OS AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA NO DESENVOLVIMENTO DA CAPACIDADE DE ARGUMENTAÇÃO DE ALUNOS DE 9.º ANO NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

Ana Cristina Pires Fernandes
Escola E. B. 2, 3 Passos José – Guifões
anacrispires.fernandes@gmail.com

Floriano Augusto Veiga Viseu
CIEd-Universidade do Minho
fviseu@ie.uminho.pt

Resumo.—A Geometria é um tema que, ao longo dos tempos, tem merecido um especial destaque nos programas dos diferentes anos de escolaridade. Por razões várias, como por exemplo a extensão dos programas, o ensino de certos tópicos deste tema evidencia mais a aquisição acrítica de definições, propriedades e fórmulas do que a sua compreensão. Os ambientes de geometria dinâmica (AGD), associados a tarefas de natureza exploratória e investigativa, tendem a favorecer a descoberta de propriedades e de relações geométricas, o que beneficia a aquisição de conhecimentos e a produção de provas. Nesta comunicação, apresentamos alguns resultados de um estudo que procura averiguar o contributo dos AGD no desenvolvimento da capacidade de argumentação de alunos do 9.o ano na aprendizagem de tópicos da Geometria. Atendendo à abordagem qualitativa do estudo, os dados foram recolhidos através de questionários, entrevistas semiestruturadas, das actividades produzidas pelos alunos e da observação do desempenho destes na realização dessas actividades. O estudo desenrolou-se durante quatro meses (de Fevereiro a Maio de 2001) em aulas onde foram aplicadas tarefas de natureza exploratória e investigativa com recurso ao GeoGebra. Na fase inicial, a maior parte dos alunos manifestou dificuldades em organizar as suas actividades. A familiarização com o GeoGebra faz com que os alunos comecem a produzir raciocínios mais estruturados, onde são evidentes as conclusões a que chegam a partir da observação de regularidades. Em muitas aulas constatou-se que, ao recorrerem a exemplos, as provas que apresentam das suas conclusões eram muito limitativas. Numa fase final do estudo, notou-se uma evolução significativa na capacidade argumentativa da maioria dos alunos e, consequentemente, uma maior compreensão da aplicação dos conhecimentos na elaboração da provas.

Introdução

O tema de Geometria é um dos temas que marca uma forte presença nas sucessivas reformulações dos programas escolares de Matemática. A aprendizagem deste tema proporciona ao aluno «uma das formas privilegiadas de adquirir uma intuição e uma orientação espacial crucial para o mundo moderno» (Matos & Serrazina 1996, p. 265). A importância da Geometria no currículo advém, segundo o NCTM (1991), da fonte de problemas não rotineiros que proporciona, o que favorece o desenvolvimento de capacidades, entre outras, de visualização espacial, de raciocínio e de argumentação, identificadas como fundamentais para os cidadãos no presente e no futuro. De acordo com o novo programa do ensino básico, a comunicação e a argumentação ocupam lugar de destaque, na medida em que podem ser bastante desenvolvidos com a Geometria através de discussões e debates entre pares ou entre grupos. Na realização destas actividades, os alunos deverão aprender a formular explicações convincentes para as suas conjecturas e soluções (NCTM, 2007).

Para alguns autores, como por exemplo Yackel e Cobb (1994), o conceito de argumentação foca-se especificamente nas interacções que estão relacionadas com explicações ou justificações intencionais do raciocínio dos alunos, durante ou após tentativas de resolução de problemas. Também para Wood (1999), a argumentação é considerada como um processo interactivo de saber como e quando participar num argumento numa troca discursiva entre pessoas com o objectivo de convencer outros através de certos modos de pensamento. Seguindo estas duas perspectivas, Krummheuer (1995) considera que a argumentação na aula de matemática não deve ser considerada equivalente à demonstração, embora inclua processos de produção de provas matemáticas. Para este autor, a argumentação na aula de matemática deve ser, então, uma actividade mais ampla do que a demonstração, cujo caminho é formal, lógico e linear. Deste modo, o desenvolvimento do raciocínio é promovido pela explicação, justificação e argumentação (Yackel, 2001; Whitenack & Yackel, 2008). Por sua vez, a explicação e a justificação são distinguidas pelas suas funções: a explicação como uma forma de clarificar aspectos do pensamento matemático e a justificação como uma resposta às aparentes transgressões da actividade matemática normativa (Cobb et al., 1992). A argumentação é vista como o conjunto de explicações e justificações matemáticas que podem ser aceites, individual e colectivamente, pelos participantes e que resultam das suas interacções. A vertente explicativa da argumentação pode, então, ser considerada como um meio de motivação, criando a sensação que são os próprios alunos os criadores do significado matemático.

A capacidade dos alunos argumentarem desenvolve-se quando, nas aulas de matemática, são criados momentos para a exploração de tarefas que estimulam a formulação e a prova de conjecturas (Boavida, 2005; Douek & Pichat, 2003). De um modo geral, a prova permite aos alunos regular o seu próprio pensamento (Bieda, 2010), comunicar matematicamente (Lakatos, 1976; Schoenfeld, 1991) e serve para convencer os outros e a nós próprios (Alibert &Thomas, 1991; Hanna, 1989), podendo ser vista como um processo de negociação dentro da sala de aula, na medida em que os alunos têm que argumentar, convencer os outros do que fizeram e como fizeram.

