

AVALIAÇÃO NUMÉRICA DA CONVERGÊNCIA DE SOLUÇÃO ENTRE MODELOS DE LAJE

António Gorgulho^{1*}, Eduardo Morais¹, José Alberto Rodrigues^{1 2†}

1- Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, Lisboa, Portugal, email: *sgorgulho@dec.isel.pt, †jrodri@adm.isel.pt

2- CMAT-Universidade do Minho, Campus Gualtar, Braga

Palavras chave: Elasticidade linear, Kirchhoff, Método dos Elementos Finitos, freeFEM++**Resumo**

P.-G. Ciarlet e Destuynder mostraram teoricamente, em [2] e [3], a convergência da terceira componente do campo de deslocamentos, no modelo tridimensional da elasticidade linear, para o deslocamento vertical do modelo bidimensional de Kirchhoff para uma laje. Esta convergência corresponde à natural convergência da espessura da laje para zero.

Com este trabalho verificamos numericamente a convergência entre os referidos modelos. Para tal usamos uma discretização em elementos finitos do problema tridimensional implementada usando o programa freeFEM++ e uma aproximação do problema bidimensional fornecida pelo programa SAP2000, com base no modelo de Kirchhoff. São analisados três casos distintos, comparando-se em cada um os respectivos deslocamentos e momentos flectores.

1. Introdução

A utilização de placas finas é generalizada em toda a engenharia estrutural, por exemplo nas estruturas edifícios, de pontes, estruturas navais ou aeronáuticas. Essas placas são frequentemente sujeitas a forças que actuam sobre o plano da placa. Se as forças forem suficientemente pequenas, o equilíbrio é estável e as tensões resultantes são caracterizados pela ausência de movimentos laterais.

Dentro da análise da elasticidade linear, a modelação de placas pode ser vista como uma simplificação do modelo tridimensional clássico que estuda o comportamento de um material isotrópico e homogêneo sob a acção de forças externas, sendo a sua característica mais importante a possibilidade da redução a um problema de duas dimensões.

Um dos modelos é o modelo de Kirchhoff [5]. Este descreve o deslocamento de uma placa de pequena espessura sob o efeito de uma força transversal. Aqui são feitas simplificações no deslocamento segundo a direcção z , resultando um modelo bidimensional cujas incógnitas são o deslocamento vertical e os ângulos de rotação das fibras normais à superfície média da placa em relação aos eixos de x e y .

Usando os dois modelos, calculamos os esforços solicitantes nos pavimentos de betão armado, formados por vigas e lajes maciças, não considerando a interacção entre estes elementos estruturais o que se faz assumindo a rigidez de ambos igual e uma redistribuição dos esforços homogênea.

Neste trabalho usaremos o Método dos Elementos Finitos para analisar dois tipos de pavimentos em betão armado, constituidos por vigas e lajes maciças tridimensionais modelados pelo modelo clássico da elasticidade linear. Validaremos os resultados obtidos com o modelo de Kirchhoff implementado no SAP2000.

Em todos os casos estudados atendemos a dois requisitos: a solução não se afasta muito da solução elástica, para garantir um bom funcionamento da estrutura utilizada; é garantido o equilíbrio do pavimento como um todo. Desta forma, asseguramos que os modelos estudados podem ser utilizados para projetar os pisos de edifícios de betão armado.

2. Elasticidade Linear

Consideramos uma laje sem deformação

$$\Omega = [a, b] \times [c, d] \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right] \subset \mathbb{R}^3$$

Após deformação da laje assumimos que um ponto $P(x_1, x_2, x_3)$ se move para a posição $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. O vector $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = (\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2, \xi_3 - x_3)$ é designado por vector de deslocamento.

