64
5.2	Os ângulos $\angle(A_i x_i, S_i)$ e $\angle(B_i x_i, S_i)$ são menores que θ	66
5.3	Na vizinhança do ponto x_i que pertence ao arco $\widehat{A_i B_i}$ de comprimento r , construímos o rectângulo C_i	67
5.4	Distância de um ponto da corda S_i a Γ_i é menor que $\theta L(S_i)$	67
5.5	Distância de um ponto da corda C_i a Γ_i é menor que $r(1 + \theta)$	68
5.6	Rectângulos C_i e C_k consecutivos.	68
5.7	A curva está coberta por rectângulos C_i	69
5.8	Parte da salsicha de Minkowski de Γ_i^*	71
5.9	Trajectória curvilínea descrita por um patim sobre uma pista de gelo.	104

5.10 O ponto B aproxima-se de A através de rectas secantes à trajectória. 104

5.11 A aceleração é um vector que aponta para dentro da curva. 105

5.12 Movimento circular de um avião que descreve uma trajectória de raio R no plano XOY 105

5.13 O vector posição da partícula faz um ângulo θ_0 com o eixo dos xx , no instante $t = 0's$ e um ângulo θ no instante t 106

5.14 Trajectória da curva. 107

5.15 As primeiras 4 aproximações poligonais uniformes. 108

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo destina-se a recordar algumas definições em espaços métricos, certas propriedades de subconjuntos convexos de \mathbb{R}^n , algumas noções sobre medida nula e também fixar notações que irão ser usadas ao longo do trabalho.

1.1 Algumas noções métricas

Definição 1.1.1. *Uma **métrica** num conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par de elementos $(x, y) \in M \times M$ um número real $d(x, y)$, chamado a **distância de x a y** , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para todo $x, y, z \in M$:*

- i. $d(x, x) = 0$;*
- ii. se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;*
- iii. $d(x, y) = d(y, x)$;*
- iv. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.*

Um **espaço métrico** (e.m.) é um par (M, d) , onde M é um conjunto e d é uma métrica ou distância nesse conjunto.

Vejamos alguns exemplos de espaços métricos:

Exemplo 1.1.1. A recta real munida da distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = |x - y|$ é um espaço métrico. Esta é a **métrica usual** da recta real.

Consideremos o espaço euclidiano \mathbb{R}^n . A **distância** entre dois pontos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de \mathbb{R}^n é dada por $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$.

Nota 1.1.1. A distância usual entre x e y quaisquer de \mathbb{R}^n denotar-se-á quer por $d(x, y)$, por $\|x - y\|$ ou ainda \overline{xy} .

Noções importantes no estudo dos espaços métricos são as noções de **bola** e de **disco**.

Definição 1.1.2. Seja (X, d) um espaço métrico e $x_0 \in X$. Define-se **bola aberta**, $B(x_0, r)$, e **bola fechada** (ou **disco**) de centro em x_0 e raio r , $D(x_0, r)$, respectivamente, como o conjunto

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

$$D(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}.$$

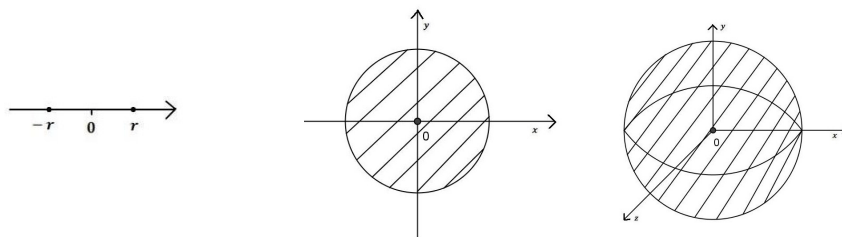


Figura 1.1: Discos de centro em zero e raio r , em \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, 3$, para a distância usual.

Apresentamos agora algumas definições e listamos alguns resultados nas notas seguintes:

Definição 1.1.3. *Seja A um subconjunto dum e.m. (X, d) .*

$$x_0 \in \overset{\circ}{A} \text{ (interior de } A) \iff \exists r > 0 \quad B(x_0, r) \subseteq A;$$

$$x_0 \in \overline{A} \text{ (aderência de } A) \iff \forall r > 0 \quad B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset;$$

$$x_0 \in A' \text{ (derivado de } A) \iff \forall r > 0 \quad B(x_0, r) \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset;$$

x_0 é ponto isolado de A se $x_0 \in A \setminus A'$;

$$A \text{ aberto} \iff \overset{\circ}{A} = A;$$

$$A \text{ fechado} \iff \overline{A} = A;$$

$$A \text{ limitado} \iff \exists x_0 \in X \quad \exists r > 0 \quad A \subseteq B(x_0, r).$$

O derivado de A também é designado por conjunto dos pontos de acumulação de A .

Definição 1.1.4. *Define-se **diâmetro** de A como $\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.*

Note-se que $\delta(A)$ é finito se e só se A é limitado.

Nota 1.1.2. *Se A é um subconjunto de \mathbb{R}^n , munido da métrica usual, então*

$$A \text{ aberto} \iff \mathbb{R}^n \setminus A \text{ fechado};$$

$$A \text{ fechado} \iff \mathbb{R}^n \setminus A \text{ aberto};$$

$$A \text{ fechado} \iff \forall (x_n)_n \text{ sucessão convergente de elementos de } A, \lim_n x_n \in A.$$

Definição 1.1.5. *Seja (X, d) um e.m..*

*Uma família de subconjuntos de X , $(W_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, diz-se uma **cobertura** de X se $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} W_\alpha = X$. Uma subfamília de $(W_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, designada por $(W_\beta)_{\beta \in \Lambda'}$, $\Lambda' \subseteq \Lambda$*

*diz-se uma **subcobertura** de X se $\bigcup_{\beta \in \Lambda'} W_\beta = X$.*

*Diz-se que (X, d) é **compacto** se toda a cobertura aberta de X (i. e., constituída por subconjuntos abertos) admite uma subcobertura finita.*

Nota 1.1.3. Em \mathbb{R}^n , munido da métrica usual, os subconjuntos compactos são os fechados limitados.

Definição 1.1.6. Um e. m. (X, d) diz-se **perfeito** se todos os pontos de X forem pontos de acumulação (i.e., $X' = X$).

Definição 1.1.7. Um e.m. (X, d) diz-se **conexo** se os únicos subconjuntos abertos fechados de X são \emptyset e X .

Definição 1.1.8. Seja (X, d) um e.m.. Dado $x_0 \in X$ define-se a **componente conexa de x_0** , denotada por C_{x_0} , como o maior subconjunto (no sentido de inclusão) conexo de X que contém x_0 . X diz-se **totalmente desconexo** se $C_x = \{x\}$, para todo o $x \in X$.

Definição 1.1.9. Dados (X, d) e (Y, D) e.m., uma função $f : X \rightarrow Y$ diz-se um **homeomorfismo** se f for uma função bijectiva, contínua e tal que f^{-1} é contínua.

Definição 1.1.10. Um e.m. (X, d) diz-se **homogéneo** se para todo o $x, y \in X$ existe $f : X \rightarrow Y$ homeomorfismo tal que $f(x) = y$.

Definição 1.1.11. Um e.m. (X, d) diz-se um **continuum** se X for compacto e conexo.

Definição 1.1.12. Diz-se que um subconjunto A de \mathbb{R}^n tem **medida zero** (ou **nula**) se para todo ε maior que zero, existe $(a_k)_k$ sucessão de elementos de A e existe $(r_k)_k$ sucessão de números positivos tais que

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B(a_k, r_k) \quad e \quad \sum_{k=1}^{\infty} |B(a_k, r_k)| < \varepsilon,$$

denotando $|B(a_k, r_k)|$ o **volume** da bola de centro em a_k e raio r_k , isto é, $\int_{B(a_k, r_k)} 1$.

Proposição 1.1.1. A união numerável de conjuntos de medida zero tem medida zero.

Exemplo 1.1.2. \mathbb{Q} tem medida zero.

Começemos por observar que um subconjunto singular de \mathbb{R} tem medida zero. Como \mathbb{Q} é numerável, então \mathbb{Q} é uma união numerável de conjuntos singulares.

Definição 1.1.13. Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Diz-se que uma propriedade é verificada **quase sempre** em X (ou para quase todo o $x \in X$) se o conjunto dos pontos de X onde a propriedade não é verificada tem medida zero.

Exemplo 1.1.3. Considere-se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

A função f é igual à função constante igual a 1 *quase sempre*.

Definição 1.1.14. Sejam $(X, d), (Y, D)$ e.m. e $f: X \rightarrow Y$ uma função. Diz-se que f é **uniformemente contínua** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in X \quad d(x, x') < \delta \implies D(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

É conhecido que uma função uniformemente contínua é contínua e que o recíproco não é verdadeiro. No entanto, o seguinte teorema apresenta uma condição suficiente para que ambas as definições sejam equivalentes.

Teorema 1.1.1 (Cantor). Sejam (X, d) e.m. compacto, (Y, D) e.m. e $f: X \rightarrow Y$ uma função contínua. Então f é uniformemente contínua.

Definição 1.1.15. Dados um espaço métrico (X, d) , uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X$ define-se **limite superior de f** quando $x \rightarrow a$ do seguinte modo:

$$\limsup_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup \{ f(x) : x \in B(a, \varepsilon) \setminus \{a\} \} \right).$$

Analogamente se define **limite inferior de f** quando $x \rightarrow a$,

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\inf \{ f(x) : x \in B(a, \varepsilon) \setminus \{a\} \} \right).$$

Facilmente se mostra que $\liminf_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\limsup_{x \rightarrow a} f(x)$ existem sempre e que

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow a} f(x).$$

Além disso, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe então

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \limsup_{x \rightarrow a} f(x).$$

1.2 Breve referência a subconjuntos convexos de \mathbb{R}^2

Definição 1.2.1. *Seja A um subconjunto de \mathbb{R}^2 . Diz-se que A é **convexo** se para todo o $x, y \in A$ e todo o $\lambda \in [0, 1]$ se tem $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$. Por outras palavras, cada ponto do segmento de recta que liga x a y pertence a A .*

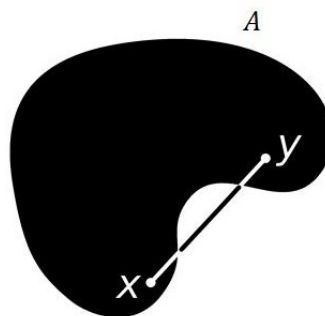


Figura 1.2: Um conjunto A não convexo.

Definição 1.2.2. *A **envolvente convexa** dum subconjunto A de \mathbb{R}^2 é o menor subconjunto (no sentido de inclusão) convexo de \mathbb{R}^2 que contém A . Denota-se a envolvente convexa de A por $\mathcal{K}(A)$.*

O conjunto $\mathcal{K}(A)$:

- i. é convexo;
- ii. é o menor convexo que contém A ;
- iii. é a intersecção de todos os convexos que contém A .

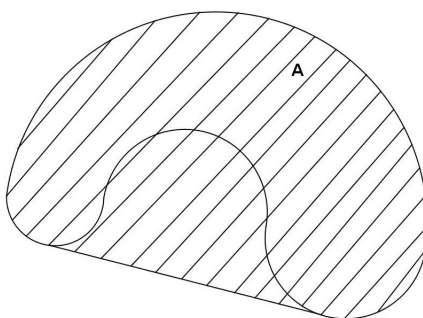


Figura 1.3: Envoltura convexa de A .

Mostra-se que

$$\mathcal{K}(A) = \{ \lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1], x, y \in A \}.$$

Mostra-se também que

$$\delta(A) = \delta(\mathcal{K}(A)).$$

Os subconjuntos convexos de \mathbb{R} são os intervalos. Por exemplo, como subconjuntos convexos de \mathbb{R}^2 temos os polígonos regulares e de \mathbb{R}^3 temos os sólidos de Arquimedes e os platónicos.

Nota 1.2.1. Designamos o volume de um subconjunto K de \mathbb{R}^2 por **área** e denotamo-la por $\mathcal{A}(K)$.

Definição 1.2.3. Dado um diâmetro de um convexo K de \mathbb{R}^2 define-se **largura perpendicular ao diâmetro** como a menor distância entre duas rectas paralelas a esse diâmetro que contêm K na faixa por elas definidas. Esta distância denota-se por $L^\perp(K)$.

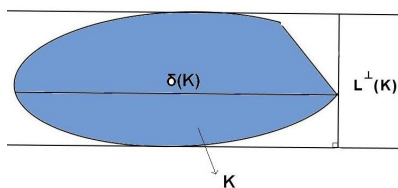


Figura 1.4: Largura perpendicular a um diâmetro de K .

Proposição 1.2.1. *Seja Γ uma curva¹ simples no plano, A e B os seus extremos. Então $\mathcal{A}(\mathcal{K}(\Gamma)) \leq L(\Gamma)^{\frac{3}{2}} \sqrt{L(\Gamma) - d(A, B)}$, denotando $L(\Gamma)$ o comprimento da curva Γ .*

Demonstração: É evidente que

$$\mathcal{A}(\mathcal{K}(\Gamma)) \leq \delta(\mathcal{K}(\Gamma))L^\perp(\mathcal{K}(\Gamma)). \quad (1.1)$$

Seja K um convexo limitado de \mathbb{R}^2 e considere-se um diâmetro de K (isto é, um segmento $[PQ]$ tal que P e Q pertencem a ∂K e $\overline{PQ} = \delta(K)$).

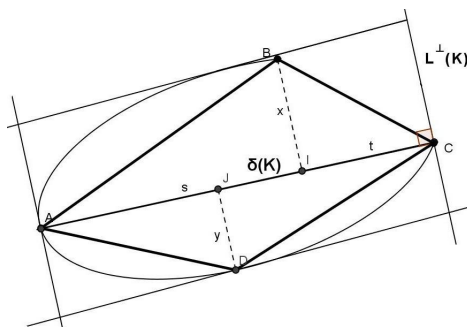


Figura 1.5: K inscrito num paralelogramo.

Os pontos A, B, C, D marcados na figura acima são pontos de contacto do paralelogramo com K .

¹A definição de curva será introduzida na Secção 2.1.

Denotando $h_1 = \delta(K) = \overline{AC}$ e $h_2 = L^\perp(K) = \overline{BI} + \overline{JD}$ e por ∂K a fronteira de K , sendo $x = \overline{BI}$, $y = \overline{DJ}$, $s = \overline{AJ}$, $t = \overline{CI}$ e, conseqüentemente $s + t \leq h_1$ e $x + y = h_2$, tem-se

$$L(\partial K) \geq \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$$

e então

$$L(\partial K) \geq ((h_1 - t)^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + (x^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} + (y^2 + (h_1 - s)^2)^{\frac{1}{2}} + (s^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = f(x, y, s, t).$$

Pode verificar-se que o mínimo de f é atingido quando $s = t = \frac{h_1}{2}$ e $x = y = \frac{h_2}{2}$.
Então

$$L(\partial K) \geq 2\sqrt{h_1^2 + h_2^2},$$

ou seja,

$$L(\partial K) \geq 2\sqrt{\delta(K)^2 + L^\perp(K)^2}. \quad (1.2)$$

Dada uma curva simples Γ , com extremidades A e B , é fácil perceber que, se $\mathcal{K}(\Gamma)$ denota a envolvente convexa de Γ e $\partial\mathcal{K}(\Gamma)$ a fronteira dessa envolvente convexa, então

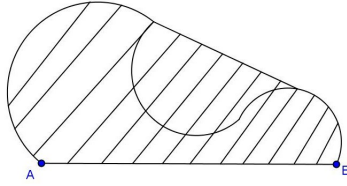


Figura 1.6: Envolveinte convexa duma curva Γ .

$$L(\partial\mathcal{K}(\Gamma)) \leq L(\Gamma) + d(A, B).$$

pelo que, por (1.2),

$$2(\delta(\mathcal{K}(\Gamma))^2 + L^\perp(\mathcal{K}(\Gamma))^2)^{\frac{1}{2}} \leq L(\partial\mathcal{K}(\Gamma)) \leq L(\Gamma) + d(A, B).$$

Assim,

$$4\delta^2(\Gamma) + 4L^\perp(\mathcal{K}(\Gamma))^2 \leq (L(\Gamma) + d(A, B))^2$$

donde

$$\begin{aligned} L^\perp(\mathcal{K}(\Gamma))^2 &\leq \left(\frac{L(\Gamma) + d(A, B)}{2}\right)^2 - \delta^2(\Gamma) \\ &= \left(\frac{L(\Gamma) + d(A, B)}{2} - \delta(\Gamma)\right) \left(\frac{L(\Gamma) + d(A, B)}{2} + \delta(\Gamma)\right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Mas, como $d(A, B) \leq \delta(\Gamma) \leq L(\Gamma)$, usando estas relações em (1.3), concluimos que

$$L^\perp(\mathcal{K}(\Gamma))^2 \leq \frac{L(\Gamma) - d(A, B)}{2} 2L(\Gamma).$$

Então

$$L^\perp(\mathcal{K}(\Gamma)) \leq \sqrt{L(\Gamma)}\sqrt{L(\Gamma) - d(A, B)},$$

donde, por (1.1), se conclui o resultado. □

Capítulo 2

Curvas no plano

O conceito de curva simples no plano tenta captar a ideia intuitiva de um objecto geométrico unidimensional que percorre continuamente uma linha, embora este conceito inclua trajectórias que podem não ser chamadas de curvas no uso comum, como por exemplo, a imagem (ou traço) de uma curva que cobre o quadrado no plano (apresentaremos mais à frente um exemplo, a conhecida curva de Peano).

Apesar de introduzirmos a noção de curva com traço em $\mathbb{R}^n (n = 2, 3)$, ao longo do trabalho, referir-nos-emos sempre a curvas no plano.

Neste capítulo veremos a noção de curva caracterizada como uma função contínua, introduziremos a definição de curva simples ou arco de Jordan.

Definiremos curva rectificável e estudaremos o conceito de distância entre conjuntos. Para determinarmos uma distância entre dois conjuntos, vamos utilizar duas definições equivalentes da distância de Hausdorff, a usual e a definida através da salsicha de Minkowski.

Abordaremos o conceito de aproximação de uma curva por uma sucessão de curvas poligonais, o que nos permitirá introduzir a noção de comprimento de uma

curva contínua.

Referir-nos-emos ainda à parametrização pelo comprimento de arco e por velocidade instantânea (conceito que só pode ser introduzido para curvas mais regulares).

2.1 Definição de curva

Uma curva pode ser descrita como a trajectória de um objecto no plano ou no espaço. Em cada instante de tempo t , a posição $\gamma(t)$ irá corresponder-lhe.

O conjunto de todas as posições constitui a trajectória. Iremos considerar movimentos contínuos entre as diferentes posições de um objecto, isto é, curvas contínuas.

Se a velocidade, em cada ponto, é finita, então o comprimento da trajectória também o é. Existem outro tipo de curvas, as que são limitadas e que não contêm nenhuma parte com comprimento finito. Comparando com as curvas anteriores somos levados a pensar em velocidade infinita.

Na definição de curva, temos uma variável t , o parâmetro (é o tempo no caso da trajectória de movimento) e uma função γ que associa a posição $\gamma(t)$ a qualquer valor do parâmetro t . Estes dados constituem a parametrização da curva. A curva por si só (ou a trajectória) será denotada por Γ . Como o objecto pode percorrer a curva com diferentes velocidades, então tem-se infinitas possibilidades de parametrizações da curva Γ .

Um outro método para definir uma curva consiste em considerar o conjunto dos pontos x, y do plano que verificam a equação $F(x, y) = 0$. Se a função F for suficientemente regular, o Teorema da Função Implícita garante-nos que, pelo menos localmente, $F(x, y) = 0 \iff y = g(x)$ ou $x = h(y)$ e caímos na definição anterior.

As curvas no espaço podem ser obtidas pela intersecção de duas superfícies (por exemplo, a intersecção de duas esferas é um círculo).

Definição 2.1.1. Uma função contínua $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) diz-se uma **parametrização** de uma curva. O conjunto $\Gamma = \gamma([a, b]) = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$ diz-se o **traço** da curva.

Os pontos $A = \gamma(a)$ e $B = \gamma(b)$ dizem-se as extremidades de Γ (Fig. 2.1). Um **sub-arco**, ou simplesmente, um **arco** de Γ , é a imagem por γ , de um intervalo $[c, d]$ contido em $[a, b]$. Se as extremidades forem $C = \gamma(c)$ e $D = \gamma(d)$, denotamos esse arco por \widehat{CD} (e o segmento de recta $[CD]$ é designado por **corda**).

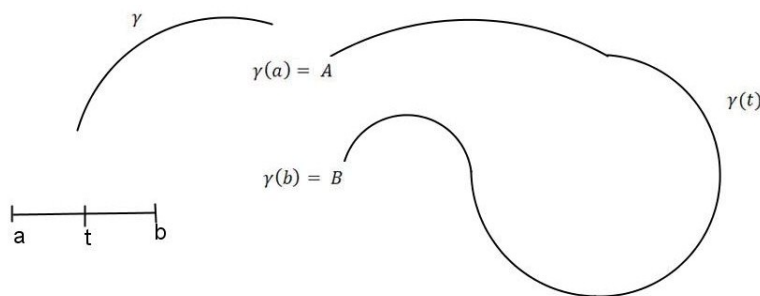


Figura 2.1: Parametrização γ de um arco \widehat{AB} .

Definição 2.1.2. Um ponto x de Γ diz-se um **ponto duplo** se existem exactamente dois valores diferentes, t_1 e t_2 , tais que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) = x$. Se existem pelo menos dois instantes diferentes que correspondem à posição x , então dizemos que x é um **ponto múltiplo**.

Definição 2.1.3. Se não existe nenhum ponto múltiplo em Γ , então a função $\gamma : [a, b] \mapsto \Gamma$ é bijectiva. Neste caso, a curva Γ diz-se **simples**, ou um **arco de Jordan**.

Vejamos dois casos particulares de curvas:

Exemplo 2.1.1. *Seja z uma função real definida num intervalo $[a, b]$. Designamos por gráfico de z , $Grz = \{(t, z(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in [a, b]\}$. Se a função z é contínua, o gráfico é uma curva. Uma parametrização possível de Grz consiste em considerar a função $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ em que*

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = t \\ \gamma_2(t) = z(t). \end{cases}$$

Exemplo 2.1.2. *As curvas poligonais, formadas por um número finito de segmentos de recta consecutivos cujas extremidades são vértices da curva, são de facto, as únicas curvas cujos comprimentos podem ser calculados sem nenhum problema. Basta adicionar os comprimentos dos seus segmentos. Uma régua graduada é suficiente! E, por isso, não é surpreendente que procuremos aproximações poligonais de uma qualquer curva dada.*

A ideia de aproximar uma curva por linhas poligonais (cujos vértices pertencem à curva inicial) vem do tempo de Arquimedes.

Nos tempos mais recentes, não foi formalizada antes de Guiseppe Peano e Camille Jordan.

Peano propôs definir o comprimento duma curva como o limite superior, quando os comprimentos dos segmentos que definem linhas poligonais que aproximam a curva, tendem para zero.

Procurando uma generalização para calcular áreas de superfícies, Henri Lebesgue, na sua tese de doutoramento de 1902, preferiu definir o mesmo comprimento como o limite inferior dos comprimentos das curvas poligonais cuja *distância*¹ à curva inicial tende para zero.

Estas definições são, na realidade, equivalentes. O método de Lebesgue tem o inconveniente de ser *não construtivo*.

¹Mais tarde formalizaremos o que significa distância de uma curva poligonal à curva inicial.