O tipo de explorações que se fomentam nas salas de aula pode levar os alunos a novas descobertas em Matemática. Assente neste pressuposto, de Villiers (2003) alude à exploração de conjecturas geométricas desenvolvidas em ambientes de geometria dinâmica. A formulação de conjecturas é aqui caracterizada como o resultado de um conjunto de evidências, com uma determinada regularidade, que origina uma afirmação e, parecendo à partida razoável, desponta a necessidade de se investigar a sua veracidade (Mason et al., 1982). De Villers (2003) considera que, após a apresentação de uma conjectura, o aluno deve testar alguns casos. Se a conjectura não for confirmada por esses casos, então a mesma deve ser rejeitada, por ser falsa, ou reformulada. Se a conjectura for confirmada por esses casos, pode-se começar a acreditar que essa conjectura pode ser verdadeira, convicção essa que pode constituir um pré-requisito e um estímulo para se iniciar o processo de prova e que pode ser caracterizada por um misto de intuição, verificação quase-empírica e prova lógica, não necessariamente rigorosa. Se, decorrido algum tempo, não se tiver produzido a prova desejada, então pode-se começar a duvidar da validade da conjectura e considerar mais alguns casos, repetindo-se o processo.

Atendendo à importância do desenvolvimento da capacidade argumentação do que se faz na aprendizagem de Matemática, em geral, e da Geometria, em particular, a presente investigação tem como objectivo analisar o contributo de um ambiente de geometria dinâmico para o desenvolvimento da capacidade de argumentação de alunos do 9.o ano nas suas actividades de aprendizagem de tópicos de Geometria deste ano de escolaridade. Os materiais didácticos usados no processo de ensino-aprendizagem da Geometria foram o GeoGebra e o Quadro Interactivo, que foram fundamentais na realização de tarefas de carácter exploratório e investigativo.

Metodologia

Atendendo ao objectivo do estudo, seguiu-se uma abordagem qualitativa e interpretativa. A natureza qualitativa envolveu, tal como afirmam Bogdan e Biklen (1994), a obtenção de dados descritivos obtidos no contacto directo do investigador com a situação onde os fenómenos ocorrem naturalmente e onde são influenciados pelo seu contexto. O carácter interpretativo advém do facto de se pretender analisar os significados conferidos quer pelos participantes às acções nas quais se empenham, quer por aqueles que interagem com eles.

Os participantes deste estudo foram os alunos de uma turma do 9.o ano, com quem se abordou os tópicos de Geometria deste ano de escolaridade. Esta investigação foi desenvolvida com a ajuda da professora de Matemática da turma, que foi acompanhada por um dos autores deste texto na observação não participante das actividades desenvolvidas. A recolha de dados foi efectuada no ambiente natural de sala de aula, através de observação de aulas (observação directa do desempenho dos alunos e observação de gravações em áudio e vídeo); análise das actividades realizadas pelos alunos; e registos escritos realizados pelos alunos e pelo investigador. A análise dos dados segue um registo descritivo e interpretativo sem retirar o significado conferido pelos alunos.

Experiência de ensino

As tarefas que foram elaboradas para esta investigação foram inspiradas em De Villiers (2003), Key Curriculum Press (1997), NCTM (2007) e nas páginas electrónicas de *National Library of Virtual Manipulatives e de Illumination — Resources for Teaching Math*. Foram aplicadas onze tarefas, das quais oito de natureza exploratória e três de carácter investigativo. A aplicação das tarefas desencadeou-se em três fases: (i) breve introdução da tarefa; (ii) exploração da tarefa em grupos de dois alunos; e (iii) apresentação pelos alunos das conclusões obtidas na exploração da tarefa, com espaço para a discussão em grande grupo. Para esta última fase da exploração das tarefas, foi usado o Quadro Interactivo multimédia para que fosse possível gravar todas as etapas das resoluções dos alunos. Das tarefas trabalhadas seleccionaram-se duas, uma de natureza exploratória e a outra de natureza investigativa. Até ao início desta experiência de ensino os alunos só contactaram com este tipo de actividades em casos muito pontuais. Para este artigo, vão ser analisados os trabalhos desenvolvidos, nas duas tarefas supramencionadas, por alguns dos alunos que compõem a investigação.

Resultados

Das tarefas realizadas, a primeira, de natureza exploratória, intitula-se Relação entre o ângulo inscrito e o arco correspondente. A segunda tarefa, de natureza investigativa, denomina-se Quadrado Inscrito e Circunscrito na mesma circunferência.

Tarefa 1 — Relação entre o ângulo inscrito e o arco correspondente

A tarefa em causa é de natureza exploratória, sendo composta por duas partes. A primeira parte é constituída por quatro questões. Inicialmente, os alunos foram orientados para, com recurso ao GeoGebra, construírem uma circunferência e dois ângulos inscritos e, ainda, marcarem os arcos correspondentes. Posteriormente, foi-lhes solicitado para determinarem as respectivas amplitudes, registarem os valores obtidos numa tabela, arrastarem um dos pontos da figura construída e registarem os novos valores, na mesma tabela. De acordo com Mason et al. (1982), a formulação de conjecturas geométricas desenvolvidas em ambientes de geometria dinâmica é caracterizada como o resultado de um conjunto de evidências, com uma determinada regularidade, que origina uma afirmação e, parecendo à partida razoável, desponta a necessidade de se investigar a sua veracidade. Com base nas evidências recolhidas, foi solicitado aos alunos que formulassem uma conjectura, através da relação entre as amplitudes dos ângulos inscritos e os arcos correspondentes, e que a provassem. A prova pode ser vista, segundo Brocardo (2001), como um meio de caracterizar uma explicação ou um raciocínio que justifique determinado resultado ou padrão. A segunda parte da tarefa é constituída por uma aplicação do que foi explorado na primeira parte.

Durante a exploração da primeira parte da tarefa, os alunos realizaram as construções que lhes eram pedidas no enunciado da tarefa, com o recurso ao GeoGebra. Como se tratava da segunda tarefa desta natureza, e apesar de a professora ter dado indicações sobre o que se pretendia, os alunos demonstraram, ainda, dificuldades em iniciar a tarefa, pelo que foi dispensado mais algum tempo para lhes explicar como se procedia para, por exemplo, determinar a amplitude de um arco, dado o ângulo inscrito.