Supondo pequenas deformações obtemos o tensor das deformações:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\square u_i}{\square x_j} + \frac{\square u_j}{\square x_i} \right), \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Tomemos o plano infinitesimal $\Delta\Pi(x)$ centrado em x com o vector normal $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, a superfície sobre $\Delta\Pi(x)$ em x é

$$(\sigma_{1j}(x)n_j, \sigma_{2j}(x)n_j, \sigma_{3j}(x)n_j), j \in \{1, 2, 3\}$$

com $\sigma_{ij}(x)$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ o tensor das tensões em x . A lei de Hooke garante uma relação linear entre os tensores das tensões e das deformações:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \text{div} \vec{u} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

no caso de material isotrópico e homogêneo, sendo λ, μ as constantes de Lamé e δ_{ij} o simbolo de Kronecker. Se o corpo estiver submetido a uma força $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ a condição de equilíbrio é

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0$$

para $i, j \in \{1, 2, 3\}$, à qual se acrescentam as condições de fronteira, a definir caso a caso.

Desigando a formulação anterior por formulação forte, com vista à implementação pelo Método dos Elementos Finitos somos conduzidos à formulação fraca

$$\iiint_{\Omega} \lambda \text{div} \vec{u} \text{div} \vec{v} + 2\mu \varepsilon(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega = \iiint_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{v} \, d\Omega$$

definida em espaços de admissibilidade. Neste caso iremos utilizar como funções admissíveis, aquelas que são contínuas em toda a região Ω , polinomiais de grau k ($= 1$ ou 2) sobre cada elemento da discretização de Ω e que verificam as condições de fronteira do tipo Dirichlet [4].

3. Modelo de Kirchhoff para Flexão em Lajes

Como anteriormente, consideremos

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right], (x_1, x_2) \in A \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

Onde A é o plano médio (representado na figura 1) e h a espessura da laje.

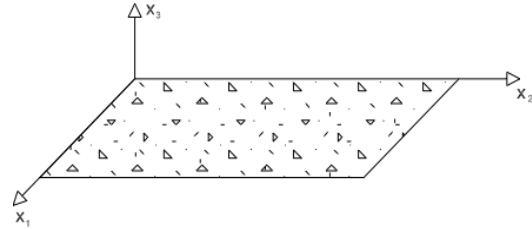


Figura 1: Plano médio da laje para o modelo de Kirchhoff

O modelo de Kirchhoff para lajes é descrito sobre três graus de liberdade: uma translação vertical e duas rotações:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \theta_1(x_1, x_2)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \theta_2(x_1, x_2)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2)$$

onde $w(x_1, x_2)$ representa a translação vertical, $\theta_1(x_1, x_2)$ a rotação no plano $x_1 O x_3$ e $\theta_2(x_1, x_2)$ a rotação no plano $x_2 O x_3$, graus de liberdade relativos ao plano médio da laje.

Desprezando as deformações por corte, podemos simplificar este modelo obtendo-se uma única incógnita: a translação vertical $w(x_1, x_2)$, obtendo-se:

$$\theta_1(x_1, x_2) = -\frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

$$\theta_2(x_1, x_2) = -\frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

Finalmente, podemos obter a relação entre momentos flectores e tensões:

$$m_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3$$

com $i, j \in \{1, 2\}$.

4. Abordagem ao freeFEM++

O freeFEM++ é um sistema de implementação do método dos elementos finitos, com uma linguagem específica, permitindo resolver numericamente problemas de equações diferenciais parciais. Os problemas são descritos na sua forma variacional, existindo uma correspondência com a linguagem do freeFEM++, o que o torna muito didáctico.

A equação

$$\iiint_{\Omega} \lambda \operatorname{div} \vec{u} \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu \varepsilon(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{v}) d\Omega = \iiint_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{v} d\Omega$$

é implementada em freeFEM++ através da sequência de instruções

```
solve Lame([u1,u2,u3],[v1,v2,v3], solver=CG)//UMFPACK=
int3d(Th) ( (lambda)*div(u1,u2,u3)*div(v1,v2,v3) +
2.*mu*( epsilon(u1,u2,u3)**epsilon(v1,v2,v3) )
) - int3d(Th)(gravidade*v3) // forças mássicas
- int2d(Th,10)(carga*v3) // forças de superfície
+ on(1,u1=0,u2=0,u3=0); // cond Dirichlet
```