A noção de curva pode ser adaptada aos fenómenos que pretendemos estudar. No nosso caso, como estamos interessados em calcular o seu comprimento e outras propriedades, devemos considerar as curvas rectificáveis (que se podem aproximar por curvas poligonais) no sentido lato. No capítulo 3 apresentamos o célebre exemplo da curva de Peano, uma função contínua e sobrejectiva do intervalo $[0, 1]$ no quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

2.2 Rectificabilidade

É intuitivamente plausível aproximar o comprimento duma curva Γ através dos comprimentos de aproximações poligonais de Γ , desde que cada ponto da curva (ou, pelo menos, quase todos²) esteja situado num pequeno arco que não consiga ser *distinguido* de um segmento. Diz-se então que a curva é rectificável. As curvas que não são rectificáveis em nenhum dos seus pontos são curvas fractais. A noção de curva rectificável está associada à ideia de comprimento finito, pelo menos, localmente. As curvas fractais têm comprimento infinito.

A função de Weierstrass pode ser definida do seguinte modo (ver [11]):

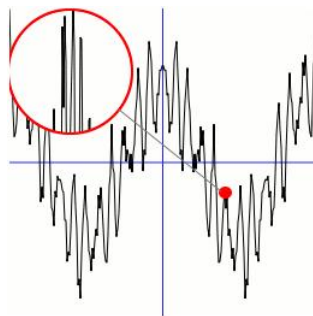


Figura 2.2: O gráfico da função de Weierstrass é um exemplo de um fractal.

²Ver definição no capítulo 1.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad ab > 1 + \frac{3}{2}\pi,$$

onde $a \in]0, 1[$ e $b > 1$ é um inteiro ímpar. Esta curva não tem derivada em nenhum ponto.

Para clarificar a noção de *aproximação* entre curvas iremos estudar mais por-menorizadamente o conceito de *distância entre conjuntos*.

2.3 Distância de Hausdorff

Consideremos duas populações E_1 e E_2 dispersas num mesmo território, onde temos uma distância d definida. A distância entre uma pessoa x de E_1 e toda a população E_2 é a distância entre x e o seu vizinho mais próximo em E_2 , isto é, $d(x, E_2) = \inf_{y \in E_2} d(x, y)$.

Para definir distância entre duas populações, formalmente, devemos tomar a maior distância possível entre um habitante de E_1 e o conjunto de pessoas de E_2 , ou seja, $\sup_{x \in E_1} d(x, E_2)$ e, também a maior distância entre um habitante de E_2 e o conjunto de pessoas de E_1 , isto é, $\sup_{x \in E_2} d(x, E_1)$.

Para finalizar, o maior destes dois números é a ***distância de Hausdorff***³ entre E_1 e E_2 , isto é,

$$d_H(E_1, E_2) = \max \left\{ \sup_{x \in E_1} d(x, E_2), \sup_{x \in E_2} d(x, E_1) \right\}. \quad (2.1)$$

Mais à frente especificaremos que só vamos considerar conjuntos limitados, logo as distâncias serão finitas.

Nota 2.3.1. *É conveniente não confundir a distância de Hausdorff entre dois conjuntos E_1 e E_2 com a distância entre conjuntos, usualmente definida num e.m.*

³Esta distância é $+\infty$ quando um dos conjuntos não é limitado.

do seguinte modo:

$$d(E_1, E_2) = \inf\{d(x, y) : x \in E_1, y \in E_2\}.$$

Exemplo 2.3.1. Consideremos, em \mathbb{R}^2 , $E_1 = [0, 1] \times [0, 2]$ e $E_2 = [2, 3] \times [0, 1]$.

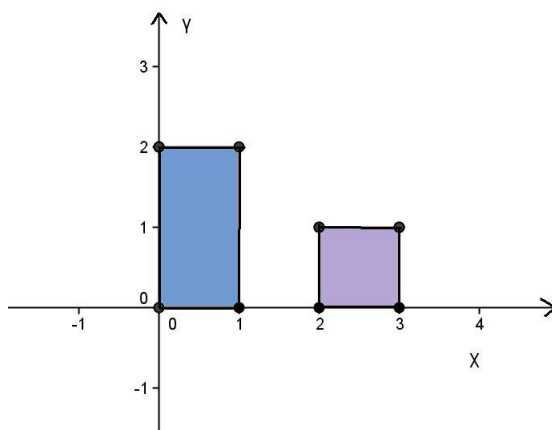


Figura 2.3: Distância usual e de Hausdorff entre dois conjuntos.

Então é fácil verificar que $d_H(E_1, E_2) = \sqrt{5}$. Por outro lado, $d(E_1, E_2) = 1$.

Propriedades:

Sejam E_1 e E_2 subconjuntos de \mathbb{R}^2 .

1. Se um ponto x pertence ao conjunto E_1 , então $d(x, E_1) = 0$.
2. $x \in \overline{E_1}$ se e só se $d(x, E_1) = 0$.
3. A distância de Hausdorff não distingue um conjunto da sua aderência. Na realidade, para todos os conjuntos E_1 e E_2 , temos $d_H(E_1, E_2) = d_H(\overline{E_1}, \overline{E_2})$.
4. $d_H(E_1, E_2) = 0$ se e só se $\overline{E_1} = \overline{E_2}$. Em particular, se a distância entre dois conjuntos fechados é nula, então necessariamente estes conjuntos são iguais.

Para compreendermos melhor a noção de distância de Hausdorff, podemos utilizar a noção da Salsicha de Minkowski.

Definição 2.3.1. *Seja $\varepsilon > 0$. A **Salsicha- ε de Minkowski** de um conjunto E limitado é o conjunto*

$$E(\varepsilon) = \bigcup_{x \in E} D(x, \varepsilon).$$

Observe-se que $\sup_{x \in E_1} d(x, E_2) \leq \varepsilon$ se e só se $E_1 \subseteq E_2(\varepsilon)$. Assim, podemos apresentar uma outra definição equivalente (ver Proposição 2.3.1) para a distância de Hausdorff:

$$d_H^*(E_1, E_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : E_1 \subseteq E_2(\varepsilon) \text{ e } E_2 \subseteq E_1(\varepsilon)\}. \quad (2.2)$$

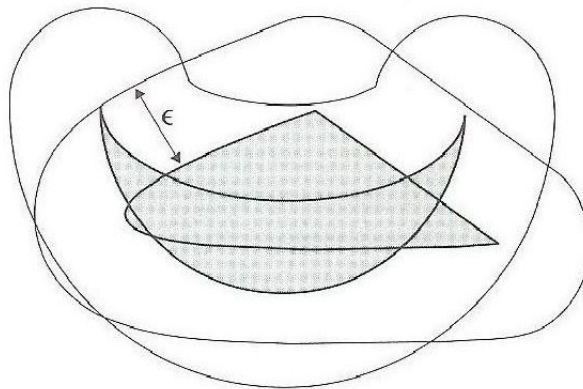


Figura 2.4: Distância de Hausdorff usando a salsicha de Minkowski.

Proposição 2.3.1. *As definições da distância de Hausdorff, definida em subconjuntos limitados de \mathbb{R}^2 , por (2.1) e (2.2), são equivalentes.*

Demonstração: Denotemos $\alpha = d_H^*(E_1, E_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : E_1 \subseteq E_2(\varepsilon) \text{ e } E_2 \subseteq E_1(\varepsilon)\}$. Pretendemos mostrar que $\alpha = d_H(E_1, E_2)$.

Por definição de ínfimo e de salsicha, temos que

$$\forall \delta > 0 \quad E_1 \subseteq E_2(\alpha + \delta) \quad \text{e} \quad E_2 \subseteq E_1(\alpha + \delta) \quad (2.3)$$

$$\forall \delta > 0 \quad E_1 \not\subseteq E_2(\alpha - \delta) \quad \text{ou} \quad E_2 \not\subseteq E_1(\alpha - \delta) \quad (2.4)$$

Observe-se que (2.3) é equivalente a

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0 \quad \forall x \in E_1 \quad \exists y \in E_2 \quad d(x, y) \leq \alpha + \delta \quad & \text{e} \\ \forall \delta > 0 \quad \forall y \in E_2 \quad \exists x \in E_1 \quad d(x, y) \leq \alpha + \delta, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0 \quad \forall x \in E_1 \quad d(x, E_2) \leq \alpha + \delta \quad & \text{e} \\ \forall \delta > 0 \quad \forall y \in E_2 \quad d(E_1, y) \leq \alpha + \delta \end{aligned}$$

e, como δ é um número positivo arbitrário, tem-se

$$\forall x \in E_1 \quad d(x, E_2) \leq \alpha \quad \text{e} \quad \forall y \in E_2 \quad d(E_1, y) \leq \alpha$$

e então

$$d_H(E_1, E_2) = \max \left\{ \sup_{x \in E_1} d(x, E_2), \sup_{x \in E_2} d(x, E_1) \right\} \leq \alpha.$$

Por outro lado, (2.4) é equivalente a

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \in E_1 \quad \forall y \in E_2 \quad d(x_\delta, y) > \alpha - \delta \quad & \text{ou} \\ \forall \delta > 0 \quad \exists y_\delta \in E_2 \quad \forall x \in E_1 \quad d(x, y_\delta) > \alpha - \delta, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\exists x_\delta \in E_1 \quad d(x_\delta, E_2) \geq \alpha - \delta \quad \text{ou} \quad \exists y_\delta \in E_2 \quad d(E_1, y_\delta) \geq \alpha - \delta$$

Assim, para todo o $\delta > 0$, tem-se que

$$\sup_{x \in E_1} d(x, E_2) \geq \alpha - \delta \quad \text{ou} \quad \sup_{x \in E_2} d(x, E_1) \geq \alpha - \delta,$$

pelo que

$$d_H(E_1, E_2) = \max \left\{ \sup_{x \in E_1} d(x, E_2), \sup_{x \in E_2} d(x, E_1) \right\} \geq \alpha,$$

o que conclui a prova da equivalência das duas definições. \square

Proposição 2.3.2. *A distância de Hausdorff é uma distância definida no conjunto dos subconjuntos fechados limitados⁴ de \mathbb{R}^2 .*

Demonstração: Vimos que, se os conjuntos E_1 e E_2 são fechados, a distância entre eles não é nula se e só se eles são distintos. Mais ainda, a definição desta distância é simétrica no que diz respeito a E_1 e E_2 . Assim (i), (ii) e (iii) da Definição 1.1.1 são verificadas.

Verifiquemos agora a desigualdade triangular, isto é, que dados E_1, E_2 e E_3 conjuntos compactos quaisquer, se tem $d_H(E_1, E_3) \leq d_H(E_1, E_2) + d_H(E_2, E_3)$. Basta mostrar que, dado ε real positivo, temos que

$$\varepsilon > d_H(E_1, E_2) + d_H(E_2, E_3) \implies \varepsilon > d_H(E_1, E_3), \quad (2.5)$$

porque, se chamarmos $a = d_H(E_1, E_2) + d_H(E_2, E_3)$, então

$$\forall \delta > 0 \quad a + \delta > a = d_H(E_1, E_2) + d_H(E_2, E_3).$$

Se a implicação (2.5) for verdadeira então $a + \delta \geq d_H(E_1, E_3), \forall \delta > 0$. Logo, fazendo $\delta \mapsto 0^+$ temos $a \geq d_H(E_1, E_3)$.

Mostremos (2.5). Sejam

$$\varepsilon_1 > d_H(E_1, E_2), \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_2 > d_H(E_2, E_3) \quad (2.7)$$

e $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Queremos mostrar que $\varepsilon > d_H(E_1, E_3)$.

Por definição da salsicha de Minkowski, por (2.6) temos $\left\{ \begin{array}{l} E_1 \subseteq E_2(\varepsilon_1) \\ E_2 \subseteq E_1(\varepsilon_1) \end{array} \right.$ e

por (2.7) temos $\left\{ \begin{array}{l} E_2 \subseteq E_3(\varepsilon_2) \\ E_3 \subseteq E_2(\varepsilon_2) \end{array} \right.$

⁴Estes conjuntos são compactos (porque estamos a trabalhar em \mathbb{R}^n com a distância usual). Em particular, d_H não toma o valor $+\infty$.

Aplicando a salsicha de Minkowski a E_2 vem

$$E_2(\varepsilon_2) \subseteq E_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad \text{e} \quad E_2(\varepsilon_1) \subseteq E_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Assim, temos $E_1 \subseteq E_2(\varepsilon_1) \subseteq E_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. Analogamente se prova que $E_3 \subseteq E_2(\varepsilon_2) \subseteq E_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. Consequentemente,

$$E_1 \subseteq E_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad \text{e} \quad E_3 \subseteq E_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

o que mostra que $d_H(E_1, E_3) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$. □

Esta distância permite-nos determinar em que medida dois conjuntos estão próximos. Em particular, pode medir o desvio entre uma curva e a sua aproximação poligonal. É razoável pensar que se P é uma curva poligonal com as mesmas extremidades de Γ e cujos vértices pertencem a Γ , então a distância entre P e Γ se torna mais pequena quando os comprimentos dos segmentos de P se tornam mais pequenos. De facto, vamos verificar que assim é.

2.4 Aproximações por curvas poligonais

A parametrização de uma curva impõe uma ordem na curva. Vamos definir curvas formadas por segmentos cujas extremidades em Γ seguem a ordem estabelecida em Γ .

Definição 2.4.1. *Dada uma curva Γ parametrizada por $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $k + 1$ parâmetros $t_1 = a < t_2 < \dots < t_{k+1} = b$, uma **aproximação poligonal** de Γ é uma curva P formada pelos k segmentos de recta cujas extremidades são $\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})$, para $i = 1, 2, \dots, k$.*

Os comprimentos destas curvas podem ser calculados e usados para definir o comprimento de Γ . Vejamos um resultado importante:

Teorema 2.4.1. *Seja Γ uma curva simples, $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais positivos que converge para 0, e, para cada n , P_n uma aproximação poligonal de Γ cujos segmentos têm comprimentos menores que ε_n . Então $d_H(\Gamma, P_n)$ converge para 0.*

Demonstração do Teorema 2.4.1:

Dado que os conjuntos $[a, b]$ e Γ são fechados e limitados, eles são compactos. Como γ é contínua, é bijectiva e o seu domínio é compacto, γ é um homeomorfismo. Podemos usar o facto de que ambas as aplicações γ e γ^{-1} são uniformemente contínuas pois uma função contínua cujo domínio é compacto é uniformemente contínua.⁵

Seja $\varepsilon > 0$. Temos que provar que

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : d_H(\Gamma, P_n) \leq \varepsilon.$$

Como a aplicação γ é uniformemente contínua, então existe um $\eta > 0$, que depende apenas de ε tal que:

$$\forall t', t'' \in [a, b] \quad d(t', t'') \leq \eta \implies d(\gamma(t'), \gamma(t'')) < \varepsilon.$$

Para este η , como a função γ^{-1} é uniformemente contínua, então existe um $\zeta > 0$ que depende apenas de η tal que, para todos os pontos x e y de Γ ,

$$d(x, y) \leq \zeta \implies d(\gamma^{-1}(x), \gamma^{-1}(y)) \leq \eta.$$

Escolhemos um inteiro N tal que, se $n \geq N$ se tem $\varepsilon_n \leq \zeta$ (o que é possível porque $\varepsilon_n \rightarrow 0$).

⁵Ver no capítulo 1 - Teorema de Cantor

Seja n um inteiro positivo qualquer maior ou igual a N e sejam $t_1 = a, t_2, \dots, t_{k+1} = b$ valores dos instantes cujas imagens por γ são os vértices de P_n . Como ε_n é menor que ζ , podemos deduzir que $d(t_i, t_{i+1}) \leq \eta$ para todo $i = 1, 2, \dots, k_n$ (pela continuidade uniforme de γ^{-1}). Então a distância de qualquer valor t a pelo menos um dos t_i é menor ou igual a η .

Assim, pela continuidade uniforme de γ , a distância de qualquer ponto de Γ a pelo menos um dos vértices de P_n é menor ou igual a ε . Então $d_H(\Gamma, P_n) \leq \varepsilon$. \square

Na demonstração acima, se denotarmos por S_n^i os segmentos sucessivos de P_n e Γ_n^i o arco de Γ cuja corda é S_n^i , então o número $\max\{d_H(S_n^i, \Gamma_n^i) : i = 1, \dots, k_n\}$ converge, com n , para zero.

Assim, no sentido da distância de Hausdorff, quanto mais curtos forem os segmentos da aproximação poligonal, mais indistinguíveis são os arcos de Γ e as suas cordas.

Definição 2.4.2. *Uma curva simples Γ diz-se **rectificável** se existir uma sucessão de aproximações poligonais $(P_n)_n$ tais que $d_H(\Gamma, P_n) \rightarrow 0$.*

É de salientar que as curvas que satisfazem as hipóteses do teorema anterior são as curvas *simples* e *rectificáveis*.

2.5 Comprimento de uma curva rectificável

Denotemos o comprimento de um segmento de recta S por $L(S)$. O comprimento de uma curva poligonal P será a soma dos comprimentos de todos os segmentos de recta que constituem a curva, denotado por $L(P)$.

Dada uma curva Γ , podemos definir o seu comprimento como o limite de uma sucessão de comprimentos:

Seja Γ uma curva simples e seja $(P_n)_n$ uma sucessão de aproximações poligonais de Γ tal que o comprimento máximo dos segmentos de recta que constituem a curva P_n converge, com n , para zero.

O comprimento de Γ é, por definição, o limite da sucessão dos comprimentos de P_n , ou seja, $L(\Gamma) = \lim_n L(P_n)$. Para esta definição ter significado, tem de se mostrar que o limite de $L(P_n)$ existe e que esse limite é independente da escolha das aproximações poligonais.

- a) Provemos que $L(P_n)$ converge para $\sup_n L(P_n)$, que é o supremo desta sucessão (sendo este número finito ou não). É suficiente mostrar que

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} : N > N_0 \implies L(P_N) \geq L(P_n) - \varepsilon.$$

Primeiro, observemos que se substituirmos uma aproximação poligonal por outra que contenha todos os vértices da primeira (e outros), então obtemos uma curva mais longa que a primeira.

Sejam $S_n^1, \dots, S_n^{k_n}$ os segmentos de P_n e $\Gamma_n^1, \dots, \Gamma_n^{k_n}$ os arcos de Γ cujas cordas são os segmentos acima descritos. Seja $\rho_n = \max_{i=1, \dots, k_n} d_H(S_n^i, \Gamma_n^i)$. Sabemos da secção anterior que ρ_n converge para 0. Fixemos um inteiro n . Sejam N um inteiro maior que n e S qualquer segmento de P_N cujas extremidades são C e D . O arco \widehat{CD} de Γ pode conter um vértice de P_N . Se for esse o caso, chamemos-lhe vértice I . Então $d(I, S) \leq \rho_N$ uma vez que,

$$\rho_N = \max_i d_H(S_n^i, \Gamma_n^i) \geq d_H(S, \Gamma_s) = \max \left\{ \sup_{\gamma \in \Gamma_s} d(\gamma, S), \sup_{s \in S} d(s, \Gamma_s) \right\} \geq d(I, S).$$

Se S_1 e S_2 são os segmentos $[CI]$ e $[ID]$, vemos, como mostra a figura abaixo, que

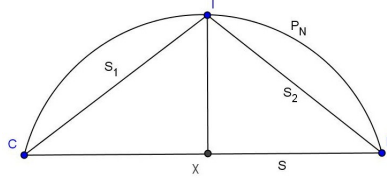


Figura 2.5: O comprimento $L(S)$ é maior que $L(S_1) + L(S_2) - 2\rho_N$.

$$\begin{aligned}
 L(S_1) &\leq \overline{CX} + \overline{XI} \\
 L(S_2) &\leq \overline{XD} + \overline{XI} \\
 L(S_1) + L(S_2) &\leq \overline{CX} + \overline{XD} + 2\overline{XI} \\
 L(S_1) + L(S_2) &\leq L(S) + 2\rho_N.
 \end{aligned}$$

Se existirem dois vértices I e J de P_n no mesmo arco \widehat{CD} , então os segmentos $S_1 = [CI]$, $S_2 = [IJ]$, $S_3 = [JD]$ verificam a seguinte desigualdade:

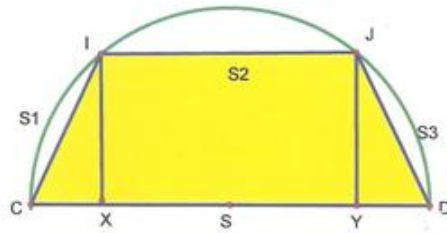


Figura 2.6: O comprimento de $L(S)$ é maior que $L(S_1) + L(S_2) + L(S_3) - 4\rho_N$.

$$\begin{aligned}
 L(S_1) &\leq \overline{CX} + \overline{XI} \\
 L(S_2) &\leq \overline{IX} + \overline{XY} + \overline{YJ} \\
 L(S_3) &\leq \overline{YD} + \overline{YJ}
 \end{aligned}$$

$$L(S_1) + L(S_2) + L(S_3) \leq \overline{CD} + 2\overline{XI} + 2\overline{YJ} \leq \overline{CD} + 4\rho_N,$$

uma vez que $\overline{XI} \leq \rho_N$ e $\overline{YJ} \leq \rho_N$ vem $L(S_1) + L(S_2) + L(S_3) \leq L(S) + 4\rho_N$.

Em geral, se k vértices de P_n pertencem ao arco \widehat{CD} cuja corda é o segmento S e se Q_S é uma aproximação poligonal cujas extremidades são C e D passando por estes pontos, então $L(Q_S) \leq L(S) + 2k\rho_N$.

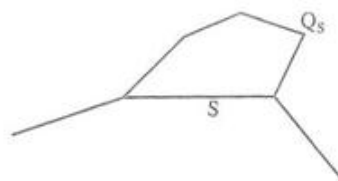


Figura 2.7: Substituição do segmento S pela aproximação poligonal Q_S .

Quando for possível, substitui-se cada segmento S por um polígono Q_S , resultando uma nova aproximação poligonal Q que estará mais próxima de Γ , passando por todos os vértices de P_n e de P_N . Em particular, $L(P_n) \leq L(Q)$.

Mais ainda, se acrescentarmos os comprimentos $L(Q_S)$, vamos obter $L(Q) \leq L(P_n) + 2K_n\rho_N$, denotando K_n o número de vértices de P_n . Escolhendo um N suficientemente grande, podemos tornar o número $2K_n\rho_N$ menor que ε . Isto prova que $L(P_n) \leq L(Q) \leq L(P_N) + 2K_n\rho_N < L(P_N) + \varepsilon$, como queríamos demonstrar.

- b) Vamos agora provar que $\lim_n L(P_n)$ não depende da escolha de $(P_n)_n$.

Seja Q^* uma aproximação poligonal de Γ e escolha-se $\varepsilon > 0$. Então, por um raciocínio análogo ao anterior,

$$\exists N \in \mathbb{N}_0 : L(P_N) > L(Q^*) - \varepsilon,$$

donde podemos deduzir $L(Q^*) \leq \sup_n L(P_n)$.

Se $(Q_n)_n$ for uma sucessão de aproximações poligonais de Γ , então

$$\sup_n L(Q_n) \leq \sup_n L(P_n).$$

Pela simetria, obtemos a igualdade que se pretendia. □

O exemplo seguinte mostra que uma curva simples pode ter comprimento infinito.

Exemplo 2.5.1. Consideremos a espiral definida pelas coordenadas polares (ρ, θ) ,

$$\begin{cases} \rho(t) = t \\ \theta(t) = \frac{2\pi}{t}, \quad t > 0, \end{cases}$$

e seja: $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$t \mapsto \begin{cases} (\rho(t) \cos \theta(t), \rho(t) \sin \theta(t)) & \text{se } 0 < t \leq 1, \\ (0, 0) & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Note-se que $\gamma([0, 1])$ é um conjunto fechado, uma vez que γ é contínua.