Ultrapassadas algumas das dificuldades, os alunos deram continuidade à exploração dos seus trabalhos. Por arrastamento de um ponto de um dos lados do ângulo inscrito, encontraram vários valores para os ângulos inscritos e para os arcos correspondentes, com o objectivo de encontrar regularidades que pudessem ser úteis para a obtenção de possíveis conclusões. Posteriormente, a professora solicitou a um aluno que mostrasse aos colegas a sua construção. O aluno arrastou o ponto de um dos lados do ângulo, pontos A ou E, e foi registando os valores na tabela (figura 1).

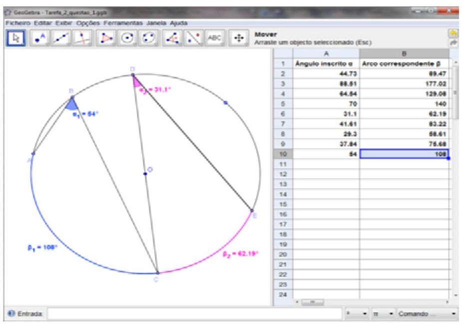


Figura 1.—Fase de exploração da tarefa 1.

Professora: Observem com atenção os valores que estão na tabela [...]. Quem quer responder? [...] Ana?

Ana: Observo que os valores apresentados são diferentes [...] sempre que os valores do ângulo inscrito aumentam, os valores do arco correspondente aumentam e sempre que os valores do ângulo inscrito diminuem, os valores do arco correspondente diminuem também.

Professora: Ana, a sua conclusão é válida mas acho que ainda podemos concluir algo mais ... observe um par de valores ... consegue estabelecer uma relação entre eles? [...] Alguém quer acrescentar algo a esta conclusão da vossa colega? [Vários braços no ar].

Juliana: as amplitudes dos arcos correspondentes são o dobro das amplitudes dos ângulos inscritos.

Ana: Stôra, tem ali valores que não são o dobro.

Professora: Quem é que acha que a conclusão a que a Juliana e muitos de vocês chegaram não parece válida?

Ana: Stôra, eu não disse que estava incorrecto ...

Professora: Eu sei disso, Ana, mas o que é que precisamos de fazer para não ficarmos com dúvidas?

Daniela: Acho que temos de provar, que é o que nos pede na pergunta 1.4 [tocou para a saída mas a professora pediu aos alunos para ficarem, uma vez que faltava formular a conjectura].

Na questão 1.3 era proposto que os alunos escrevessem uma conjectura que relacionasse as amplitudes de um ângulo inscrito e do seu arco correspondente. Assim, e após a exploração anterior, uma das alunas leu a sua conjectura.

Sara: Eu pus «Na circunferência, a amplitude do ângulo inscrito é sempre metade da amplitude do arco que o corresponde».

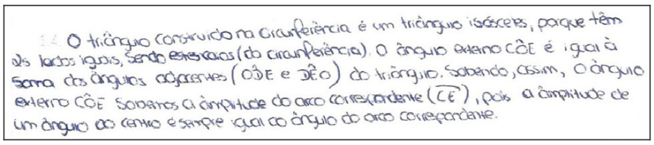
Professora: Concordam? Tínhamos visto que o arco era o do dobro do ângulo inscrito. Então?

Sara: O ângulo inscrito é metade do arco correspondente.

A professora deu por terminada a aula e desafiou os alunos para irem pensando numa forma de provar a conclusão a que tinham chegado. Voltando, ainda, à formulação da conjectura, algumas das produções escritas dos alunos apresentam conjecturas com estruturas idênticas às da Ana. Eis alguns exemplos disso:

«Reparamos que quando o ângulo aumenta o arco também, assim como quando diminui, mas nunca com amplitudes iguais.»
«Um ângulo inscrito tem diferente amplitude que o arco correspondente.»
«Quando a amplitude do ângulo inscrito diminui a amplitude do arco correspondente também diminui. Quando aumenta, aumenta para o dobro.»

A exploração da prova da conjectura foi abordada na aula de Estudo Acompanhado. A maioria dos alunos apresentou muitas dificuldades em provar a conjectura enunciada na alínea anterior, tendo, apenas, uma aluna argumentado os fundamentos que lhe permitiam garantir que a conjectura era válida, independentemente dos valores obtidos na tabela de uma das alíneas anteriores (figura 2).



1.4 O triângulo construido na circunferência é um triângulo isósceles, porque têm dois lados iguais, sendo estes raios (da circunferência). O ângulo externo CÔE é igual à soma dos ângulos adjacentes (OD̂E e DÊO) do triângulo. Sabendo, assim, o ângulo externo CÔE sabemos a amplitude do arco correspondente ($\overset{\frown}{CE}$), pois a amplitude de um ângulo ao centro é sempre igual ao ângulo do arco correspondente.

Figura 2.—Prova da conjectura formulada na alínea 1.3. (Daniela)

Deste modo, a professora iniciou a abordagem da prova com o contributo da Daniela.

Professora: Pode explicar aos seus colegas o que é que a levou a considerar o triângulo isósceles?

Daniela: A pergunta 1.4 dizia para nos basearmos no triângulo CDE e eu vi que ele era isósceles porque tinha dois lados iguais.

Juliana: É por causa da propriedade a lados iguais opõem-se ângulos iguais.

Professora: O que é que falta ver?

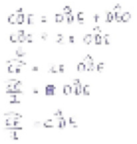
Daniela: Como já tenho o ângulo ao centro, também vou saber o arco correspondente.

Professora: E como é que vamos fazer? A estrutura da prova é essa [...]

A professora, tendo-se apercebido da dificuldade da Daniela em formalizar a prova através de expressões algébricas, abriu espaço para um diálogo interactivo entre os alunos, com o objectivo de serem os próprios alunos a articular as suas justificações para apoiar e melhorar a perspectiva da Daniela.