Os operadores diferenciais, ou outros, podem ser introduzidos como macros, com relativa facilidade

```
real sqrt2=sqrt(2.);
macro epsilon(u1,u2,u3)
[dx(u1),dy(u2),dz(u3), (dz(u2)+dy(u3))/sqrt2,
[(dz(u1)+dx(u3))/sqrt2, (dy(u1)+dx(u2))/sqrt2] // EOM
macro div(u1,u2,u3) ( dx(u1)+dy(u2)+dz(u3) ) // EOM
```

Temos a opção de definir a região e respectiva discretização com instruções próprias

```
int[int] rup=[0,10], rdlow=[0,0], rmid=[1,1,2,1,3,1,4,1] ;
mesh Thxy = square(nx,ny,[x0+(x1-x0)*x,y0+(y1-y0)*y]);
mesh3 Th=buildlayers(Thxy,nz, zbound=[z0+hv,z1+hv],
labelmid = rmid, labelup = rup, labeldown = rdlow);
```

ou usando programas externos como por exemplo GMSH

```
load "mesh3"
load "medit"
mesh3 Th("regiao.mesh");
```

Finalmente, a visualização dos resultados também pode ser feita com instruções próprias

```
// RESULTADOS
real dmax= u3[].max,
dmin= u3[].min,
coef=abs(1/dmin);
mesh3 Th= movemesh3(Th, transfo=[x+u1,y+u2,z+u3*coef]);
savemesh(Thm,"malha_d.mesh");
plot (Thm,ps="m1000.png");
plot ([u1,u2,u3], wait=1, ps="lame3d.eps", coef=coef);

//registo das coordenadas dos vertices dos tetraedros para GMSH
cout<<" elementos "<<Th.nt;
for (int i=0; i< Th.nt; i++)
{
file<<"VS(";
for (int j=0; j <3; j++)
file << Th[i][j].x
<<","<< Th[i][j].y
<<","<< Th[i][j].z<<",";
file << Th[i][3].x <<","<< Th[i][3].y <<","<< Th[i][3].z;
file<<"){"<<endl;
//registo dos deslocamentos em cada vertice
for (int j=0; j <3; j++)
file <<u1(Th[i][j].x, Th[i][j].y, Th[i][j].z)<< ","
<<u2(Th[i][j].x, Th[i][j].y, Th[i][j].z)<< ","
<<u3(Th[i][j].x, Th[i][j].y, Th[i][j].z)<< ","<<endl;
file <<u1(Th[i][3].x, Th[i][3].y, Th[i][3].z)<< ","
<<u2(Th[i][3].x, Th[i][3].y, Th[i][3].z)<< ","
<<u3(Th[i][3].x, Th[i][3].y, Th[i][3].z)<<endl<<"};<<endl;
}
file<<"};<<endl;
```

5. Caso 1: Laje encastrada em todos os bordos

Começamos por considerar uma laje encastrada em todos os bordos com 5 m nos dois vãos e 16 cm de altura. Quanto ao material, tem-se um betão C20 / 25 com um módulo de elasticidade $E = 30 \times 10^6$ kPa e um coeficiente de Poisson $\nu = 0,15$. Considera-se como acções o peso próprio para um peso específico de 25 kN / m³ (resultando numa carga de superfície $25 \times 0,16 = 4$ kN / m²) no modelo de Kirchhoff e uma carga de superfície de 4 kN / m². A figura 2 apresenta obtidos em freeFEM++ e na tabela 1 comparamos os resultados obtidos com ambos modelos. Consideramos como condições de fronteira, neste caso, encastramentos perfeitos em todos os bordos ($u_1=0$, $u_2=0$ e $u_3=0$).