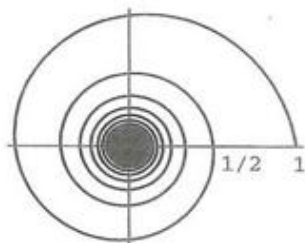


Figura 2.8: Curva de comprimento local finito (excepto no 0), cujo comprimento total é infinito.

Cada espiral S_k correspondente aos valores $\frac{1}{k+1} \leq t \leq \frac{1}{k}$ do parâmetro, tem comprimento finito, que é maior que $\frac{1}{k}$ pois

$$L(S_k) > \frac{2\pi}{k+1} > \frac{1}{k}.$$

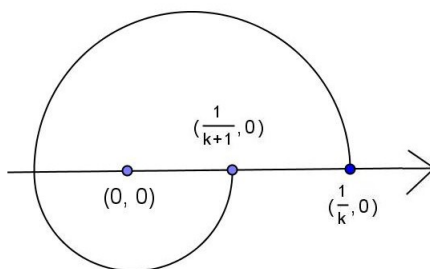


Figura 2.9: $L(S_k)$ é maior que o perímetro da circunferência de centro em $(0, 0)$ e raio $\frac{1}{k+1}$.

Como a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge, o comprimento total da curva é infinito.

2.6 Dois exemplos

Na definição de comprimento de uma curva, a distância de Hausdorff tem um papel importante. Na realidade, aproximamos a curva cujo comprimento queremos calcular por curvas poligonais. Mas é preciso notar o seguinte:

Seja Γ uma curva e $(\Gamma_n)_n$ uma sucessão de curvas tal que $d_H(\Gamma_n, \Gamma) \xrightarrow{n} 0$.

Então nem sempre é verdade que $L(\Gamma_n) \xrightarrow{n} L(\Gamma)$.

Vejamos alguns contra-exemplos:

Exemplo 2.6.1. *Consideremos a espiral na Figura 2.8 da secção anterior. Constroem-se sub-espirais Γ_n , tomando o parâmetro t entre 0 e $\frac{1}{n}$. A distância entre Γ_n e o único elemento do conjunto $\{O\}$ é igual a $\frac{1}{n}$. Portanto, a sucessão das curvas Γ_n converge para o ponto O , uma curva limite com comprimento 0. Contudo, o comprimento de cada Γ_n é infinito.*

O exemplo seguinte foi apresentado no fim do século XIX. Lebesgue usou-o para provar a afirmação acima.

Exemplo 2.6.2. *Considera-se um triângulo equilátero $[ABC]$ (ver figura abaixo) de comprimento dos lados igual a 1. Seja P_1 a curva formada pelo segmento $[AC]$ e $[BC]$. Esta curva tem comprimento 2. Se considerarmos a curva poligonal P_2 , que tem como vértices A, D, E, F, B , como D, E e F são os pontos médios dos lados do triângulo $[ABC]$, esta também tem comprimento 2. Repetindo o mesmo processo para cada triângulo equilátero $[ADE]$ e $[EFB]$, vamos obter uma nova curva poligonal P_3 de comprimento 2 e, assim sucessivamente. As curvas P_n obtidas têm todas comprimento 2 e convergem (no sentido de distância de Hausdorff) para o lado AB do triângulo original, cujo comprimento é 1.*

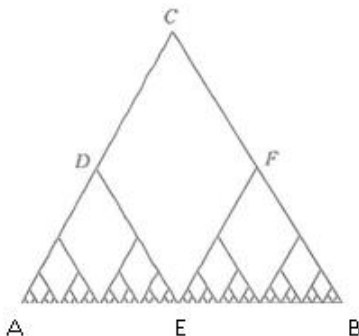


Figura 2.10: Construção da sucessão das curvas poligonais $P_1 = ACB$, $P_2 = ADEFB, \dots$, todas de comprimento 2.

Este exemplo mostra que, para calcularmos o comprimento de uma curva não chega aproximá-la, no sentido da distância de Hausdorff, por curvas poligonais que convirjam para a curva. É necessário que as linhas poligonais tenham os seus vértices sobre a curva.

2.7 Parametrização pelo comprimento de arco

Uma aproximação poligonal permite-nos definir o comprimento de uma curva simples Γ . Vimos que este comprimento não depende da parametrização inicial γ que escolhemos para definir a curva. Assuma-se que esse comprimento é finito. Sabemos como calcular o comprimento de qualquer arco de Γ , o que nos vai permitir definir uma parametrização de Γ pelo comprimento do arco, que pode ser diferente da parametrização γ .

Sejam A e B as extremidades de Γ . Para cada valor positivo de t inferior ou igual a $L(\Gamma)$, temos um ponto $\gamma^*(t)$ da curva tal que o comprimento do arco $A\widehat{\gamma^*(t)} = t$. A aplicação $\gamma^* : [0, L(\Gamma)] \rightarrow \Gamma$ é uma bijecção que verifica $\gamma^*(0) = A$ e $\gamma^*(L(\Gamma)) = B$.

Tudo se passa como se a curva Γ fosse a trajectória de um ponto em movimento, a uma velocidade constante, sendo a unidade de tempo ajustada de modo a que a velocidade escalar seja 1.

O comprimento de qualquer sub-arco de Γ será então o valor do tempo gasto pelo ponto enquanto percorre este sub-arco.

Assim, a parametrização pelo comprimento do arco é definida pela seguinte igualdade, $L(\gamma^*([0, t])) = t$. Neste método, transferimos a *medida* na recta real para a curva. Na recta, a medida de Lebesgue de um subconjunto com medida é conhecida por *comprimento*. Encontramos uma noção idêntica na curva através da definição de comprimento de um arco. Por exemplo, uma parte de Γ tem medida nula se para todo o ε positivo essa parte é coberta por arcos cuja soma dos seus comprimentos é menor que ε . Este resultado irá permitir falar sobre as propriedades que são verdadeiras em *quase toda a parte* de Γ . Estas propriedades serão verdadeiras em todos os pontos de Γ excepto num seu subconjunto de medida nula, sendo a medida em Γ transportada pela parametrização pelo comprimento

de arco, da medida de Lebesgue em \mathbb{R} .

É possível escolher qualquer uma das extremidades para ser a origem do movimento por comprimento do arco, tendo em conta o sentido que se escolhe para percorrer a curva, embora esta escolha não influencie a medida de Γ , uma vez que o comprimento é independente da parametrização.

2.8 Medida da imagem

Uma curva nem sempre é definida pelo comprimento de arco. Normalmente, uma parametrização é imposta pela estrutura da curva. Se a curva não está definida pelo comprimento do arco então o cálculo do comprimento da curva pode tornar-se complicado. Note-se que cada parametrização γ de uma curva Γ induz uma medida em Γ mas essa medida nem sempre está relacionada com o comprimento.

Para qualquer curva Γ de comprimento finito ou infinito, define-se a medida da imagem induzida em Γ através da parametrização γ , do seguinte modo: se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = B$ são as extremidades de Γ , a *medida total* de Γ é $b - a$ e a medida do arco $A\widehat{\gamma}(t)B$ é $t - a$. Generalizando, *a medida de cada parte da trajectória Γ , para uma parametrização fixada γ , é o tempo necessário para percorrer essa parte durante o movimento.*

Assim, dar uma parametrização de Γ é equivalente a atribuir uma medida em Γ , i.e., *definir uma curva é o mesmo que definir a medida de uma curva.*

Será que podemos estabelecer alguma relação entre a *medida da imagem* e o *comprimento*, ou seja, entre o *tempo* e a *distância percorrida*?

Quando a velocidade é constante (como vimos na secção anterior), existe uma correspondência imediata: o comprimento de um arco de Γ é proporcional ao tempo necessário para percorrer o arco. Mas podemos encontrar muitas trajec-

tórias irregulares. Em particular, a imagem $\gamma(E)$ de um conjunto E (temporal!) de medida nula em $[a, b]$ poderá ser um subconjunto de Γ cuja medida não seja nula pois, em alguns momentos, o movimento pode ter uma aceleração *infinita*.

2.9 Comprimento por velocidade instantânea

Seja O a origem do referencial e $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização de uma curva Γ . A posição do ponto $\gamma(t)$ é totalmente determinada pelo vector $\overrightarrow{O\gamma(t)}$. O vector que dá a direcção do movimento, a derivada de γ , é, se existir e for finito, o seguinte limite:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \overrightarrow{\gamma(t)\gamma(t+h)}.$$

Em particular, se no ponto $\gamma(t_0)$ a trajectória é angular então $\mathbf{v}(t)$ não existe em t_0 .

A velocidade escalar é o comprimento de $\mathbf{v}(t)$. Assim denotamos:

$$v(t) = \|\mathbf{v}(t)\| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|.$$

Se dl indica a distância $\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|$ que é percorrida no tempo dt , a velocidade $v(t)$ será o limite de $\frac{dl}{dt}$ quando $dt \rightarrow 0$ e o comprimento total de Γ será a soma de dl , isto é, o integral de $\|\mathbf{v}(t)\|$ no que diz respeito ao tempo. Este argumento é válido para todo o tipo de trajectórias suficientemente regulares, por exemplo, para as que têm velocidade escalar $\|\mathbf{v}(t)\|$ contínua em cada t e, em particular, as que têm aceleração finita. É válida, então, a seguinte afirmação:

Se $\|\mathbf{v}(t)\|$ existe e é contínua no intervalo $[a, b]$ então o comprimento de uma curva parametrizada por γ em $[a, b]$ é dado pelo integral

$$L(\Gamma) = \int_a^b \|v(t)\| dt.$$

Quando γ é uma parametrização de Γ pelo comprimento do arco, a fórmula fica reduzida a

$$L(\Gamma) = \int_0^{L(\Gamma)} 1 dt.$$

Denotemos as coordenadas de $\gamma(t)$ por $x_1(t)$ e $x_2(t)$. O vector velocidade, se existir, tem $x'_1(t)$ e $x'_2(t)$ como componentes. O integral que nos dá o comprimento da curva pode ser escrito como

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2} dt.$$

Esta fórmula pode ser falsa se suposermos que $\|\mathbf{v}(t)\|$ existe *quase sempre* no intervalo $[a, b]$. O integral de $\|\mathbf{v}(t)\|$ neste domínio pode ser diferente do comprimento da curva. Temos, como exemplo, o gráfico da *Função Escada do Diabo*, que será definida no Capítulo 3.

Vejamos alguns exemplos de aplicação da definição acima:

Exemplo 2.9.1. *A circunferência*

A parametrização de uma circunferência pode ser dada por

$$\overrightarrow{O\gamma(t)} = (r \cos t, r \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

onde O é o centro, r o raio. Este é um exemplo onde a velocidade escalar é constante. O comprimento total da circunferência é $2\pi r$ e o comprimento de cada parte E é o produto de r pelo tempo gasto em E .

Exemplo 2.9.2. *A Espiral*

Na secção 2.5, definimos a espiral usando coordenadas polares,

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t \cos \frac{2\pi}{t}, t \sin \frac{2\pi}{t}) & \text{se } 0 < t \leq 1, \\ (0, 0) & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Vimos que cada parte da espiral S_k correspondente ao intervalo $] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ tinha comprimento finito maior que $\frac{1}{k+1}$. Calculemos o comprimento da espiral:

$$\begin{aligned} \text{Seja } \gamma :]0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t \cos \frac{2\pi}{t}, t \sin \frac{2\pi}{t}) \end{aligned}$$

Derivando cada componente, temos:

$$v(t) = \left(\cos \frac{2\pi}{t} + \frac{2\pi}{t} \sin \frac{2\pi}{t}, \sin \frac{2\pi}{t} - \frac{2\pi}{t} \cos \frac{2\pi}{t} \right),$$

donde deduzimos que

$$\begin{aligned} v(t)^2 &= \left\| \left(\cos \frac{2\pi}{t} + \frac{2\pi}{t} \sin \frac{2\pi}{t} \right)^2 + \left(\sin \frac{2\pi}{t} - \frac{2\pi}{t} \cos \frac{2\pi}{t} \right)^2 \right\|^2 \\ &= 1 + \frac{4\pi^2}{t^2}, \end{aligned}$$

ou seja, $\|v(t)\| = \sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{t^2}}$ e portanto,

$$\begin{aligned} L(S_k) &= \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{t^2}} dt \\ &= \left[\frac{\sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{t^2}} t \left(\sqrt{4\pi^2 + t^2} + 2\pi \log(2\pi^2 t) - 2\pi \log[2\pi + \sqrt{4\pi^2 + t^2}] \right)}{\sqrt{4\pi^2 + t^2}} \right]_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

concluindo-se, também directamente, que $L(\Gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} L(S_k) = +\infty$.

Capítulo 3

Conjunto de Cantor

Citando Arminda Manuela Gonçalves, na sua tese de mestrado,

George Cantor (1845 – 1918), criador da Teoria de Conjuntos, preocupou-se sempre com o papel, em Análise, dos conjuntos de números reais. Cantor pretendeu desenvolver uma análise aritmética pura sobre o continuum. Apesar da palavra continuum já ter sido mencionada antes (por exemplo, o número continuum foi usado por Bolzano), a noção geral de continua como conjuntos conexos com certas propriedades, foi introduzida por Cantor. Para Cantor, claramente, o continuum era um conjunto perfeito, mas conjuntos perfeitos podiam ser construídos de tal forma que a sua intersecção com qualquer intervalo não fosse densa nesse intervalo, por mais pequeno que este fosse. Para ilustrar este ponto, Cantor apresentou, em 1883, o seu famoso conjunto ternário, a que ficou associado o nome do Conjunto de Cantor.

Neste capítulo, iremos definir o conjunto de Cantor C , obtendo-se algumas propriedades deste conjunto. Caracteriza-se C (a menos de homeomorfismo) como o único espaço métrico compacto, perfeito, totalmente desconexo e homogéneo.

Pode provar-se que qualquer espaço métrico conexo e compacto é imagem, por uma função contínua, do Conjunto de Cantor (ver [2]).

3.1 Construção do conjunto ternário

O conjunto de Cantor é o conjunto obtido, geometricamente, do intervalo unitário fechado $I = [0, 1]$ retirando-lhe uma sequência de conjuntos abertos chamados terços médios. A partir do intervalo unitário $I = [0, 1]$, definem-se os subconjuntos fechados $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$ de I da seguinte forma: divide-se $[0, 1]$ em três partes iguais e retira-se o terço médio aberto $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, obtendo-se $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. C_2 é então obtido retirando de C_1 os intervalos abertos $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$ e $]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$. Em geral, tendo-se C_{n-1} definido, C_n obtém-se retirando-se os terços médios abertos de cada um dos 2^{n-1} intervalos fechados que constituem C_{n-1} . O *Conjunto de Cantor*, também conhecido pelo *Conjunto dos Terços Médios Excluídos*, é a intersecção desses conjuntos,

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

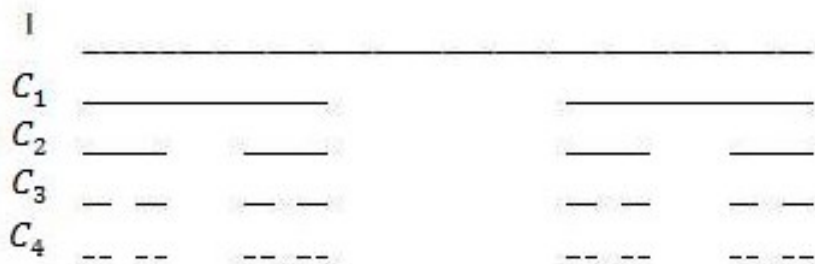


Figura 3.1: Primeiros passos na construção do Conjunto de Cantor.

É de salientar que os pontos extremos dos intervalos que são removidos como $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \dots$, pertencem ao conjunto de Cantor pois em cada passo da sua construção são apenas retirados intervalos abertos aos intervalos que restaram no passo anterior.

Cada $x \in I$ possui uma expressão $x = 0,3 x_1 x_2 x_3 \dots x_n \dots$ na base 3, onde cada algarismo x_n pode ser igual a 0, 1 ou 2. O algarismo x_1 diz quantas vezes x contém $\frac{1}{3}$. Assim $x_1 = 0$ quer dizer que x pertence ao primeiro terço do intervalo $[0, 1]$; $x_1 = 1$ quer dizer que x pertence ao terço médio do intervalo I e $x_1 = 2$ significa que $x \in [\frac{2}{3}, 1]$. O algarismo x_2 diz quantas vezes $x - \frac{x_1}{3}$ contém $\frac{1}{9}$. Assim, por exemplo, $x = 0,3 12 \dots$ significa que x pertence ao terço médio $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ e, mais ainda, está no terço final, $[\frac{5}{9}, \frac{2}{3}]$ deste intervalo. Em geral, x_n diz quantas vezes $x - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{x_j}{3^j}$ contém $\frac{1}{3^n}$. Vemos portanto que o conjunto de Cantor é constituído pelos números reais em $[0, 1]$ que não necessitam do algarismo 1 na sua expansão na base três. Esta representação dos pontos em C é única; mesmo os números $x \in I$ da forma

$$x = 0,3 x_1 \dots x_{n-1} x_n 222 \dots = 0,3 x_1 \dots x_{n-1} y_n 000 \dots$$

onde $0 \leq x_n < 2$ e $y_n = x_n + 1$, (por exemplo, $\frac{1}{3} = 0,3 1000 \dots = 0,3 0222 \dots$), que admitem duas expressões distintas na base três, não podem ser escritos de mais que uma maneira sem usar uns. Podemos definir o conjunto de Cantor como

$$C = \{0,3 (2t_1)(2t_2)(2t_3) \dots : t_i = 0 \vee t_i = 1, i \in \mathbb{N}\}.$$

3.2 Propriedades do Conjunto de Cantor

1. O conjunto de Cantor tem medida zero.

Como o conjunto de Cantor foi definido como o conjunto de pontos não excluídos, na construção acima e a medida dos intervalos excluídos é dada

por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$, então a medida que sobra é $1 - 1 = 0$, isto é, a medida do conjunto de Cantor é zero. Em particular, o conjunto de Cantor não contém nenhum intervalo de comprimento diferente de zero.

2. O conjunto de Cantor é infinito não numerável.

Pode parecer surpreendente que sobre alguma coisa, uma vez que a medida dos intervalos removidos é 1, a medida de I . Contudo, se repararmos no processo, tem de sobrar qualquer coisa: por exemplo, ao removermos o intervalo $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ do intervalo original $[0, 1]$ ficamos com os pontos $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$. Nos passos seguintes, não retiramos as extremidades deste intervalo uma vez que os intervalos removidos são sempre abertos. É por esta razão que o conjunto de Cantor não é vazio e, de facto, contém uma infinidade numerável de elementos (as extremidades dos intervalos retirados).

Podemos pensar que só sobram as extremidades. No entanto, por exemplo, o número $\frac{1}{4}$ pode ser expandido na base 3 sem recorrer ao algarismo 1, pois

$$0_{,3} 0202020202\dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2k}} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^k = \frac{1}{4},$$

isto é, $\frac{1}{4} \in C$ e não é extremidade de nenhum intervalo retirado.

No sentido da cardinalidade, a maior parte dos elementos do conjunto de Cantor não são extremidades dos intervalos removidos. Vamos definir uma função $\gamma : C \rightarrow [0, 1]$ sobrejectiva, designada por Função de Cantor. Seja

$$\begin{aligned} \gamma : \quad C &\longrightarrow I & (3.1) \\ 0_{,3} (2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots &\longmapsto 0_{,2} t_1 t_2 t_3 \dots \end{aligned}$$

Esta função é sobrejectiva mas não é injectiva pois existem elementos de C que têm a mesma imagem em I , por exemplo,

$$\gamma(0,3 0222 \dots 2 \dots) = 0,2 011 \dots 1 = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2}$$

$$\gamma(0,3 200 \dots 0 \dots) = 0,2 1 = \frac{1}{2}.$$

Como γ é sobrejectiva então $\text{card}(C) \geq \text{card}([0, 1])$. Por outro lado, como $C \subseteq [0, 1]$, $\text{card}(C) \leq \text{card}([0, 1])$. Então $\text{card}(C) = \text{card}([0, 1])$, isto é, C não é numerável.

3. O conjunto de Cantor é compacto.

O conjunto C é a intersecção de subconjuntos fechados do intervalo unitário, que é compacto.

4. O conjunto de Cantor não contém nenhum intervalo aberto, isto é, $\text{int } C = \emptyset$.

Se o conjunto de Cantor contivesse algum intervalo aberto não poderia ter medida zero. Como C não contém nenhum intervalo aberto, o seu interior é vazio.

5. O conjunto de Cantor não tem nenhum ponto isolado.

Seja $x_0 = 0,3 (2t_1)(2t_2) \dots (2t_n) \dots$ um ponto de C . Vejamos que x_0 não é ponto isolado de C , isto é, que $\forall r > 0 B(x_0, r) \setminus \{x_0\} \cap C \neq \emptyset$.

Fixemos $r > 0$ e seja $y_0 = 0,3 (2t_1)(2t_2) \dots (2t_n)(2y_{n+1})(2t_{n+2}) \dots$ e seja

$$y_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{se } t_{n+1} = 0 \\ 0 & \text{se } t_{n+1} = 1 \end{cases}$$

e $n \in \mathbb{N}$ um número natural tal que $\frac{1}{3^{n+1}} < r$. Então

$$d(x_0, y_0) = |0,3 0 \dots 0 2 0 \dots| = \frac{2}{3^{n+1}} < r,$$

estando o algarismo 1 acima na posição $n + 1$. Assim $y_0 \in B(x_0, r) \cap C$.

6. O conjunto de Cantor é homogêneo (ver definição no capítulo 1).

Será omitida a demonstração (ver [2]).

7. O conjunto de Cantor é perfeito (ver definição no capítulo 1).

C não tem pontos isolados.

3.3 A Função de Cantor e a Escada do Diabo

Consideremos a função γ , definida em (3.1).

Seja $t \in I \setminus C$. Então $t \in]a, b[$, sendo $]a, b[$ um dos intervalos removidos na construção de C .

$$a = 0,3 (2a_1)(2a_2)(2a_3) \dots (2a_{n-1})1 = 0,3 (2a_1)(2a_2) \dots (2a_{n-1})022 \dots 2 \dots,$$

$$b = 0,3 (2a_1)(2a_2) \dots (2a_{2n-1})2,$$

$$\gamma(a) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{2^j} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^n},$$

$$\gamma(b) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^n} = \gamma(a).$$

Define-se $\gamma(t) = \gamma(a) = \gamma(b), \forall t \in]a, b[$. Temos assim a função de Cantor prolongada ao intervalo I . Este prolongamento é conhecido como a *Escada do Diabo*. Note-se que:

- γ é crescente porque $\gamma|_C$ é crescente e γ é prolongada aos intervalos retirados por constante (igual aos valores de γ nos extremos).

- uma função $f : I \rightarrow J$ (I, J intervalos de \mathbb{R}) crescente só pode ter descontinuidades do tipo salto, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow c^-} f(t) \leq f(c) \leq \lim_{t \rightarrow c^+} f(t);$$

Mas como $\gamma(I) = I$, γ tem de ser contínua. Se γ tivesse uma descontinuidade do tipo salto, teríamos, necessariamente

$$\lim_{t \rightarrow c^-} \gamma(t) < \lim_{t \rightarrow c^+} \gamma(t).$$

Então $\gamma(I) \subseteq I \setminus (\lim_{t \rightarrow c^-} \gamma(t), \lim_{t \rightarrow c^+} \gamma(t) \setminus \{\gamma(c)\})$, o que é absurdo, pois $\gamma(C) = I$.

Apresentamos agora o gráfico da Função Escada do Diabo.