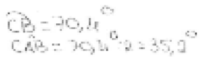
Professora: Muito bem. Vocês conseguiram formalizar a prova quase sem a minha ajuda. Só substituía o ângulo ODE pelo ângulo COE, que são o mesmo, [a Francisca ia apagar a última parte, mas a professora sugeriu-lhe que não apagasse e escrevesse noutra linha]

Francisca: Está bem assim, não está?



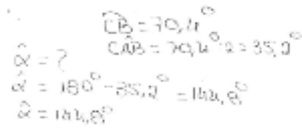
Terminada a prova, a professora efectuou uma pequena introdução à questão de aplicação que constava da tarefa em estudo. Nesta questão, pretendia-se determinar o ângulo suplementar de um ângulo inscrito que tinha um arco correspondente de amplitude 70,40. Decorrido algum tempo, os alunos estavam prontos para a fase de discussão. A professora questionou os alunos sobre o tipo de ângulo que corresponde ao arco dado. Os alunos identificaram-no como um ângulo inscrito cujo arco correspondente tem de amplitude 70,40. Então a Sara deu continuidade à sua apresentação.

Sara: vimos na questão 1 [virando-se para a turma], que a amplitude de um ângulo inscrito é metade do seu arco correspondente. Então eu vou aqui [apontando para o valor do arco] e divido por dois, tendo registado no quadro.



Não sabemos o α ... [escreveu-o no quadro e colocou-lhe um sinal de interrogação]. Sabemos que se somarmos isto tudo dá 180.

Professora: Isto porque ... Sara: É um ângulo raso. Professora: Ou seja, são ... Adriana: São suplementares.
Sara: Então, vai-se a 180 e tira-se o ângulo inscrito [concluiu e registou no quadro].



Com esta tarefa, os alunos exploraram conjecturas geométricas caracterizadas por um conjunto de evidências com uma determinada regularidade, constituindo, assim, uma condição imprescindível para a criação de afirmações que, por sua vez, vão despontar a necessidade de verificar a sua veracidade (Mason et al., 1982). Na linha de pensamento de de Villiers (2003), os alunos são estimulados para o início do processo de prova, caracterizado como um misto de intuição, verificação quase-empírica e prova lógica, não necessariamente rigorosa. O simples facto de questionar os alunos sobre as razões da veracidade de um determinado resultado despertou, nos mesmos, uma curiosidade prolongada e um reconhecimento de que a verificação indutiva/experimental apenas confirma o resultado e não desenvolve o conhecimento nem a compreensão (de Villiers, 2003).

As dúvidas colocadas pela Ana, na primeira parte da exploração, suscitaram nos alunos a percepção de uma necessidade de verificar a veracidade de uma determinada afirmação, sendo a prova um procedimento quase exclusivo da sistematização do conhecimento matemático (Bell, 1976; de Villiers, 2003). A realização da prova da conjectura formulada foi a fase da tarefa em que se notou mais dificuldade por parte dos alunos. Após conversa informal no final da aula, os alunos mencionaram que não era habitual realizarem tarefas deste tipo, com provas matemáticas. A discussão em grande grupo foi frutífera na medida em que se conseguiu chegar à prova da conjectura formulada com os contributos da intervenção de cada um dos alunos.

Tarefa 2 — Quadrado Inscrito e Circunscrito na mesma circunferência

A aplicação desta tarefa decorreu em dois momentos: o primeiro aconteceu numa aula de quarenta e cinco minutos e o segundo ocorreu fora do horário escolar dos alunos e teve uma duração de, aproximadamente, noventa minutos. Neste último momento, os alunos foram acompanhados pela investigadora que se disponibilizou para esclarecer eventuais dúvidas. A tarefa descrita teve como objectivo investigar, com o recurso ao GeoGebra, a relação entre a área de um quadrado circunscrito a uma circunferência e a área de outro quadrado inscrito na mesma circunferência. Numa fase posterior, foi solicitado aos alunos para investigarem se as conclusões que tinham obtido se mantinham se, em vez do quadrado, fosse considerado um outro polígono regular. Os alunos foram orientados para escreverem as conjecturas que formularam e apresentarem todas as justificações que julgassem necessárias para as validar. No decurso da resolução da tarefa em análise, os alunos depararam-se com algumas dificuldades, nomeadamente na construção do quadrado circunscrito à circunferência. Um dos alunos que apresentou a resolução da tarefa, a Daniela, descreveu todas as fases da construção da circunferência, do quadrado circunscrito e do quadrado inscrito, num total de treze. Esta aluna expôs o seu trabalho, com imagens das explorações realizadas no GeoGebra, usando, para isso, o Quadro Interactivo multimédia.

A Daniela descreveu a sua construção tendo começado por traçar uma circunferência de centro O, uma recta que contivesse o seu diâmetro e os pontos de intersecção com a circunferência, pontos A e B. De seguida, a aluna descreveu o passo seguinte (figura 3).

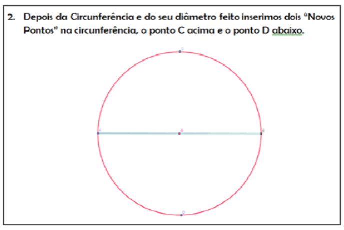


Figura 3.—Passo 2 do desenvolvimento da tarefa (Daniela)

Depois de justificar o processo de marcação dos dois *novos pontos*, *o ponto C acima e o ponto D abaixo*, Daniela fundamentou minuciosamente cada passo que realizou até obter o quadrado circunscrito.

Professora: Porque é que achaste que se tratava de um quadrado circunscrito?

Daniela: Hmm ... porque os lados tocam na circunferência.

Professora: Em quantos pontos? [questionando o grupo-turma].

Daniela: Cada lado num só ponto!