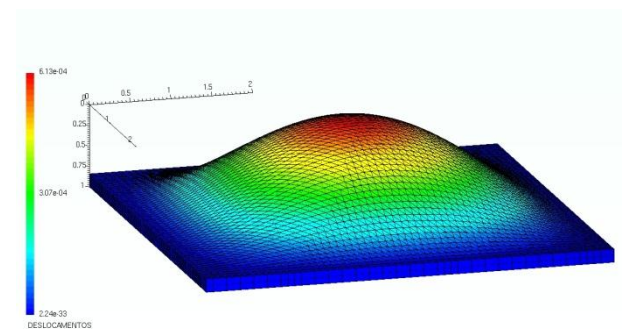


Figura 2: Deslocamentos numa laje encastrada sujeita a uma carga de superfície, vista invertida

Tabela 1: Tabela comparativa de resultados

	freeFEM++	SAP2000	%
Tempo	277 seg.	-	-
u_3	-0,613	-0,597	-2,58
m^+_x	4,081	4,270	-4,43
m_x	-10,329	-10,244	-0,82
m^+_y	4,081	4,270	-4,43
m_y	-10,329	-10,244	-0,82

6. Caso 2: Laje simplesmente apoiada em quatro pilares

Neste caso, consideramos uma laje rectangular com quatro pilares nos quatro cantos, com 5 m em ambos os vãos e 16 cm de altura. Quanto ao material, apresenta um betão C20 / 25 com um modulo de elasticidade $E = 30 \times 10^6$ kPa e um coeficiente de Poisson de $\nu = 0$. Tomamos como acções o peso próprio para um peso específico de $25 \text{ kN} / \text{m}^3$ e uma carga de superfície de $4 \text{ kN} / \text{m}^2$. Simulamos o efeito dos pilares, impondo todos os cantos são apoios simples ($u_3=0$), como condições de fronteira.

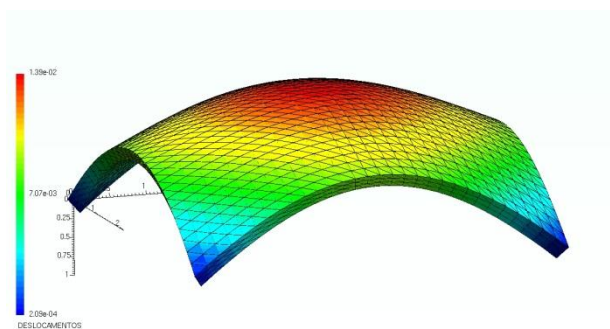


Figura 3: Deslocamentos numa laje simplesmente apoiada sujeita a uma carga de superfície, vista invertida

Tabela 2: Tabela comparativa de resultados

	freeFEM++	SAP2000	%
Tempo	228 seg.	-	-
u_3	-13,932	-13,827	-0,75
m^+_x	31,920	31,950	-0,09
m_x	0	0	0
m^+_y	31,920	31,950	-0,09
m_y	0	0	0

7. Conclusões

Neste trabalho fizemos a comparação de soluções de modelos bidimensionais e tridimensionais de lajes. Constatamos que a aproximação dos deslocamentos é melhor no caso de uma laje simplesmente apoiada (caso 2). No caso 1, laje encastrada evidenciamos um fenómeno de camada limite, nas imediações das fronteiras da laje, que deve ser tratado com uma estratégia adaptada com vista a melhorar o problema tridimensional.

O estudo aqui feito pode-se alargar a outros problemas de lajes correspondentes a outro tipo de condições de fronteira, com relativamente fácil implementação em freeFEM++.

Referências

- [1] J. Christel, J. Howell “SIAM Student Chapter Seminar. Finite Element Approximation of Partial Differential Equations Using FreeFem++”, Clemson: Department of Mathematics Sciences Clemson University, 2007. [consult. 9 Abr. 2010. Disponível em www.ccs.tulane.edu/~jchrise/PDFdocuments/usc1.pdf.
- [2] P.-G. Ciarlet e P. Destuynder, “A justification of the two-dimensional linear plate model,” *Journal de mecanique*, volume 18, numero 2, (1979), 315-344.
- [3] P.-G. Ciarlet e S. Kesavan, “Two-dimensional approximations of a three-dimensional eigen-value problems in plate theory”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 26 (1981), 145- 172.
- [4] E. Morais, *Simulação Numérica do Comportamento de Lajes*, TFM em Engenharia Civil, ISEL, 2010
- [5] O. Pironeau, F. Hecht e A. Le Hyaric, “Freefem++, version 3.9-2 (2d and 3d)”. Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Paris 2005. Disponível em www.freefem.org.
- [6] S. P. Timoshenko e S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 2nd edition, 1959.