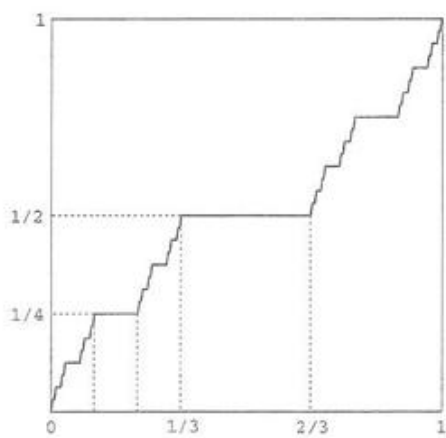


Figura 3.2: Gráfico da Escada do Diabo.

Vejamos outros exemplos de funções envolvendo o conjunto de Cantor.

Definamos as seguintes aplicações de C em I^2 e I^3 . Sejam $f : C \rightarrow I^2$ definida por

$$f(0,3(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots) = (0,2t_1t_3t_5\dots; 0,2t_2t_4t_6\dots)$$

e $g : C \rightarrow I^3$ definida por

$$g(0,3(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots) = (0,2t_1t_4t_7\dots; 0,2t_2t_5t_8\dots; 0,2t_3t_6t_9\dots).$$

Observe-se que se poderia definir, analogamente, uma função $f_n : C \rightarrow I^n$, $n \in \mathbb{N}$, generalizando as definições de f e g .

Veremos que a primeira função é sobrejectiva e contínua mas não é derivável em nenhum ponto. A demonstração destas propriedades para a função g é análoga e será omitida.

Seja $(x_0, y_0) \in I^2$ tal que $x_0 = 0,2t_1t_2t_3\dots$ e $y_0 = 0,2s_1s_2s_3\dots$ com $t_i, s_i \in \{0, 1\}$, $i \in \mathbb{N}$. Temos então $f(0,3(2t_1)(2s_1)(2t_2)(2s_2)(2t_3)(2s_3)\dots) = (x_0, y_0)$, isto é, f é sobrejectiva.

Demonstremos a continuidade de f .

Seja $t_0 \in C$. Dado $t \in C$ tal que $d(t, t_0) < \frac{1}{3^{2n}}$ então t e t_0 não podem diferir nas $2n$ primeiras posições dos seus desenvolvimentos ternários. Suponhamos que não e seja $k < 2n$ a primeira posição no desenvolvimento em dízima ternária em que t difere de t_0 .

Então $t = 0,3(2t_1)(2t_2)\dots(2t_k)(2t_{k+1})\dots$ e $t_0 = 0,3(2t_1)(2t_2)\dots(2s_k)(2s_{k+1})\dots$, com $s_k \neq t_k$ donde

$$\begin{aligned} d(t, t_0) &= |0,30\dots0(2t_k - 2s_k)(2t_{k+1} - 2s_{k+1})\dots| \\ &\geq \frac{2}{3^k} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k+j}} = \frac{1}{3^k} > \frac{1}{3^{2n}} \end{aligned}$$

o que é absurdo!

Considerando então

$$t = 0,3(2t_1)(2t_2)\dots(2t_{2n})(2t_{2n+1})\dots, \quad t_0 = 0,3(2t_1)(2t_2)\dots(2t_{2n})(2s_{2n+1})\dots,$$

temos

$$\begin{aligned} f(t) - f(t_0) &= \\ &(0,20\dots0(t_{2n+1}-s_{2n+1})(t_{2n+3}-s_{2n+3})\dots; 0,20\dots0(t_{2n+2}-s_{2n+2})(t_{2n+4}-s_{2n+4})\dots) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \|f(t) - f(t_0)\|^2 \\ & \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |t_{2n+(2j-1)} - s_{2n+(2j-1)}| \frac{1}{2^{n+j}} \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |t_{2n+2j} - s_{2n+2j}| \frac{1}{2^{n+j}} \right)^2 \\ & \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+j}} \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+j}} \right)^2 \\ & = 2 \times \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n-1}}, \end{aligned}$$

uma vez que, para todo o $j \in \mathbb{N}$,

$$|t_{2n+(2j-1)} - s_{2n+(2j-1)}| \leq 1 \quad \text{e} \quad |t_{2n+2j} - s_{2n+2j}| \leq 1.$$

Logo $\|f(t) - f(t_0)\| \leq \frac{\sqrt{2}}{2^n}$, o que mostra que f é contínua em t_0 .

Verifiquemos agora que f não é derivável em nenhum ponto.

Seja

$$t = 0,3 (2t_1)(2t_2) \dots (2t_{2n})(2t_{2n+1})(2t_{2n+2}) \dots$$

e, dado $\tau_{2n+1} \neq t_{2n+1}$, seja

$$t_n = 0,3 (2t_1)(2t_2) \dots (2t_{2n})(2\tau_{2n+1})(2t_{2n+2}) \dots$$

Temos então que $d(t, t_n) = \frac{2}{3^{2n+1}}$.

Seja φ a primeira função componente de f . Então

$$\varphi(t) - \varphi(t_n) = (t_{2n+1} - \tau_{2n+1}) \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{e} \quad \left| \frac{\varphi(t) - \varphi(t_n)}{t - t_n} \right| = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{3^{2n+1}}{2} \xrightarrow{n} +\infty,$$

isto é, φ não é derivável em t , sendo t um ponto arbitrário de C .

Voltemos à Escada do Diabo e calculemos o comprimento do seu gráfico.

Como vimos, o conjunto de Cantor tem medida nula. Portanto a função é constante em quase todo o seu domínio. Contudo, é contínua e crescente.

A função é estritamente crescente em C e nos pontos de C não é derivável. Nos restantes, a sua derivada é zero.

Para calcular o comprimento do gráfico da Escada do Diabo, consideremos a parametrização $z(t) = (t, \gamma(t))$. O seu vector velocidade não está definido no conjunto de Cantor. No complementar do conjunto de Cantor, o vector velocidade é $\mathbf{v}(t) = (1, 0)$, cujo norma é 1.

O vector velocidade está definido em quase todo o domínio de z , mas não em todo. O integral $\int_{[0,1] \setminus C} v(t) dt = \int_{[0,1] \setminus C} 1 dt = 1$, que é a medida de $[0, 1] \setminus C$.

Vejamos que o comprimento da curva z não é 1, o que significa que, apesar de γ ser uma função derivável quase sempre, o seu comprimento não pode ser calculado utilizando a fórmula usada para “curvas mais regulares”.

O conjunto C pode ser obtido como a intersecção dos conjuntos C_n , constituídos pelos 2^n intervalos disjuntos que ficam quando se procedeu ao passo n na construção do conjunto de Cantor explicada na página 36. Cada um destes intervalos tem comprimento 3^{-n} e podemos definir uma função $\gamma_n : I \rightarrow I$, como se ilustra na figura abaixo.

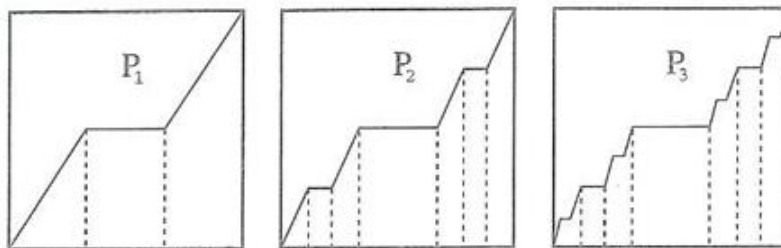


Figura 3.3: A Escada do Diabo como limite duma sucessão de aproximações poligonais.

Aproximamos, assim, a curva $z(t) = (t, \gamma(t))$, $t \in I$, por uma sucessão de aproximações poligonais, $z_n(t) = (t, \gamma_n(t))$, com os vértices pertencentes à Escada

do Diabo, não deriváveis num número finito de pontos e tais que

$$\gamma'_n(t) = \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^n & \text{se } t \in \overset{\circ}{C}_n, \\ 0 & \text{se } t \in I \setminus C_n. \end{cases}$$

Então, como $|C_n| = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, em que $|C_n|$ representa a medida do conjunto C_n , temos que

$$\begin{aligned} L(z_n) &= \int_{C_n} \sqrt{1 + (\gamma'_n(t))^2} dt + \int_{[0,1] \setminus C_n} 1 dt \\ &= \int_{C_n} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{2n}} dt + |[0,1] \setminus C_n| \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{2n}} + \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \end{aligned}$$

que tende para 2, quando n tende para infinito.

Então o comprimento do gráfico da Escada do Diabo é 2.

3.4 A Curva de Peano

Peano foi o primeiro matemático a apresentar a construção duma função contínua definida num intervalo cuja imagem é um quadrado.

A construção de Peano baseia-se na representação na base 3 dos números entre 0 e 1 e apresenta-se aqui a definição analítica da função, apresentada por Peano, e não a construção das iterações sucessivas, que pode ser visualizada em algumas das páginas da Internet indicadas na bibliografia.

Começemos por definir a função $k : \{0, 1, 2\} \longrightarrow \{0, 1, 2\}$. Notando que

$$t \quad \mapsto \quad 2 - t.$$

$k^0 = Id$ (a função identidade), $k^1 = k$ e $k^2 = k \circ k$, que a representação dum

número na base 3 só utiliza os algarismos 0, 1 e 2 e que $I = [0, 1]$, a função procurada é $F_P : I \rightarrow I^2$ definida do seguinte modo:

$$F(0,3 t_1 t_2 \dots t_n \dots) = (0,3 (t_1) k^{t_2} (t_3) k^{t_2+t_4} (t_5) \dots; 0,3 k^{t_1} (t_2) k^{t_1+t_3} (t_4) \dots).$$

Seguidamente apresenta-se a construção de uma sucessão de curvas cujo limite é também uma curva que enche o quadrado. Vamos definir uma sucessão de funções $f_n : I \rightarrow I^2$, utilizando um processo iterativo. Dividimos I em 9 intervalos iguais

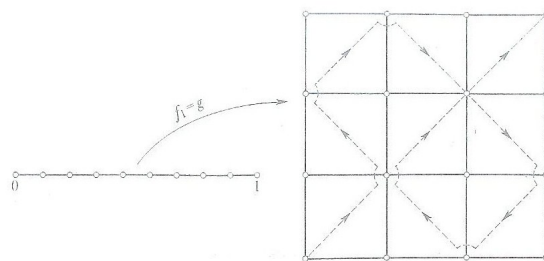


Figura 3.4: Primeira iteração duma curva de Peano.

e definimos f_1 , seccionalmente linear, fazendo

$$f_1(0) = (0, 0), \quad f_1\left(\frac{1}{9}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad f_1\left(\frac{2}{9}\right) = \left(0, \frac{2}{3}\right), \quad f_1\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, 1\right), \quad f_1\left(\frac{4}{9}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$f_1\left(\frac{5}{9}\right) = \left(1, \frac{1}{3}\right), \quad f_1\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, 0\right), \quad f_1\left(\frac{7}{9}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad f_1\left(\frac{8}{9}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad f_1(1) = (1, 1),$$

segundo o esquema da figura acima.

Tendo definido f_1 , vamos definir f_n , para $n > 1$, por um processo indutivo. Consideremos uma subdivisão P_n do intervalo I em 9^n intervalos consecutivos de amplitude 9^{-n} e uma subdivisão Q_n do quadrado I^2 em 9^n quadrados contíguos, de área 3^{-n} . A função $f_n : I \rightarrow I^2$ deverá satisfazer as seguintes propriedades:

1. a subdivisão P_{n+1} resulta de P_n dividindo cada intervalo de P_n em 9 sub-intervalos;

2. a subdivisão Q_{n+1} resulta da subdivisão Q_n , dividindo cada quadrado de Q_n em 9 quadrados;
3. cada intervalo de P_n é enviado numa diagonal de um quadrado de Q_n ;
4. cada quadrado da subdivisão Q_n tem uma diagonal que é imagem de um sub-intervalo da subdivisão P_n ;
5. a função que satisfaz os dois itens anteriores deve, na passagem de cada 9 quadrados, que formam um quadrado da subdivisão anterior, para os 9 quadrados seguintes, colar, obedecendo, por rotação adequada, a um esquema análogo ao indicado na figura acima, de modo a obtermos uma função contínua.

Por construção, as funções f_n são contínuas e prova-se que a sucessão $(f_n)_n$ converge uniformemente para uma função f . Consequentemente, f é contínua. Mostra-se que a função f é sobrejectiva (ver [4]). O gráfica de f é uma parametrização da curva de Peano.

Capítulo 4

Geometria local de curvas rectificáveis

Neste capítulo abordamos algumas propriedades geométricas que consideramos importantes no estudo de curvas contínuas.

4.1 Tangente, cone, comprimento de arco e envolvente convexa

As curvas Γ que iremos considerar neste capítulo serão simples, i.e., a parametrização $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$ será sempre uma função bijectiva. Quando a curva admite derivada, a noção de comprimento está claramente relacionada com a derivada.

Mais precisamente

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Mas, infelizmente, esta noção desaparece quando estamos a considerar, por exemplo, curvas fractais.

Vamos introduzir quatro propriedades que possam ser satisfeitas por Γ numa vizinhança de um ponto; cada uma delas pode caracterizar localmente a noção de rectificabilidade. Veremos que:

- apenas duas destas propriedades são equivalentes;
- se a curva tem comprimento finito então as quatro propriedades são satisfeitas quase sempre.

Fixado $x_0 \in \Gamma$, as propriedades referidas são as seguintes:

- Seja x um ponto qualquer de Γ , e seja $T(x_0, x)$ a recta que passa pelos pontos x_0 e x .

(P1) *Existe tangente¹ à direita $T(x_0^+)$ e à esquerda $T(x_0^-)$ no ponto x_0 , isto é, existem os limites*

$$T(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \quad \text{e} \quad T(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}.$$

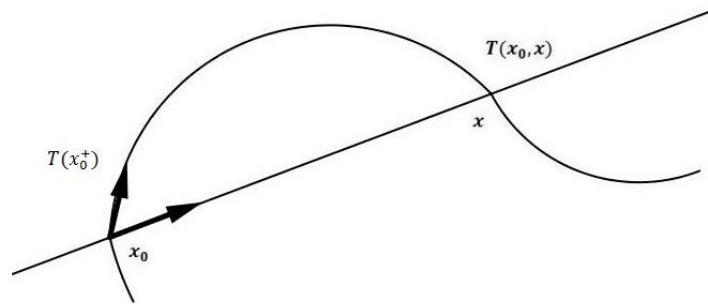


Figura 4.1: Limite de uma corda $T(x_0, x)$.

¹Aqui, o limite quando $x \rightarrow x_0^+$ (quando $x \rightarrow x_0^-$) significa que x está à direita (respectivamente à esquerda) de x_0 no sentido da parametrização. Quando $T(x_0^-) = -T(x_0^+)$ então existe tangente $T(x_0)$ a Γ em x_0 .

- Seja $\varepsilon > 0$. Quando uma curva é regular numa vizinhança de x_0 podemos incluir um conjunto de pontos de Γ , cuja distância a x_0 é menor que ε , num cone com vértice x_0 e ângulo θ . Quanto mais regular for a curva, menor é o ângulo que podemos escolher. Seja $\theta_\varepsilon(x_0)$ o menor ângulo (quando o cone não existe consideramos $\theta_\varepsilon(x_0) = \pi$, para que a função θ_ε possa estar definida em todos os pontos de Γ). Quando ε diminui, o valor de $\theta_\varepsilon(x_0)$ também diminui. Assim, existe o limite de $\theta_\varepsilon(x_0)$ quando ε tende para 0.

(P2) O limite de $\theta_\varepsilon(x_0)$ é nulo quando ε tende para 0.

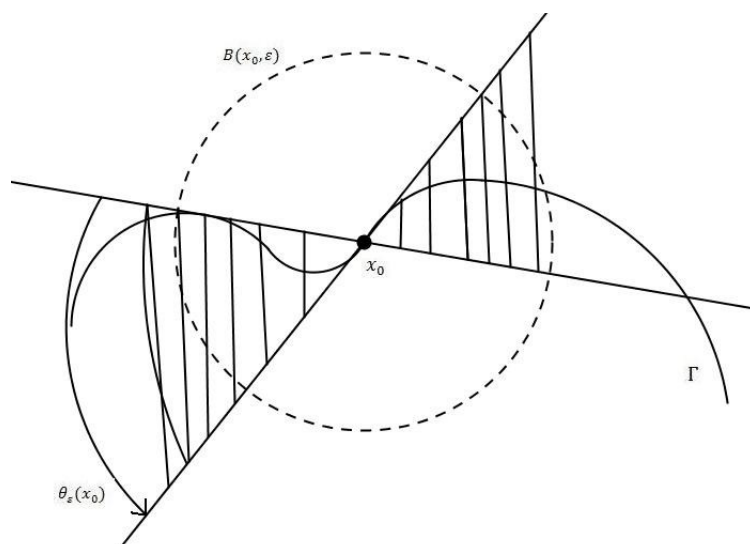


Figura 4.2: Numa vizinhança de x_0 , a curva está incluída num cone de vértice x_0 e ângulo θ_ε .

- Se Γ é retilínea numa vizinhança de x_0 então o arco $\widehat{x_0x}$ é um segmento com comprimento igual à distância entre x_0 e x . Para qualquer curva, estes dois valores podem ser estimados para verificar se o limite da sua razão traduz um comportamento local linear de Γ .

(P3) O limite da razão $\frac{L(\widehat{x_0x})}{\|x-x_0\|}$ é igual a 1 quando x tende para x_0 .

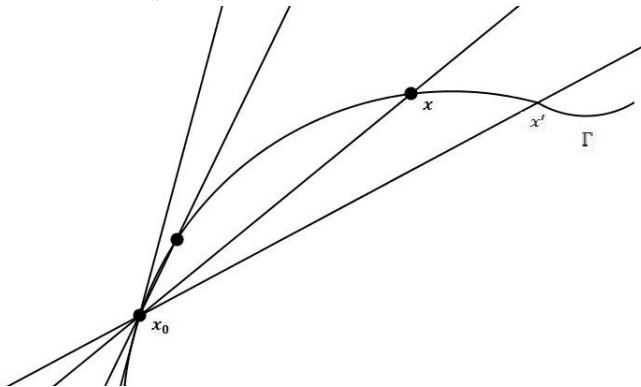


Figura 4.3: Secantes a tender para a tangente em x_0 .

- Consideremos a envolvente convexa $\mathcal{K}(\widehat{x_0x})$ do sub-arco $\widehat{x_0x}$ de Γ . A sua área $\mathcal{A}(\mathcal{K}(\widehat{x_0x}))$ não é nula a não ser que $\widehat{x_0x}$ seja um segmento de recta. Se a distância entre x_0 e x for fixa, esta área será tanto menor quanto mais próximo de um segmento for o arco e será maior quanto mais caótico for o arco.

(P4) O limite da razão $\frac{\mathcal{A}(\mathcal{K}(\widehat{x_0x}))}{\|x-x_0\|^2}$ é igual a 0 quando x tende para x_0 .

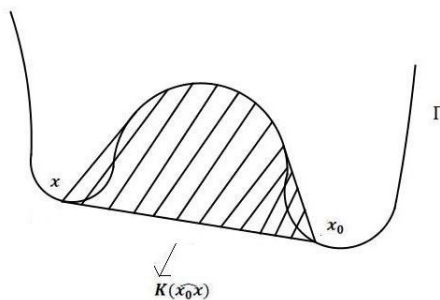


Figura 4.4: Envolvente convexa de um arco $\widehat{x_0x}$.

Veremos que existem as seguintes relações entre as quatro propriedades,

$$(\mathbf{P}_1) \iff (\mathbf{P}_2) \quad \text{e} \quad (\mathbf{P}_3) \implies (\mathbf{P}_4)$$

e que não podemos deduzir mais nenhuma outra implicação entre elas.

Iremos provar as duas relações acima descritas e apresentaremos contra-exemplos para as restantes.

Enunciamos aqui, sem demonstração (ver [6]), um teorema que relaciona as quatro propriedades para curvas de comprimento finito.

Teorema 4.1.1. *Se uma curva simples tem comprimento finito então as propriedades (P₁), (P₂), (P₃) e (P₄) são verdadeiras quase sempre.*

4.2 Relações entre as propriedades locais

Teorema 4.2.1. *(P₁) e (P₂) são equivalentes.*

Demonstração: Fixemos um ponto x_0 e seja $\theta_\varepsilon(x_0) = \theta_\varepsilon$.

i) Suponhamos que (P₁) é satisfeita. Como $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$ existe então para todo o ϕ no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, existe um ε positivo tal que se $\|x - x_0\| < \varepsilon$ então $\angle[(T(x_0)), T(x_0, x)] < \phi$.

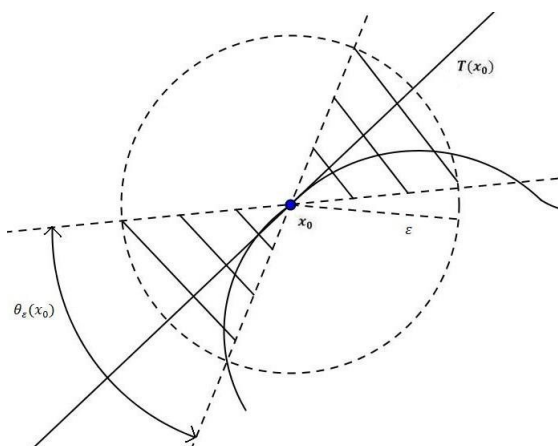


Figura 4.5: A corda $T(x_0, x)$ está contida num cone à direita de vértice x_0 .

A corda $T(x_0, x)$ está contida num cone de vértice x_0 e ângulo 2ϕ . Como o ângulo θ_ε é menor que 2ϕ e ϕ pode ser tão pequeno quanto se queira, temos **(P2)** demonstrada.

ii) Suponhamos agora que **(P2)** é satisfeita no ponto x_0 . Seja D_ε o eixo do cone C_ε cujo vértice é x_0 e ângulo θ_ε . Se ε' for menor que ε então $C_{\varepsilon'}$ está contida em C_ε .

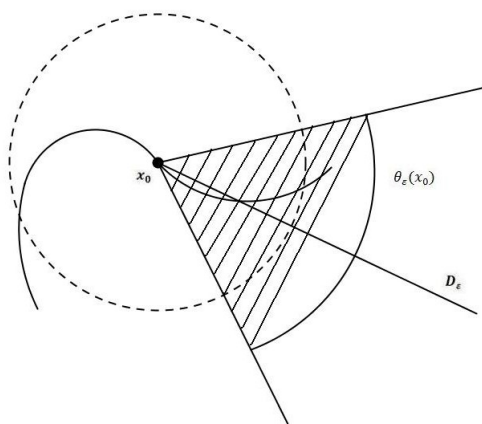


Figura 4.6: A corda $T(x_0, x)$ tende para a tangente no ponto x_0 .