Professora: Como se designam esses pontos? [Colocou a questão para a Daniela, mas como não respondeu, voltou-se para o grupo-turma].

Juliana: São pontos de tangência. Professora: Como se caracterizam esses pontos?

Juliana: São pontos de tangência ... Estão nas rectas tangentes e também na circunferência.

A Daniela continuou com a apresentação do desenvolvimento da tarefa. No passo seguinte, construiu o que designou por «o nosso quadrado circunscrito a partir dos nossos pontos de intersecção F, G, H e I». Seguidamente, mostrou que a ordem com que se seleccionam os pontos para construir um polígono num ambiente de geometria dinâmico é importante para a construção do polígono que se pretende.

Terminada a construção do *Quadrado Maior*, a aluna iniciou a descrição da construção do *Quadrado Menor*, através da intersecção das diagonais do quadrado circunscrito à circunferência. Questionada sobre os fundamentos que lhe permitiam garantir a igualdade dos lados do quadrado inscrito obtido, a Daniela afirmou que os triângulos obtidos eram iguais (figura 3).

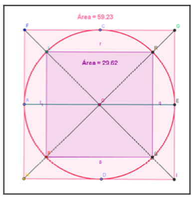


Figura 3.—Quadrados inscrito e circunscrito numa circunferência (Daniela)

Daniela: Os triângulos LOM, LOP, PON e MON são triângulos iguais porque têm os dois lados iguais, são raios, e o outro lado é também igual.
Professora: Como chegaste a essa conclusão, quanto ao terceiro lado? Daniela: Não sei, mas acho que são … ao olhar vê-se que são iguais.
Adriana: Os lados do quadrado têm um arco de 900, todos eles. Então são iguais.
Professora: Porquê?
Juliana: Acho que já sei … Não é porque as diagonais de um quadrado, ao se cruzarem no ponto O, formam um ângulo de 900? E como é um ângulo ao centro, então vai ter igual valor para o arco. Então os arcos têm todos 900.
Professora: Mas nós não queremos provar que os lados do quadrado são iguais… Já concluímos isso? [notou-se um murmurinho de fundo …] Se olhássemos isoladamente para cada um dos lados do quadrado e esquecêssemos os outros três [lados], podíamos dizer que cada um desses lados é …!
DANIELA: Stôra!!! É uma corda com um arco de 900. Professora: E …! Juliana: A arcos iguais correspondem cordas iguais.
De seguida, a Daniela enunciou a sua conjectura alargando-a para todos os polígonos regulares (figura 4).

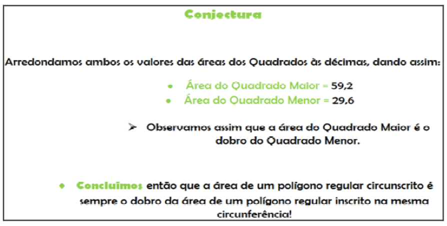


Figura 4.—Conjectura e conclusão da tarefa Quadrado Inscrito e Circunscrito na mesma circunferência (Daniela)

Professora: Acha que a conjectura que formulou é válida se, por exemplo, aumentarem ou diminuírem as medidas do lado do quadrado inscrito?
Daniela: Fica igual, experimentei com outras medidas e dá igual. […] A área do quadrado maior é o dobro da área do quadrado menor. É isto que é igual.
Uma outra aluna, a Adriana, pediu à professora para mostrar a sua exploração, tendo referido que tinha alcançado conclusões diferentes. Assim, a Adriana apresentou a sua investigação, no Quadro Interactivo, exploração essa que inclui o caso do quadrado e cinco contra-exemplos para os outros polígonos (figura 5).

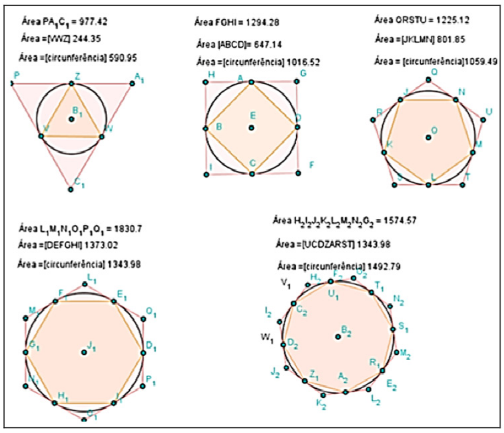


Figura 5.—Polígonos construídos no GeoGebra (Adriana)

A aluna apresentou, no Quadro Interactivo, as construções que realizou. Iniciou com o caso do quadrado e mostrou, por arrastamento, que independentemente dos valores que obtinha, a relação enunciada se mantinha. De seguida, percorreu as outras construções e mostrou que a relação entre cada polígono inscrito e o respectivo polígono circunscrito numa mesma circunferência já não se verificava.

Adriana: Fiz uma tabela com os valores [figura 6]. A área do quadrado inscrito é o dobro da área do quadrado circunscrito e esta é a área da circunferência [apontando para a tabela]. E fiz para os outros [polígonos] e não deu aproximadamente a área do quadrado [polígono] circunscrito, era sempre aproximada da área da circunferência para os outros polígonos.

Professora: E a conjectura?

Adriana: A relação entre a área de um quadrado circunscrito a uma circunferência e a área do outro quadrado inscrito na mesma circunferência é que a área de um quadrado circunscrito a uma circunferência é o dobro da área do outro quadrado inscrito na mesma circunferência.

Professora: E para os outros polígonos regulares?

Adriana: Pois. A relação entre a área de um polígono circunscrito a uma circunferência e a área do outro polígono inscrito é que a área do polígono circunscrito não é o dobro da área do polígono inscrito, mas em vez disso, aproxima-se da área da circunferência.

Polígonos	Área do polígono inscrito	Área do polígono circunscrito	Área da circunferência
Quadrado	334.03	668.61	525.12
Pentágono	801.85	1225.12	1059.49
Triângulo	418.88	692.82	173.21
Hexágono	848.44	1131.25	1343.98
Octógono	1492.79	1574.57	1343.98

Figura 6.—Tabela com os valores das áreas dos polígonos inscritos, circunscritos e das respectivas circunferências (Adriana).

Foi, ainda, objecto de atenção o trabalho de uma outra aluna, a Francisca, por ter superado o que tinha sido pedido nesta tarefa. A aluna iniciou a exposição do seu trabalho, realizado em formato de apresentação, com as definições de polígono circunscrito e inscrito numa circunferência. Posteriormente explorou a sua apresentação para responder à questão que colocou «Haverá alguma relação entre a área de um polígono inscrito e circunscrito na mesma circunferência?».

Francisca: Com recurso ao GeoGebra descobri que existe uma relação entre a área do polígono [quadrado] inscrito e circunscrito na mesma circunferência. As minhas conclusões foram que a área de um quadrado circunscrito é o dobro da área do quadrado inscrito na mesma circunferência, ou a área de um quadrado inscrito é metade da área do quadrado circunscrito da mesma circunferência. [Em simultâneo, a aluna ia apontando para a imagem construída no GeoGebra e ia lendo o texto da sua apresentação, salientado os valores das áreas (figura 7)].

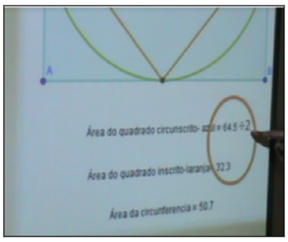


Figura 7.—Imagem da relação entre as áreas dos quadrados (Francisca).

Francisca: [...] Depois de descobrir essa relação, continuei para ver o que acontecia com os outros polígonos. Descobri que a relação do dobro entre as áreas dos polígonos só se aplica aos quadrados. Aqui [apontando para os triângulos] no triângulo não se aplica ... é diferente ... já não é o dobro. Depois, se começarmos por desenhar um triângulo inscrito e circunscrito a uma circunferência e formos aumentando o número de lados do polígono, triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, ..., apercebemo-nos que o espaço entre esses polígonos vai diminuindo.

Professora: Que espaço é esse?

Francisca: É o que eu vou explicar a seguir. A aluna mostrou as outras construções que realizou e que funcionaram como contra- exemplos para refutar a ideia que a relação enunciada se verifique para todos os polígonos (figura 12).

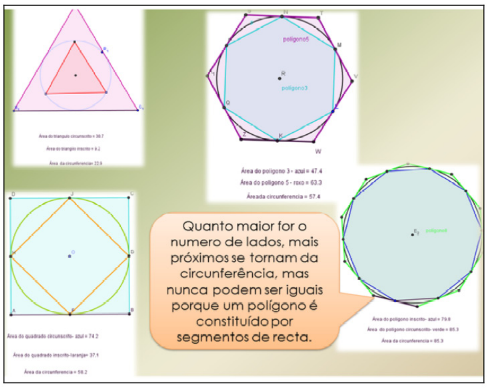


Figura 12.—Exemplos de polígonos inscritos e circunscritos numa circunferência (Francisca).

Francisca: Aqui [apontando para os triângulos inscrito e circunscrito numa circunferência], só temos três lados e este espaço é maior. Quando passamos para o quadrado [apontando para os quadrados inscrito e circunscrito numa circunferência], íamos ver que já era menor [apontando para o espaço entre os quadrados] do que aqui [apontando para o espaço entre os triângulos]. E se formos para estas figuras [apontando para o espaço entre os hexágonos e entre os decágonos] também já vemos que a diferença é grande. Se compararmos, por exemplo, o [caso do] decágono com o [caso do] triângulo, existe um pequeno espaço [apontando para a superfície de espaço existente entre os decágonos].

Professora: Como pode ser definido, matematicamente, esse espaço?

Francisca: Só se for ... Ahhh ... ou seja, quanto maior é o número de lados ...

Professora: Está a falar de uma superfície, não é? Uma parte do plano, uma porção do plano ... uma porção do plano entre ... polígonos.

Nesta fase da apresentação do trabalho, a aluna começa a não entender o objectivo das questões formuladas pela professora. Quando foi entrevistada, a aluna referiu o facto de estar a ficar baralhada com o que a professora pretendia. Para a aluna estava claro o que queria transmitir aos colegas e, como ainda não tinha terminado a sua exposição, sentiu necessidade de dar continuidade para conseguir mostrar a validade das suas afirmações.

Francisca: É o que está aqui [apontando para o balão laranja da figura 10]. Quanto maior for o número de lados, mais próximos se tornam da circunferência, mas nunca podem ser iguais porque um polígono é constituído por segmentos de recta [apontando para caso dos decágonos inscrito e circunscrito numa circunferência].

Organizei os dados numa tabela (figura 13) só [...] tive um lapso porque não pus aqui a área da circunferência, porque me esqueci.

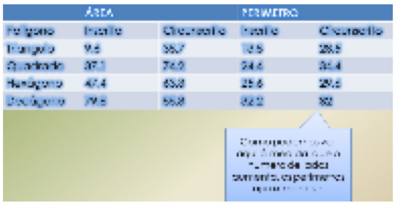


Figura 13.—Valores das áreas e perímetros de polígonos inscritos e circunscritos numa circunferência (Francisca).

A apresentação da Francisca foi posterior às exposições da Daniela e da Adriana. Deste modo, o lapso que a Francisca mencionou, durante a sua exposição, surgiu após uma reflexão dos trabalhos exibidos pelas suas colegas. Durante o decorrer da sua apresentação, a professora questionou a aluna sobre o motivo que a levou a considerar, na tabela, os perímetros dos polígonos.