Assim sendo, $\varepsilon' < \varepsilon \implies \angle(D_\varepsilon, D_{\varepsilon'}) \leq \theta_\varepsilon$. Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, por hipótese $\theta_\varepsilon \rightarrow 0$, logo $D_\varepsilon \rightarrow D_0$ para alguma recta D_0 . Mas $\|x - x_0\| < \varepsilon \implies \angle(D_\varepsilon, T(x, x_0)) < \theta_\varepsilon$ logo fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ tem-se $\theta_\varepsilon \rightarrow 0$ logo $T(x, x_0) \rightarrow D_0$. Isto prova que quando ε tende para 0, a semi-recta que contém a corda $T(x_0, x)$ tende para uma semi-recta, D_0 que, por conseguinte, é a tangente à direita (ou à esquerda) da curva no ponto x_0 . \square

Teorema 4.2.2. **(P3) \implies (P4).**

Demonstração: Aplicando a Proposição 1.2.1, temos o seguinte resultado:

$$\mathcal{A}(\mathcal{K}(\widehat{x_0x})) \leq L(\widehat{x_0x})^{\frac{3}{2}} \sqrt{L(\widehat{x_0x}) - \|x - x_0\|}.$$

Então,

$$\frac{\mathcal{A}(\mathcal{K}(\widehat{x_0x}))}{\|x - x_0\|^2} \leq \frac{L(\widehat{x_0x})^{\frac{3}{2}} \sqrt{L(\widehat{x_0x}) - \|x - x_0\|}}{\|x - x_0\|^2},$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}(\mathcal{K}(\widehat{x_0x}))}{\|x - x_0\|^2} &\leq \frac{L(\widehat{x_0x})^{\frac{3}{2}} \sqrt{L(\widehat{x_0x}) - \|x - x_0\|}}{\|x - x_0\|^{\frac{3}{2}} \|x - x_0\|^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{\mathcal{A}(\mathcal{K}(\widehat{x_0x}))}{\|x - x_0\|^2} &\leq \left(\frac{L(\widehat{x_0x})}{\|x - x_0\|} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{L(\widehat{x_0x})}{\|x - x_0\|} - 1}. \end{aligned}$$

Como a razão $\frac{L(\widehat{x_0x})}{\|x - x_0\|}$ tende para 1, fica demonstrada a implicação. \square

1. Mostremos que **(P1)** não implica **(P4)** (então **(P1)** não implica **(P3)**).

Seja $z(t)$ a função definida por
$$\begin{cases} z(0) = 0 \\ z(t) = t^{\frac{3}{4}} + t^{\frac{1}{4}}(1 + \cos \frac{1}{t}), 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

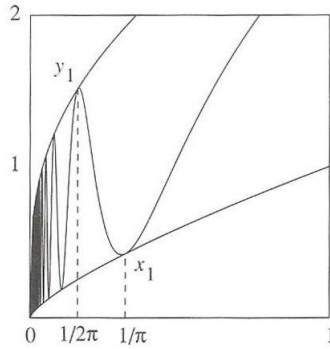


Figura 4.7: O gráfico da função $z(t) = t^{\frac{3}{4}} + t^{\frac{1}{4}}(1 + \cos \frac{1}{t})$ está enquadrado entre os gráficos de $t^{\frac{3}{4}}$ e $t^{\frac{3}{4}} + 2t^{\frac{1}{4}}$.

O gráfico de z , que designamos por Γ , está enquadrado entre os gráficos de $t^{\frac{3}{4}}$ e $t^{\frac{3}{4}} + 2t^{\frac{1}{4}}$ e a inclinação da recta tangente a estes dois gráficos, na origem,

é $+\infty$, uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{\frac{3}{4}} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^{\frac{1}{4}}} = +\infty$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{\frac{3}{4}} + 2t^{\frac{1}{4}} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t^{\frac{1}{4}}} + \frac{2}{t^{\frac{3}{4}}} \right) = +\infty.$$

Deduz-se, então, que a recta tangente a Γ em O é o eixo Oz .

Assim **(P1)** é satisfeita em O .

Consideremos agora X_k, Y_k pontos de Γ cujas abcissas são $x_k = \frac{1}{(2k-1)\pi}$ e $y_k = \frac{1}{2k\pi}$, respectivamente. Vejamos que a curva não satisfaz a propriedade **(P4)** no ponto O . Como

$$\begin{aligned} X_k &= \left(\frac{1}{(2k-1)\pi}, \frac{1}{[(2k-1)\pi]^{\frac{3}{4}}} + \frac{1}{[(2k-1)\pi]^{\frac{1}{4}}} [1 + \cos(2k-1)\pi] \right) \\ &= \left(\frac{1}{(2k-1)\pi}, \frac{1}{[(2k-1)\pi]^{\frac{3}{4}}} \right) \\ &= (x_k, z(x_k)) \\ Y_k &= \left(\frac{1}{2k\pi}, \frac{1}{[2k\pi]^{\frac{3}{4}}} + \frac{1}{[2k\pi]^{\frac{1}{4}}} [1 + \cos 2k\pi] \right) \\ &= \left(\frac{1}{2k\pi}, \frac{1}{[2k\pi]^{\frac{3}{4}}} + \frac{2}{[2k\pi]^{\frac{1}{4}}} \right) \\ &= (y_k, z(y_k)) \end{aligned}$$

temos então o seguinte produto vectorial

$$\overrightarrow{OX_k} \times \overrightarrow{OY_k} = \begin{pmatrix} x_k & z(x_k) & 0 \\ y_k & z(y_k) & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, x_k z(y_k) - y_k z(x_k))$$

e a área do triângulo $OX_k Y_k$ é dada por

$$A_{\Delta OX_k Y_k} = \frac{1}{2} |x_k z(y_k) - y_k z(x_k)|.$$

Mas

$$x_k z(y_k) = \frac{1}{(2k-1)\pi} \left(\frac{1}{(2k\pi)^{\frac{3}{4}}} + \frac{2}{(2k\pi)^{\frac{1}{4}}} \right) \sim k^{-\frac{5}{4}},$$

onde $a_k \sim b_k$ significa que $\lim_k \frac{a_k}{b_k}$ é finito. Além disso,

$$y_k z(x_k) = \frac{1}{2k\pi} \frac{1}{(2k-1)\pi^{\frac{3}{4}}} \sim k^{-\frac{7}{4}},$$

donde

$$A_{\Delta O X_k Y_k} \sim k^{-\frac{5}{4}}$$

e, como

$$\|X_k - O\|^2 \sim k^{-\frac{3}{2}},$$

então a razão

$$\frac{A(\mathcal{K}(\overline{O X_k}))}{\|X_k - O\|^2} \sim \frac{k^{-\frac{5}{4}}}{k^{-\frac{3}{2}}} = k^{\frac{1}{4}}$$

tende para infinito, quando k tende para infinito e

$$\lim_{X \rightarrow O} \frac{A(\mathcal{K}(\widehat{O X}))}{\|X - O\|^2}$$

não é zero.

2. Vejamos que **(P4)** não implica **(P3)**.

Consideremos a função z tal que
$$\begin{cases} z(0) = 0, \\ z(t) = t^2 \cos \frac{1}{t^2}, \quad t > 0. \end{cases}$$

Mostremos que o gráfico Γ satisfaz **(P4)** mas não **(P3)** no ponto O .

Seja X um ponto da curva com coordenadas $(t, z(t))$, a área da envolvente convexa do arco $\widehat{O X}$ é menor que a área t^3 do triângulo cujos vértices são O , (t, t^2) e $(t, -t^2)$. Como $\|X - O\| \geq t$, então deduzimos que $\frac{A(\mathcal{K}(\widehat{O X}))}{\|X - O\|^2} \leq t$, donde **(P4)** é satisfeita no ponto O .

Por outro lado, o comprimento da parte de Γ que corresponde às abcissas cujos valores estão entre $\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}$ e $\frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}}$ é maior que, respectivamente

$$\left| z\left(\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}\right) \right| = \left(\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}\right)^2 \cos \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}\right)^2} = \frac{1}{2k\pi},$$

e que

$$\left| z\left(\frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}}\right) \right| = \left(\frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}}\right)^2 \left| \cos \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}}\right)^2} \right| = \frac{1}{(2k+1)\pi}.$$

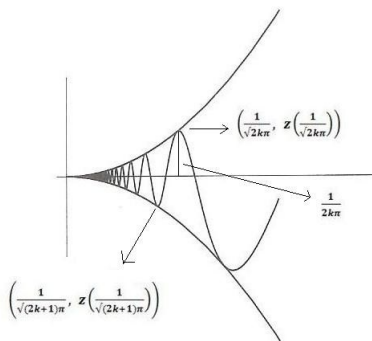


Figura 4.8: Gráfico de $z(t) = t^2 \cos \frac{1}{t^2}$.

A soma destes comprimentos, para $k \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$), diverge, tal como a série harmónica. De facto, cada arco $X_k \widehat{Y}_k$ de Γ tem comprimento maior ou igual a $\frac{1}{2k\pi}$, pois

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{2k\pi}} \implies z(x_k) = \frac{1}{2k\pi} \quad y_k = \frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}} \implies z(y_k) = \frac{-1}{(2k+1)\pi}.$$

Verifica-se que

$$L(X_k \widehat{Y}_k) \geq \frac{1}{2k\pi} + \frac{1}{(2k+1)\pi} \geq \frac{1}{2k\pi},$$

$$L(X_k \widehat{Y}_k \cup X_{k+1} \widehat{Y}_{k+1} \cup \dots \cup X_{k+N} \widehat{Y}_{k+N}) \geq \frac{1}{2k\pi} + \frac{1}{2(k+1)\pi} + \dots + \frac{1}{2(k+N)\pi}$$

e, então, $L(O \widehat{X}_k)$ tende para infinito, porque $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{k}$ é divergente.

Assim, Γ não verifica **(P3)** no ponto O .

3. **(P3)** não implica **(P1)**

Como **(P3)** implica **(P4)**, conclui-se também que **(P4)** não implica **(P1)**.

Consideremos a função $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t, z(t))$ em que

$$\begin{cases} z(0) = 0 \\ z(t) = t \cos \theta(t), 0 < t \leq 1, \end{cases} \quad \text{e } \theta(t) = \log(\log(\frac{2}{t})).$$

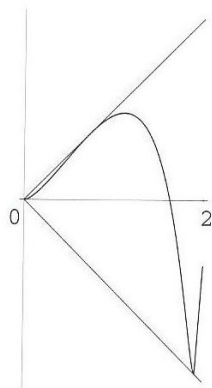


Figura 4.9: $z(t) = t \cos(\log(\log(\frac{2}{t})))$.

Então

i.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \theta(t) = +\infty;$$

ii.

$$\theta'(t) = \frac{[\log \frac{2}{t}]'}{\log \frac{2}{t}} = \frac{(\frac{2}{t})'}{\frac{2}{t}} = \frac{\frac{-2}{t^2}}{\frac{2}{t}} = \frac{-1}{t \log \frac{2}{t}};$$

iii.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t\theta'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\log \frac{2}{t}} = 0.$$

Temos que

- $\theta(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} +\infty \implies \exists (x_n)_n : \quad x_n \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \cos \theta(x_n) = 1,$
logo $z(x_n) = x_n$
- $\theta(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} +\infty \implies \exists (y_n)_n : \quad y_n \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \cos \theta(y_n) = -1,$
então $z(y_n) = -y_n$

pelo que α não satisfaz **(P1)**.

Falta mostrar que α satisfaz **(P3)**, i.e., se $X = (t, z(t))$ é um ponto da curva Γ então a razão $\frac{L(\widehat{OX})}{\|X-O\|}$ tende para 1 quando t tende para zero.

Recorde-se que

$$L(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{1 + (z'(t))^2} dt.$$

Consideremos os pontos $(0, 0)$ e $X = (t, z(\theta(t)))$. Sejam

$$f(t) = \int_0^t \sqrt{1 + (z'(t))^2} dt \quad \text{e}$$

$$g(t) = \|X - O\| = \sqrt{t^2 + z^2(\theta(t))} = \sqrt{t^2 + t^2 \cos^2 \theta(t)} = t\sqrt{1 + \cos^2 \theta(t)}.$$

Tendo em conta que $z(t) = t \cos \theta(t)$ temos que $z'(t) = \cos \theta(t) - t\theta'(t) \sin \theta(t)$.

Note-se que $t\theta'(t) \sin \theta(t)$ tende para 0 quando t tende para 0. As funções f e g são diferenciáveis para todo $t > 0$. As suas derivadas podem ser escritas na seguinte forma:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sqrt{1 + \cos^2 \theta(t)} + t \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cos \theta(t) \sin \theta(t) \theta'(t)}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta(t)}} \\ &= \sqrt{1 + \cos^2 \theta(t)} + \varepsilon_1(t) \quad (\text{e } \varepsilon_1(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0) \\ f'(t) &= \sqrt{1 + (z'(t))^2} \\ &= \sqrt{1 + [\cos \theta(t) - t\theta'(t) \sin \theta(t)]^2} \\ &= \sqrt{1 + \cos^2 \theta(t)} + \varepsilon_2(t) \quad (\text{e } \varepsilon_2(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0). \end{aligned}$$

Assim, como $f(0) = g(0) = 0$, então

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(\widehat{OX})}{\|X - O\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad (4.1)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \theta(t)} + \varepsilon_1(t)}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta(t)} + \varepsilon_2(t)} = 1.$$

o que conclui a demonstração de que **(P3)** é satisfeita.

Capítulo 5

Comprimento através da área de bolas centradas

5.1 Salsicha de Minkowski

A união de discos $D(x, \varepsilon)$ é, por vezes, conhecida por dilatação - ε de um conjunto P mas também, como já referimos no capítulo 3, por *Salsicha de Minkowski de P* .

Quando consideramos a salsicha - ε duma curva Γ no plano, quanto maior for a área deste conjunto, mais caótica é a curva.

O diâmetro duma curva Γ é o comprimento da maior corda de Γ . Se Γ é um segmento de comprimento l então $\mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon)) = 2l\varepsilon + \pi\varepsilon^2$ onde $\mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon))$ representa a área de salsicha - ε de Minkowski de Γ . Esta é a menor área que a salsicha de Minkowski duma curva com diâmetro l pode ter.

Proposição 5.1.1. *Seja Γ uma curva. Então $\mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon)) \geq 2\varepsilon\delta(\Gamma) + \pi\varepsilon^2$.*

Demonstração: Sejam A e B dois pontos de Γ tais que $d(A, B) = \delta(\Gamma)$.

Cada recta perpendicular à recta AB que intersecta Γ , intersecta $\Gamma(\varepsilon)$ e esta intersecção contém um segmento cujo comprimento é, no mínimo, igual a 2ε .

Deduz-se que a área da parte de $\Gamma(\varepsilon)$ que pode ser projectada ortogonalmente em $[AB]$ é no mínimo igual a $2\varepsilon \delta(\Gamma)$.

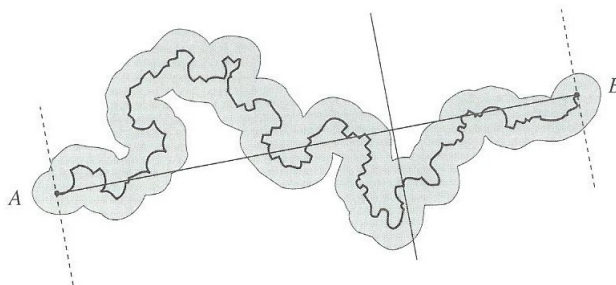


Figura 5.1: A área da ε -salsicha de Minkowski da curva Γ que passa pelos pontos A e B é maior que $2\varepsilon d(A, B) + \pi\varepsilon^2$.

Por outro lado, há dois semi-discos centrados nas extremidades da curva e disjuntos do conjunto anterior. Assim,

$$\mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon)) \geq 2\varepsilon \delta(\Gamma) + \pi\varepsilon^2.$$

□

Dado um segmento com comprimento l , a razão $\frac{\mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon))}{2\varepsilon}$ tende para l quando ε tende para 0. Este resultado pode ser generalizado para curvas.

Teorema 5.1.1. *Seja Γ uma curva simples de comprimento finito. O seu comprimento é dado por*

$$L(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon))}{2\varepsilon}.$$

A secção seguinte é dedicada à demonstração deste teorema.

5.2 Comprimento através da área da salsicha

Recordemos propriedades válidas em *quase todos os pontos* duma curva Γ de comprimento finito, mencionadas no capítulo anterior:

$$(P2) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \theta_r(x) = 0;$$

$$(P3) \quad \lim_{y \rightarrow x} \frac{L(\widehat{xy})}{\|x - y\|} = 1.$$

Calculemos, aproximadamente, o valor de $\mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon))$ cobrindo $\Gamma(\varepsilon)$ com rectângulos. Fixemos um número real a , com $a > 1$ e um ângulo θ tal que $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$.

Defina-se o seguinte conjunto, para $r > 0$,

$$E_r = \left\{ x \in \Gamma : \begin{array}{l} (i) \quad \theta_{2r}(x) \leq \theta, \\ (ii) \quad (y \in \Gamma, \quad \|x - y\| \leq r) \implies L(\widehat{xy}) \leq a \|x - y\| \end{array} \right\}. \quad (5.1)$$

$$a) \quad \text{Mostremos que } L(\Gamma) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon))}{2\varepsilon}.$$

Fixado r , dividamos a curva Γ em sub-arcos de comprimento r (caso a divisão não seja exacta, faz-se uma aproximação numa das extremidades).

Sejam $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_N$ os sub-arcos cuja intersecção com E_r não é vazia. Sejam A_i e B_i as extremidades de Γ_i e $S_i = A_i B_i$ as cordas correspondentes de Γ . Seja x_i um ponto de $\Gamma_i \cap E_r$. É imediato verificar que $L(E_r) \leq Nr \leq L(\Gamma)$.

Por outro lado,

$$r = L(\Gamma_i) \leq \frac{a}{\cos \theta} L(S_i).$$

Verifiquemos a desigualdade acima. Podemos observar, por (i) de (5.1), que, para r suficientemente pequeno, os ângulos $\angle(A_i x_i, S_i) = \theta_1$ e $\angle(B_i x_i, S_i) = \theta_2$ são menores que θ uma vez que $\theta_1 + \theta_2 = \pi - \theta^* \leq \theta < \frac{\pi}{4}$ (ver figura a seguir).

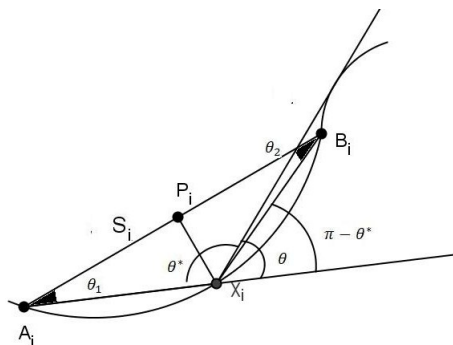


Figura 5.2: Os ângulos $\angle(A_i x_i, S_i)$ e $\angle(B_i x_i, S_i)$ são menores que θ .

Podemos deduzir que

$$\begin{aligned} L(S_i) &= \overline{A_i B_i} = \overline{A_i P_i} + \overline{P_i B_i} \\ \frac{\overline{A_i P_i}}{\overline{A_i x_i}} &= \cos \theta_1 \geq \cos \theta \\ \overline{A_i P_i} &\geq \cos \theta \overline{A_i x_i} \\ \overline{B_i P_i} &\geq \cos \theta \overline{B_i x_i}. \end{aligned}$$

Assim,

$$L(S_i) \geq \cos \theta (\overline{A_i x_i} + \overline{B_i x_i}),$$

donde,

$$\overline{A_i x_i} + \overline{B_i x_i} \leq \frac{L(S_i)}{\cos \theta}.$$

Utilizando agora (ii) de (5.1), temos que

$$L(\widehat{A_i x_i}) \leq a \overline{A_i x_i} \quad \text{e} \quad L(\widehat{B_i x_i}) \leq a \overline{B_i x_i},$$

donde se prova a seguinte desigualdade pretendida

$$L(\Gamma_i) \leq a (\overline{A_i x_i} + \overline{B_i x_i}) \leq a \frac{L(S_i)}{\cos \theta}.$$

Construa-se um rectângulo C_i , como está indicado na figura abaixo. Dois dos lados de cada rectângulo (os que são paralelos a S_i) têm o comprimento de S_i e o

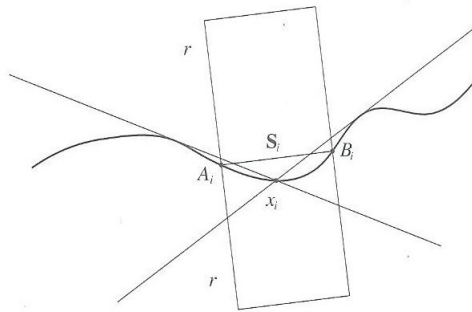


Figura 5.3: Na vizinhança do ponto x_i que pertence ao arco $\widehat{A_i B_i}$ de comprimento r , construímos o rectângulo C_i .

rectângulo é simétrico relativamente a S_i , medindo $2r$ os lados perpendiculares a S_i . Da condição (i) de (5.1) podemos deduzir que distância de cada ponto da corda S_i a Γ_i é menor que $\theta L(S_i)$, isto é, dado $s \in S_i$, temos que $d(s, \Gamma_i) = \inf_{y \in \Gamma_i} d(s, y) = d(s, y_i) \leq d(s, z_i) \leq d(u_i, w_i)$, sendo esta distância, menor ou igual que o comprimento do arco correspondente, ou seja, $\theta L(S_i)$, e portanto menor que θr .

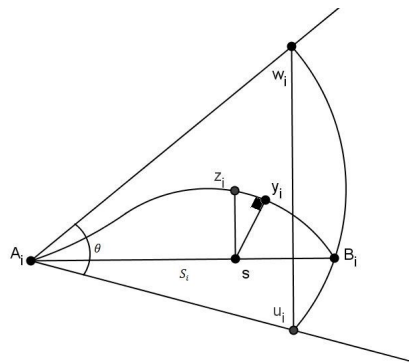


Figura 5.4: Distância de um ponto da corda S_i a Γ_i é menor que $\theta L(S_i)$.

Isto implica que a distância entre qualquer ponto do rectângulo C_i e Γ será menor que $r(1 + \theta)$,

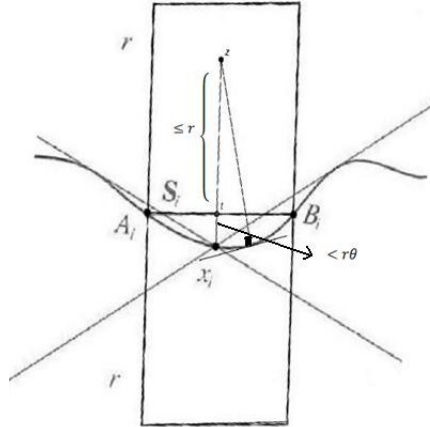


Figura 5.5: Distância de um ponto da corda C_i a Γ_i é menor que $r(1 + \theta)$.

deduzindo-se assim, para todo i , que $C_i \subseteq \Gamma(r(1 + \theta))$.

Como os pontos de $\Gamma \cap D(x_i, 2r)$ estão num cone com vértice x_i e ângulo menor que θ , isto implica que dois quaisquer rectângulos C_i e C_k não se podem intersectar a não ser que os segmentos S_i e S_k sejam cordas consecutivas de Γ .

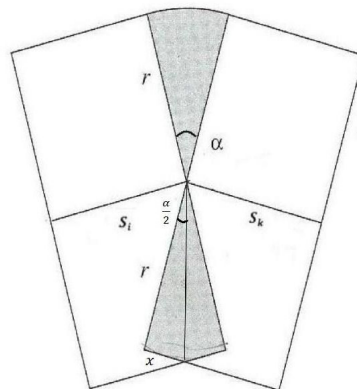


Figura 5.6: Rectângulos C_i e C_k consecutivos.

Denotemos por A a área da parte comum de dois rectângulos consecutivos definido como na figura anterior.

Como o ângulo $\alpha = \angle(S_i, S_k)$ é menor que 2θ , para r suficientemente pequeno, verificamos que

$$A = 2 \cdot \frac{rx}{2} = rx = r(r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}) = r^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \leq r^2 \operatorname{tg} \theta,$$

uma vez que $\alpha \leq 2\theta$.