Francisca: Eu coloquei os valores dos perímetros porque [...] eu não escrevi mas eu queria ver se havia alguma relação entre os perímetros [dos polígonos], mas não encontrei nenhuma [...] só encontrei que vai-se aproximando da circunferência.

Professora: Uma sugestão que lhe proponho é a de usar essa tabela e acrescentar uma coluna para as áreas dos círculos e outra para os perímetros da circunferência [...], talvez aí já consiga obter uma afirmação mais fundamentada.
Francisca: Pois stôra, era a conclusão que [...] quanto mais aumenta o número de lados, mais próximo fica do perímetro da circunferência.

Da análise das resoluções destes alunos, pode-se concluir que a Daniela limitou-se, simplesmente, a verificar a relação pedida para o caso do quadrado. Esta aluna apresentou um único exemplo, generalizou a propriedade para todos os polígonos regulares, isto é, não estudou um número suficiente de casos para poder extrapolar para o caso geral. Apesar da primeira parte do trabalho, constituída pela conjectura para os quadrados inscritos e circunscritos na mesma circunferência, ter a descrição de todos os procedimentos que conduziram à conjectura formulada, na parte final foi apresentada uma conclusão não fundamentada e que conduziu a um resultado incorrecto. A professora mencionou a constante necessidade dos alunos apresentarem os fundamentos necessários para validarem as suas afirmações, tal como tinha sido referido no início da exploração desta tarefa.

A Adriana, pelo contrário, formulou a conjectura e, através da modificação da figura, por arrastamento, confirmou que a relação se mantinha para quaisquer quadrados naquelas condições. Para mostrar que a relação não era válida para todos os polígonos regulares, esta aluna refutou a sua conjectura através de alguns contra-exemplos. Aqui, a recolha de evidências foi facilitada pelo uso de um programa de geometria dinâmica, visto como uma ferramenta poderosa na verificação de conjecturas verdadeiras e muito valiosas na construção de contra-exemplos para conjecturas falsas, como indica de Villiers (1997). A exploração deste trabalho não se revelou tão minuciosa como o trabalho da Daniela, pelo que, quando questionadas sobre esta situação, a Adriana mencionou que se tinha deparado com grandes dificuldades em passar para a forma escrita as reflexões que alcançou.

A Francisca foi um pouco mais além do que as suas colegas. Analisou os perímetros dos polígonos, tendo em cada polígono confirmado, por arrastamento do mesmo, que a relação que tinha construído entre os perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos com respectiva circunferência se mantinha válida, independentemente das medidas que fossem assumidas para os lados dos quadrados e, consequentemente, para o raio da circunferência.

Quando as conjecturas são questionadas, os alunos são levados à procura de novos argumentos. Como sugere de Villiers (2003), o simples procedimento de questionar os alunos sobre as razões da veracidade de um determinado resultado despertou, nos mesmos, uma curiosidade e um reconhecimento de que a verificação indutiva/experimental apenas confirma o resultado e não desenvolve o conhecimento nem a compreensão.

Conclusões

A consecução das tarefas que integram este estudo, conjuntamente com os recursos tecnológicos usados, permitiu criar condições para que os alunos formulassem e explorassem conjecturas geométricas. Caracterizadas como um conjunto de evidências com uma determinada regularidade, as explorações constituíram, assim, uma condição indispensável para os alunos conceberem afirmações. Em consonância com a linha de pensamento de Mason et al. (1982), emergiu a necessidade de verificar a veracidade dos resultados, estímulo que permitiu aos alunos, de acordo com de Villiers (2003), darem início ao processo de prova, caracterizado aqui como um misto de intuição, verificação quase-empírica e prova lógica, não necessariamente rigorosa.

Inicialmente, foi evidente a dificuldade manifestada pelos alunos no desenvolvimento de todo o processo de justificação de uma conjectura, processo este que conduziu os alunos à procura de argumentos que validassem a conjectura formulada, tal como sustentam Brocardo (2001), de Villers (2003), Healy e Hoyles (2001). Na linha de pensamento de Coelho e Saraiva (2002), as práticas pedagógicas usadas realçaram as interacções estabelecidas entre professor, alunos e AGD, e levaram o aluno a construir o próprio conhecimento. Com a familiarização com este tipo de práticas pedagógicas e com o decorrer do tempo, as dificuldades foram diminuindo. Para isso, muito contribuiu o uso do GeoGebra como um elemento mediador na construção do conhecimento matemático dos alunos. Tal como enfatiza Laborde (1997, 1998), a possibilidade de arrastamento de uma figura num AGD permitiu aos alunos explorar, rápida e dinamicamente, diferentes construções de uma mesma figura, novos ângulos, novos arcos, novas medidas, entre outros, orientando-os a obter conclusões sobre propriedades e relações geométricas. Os alunos seguiram, então, uma resolução geométrica referenciada por Laborde (1993), da qual consta a percepção natural das construções, a identificação dos elementos fixos e dos elementos variantes, e a elaboração de inferências a partir de informação visual.

De acordo com Boavida (2005), a argumentação pode-se desenvolver em diversos domínios, sendo que o que é apropriado num determinado domínio pode já não o ser noutro domínio. Através da análise destas duas tarefas, evidencia-se o desenvolvimento das vertentes discursiva, dialéctica e social da argumentação. A vertente discursiva, identificada no uso da linguagem natural como uma ferramenta de comunicação (Pedemonte, 2002), está patente nos diálogos desenvolvidos pelos alunos, nas duas tarefas que integram este artigo. A vertente dialéctica, entendida, pela mesma autora, como uma tentativa de justificação de uma ideia a partir do que se acredita ser verdade, também se identifica nas duas tarefas, embora na segunda tarefa se apresente com mais força, uma vez que se trata de uma tarefa de natureza investigativa. Por fim, a vertente social, visada como um conjunto de interacções que mobilizam vários protagonistas (Pedemonte, 2002), apresenta um carácter discursivo (Ballacheff, 1999), e revela-se com maior intensidade na primeira tarefa. Este aspecto é evidenciado pelas interacções emergentes na exploração do erro de uma das propostas de resolução que, como sugere Krummheuer (1998), promove um maior desenvolvimento do conhecimento matemático.