Para finalizar, seja $\varepsilon = r(1 + \theta)$. O conjunto $\Gamma(\varepsilon)$ contém N rectângulos cujas áreas das partes comuns já foram estimadas. Então

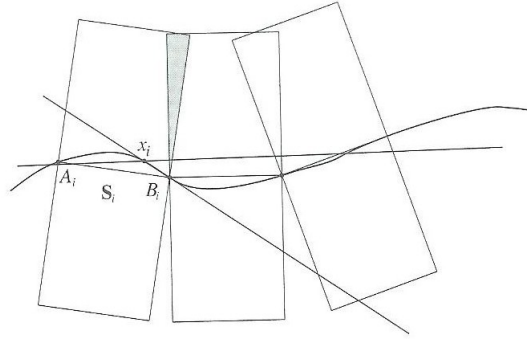


Figura 5.7: A curva está coberta por rectângulos C_i .

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon)) &\geq \sum_{i=1}^N \mathcal{A}(C_i) - Nr^2 \operatorname{tg} \theta \\ &= 2r \sum_{i=1}^N L(S_i) - Nr^2 \operatorname{tg} \theta \end{aligned}$$

e, como $L(S_i) \geq r \frac{\cos \theta}{a}$ então $\mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon)) \geq \frac{2}{a} Nr^2 \cos \theta - Nr^2 \operatorname{tg} \theta$. Esta desigualdade conduz a

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon))}{2\varepsilon} &= \frac{\mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon))}{2r(1 + \theta)} \geq \frac{2Nr^2 \cos \theta}{2r(1 + \theta)a} - \frac{Nr^2 \operatorname{tg} \theta}{2r(1 + \theta)} \\ &= \frac{Nr \cos \theta}{a(1 + \theta)} - \frac{Nr \operatorname{tg} \theta}{2(1 + \theta)} \\ &\geq \frac{\cos \theta}{a(1 + \theta)} L(E_r) - \frac{\operatorname{tg} \theta}{2(1 + \theta)} L(\Gamma) \end{aligned}$$

e fazendo ε tender para 0, também r tende para 0 e $L(E_r)$ tende para $L(\Gamma)$. Então

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon))}{2\varepsilon} &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\cos \theta}{a(1+\theta)} L(E_r) - \frac{\operatorname{tg} \theta}{2(1+\theta)} L(\Gamma) \right) \\ &= \frac{\cos \theta}{a(1+\theta)} L(\Gamma) - \frac{\operatorname{tg} \theta}{2(1+\theta)} L(\Gamma) \\ &= \frac{1}{1+\theta} \left(\frac{\cos \theta}{a} - \frac{\operatorname{tg} \theta}{2} \right) L(\Gamma). \end{aligned}$$

Fazendo agora $\theta \rightarrow 0$ e $a \rightarrow 1$, conclui-se que $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon))}{2\varepsilon} \geq L(\Gamma)$.

b) Para provar a desigualdade no sentido contrário, comecemos por encontrar o maior inteiro N para o qual existe uma linha poligonal P , que segue a orientação da trajectória da curva, cujos vértices estão em Γ e cujos segmentos têm comprimento r e, além disso, cada ponto de Γ_i dista de S_i no máximo r .

Assumamos que P e Γ tem as mesmas extremidades (se assim não for, uma pequena correcção será feita no último segmento). Sejam $S_1, S_2, S_3, \dots, S_N$ esses segmentos e sejam $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_N$ os arcos correspondentes em Γ . As extremidades de cada segmento S_i (e de Γ_i) são x_i e x_{i+1} , estando estes pontos numerados pela mesma ordem que a parametrização.

Os arcos Γ_i podem ser divididos em duas classes: a classe dos arcos Γ_i^* que contêm pelo menos um ponto em E_r e a classe dos arcos Γ_i^{**} que não contêm nenhum ponto nessas condições.

Seja M o número de arcos da primeira classe. Como $\bigcup_{i=1}^M \Gamma_i^* \supseteq E_r$, por (ii) de (5.1), os seus comprimentos são menores que ar e

$$L(E_r) \leq \sum_{i=1}^M L(\Gamma_i^*) \leq \sum_{i=1}^M ar = Mar \quad (5.2)$$

e, como consequência, $M \geq \frac{L(E_r)}{ar}$.

Notamos que, por (i) de (5.1), $d_H(\Gamma_i^*, S_i) \leq r\theta$.

Construimos em ambos os lados de S_i um quadrado de lado r formando um rectângulo C_i de dimensões de $r \times 2r$. Sejam $\varepsilon = r(1 - \theta)$ e y um ponto de $\Gamma(\varepsilon)$, sendo $\Gamma(\varepsilon)$ a salsicha - ε de Minkowski de Γ . Podemos considerar dois casos:

1. Se existir um arco Γ_j^{**} tal que $d(y, \Gamma_j^{**}) \leq \varepsilon$ então $y \in D(x_j, r + \varepsilon)$, uma vez que

$$d(y, \Gamma_j^{**}) = \inf_{w \in \Gamma_j^{**}} d(y, w) \leq \varepsilon \Rightarrow \exists x_0 \in \Gamma_j^{**} : d(y, x_0) \leq \varepsilon.$$

Assim,

$$d(y, x_j) \leq d(y, x_0) + d(x_0, x_j) \leq \varepsilon + r,$$

isto é, y pertence ao disco $D(x_j, r + \varepsilon)$ e sabemos que há $N - M$ arcos na classe dos arcos Γ_i^{**} .

2. Se não existir nenhum arco nas condições acima, então $d(y, \Gamma_i^*) \leq \varepsilon$, para algum i . Seja z a projecção ortogonal de y na recta suporte do segmento S_i^* .

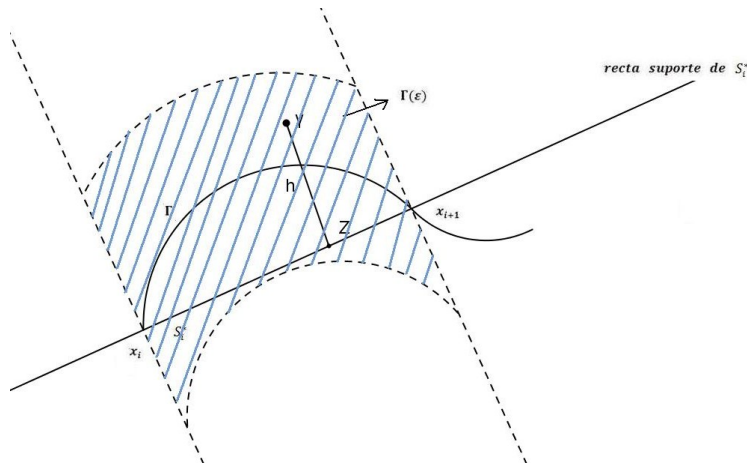


Figura 5.8: Parte da salsicha de Minkowski de Γ_i^* .

Então temos várias possibilidades:

- z pertence a S_i^* : neste caso, $y \in C_i$;
- z não pertence a S_i^*
 - a) $i \neq 1, i \neq N$: assumamos, por exemplo, que z está no mesmo lado que x_{i+1} , (isto é, está na semi-recta com origem em x_{i+1} e

que não contém S_i^*). A hipótese 2 implica que o arco Γ_{i+1} está necessariamente na primeira classe, isto é, $\Gamma_{i+1} = \Gamma_{i+1}^*$. O ângulo $\angle(S_i^*, S_{i+1}^*)$ tem medida $\alpha \leq 2\theta$. O ponto y pertence a C_{i+1} ou ao sector circular de raio r e ângulo α situado entre os rectângulos C_i e C_{i+1} . A área \mathcal{A}_i deste sector circular é menor que a do conjunto $C_i \cap C_{i+1}$ (ver Fig. 5.6).

Deduzimos que $\mathcal{A}(C_i \cup C_{i+1}) + \mathcal{A}_i \leq \mathcal{A}(C_i) + \mathcal{A}(C_{i+1})$.

- b) $i = 1$ ou $i = N$: neste caso, a distância entre y e uma das extremidades de Γ é menor que $r + \varepsilon$.

Associando todos os casos acima, concluímos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon)) &\leq \sum_{S_i^*} \mathcal{A}(C_i) + \pi(N - M + 1)(r + \varepsilon)^2 \\ &= 2Mr^2 + \pi(N - M + 1)(r + \varepsilon)^2. \end{aligned}$$

Da relação $\varepsilon = r(1 - \theta)$ vem que $r + \varepsilon = r(2 - \theta)$ e por (5.2) temos que

$$\frac{L(E_r)}{a} \leq Mr \leq Nr \leq L(\Gamma),$$

donde deduzimos que

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon))}{2\varepsilon} &\leq \frac{2Mr^2}{2r(1 - \theta)} + \frac{\pi Nr^2(2 - \theta)^2 + \pi r^2(2 - \theta)^2 - \pi Mr^2(2 - \theta)^2}{2r(1 - \theta)} \\ &= \frac{Mr}{1 - \theta} + \frac{\pi Nr(2 - \theta)^2}{2(1 - \theta)} + \frac{\pi r(2 - \theta)^2}{2(1 - \theta)} - \frac{\pi Mr(2 - \theta)^2}{2(1 - \theta)} \\ &\leq \frac{L(\Gamma)}{1 - \theta} + \frac{\pi(2 - \theta)^2}{2(1 - \theta)} \left(L(\Gamma) + r - \frac{L(E_r)}{a} \right). \end{aligned}$$

Se $\varepsilon \rightarrow 0$ temos que $r \rightarrow 0$ e, por consequência, $L(E_r) \rightarrow L(\Gamma)$ e

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon))}{2\varepsilon} \leq \left(\frac{1}{1 - \theta} + \pi \frac{(2 - \theta)^2}{2(1 - \theta)} \left(1 - \frac{1}{a} \right) \right) L(\Gamma).$$

Fazendo $\theta \rightarrow 0$ e $a \rightarrow 1$ obtemos

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon))}{2\varepsilon} \leq L(\Gamma).$$

Então, como

$$L(\Gamma) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon))}{2\varepsilon} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon))}{2\varepsilon} \leq L(\Gamma)$$

conclui-se que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(\Gamma(\varepsilon))}{2\varepsilon} = L(\Gamma).$$

□

Anexo I

Biografia de Cantor



Nascimento: 3 Março de 1845,
São Petersburgo, Rússia.

Falecimento: 6 Janeiro de 1918,
Halle, Alemanha.

Georg Cantor, filho de Georg Waldemar e de Maria Anna Böhm, nasceu na Dinamarca e dedicou-se à cultura e às artes, interesses artísticos herdados dos pais.

Estudou no Realschule, em Darmstadt e completou o ensino secundário em 1860, onde se salientaram as suas excepcionais capacidades em Matemática. Cantor entrou para o Politécnico de Zurique, em 1862. Após a morte do pai, em Junho de 1863, Cantor mudou-se para a Universidade de Berlim, onde fez amizade com o seu colega Hermann Schwarz. Cantor assistiu a palestras de Weierstrass, Kummer e Kronecker. No ano de 1867, em Berlim, Cantor completou a sua dis-

sertação sobre Teoria de Números *De aequationibus indeterminatis secundi gradu* e, em 1869, apresentou a sua *Habilitatimschrift* também sobre Teoria de Números, imediatamente após ter sido nomeado para Halle.

Influenciado pelo seu colega Heine, Cantor provou o problema em aberto sobre a unicidade de representação de uma função como uma série trigonométrica. Este problema já tinha sido abordado, sem sucesso, por outros matemáticos, incluindo o próprio Heine, bem como Dirichlet, Lipschitz e Riemann.

Cantor, entre 1870 e 1872, publicou vários artigos que mostram influência do ensino de Weierstrass. Em 1872, foi promovido a Professor Extraordinário na Universidade de Halle. Ainda nesse ano, Cantor publicou um artigo sobre séries trigonométricas, onde define os números irracionais em termos de sucessões convergentes de números racionais. Nesse ano, Cantor tornou-se amigo de Dedekind. Este, por sua vez, em 1872, publicou a sua definição de números reais e, nela, referia o trabalho desenvolvido por Cantor.

Em 1873, Cantor provou que o conjunto dos números racionais é numerável e mostrou também que o conjunto dos números algébricos (números que são raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros) é numerável. Em Dezembro do mesmo ano conseguiu provar que o conjunto dos números reais não é numerável, sendo este trabalho publicado em 1874. Neste trabalho aparece, pela primeira vez e apenas implicitamente, a ideia de correspondência biunívoca. Liouville estabeleceu, em 1851, que os números transcendentos (números não algébricos) existem. Em 1874, Cantor mostrou que *quase todos* os números são transcendentos ao provar que o conjunto dos números reais não é numerável, enquanto que o conjunto dos números algébricos é. Cantor, em correspondência com Dedekind, ainda discutiu a questão do quadrado de lado um poder estar em correspondência biunívoca com um segmento de comprimento um.

Em 1877 Cantor provou que havia uma correspondência biunívoca entre os pon-

tos do intervalo $[0, 1]$ e pontos dum N -cubo. Tendo-se surpreendido a si próprio com a sua descoberta, escreveu: *Eu vejo, mas não acredito!*. Ainda nesse ano, Cantor submeteu um artigo sobre dimensão ao jornal *Crelle*. Este trabalho foi tratado com desconfiança por Kronecker, fazendo com que a publicação só acontecesse depois de Dedekind ter intervindo a seu favor. Cantor ficou ressentido pela oposição de Kronecker ao seu trabalho e nunca mais submeteu nenhum artigo ao jornal *Crelle*. Nesse artigo, Cantor discute os conjuntos numeráveis, isto é, os que estão em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais, tornando o conceito de correspondência biunívoca preciso. Neste trabalho, estuda ainda conjuntos com a mesma potência, sendo estes definidos como os que estão em correspondência biunívoca uns com os outros.

Entre 1879 e 1884, Cantor publicou uma série de seis artigos no *Mathematische Annalen*, com o intuito de fornecer uma introdução básica à Teoria de Conjuntos.

A correspondência entre Cantor e Dedekind termina em 1882. Por esta altura, Cantor iniciou correspondência com Mittag-Leffler, começando a publicar no jornal deste último, *Acta Mathematica*, embora continuasse ainda a aparecer a série de seis importantes artigos no *Mathematische Annalen*. O quinto artigo desta série, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, foi publicado como uma monografia em separado, uma vez que Cantor percebeu que a sua Teoria de Conjuntos não estava a encontrar a aceitação que ele esperava e *Grundlagen* foi concebido para responder às críticas. Neste artigo apresenta os números transfinitos como uma extensão autónoma e sistemática dos números naturais.

No fim de Maio de 1884, Cantor teve a primeira depressão, possivelmente motivada pelo facto de não conseguir provar a *hipótese do continuum*, ou seja, que a potência do conjunto dos números reais sucede à dos números naturais. Em 1885, Mittag-Leffler convenceu Cantor a retirar um dos artigos submetido na *Acta Mathematica*, dizendo-lhe que pensava que Cantor estava cem anos avançado no

tempo. Cantor levou a mal e a sua correspondência com Mittag-Leffler cessou. O fluxo de novas ideias, que tinham levado Cantor a um rápido desenvolvimento da Teoria de Conjuntos durante cerca de 12 anos, parecia ter estagnado.

Cantor tomou duas novas direcções: a discussão de aspectos filosóficos da sua teoria com outros filósofos (publicou essas cartas em 1888) e fundou o *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* (Sociedade Alemã de Matemática) em 1890. Cantor presidiu à primeira reunião da Sociedade em Halle, em Setembro de 1891, e foi eleito seu presidente nessa mesma reunião, tendo permanecido no cargo até 1893.

Em 1894, Cantor publicou um artigo sobre a maneira de escrever todos os números pares até 1000 como a soma de dois números primos. Essa mesma verificação já tinha sido feita por Goldbach até 10 mil, 40 anos antes. Este artigo revela mais sobre o estado mental de Cantor do que sobre a conjectura de Goldbach. Os seus últimos artigos importantes na Teoria de Conjuntos apareceram em 1895 e 1897, novamente no *Mathematische Annalen*, sob a direcção de Klein, e no campo da Aritmética Transfinita. O intervalo de tempo entre os dois artigos é devido ao facto de que Cantor esperava incluir uma demonstração da *hipótese do continuum* na segunda parte. Como tal não veio a acontecer, o segundo artigo engloba apenas a sua teoria de conjuntos bem ordenados e números ordinais.

Em 1897, Cantor participou no primeiro Congresso Internacional de Matemáticos em Zurique, tendo o seu trabalho sido elogiado por Hurwitz e Hadamard. Por esta altura, Cantor descobriu o primeiro dos paradoxos na Teoria de Conjuntos, enquanto trabalhava nos seus artigos de 1895 e 1897. Ele escreveu a Hilbert em 1896, explicando-lhe o paradoxo. Burali-Forti descobriu-o e publicou-o, de forma independente, em 1897.

Nos seus períodos de depressão, Cantor tendia a afastar-se da Matemática e virar-se para a Filosofia e Literatura. As mortes da mãe, em 1896 e do irmão mais novo, em 1899, aumentaram a sua ansiedade e, em Outubro de 1899, Cantor pediu,

e foi-lhe concedido, que não ensinasse no semestre de inverno de 1899 – 1900. Em Dezembro de 1899, o filho mais novo de Cantor morreu. A partir deste momento, e até ao final da sua vida, lutou contra a sua doença mental, apesar de continuar a ensinar, com bastantes interrupções.

Cantor deu palestras sobre os paradoxos da Teoria de Conjuntos numa reunião da *Mathematiker Deutsche Vereinigung*, em Setembro de 1903 e participou no Congresso Internacional de Matemáticos em Heidelberg, em Agosto de 1904. Em 1905, Cantor escreveu um trabalho religioso, após voltar de um período no hospital. Ele também se correspondia com Jourdain sobre a história da teoria de conjuntos e sobre questões religiosas. Em 1911, ficou encantado ao receber um convite da Universidade de St Andrews, na Escócia, para participar no 500º aniversário da fundação da Universidade como um investigador de prestígio. No ano seguinte, Cantor recebeu o grau honorário de Doutor em Direito pela Universidade de St. Andrews, mas estava demasiado doente para o receber em pessoa. Cantor aposentou-se em 1913 e passou os seus últimos anos, doente e com dificuldades, devido às condições de guerra na Alemanha. Um grande evento planeado em Halle para marcar o 70º aniversário de Cantor, em 1915, teve de ser cancelado por causa da guerra, mas foi substituído por um pequeno evento em sua casa. Em Junho de 1917, ele entrou num sanatório, pela última vez, acabando por falecer de um ataque cardíaco. Hilbert descreveu o trabalho de Cantor como:

... o melhor produto do génio matemático e uma das realizações supremas da actividade humana puramente intelectual.

Biografia de Hausdorff



Nascimento: 8 Novembro de 1868,
Breslau, Alemanha.
(hoje Wrocław, Polónia).
Falecimento: 26 Janeiro de 1942,
Bonn, Alemanha.

Felix Hausdorff, filho de Louis Hausdorff e de Hedwig Tietz, nasceu numa família rica de judeus, o que influenciou a sua vida e carreira, pois ele nunca teve necessidade de trabalhar para se sustentar financeiramente.

Felix cresceu em Leipzig. Na escola, demonstrou muito interesse por Matemática, Literatura e Música. Na verdade, ele queria prosseguir uma carreira na Música como compositor, mas seus pais pressionaram-no a desistir da ideia, tendo ele acabado por estudar Matemática. Hausdorff estudou na Universidade de Leipzig, doutorando-se em 1891 em Aplicações da Matemática à Astronomia. Na sua tese estudou a refração e a extinção da luz na atmosfera. Ele publicou quatro artigos sobre Astronomia e Óptica nos anos seguintes e apresentou a sua *Habilitatim-schrift*, em Leipzig, em 1895, baseada na sua pesquisa em Astronomia e Óptica e também em trabalhos de Bruns. No entanto, os principais interesses de Hausdorff eram sobre Literatura e Filosofia, tendo publicado algumas obras literárias sob o pseudónimo de Paul Mongré: em 1897 publicou *St. Hilário: Pensamentos do País Zarathustra*, obra com 378 páginas; em 1898, publicou um livro de Filosofia *Das Chaos in kosmischer Auslese*, uma crítica à Metafísica, onde evidenciava o contraste entre o mundo empírico e o transcendental, que ele rejeitava; em 1900, um livro de poemas *Ekstases* que trata a natureza, vida, morte e paixão erótica e

em 1904, a farsa *Seiner Ehre Der Arzt*, trabalho que marcou o fim do seu interesse literário.

Depois de 1904, Hausdorff começou a trabalhar na área pela qual é célebre, a Topologia, e também na Teoria de Conjuntos. Introduziu o conceito de um conjunto parcialmente ordenado e, de 1901 a 1909, demonstrou uma série de resultados sobre conjuntos ordenados. Em 1907, introduziu um tipo especial de ordinais, na tentativa de provar a *hipótese do continuum* de Cantor. Apresentou, também, uma generalização da *hipótese do continuum* perguntando se “2 elevado à potência \aleph_α é igual a $\aleph_{\alpha+1}$ ”. Hausdorff provou resultados sobre a cardinalidade de conjuntos de Borel, em 1916.

Hausdorff ensinou em Leipzig até 1910, ano em que se mudou para Bonn. Foi Study que o motivou a envolver-se mais na pesquisa matemática e também no desenvolvimento da sua carreira. Tendo incentivado Hausdorff para se mudar para Bonn, Study convenceu-o a mudar-se novamente em 1913, desta vez para Greifswalf. Um ano depois, em 1914, Hausdorff publicou o seu famoso texto *Grundzüge der Mengenlehre*. O *Grundzüge* foi republicado, após revisão, em 1927 e em 1937.

Hausdorff voltou para Bonn, em 1921, e, por esta altura, era um eminente matemático. Trabalhou lá até 1935, ano em que foi forçado a aposentar-se pelo regime nazista. Ele continuou a realizar investigação em Topologia e em Teoria de Conjuntos, mas os seus resultados não podiam ser publicados na Alemanha. Para continuar a investigação, tentou imigrar em 1939, sem sucesso. Como Hausdorff era judeu, a sua posição tornou-se cada vez mais difícil. Em 1941 estava programado que fosse enviado para um campo de concentração, mas conseguiu evitá-lo uma vez que a Universidade de Bonn solicitou autorização para que o casal Hausdorff permanecesse em sua casa, o que lhe foi concedido. Em Outubro de 1941 foram obrigados a usar a estrela amarela e por volta do final do ano foram informados de que seriam enviados para Colónia. Entretanto não foram e, em Janeiro de

1942, receberam a informação de que deveriam ser enviados para um campo de concentração em Eindhoven. Junto com sua esposa e a irmã de sua esposa, ele cometeu suicídio em 26 de Janeiro.

Uma importante contribuição de Hausdorff foi a noção de dimensão de Hausdorff, introduzida no artigo *Dimension und äusseres Mass*. A ideia consistia na generalização de um resultado que tinha sido introduzido cinco anos antes por Carathéodory. Hausdorff percebeu que a construção de Carathéodory fazia sentido e era útil para definir dimensões fraccionárias. Foi Hausdorff que demonstrou que a dimensão do conjunto de Cantor é $\frac{\log 2}{\log 3}$.

Biografia de Lebesgue



Nascimento: 28 de Junho de 1875,
Beauvais, França.

Falecimento: 26 de Julho de 1941,
Paris, França.

Henri Lebesgue começou os seus estudos no colégio de Beauvais, depois foi para Paris onde estudou, primeiro no Liceu Saint Louis e, depois no Liceu Louis-le-Grand. Lebesgue entrou na Escola Superior de Paris em 1894 e recebeu o diploma de Ensino de Matemática em 1897.