De uma forma geral, com a implementação deste tipo de tarefas e com o recurso ao GeoGebra, foram proporcionadas condições para que os alunos pudessem formular, testar e explorar as suas conjecturas. No entanto, são ainda notórias dificuldades na produção da prova matemática, situação que se observa com maior intensidade na primeira tarefa. Assim, da primeira para a segunda tarefa notou-se uma evolução na formulação de conjecturas, na apresentação de argumentos que as validem e, em casos pontuais, da necessidade de provar a sua validade.

Foram, também, sentidos alguns constrangimentos, mais especificamente na construção dos polígonos circunscritos a uma circunferência, devido, em parte, à falta de domínio de algumas ferramentas do GeoGebra, assim como algumas imprecisões nas medições das áreas dos polígonos construídos, factor que advém da escala de aproximação assumida pelo próprio programa.

Na generalidade e apesar de co-existirem, a alguns níveis, ideias divergentes, os AGD parecem influenciar positivamente tanto na concepção, como na forma de analisar e de argumentar. Segundo vários estudos (Brocardo, 2001; de Villiers, 2003; Healy & Hoyles, 2001; Jones, 1998), os AGD são ambientes propícios à descoberta de propriedades e de relações geométricas, favorecendo a aprendizagem, beneficiando a aquisição de conhecimentos e incluindo a produção de provas.

Alibert, D. & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. In David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215–230). Netherlands: Kluwer Academy Publishers.

Balacheff, N. (1999). Is argumentation an obstacle? Invitation to a Debate. In *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Acedido em 1 de Fevereiro, 2011, de http://eric.ed.gov/PDFS/ED435644.pdf.

Bell, A. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. Education Studies in Mathematics, 7, 23–40.

Bieda, K. N. (2010). Enacting Proof-Related Tasks in Middle School Mathematics: Challenges and Opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 41, No. 4, 351–382.

Boavida, A. M. (2005). A argumentação na aula de Matemática: Um olhar sobre o trabalho do professor. In J. Brocardo, F. Mendes, & A. M. Boavida (Eds.), *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 13–43). Setúbal: APM.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). Investigação qualitativa em educação — uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8.º ano*. Lisboa: APM.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood , T. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 99–122.

Coelho, I., & Saraiva, J. (2002). Tecnologias no Ensino/Aprendizagem da Geometria. Em M. J. Saraiva, M. I. Coelho & J. M. Matos (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem da Geometria*, (pp. 7–33). Covilhã: Secção de Educação Matemática e Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE).

De Villiers, M. (1997). The role of proof in investigue, computer-based geometry: some personal reflections. Em J. King e D. Schattschneider (Eds.), Geometry turned on — Dynamic software in learning, teaching, and research (pp. 15–24). Washington, D.C.: Mathematical Association of America (MAA).

De Villiers, M. (2003). *Rethinking Proof with the Geometr's Sketchpad*. Key Curriculum Press. Emeryville, CA: USA.

Douek, N. & Pichat (2003). From oral to written texts in grade I and the approach to mathematical argumentation. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA*, Volume 2 (pp.341–348). Honolulu: CRDG, College of Education of University of Hawai.

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics*, 9(1), 20–23.

Healy, L. and Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6, 3.

Jones, K. (1998): The mediation of learning within a dynamic geometry environment, In A. Olivier & K. Newstead (Eds.) Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 3, pp. 96–103). África do Sul.

Key Curriculum Press (1997). Discovering geometry. Berkley: Key Curriculum Press.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld. (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–269). Hillsdale, NY: Erlbaum.

Krummheuer, G. (1998). Formats of argumentation in the mathematics classroom. In H. Steinbring, M. G. B. Buss & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 2017–222). Reston: NCTM.

Laborde, C. (1993). The computer as part of learning environment: the case of Geometry. Em C. Keitel e K. Ruthen (Eds.), *Learning from computers: Mathematics Education and Tecnology* (pp.48–67). Berlim: Springer-Verlag

Laborde, C. (1997). La géométrie et les figures dynamiques à l' écran de l' ordinateur: Passages d'un monde à l'autre. In A. M. Boavida, A. Domingos, J.M. Matos, & M. Junqueira (Eds.), *Aprendizagens em matemática* (pp. 5–19). Lisboa, Portugal: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Laborde, C. (1998). Visual phenomena in the teaching /learning of geometry in a computer- based environment. Em C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*: An ICMI study, Vol. 5 (pp.

113–121). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers

Lakatos, I. (1976). Preuves et réfutations. Essais sur la logique de la découverte mathématique. Paris: Hermann.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Bristol: Addison-Wesley.

Matos, J. M., e Serrazina, L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM & IIE.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Pedemonte, B. (2002). Relation between argumentation and proof in mathematics: cognitive unity or break? In J. Novotná (Ed.), *Proceedings of European Research in Mathematics Education II* (pp. 70–80). Prague: Charles University, Faculty of Education.

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sence-makin: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J. F. Voss, D. N. Perkins & J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp. 311–343). Hillsdale, N. J. Lawrence Earlbaum Associates.

Yackel, E., & Cobb, P. (1994). *The development of young children's understanding mathematical argumentation*. Apresentação feita em AERA 1994.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.). Actas da 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 1-24). Utrecht: Utrecht University.

Whitenack, J., & Yackel, E., (2008). Construindo argumentações matemáticas nos primeiros anos: A importância de explicar e justificar ideias. *Educação e Matemática*, 100, 85–88.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in a mathematics classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 171–191.