Nos dois anos seguintes, estudou na sua biblioteca pessoal, onde leu os trabalhos de Baire sobre funções descontínuas e percebeu que poderia contribuir para o desenvolvimento dessa área. Mais tarde, veio a verificar-se uma grande rivalidade entre ambos. Lebesgue foi nomeado professor do Liceu Central em Nancy, onde leccionou de 1899 a 1902. Com base no trabalho de outros, incluindo o de Emile Borel e de Camille Jordan, Lebesgue formulou a Teoria de Medida em 1901 e no seu famoso trabalho *Uma Generalização do Integral Definido*, que apareceu em *Comptes Rendus* em Abril de 1901, definiu o integral de Lebesgue, generalizando a noção de integral de Riemann e estendendo o conceito de área abaixo de uma curva de forma a incluir uma classe mais lata de funções descontínuas. Esta generalização revolucionou o Cálculo Integral.

A contribuição de Lebesgue é uma das maiores conquistas para a Análise moderna expandindo o âmbito da Análise de Fourier. Os resultados excepcionais

de Lebesgue aparecem na sua tese de doutoramento *Integral, Comprimento, Área*, apresentada à Faculdade de Ciências de Paris em 1902, tendo sido publicada nos *Annali di Matematica* no mesmo ano. Após o doutoramento, Lebesgue foi nomeado para uma posição na Faculdade de Ciências de Rennes. Em 1903, ainda numa fase precoce da sua carreira, Lebesgue recebeu o convite para leccionar o Curso Peccot no Colégio de França. Na realidade, Baire leccionou este curso em 1904, tendo Lebesgue que esperar por 1905 para o poder leccionar, o que motivou um desentendimento entre ambos. Lebesgue escreveu duas monografias, *Lições sobre a integração e a busca de funções primitivas* (1904) e *Lições sobre séries trigonométricas* (1906), que surgiram a partir das suas palestras neste curso e que tornaram as suas ideias mais conhecidas. No entanto, o seu trabalho foi acolhido com hostilidade por parte de analistas clássicos, especialmente em França. Em 1906, foi nomeado para a Faculdade de Ciências em Poitiers progredindo, no ano seguinte, para professor de Mecânica nessa mesma faculdade.

O integral de Lebesgue permitiu resolver muitos dos problemas associados à integração. Fourier tinha assumido que, para funções limitadas, a integração termo a termo de séries infinitas era possível. Baseado nesta hipótese, Fourier mostrou que, se uma função for representável por uma série trigonométrica, então essa série é necessariamente a série de Fourier. Há aqui, no entanto, um problema, pois uma função pode ser não integrável segundo Riemann e ser representável como uma série de funções uniformemente limitadas e integráveis segundo Riemann, o que mostra que a hipótese formulada por Fourier não é válida.

Em 1905, Lebesgue abriu uma forte discussão sobre as condições que Lipschitz e Jordan usaram para assegurar que uma função é a soma da sua série de Fourier. Lebesgue mostrou que a integração termo a termo de uma série de funções uniformemente limitadas e integráveis segundo Lebesgue é sempre válida. Isto significava que a demonstração de Fourier de que se uma função era representável

por uma série trigonométrica então esta série era necessariamente a sua série de Fourier passava a ser válida, ao se considerar a integração segundo Lebesgue.

Lebesgue foi nomeado Mestre de Conferências em Análise Matemática na Sorbonne, em 1910. Durante a primeira guerra mundial, trabalhou para a defesa de França, e nessa altura, desentendeu-se com Borel, que fazia um trabalho semelhante. Lebesgue manteve a sua posição na Sorbonne até 1918, sendo então promovido a professor de Aplicações da Geometria à Análise. Em 1921 foi nomeado Professor de Matemática no Colégio de França, cargo que ocupou até à morte, em 1941. Também ensinou na Escola Superior de Física e Química Industrial de la Ville, em Paris, entre 1927 e 1937 e na Escola Normal Superior, em Sèvres.

Lebesgue deu também contribuições importantes noutras áreas da Matemática tais como Topologia, Teoria do Potencial, Cálculo das Variações, Teoria de Conjuntos e Teoria da Dimensão. Em 1922, quando publicou *Notícia sobre os trabalhos científicos de M. Henri Lebesgue*, ele já tinha escrito cerca de 90 artigos. Este trabalho fornece uma análise do conteúdo das artigos de Lebesgue. A partir de 1922, as suas contribuições foram direccionadas para questões pedagógicas, históricas e de Geometria Elementar.

Lebesgue foi premiado por várias academias. Foi eleito para a Academia de Ciências em 1922, a Real Sociedade, a Academia Real de Ciências e Letras na Bélgica, em 1931 e, ainda, para a Academia de Bolonha, a Academia de Lincei, a Real Academia Dinamarquesa de Ciências, a Academia Romana e, também para a Academia de Ciências e Letras de Carcóvia. Foi doutorado *honoris causa* por várias Universidades. Também recebeu uma série de prémios, incluindo o Prémio Houlléviqgue (1912), o Prémio Poncelet (1914), o Prémio Saintour (1917) e do Prémio d'Ormoy (1919).

Biografia de Minkowski



Nascimento: 22 de Junho de 1864,
Alexotas, Império Russo,
(hoje Kaunas, Lituânia).

Falecimento: 12 de Janeiro de 1909,
Göttingen, Alemanha.

Hermann Minkowski nasceu na Rússia, apesar de seus pais, Lewin Minkowski e Rachel Taubmann, serem alemães. Quando tinha oito anos a família regressou à Alemanha e estabeleceu-se em Königsberg. Minkowski mostrou talento para a Matemática enquanto estudava na Academia de Königsberg. Já nesta fase da sua educação, ele estava a ler obras de Dedekind, Dirichlet e Gauss. Minkowski estudou na Universidade de Königsberg, interessando-se por formas quadráticas no início dos seus estudos universitários. Doutorou-se em 1885.

Em 1881, a Academia de Ciência (Paris) anunciou o Grande Prémio para Matemática, a ser concedido em 1883. Seria atribuído a quem encontrasse uma solução para o problema do número de representações de um número inteiro como a soma de cinco quadrados. Em 1847, este problema já tinha sido abordado por Eisenstein ao estudar as formas quadráticas em n variáveis com coeficientes inteiros, chegando assim à fórmula para o número de representações, embora não tenha conseguido demonstrar o resultado. Minkowski, apesar de ter apenas dezoito anos de idade, reconstruiu a teoria de Eisenstein das formas quadráticas e produziu uma solução para o problema do Grande Prémio. Henry Smith, em 1867, tinha publicado um resumo de uma demonstração deste mesmo resultado,

embora a Academia de Ciências não tivesse conhecimento das suas contribuições quando este prêmio foi criado. Smith voltou a trabalhar na sua antecedente demonstração, acrescentando detalhes e submeteu-a à Academia. A 2 de Abril de 1883, a Academia decidiu que o prêmio seria repartido entre Minkowski e Smith. Este foi um começo impressionante na carreira matemática de Minkowski. A tese de doutoramento de Minkowski, apresentada em 1885, foi uma continuação do trabalho premiado. Após o seu doutoramento, ele permaneceu em Königsberg. Em 1887, foi aberta uma vaga para o cargo de professor na Universidade de Bonn e Minkowski concorreu. De acordo com os regulamentos das universidades alemãs, ele apresentou oralmente, para a faculdade, um trabalho original para obter a *Habilitatimschrift*. Minkowski apresentou *Räumliche Anschauung und Minima positiv definitiver quadratischer Formen* (“Visualização espacial e mínimos de formas quadráticas definidas positivas”), tendo esta palestra sido publicada apenas em 1991. Esta obra tem particular interesse uma vez que contém o primeiro exemplo do método que Minkowski desenvolveu na sua famosa “Geometria dos Números.” Minkowski leccionou em Bonn a partir de 1887, tendo sido promovido em 1892. Dois anos depois, voltou para Königsberg, onde leccionou por dois anos, antes de ser nomeado para o Politécnico de Zurique. Lá tornou-se colega do seu amigo Hurwitz que tinha sido nomeado para ocupar a cadeira *Frobenius*. Einstein era um estudante em várias disciplinas que Minkowski leccionou, e ambos, mais tarde, interessar-se-iam por problemas semelhantes na Teoria da Relatividade. Minkowski aceitou um lugar de catedrático na Universidade de Göttingen, em 1902. Foi Hilbert quem arranjou o lugar para Minkowski, tendo este permanecido nele para o resto da sua vida. Em Göttingen interessou-se por Física-Matemática, motivado por Hilbert e pelos seus colaboradores. Minkowski desenvolveu uma nova interpretação do espaço e do tempo e introduziu as bases matemáticas da Teoria da Relatividade. Em 1907, Minkowski percebeu que o trabalho desenvolvido por Lorentz

e Einstein podia ser melhor compreendido num espaço não-euclidiano. Considerou o espaço e o tempo, que anteriormente eram pensados como independentes, ligados num espaço-tempo *continuum* de quatro dimensões. Minkowski elaborou um tratado da Electrodinâmica a quatro dimensões. Num artigo publicado em 1908, Minkowski reformulou o artigo de Einstein de 1905, introduzindo as quatro dimensões (espaço-tempo) na Geometria não-Euclidiana, um passo que Einstein não tinha considerado. O mais importante foi a atitude ou filosofia que Minkowski, Hilbert, Felix Klein e Hermann Weyl seguiram, nomeadamente, o facto de as suas considerações serem puramente matemáticas. Minkowski seguiu Poincaré, cuja filosofia era que a Física-Matemática, em oposição à Física Teórica, podia fornecer novos princípios físicos.

O espaço-tempo *continuum* forneceu um quadro para todos os trabalhos matemáticos posteriores sobre relatividade. Estas ideias foram utilizadas por Einstein no desenvolvimento da Teoria da Relatividade geral.

Minkowski aconselhou Hilbert sobre o tema para a famosa palestra que este último proferiu no Congresso Internacional, em 1900, em Paris. Numa carta a Hilbert, escrita em 5 de Janeiro de 1900, escreve:

O que teria maior impacto seria uma tentativa de dar uma previsão do futuro, ou seja, um esboço dos problemas com que os matemáticos do futuro se deveriam ocupar. Desta forma, talvez possa conseguir que as pessoas falem da sua palestra durante décadas no futuro.

O tempo provou que Minkowski estava certo.

Os interesses matemáticos originais de Minkowski foram na Matemática Pura e ele gastou muito do seu tempo a investigar formas quadráticas e fracções contínuas. A sua contribuição mais original foi a sua “Geometria dos Números”, que iniciou em 1890. *Geometrie der Zahlen* foi publicado pela primeira vez em 1910. Minkowski

publicou *Diophantische Approximationen: Eine Einführung in die Zahlentheorie* em 1907. O seu trabalho deu um contributo importante na Geometria dos Números e suas aplicações à teoria da aproximação diofantina e de números algébricos.

Biografia de Peano



Nascimento: 27 de Agosto de 1858,
Cuneo, Piemonte, Itália.

Falecimento: 20 de Abril de 1932,
Turin, Itália.

Giuseppe Peano nasceu em Cuneo e frequentou a escola na aldeia de Spinetta e, mais tarde, a escola de Cuneo. Um tio de Giuseppe, que era padre e advogado em Turim, quando percebeu que Peano era uma criança muito talentosa, levou-o para Turim, em 1870, para frequentar um curso secundário e prepará-lo para os estudos universitários. Giuseppe fez os exames no Ginásio Cavour, em 1873 e, em seguida, foi aluno do Liceu Cavour onde se formou em 1876. Nesse ano ingressou na Universidade de Turim.

Em 29 de Setembro de 1880, Peano doutorou-se em Matemática e juntou-se à equipa da Universidade de Turim como assistente de D'Ovidio. Publicou o seu primeiro trabalho matemático em 1880 e mais três trabalhos no ano seguinte. Peano foi assistente de Genocchi de 1881 a 1882. Por esta altura, Genocchi já era bastante idoso e, sendo o seu estado de saúde bastante débil, Peano leccionou algumas das suas disciplinas. Em 1884, Peano editou um livro, *Curso de Cálculo Infinitesimal*, baseado nas palestras de Genocchi, tendo algumas partes escritas por ele próprio. A partir de Dezembro de 1884, Peano continuou a ensinar alguns dos cursos leccionados anteriormente por Genocchi.

Em 1886, Peano provou que se uma função $f(x, y)$ é contínua, então a equação

diferencial de primeira ordem $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ tem solução. A existência de solução, com hipóteses mais fortes sobre f , já tinha sido provada antes por Cauchy e Lipschitz. Quatro anos depois, Peano mostrou que as soluções não eram únicas dando, como exemplo, a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$, com $y(0) = 0$. Ainda nesse ano, Peano começou a leccionar na Academia Militar, em Turim. No ano seguinte descobriu e publicou um método para resolver sistemas de equações diferenciais lineares utilizando aproximações sucessivas. No entanto, Emile Picard tinha feito essa descoberta e Schwarz já o tinha reconhecido como o primeiro a descobrir o método. Em 1888, Peano publicou o livro *Cálculo Geométrico* cujo primeiro capítulo está relacionado com a Lógica Matemática. Este seu primeiro trabalho, baseado na obra de Schröder, Boole e Charles Peirce sobre o tema, terá um papel importante na investigação por ele desenvolvida nos anos seguintes. Uma característica importante do livro é que Peano apresenta, com muita clareza, as ideias de Grassmann, introduzidas por este último de uma forma um tanto obscura. Este livro contém a primeira definição de espaço vectorial, usando uma notação extremamente moderna, embora não tenha sido devidamente apreciada por muitos, à data. Em 1889, Peano publicou os seus famosos axiomas, chamados *Axiomas de Peano*, que definem os números naturais em termos de conjuntos. Foram publicados no panfleto *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita*, sendo um marco na história da Lógica e dos Fundamentos da Matemática. Após a morte de Genocchi, em 1889, Peano esperava ser nomeado para ocupar a sua cadeira. Antes da nomeação, em 1890, Peano publicou outro resultado impressionante, definindo curvas que preenchem o quadrado, apresentando uma função contínua e sobrejectiva do intervalo $[0, 1]$ no quadrado unitário. Hilbert, em 1891, descreveu uma curva similar. Hausdorff escreveu sobre o resultado de Peano em *Grundzüge der Mengenlehre* em 1914:

Este é um dos factos mais marcantes na Teoria de Conjuntos.

Em Dezembro de 1890, Peano foi nomeado para a cadeira de Genocchi. Em 1891, Peano fundou a *Rivista di Matematica*, uma revista dedicada principalmente à Lógica e aos Fundamentos da Matemática. O primeiro trabalho é um artigo de dez páginas que resume o seu trabalho em Lógica Matemática até à data. Peano tinha grande habilidade para verificar que alguns teoremas estavam errados, apresentando contra-exemplos. Alguns colegas seus não gostavam de ver esses erros apontados e um deles foi Corrado Segre. Quando Segre submeteu um artigo à *Rivista di Matematica*, Peano salientou que alguns dos teoremas no artigo não eram sempre válidos. Segre defendeu o seu trabalho dizendo que o momento da descoberta tinha sido mais importante que uma formulação rigorosa, pois não estava preparado para corrigir os teoremas acrescentando hipóteses, de modo a excluir as excepções. Mas não foi apenas Corrado Segre que sofreu pela sua falta de rigor. Em 1892, Peano apontou um erro numa demonstração de Hermann Laurent.

Por volta de 1892, Peano apostou num novo projecto, o *Formulario Mathematico*, no qual gostaria de publicar colecções de todos os teoremas nas diversas áreas das ciências matemáticas usando uma notação lógica matemática. Em muitos aspectos, esta grande ideia marca o fim do trabalho extraordinário e criativo de Peano. Foi um projecto que foi acolhido com entusiasmo por poucos e com pouco interesse pela maioria. Peano, juntamente com Vailati, Burali-Forti, Pieri e Fano, fizeram uma nova edição do *Formulario Mathematico*, em 1896. Peano escreve:

Cada professor será capaz de adoptar este formulário como um livro, pois ele deve conter todos os teoremas e todos os métodos. Seus ensinamentos serão reduzidos a mostrar como ler as fórmulas, e a indicar aos alunos os teoremas que ele pretende explicar no seu curso.

Quando o volume do Cálculo foi publicado no *Formulario*, Peano começou a usá-lo nas suas aulas, o que foi péssimo para a sua reputação, por ser muito com-

plexo. A Academia Militar terminou o seu contrato em 1901 e muitos dos seus colegas universitários teriam gostado que o mesmo tivesse acontecido na universidade, embora tal não fosse possível. O projecto *Formulario Mathematico* foi concluído em 1908 e tem-se que admirar o que Peano conseguiu atingir com o seu trabalho. Mas, embora fosse uma mina de informações, o seu conteúdo era de difícil utilização.

Em 1900 houve dois congressos em Paris, o primeiro foi o Congresso Internacional de Filosofia, a 1 de Agosto, onde Peano triunfou. Depois do Congresso de Filosofia ter terminado, começou o II Congresso Internacional de Matemáticos. Peano permaneceu em Paris durante o Congresso e ouviu falar de Hilbert, que estabeleceu aí 10 dos 23 problemas que apareceram no seu artigo, pretendendo dar a agenda para o próximo século. Peano estava particularmente interessado no segundo problema, que perguntava se se poderia provar a consistência dos axiomas da Aritmética.

Antes do projecto *Formulario Mathematico* ser concluído Peano já estava a desenvolver o próximo grande projecto da sua vida. Em 1903, Peano manifestou interesse em encontrar um modelo de linguagem universal, ou internacional, e propôs uma linguagem artificial *Latino sine flexione*, baseada no latim, mas despida de toda a gramática. Ele compilou o vocabulário, seleccionando palavras do inglês, francês, alemão e latim. Na verdade, a edição final do *Formulario mathematico* foi escrita em *Latino sine flexione*, que é outro motivo porque o seu trabalho foi pouco utilizado.

Biografia de Weierstrass



Nascimento: 31 de Outubro de 1815,
Ostenfelde, Westphalia,
(Nova Alemanha).

Falecimento: 19 de Fevereiro de 1897,
Berlim, Alemanha.

Karl Weierstrass, filho de Wilhelm Weierstrass e de Theodora Vonderforst, nasceu na Alemanha. O pai passou a inspetor fiscal quando Karl tinha oito anos, o que fez com que este ficasse curtos períodos no mesmo sítio e Karl tivesse que mudar frequentemente de escola. Em 1827, a mãe de Karl morreu e, um ano depois, o pai casou-se novamente. Em 1829 Wilhelm Weierstrass passou a assistente num escritório em Paderborn e Karl entrou na Academia Católica lá. Weierstrass destacou-se na Academia, atingindo um nível muito bom em Matemática. Ele arranjou um emprego a tempo parcial, como guarda-livros, para ajudar a família. Weierstrass lia regularmente o *Jornal de Crelle* e dava aulas de Matemática a um dos seus irmãos. O seu pai queria que ele estudasse Finanças e assim, após terminar o liceu, em 1834, ele ingressou na Universidade de Bonn, num curso que incluía Direito, Finanças e Economia. Weierstrass nem obedeceu aos desejos do pai nem foi frequentar o curso que ele tanto estimava, a Matemática. Ele fingiu que não se preocupava com seus estudos e passou quatro anos a treinar intensivamente esgrima e a beber.

Weierstrass estudou Matemática por si próprio, baseando-se na leitura de *Mécanique Céleste* de Laplace e posteriormente num trabalho de Jacobi sobre funções

elípticas. Ele compreendeu os métodos necessários estudando a teoria de funções elípticas em transcrições de palestras dadas por Gudermann. Weierstrass tinha tomado a decisão de se tornar matemático, mas, supostamente, estava a estudar num curso de Finanças Públicas e Administração. Após a sua decisão, ele passou ainda um semestre na Universidade de Bonn, o seu oitavo semestre, que terminou em 1838 e, simplesmente, deixou a universidade sem fazer o exame. O pai de Weierstrass ficou preocupado por este ter abandonado os estudos. Um amigo da família convenceu-o a deixar Karl estudar na Academia Teológica e Filosófica de Munique para que ele pudesse fazer os exames necessários para se tornar um professor do ensino secundário.

Em Maio 1839 Weierstrass inscreveu-se na Academia de Munique. Gudermann leccionava lá e foi essa a razão por que Weierstrass estava tão interessado em estudar lá. Weierstrass assistiu às palestras de Gudermann sobre as funções elípticas, algumas das quais foram as primeiras palestras que foram dadas sobre o tema. Estas palestras encorajaram fortemente Weierstrass a estudar Matemática.

No Outono de 1839 Weierstrass deixou Munique e começou a estudar para o exame de professor, que se realizaria em Março de 1840.

Em Abril de 1841 Weierstrass começou o ano de estágio como professor, na Academia de Munique. Embora não tivesse publicado ainda nenhum trabalho de Matemática, nessa altura escreveu três curtos artigos.

Em 1842 Weierstrass iniciou a sua carreira como professor de Matemática na Prússia Ocidental (actual Polónia), onde permaneceu até se transferir para Braunschweig, em 1848. Como professor de Matemática ensinava Física, Botânica, Geografia, História, Alemão, Caligrafia e até Ginástica. Weierstrass descreve, mais tarde, o “interminável tédio” destes anos em que:

... ele não tinha nenhum colega para discussões matemáticas nem acesso a uma biblioteca de Matemática, e que a troca de cartas científicas era um luxo que não podia pagar.

Por volta de 1850, Weierstrass começou a sofrer de ataques de tontura graves. Estes ataques frequentes, ao longo de um período de cerca de doze anos, tornaram difícil o seu trabalho e podem ter sido causados pelos conflitos que sofreu enquanto estudante, juntamente com o “stress” criado por se dedicar à Matemática no seu tempo livre, enquanto exercia o seu trabalho de docente. Não é de surpreender que, quando Weierstrass publicou um artigo sobre funções abelianas num prospecto da escola de Braunsberg, este tenha passado despercebido aos matemáticos. No entanto, em 1854, ele publicou *Zur Theorie der Abelschen Functionen* no *Jornal Crelle* e, nessa altura, este trabalho foi notado. Este documento não dá a teoria completa de inversão de integrais hiper-elípticos que Weierstrass tinha desenvolvido, mas é uma descrição preliminar dos seus métodos, envolvendo a representação de funções abelianas como séries de potências convergentes.

Com este trabalho Weierstrass saiu da obscuridade. A Universidade de Königsberg conferiu-lhe o grau de doutor *honoris causa* em Março de 1854.

Em 1855, Weierstrass candidatou-se a uma cadeira na Universidade de Breslau, deixada por Kummer, quando este se mudou para Berlim. No entanto, Kummer tentou influenciar para que Weierstrass fosse para Berlim, pelo que Weierstrass não foi nomeado. Uma carta de Dirichlet para o Ministro da Cultura da Prússia, em 1855, apoiou fortemente que fosse dado um cargo universitário a Weierstrass. Depois de ser promovido a conferencista sénior em Braunsberg, Weierstrass obteve licença de um ano para se dedicar ao estudo avançado em Matemática. Weierstrass publicou uma versão completa de sua teoria da inversão de integrais hiper-elípticos no seu trabalho seguinte, *Theorie der Abelschen Functionen*, publicado no *Jornal Crelle*, em 1856. A partir desse momento, houve várias universidades interessadas

nele. Enquanto as universidades na Áustria discutiam uma proposta, houve uma oferta para leccionar, vinda do Instituto da Indústria, em Berlim, que Weierstrass aceitou em 1856.

Nesse ano, Weierstrass assistiu a uma conferência em Viena e foi-lhe então oferecida uma cadeira em qualquer universidade austríaca. Antes que desse resposta, a Universidade de Berlim ofereceu-lhe também uma cadeira. Apesar de ter aceite esta oferta prontamente, não a pode ocupar formalmente, por alguns anos, uma vez que já tinha aceite a oferta do Instituto da Indústria no início do ano. As palestras de Weierstrass tiveram muito êxito e atraíram muitos estudantes de várias partes do mundo, tendo como temas a aplicação da série de Fourier e de integrais à Física-Matemática (1856 – 1857), uma introdução à teoria de funções analíticas, onde expunha os resultados que obteve em 1841 e que nunca tinham sido publicados, a teoria de funções elípticas, que eram o seu tópico de pesquisa e também as aplicações a problemas de Geometria e de Mecânica. Nas suas palestras de 1859 – 1860, Weierstrass apresentou uma Introdução à Análise, onde abordou os fundamentos da Análise, pela primeira vez. Em 1860 – 1861, ele ensinou Cálculo Integral.

Embora tivesse conseguido a posição com que havia sonhado, a sua saúde, no final de 1861, desabou completamente. Levou cerca de um ano a recuperar o suficiente para voltar a leccionar, embora nunca tenha recuperado na totalidade. Desse momento em diante, leccionou sentado enquanto um aluno escrevia por ele no quadro.

No curso de 1863 – 1864, sobre a teoria geral de funções analíticas, Weierstrass começou a formular a sua teoria sobre construção dos números reais. Nas suas palestras de 1863 provou que o corpo dos números complexos é a única extensão algébrica comutativa do corpo dos números reais. Gauss tinha prometido uma demonstração deste resultado em 1831, mas não tinha conseguido concretizá-la.

Em 1872, o seu rigor levou-o a descobrir uma função que, embora contínua, não tinha derivada em qualquer ponto. Os analistas, que se apoiavam muito na intuição, ficaram bastante consternados com esta função contra-intuitiva. Riemann tinha sugerido em 1861 que uma tal função poderia ser encontrada, mas o exemplo que apresentou falhou por não ser não diferenciável em todos os pontos.

As palestras de Weierstrass foram desenvolvidas num curso de quatro semestres, que ele continuou a leccionar até 1890. Os quatro cursos foram:

1. Introdução à teoria de funções analíticas;
2. Funções elípticas;
3. Funções abelianas;
4. Cálculo de variações ou aplicações de funções elípticas.

Ao longo dos anos, os cursos foram publicados em várias versões, tais como as notas de Killing em 1868 e de Hurwitz em 1878. A abordagem matemática de Weierstrass ainda domina o ensino da Análise, hoje em dia.

Weierstrass, juntamente com Kummer e Kronecker, deu uma reputação à Universidade de Berlim como a líder no estudo da Matemática. Weierstrass e Kronecker terminaram a sua relação de amizade em 1877 após a oposição deste último ao trabalho de Cantor. Um grande número de estudantes beneficiou do ensino de Weierstrass. Citamos alguns: Bachmann, Bolzano, Cantor, Engel, Frobenius, Gegenbauer, Hensel, Hölder, Hurwitz, Killing, Klein, Kneser, Königsberger, Lerch, Lie, Lüroth, Mertens, Minkowski, Mittag-Leffler, Netto, Schottky, Schwarz e Stolz. Um aluno em particular merece menção especial. Em 1870, Sofia Kovalevskaya veio a Berlim, e Weierstrass deu-lhe lições particulares, uma vez que não foi permitido a Sofia o acesso à universidade. Foi graças aos esforços de Weierstrass que Kovalevskaya recebeu um doutoramento honorário de Göttingen. Ele também usou a

sua influência para a ajudar a obter uma posição em Estocolmo, em 1883. Weierstrass e Kovalevskaya corresponderam-se por 20 anos, entre 1871 – 1890. Mais de 160 cartas foram trocadas entre eles, cartas que Weierstrass queimou após a morte dela. Os padrões de rigor definidos por Weierstrass, por exemplo, para definir os números irracionais como limites de séries convergentes, afectaram fortemente o futuro da Matemática. Estudou também funções inteiras, a noção de convergência uniforme e funções definidas por produtos infinitos. Weierstrass editou a obra completa de Steiner e de Jacobi. Supervisionou a publicação das suas obras completas, que envolviam uma grande quantidade de material inédito dos seus cursos, embora se apercebesse da tarefa difícil que era fazê-lo sozinho. Os dois primeiros volumes apareceram em 1894 e 1895, sendo os únicos a aparecer antes de sua morte em 1897.

Anexo II

O infinito!

*Nenhuma outra questão transformou
tão profundamente o espírito humano.*

(David Hilbert)

Actividade de investigação

Não quisemos terminar este projecto, sem lançar uma actividade de investigação como proposta de trabalho dirigida aos alunos de 12º ano e que optem pelo Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias. Esta poderá ser abraçada como um desafio inserido, quem sabe, num Clube ou Laboratório de Matemática existente em algumas escolas.

Esta ideia surge num contexto interdisciplinar e de articulação com os conteúdos disciplinares de Física que abordam nesse ano com o intuito de desenvolver o espírito crítico dos alunos, o raciocínio lógico/abstracto e também, de certa forma, dedutivo, olhar a curiosidade científica como um desafio e, como não podia deixar de ser, com a preocupação em desenvolver a compreensão de procedimentos algébricos.

Esta actividade tem como objectivo favorecer a conexão entre as duas disciplinas podendo os alunos compreender melhor a matemática e as suas aplicações. Podem também conectar e relacionar os novos conhecimentos com os já adquiridos em anos anteriores procurando uma discussão rica, quer sobre o processo de modelação, quer sobre conceitos matemáticos fundamentais.

Começamos por recordar alguns conceitos de Física:

- A **trajectória** \vec{r} é uma linha formada pelas posições sucessivas de uma partícula.

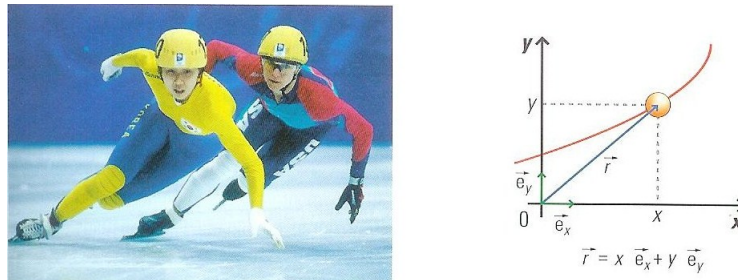


Figura 5.9: Trajectória curvilínea descrita por um patim sobre uma pista de gelo.

- A **velocidade** \vec{v} é tangente à trajectória em qualquer posição.

$$\vec{v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \text{ é a derivada de } \vec{r} \text{ em ordem a } t.$$

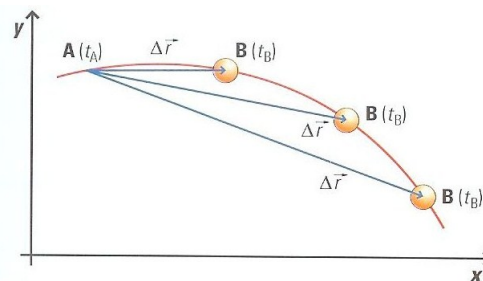


Figura 5.10: O ponto B aproxima-se de A através de rectas secantes à trajectória.

- A **aceleração** \vec{a} é a derivada temporal da velocidade.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \text{ é a derivada de } \vec{v} \text{ em ordem a } t.$$

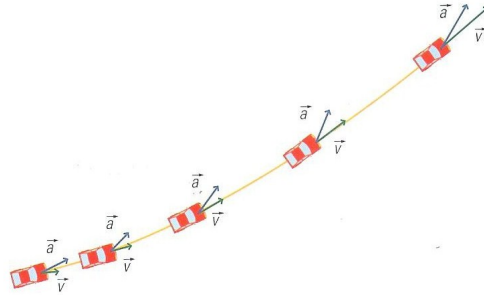


Figura 5.11: A aceleração é um vector que aponta para dentro da curva.

- O **movimento circular uniforme** é o movimento numa trajectória circular em que o módulo da velocidade é constante.

- (i) Se o vector posição fizer, num dado instante, um ângulo θ com o eixo dos xx , as coordenadas da partícula são: $x = R \cos \theta$ e $y = R \sin \theta$, onde R é o raio e θ varia com o tempo, isto é, $\theta = \theta(t)$, sendo estas as **equações paramétricas do movimento circular**.

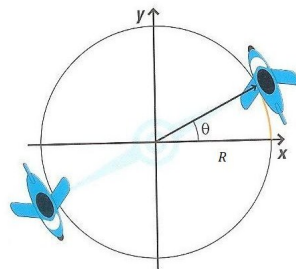


Figura 5.12: Movimento circular de um avião que descreve uma trajectória de raio R no plano XOY .

- (ii) O ângulo θ relaciona-se com a distância s percorrida sobre a trajectória através de $\theta = \frac{s}{R}$.
- (iii) A **velocidade angular** ϖ para o movimento circular uniforme é o quociente entre o ângulo descrito $\Delta\theta$ e o intervalo de tempo correspondente Δt , ou seja, $\varpi = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$. Também se pode escrever como $\varpi = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0}$.

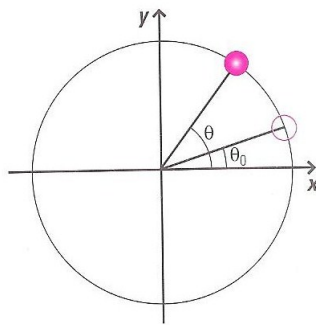


Figura 5.13: O vector posição da partícula faz um ângulo θ_0 com o eixo dos xx , no instante $t = 0's$ e um ângulo θ no instante t .

A velocidade angular varia de instante para instante, sendo uma função do tempo, ou seja, $\varpi = \varpi(t)$.

Nesta actividade os alunos poderão recorrer aos formulários disponibilizados nos exames nacionais de Matemática.

Actividade

Considere-se uma curva no plano cuja trajectória está representada na figura:

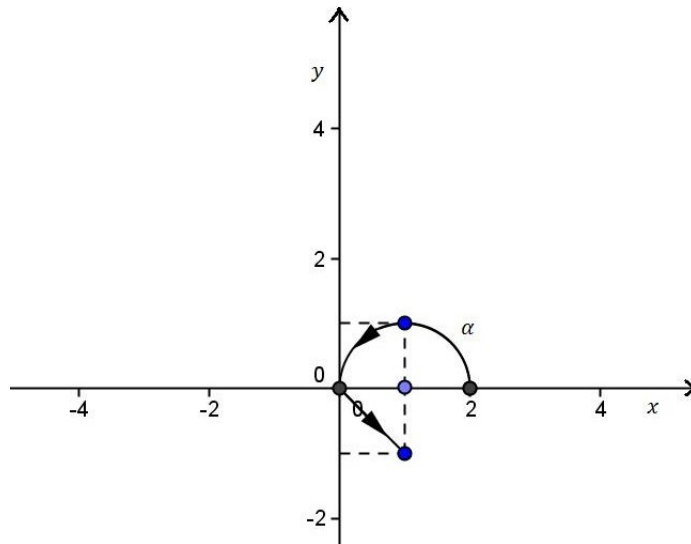


Figura 5.14: Trajectória da curva.

Seja α a seguinte parametrização da curva:

$$\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \begin{cases} (1 + \cos t, \sin t), & 0 \leq t \leq \pi \\ (\frac{1}{\pi}t - 1, -\frac{1}{\pi}t + 1), & \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

1. Determine uma aproximação do comprimento total da trajectória, utilizando aproximações poligonais.
2. Estabeleça as propriedades locais abordadas no estudo de curvas contínuas, para o ponto $A = (0, 0)$.

Resolução:

1. A trajectória é composta por uma semi-circunferência e um segmento de recta. Aplicando o Teorema de Pitágoras os alunos podem concluir que o comprimento do segmento é $\sqrt{2}$.

Para calcular o comprimento da semi-circunferência sugere-se aos alunos que considerem aproximações poligonais uniformes (isto é, constituídas por segmentos, todos com o mesmo comprimento e cujos vértices pertencem à semi-circunferência).

Designemos por P_n a aproximação poligonal com n segmentos.

Os alunos poderiam começar por desenhar as linhas poligonais P_1 , P_2 , P_3 e P_4 .

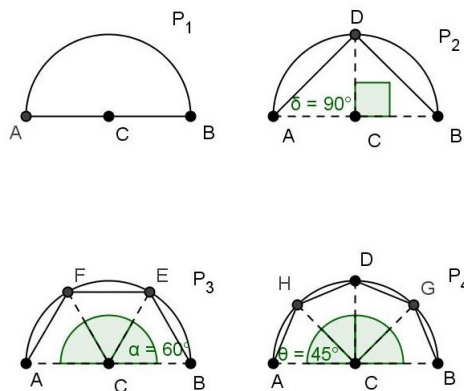


Figura 5.15: As primeiras 4 aproximações poligonais uniformes.

- Comprimento de P_1 :

Os alunos facilmente compreendem que este comprimento é $\overline{AB} = 2$;

- Comprimento de P_2 :

Os triângulos ACD e BCD são rectos em C e os seus catetos têm comprimento

1. O comprimento de P_2 é igual a $\overline{AD} + \overline{BD} = 2\sqrt{2}$.

- Comprimento de P_3 :

Os triângulos ACF , FCE e ECB são equiláteros logo os lados têm todos o comprimento igual a 1. O comprimento de P_3 é igual a $\overline{AF} + \overline{FE} + \overline{EB} = 3$.

- Comprimento de P_4 :

Os triângulos ACH , HCD , DCG e GCB são isósceles e os lados com o mesmo comprimento têm medida 1. Os segmentos AH , HD , DG e GB têm o mesmo comprimento e $\overline{AH} = 2 \operatorname{sen}(22,5^\circ)$. Pela fórmula do dobro do ângulo, temos que

$$\operatorname{sen}(22,5^\circ) = \sqrt{\frac{1 - \cos(45^\circ)}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2},$$

logo comprimento de P_4 é igual a $\overline{AH} + \overline{HD} + \overline{DG} + \overline{GB} = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. \square

2. Como a trajectória não tem derivada no ponto $A = \alpha(\pi)$, os alunos deverão estudar as propriedades da curva à esquerda (isto é, quando $t \rightarrow \pi^-$) e à direita (isto é, quando $t \rightarrow \pi^+$) de A .

(P1) *Existe tangente à direita e à esquerda no ponto A , isto é, existem os limites*

$$\lim_{t \rightarrow \pi^+} \frac{\alpha(t) - \alpha(\pi)}{\|\alpha(t) - \alpha(\pi)\|} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{\alpha(t) - \alpha(\pi)}{\|\alpha(t) - \alpha(\pi)\|}.$$

a)
$$\lim_{t \rightarrow \pi^+} \frac{\alpha(t) - \alpha(\pi)}{\|\alpha(t) - \alpha(\pi)\|} = \lim_{t \rightarrow \pi^+} \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}} = \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}}.$$

Cálculos auxiliares:

$$\alpha(t) = \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)(1, -1)$$

$$\|\alpha(t)\| = \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\|(1, -1)\| = \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sqrt{2}$$

$$\frac{\alpha(t)}{\|\alpha(t)\|} = \frac{\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)(1, -1)}{\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sqrt{2}} = \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}}.$$

$$b) \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{\alpha(t) - \alpha(\pi)}{\|\alpha(t) - \alpha(\pi)\|} = \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{(2 \cos^2(\frac{t}{2}), 2 \operatorname{sen}(\frac{t}{2}) \cos(\frac{t}{2}))}{2 \cos(\frac{t}{2})} = (0, 1).$$

Cálculos auxiliares:

$$\|(1 + \cos t, \operatorname{sen} t)\| = \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos t}$$

$$\cos(t) = 2 \cos^2(\frac{t}{2}) - 1, \text{ logo } \|(1 + \cos t, \operatorname{sen} t)\| = 2 \cos(\frac{t}{2})$$

$$\operatorname{sen} t = 2 \cos(\frac{t}{2}) \operatorname{sen}(\frac{t}{2}).$$

(P2) O limite de $\theta_\varepsilon(A)$ é nulo quando ε tende para 0.

a) Determinação do limite de $\theta_\varepsilon(A)$, à direita de A :

Neste caso $\theta_\varepsilon(A) = 0$, logo $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \theta_\varepsilon(A) = 0$.

b) Determinação do limite de $\theta_\varepsilon(A)$, à esquerda de A :

Podemos tomar $\theta_\varepsilon(A) = \angle(\alpha(\pi - \varepsilon), (0, 1))$.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \cos \theta_\varepsilon(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{2 \operatorname{sen}(\frac{\varepsilon}{2})} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{2 \operatorname{sen}(\frac{\varepsilon}{2}) \cos(\frac{\varepsilon}{2})}{2 \operatorname{sen}(\frac{\varepsilon}{2})} = 1, \text{ logo}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \theta_\varepsilon(A) = 0.$$

Cálculos auxiliares:

Relembrando o cálculo do produto interno entre dois vectores, temos

$$\alpha(\pi - \varepsilon) \cdot (0, 1) = \|\alpha(\pi - \varepsilon)\| \|(0, 1)\| \cos(\theta_\varepsilon(A))$$

$$\alpha(\pi - \varepsilon) = (1 - \cos \varepsilon, \operatorname{sen} \varepsilon)$$

$$\|\alpha(\pi - \varepsilon)\| = \sqrt{(1 - \cos \varepsilon)^2 + \operatorname{sen}^2 \varepsilon} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \varepsilon}$$

$$\cos(\theta_\varepsilon(A)) = \frac{\text{sen } \varepsilon}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \varepsilon}}$$

$$1 - \cos \varepsilon = 2 \text{sen}^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

(P3) O limite da razão $\frac{L(A\widehat{\alpha(\pi+\varepsilon)})}{\|\alpha(\pi+\varepsilon)-A\|}$ é igual a 1 quando ε tende para 0.

a) Determinação do limite à direita de A :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{L(A\widehat{\alpha(\pi+\varepsilon)})}{\|\alpha(\pi+\varepsilon)-A\|} = 1.$$

Cálculos auxiliares:

$$\alpha(\pi + \varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{\pi}, -\frac{\varepsilon}{\pi}\right)$$

$$L(A\widehat{\alpha(\pi+\varepsilon)}) = \|\alpha(\pi+\varepsilon)\| = \sqrt{2} \frac{\varepsilon}{\pi}.$$

b) Determinação do limite à esquerda de A :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{L(A\widehat{\alpha(\pi-\varepsilon)})}{\|\alpha(\pi-\varepsilon)-A\|} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon}{2 \text{sen}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} = 1.$$

Cálculos auxiliares:

$$L(A\widehat{\alpha(\pi-\varepsilon)}) = \varepsilon$$

$$\|\alpha(\pi-\varepsilon)-A\| = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \varepsilon} = 2 \text{sen}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

(P4) O limite da razão $\frac{\mathcal{A}(\mathcal{K}(A\widehat{\alpha(\pi+\varepsilon)}))}{\|\alpha(\pi+\varepsilon)-A\|^2}$ é igual a 0 quando ε tende para 0.

a) Determinação do limite à direita de A :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{A}(\mathcal{K}(A\widehat{\alpha(\pi+\varepsilon)}))}{\|\alpha(\pi+\varepsilon)-A\|^2} = 0.$$

Cálculos auxiliares:

$$\mathcal{K}(A\widehat{\alpha(\pi + \varepsilon)}) = [A\alpha(\pi + \varepsilon)]$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{K}(A\widehat{\alpha(\pi + \varepsilon)})) = 0.$$

b) Determinação do limite à esquerda de A :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{A}(\mathcal{K}(A\widehat{\alpha(\pi - \varepsilon)}))}{\|\alpha(\pi - \varepsilon) - A\|^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \varepsilon}{4 \operatorname{sen}^2(\frac{\varepsilon}{2})} = \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon - \operatorname{sen} \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon}.$$

Aplicando a regra de l'Hôpital¹, podemos levantar a indeterminação no cálculo deste limite. De facto,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon - \operatorname{sen} \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \varepsilon}{\operatorname{sen} \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{-\operatorname{sen} \varepsilon}{\cos \varepsilon} = 0.$$

Cálculos auxiliares:

$$\alpha(\pi - \varepsilon) = (1 - \cos \varepsilon, \operatorname{sen} \varepsilon) \text{ e } \|\alpha(\pi - \varepsilon)\| = 2 \operatorname{sen}(\frac{\varepsilon}{2})$$

$$\text{A altura do triângulo } AC\alpha(\pi - \varepsilon) \text{ é } \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\frac{\varepsilon}{2})} = \cos(\frac{\varepsilon}{2})$$

$$\text{A área do triângulo } AC\alpha(\pi - \varepsilon) \text{ é } \operatorname{sen}(\frac{\varepsilon}{2}) \cos(\frac{\varepsilon}{2}) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \varepsilon$$

$$\text{A área do sector circular } AC\alpha(\pi - \varepsilon) \text{ é } \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{K}(A\widehat{\alpha(\pi - \varepsilon)})) = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \varepsilon.$$

□

¹Esta regra não faz parte dos conteúdos programáticos do 12º ano, pelo que os alunos não poderiam efectuar o cálculo.

Conclusão

Para finalizar este trabalho faço uma análise retrospectiva das metas que nos propusemos alcançar e das contribuições e utilidades atingidas com o estudo efectuado.

No que se refere ao objectivo inicial, estudar as propriedades de curvas rectificáveis abordadas neste trabalho (poderão ser mais!) foi, no meu entender, alcançado.

Apreciei bastante o aprofundamento deste estudo, na medida em que me permitiu uma incursão pelo fascinante mundo da Análise. A passagem pelas etapas, em que fomos mergulhando ao longo da dissertação, transformaram-se em verdadeiros desafios, que, por vezes, pareciam intransponíveis mas que, com perseverança e apoio por parte da orientadora, foram ultrapassados. Grande parte do esforço aplicado na elaboração deste trabalho assentou sobretudo na interiorização do conteúdo e na compreensão e aplicação do mesmo.

Devo ainda sublinhar a herança, o contributo e a marca deixada, nas diferentes áreas da Matemática, pelos matemáticos cujo trabalho utilizámos e de quem compilámos umas breves notas biográficas no *Anexo I*. Brutal!

Numa perspectiva de produto final do trabalho realizado queria apenas realçar o facto de ter aumentado e actualizado, vivamente, o meu conhecimento científico. Ter podido explorar e aprofundar o meu conhecimento ao nível da Análise e da Informática (L^AT_EX) foi, para mim, um estímulo na realização desta dissertação.

Bibliografia

- [1] Engelking, Ryszard e Sieklucki, Karol, *Topology - A Geometric Approach*, Heldermann Verlag Berlin, 1992.
- [2] Gonçalves, Arminda Manuela, *Conexidade, O Conjunto de Cantor e o Teorema de Hahn-Mazurkiewicz*, Tese de Mestrado, Universidade do Minho, 1995.
- [3] Lima, Elon, *Espaços métricos*, Projecto Euclides, Impa, 1992.
- [4] Sagan, Hans, *Space Filling Curves*, Springer Verlag, 1994.
- [5] Silva, Jaime; Fonseca, M. Graziela; Martins, Arsélio; Fonseca, Cristina e Lopes, Ilda, *Programa de Matemática A - 12º Ano, Cursos Científicos e Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências SocioEconómicas*, Ministério da Educação, 2002.
- [6] Tricot, Claude, *Curves and Fractal Dimension*, Springer Verlag, 1993.
- [7] Ventura, Graça; Fiolhais, Manuel; Fiolhais, Carlos; Paixão, José, *12 F - Física de 12º Ano*, Texto Editores, 2005.
- [8] *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*, <http://www.cut-the-knot.org/>(28.02.2011)
- [9] *The MacTutor History of Mathematics Archive, Biographies Index*, <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>(28.02.2011)
- [10] *Wikipedia*, <http://en.wikipedia.org/wiki/Curve>(28.02.2011)
- [11] *Wikipedia*, http://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_function(28.02.2011)